Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ.

О ПОЛУПРАВИЛЬНЫХ ТЕЛАХ.

§ 1. Введение.

Полуправильные тела понимаются в двояком смысле:

1. *Метрически*, как тела с однородными правильными вершинами, т. е. такими, в которых сходится одно и то же число *правильных*, но различных многоугольников в том же числе и в том же порядке.

2. *Топологически*, опуская условия правильности. Метрически полуправильные тела называются также архимедовыми. Мы здесь не будем говорить об интересной истории полуправильных тел, с которой связаны имена Паппуса [1], Лукки Пачиоли [2], Кеплера [3], а в позднейшее время Гирша [4], Каталана [5].

Гиршу принадлежит точное определение всех возможных типов полуправильных тел, Каталану — исследование *взаимных* полуправильных тел. За всем этим я отсылаю к прекрасной книге Брюкнера [6]. Настоящая же работа имеет своей целью исследование операций получения полуправильных тел из правильных.

В сущности то, что относится к трехмерному пространству, значительно более просто и является подготовительной работой к решению аналогичных проблем в четырехмерном. Насколько литература, относящаяся к трехмерным полиэдрам богата, настолько же бедна литература о гиперполиэдрах и это вполне естественно, ибо эвристические приемы здесь не основываются на непосредственной интуиции, процесс здесь гораздо сложней, это система *аналогизирования* интуиции, в которой психологически неизбежны ошибки, которые затем исправляются путем логических выводов и вычисления.

Имевший дело с четырехмерным пространством хорошо знает трудность передвижения в этой области.

ЧАСТЬ I.

ПОЛИЭДРЫ.

Глава 1-я. ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ ПОЛИЭДРЫ.

§ 2. Отсечение вершин плоскостью, не проходящей через ребро.

Переходя к способам получения из правильных тел — полуправильных, мы прежде всего приведем таблицу из Брюкнера.

При этом разъясним символику, которой мы будем широко пользоваться. Прежде всего L — число вершин, l — ребер и λ — граней многогранника. Затем $l(L)$ и $\lambda(L)$ — число ребер и число граней при вершине, причем очевидно $\lambda(L)=l(L)$.

Таким образом $l(\lambda)\cdot L(\lambda)$ — число сторон и вершин грани, причем опять $l(\lambda)=L(\lambda)$; при этом на основании известной формулы Эйлера $L-l+\lambda=2$.

Таблица полуправильных тел.

№№	$l'(\lambda)$	$l''(\lambda)$	$L(L,l')$	$\lambda(L,l'')$	λ'	λ''	L	l	λ
I	3	6	1	2	4	4	12	18	8
II	3	8	1	2	8	6	24	36	14
III	3	10	1	2	20	12	60	90	32
IV	4	6	1	2	6	8	24	36	14
V	4	n	2	1	n	2	$2n$	$3n$	$n+2$
VI	5	6	1	2	12	20	60	90	32
VII	3	4	1	3	8	18	24	48	26
VIII	3	4	2	2	8	6	12	24	14
IX	3	5	2	2	20	12	30	60	32
X	3	n	3	1	2	$2n$	2	$4n$	$2n+2$
XI	3	4	4	1	32	6	24	60	38
XII	3	5	4	1	80	12	60	150	92

№№	$l'(\lambda)$	$l''(\lambda)$	$l'''(\lambda)$	$\lambda(L,l')$	$\lambda(L,l'')$	$\lambda(L,l''')\lambda'$	λ''	λ'''	L	$l\lambda$
XIII	4	6	8	1	1	1 12	8	6	48	7226
XIV	4	6	10	1	1	1 30	20	12	120	18662
XV	3	4	5	1	2	1 20	30	12	60	12062

Первая операция получения полуправильного тела из правильного — это *отсечение вершин.*

Если мы хотим получить топологически полуправильное тело, то секущие плоскости можем проводить *как угодно*, но для метрически полуправильных тел мы должны проводить их перпендикулярно к *осям симметрии, проходящим через вершины.*

Число вершин, ребер и граней для первоначального правильного тела будем означать через L, l, λ, а для полуправильного — через $L^{\cdot\cdot}$, $l^{\cdot\cdot}$, $\lambda^{\cdot\cdot}$.

Мы должны выделить сперва *общий случай, когда пары секущих плоскостей не пересекаются* на ребре, а затем заняться *специальным* (для которого вместо $L^{\cdot\cdot}$, $l^{\cdot\cdot}$, $\lambda^{\cdot\cdot}$ будем брать $L^{\cdot}$, $l^{\cdot}$, $\lambda^{\cdot}$).

Так как при каждой вершине мы получаем вместо одной прежней вершины столько, сколько сходится в ней ребер или граней, то должны иметь:

$$L^{\cdot\cdot}=Ll(L),\ L^{\cdot\cdot}=Ll(\lambda). \qquad (1_L)$$

Что касается до ребер $l^{\cdot\cdot}$, то в число их входят старые и новые при вершинах, так что:

$$l^{\cdot\cdot}=l+L\lambda(L)=l+Ll(\lambda). \qquad (1_l)$$

Легко видеть, что:

$$\lambda^{\cdot\cdot}=\lambda+L \qquad (1_\lambda)$$

и что формулы (1) вполне согласуются с формулой Эйлера:

$$L^{\cdot\cdot}-l^{\cdot\cdot}+\lambda^{\cdot\cdot}=2. \qquad (2)$$

В вершинах получаемого полуправильного тела сходятся два многоугольника с $2l(\lambda)$ сторонами, получаемыми из граней правильного P, и один с $l(L)$ сторонами при вершине.

Для специального случая мы имеем слияние пар вершин и ребер, т. е. из $L^{\cdot\cdot}$ должны отнять l вершин, затем еще исчезновение ребер полуправильного тела $P^{\cdot}$ на ребрах P, так что:

$$L^{\cdot} = Ll(L) - l, \tag{3_L}$$

$$l^{\cdot\cdot} = L\lambda(L), \tag{3_l}$$

$$\lambda^{\cdot} = \lambda + L. \tag{3_λ}$$

Здесь мы при вершинах имеем уже 2 многоугольника не с $2l(\lambda)$, а с $l(\lambda)$ сторонами и два с $l(L)$ сторонами.

Обратимся теперь к рассмотрению каждого из правильных многогранников P_4 (тетраэдра), P_6 (гексаэдра), P_8 (октаэдра), P_{12} (додекаэдра) и P_{20} (икосаэдра).

Отсечение вершин P_4 дает $P_4^{\cdot\cdot}$ в общем случае. Это по таблице Брюкнера тело I.

При специальном выборе секущих плоскостей имеем $P_4^{\cdot}$, причем очевидно $P_4^{\cdot} = P_8$ — октаэдр, уже не полуправильное, *а правильное* тело.

Из P_6 получаем $P_6^{\cdot\cdot}$ по таблице II тело (черт. 4)* и специальный случай $P_6^{\cdot}$ — тело VIII (черт. 3).

Из P_8 получаем $P_8^{\cdot\cdot}$ — тело IV (черт. 4) и $P_8^{\cdot} \equiv P_6^{\cdot}$ — тело VIII (черт. 3).

Из P_{12} получаем $P_{12}^{\cdot\cdot}$ — тело III (черт. 7) и $P_{12}^{\cdot}$ — тело IX.

Наконец из P_{20} получаем $P_{20}^{\cdot\cdot}$ — тело VI (черт. 2) и $P_{20}^{\cdot} \equiv P_{12}^{\cdot}$ — тело IX (черт. 1).

§ 3. Вторичное отсечение вершин.

Естественно возникает вопрос о результатах *вторичного* отсечения. Вообще он ведет к полуправильным телам, имеющим не один, а два типа вершин.

Если обозначить через $L^{(\cdot\cdot)\cdot\cdot}$, $l^{(\cdot\cdot)\cdot\cdot}$, $\lambda^{(\cdot\cdot)\cdot\cdot}$ числа вершин, ребер и граней после вторичного отсечения, то не трудно видеть, что:

$$L^{(\cdot\cdot)\cdot\cdot} = 3L^{\cdot\cdot} = 3L \cdot l(L), \tag{4_L}$$

$$l^{(\cdot\cdot)\cdot\cdot} = l^{\cdot\cdot} + 3L^{\cdot\cdot} = l + 4L \cdot l(\lambda), \tag{4_l}$$

$$\lambda^{(\cdot\cdot)\cdot\cdot} = \lambda^{\cdot\cdot} + L^{\cdot\cdot} = \lambda + L + L \quad l(\lambda). \tag{4_λ}$$

Так как в вершинах *общего* полуправильного тела будем иметь n-угольники, а в гранях — удвоенное число сторон в сравнении с P, то будем иметь не один, а два рода вершин:

1. $L_1^{(\cdot\cdot)\cdot\cdot} = L \cdot \lambda(L)$, в которых сходятся треугольники с 2 многоугольниками, с $4l(\lambda)$ сторонами.

