Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ.

О КРИВИЗНЕ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО.

1. На плоскости Лобачевского следует различать два рода кривизны: k_t — кривизну по касательной и k_n — кривизну по нормали. Первая — предел отношения угла смежности к дуге, вторая — предел отношения угла между нормалями к дуге.

2. Обозначим через (x', y', z', u') и (x'', y'', z'', u'') производные, взятые по дуге s, тогда будем иметь в вейерштрассовых координатах;

$$k_n = \sqrt{x''^2 + y''^2 - k^2 z''^2}. \tag{1}$$

3. Можно доказать, что

$$k_n = \frac{1}{k \operatorname{sh} \frac{L_n}{k}}, \tag{2}$$

где α_n — отрезок нормали, отсекаемый бесконечно близкой нормалью (радиус кривизны).

4. В случае параллельности бесконечно близких нормалей $\alpha_n = \infty$. В случае сверхпараллельности k_n имеет мнимое значение, кривизны по нормали не существует.

5. Тогда следует говорить о *сверхкривизне* $\kappa^{(n)}$ *по нормали* как $\lim\limits_{\Delta s+0} \frac{1}{k} \frac{\Delta\delta}{\Delta s}$, где $\Delta\delta$ — кратчайшее расстояние между нормалями.

6. На основании известных свойств прямоугольника доказываем, что:

$$k^{(n)} = \frac{1}{k \operatorname{ch} \frac{L^{(n)}}{k}}, \tag{3}$$

где $\alpha^{(n)}$ — расстояние от прямой наименьшего расстояния между нормалями (т. е. *оси кривизны*).

7. В случае существования кривизны, радиус кривизны совпадает с радиусом соприкасающегося круга; в случае сверхкривизны—с расстоянием соприкасающегося гиперцикла от его оси.

8. Геометрическое место центров кривизны (точек пересечения смежных нормалей) — эволюта — обладает теми основными свойствами, что эволюта — на плоскости Эвклида. Разность радиусов кривизны равна соответствующей дуге эволюты.

9. Эволюта центральной кривой второго порядка

$$Ax^2 + By^2 - k^2 Cz^2 = 0$$

определяется уравнением

$$Px^{\frac{2}{3}} + Qy^{\frac{2}{3}} - Rz^{\frac{2}{3}} = 0. \tag{4}$$

10. Сверхэволюта, или огибающая осей кривизны определяется взаимным уравнением в линейных координатах

$$Pu^{\frac{2}{3}} + Qv^{\frac{2}{3}} - Rw^{\frac{2}{3}} = 0. \tag{5}$$

11. Для кривизны по касательной имеем формулу:

$$K_t = \pm \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \pm \Delta^{(012)}. \tag{6}$$

12. Выражается через радиус кривизны следующей формулой:

$$K_t = \frac{1}{k \operatorname{th} \dfrac{L^{(n)}}{k}} \tag{7}$$

13. Кривизны высших порядков определяются аналогично тому, как это делается на эвклидовой плоскости. Ось отклонения следует определять, как предельное положение прямой, соединяющей середину хорды перпендикулярной к нормали с данной точкой кривой.

14. В основу исследования кладутся формулы для вейерштрассовых координат середины (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2)

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + x_2)k}{\sqrt{2(k^2 + k^2 z_1 z_2 - y_1 y_2 - x_1 x_2)}} \text{ и т. д.} \tag{8}$$

15. Угол, образуемый осью отклонения с нормалью, определяется формулой:

$$\cos\varphi = \frac{\Delta^{(012)}}{\sqrt{T}},$$

где

$$T = k^2 \left(\frac{\Delta_x^{(01)} \Delta^{(013)}}{3\Delta^{(012)}} - \Delta_x^{(02)} \right)^2 + \dots$$

16. „Первая циркулярная ось“, предельное положение прямой, соединяющей точки M кривой с серединой хорды, отсекающей от M равные дуги, совпадает с нормалью.