

На правах рукописи

КИТАЕВ Давыд Борисович

**РАЗВИТИЕ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В XIX
СТОЛЕТИИ**

Специальность 07.00.10 – История науки и техники

(по физико-математическим наукам)

Автореферат

диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва

2011

Работа выполнена в Институте истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН

Научный руководитель – доктор физ.-мат. наук С.С. Демидов.

Официальные оппоненты – доктор физ.-мат. наук, проф. А.Ф. Андреев

кандидат физ.-мат., доцент Н.В. Александрова

Ведущая организация – Пермский государственный педагогический университет.

Защита состоится 24 февраля 2011 г. в 14 часов 00 мин. На заседании диссертационного совета Д002.051.05 в Институте истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН по адресу:

117861, Россия, Москва, ул. Обручева д. 30а корпус Б.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН. 117861, Россия, Москва, ул. Обручева д. 30А корпус В.

Автореферат разослан «___» _____ 20__ г.

Ученый секретарь

диссертационного совета к.ф.-м. н.

И.О. Лютер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Одним из важных разделов теории дифференциальных уравнений является их качественная теория. В то же время ее история хотя и затрагивалась в исследованиях, касающихся творчества отдельных ученых (Пуанкаре, Ляпунов и др.) или развития теории устойчивости, а также в обзорах типа немецкой «Энциклопедии математических наук» или «Математики в СССР за 40 лет», не становилась объектом систематического историко-математического анализа. Единственное исключение составляет раздел «Качественная теория дифференциальных уравнений» в книге «Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функции. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей», изданной в 1987 году под редакцией А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича, но и в нем затронуты лишь основные центральные моменты развития теории в XIX столетии. Анализ исследований Ж. Лагранжа, Н.Д. Брашмана, ряда важных сочинений А.Пуанкаре по небесной механике, исследований Д. Хилла, а также работ П. Пенлеве, Ж. Адамара, И. Бендиксона, развивающих идеи Пуанкаре и Ляпунова, там практически отсутствует.

Значимость качественной проблематики для теории дифференциальных уравнений и отсутствие систематического анализа процессов возникновения и дальнейшего развития теории на протяжении XIX столетия определяют актуальность избранной темы исследования.

Целью диссертации является изучение истории качественной теории дифференциальных уравнений в период, охватывающий ее предысторию и завершающийся исследованиями И. Бендиксона конца XIX столетия.

Методы исследования. Для достижения поставленной цели применяется сочетание историко-научного анализа трудов математиков конца XVIII – начала XX столетия в

контексте математики того времени (антикваристский подход) с анализом результатов математиков прошлого с позиции современной математики (презентистский подход).

Научная новизна исследования определяется тем, что история качественной теории дифференциальных уравнений не была прежде предметом систематического историко-научного анализа - в данной работе такое исследование осуществляется впервые. В этой связи в работе впервые изучена статья Н.Д. Брашмана «Общие рассуждения о математическом анализе и пример исследования дифференциальных уравнений по новому способу Штурма», который выступил одним из пионеров в понимании значимости нового качественного направления в исследовании уравнений, а также впервые подвергнуты историко-математическому анализу труды Ж. Лагранжа, К. Якоби и Д. Хилла, относящиеся к области небесной механики. Кроме того, в работе впервые в историко-математической литературе исследованы труды Пенлеве, Адамара, Леви-Чивита и Бендиксона, в которых качественная теория дифференциальных уравнений, разработанная Пуанкаре и Ляпуновым, получила дальнейшее развитие. В частности:

- 1) Показано влияние идей и методов Пуанкаре по качественному изучению дифференциальных уравнений на работы П. Пенлеве, выполненные им в период с 1888 по 1905 гг. ,
- 2) Обращено внимание на идейную связь, общность и различие новых качественных методов изучения дифференциальных уравнений у Адамара, Пуанкаре, Ляпунова,
- 3) Подчеркнута важность и преемственность идей Адамара в развитии теории Динамических систем в XX столетии вплоть до работ Д.В. Аносова,
- 4) Отмечен вклад в развитие качественной теории дифференциальных уравнений итальянским математиком и механиком Туллио Леви-Чивита. Обращено внимание на сходство и различие методов Ляпунова и Леви-Чивита при решении ими задач

теории устойчивости движения.