2. $L_2^{(\cdot\cdot)\cdot\cdot} = 2L \cdot \lambda(L)$, в которых сходятся треугольники и многоугольник с $2l(L)$ сторонами и многоугольник с $4l(\lambda)$ сторонами.

Но при этом возможен специальный случай ($L^{(\cdot)\cdot\cdot}$, $l^{(\cdot)\cdot\cdot}$, $\lambda^{(\cdot)\cdot\cdot}$), когда пересечение новых секущих плоскостей оказывается на ребре. Тогда происходит понижение числа вершин на $l^{\cdot\cdot}$ и уменьшение вдвое сторон в гранях $P^{(\cdot\cdot)\cdot\cdot}$.

Такое же вторичное отсечение вершин мы можем произвести и в полуправильных телах $P^{\cdot}$, что дает полуправильные тела.

* Чертежи см. в конце статьи.

Общие формулы будут следующие:

$$L^{(\cdot)\cdot\cdot} = L^{\cdot} \cdot l(L) = 4\,[L \cdot l(L) - l], \qquad (2_L^{\cdot\cdot\cdot})$$

$$l^{(\cdot)\cdot\cdot} = l^{\cdot} + L^{\cdot}\, l(L) = L \cdot \lambda(L) + 4\,[Ll(L) - l], \qquad (2_l^{\cdot\cdot\cdot})$$

$$\lambda^{(\cdot)\cdot\cdot} = \lambda^{\cdot} + L^{\cdot} = \lambda + L + L \cdot \lambda(L). \qquad (2_\lambda^{\cdot\cdot\cdot})$$

Не трудно видеть, что вторичное отсечение вершин приводит VIII тело, т. е. $P_6^{\cdot}$, к XIII (черт. 6).

Таким образом, тело $P_{12}^{(\cdot)\cdot\cdot} \equiv P_{20}^{(\cdot)\cdot\cdot}$ — это тело XIV (черт. 8).

Следует отметить, что это *топологически полуправильные* тела. В самом деле правильный шестиугольник получаем, деля стороны треугольника на 3 равные части и соединяя точки деления. Но таким образом не получается из правильного пятиугольника правильный десятиугольник.

Это дает специальный случай, т. е. когда вторичные секущие плоскости пересекаются на ребрах $P^{\cdot}$. Не трудно видеть, что тело $P_{12}^{(\cdot)\cdot}$ будет XV (черт. 9) в таблице Брюкнера, *а тело* $P_6^{(\cdot)\cdot}$ — *VII* (черт. 5).

Третичное сечение здесь приводит уже к *полуправильным* телам.

§ 4. Отсечение вершин плоскостями, проходящими через две вершины.

Следует отметить получение из полуправильных тел сечениями, проходящими через пары вершин, опять тел полуправильных.

Таким образом из тела XIII можно получить тело XI, т. е. из $P_6^{(\cdot)\cdot\cdot}$ получить тело $P^{(\cdot)\cdot\cdot-}$, о котором мы еще не говорили. А именно, следует через диагонали квадратов грани и вершины *8-угольника, уже не принадлежащего квадрату*, проводить плоскости, которые, срезывая вершины, будут образовывать грани.

Совершенно таким же образом мы можем получить из XIV тела ($P_{12}^{(\cdot)\cdot\cdot}$) тело XII в таблице Брюкнера; мы будем его означать через $P^{(\cdot)\cdot\cdot-}$. Следует обратить внимание, что мы здесь получаем только топологически полуправильное тело. Треугольники будут *равнобедренными, но не равносторонними.*

Особенно интересным является случай получения из полуправильного тела — правильного с помощью такой операции. Взяв тело $P_8^{\cdot\cdot}$, т. е. по таблице IV с помощью плоскости, проведенной через диагонали квадратов и вершины их, получаем *топологически* правильное тело 20-гранное с треугольными вершинами, в котором 6 треугольников правильных, а другие 3 только равнобочные, так что:

$$P^{(\cdot)\cdot\cdot-} \equiv P_{20}.$$

§ 5. Комбинации.

Употребляя кристаллографическую терминологию и имея ввиду, что срезывающие плоскости мы можем рассматривать, как грани правильного многогранника, можно сказать, что:

$P_4^{\cdot\cdot}$ и $P_4^{\cdot}$ комбинация двух P_4,

$P_8^{\cdot\cdot} \cdot P_6^{\cdot\cdot}$ и $P_8^{\cdot} \equiv P_6^{\cdot}$ комбинация P_6 и P_8,

$P_{12}^{\cdot\cdot}$, $P_{20}^{\cdot\cdot}$ и $P_{12}^{\cdot} \equiv P_{20}^{\cdot}$ комбинация P_{12} и P_{20},

$P_8^{(\cdot)\cdot\cdot} \equiv P_6^{(\cdot)\cdot\cdot}$, т. е. XIII можно тоже рассматривать как комбинации (P_8, P_6) и еще P_{12}.

Так как число вершин у $P^{\cdot}_{12} \equiv P^{\cdot}_{20}$ равно 30, а среди полуправильных тел нет 30-гранника, то $P^{(\cdot)\cdot\cdot}_{20} \equiv P^{(\cdot)\cdot\cdot}_{12}$ уже не получаются в форме комбинаций. Конечно, *приводимые* нами в комбинациях многогранники являются только *топологически* правильными.

§ 6. Срезывание ребер.

Переходим к операции срезывания ребер. Для получения метрически полуправильных тел следует брать секущие плоскости параллельно ребрам под соответствующими углами к граням.

Следует различать *общий* и *специальный* случаи.

В общем случае мы получим следующие формулы для числа вершин, ребер и граней, получаемых из правильных тел срезыванием вершин, соединенным с срезыванием ребер:

$$L^{\cup} = 2L^{\cdot\cdot} = 2L \cdot l(L), \tag{5$_L$}$$

$$l^{\cup} = 2l^{\cdot\cdot} = 2l + 2L \cdot \lambda(L), \tag{5$_l$}$$

$$\lambda^{\cup} = \lambda^{\cdot\cdot} + l = \lambda + L + l. \tag{5$_\lambda$}$$

Мы имеем здесь полуправильные тела с вершинами, в которых сходятся: 1) многоугольник с $2l(L)$ сторонами, 2) многоугольник с $2l(\lambda)$ сторонами и 3) квадрат.

При специальном сечении, когда 2 секущие плоскости, параллельные ребру и плоскости, отсекающие вершину, пересекаются на грани, получаем вместо формулы (5):

$$L^{\cup-} = L^{\cdot\cdot} = L \cdot l(L), \tag{6$_L$}$$

$$l^{\cup-} = l^{\cdot\cdot} + l = 2l + L \cdot l(\lambda), \tag{6$_l$}$$

$$\lambda^{\cup-} = \lambda^{\cdot\cdot} + l = \lambda + L + l. \tag{6$_\lambda$}$$

В вершинах тогда сходятся: 1) многоугольник с $l(L)$ сторонами, 2) многоугольник с $l(\lambda)$ сторонами и 3) квадрат.

Из P_4 такой операцией получается IV тело, т. е. $P^{\cdot}_8$, $P^{-}_4 \equiv P^{\cdot\cdot}_8$, а в специальном случае — VIII:

$$P^{\cup-}_4 \equiv P^{\cdot}_8.$$

Из P_6 получаем XIII тело, т. е. $P^{\cup-}_6 \equiv P^{(\cdot)\cdot\cdot}_6 \equiv P^{(\cdot)\cdot\cdot}_8$, а в специальном случае VII, т. е. $P^{\cup-}_6 \equiv P^{(\cdot)\cdot}_6 \equiv P^{(\cdot)\cdot}_8$.

Из P_8 получаем те же тела $P_6 \equiv P^{\cup}_8$, $P^{\cup-}_6 \equiv P^{\cup-}_8$.

Из P_{12} и P_{20} получаем тела XIII и XV, те же, что:

$$P^{\cup}_{12} \equiv P^{\cup}_{20} \equiv P^{(\cdot)\cdot\cdot}_{12} \equiv P^{(\cdot)\cdot\cdot}_{20}.$$

Можно ли при надлежащем выборе секущих плоскостей получать *метрически*-полуправильные тела? На это следует ответить положительно.

