*Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ.*

# ЗАМЕТКА О ГИПЕРТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЛАХ.

В своей работе о трансцендентных числах * я выдвигаю из множества трансцендентных чисел те, которые можно было бы назвать *гипералгебраическими*. Это те, которые определяются следующим образом: $N = y = c$, где $c$ рационально, а $y$ определяется алгебраическим диференциальным уравнением:

$$f(x, y, y' \ldots y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где $f$ полином с рациональными коэфициентами, причем

$$y_a = b,\ y'_a = b_1 \ldots y_a^{(n-1)} = b_{n-1}, \tag{2}$$

где $c_1$, $b_i$ рациональные числа.

Числа, не входящие в это множество, — *гипертрансцендентные*.

По образцу доказательств существования *трансцендентных* чисел доказывается существование гипертрансцендентных чисел, а именно обнаруживается, что множество гипералгебраических чисел счетно, в то время, как множество *всех* чисел — *континуум*.

Но возможно и другое понимание гипералгебраических чисел, как получаемых с помощью алгебраических и элементарно трансцендентных построений, производимых над целыми числами, причем в полном соответствии с классификацией Льювилля **, и ее видоизменением, данным мной ***, устанавливается понятие о классах таких трансцендентных чисел. Это *конструктивно-гипералгебраические* числа в то время, как указанные выше — *диференциально-гипералгебраические*. Их множество тоже счетное и существующие числа конструктивно-гипералгебраические. Если вместо *чисел* брать *функции*, то понятие диференциально-гипералгебраических функций объемлет понятие конструктивно-гипералгебраических.

Всякая функция, выраженная в конечном виде, определяется алгебраическим диференциальным уравнением, но не всякое алгебраическое диференциальное уравнение разрешимо в конечном виде.

Имеет ли это место и для чисел? Можно доказать, что чисто конструктивно-гипералгебраическое является всегда вместе с тем и диференциально-гипералгебраическим.

---

* Д. Д. Мордухай-Болтовской. — О некоторых свойствах трансцендентных чисел первого класса, „Мат. сборник", 1927, т. 34, в. 1, §§ 5, 6.

** Liouville. — „Mémoire sur la classification des transcendantes. Jour. de Liouville, т. II, 1837, p. 53.

*** Д. Д. Мордухай-Болтовской. — Об интегрировании трансцендентных функций. „Изв. Варш. ун-та" за 1913 г.

Если построение *первого класса*, так что число $\eta$ определяется уравнением

$$\alpha_0^{(1)}(\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)} \ldots)\, \eta^m + \alpha_1^{(1)}(\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)} \ldots)\, \eta^{m-1} + \ldots \alpha_n^{(1)}(\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)} \ldots) = 0, \tag{3}$$

где $\vartheta^{(1)} = \lg \alpha$, $l^d$, $\alpha < (\lambda > 0$ иррационально) $\xi = \alpha$ определяется алгебраическим уравнением

$$\beta_0 \xi^n + \beta_1 \xi^{n-1} + \ldots \beta_n = 0 \tag{4}$$

с целыми коэфициентами $\beta_i$.

Мы можем построить такие *полиномы*: $\beta_i$ ($^2$), чтобы при $x = c$ они принимали значения равные $\beta_i$, а при $x = a$ в случае $\vartheta^{(1)}$ первого типа имели бы $\xi = 1$, а в случае 2 и 3 типов $\xi = 0$, т. е. чтобы имели

$$\sum_j \beta_j\ (\alpha) \begin{cases} = 1 \\ = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Далее мы можем построить и полиномы надлежащей степени $\alpha_j^{(1)}$ $[\vartheta_1^{(1)}(x), \vartheta_2^{(1)}(x) \ldots x]$, так что при $x = c$ они принимали бы значение $\alpha_j$, что будет давать линейные уравнения. Но к этим условиям, получаемым, приравнением коэфициентов при $\vartheta_1^{(1)k_1} \vartheta_2^{(1)k_2} \ldots \vartheta_p^{(1)k_p}$ следует прибавить (2). Но имея в виду, что производные функций, выражаемых в конечном виде, тоже выраженные в конечном виде, и класс при диференцировании не повышается и новых основных трансцендентных не входит, условия эти дадут тоже линейные уравнения, и для коэфициентов получим рациональные значения.

В случае трансцендентного числа *второго класса*, определяемого уравнением

$$\alpha_0^{(2)}(\vartheta_1^{(2)}. \vartheta_2^{(2)} \ldots)\, \zeta^m - \alpha_1^{(2)}(\vartheta_1^{(2)}. \vartheta_2^{(2)} \ldots)\, \zeta^{m-1} + \ldots \alpha_m(\vartheta_1^{(1)}. \vartheta_2^{(1)} \ldots) = 0, \tag{3a}$$

где $\vartheta^{(2)} = \lg \alpha^{(1)}$. $l^{\alpha^{(1)}}$, $\alpha^{(1)\lambda}$, и где $\alpha^{1)}$ определяется уравнением типа (3). Тогда следует на коэфициенты $\alpha^{(2)}$; (3a) наложить еще условие обращаемости $\eta = \vartheta^{(1)}$, при $x = a$ в 1 или в три, а при $x = c$ в $\alpha_j^{(2)}$, что опять приравниванием коэфициентов при $\vartheta^{(2)k_1}\, \vartheta_2^{(2)k_2} \ldots \vartheta^{(1)l}$, $\vartheta_2^{(1)l_1} \ldots$ будет давать линейные уравнения. Условие (2) дает тоже линейные уравнения, и значения для коэфициентов опять получаются *рациональные*. Ясно, что так же можно продолжать и в случае построений высших классов.

Но вот вопрос, видимо, трудно разрешимый,— всякое ли диференциально-гипералгебраическое число является конструктивно-гипералгебраическим?

Другая проблема, видимо, легче, но решения ее я еще не имею.

***Функция***, определяемая системой алгебраических диференциальных уравнений, определяется одним таким уравнением. Верно ли это для чисел? Если $N = y_a = c$, где

$$f(x_1 z_1, z_2 \ldots z_p, y, y^1 \ldots y^{(m)}) = 0 \tag{4}$$

при условиях (2) и при условии, что постоянные $z_1, z_2 \ldots z_p$, входящие рационально в коэфициенты, числа гипералгебраические в указанном выше смысле, то будет ли $N$ также гипералгебраическим?