Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ.

ЗАМЕТКА О ТЕОРЕМЕ ПРИНСГЕЙМА.

§ 1. Теорема Принсгейма ставит в зависимость продолжаемость в определенном направлении функции:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^L + \ldots, c_n z^n + \ldots \quad (1)$$

от распределения на плоскости точек $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Она формулируется так:

Если разложение (1) имеет конечный радиус сходимости r и если точки Cj, кроме конечного числа, все расположены внутри угла $AOB < \pi$, для которого ось OX служит осью симметрии, то M ($z = r$) является особенной точкой, и поэтому невозможно продолжение по направлению радиуса OM. *

При этом следует сделать два замечания:

1. Если OX не является осью симметрии, то в том случае, если угол $XOB > XOA$ меньше $\frac{\pi}{2}$, мы, откладывая $< A'OX = < BOX$, приходим к предыдущему случаю, так что достаточно требовать только то, чтобы угол, образуемый $OBcOX$, в котором распределяются Cj, был меньше $\frac{\pi}{2}$.

2. Можно тоже утверждать о непродолжаемости по *любому* направлению OX' в том случае, когда оно является биссектрисой угла, в который включаются все Cj, кроме *конечного числа.* Для этого следует только взять вместо $f(z) \ldots, f(z) - e^{-i}\varphi$, где φ — упомянутый угол.

3. Следует также отметить, что подстановкой $z = rz^1$ мы сводим общий случай к случаю, когда радиус круга равен 1.

§ 2. Теорему Принсгейма можно *пополнить*, рассмотрев случай, когда около OY происходит *сгущение точек.* При некоторых характерных свойствах сгущения теорема Принсгейма должна оставаться в силе, т. е. точка $z = r$ должна оставаться особенной точкой.

Предположим, что *сгущение справа*, т. е. со стороны *положительных* абсцисс.

Чтобы произвести такое исследование, мы должны с небольшими изменениями воспроизвести доказательство Принсгейма.

В нем исходным пунктом является разложение

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} f^{(\nu)}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\nu} : \left(z - \frac{1}{2}\right)^{\nu}. \quad (2)$$

* Bieberbach.— Lehrbuch der Functionentheoriè; Absch. VII, § 1, 289—291, в. 2, 1931.

Если функция *продолжена* за точку 1, то при $z=1+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, получаем абсолютно-сходящееся разложение:

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} f^{(\nu)}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\nu!}\ \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^{\nu}, \tag{3}$$

где

$$f^{(\nu)}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n} \nu!\colon C_n^{\nu}\, c_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\nu}. \tag{4}$$

Далее доказывается абсолютная сходимость двойного ряда, получаемого подстановкой из (4) выражения $f^{(\nu)}\left(\frac{1}{2}\right)$ *в* (3).

Сходимость получается просто на том основании, что вещественная часть c_n $Rc_n=|c_n|cs\varphi\geqslant|c_n|\delta$,

$$|c_n|\leqslant\frac{Rc_n}{\delta}, \tag{5}$$

где $cs\varphi_n\geqslant\delta$ и δ не три.

Но ряд абсолютно сходящийся является и безусловно сходящимся, т. е. в нем возможна *перестановка членов.*

Мы можем написать:

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\ \sum_{\nu=0}^{\nu=n} C_n^{\nu}c_n\frac{1}{2^{n-\nu}}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^{\nu}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\ \sum_{\nu=0}^{\nu=n} C_n^{\nu}c_n\frac{1}{2^n}(1+2\varepsilon)^{\nu}=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_n}{2^n}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_n^{\nu}(1+2\varepsilon)^{\nu}=\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(1+\varepsilon)^n$$

и оказывается, что $\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} c_n z^n$ абсолютно сходится при $z=1+\varepsilon$, а это противоречит условию.

§ 3. Для того, чтобы захватить случай, когда Gj сгущается к OY *справа*, следует только вместо неравенства (5) взять

$$Rc_n>|c_n|\,\omega(n)\ \text{ и }\ |c_n|<\frac{Rc_n}{\omega_{(n)}},$$

где уже $\lim\limits_{n\to\infty}\omega(n)=0$.

В этом случае, взяв разложение

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\ \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_n^{\nu}|c_n|\,\omega(n)\,\frac{1}{2^{n-\nu}}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^{\nu}$$

мы теми же преобразованиями приходим к тому, что ряд

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}|c_n|\,\omega(n)\,z_n \tag{6}$$

имеет радиус сходимости > 1.

Но ряд (6) при $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\omega(n)} = 1$ **(7)**

имеет радиус сходимости $\omega(n) = 1$.

Тогда можно сказать, что ***теорема Принсгейма будет верна и при угле $> AOB = \pi$, но при условии, что при достаточно больших n будет***

$$cs\, \varphi_n > \frac{1}{n}. \tag{8}$$