- 5) Проведен подробный анализ мемуара Бендиксона «О кривых определяемых дифференциальными уравнениями», в котором были получены первые существенные обобщения результатов Пуанкаре. Особое внимание в этом анализе уделено той части мемуара, в которой проводится изучение сложных особых точек дифференциальных уравнений – области исследований, незатронутой ранее в трудах Пуанкаре и нерассмотренной в историко-математической литературе, получившей развитие лишь в середине XX в. (А.Ф. Андреев)

Практическая значимость. Материалы диссертации могут быть использованы:

- в исследованиях по общим вопросам истории математики XVIII - XX вв.;
- в дальнейших историко-математических исследованиях по теории дифференциальных уравнений;
- в лекциях курса и семинарских занятиях по теории дифференциальных уравнений и ее истории.

Апробация работы. Диссертация в целом и ее отдельные части были представлены на научных конференциях аспирантов и соискателей по истории естествознания и техники при ИИЕТ РАН (2000-2003), а также на научно-исследовательском семинаре по истории математики и механики МГУ им. М.В. Ломоносова (2004-2010 гг.).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, изложенных на 143 страницах, а также списка литературы вопроса, содержащего 190 наименований.

Публикации. По теме диссертационного исследования автором опубликовано 9 работ, в том числе одна в журнале входящем в список ВАКа.

СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выбранной темы, определены цели и задачи диссертации, дано краткое содержание работы.

В главе 1 рассмотрена предыстория качественной теории дифференциальных уравнений. Несмотря на то, что основы этой теории были заложены в конце 80-х годов XIX столетия в работах Пуанкаре и Ляпунова, отдельные случаи качественного исследования дифференциальных уравнений и даже построения специальных теорий мы встречаем и у предшествующих авторов при решении ими различных задач теоретического и прикладного характера. В соответствии с этим глава 1 состоит из шести разделов.

В разделе 1.1 приведены два исторически первых примера применения качественных методов исследования. Один из них, принадлежащий Даламберу, относится к области математической физики и связан с рассмотрением процесса поперечных колебаний закрепленной на концах неоднородной струны. Второй, принадлежащий Лагранжу, относится к области небесной механики и связан с рассмотрением задачи трех тел.

В разделе 1.2 речь идет о теории Штурма - Лиувилля - первой теории, в которой нашло отражение систематическое применение качественных методов исследования.

В разделе 1.3 рассматриваются два вопроса - оценка современниками значимости новой качественной проблематики и метода Штурма и пути дальнейшего развития самой теории Штурма-Лиувилля.

Касаясь первого вопроса, следует отметить, что значимость новой проблематики была оценена достаточно рано. В этой связи в данном разделе обращено внимание на появление в 1834 г. в "Ученых записках Московского университета" малоизвестной статьи Н.Д. Брашмана (25.06.1796 - 25.05.1866) - чл. корр. Петербургской АН (1855 г.), основателя Московского

математического общества и его журнала "Математический сборник". В этой статье под названием "Общие рассуждения о математическом анализе и пример исследования дифференциальных уравнений по новому способу Штурма" высказывается убеждение о невозможности интегрирования произвольных дифференциальных уравнений в квадратурах, что было доказано Лиувиллем только в 1841 году для уравнения Риккати. Брашман отмечает при этом, что для исследования таких уравнений необходимо применять нетрадиционные качественные методы исследования и применяет метод Штурма к уравнению

$$\frac{d\left(p \frac{dy}{dx}\right)}{dx} + qy = 0$$
, где p и q - заданные непрерывные функции x в промежутке $[x_0, X]$. В качестве примера Брашман рассматривает частный случай данного уравнения, когда $p = 1$ и дает оценку расстояния между двумя последовательными нулями решения такого уравнения.