Из совершенно элементарных соображений получается:

$$y = a - 2x,$$

$$y = x - \frac{y}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

где α угол между сторонами треугольника, так что:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Решая уравнение, имеем:

$$y = \frac{\sin\frac{a}{2}}{3\sin\frac{\alpha}{2}+2}\,a = \frac{a}{r} \text{ и } x = \frac{3a}{r}.$$

Совершенно также для специального случая получаем:

$$y = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{2+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{5} \text{ и } x = \frac{y}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2a}{5}.$$

Таким же образом устанавливается возможность получения метрически полуправильного тела и для

$$P_{12}^{\smile} \equiv P_{20}^{\smile} \text{ и } P_{12}^{\smile -} \equiv P_{20}^{\smile -}.$$

§ 7. Скашивание.

Тела XI (черт. 14) и XII (черт. 12) получаются еще с помощью следующей операции из тел VII и XV.

Эта операция применяется только к таким телам, которые кроме n-угольников своими гранями имеют еще треугольники и прямоугольники (квадраты).

В теле VII мы поворачиваем в их плоскостях те квадраты, которые находятся в плоскости первоначального тела P. Тогда вместе с тем *сгибаем* другие квадраты, обращая их в треугольники.

То же делаем и с XV, в котором вращать приходится 5-угольники.

В обеих случаях квадраты разбиваются на треугольники, и мы получаем тело, которое указано в таблице.

Таким образом, полученные из P многогранники будем означать через $P^{(\cdot)\cdot\angle}$, тогда можем написать:

$$P_6^{(\cdot)\cdot\cdot -} \equiv P_6^{(\cdot)\cdot\angle},\quad P_8^{(\cdot)\cdot\cdot -} \equiv P_8^{(\cdot)\cdot\angle},$$
$$P_{12}^{(\cdot)\cdot\cdot -} \equiv P_{12}^{(\cdot)\cdot\angle},\quad P_{20}^{(\cdot)\cdot\cdot -} \equiv P_{20}^{(\cdot)\cdot\angle}.$$

Здесь следует сказать несколько слов о *неопределенно* полуправильных телах, стоящих в таблице Брюкнера под номерами V (архимедова призма) и X (архимедова антипризма) (черт. 13).

Первая ограничена многоугольником со сколь угодным числом сторон, с плоскостями параллельными и со сторонами взаимно параллельными и параллелограммами (для метрических полуправильных тел — квадратами), соединяющими их стороны. Скашивание поворотом оснований и разбиением параллелограммов на треугольники приводит к призматоиду — антипризме. Можно поэтому означать через Π_n и призму; антипризму означать через $\Pi_n^{\angle}$.

§ 8. Псевдоправильное тело.

Следует обратить внимание, что в определение полуправильного тела входит требование не только одинакового *числа* сходящихся в вершинах граней, но и одинакового порядка.

Тела, не удовлетворяющие второму требованию, не следует считать полуправильными.

Тело VIII, т. е. P_6^{-}, имеет то же число граней определенного рода сходящихся в вершине, как следующее: стороны треугольника соединя ются квадратами со сторонами правильного шестиугольника через один, а вершины — треугольниками. Затем такое же соединение производится сторон шестиугольника со сторонами другого треугольника, имеющего стороны равные и параллельные сторонам первого.

Тогда ясно, что в каждой вершине сходится 2 треугольника и 2 квадрата, но при этом имеется 2 рода вершин: 6, в которых порядок такой: 4-угольник, 3-угольник, 4-угольник, 3-угольник и 6, в которых порядок иной: 4-угольник, 4-угольник, 3-угольник, 3-угольник.

Можно сказать, что это тело получается путем разложения P_8 вращением пар граней так, что образуются треугольные щели, заполняемые потом гранями (черт. 28) и путем отсечения вершин у бипирамиды (черт. 31).

Отсечение вершин у псевдоправильного тела дает тела не с двумя, а с тремя родами 16 вершин (4, 8, 6), (4, 8, 8), (4, 6, 6).

Глава 2-я. ВЗАИМНЫЕ ПОЛИЭДРЫ.

§ 9. Определение полиэдров.

Взаимно полуправильными телами мы называем такие, в которых *грани*, а не вершины, однородны, т. е. вершины таковы, что в них сходятся только правильные *многоугольники*, причем всегда в том же числе и расположены они в том же порядке.

Конечно, и здесь следует различать *топологически* взаимно полуправильные многогранники от *метрически* полуправильных. В последнем случае вводится требование *правильности вершин*; что касается до многоугольников, служащих гранями, то они являются неправильными.

Здесь следует напомнить, что взаимным телом с тетраэдра является тетраэдр $\underline{P}_4 \equiv P_4$; гексаэдра — октаэдр и обратно, додекаэдра — икосаэдр и обратно: $\underline{P}_8 \equiv P_6$, $\underline{P}_6 \equiv P_8$, $\underline{P}_{12} \equiv P_{20}$, $\underline{P}_{20} \equiv P_{12}$.

Затем взаимной отсечению операцией (получаемой заменой плоскости, точкой и обратно) является насаживание на грани пирамиды. Берется точка вне грани и соединяется с вершинами многогранника, затем через прямые соединения проводятся плоскости. Отсечению ребра отвечает насаживание на ребро (соединяющее треугольные грани) 4-угольной пирамиды (черт. 26, 27).

Точка вне ребра соединяется с 4 вершинами прилегающих друг к другу треугольных граней.

Приведенная в § 2 таблица и теперь годится, только следует произвести в ней следующую замену: L на $\underline{\lambda}$, l на $\underline{l}$ и λ на $\underline{L}$. Затем $\lambda(L)$ на $L(\underline{\lambda})$, $l(L)$ — $l(\underline{\lambda})$, $l(\lambda)$ — $l(\underline{L})$, $L(\lambda)$ — $\lambda(\underline{L})$.

§ 10. Насаживание на грани пирамид.

Мы укажем, какие взаимно полуправильные тела получаются насаживанием на грани их тел правильных. Прежде всего *пирамидальный* тетраэдр из P_4 (черт. 15).—Это тело взаимное 1 в брюкнеровской таблице. Затем из P_6 *пирамидальный куб* (черт. 14), тело взаимное IV, из P_8 *пирамидальный октаэдр* (черт. 18) тело взаимное II, пирамидальный додекаэдр тело взаимное VI и , наконец, из P_{12} *пирамидальный икосаэдр* — тело взаимное III.

Специальный случай будет тогда, когда прямая, соединяющая вершины насаживаемых *пирамид*, пересекает ребро $\underline{P}$; тогда 2 грани, принадлежащие 2 различным пирамидам, сливаются в одну грань.

Из тетраэдра $\underline{P}_4$ получается, очевидно, тоже тетраэдр:

$$\underline{P}_4 \equiv P_4.$$

Взяв $\underline{P}_8 \equiv P_6$ или $\underline{P}_6 \equiv P_8$, мы получаем тело, взаимное VIII (ромбический додекаэдр) (черт. 16).

Взяв $\underline{P}_{12} \equiv P_{20}$ или $\underline{P}_{20} \equiv P_{12}$, получаем 30-гранный ромбоэдр — тело взаимное IX.

§ 11. Насаживание на ребра.

Насаживание на ребра дает следующие многогранники. Взяв пирамидальный тетраэдр, против ребра берем точку и соединяем ее с вершинами P_4 на этом ребре P_4 и с вершинами $\underline{P}_4^{\cdot\cdot}$, лежащими против грани P_4. В общем случае мы получаем тело взаимное IV — *пирамидальный гексаэдр* (черт. 17). Когда пирамида снижается в плоскость, то получаем гексаэдр.

Но не этот случай, а следующий является взаимным телу, дающему $P^{\smile -}$. Для него происходит слияние SOC и $S'OC$ в одну плоскость. Мы получаем тогда ромбический додекаэдр — тело взаимное VIII.

Общим случаем для $\underline{P}_6 \equiv P_8$ и $\underline{P}_8 \equiv P_6$ является образование тела взаимного XIII с 48 гранями и с 4-угольными вершинами (черт. 20), т. е. того тела, из которого выводятся все формы, полногранные кубической системы.

Первым специальным случаем является обращение его в ромбический додекаэдр, вторым — в тело взаимное VII — трапецоидальный 24-гранник, или икоситетраэдр (черт. 19).

Таким же образом $\underline{P}_{12} \equiv P_{20}$ и $\underline{P}_{20} \equiv P_{12}$ дают в общем случае тело взаимное XIV — это 120-гранник с 4-угольными гранями.

Специальным случаем является тело взаимное IX — *30-гранный ромбоэдр* и взаимное XV — 60-гранник с гранями-*дельтоидами*.

§ 12. Специального типа наложение пирамид.

Операции срезывания вершин плоскостями, проходящими через 2 вершины, отвечает операция насаживания пирамиды из точки пересечения 2 пар граней пирамиды, насаженной на ребро, и одной грани пирамиды, насаженной на грань первоначального правильного тела.

