Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО.

1. На плоскости Лобачевского, пересекая треугольник ABC трансверсалью $\beta\gamma\alpha$, имеем:

$$\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\alpha B}}{\mathrm{sh}\,\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\beta C}}{\mathrm{sh}\,\overline{\beta A}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\gamma A}}{\mathrm{sh}\,\overline{\gamma B}}=1. \tag{1}$$

В том случае, если вершина B идеальная и $B_a B_c$ общий перпендикуляр к двум сторонам, имеем:

$$\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\alpha B_c}}{\mathrm{sh}\,\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\beta C}}{\mathrm{sh}\,\overline{\beta A}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\gamma A}}{\mathrm{ch}\,\overline{\gamma B_a}}=-1; \tag{2}$$

в случае двух идеальных вершин AB:

$$\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\alpha B_c}}{\mathrm{sh}\,\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\beta C}}{\mathrm{ch}\,\overline{\beta A_c}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\gamma A_b}}{\mathrm{ch}\,\overline{\gamma B_a}}=-1; \tag{3}$$

в случае трех ABC:

$$\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\alpha B_c}}{\mathrm{ch}\,\overline{\alpha C_b}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\beta C_a}}{\mathrm{ch}\,\overline{\beta A_c}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\gamma A_b}}{\mathrm{ch}\,\overline{\gamma B_a}}=1. \tag{4}$$

2. Следует отметить, что верна и обратная теорема, т. е. при выполнении этого условия три точки α, β, γ лежат на одной прямой.

3. Обычным путем выводится отсюда аналогон теоремы Чевы. Если точку O соединить с вершинами треугольника ABC прямыми $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, то будем иметь в случае треугольника ABC с реальными вершинами:

$$\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\alpha B}}{\mathrm{sh}\,\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\beta C}}{\mathrm{sh}\,\overline{\beta A}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\gamma A}}{\mathrm{sh}\,\overline{\gamma B}}=-1; \tag{5}$$

в случае одной идеальной вершины A:

$$\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\alpha B}}{\mathrm{sh}\,\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\beta C}}{\mathrm{ch}\,\overline{\beta A_c}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\gamma A_b}}{\mathrm{sh}\,\overline{\gamma B}}=1; \tag{6}$$

в случае двух AB:

$$\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\alpha B_c}}{\mathrm{sh}\,\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\overline{\beta C}}{\mathrm{ch}\,\overline{\beta A_b}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\gamma A_c}}{\mathrm{sh}\,\overline{\gamma B_a}}=-1 \tag{7}$$

и наконец в случае трех A_1B_1C:

$$\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\alpha B_c}}{\mathrm{ch}\,\overline{\alpha C_b}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\beta C_a}}{\mathrm{ch}\,\overline{\beta A_c}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\overline{\gamma A_a}}{\mathrm{ch}\,\overline{\gamma B_a}}=1. \tag{8}$$

3. Из теоремы Чевы выводится, что *медианы* треугольника пересекаются в одной точке.

То же относится к *биссектрисам* (причем в случае идеальной вершины за биссектрису следует принимать перпендикуляр в середине общего перпендикуляра двух сторон). Наконец в случае *реальных* вершин можно утверждать пересекаемость высот треугольника в одной точке.

4. Теорема Менелая дает возможность доказать, что точки пересечения внешних биссектрис с противоположными сторонами лежат на одной прямой, а также доказать теорему: две прямые встречают стороны $\triangle ABC$ в точках (a, a') (b, b') (c, c'). Прямые bc', ca', ab' встречают стороны BC, CA, AB в точках α, β, γ. Утверждается, что точки α, β, γ лежат на одной прямой. Методом трансверсалей можно доказать и теорему Дезарга, так как она должна осуществляться на плоскости Лобачевского.

5. Можно дать *тригонометрическую* форму формулам 1 — 4, 5 — 8, аналогичную тем, которые имеем в Эвклидовой плоскости.