При рассмотрении второго вопроса в разделе выделено три направления дальнейшего развития теории Штурма-Лиувилля. Первое из этих направлений состояло в изучении различных обобщений данной теории на уравнения третьего и четвертого порядков и связано с именами Д. Рэлея, Ж. Кирхгофа, Ф. Майера, А. Давидоглу. Второе направление было развито в трудах Ф. Клейна и М. Бохера. В решении третьей проблемы наиболее полные и строгие результаты были получены В.А. Стекловым.

В разделе 1.4 речь идет о магистерской диссертации Н.Е. Жуковского "Кинематика жидкого тела", опубликованной в 1876 г. В этой работе Жуковский, исследуя вопрос о линиях тока плоского течения жидкости, пришел к задаче о поведении интегральных кривых

уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}$ ($ad - bc \neq 0$) в окрестности начала координат и дал исторически первую классификацию критических точек такого уравнения (классификация, данная

Пуанкаре в его основном мемуаре по качественной теории появилась спустя пять лет в 1881 г.).

В разделе 1.5 в качестве примера качественного изучения решения дифференциальных уравнений рассмотрена работа французского инженера-механика, члена Парижской Академии наук - А. Леоте "Мемуар о колебаниях с большими периодами в машинах, приводимых в действие гидравлическими моторами, и о средствах предупреждения таких колебаний". Эта работа была опубликована в журнале Политехнической школы в 1885 г. и по постановке вопроса относится к теории регулирования гидравлических машин. Проведя качественное исследование процесса взаимодействия регулятора и машины, Леоте пришел к системе интегральных кривых, соответствующих наличию фокуса или предельного цикла и доказал ряд общих теорем относительно этих кривых.

В разделе 1.6 речь идет о двух примерах качественного исследования уравнений из области небесной механики. Первый рассматриваемый в разделе принадлежит К. Якоби, который обобщил метод Лагранжа, упоминаемый в разделе 1.1, и использовал его при исследовании на устойчивость системы, состоящей из n материальных точек. Второй пример принадлежит Д.У. Хиллу - автору фундаментальных работ по теории движения Луны. В разделе упоминается разработанный Хиллом один из наиболее эффективных качественных методов исследования ограниченной задачи трех тел - метод кривых нулевой скорости.

В главе 2 проанализированы характерные особенности новой качественной проблематики в трудах Пуанкаре и Ляпунова, а также дана оценка этой проблематики их современниками - П. Пенлеве, Ж. Адамаром, Т. Леви-Чивита. В соответствии с этим глава 2 состоит из пяти разделов.

В разделе 2.1 речь идет о мемуаре Пуанкаре "О кривых, определяемых

дифференциальными уравнениями), положившему начало систематическому применению качественных методов исследования теории дифференциальных уравнений. В период, предшествующий появлению мемуара Пуанкаре, преобладало изучение дифференциальных уравнений в комплексной области, разрабатывалась теория, получившая впоследствии наименование аналитической теории дифференциальных уравнений. Такой подход в изучении уравнений рассматривался как наиболее общий, исследования велись в комплексной области. Однако оказалось, что целый ряд важных, в том числе и для приложений, вопросов следовало изучать отдельно в действительной области. Характерной особенностью нового качественного подхода к изучению дифференциальных уравнений у Пуанкаре является использование им топологических методов исследования. Эти методы оказываются необходимыми при переходе от локального изучения решений уравнений к их глобальному изучению. Так, изучая распределение особых точек, он вводит новое понятие фундаментальной важности - индекс цикла и доказывает теорему: полное число узлов и

фокусов уравнения $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$, в котором X и Y многочлены от x и y , равно числу седел плюс 2. Другой пример применения топологии дает использование Пуанкаре в своих исследованиях понятия рода поверхности, введенное ранее Риманом. Он показывает, что изменение рода поверхности существенным образом влияет на глобальное поведение траектории. В разделе отмечается, что к анализу нового направления исследований Пуанкаре неоднократно возвращался и в последующие годы. Так, например, в заметке о своих работах 1901 г. он, в частности, затрагивает вопрос о связи четвертой части мемуара с топологией n - измерений. Кроме того, этой теме посвящена работа «Анализ положения» (1895 г.) и статья «Почему пространство имеет три измерения» (1912 г.).

