Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ.

МЕТАЦИКЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И АБЕЛЕВЫ ИНТЕГРАЛЫ.

1. Вопрос о выражении абелевых интегралов $\int F(x, y)\,dx$, y определяется уравнением:

$$y^3+py+q=0, \tag{1}$$

где p и q — рациональные функции от x при всякой рациональной функции $F(x, y)$ — в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных или в эллиптических интегралах сводится к исследованию, когда род кривой равен 0 или 1.

2. Исследование это можно вести, пользуясь выражением корня (1) в радикалах:

$$y_1=u+v,\quad y_2=\alpha u+\alpha^2 v,\quad y_3=\alpha^2 u+\alpha v,\quad \alpha^3=1$$

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\triangle}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\triangle}},\quad \triangle=\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{24}. \tag{2}$$

3. Означая через (n) точки разветвления, которым отвечает разложение по целым степеням $(x-a)^{\frac{1}{n}}$, мы можем отметить, что в случае необратимости в 0 одновременно p и q, если $x=a$ корень нечетной кратности уравнения $\triangle=0$, мы имеем (2), четной — (1).

4. Если обозначить через λ, μ порядки a, как корня p, q, то следует различать случаи: $3\lambda>2\mu$, $3\lambda<2\mu$ и $3\lambda=2\mu$. В первом случае, смотря по тому, делится или не делится μ на 3, имеем (1) или (3). Во втором, смотря по тому, делится или не делится λ на 2 (1) или (2). В третьем (1).

5. Для $x=\infty$ мы получаем, означая через λ, μ степени p и q, в первом случае (1), (2), во втором (1), (3), в третьем (1).

6. Точки разветвления, отвечающие полюсам p и q, исследуют, сводя этот случай к 4, полагая $(x-a)=\frac{1}{2}$.

7. Если брать *общий* случай *нормального* типа уравнения, для которого степени p и q находятся в отношении $2:3$, старшие члены $\triangle$ не уничтожаются и p с q не обращаются в нуль, для рода кривой третьего порядка будем иметь значение $\pi=1$.

Изменяя p и q так, что они получают общий корень, мы будем иметь понижение рода не в случае появления (3), а в случае появления (2), например, для уникурсальной кривой:

$$y^3+(x-a)\varphi(x)y+(x-a)^2\psi(x)=0. \tag{3}$$

8. Аналогичным образом ведется исследование случая уравнения 4-й степени:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \qquad (4)$$

(к которому сводится общий случай). Здесь приходится пользоваться формулой:

$$y = \frac{1}{2}\begin{cases} \pm\sqrt{\frac{1}{3}(-2p + \sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{S})}, \\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}(-2p + \alpha\sqrt[3]{R} + \alpha^2\sqrt[3]{S})}, \\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}(-2p + \alpha^2\sqrt[3]{R} + \alpha\sqrt[3]{S})}, \end{cases}$$

где

$$R = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(A + 3\sqrt{3}B)}, \quad S = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(A - 3\sqrt{3}B)},$$

$$A = 2p^3 + 27q^2 - 72pr,$$

$$B = 27q^4 + 4p^3q^2 - 144pq^2r - 16p^4r + 128p^2r^2 - 256r^3,$$

$$B = \frac{A^2 - 4C^3}{27}, \text{ где } C = 12r + p^2.$$

Знаки квадратных корней таковы, что их произведение имеет знак обратный с p.

9. Точки разветвления (2) *первого* рода получаем при $B = 0$. Исследование их ведется также, как для кубического уравнения. Но все эти исследования предполагают необратимость выражения, под верхним корнем квадратным, в нуль (или в бесконечность).

10. В последнем случае будут точки разветвления (2) *второго* рода и (4). Можно указать условия, при которых имеют место (2) или (4).

11. Род кривой четвертого порядка вообще $\pi = 3$. Понижение происходит в случае появления (2) при $A = 0$, $C = 0$ или при степени A^3 большей C^2.

12. Пользуясь известной формулой для рода кривой

$$\sum_i \frac{r_i - 1}{2} - m + 1 = \pi,$$

мы можем делать заключения в роде следующих: при наличности у алгебраической функции, определяемой уравнением кривой третьего порядка, двух точек (3), точки (2) должны отсутствовать, если $\pi = 0$ и абелевы интегралы должны быть *биноминального* типа, $\int F(x_1\sqrt[3]{R(r)})\,dx$, в случае трех (3) и $\pi = 1$ (т. е. приведена к эллиптическим интегралам) интегралы должны быть формы $\int F(x, \sqrt[3]{\alpha + \beta\sqrt{ax^2 + bx + c}})\,dx$ и потому эйлеровской подстановкой должны приводиться к биноминальным.

13. Из формулы Абеля и Кронекера для корней *метациклических уравнений* простой степени, в частности для уравнений степени, следует, что точками разветвления могут быть (n) и (δ), где δ — делитель $n - 1$.

14. На основании этого замечания, можно доказывать *невыражаемость в радикалах корня алгебраического уравнения.* Для уравнения $y^4x - 4yx^2 + y^5 + x^6$ метод *параллелограмма Ньютона* дает разложение по степени $x^{1/3}$, не совместное с формой корня метациклического уравнения.

15. Для кривых пятого порядка можно сделать выводы, аналогичные 12.