Таким образом, из тела $\underline{P}_6^{\smile} \equiv \underline{P}_8^{\smile}$ получается тело взаимное XIII — 60-гранное с 5-угольными гранями.

Из $\underline{P}_{12}^{\smile} \equiv \underline{P}_{20}^{\smile}$ получается взаимное XI тело, т. е. 24-гранник с 5-угольными гранями (это гироэдр) (черт. 21).

Особенно интересным является приведение этой операции $\underline{P}_4^{(\cdot)\cdot\cdot}$ к $P_{12} \equiv \underline{P}_{20}$ — додекаэдру.

§ 13. Скручивание.

Операцией, взаимной скашиванию, является *скручивание*. Легче всего выясняется сущность этой операции на *неопределенных* взаимно полуправильных телах (взаимных V и X).

Первым телом, очевидно, является *бипирамида* (черт. 10), вторым — тело того типа, как трапецоэдрическая гемиэдрия гексогональной системы (черт. 11).

Из бипирамиды это тело получается поворотом в различные стороны около оси составляющих биопирамиду пирамид с продолжением грани последних.

Тогда мы на ребре каждой получим по вершине (точки пересечения 2 граней одной пирамиды и одной — другой) и вершин будет вдвое более, чем ребер пирамиды.

Если мы теперь возьмем $P^{\cup}_{\leftarrow 6}-$, представляющий так называемый трапецоэдр (черт. 24), то совершенно такой же операцией, принимая за вращающиеся 6 из числа 4-гранных вершин, мы приводим каждую из остающихся четырехгранных вершин к 2 трехгранным.

Получается 6 четырехгранников 3 с $4 \times 8 = 32$ трехгранных вершин. Грани становятся *5-угольными.* Это тело — взаимное XI.

Точно таким же образом этой операцией тело $\underline{P}^{\cup}_{12}- \equiv P^{\cup}_{20}-$ приводим к телу взаимному XII.

§ 14. Взаимно-псевдо-полуправильные тела.

Чтобы построить такое тело, берем 6-угольную призму, вписываем в ее основание треугольники и на них накладываем треугольные пирамиды.

Продолжая грани, срезываем вершины 6-угольной призмы. Мы будем иметь гранями у получаемого многогранника 4-угольники двух типов: *дельтоидного* и *трапециодального* с различным порядком однородных вершин (черт. 30).

В первых — 4-гранные, 3-гранные, 4-гранные, 3-гранные; во вторых — 4-гранные, 4-гранные, 3-гранные, 3-гранные.

При общем положении секущих плоскостей и форме 6-угольной призмы получается только топологически-полуправильное тело.

Но мы можем двумя параметрами: 1) углом наклонения граней прямой прямоугольной призмы α и 2) углом между сторонами основания при отсекаемой вершине призмы β распорядиться так, чтобы углы при вершинах получаемого этой операцией многогранника оказались правильными.

§ 15. Получение отсечением вершин из взаимно-полуправильных полуправильных тел.

Интересно отметить возможность получения из некоторых взаимно-полуправильных тел — тел полуправильных. Это будет для тех, у которых ребра *однородны, т. е. все соединяют только двух типов разнородные вершины (взаимные им тогда будут иметь ребра, в которых сходятся двух типов разнородные грани).*

Это тела:

$\underline{P}^{\cdot}_{6} \equiv \underline{P}^{\cdot}_{8}$, т. е. взаимное VIII и $\underline{P}^{\cdot}_{12} \equiv \underline{P}^{\cdot}_{20}$, взаимное IX.

Отсечением вершин они сводятся к VII и XV. Взаимная операция состоит в получении тел, взаимных этим последним, т. е. $\underline{P}^{\cup}_{6}- \equiv \underline{P}^{\cup}_{8}-$ и $P^{\cup}_{12}- \equiv P^{\cup}_{20}-$ наложением пирамидок на грани $P^{\cdot}_{6} \equiv P^{\cdot}_{8}$ и $P^{\cdot}_{12} \equiv P^{\cdot}_{20}$.

Глава 3-я. КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ И ВЗАИМНО-КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ.

§ 16. Слияние пар граней.

Полученные нами тела $\underline{P}^{\cdot\cdot}_{4}$, $\underline{P}^{\cdot\cdot}_{6}$, $\underline{P}^{\cdot\cdot}_{8}$, $\underline{P}^{\cdot}_{4}$, $\underline{P}^{\cdot}_{0}$, $\underline{P}^{\cup}_{8}-$, $\underline{P}^{\cup}_{4}$, $\underline{P}^{\cup}_{8} \equiv \underline{P}^{\cup}_{6}$, $\underline{P}^{\cup}_{4}- \equiv \underline{P}^{\cup}_{8}-$ представляют *кристаллографические* формы.

Все они получаются из основного 48-гранника с помощью особого рода *кристаллографических* операций. Этот основной 48-угольник получается с помощью проведения в каждом из 8 координатных углов 6 плоскостей:

$$(1, m, n),\ (1, n, m),\ (m, 1, n),\ (m, n, 1),\ (n, 1, m) \text{ и } (n, m, 1),$$

отсекающих на осях отрезки, означенные в скобках, и таким образом определяемые уравнениями $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$ и т. д.

Если мы будем стоять на чисто-топологической точке зрения, то плоскости следует проводить только с условием пересечения 6 в одной точке координатного угла, 6 — в концах осей и 4 — на *осях*.

Первая операция состоит в *слиянии граней*, с помощью нее из 48-гранника получается икоситетраэдр — это тело $P_6^{\cup -}\equiv P_8^{\cup -}$, взаимное VII в таблице Брюкнера.

Слияние другого рода граней приводит к пирамидальному октаэдру, т. е. $\underline{P}_6^{\cdot\cdot}$. Слияние пар граней в этом теле — к $P_8^{\cdot}$ (ромбическому додекаэдру). Наконец, слияние пар граней 3-й категории ведет к пирамидальному кубу, т. е. к $\underline{P}_8^{\cdot\cdot}$, а слияние пар граней в последнем — к $\underline{P}_6^{\cdot}\equiv\underline{P}_8^{\cdot}$

§ 17. Гемиэдрия.

Другая кристаллографическая операция состоит в исключении некоторых совокупностей граней и продолжении остальных до их пересечения, причем предполагается пересечение продолженных граней в одной точке.

Такого рода операция обращает основной 48-гранник *в преломленный пирамидальный тетраэдр* — тело с топологической точки зрения, аналогичное пирамидальному кубу, т. е. $\underline{P}_8^{\cdot\cdot}$ (черт. 23).

Этой же операцией икоситетраэдр обращает в пирамидальный тетраэдр $\underline{P}_4^{\cdot\cdot}$ (тело, взаимное I), а пирамидальный октаэдр $\underline{P}_6^{\cdot\cdot}$ в тело $P_8^{\cdot}$ (взаимное VIII).

Гексогональная гемиэдрия, исключая из пирамидального гексаэдра $\underline{P}_8^{\cdot\cdot}$ треугольные грани, имеющие общими только вершины, дает пентогональный додекаэдр $\underline{P}_{20}\equiv P_{12}$ (черт. 22).

Такая же операция для 48-гранника представляет гироэдрическую гемиэдрию и дает гироэдр — тело с 5-угольными гранями с одной 4-гранной и тремя 3-гранными вершинами. Это тело, взаимное XI, а именно $\underline{P}_6^{\cup}\equiv\underline{P}_8^{\cup}$.

Наконец, тетраэдр состоит из двойной тетраэдрической гемиэдрии и в применении к основному 48-граннику дает тело, аналогичное $\underline{P}_{20}$ (додекаэдру).

§ 18. Слияние пар вершин.

Понятием взаимным основному 48-граннику является 48-вершинник. В каждом координатном угле берется плоский 6-угольник и пара вершин одного соединяется прямыми, лежащими в одной плоскости, с парами другого.

Получается 26-гранник с 6, 4, 8-угольными гранями. Не трудно в нем видеть тело XIII $P_6^{\cup}\equiv P_8^{\cup}$ (черт. 8).

Слиянием вершин (*a*, *в*) (черт. 14) мы приводим это тело к $P_6^{\cup -}\equiv$ $\equiv P_8^{\cup}$, т. е. к VII (24-гранник). Но слияние *b* с *d* дает тело II (14-гранник), т. е. $P_6^{\cdot\cdot}$. Наконец, слиянием *b* с *c* — тело $P_8^{\cdot\cdot}$ (14-гранник), т. е. IV, а слияние вершин у последнего приводит к $P_8^{\cdot}\equiv P_6^{\cdot}$.

§ 19. Взаимно-гемиэдрия.