Вообще, геометрическая интуиция играет важную роль в построениях Пуанкаре,

приводя подчас к некоторой потере в строгости изложения.

В разделе 2.2 диссертации дан анализ основных направлений исследований Ляпунова в области качественной теории дифференциальных уравнений. Этот анализ позволяет выделить три направления его исследований по теории устойчивости: 1) устойчивость равновесия и движения механических систем с конечным числом степеней свободы; 2) существование фигур равновесия вращающейся жидкости, близких к эллипсоидальным; 3) устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкости. Центральное место в цикле работ первого направления занимает его докторская диссертация «Общая задача теории устойчивости», опубликованная в 1892 г. В разделе изложены основные результаты этой работы, а также рассмотрены этапы эволюции понятия устойчивости в трудах Ляпунова, охватывающей период с 1885 по 1897 гг. Речь, в частности, идет в нем о дискуссии между Пикаром, Ляпуновым и Пенлеве, возникшей в связи с обсуждением вопроса о существовании периодических решений определенного класса дифференциальных систем. Начало двух других направлений исследований Ляпунова было положено его магистерской диссертацией «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости», написанной в 1884 г. При этом изучение фигур равновесия вращающейся жидкости было также объектом исследований Пуанкаре. Общность интересов обоих ученых по этому вопросу привела к переписке между ними, продолжавшейся несколько более года. В этой связи в разделе приведены отдельные выдержки из данной переписки, причем наибольший исторический интерес представляют выдержки из письма Ляпунова, в котором идет речь о сходстве и различии методов исследований обоих ученых.

Значимость новой качественной проблематики, открытой мемуаром Пуанкаре и последовавшими за ними работами Ляпунова, была по-разному оценена их современниками. Рассмотрению этого вопроса отводятся разделы, 2.3 - 2.5

диссертации.

Раздел 2.3 посвящен творчеству П. Пенлеве и его восприятию идей А. Пуанкаре. Работы Пенлеве характеризуются особой ролью, которую в них играет теория функций комплексного переменного. Новые качественные методы исследований дифференциальных уравнений в действительной области не занимают в его творчестве столь значимого и важного места, как у Пуанкаре. Тем не менее, в его работах, выполненных в период с 1888 по 1905 гг., впервые для нелинейных уравнений систематически проводилась идея изучения их решений как функций комплексного переменного во всей области их определения непосредственно по самому виду дифференциального уравнения, которая аналогична идее Пуанкаре изучения качественного поведения интегральных кривых в действительной области. Так, предложенный Пенлеве метод позволил находить необходимые условия отсутствия подвижных точек ветвления уравнения $u'' = R(u', u, z)$, где R - рациональная функция u и u' и аналитическая функция z , а наличие или отсутствие того или иного вида подвижных особых точек в интегралах данных дифференциальных уравнений было положено в основу классификации этих уравнений. Кроме того, метод Пенлеве оказался полезным не только для изучения уравнений, но и для приложений, что находит свое отражение в связи между теорией Пенлеве и исследованиями С.В. Ковалевской по изучению движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

В разделе 2.4 речь идет о вкладе Ж. Адамара в развитие качественной теории дифференциальных уравнений, который опубликовал в 1896 и 1897 гг. два обширных мемуара, развивающих идеи Пуанкаре. Мемуар 1896 г. относится к числу наиболее значимых в двух областях исследований – аналитической механике и геометрии. В первой из них рассматривается вопрос о движении материальной точки под действием консервативной

силы на поверхности вращения. Изучение этого вопроса приводит Адамара к разработке двух вариантов качественного метода исследования – фазового и координатного. Первый из них идейно связан со вторым методом Ляпунова, второй – с работой Кнезера. В области геометрии особое место в первом мемуаре занимает вопрос об изучении геодезических потоков на плоскостях положительной кривизны. Важность понятия геодезических линий для динамики определяется тем, что их уравнения в существенном совпадают с уравнением движения материальной точки под действием сил, имеющих потенциальную функцию и, таким образом, теорема о геодезических линиях дают ответы на вопросы о поведении траекторий динамической системы.

