Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ.

О НЕРАЗРЕШИМОСТИ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ КЕПЛЕРА.

§ 1. Рассмотрим, возможно ли решение уравнения Кеплера

$$u - e\sin u = x \tag{1}$$

в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных?

Уравнение (1) приводится к уравнению первого порядка —

$$1 - e\sqrt{1-\left(\frac{u-x}{e}\right)^2}du = dx, \tag{2}$$

которое, согласно нашим исследованиям, как алгебраическое относительно u и x может иметь или 1) алгебраическое решение или 2) решение формы $\pi(x, \vartheta)$,

где
$$\vartheta = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \lg x_j + \omega,$$

λ_j — постоянно, ω, x_j — алгебраические функции или 3) формы $\pi(x, s)$, где

$$s = e^{\omega}(x_0)^{\lambda_0}(x_1)^{\lambda_1}\dots(x_n)^{\lambda_n}.$$

Первое не может быть, так как тогда функция u оказалась бы алгебраической функцией от x и $\sin u$ был бы тоже алгебраической функцией от u.

Третье не может быть, так как тогда функция второго класса

$$\sin\pi(x, s)$$

оказалась бы равной $\frac{\pi(x, s) - x}{e}$, т. е. трансцендентной функцией первого класса.

Что $\sin\pi(x, s)$ — трансцендентная второго класса, вытекает из того, что уравнение

$$P_0 + P_1\eta_1 + P_2\eta_2 = P, \tag{3}$$

где
$$\eta_1 = e^{i\pi(x, s)}, \quad \eta_2 = e^{-i\pi(x, s)},$$

а P_0, P_1, P_2 — трансцендентные низших классов, предполагает, что $\eta_2 = \rho\pi_1$ *, где ρ — трансцендентная низшего класса, т. е. что $e^{2i\pi(x, s)}$ — трансцендент-

* Мордухай-Болтовской. — Об интегрировании трансцендентных фучкций. Варшава, 1913, § 33.

ная первого класса, а это предполагает, что не содержит трансцендентной второго типа, т. е., противно предположению, сводится к постоянному.

Во втором случае мы получаем:

$$\sin \pi(x, \vartheta)$$

как трансцендентную первого класса.

Это возможно лишь при сведении $\pi(x, \vartheta)$ к

$$\frac{1}{2}[\Omega + A \lg \Theta], \tag{4}$$

где Ω и Θ — алгебраические функции от x и A — рациональное число.

Тогда

$$e^{i\pi(x, \vartheta)} = e^{\Omega} \Theta^{A};$$

из уравнения (1) имеем:

$$\frac{1}{2i}[e^{\Omega} \Theta^{A} - e^{-\Omega} \Theta^{-A}] = \frac{1}{i}[\Omega + A \lg \Theta] \tag{5}$$

Такая связь между трансцендентными первого класса предполагает тождество, получаемое заменой e^{Ω} постоянным, т. е. приведение $\lg \Theta$ к алгебраической функции, т. е. Θ к постоянному. Таким образом (4) приводится к алгебраической функции Ω. Но и Ω должно свестись к постоянному, так как (5) имеет место по замене $\lg \Theta$ постоянным и e^{Ω} выражается тогда алгебраической функцией. Таким образом 2-й случай невозможен.