Операция взаимная гемиэдрия состоит в исключении вершин и соединении прямыми (и плоскостью, через них проходящей) остающихся вершин.

Основной 48-вершинник обращается такой операцией $P_8^{\cdot\cdot\cdot}$, т. е. в октаэдр с отсеченными вершинами $P_6^{\cup -} \equiv P_8^{\cup -}$; обращается в $P_4^{\cdot\cdot\cdot}$, т. е. тело I ($P_6^{\cdot\cdot\cdot}$) обращается в $P_6^{\cdot}$.

Операция взаимно-пентагональной гемиэдрии обращает $P_8^{\cdot\cdot}$ в икосаэдр, а операция, взаимная гироэдрической гемиэдрии, 48-вершинник в $P_6^{\cup} \equiv P_8^{\cup}$.

Двойное применение взаимной тетраэдрической гемиэдрии приводит основной 48-гранник к телу, аналогичному P_{20}.

ЧАСТЬ II.

Глава 1-я. ПОЛИЭДРОИДЫ.

§ 1. Правильные и полуправильные тела в четырехмерном пространстве.

Мы прежде всего напоминаем о давно известном результате: о существовании 6 правильных тел в четырехмерном пространстве, причем результат этот понимается не только в *топологическом*, но и *метрическом* смысле [8].

Мы вводим следующие обозначения: L — число вершин, l — ребер, λ — граней, $\bar{\lambda}$ — гиперграней, затем $l(L)$, $\lambda(L)$, $\bar{\lambda}(L)$ — число ребер, граней и гиперграней, сходящихся в вершине; $\lambda(l)$, $\bar{\lambda}(l)$ — число граней и гиперграней, сходящихся в ребре и $\bar{\lambda}(\lambda)$ — удвоенное число гиперграней, сходящихся на грани. Далее $\lambda(L, \bar{\lambda})$, $l(L, \bar{\lambda})$ — числа граней и ребер, принадлежащих вершине в гиперплоскости.

Приводим таблицу правильных тел с их элементами из Жуффре.

Далее даем, может быть не совсем подходящее, название: *полуправильные гипергранники*, или *гиперполиэдры*, но хорошо подчеркивающее аналогии с соответствующими стереометрическими объектами: телам с *однородными* вершинами в том смысле, что в каждой сходится одинаковое число гиперграней и граней, а также и рёбер при этом в том же порядке.

Конечно, здесь им можно придавать *топологический* и *метрический* смыслы.

Полуправильные полиэдроиды по Жуффре.

Обозначение полиэдроидов	Число и форма: гиперграней	Число и форма: граней	Ребра	Вершины	Гиперграни или грани, сходн. на ребре	Элементы, сходящиеся при каждой вершине: гиперграни	Элементы, сходящиеся при каждой вершине: грани	Элементы, сходящиеся при каждой вершине: ребра	Угол между смежными гипергранями
C^8	8 гекс.	24 квад.	32	16	3	4	6	4	90°
C^5	5 тетр.	10 треуг.	10	5	3	4	6	4	75°31′21″
C^{16}	16 тетр.	32 треуг.	24	8	4	8	12	6	120°
C^{600}	600 тетр.	1200 треуг.	720	120	5	20	30	12	164°28′39″
C^{24}	240 кт.	96 треуг.	96	24	3	6	12	8	120°
C^{120}	120 додек.	720 треуг.	1200	600	3	4	6	4	144°0′12″
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

§ 2. Отсечение вершин.

Первая операция получения из правильных полуправильных тел состоит в отсечении вершин гиперплоскостью. При общем положении получаются топологически полуправильные тела, а при перпендикулярности к осям симметрии, проходящим через вершины метрические.

Укажем формулы аналогичные (1) § 2 для *общего* случая.

При каждой вершине получается столько вершин полуправильного тела $Q^{\cdot\cdot}$, сколько проходит через вершины ребер, так как вершины получаются, как точки пересечения секущих плоскостей и ребер.

Таким образом:

$$L^{\cdot\cdot} = l(L) \cdot L. \tag{7_L}$$

Число ребер Q возрастает на число пересечений секущей гиперплоскости с гранями, проходящими через вершину:

$$l^{\cdot\cdot} = l + \lambda(L) \; L. \tag{7_l}$$

Таким образом число граней возрастает на число гиперграней, сходящихся в вершине, так что:

$$\lambda^{\cdot\cdot} = \lambda + \overline{\lambda}(L) \cdot L. \tag{7_λ}$$

Наконец, ясно, что число гиперграней возрастает на число вершин:

$$\overline{\lambda}^{\cdot\cdot} = \overline{\lambda} + L. \tag{$7_{\overline{\lambda}}$}$$

Не трудно видеть, что аналогон Эйлеровской формулы

$$L^{\cdot\cdot} - l^{\cdot\cdot} + \lambda^{\cdot\cdot} - \overline{\lambda}^{\cdot\cdot} = 0. \tag{8}$$

выполняется, так как:

$$-l + \lambda - \overline{\lambda} - L + L\,[l(L) - \lambda(L) + \overline{\lambda}(L)] = L - l + \lambda - \overline{\lambda} = 0,$$

в силу того, что взаимная Эйлеровской формулы дает:

$$\overline{\lambda}(L) - \lambda(L) + l(L) = 2.$$

Рассмотрим, какие многогранники сходятся в вершинах. Очевидно, двух типов.

1. Те, что получаются сечением гиперплоскостей при вершинах правильного и другие — в гипергранях первоначального тетраэдра.

Для *первого* типа число вершин то же, что число ребер для Q:

$$L(\overline{\lambda}') = l(\lambda), \tag{9_L}$$

число ребер то же, что число граней в вершине:

$$l(\overline{\lambda}') = \lambda(L) \tag{9_l}$$

и наконец:

$$\lambda(\overline{\lambda}') = \overline{\lambda}(L). \tag{9_λ}$$

Для *второго* типа число вершин в $\overline{\lambda}$ следует увеличить на $l(L, \overline{\lambda})$. число ребер в $\overline{\lambda}$, пересечение которых с гиперплоскостью дает вершины, так что:

$$L(\overline{\lambda}'') = L(\overline{\lambda}) + l(L, \overline{\lambda}). \tag{10_L}$$

Таким же образом в $l(\overline{\lambda})$ следует увеличить на $\lambda(L, \overline{\lambda})$

$$\text{и} \quad l(\overline{\lambda}'') = l(\overline{\lambda}) + \lambda(L, \overline{\lambda}), \tag{10_l}$$

$$\lambda(\overline{\lambda}'') = \lambda(\overline{\lambda}) + L(\overline{\lambda}). \tag{10_λ}$$

Наконец, для $l(L, \overline{\lambda})$ и $\lambda(L, \overline{\lambda})$ имеем формулы:

$$l(L,\overline{\lambda}) = \frac{L \cdot l(L) \cdot \overline{\lambda}(l)}{\overline{\lambda}(L)}. \tag{11}$$

Предполагая, что в двух гиперплоскостях Q различные ребра и имея в виду, что тогда всех ребер будет $Ll(L)(\alpha)$. Мы можем делить только на $\overline{\lambda}\,(L)$, но имея в виду, что в каждом ребре сходится $\overline{\lambda}(l)$ гиперплоскостей, приходится делить на $\overline{\lambda}(L) \cdot \overline{\lambda}(l)$.

Точно таким же образом убеждаемся, что:

$$\lambda(L,\overline{\lambda}) = \frac{2L \cdot \lambda(L)}{\overline{\lambda}(L)} \tag{12}$$

число этих $\overline{\lambda}(l)$ *многогранников.*

Специальный случай сечения получаем тогда, когда две секущие гиперплоскости сходятся на ребрах. В этом случае пропадает столько вершин, сколько было ребер и пропадает столько же ребер, так как исчезают ребра, идущие по ребрам Q:

$$L^{\cdot} = l(L) \cdot L - l, \tag{13_L}$$

$$l^{\cdot} = \lambda(L) \cdot L, \tag{13_l}$$

$$\lambda^{\cdot} = \lambda + \overline{\lambda}(L) \cdot L, \tag{13_λ}$$

$$\overline{\lambda}^{\cdot} = \overline{\lambda} + L. \tag{$13_{\overline{\lambda}}$}$$

Схождение будет уже не одного, а двух многогранников 1-го типа и того же числа $\overline{\lambda}(l)$ многогранников 2-го типа.

Многогранник 1-го типа остается таким же. Многогранники же 2-го типа теряют вершины и ребра числом $l(\overline{\lambda})$.

Отсечение общего типа вершин пентаэдроида Q_5 дает $Q_5^{\cdot\cdot}$ полиэдроиды с 10 гипергранями, из которых 5 представляют тетраэдры, а 5 — усеченные в вершинах тетраэдры, т. е. $P_4^{\cdot\cdot}$.