Во втором мемуаре Адамара изучается поведение геодезических потоков на поверхностях отрицательной кривизны, а также приводится большое число примеров таких поверхностей. Идеи Адамара получили дальнейшее развитие в XX веке в теории динамических систем. В этой связи в разделе 2.4 приводятся некоторые результаты докторской диссертации Д.В. Аносова, а также указывается на связь между результатами Адамара и Аносова.

В разделе 2.5 дана общая характеристика творчества Леви-Чивита и рассмотрены основные направления его исследований по качественному анализу дифференциальных уравнений. Несмотря на то, что Леви-Чивита был наряду с Адамаром одним из тех крупных математиков своего времени, кто дал высокую оценку трудам Пуанкаре, Ляпунова и Бендиксона, его подход к решению задач качественного анализа существенно отличается от подхода названных авторов. Для творчества Леви-Чивита характерно стремление к объединению новых понятий качественного анализа в теории дифференциальных уравнений с известными понятиями классической механики. Это приводит его к важным новациям, связанным, прежде всего с геометрическим подходом к решению задач небесной механики и

теории устойчивости.

В главе 3 проводится анализ результатов качественного изучения дифференциальных уравнений, полученных шведским математиком И.О. Бендиксоном. В его мемуаре, опубликованном в 1901 г. в "Acta mathematica" были получены существенные обобщения результатов Пуанкаре по качественному изучению интегральных кривых на плоскости. В этом мемуаре можно выделить три основных темы: формулировка и доказательство общих теорем дифференциальных уравнений, изучение особых точек дифференциальных уравнений, изучение интегральных кривых в бесконечности. Первой теме посвящена первая глава

мемуара, в которой изучается поведение интегральных кривых уравнения $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$.

Пуанкаре исследовал этот вопрос для случая, когда X и Y являются полиномами относительно переменных x и y . Бендиксон показал, что полученные Пуанкаре результаты могут быть распространены на случай, когда X и Y являются функциями непрерывными вместе со своими частными производными первого порядка относительно x и y . Опираясь на две фундаментальные теоремы - о существовании и единственности решения и о непрерывной зависимости решений от начальных данных, а также, используя в качестве основы своего топологического метода понятие предельной точки траектории, Бендиксон переходит к доказательству последующих теорем первой главы мемуара. Итогом изучения этой главы является теорема, обобщающая результат Пуанкаре о классификации траекторий и получившая в дальнейшем наименование теоремы Пуанкаре - Бендиксона.

Существенное место в мемуаре Бендиксона занимает изучение сложных особых точек - вопрос, который не изучался Пуанкаре. Бендиксон изучает характер этих точек в том случае, когда X и Y являются голоморфными функциями, показывая, что изучение сложной

особой точки может быть сведено к изучению последовательности дифференциальных

уравнений вида: $x^n \frac{dy}{dx} = ax + by + B(x, y)$, где $a \neq 0$, а B означает ряд Тейлора, начинающийся с членов порядка >1 .

Изучая топологическую структуру сложной особой точки в случае равенства нулю одного корня характеристического уравнения, он приходит к выводу о существовании особых точек трех типов - седла, узла и седло-узла. При этом отмечается, что наибольшую сложность представляет изучение сложной особой точки в случае равенства нулю обоих корней характеристического уравнения, сама топологическая структура при этом не исследуется. Эта задача впервые была решена в более позднее время А.Ф.Андреевым. При этом автор приходит к выводу о существовании семи типов сложных особых точек: 1)седла,2)узла,3)фокуса,4)центра,5)седло-узла,6)вырожденной особой точки (имеющей 2 гиперболических сектора),7)сложной особой точки с эллиптической областью (имеющей один эллиптический и один гиперболический сектор) и устанавливает критерии различения этих типов особых точек. Особые точки этих типов были подвергнуты затем различными авторами во главе с Дюмортье исследованиям на предмет выяснения их бифуркаций при малых изменениях параметров исходной системы.

Третьему направлению исследований - изучению интегральных кривых в достаточно удаленных частях плоскости - посвящена глава VI мемуара Бендиксона "Несколько теорем, относящихся к случаю, когда X и Y - многочлены". В этой главе Бендиксон сравнивает результаты своих исследований с исследованиями Пуанкаре, формулирует достаточное условие отсутствия замкнутых траекторий на плоскости, получившее в дальнейшем наименование "критерий Бендиксона", а затем возвращается к формулировке теоремы о классификации траекторий 1-й главы своего мемуара, уточняя её содержание.

В заключительной части работы подводятся итоги проведенного исследования, которое позволяет сделать следующие выводы:

1. К 80-м годам XIX века в математике накопилось значительное число результатов, которые можно квалифицировать как проявление идеологии качественной теории дифференциальных уравнений. Она появилась как в самой теории дифференциальных уравнений, так и в разных её приложениях - в гидродинамике, технике, небесной механике. При этом значимость новой проблематики была оценена достаточно рано. Так, например, Брашман уже в 1834 г., высказав убеждение о невозможности интегрирования произвольных дифференциальных уравнений в квадратурах, дал пример качественного исследования дифференциального уравнения по методу Штурма.

2. Несмотря на то, что тематика качественной теории дифференциальных уравнений затрагивалась и до работ Пуанкаре, тем не менее, общей постановки задачи и разработки качественного подхода к изучению поведения решений дифференциальных уравнений во всей действительной области у предшественников Пуанкаре мы не находим. Новая качественная проблематика Пуанкаре обладает следующими характерными особенностями:

а) исследования начинают вестись в действительной области, что стало поворотным пунктом в развитии теории дифференциальных уравнений, до этого доминировали исследования в комплексной области;

б) наблюдается переход от локального изучения интегральных кривых к изучению их поведения во всей плоскости действительного переменного. До появления мемуара Пуанкаре преобладал аналитический метод исследования, поведение решений изучалось в окрестности отдельной точки;

в) главным средством перехода от локального изучения решений уравнений к их глобальному изучению является использование топологии;

г) геометрическая интуиция играет важную роль в построениях Пуанкаре как интуитивное знание, достаточное само по себе. Это находит свое отражение в том, что некоторые из формулируемых им положений принимаются неявно, в то время как требовались бы длинные доказательства и точные предположения.

3. К разработке качественной теории дифференциальных уравнений вскоре после работ Пуанкаре подключился А.М. Ляпунов - создатель математической теории устойчивости. Творчество этого ученого включает три больших цикла исследований:

а) устойчивость равновесия и движения механических систем с конечным числом степеней свободы;

б) устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкости;

в) существование фигур равновесия вращающейся жидкости, близких к эллипсоидальным.

4. Роль и место новой качественной проблематики были по-разному оценены современниками Пуанкаре - Пенлеве, Адамаром, Леви-Чивита. Работы Пенлеве в теории дифференциальных уравнений характеризуются особой ролью, которую в них играет теория функций комплексного переменного. Качественная проблематика в действительной области не занимает в его творчестве столь значимого и важного места, как у Пуанкаре. Тем не менее, в его работах, выполненных в период с 1888 по 1905 гг., впервые для нелинейных уравнений систематически проводилась идея изучения их решений как функций комплексного переменного во всей области их определения непосредственно по самому виду дифференциального уравнения, аналогичная идее Пуанкаре изучения качественного поведения интегральных кривых в действительной области. Разработанный Пенлеве метод оказался полезным не только для изучения уравнений, но и для приложений, что нашло свое отражение в связи между теорией Пенлеве и исследованиями С.В. Ковалевской по изучению

движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

Наиболее полно идеи качественной теории дифференциальных уравнений Пуанкаре получили свое дальнейшее развитие в творчестве Ж. Адамара, опубликовавшего в 1896 и 1897 гг. на эту тему два обширных мемуара. Дальнейшее развитие его идей приходится на XX век и связано с изучением геодезических потоков на римановых многообразиях отрицательной кривизны. основополагающие работы в этой области принадлежат Д.В. Аносову.