В специальном случае $P_4^{\cdot\cdot}$ вырождается в $P_4^{\cdot}$. Q_8—аналагон гексаэдра P_6. Отсечение общего типа дает 24-гипергранник с гипергранями P_4 и $P_8^{\cdot\cdot}$, вырождающимися в $P_6^{\cdot}$.

Q_{16} — аналогон октаэдра P_8. В общем случае получаем 24-гипергранник с гипергранями P_8 и $P_8^{\cdot\cdot}$, вырождающимися в $P_8^{\cdot}$.

За аналогоны икосаэдра и додекаэдра можно считать Q_{120} и Q_{600}. Из них получаются полиэдроиды с гипергранями додекаэдра и $P_4^{\cdot\cdot}$, вырождающимися в $P_4^{\cdot}$, и с гипергранями тетраэдрами и $P_{20}^{\cdot\cdot}$, вырождающимися в $P_{20}^{\cdot}$.

Что касается Q_{24}, то оно стоит особняком, будучи, как Q_5, аутоморфно $Q_{24}^{\cdot\cdot}$ — это 48-гипергранник с гипергранями-гексаэдрами и $P_8^{\cdot\cdot}$, вырождающимися в $P_8^{\cdot}$.

§ 3. Вторичное отсечение вершин.

В общем случае вторичное отсечение вершин приводит к полуправильным полиэдроидам с двумя родами вершин. Но производя отсечение у полиэдроидов, получаемых из правильных специальным отсечением Q, получаем полуправильные тела.

В вершине сходятся полуэдроиды:

1) полиэдроид в гиперплоскости, отсекающей вершину Q с $\lambda(l)+2$ гипергранями;

2) 2 полуэдроида, получаемых отсечением вершин в гипергранях Q, т. е. $P^{(\cdot)\cdot\cdot}$;

3) полиэдроид, получаемый из гиперграни $Q^{\cdot}$, получаемый при вершине Q тоже отсечением вершин, т. е. $P^{\cdot\cdot}$.

В случае специального отсечения $P^{(\cdot)\cdot\cdot}$, $P^{\cdot\cdot}$ вырождаются в $P^{(\cdot)\cdot}$ и $P^{\cdot}$, причем в вершине сходятся уже не 4, а 5 гиперполиэдров, так как при вершине будем иметь $2P^{\cdot}$.

Можно исследовать числа $L^{(\cdot)\cdot\cdot}$, $l^{(\cdot)\cdot\cdot}$, $\lambda^{(\cdot)\cdot\cdot}$, $\overline{\lambda}^{(\cdot)\cdot\cdot}$, которые определяются формулами:

$$L^{(\cdot)\cdot\cdot}=l(L^{\cdot}_{\bullet})\cdot L^{\cdot}; \tag{14$_L$}$$

$$l^{(\cdot)\cdot\cdot}=l^{\cdot}+\lambda(L^{\cdot})\cdot L; \tag{14$_l$}$$

$$\lambda^{(\cdot)\cdot\cdot}=\lambda^{\cdot}+\overline{\lambda}^{\cdot}(L^{\cdot})\cdot L; \tag{14$_\lambda$}$$

$$\overline{\lambda}^{(\cdot)\cdot\cdot}=\overline{\lambda}^{\cdot}+L. \tag{14$_{\overline{\lambda}}$}$$

Здесь $L^{\cdot}$, $l^{\cdot}$, $\lambda^{\cdot}$, $\overline{\lambda}^{\cdot}$ определяются в L, l, λ, $\overline{\lambda}$ по формулам (13).

Что же касается до входящих в формулы (14) $\overline{\lambda}(L^{\cdot})$, $\lambda(L^{\cdot})$, $l(L^{\cdot})$, то имея в виду, что грань может принадлежать только к двум гипергряням, мы будем иметь:

$$l(L^{\cdot})=\lambda(l)+1, \tag{15$_L$}$$

$$\lambda(L^{\cdot})=\frac{1}{2}\,[\overline{\lambda}(l)+2\overline{\lambda}(l)]=3\lambda(l), \tag{15$_\lambda$}$$

$$\overline{\lambda}(L^{\cdot})=\overline{\lambda}(l)+1=2\lambda(l)+1. \tag{15$_{\overline{\lambda}}$}$$

Следует отметить, что при переходе от общего к специальному случаю *отпадает l вершин и ребер*.

Тело I мы можем в случае *метрической* правильности принимать за гиперпризму.

Мы не будем более подробно останавливаться на этих полиэдроидах, так как они же получаются другой операцией, а именно срезыванием ребер у тела Q, т. е. из Q отсечением вершин, соединенным со срезыванием ребер.

§ 4. Отсечение ребер.

Проводя гиперплоскости, отсекающие ребра, мы получаем всего l многогранников при ребрах, которые будут иметь $\lambda(l)+2$ граней.

Если гиперплоскость будет взята параллельно ребру, то три гиперплоскости, сходящиеся по ребру, пересекутся ею по $\lambda(l)$ параллельным плоскостям, причем в равных расстояниях от ребра.

Точки пересечения их с гиперплоскостью, перпендикулярной к равноделящей гипергранный угол, будут в равных расстояниях от вершины, а поэтому лежать в плоскости, перпендикулярной к ребру.

Рассчитывая надлежащим образом положения отсекающей вершины Q гиперплоскости, можно достигнуть того, что боковыми сторонами гиперпризмы окажутся *квадраты*. В вершине их этой гиперпризмы, окажутся 2 гиперграни $P^{(\cdot)\cdot\cdot}$, проходящие через 2 грани гиперпризмы, параллельные ребру, и затем еще $P^{\cdot\cdot}$, получаемый отсечением вершин многогранника в гиперплоскости, отсекающей вершины.

Это, конечно, те тела, о которых мы уже говорили в предыдущем параграфе.

Принимая обозначения, аналогичные обозначениям § 6 1-й части, мы можем написать таблицу, обозначая через **П** гиперпризму и помещая в скобках сходящиеся три вершины многогранника и число *гиперграней*.

$$
\begin{array}{ll}
Q_5^{\cup} \ (P_4^{\cdot\cdot},\ 2P_4^{(\cdot)\cdot\cdot},\ \Pi_3), & Q_{120}^{\cup} \ (P_4^{\cdot\cdot},\ 2P_{12}^{(\cdot)\cdot\cdot},\ \Pi_3), \\
Q_5^{\cup} - (P_4^{\cdot},\ 2P_4^{(\cdot)\cdot},\ \Pi_3), & Q_{120}^{\cup} - (P_4^{\cdot},\ 2P_{12}^{(\cdot)\cdot},\ \Pi_3), \\
Q_8^{\cup} \ (P_4^{\cdot\cdot},\ 2P_8^{(\cdot)\cdot\cdot},\ \Pi_3), & Q_{600}^{\cup} \ (P_{20}^{\cdot\cdot},\ 2P_4^{(\cdot)\cdot\cdot},\ \Pi_5), \\
Q_8^{\cup} - (P_4^{\cdot},\ 2P_8^{(\cdot)\cdot},\ \Pi_3); & Q_{600}^{\cup} - (P_{20}^{\cdot},\ 2P_4^{(\cdot)\cdot},\ \Pi_3), \\
Q_{16}^{\cup} \ (P_8^{\cdot\cdot},\ 2P_4^{(\cdot)\cdot\cdot},\ \Pi_4), & Q_{24}^{\cup} \ (P_6^{\cdot\cdot},\ 2P_8^{(\cdot)\cdot\cdot},\ \Pi_3), \\
Q_{16}^{\cup} - (P_8^{\cdot},\ 2P_4^{(\cdot)\cdot},\ \Pi_4), & Q_{24}^{\cup} - (P_6^{\cdot},\ 2P_8^{(\cdot)\cdot},\ \Pi_3).
\end{array}
$$

§ 5. Неопределенные полуправильные полиэдроиды.

Что следует принять за аналогон *неопределенного* полуправильного тела? Конечно, неопределенным полуправильным полиэдроидом является *гиперпризма*, которая получается, если взять в двух параллельных гиперплоскостях 2 равных многогранника с соответственно параллельными гранями (а потому и ребрами) и, соединив соответственные вершины прямыми, принять за боковые грани призмы, имеющие своими ребрами эти прямые, а основанием — грани взятых нами многогранников.

Следует иметь в виду, что 2 грани как 2 вполне *параллельные* плоскости будут определять одну гиперплоскость, в которой будут лежать и прямые, соединяющие 2 ее точки.

В вершинах сходятся:

1) многогранник, взятый за основание P,

2) столько призм, сколько в вершине P сходится граней, т. е. $\lambda(L, \overline{\lambda})$.

Для L, l, λ, $\overline{\lambda}$, как не трудно видеть, получаем формулы:

$$L = 2L(\overline{\lambda}), \tag{16_L}$$

$$l = 2l(\overline{\lambda}) + L(\overline{\lambda}), \tag{16_l}$$

$$\lambda = 2\lambda(\overline{L}) + l(\overline{\lambda}), \tag{16_λ}$$

$$\overline{\lambda} = 2 + \lambda(\overline{\lambda}), \tag{$16_{\overline{\lambda}}$}$$

Если мы имеем в виду *топологическую* полуправильность, то многогранники можем брать топологически полуправильные; в случае же *метрической* полуправильности — *метрически полуправильные*. Но и в том и другом случаях будем иметь лишь конечное число возможностей, определяемых приведенной выше таблицей.

§ 6. Аналогон призматоида.

Гиперпризматоид получается из гиперпризмы *скашиванием*. Проведя через центры оснований прямую, перпендикулярную к их гиперплоскостям (между собой параллельным), мы вращаем их вокруг нее так, чтобы они всегда находились в тех же гиперплоскостях.

При этом вращении соответственные грани оснований выходят из одной плоскости. Мы можем утверждать только, что треугольная грань и вершина лежат в одной гиперплоскости. При повороте оснований мы должны мыслить *разбиение* каждой треугольной призмы, соединяющей две соответственные треугольные грани, на 3 треугольные пирамиды.

Такой полиэдроид, который получается, если взять за 2 *грани* 2 многогранника с треугольными гранями в параллельных плоскостях, а за другие гиперграни — треугольные пирамиды, образованные гранью основания ABC

и вершиной B' второго, гранью $A'_1B'_1C'_1$ второго и вершиной A первого и ребрами первого AC и второго $B'_1C'_1$ — представляет *гиперпризматоид*.

В противоположность призматоиду, гиперпризматоид уже не представляет полуправильного полиэдроида.

Если взять за основания тетраэдры, то простейшим распределением вершин призмы в вершинах тетраэдра будет следующее: в A сходятся тетраэдр и призмы, опирающиеся на ABC, ABD, ACD, разбившиеся на пирамиды так, что у первой призмы оказывается 3 сходящиеся в A пирамиды, у второй — 2 и у третьей — 3.

Тогда мы будем иметь схождение в $A: 6+1=7$ пирамид, в $B: 4+1=5$, в $C: \ldots 7$ и в $D: 8+1=9$ и в то же время в $A_1 \ldots 7$, $B_1 \ldots 9$, $C_1 \ldots 7$, $D_1 \ldots 4$, т. е. будем иметь не один, а два типа вершин.

В случае октаэдра мы будем иметь уже не два, а *три* типа вершин.

§ 7. Аналогон псевдо-полуправильного тела.

Здесь тоже аналогия не вполне выдерживается. Получаемый аналогичным § 8 построением полиэдроид отнюдь не является *полуправильным*.

Для его построения мы должны взять тетраэдрическую гипербипирамиду и произвести отсечение свободных вершин гиперпирамид, образующих гипербипирамиду, а затем отсечь вершины при их *общем основании — тетраэдре* с 2 гиперплоскостями, пересекающимися на плоскости, лежащей на гиперплоскости общего основания.

Прежде всего мы видим, что получается 2 типа вершин. В вершинах первого типа сходятся:

1) два тетраэдра — один в гиперплоскости, отсекающей свободную, а другой — в отсекающей несвободную вершину гиперпирамиды;

2) три особых тела Ω, о которых я буду ниже говорить, получаемые из трех гиперграней гиперпирамид (пентаэдроидов).

В вершинах второй категории имеем:

1) два тетраэдра в гиперплоскостях, отсекающих несвободные вершины двух гиперпирамид, образующих гипербипирамиду;

2) четыре тела Ω, из которых мы имеем по паре сходящих по ребру тетраэдров, на котором строится гипербипирамида.

Что касается до тела Ω, то оно получается отсечением в тетраэдре вершин, при этом специальном только в отношении первой вершины, т. е. предполагая пересечение секущих гиперплоскостей только на ребрах, сходящихся в этой вершине.

Можно предполагать, что ребра образуют в каждой грани тетраэдра, из которого получается прямоугольник, даже квадрат.

Для этого, вписав в грани гиперграни тетраэдров квадраты, следует только через 4 таким образом полученные прямые, проходящие через одну точку (на ребре гиперпирамиды), провести гиперплоскость, которая и будет подсекающей несвободную вершину.

Совершенно такое же построение будем иметь и на другой гиперпирамиде, образующей гипербипирамиду вследствие их симметричности относительно гиперплоскости тетраэдра.

Глава 2-я. ВЗАИМНЫЕ ПОЛИЭДРОИДЫ.

§ 8. Определение.

Взаимными полуправильными полиэдроидами мы называем такие, в которых не вершины, а гиперграни являются однородными, т. е. числа вершин определенного порядка должны быть те же и расположение их одинаково для всех гиперграней.

Здесь, конечно, опять следует отличать *топологическую и метрическую* полуправильности. Во втором случае вершины (т. е. гипергранные углы) мы должны предполагать правильными, но гиперграни будут равны, неправильны.

Следует помнить, что Q_5 и Q_{24} автовзаимны и Q_8 взаимно Q_{16}, а $Q_{120} - Q_{600}$, $\underline{Q}_8 \equiv Q_{16}$, $\underline{Q}_{16} \equiv Q_8$, $\underline{Q}_{120} \equiv \underline{Q}_{600}$, $\underline{Q}_{600} \equiv Q_{120}$.

Операции отсечения вершины гиперплоскостью взаимной является операция насаживания на гипергрань гиперпирамиды (берется точка вне ее и соединяется с вершинами гиперграни).

Приведенные выше в § 2 формулы остаются в силе, но заменяя L на $\bar{\lambda}$, l на $\underline{\lambda}$, λ на $\underline{l}$ и $\bar{\lambda}$ на $\underline{L}$.

Далее $\bar{\lambda}(L)$ на $L(\underline{\lambda})$ и т. д.

§ 9. Получение взаимно-полуправильных полиэдроидов насаживанием гиперпирамид.

Насаживание гиперпирамид на гиперграни Q_5 дает *гиперпирамидальный пентаэдроид*, полиэдроид с тетраэдрическими гипергранями, в одной вершине которых мы имеем схождение 4 тетраэдров, а в трех — 8.

Следует отметить, что пирамидальный тетраэдр является разверткой пентаэдроида и гиперплоскости, в трехмерном пространстве.

Точно таким же образом *пирамидальный пентаэдроид* является разверткой в гиперплоскость 2-го класса (в пространстве 4 измерений) простейшего правильного тела в *пятимерном пространстве*.

Точно таким же образом получаем из Q_{24}, Q_{18}, Q_{16}, Q_{120}, Q_{600} другие гиперпирамидальные формы.

§ 10. Насаживание на ребро.

Следующая операция должна рассматриваться, как операция взаимная отсечению ребра. Эта операция в соединении с насаживанием на грани гиперпирамид будет давать взаимно-полуправильные полиэдроиды.

Выберем только случай схождения в ребре 3 тетраэдрических гиперграней. Вне ребра берем точку S (черт. 29) и соединяем ее прямыми не 4, как в случае трехмерного пространства, а с 5 точками, лежащими на этом ребре:

1) двумя вершинами, лежащими на этом ребре, и

2) тремя вершинами, наложенными на грани гиперпирамид, сходящихся на этом ребре.

Специальный случай наложения получается тогда, когда прямые, идущие от вершины насаживаемых тетраэдров к вершинам насаженных на трех сходящихся в вершине ребер тетраэдра и эта вершина S лежит в одной гиперплоскости.

§ 11. Аналогон псевдо-взаимно-полуправильного тела.

Такой полиэдроид не является взаимно-полуправильным. Он строится так:

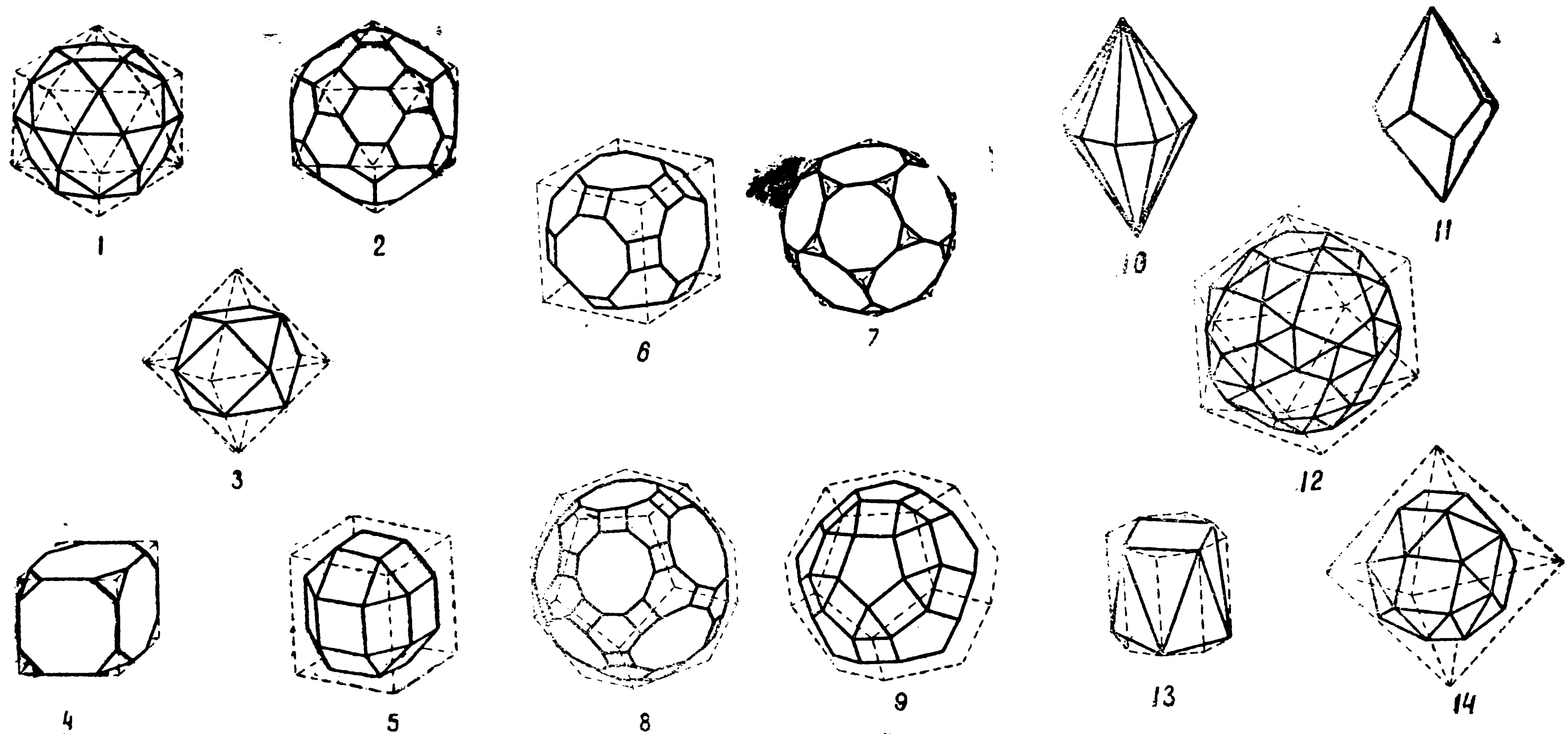
Берется гиперпризма с основанием пирамидальным — тетраэдром.

На тетраэдре T, лежащем в его основании, строится пентаэдроид. Его гиперграни иные, чем этого тетраэдра T, продолжаются и отсекают вершины гиперпирамиды, те, в которых лежат вершины тетраэдров, наложенные на грани T.

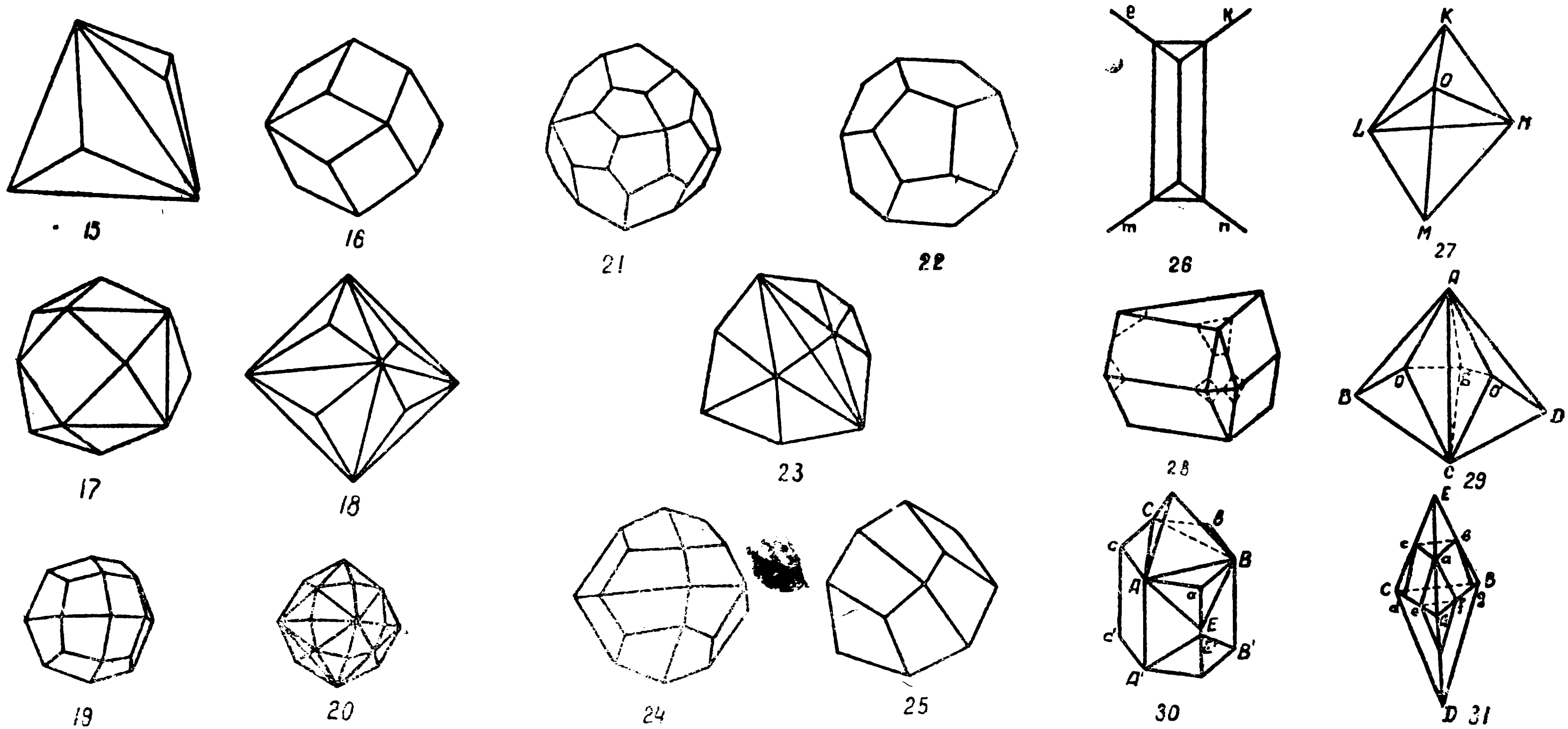
Мы получаем полиэдроид, состоящий из 5-гранников с треугольными гранями (и из 4-гранников с 2 треугольными и 4 четыреугольными гранями). Причем в первом случае имеем в 2 вершинах схождение 4 гиперграней, в третьем — 6 гиперграней, во втором — 4 гиперграней, в четвертом — 6 гиперграней.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Pappus.— Collectiones V, ed. Huetsch, s. 350.
2. Cantor.— Vorlesungen über Gesch. d. Mat., B. II, s. 313.
3. Kästner.— „Gesch. d. Mathematik.", B. I, s. 428.
4. Kepleri.— Opera omnia ed. Frish, vol. V lib. II, s. 123, 1864.
5. Nirsch Meier.— Sammlung geometrischer Aufgabe. 2 teil, s. 127—139, Berlin 180.
6. Catalan.— Memove sur la théorie des Poletèdres.
7. Max Brükner.— Vielecke mul Vielflache, s. 139, Leipzig, 1900.
8. Глинка.— Общий курс кристаллографии, Спб., 1895 г.
9. Hoppe.—„Archiv der Mathematik und Physik", Bd. 64, 1879; 67, 1881.
10. Schlegel.— „Bull. de la Soc. Mat. de France, t. 10, 1881—82.
11. Puchta.— „Sitrungsb. d. Acad.", wien, t. 90, 1884.
12. Jouffret.— Mélanges de Géométrie à 4 dimensions, Paris, 1901.
13. Schoutte.— Mehrdimensionale Geometrie, B. II Polytope.



Чертежи 1 — 14.



Чертежи 15 — 31.