5. Первые существенные обобщения результатов Пуанкаре по качественному изучению интегральных кривых на плоскости были получены в исследованиях шведского математика И.О. Бендиксона. В результате этих исследований был сформулирован и доказан ряд общих теорем качественной теории уравнений, проведено изучение сложных особых точек дифференциальных уравнений, изучено поведение интегральных кривых в наиболее удаленных частях плоскости. Изучение сложных особых точек, начатое И.О. Бендиксоном получила свое продолжение и завершение в трудах советской математической школы. основополагающие результаты в этой области были получены А.Ф. Андреевым, впервые решившим задачу о расположении интегральных кривых на плоскости в окрестности сложной особой точки специального вида - задачу, поставленную Бендиксоном в своем мемуаре, но остававшуюся ввиду своей сложности долгое время нерешенной.

6. В исследованиях Пуанкаре и Бендиксона была получена наиболее полная картина поведения интегральных кривых на плоскости. Для случая, когда $n > 2$ результаты, полученные Пуанкаре для интегральных кривых на поверхности тора, были дополнены в XX столетии работами А. Данжуа и Х. Кнезера. Кроме того, следует отметить, что качественная теория дифференциальных уравнений, созданная в конце XIX века, получила в начале XX столетия новый мощный стимул для своего развития в связи с

развернутым рассмотрением колебаний в различных областях физики и техники. Несмотря на то, что характер динамических систем, возникающих при рассмотрении задач теории колебаний оказался существенно отличным от характера этих систем в небесной механике, методы Пуанкаре и Ляпунова, развитые применительно к ним, нашли в теории колебаний широкое применение. Данное обстоятельство стимулировало разработку соответствующих методов исследования - аналитических и тополого-аналитических. К числу аналитических, получивших наибольшее распространение, следует, прежде всего, отнести методы Пуанкаре, Ван-дер-Поля, Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, к числу тополого-аналитических - методы Левинсона и Смита, неподвижной точки и метод Картрайт.

Основные результаты диссертационного исследования отражены в следующих публикациях автора

1. Китаев Д.Б. К ранней истории качественных методов в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - Институт истории естествознания и техники СИ. Вавилова. Годичная конференция, 2000. - М.: ИИЕТ РАН, 2000 - с. 245-248.
2. Китаев Д.Б. К ранней истории качественных методов в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - Ленинградский государственный областной университет им. А.С. Пушкина. Сборник научных трудов "Методика преподавания математики в высших и средних учебных заведениях". Санкт-Петербург, 2001 - с. 96-102.
3. Китаев Д.Б. О предыстории качественной теории дифференциальных уравнений. - Московский Государственный Технологический Университет "Станкин".
Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. - Издательство "Станкин", 2001 - с. 284-285.
4. Китаев Д.Б. Исследование линейных дифференциальных уравнений второго порядка в трудах Н.Е. Жуковского и А.М. Ляпунова. - Институт истории естествознания и техники СИ. Вавилова. Годичная конференция, 2001. - М.: ИИЕТ РАН, 2001 - с. 232-234.
5. Китаев Д.Б. Труды Н.Е. Жуковского и А.М. Ляпунова по теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. - Московский Государственный Технологический Университет "Станкин".
Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. - Издательство "Станкин", 2002 - с. 180-189.

6. Китаев Д.Б. И.О. Бендиксон и развитие качественной теории дифференциальных уравнений в его мемуаре "О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями". - Институт истории естествознания и техники С.И. Вавилова. Годичная конференция, 2002. - М.: ИИЕТ РАН, 2002 - с. 290-292.
7. Китаев Д.Б. Восприятие идей Пуанкаре и Ляпунова в области качественной теории дифференциальных уравнений во Франции. - Институт истории естествознания и техники С.И. Вавилова. Годичная конференция, 2003. - М.: ИИЕТ РАН, 2003 - с. 348-352.
8. Китаев Д.Б., Петросян Н.С Раннее восприятие идей Пуанкаре и Ляпунова в области качественной теории дифференциальных уравнений во Франции. - Московский Государственный Технологический Университет "Станкин". Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. - Издательство "Станкин", 2003 - с. 314-324.
9. Китаев Д.Б. Н.Д. Брашман О путях развития теории дифференциальных уравнений. ВИЕТ 2008 №1 стр. 163-165.

КИТАЕВ Давыд Борисович

**РАЗВИТИЕ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В XIX
СТОЛЕТИИ**

Автореферат

диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук