МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Бычков
Сергей Николаевич

Генезис теоретической математики как историко-научная и историко-философская проблема

Специальность 09.00.08 – философия науки и техники

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора философских наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре философии естественных факультетов философского факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук **С.С. Демидов**

Доктор философских наук, профессор **В.И. Метлов**

Доктор философских наук, профессор **А.А. Печенкин**

Ведущая организация:
Московский педагогический государственный университет

Защита состоится «18» июня 2008 г. в 16^{25}
на заседании Диссертационного совета по философским наукам Д.501.001.37 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ломоносовский проспект, 27, корпус 4, зал заседаний Ученого совета (ауд. А 518).

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале научной библиотеки Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (119991, Москва, Ленинские горы, 1-й корпус гуманитарных факультетов)

Автореферат разослан « » марта 2008 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Е.В. Брызгалина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Проблема генезиса теоретической математики неоднократно привлекала к себе внимание исследователей. Особый интерес вопроса о происхождении математики в том, что в данном случае речь, по существу, идет не только о специальной науке, а о возникновении науки вообще, поскольку теоретическая математика, задав эталон строгости всему последующему точному знанию, фактически оказалась первой общепризнанной теоретической системой и идеал научности многие столетия формировался по математическому образцу.

Имеется и еще одна, более важная причина пристального внимания к проблеме возникновения теоретической математики. Для современной математики не существует разделения на российскую математику, американскую математику, французскую математику и т.д. Когда применяют эти словосочетания, то имеют в виду лишь то, что общими проблемами единой математической науки занимаются граждане России, США, Франции и т.д. Между тем в древние времена ситуация была существенно иной. Математические знания в цивилизациях Вавилона, Египта, Индии и Китая объединял в целом практический характер, и с этой точки зрения, они представляли определенное единство. Напротив, математические знания ученых Древней Греции отличались более систематизированным и абстрактным характером. До сих пор геометрию во всём мире учат в соответствии с принципами, разработанными еще в евклидовых «Началах», а математика стран Востока представляет сегодня исключительно историко-научный интерес.

Важно и то, что современная математика считает своей прародительницей именно греческую математику, которая по всем параметрам противоположна математике стран Востока. В связи с этим выяснение и объяснение генезиса античной математики способствует более глубокому пониманию природы процессов, происходящих в современном математическом знании, рассматриваемом как часть общечеловеческой культуры.

Степень разработанности проблемы. Зарождение теоретической математики в Древней Греции описывается в классических монографиях Б.Л. Ван дер Вардена и А. Сабо[1]. Однако первым, кто правильно поставил проблему возникновения теоретической математики с присущим ей дедуктивным способом рассуждений и предложил оригинальную идею её решения, был А.Н. Колмогоров, в творчестве которого счастливым образом сочетались занятия математикой и интерес к истории. В известной энциклопедической статье «Математика», опубликованной в 1938 г., он связал первые попытки систематического построения математической теории с более раз-

---

[1] *Ван дер Варден Б.Л.* Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. М., 1959; *Szabó Á.* Anfänge der griechischen Mathematik. Budapest, 1969.

витой общественно-политической и культурной жизнью греческих государств, приведшей к высокому развитию диалектики, искусства спора, к привычке отстаивать свои утверждения в борьбе с противником. И главное здесь не в конкретном содержании гипотезы, а в том, что Колмогоров первым осознал реконструкцию картины возникновения теоретической математики как проблему не внутриматематическую и не абстрактно-философскую, а как *историко*-научную проблему, которая именно так должна ставиться и решаться. При этом подлинная причина возникновения теоретической математики оказывается определенной внешними по отношению к математике условиями.

О нетривиальности подобного подхода говорит тот факт, что более чем двадцать лет спустя А.Д. Александров в одноименной статье в философской энциклопедии привлекает более традиционный – внутриматематический – способ объяснения, связывая появление теоретического способа вывода новых результатов и первых математических доказательств с накоплением математических знаний, с установлением зависимости между получаемыми результатами и унификацией правил решения задач.

Тем не менее, последние полвека подход к проблеме генезиса теоретической математики, проложенный Колмогоровым, стал преобладающим. Важный вклад в решение рассматриваемой проблемы внесли работы Ж.-П. Вернана, И.Н. Лосевой, А.Г. Барабашева, А.И. Зайцева, М.К. Петрова, В.М. Розина, В.С. Степина[2].

Среди исследователей данной проблемы, большинство которых являются представителями гуманитарного знания, возобладал подход, в соответствии с которым причины возникновения теоретической математики в Древней Греции VI–IV вв. до н.э. следует искать в отличительных особенностях эллинской цивилизации. Ищутся те или иные факторы социокультурного характера, наличествовавшие в Элладе и отсутствовавшие в цивилизациях Востока, которые и объявляются причинами возникновения теоретической математики именно в Греции. В числе специфических предпосылок, обусловивших возможность зарождения теоретической науки в Древней Греции, в этих работах приводятся полисный тип общественного устройства, ненаследуемость профессий, особенный характер древнегреческого языка и другие факторы.

Значительное количество различающихся точек зрения свидетельствует не только об актуальности проблемы генезиса науки, но и об определенном

---

[2] *Вернан Ж.-П.* Происхождение древнегреческой мысли. М., 1988; *Лосева И.Н.* Теоретическое знание: проблемы генезиса и различения форм. Ростов-на-Дону, 1989; *Барабашев А.Г.* Диалектика развития математического знания. М., 1983; *Зайцев А.И.* Культурный переворот в Древней Греции VIII–V вв. до н.э. Л., 1985; *Петров М.К.* Искусство и наука. Пираты Эгейского моря и личность. М., 1995; *Розин В.М.* Специфика и формирование естественных, технических и гуманитарных наук. Красноярск, 1989; *Степин В.С.* Теоретическое знание. Структура, историческая эволюция. М, 2000.

кризисе, назревшем в процессе её решения. Дело в том, что все имеющиеся в распоряжении исторические сведения не связаны напрямую с поставленной проблемой и известны из вторых или третьих рук. В подобной ситуации исследователь поневоле вынужден прибегать к косвенному методу воссоздания исторической картины – реконструкции. Поскольку каждая реконструкция основывается на более или менее осознанных субъективных установках методологического характера, предопределяющих выбор тех или иных факторов, то наличие нескольких конкурирующих концепций, в равной мере не противоречащих скудному запасу исторических сведений, представляется естественным, сопутствующим решению данной проблемы обстоятельством. Вопрос, следовательно, в том, можно ли найти такой подход к реконструкции процесса возникновения теоретической математики, который исходил бы целиком из существа рассматриваемой проблемы и был бы в этом смысле объективным? Без ответа на него любой попытке реконструкции процесса возникновения древнегреческой дедуктивной геометрии так и суждено будет оставаться лишь более или менее правдоподобной гипотезой.

Предмет диссертационного исследования – воссоздание процесса возникновения теоретической математики в Древней Греции VI–IV вв. до н.э. в его взаимосвязи с развитием философского мышления в исследованиях Сократа, Платона, Аристотеля и стоиков.

Цель и задачи диссертационного исследования. Цель исследования – найти специфические факторы социокультурного характера, обусловившие возникновение теоретической математики с присущим ей аксиоматическим методом изложения материала в Греции в VI–IV вв. до н.э. и в то же время объясняющие отсутствие дедуктивной математики в древних цивилизациях Востока.

Автор ставит перед собой следующие задачи:

- Найти подход к реконструкции генезиса теоретической математики, который не опирался бы на a priori выставленные гипотезы.
- Выяснить взаимоотношение аксиоматического метода и практически ориентированных наук.
- Определить роль геометрии как теоретической науки о свойствах фигур и тел в формировании аксиоматического метода изложения изучаемого материала.
- Проанализировать процесс формирования идеала теоретического знания в древнегреческой математике.
- Выяснить роль софистики в формировании строгости при изложении математического знания.
- Определить степень влияния египетской геометрии на формирование греческой теоретической математики.

- Выяснить значение аксиоматического метода в современном преподавании математических дисциплин.
- Проанализировать степень эффективности аксиоматического метода в исследованиях по созданию искусственных интеллектуальных систем.
- Продемонстрировать роль древнегреческой дедуктивной математики в формировании ключевых понятий античной философии: «Ум-перводвигатель», «смысл», «символ», «метафора».

Методологическая основа исследования вытекает из его первоочередной задачи – попытки найти такой способ отыскания внешних по отношению к математике социокультурных предпосылок её возникновения, который, в то же время, был бы внешним по отношению к истории как таковой. Такой способ можно взять только из анализа специфики дедуктивно-аксиоматического метода, выделяющего его среди всех других способов систематизации научного знания.

Подобный ход мысли также можно рассматривать как «наложение» некоторой априорной рамки на историко-научный материал, что автоматически сделало бы предпринимаемую реконструкцию чувствительной к критике. Чтобы предупредить возможный упрек сама указанная методология нахождения предпосылок «дедуцируется» из наличного состояния историко-научной проблемы.

Во главу исследования поставлен один-единственный факт – уникальность греческой дедуктивной математики, требующая поиска причин отсутствия аналогов в науке древневосточных цивилизаций. Анализ этого историко-научного факта и приводит последовательно сначала к обоснованию существования некоторых социокультурных предпосылок зарождения аксиоматического метода рассуждений в математике, а затем и к поиску подобных – названных формальными – предпосылок. Данная идея возникает как бы способом «от противного»: мы не имеем никаких гарантий, что в результате она позволит получить «правильную» реконструкцию, поскольку исторических фактов слишком мало, но иных вариантов достижения успеха в решении проблемы попросту нет.

Побочным продуктом такого подхода оказывается отсутствие необходимости в привлечении извне каких-либо общих методологических представлений для анализа рассматриваемого историко-научного материала. Последнее немаловажно по той причине, что формирование европейской философии, начиная с Аристотеля, шло под активным воздействием зарождавшейся в то же время теоретической математики. Лишь отказавшись от использования современной методологии для решения рассматриваемой проблемы, удается сохранить критическую дистанцию и по отношению к доминирующим на сегодняшний день тенденциям развития теоретической математики, и по отношению к практикуемым в современной философии науки методологическим подходам в проведении конкретных историко-научных исследований. Возможно, тема настоящей диссертационной работы – единственный пример, когда подобная «методологическая» позиция оказывается оправданной и эффективной. В проблеме генезиса теоретической математики методологическую функцию в состоянии взять на себя ключевые для рассматриваемой проблемы исторические факты, имеющие инвариантный по отношению ко всякой возможной методологии характер.

Положения, выносимые на защиту, и их новизна.

1. Показано, что аксиоматический метод принципиально не может зародиться в рамках практически ориентированной системы знаний. Следствием этого вывода является утверждение, что дедуктивный способ рассуждений может возникнуть только в теоретической системе знаний. Это и есть первая из формальных предпосылок возникновения аксиоматического метода.

Новизна полученного результата заключается в том, что впервые теоретический характер евклидовых «Начал» осознан не как сопутствующий историческому исследованию факт, а как формальная предпосылка возникновения дедуктивного способа доказательств на основе аксиом и постулатов.

2. Аксиоматический способ рассуждений не мог появиться в качестве побочного продукта деятельности с целью, внешней по отношению к полученному результату (например, исходя из потребностей максимально компактного изложения материала в учебных целях). Преобразование науки в дедуктивную форму могло произойти только в результате последовательных целенаправленных действий по выявлению и формулированию тех простейших определений и утверждений, к которым сводятся в конечном счете все её теоремы и предложения. Краткость изложения и доступность понимания при этом не играют первенствующей роли.

Новизна полученного результата заключается в том, что впервые на абстрактно-логическом уровне показана роль релятивистского мышления софистов как провоцирующей причины появления аксиоматического метода в качестве защитной меры.

3. Утверждается, что аксиоматический метод мог возникнуть только в теоретической геометрии, где имеется раздел о свойствах углов. Где бы и когда бы ни возник дедуктивный метод рассуждений, он, как и на земле Эллады, мог появиться только в форме постулата о параллельных прямых. Именно этот постулат, с одной стороны, обосновывает в рамках планиметрии возможность построения прямоугольника на заданном основании, а с другой стороны, вместе с ним в геометрии появляются бесконечные углы, «корректность» представления о которых может быть обеспечена лишь заменой реальных предметных действий построениями, осуществляемыми в человеческом воображении.

Новизна полученного результата заключается в том, что благодаря ему выявлена действительно фундаментальная роль геометрии в возникновении и развитии аксиоматического метода, место и значение которой с объективной точки зрения нисколько не уменьшилось даже после объявления Бурбаки данного метода основой для построения всего математического знания.

4. Показано, что превращение прикладных геометрических знаний египтян в теоретическую науку произошло не в сознании греческих математиков, а в более широком целом – жизнедеятельности всей эллинской цивилизации. Если для египтян выполняемые на плане пирамиды построения были подчинены процессу её сооружения, то для греков, не возводивших подобных конструкций, свойства данных построений поневоле оказывались «знанием ради знания». Созерцательное рассмотрение достижений египетского землемерного искусства – единственно возможный способ усвоения мудрости древнейшего из народов молодой эллинской цивилизацией.

<u>Новизна</u> полученного результата заключается в демонстрации ограниченности классической теории абстракции Аристотеля с точки зрения социокультурного подхода. Абстракции геометрических фигур возникают не как следствие определенной онтологии – способности души воспринимать форму тела без его материи. В действительности процесс формирования геометрических абстракций в эллинской геометрии имел гораздо более сложную природу. Сначала геометрия должна была превратиться из измерительного искусства в теоретическую науку, изучающую свойства фигур не ради какого-либо практического дела, а исключительно ради них самих. И лишь затем уже на этой основе сознательные усилия ученых, вызванные потребностями общественной жизни, могли привести к возникновению соответствующих представлений о невещественных геометрических объектах.

5. Превращение эллинской теоретической геометрии в дедуктивную науку было неизбежным в конкретных исторических условиях кризиса античного полиса. Вместе с тем, само наличие геометрического искусства как «знания ради знания» в Древней Греции не связано с особенностями её политического устройства и объясняется сравнительно низким техническим уровнем эллинской цивилизации, несопоставимым с техническим уровнем Египта времен Древнего Царства, достигнутым за две с лишним тысячи лет до времени возникновения и расцвета греческой науки.

<u>Новизна</u> полученного результата заключается в пересмотре имеющегося взгляда на современную математику как на единственно возможную форму математического знания, отвечающего его «природе» и не зависящего от конкретно-исторических условий его возникновения. В действительности, именно недостаток «знания» математики о себе самой и условиях своего возникновения делает её особенно уязвимой для критики со стороны других наук (например, философии науки или физики).

6. Продемонстрирована неэффективность аксиоматического метода в качестве инструмента решения важнейшей педагогической задачи – овладения искусством самостоятельно мыслить в процессе обучения математике. Эта задача была сознательно поставлена Ж. Дьедонне при пересмотре содержания

курса геометрии во Франции в 60-х гг. прошлого столетия и переводе его с языка евклидовой традиции на язык линейной алгебры.

Новизна полученного результата заключается в демонстрации преимуществ классического курса геометрии с точки зрения получения среднего образования перед «модернистским» его изложением на основе идей линейной алгебры. Особая ценность классического курса с точки зрения развития мышления учащихся заключается в том, что геометрия благодаря наглядности как никакой другой школьный предмет способствует развитию умения находить опосредствующие звенья между областью наличного знания и тем, что предстоит найти.

7. Показана невозможность создания искусственного интеллекта до тех пор, пока не будут найдены технические возможности моделирования способности естественного интеллекта производить операцию целенаправленного отбора имеющихся сведений в соответствии с предъявляемой для решения задачей.

Новизна полученного результата заключается в отыскании одной из многих способностей человеческого мышления, отсутствие подходов к технической реализации которой сводит на нет в настоящее время все попытки создания эффективно работающих интеллектуальных систем. Эта способность играет важнейшую роль в процессе создания нового знания, но не развивается при обучении математике на основе идей аксиоматического метода. Слабости аксиоматического метода в качестве способа получения нового знания объясняют его неэффективность и как метода решения задач «искусственного интеллекта».

8. Показана роль дедуктивной математики в формировании в античной философии представления об идеальных объектах и таких её понятий, как «смысл», «символ», «метафора».

Новизна полученного результата заключается в демонстрации социокультурной детерминированности наряду с дедуктивной математикой также и ряда важных понятий западной философии, представляющихся, на первый взгляд, неотъемлемыми инструментами философского мышления

Научно-теоретическая и практическая значимость исследования. Выводы диссертации определяют новую интерпретацию проблемы генезиса математики, что может стать отправным пунктом для последующих историко-научных исследований. Результаты работы могут быть использованы также в исследованиях по философии науки, философской компаративистике, а также в преподавании математики и написании учебных пособий по математике для студентов технических и гуманитарных специальностей. Материалы диссертации могут стать теоретической основой для разработки специальных курсов по философии математики.

Апробация работы. Основные положения и выводы диссертации нашли отражение в 39 научных публикациях автора. Результаты работы неоднократно докладывались на различных научных конференциях и семинарах, использованы в чтении учебных курсов и написании учебного пособия по математике для студентов гуманитарных специальностей.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 307 страницах машинописного текста; состоит из введения, 3 глав, заключения, списка литературы (на с. 276–305), включающего 394 источника (из них 308 – на русском и 86 – на иностранных языках) и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение обосновывает актуальность темы и показывает степень и характер её разработанности, содержат постановку задачи исследования как историко-научной проблемы. В этой части работы сформулированы элементы новизны и положения, выносимые на защиту, а также охарактеризована значимость проведенного исследования.

В **первой** **главе «Формальные предпосылки возникновения дедуктивной науки»** разрабатывается подход к построению реконструкции генезиса теоретической математики, исключающий необходимость обращения к тем или иным априорным гипотезам исторического характера, на которые обычно опираются исследования данной проблемы.

В **первом параграфе** «Исторические и формальные предпосылки возникновения древнегреческой геометрии» предметом анализа становится, прежде всего, сама целесообразность привлечения понятия предпосылки для построения исторической реконструкции процесса превращения математики в науку с присущим ей дедуктивным выведением теорем из определений и аксиом. Доминирование на протяжении тысячелетий в математике аксиоматического метода приучило к мысли о естественности подобного способа организации знания, что и было, по существу, зафиксировано А.Д. Александровым: «…наряду с накоплением математических знаний, с установлением связей между получаемыми результатами и унификацией правил решения задач складывались теоретические способы вывода новых результатов и первые математические доказательства. В конечном итоге это привело к качественному скачку: сложилась чистая математика с ее дедуктивным методом»[3]. Ясно, что объяснение возникновения дедуктивной математики посредством применения закона перехода количественных изменений в качественные не требует отыскания каких-либо особых предпосылок исторического процесса преобразования математического знания на принципах логического вывода: всё происходит совершенно автоматически под напором разрастающегося

[3] *Александров А.Д.* Математика // Философская энциклопедия. М., 1964. Т. 3. С. 331.

объема сведений, вследствие чего конкретно-исторические особенности развития математики в той или иной цивилизации не должны играть никакой роли. Вместе с тем, объем математических сведений, накопленных в средние века в Индии и Китае, был сопоставим с познаниями древних греков IV в. до н. э. – времени возникновения аксиоматического способа построения знания. Следовательно, в своем исходном виде гипотеза Александрова не в состоянии дать удовлетворительное объяснение сугубо греческому происхождению дедуктивной математики. В параграфе показывается, что попытки модифицировать данную гипотезу неизбежно приводят к поиску причин, лежащих за пределами математики как таковой, а это и означает необходимость отыскания специфических «греческих» предпосылок возникновения дедуктивного способа рассуждений.

Социокультурные концепции генезиса теоретической математики, наиболее ранняя из которых была предложена А.Н. Колмогоровым, в конечном счете, сводятся к выделению среди особенностей античной цивилизации одного или нескольких признаков, имеющих отношение к рассматриваемой проблеме и характерных для одной только Эллады. Таким способом можно надеяться одновременно объяснить как зарождение дедуктивной математики именно в Греции, так и отсутствие подобного способа систематизации математического знания в других древних цивилизациях.

Этому способу присущ важный с методологической точки зрения недостаток: при абстрагировании из конкретной исторической ситуации Греции VI–IV вв. до н. э. одного или нескольких признаков, внешних по отношению к математике, но являющихся существенными – по замыслу исследования – для её преобразования в теоретическую дедуктивную науку, мы лишены в самый момент абстрагирования какого-либо объективного критерия для предпочтения одних признаков по отношению к другим возможным их выборам. Данное обстоятельство и приводит к появлению множества более или менее правдоподобных реконструкций, ни одной из которых нельзя отдать решительного предпочтения перед остальными.

Выход из данной ситуации можно искать только на одном пути, стремясь произвести отбор тех или иных предпосылок из наличной картины исторической действительности Греции VI–IV вв. до н. э. на основе строго объективного критерия, внешнего по отношению к истории как таковой. Подобный критерий можно «извлечь» только из анализа «идеи» дедуктивно-аксиоматического метода. Иного «источника» просто не существует.

В качестве критерия для различения дедуктивно организованной системы знания от недедуктивной науки можно взять образную характеристику специфики аксиоматического метода, принадлежащую С.А. Яновской: «Математик обязан точно указать все свойства определяемых им объектов и не имеет права пользоваться никакими свойствами их, не содержащимися в определении и не вытекающими из него. В последнем случае он должен уметь доказать (используя опять-таки только то, что ему дано, и применяя только заранее перечисленные, как позволенные ему, операции), что свойство, которым он воспользовался, действительно следует из свойств, непосредственно содержащихся в определении. В этом смысле он бывает иногда похож на игрока в кегли, который мог бы спокойно подойти и сбросить любое (из возможных) число кегель руками, но который имеет право сбивать их только издали и только катящимися по земле шарами, т.е. строго соблюдая все правила игры»[4]. Сущность приведенной характеристики аксиоматического метода заключается в том, что в соответствии с ней всякая дедуктивная наука должна «добровольно» ограничивать свою связь с внешним опытом только формулировкой исходных положений и не требовать впоследствии дополнительного подтверждения собственных предложений сравнением с действительностью. Исходя из этого и можно попытаться отыскать интересующие нас предпосылки возникновения дедуктивной математики.

Так как целесообразная деятельность по воспроизведению и приращению содержания уже сформировавшейся дедуктивной науки не зависит от времени и места её протекания, то и найденные на этом пути предпосылки будут лишены «исторической плоти» и потому будут носить сугубо формальный характер. По этой причине их естественно назвать *формальными предпосылками* возникновения дедуктивной математики. Вместе с тем их нельзя противопоставлять историческим предпосылкам в собственном смысле этого слова. Каждая формальная предпосылка является потенциально также и исторической предпосылкой, но оказаться таковой она может только после дополнения теоретического анализа конкретным историческим исследованием. Формальные предпосылки призваны играть роль того самого критерия, на основе которого выбор исторических предпосылок может быть осуществлен объективным образом. Самой простой и абстрактной среди них должна быть та, которая отражает связь (или отсутствие таковой) между дедуктивным способом построения теории, в максимальной степени изолирующим её утверждения от воздействия чувственно воспринимаемой реальности, и практической деятельностью, которая в эту реальность погружена.

Второй параграф «Дедуктивный метод и практика» посвящен анализу возможности зарождения идеи аксиоматического способа построения знания в рамках прикладной науки. Деятельность ученого, занимающегося исследованиями практической направленности, подчинена схеме: *дело – понятие – дело*. И исходный, и конечный пункт работы исследователя-прикладника обращены к реальности, что исключает, казалось бы, саму возможность возникновения свойственной дедуктивным наукам противоположной установки на ограничение контактов с действительностью только стадией формулиро-

[4] *Яновская С.А.* Содержательная истинность и формально логическая доказуемость в математике // Практика и познание. М., 1973. С. 247.

вания исходных основоположений теории. Тем не менее, и здесь могут встретиться ситуации, когда будет востребована идеология аксиоматического метода.

Во-первых, она может оказаться полезной на заключительной стадии проверки прикладных разработок, если логические рассуждения окажутся в состоянии заменить проведение реального эксперимента, который может быть затруднен из-за большой стоимости или каких-либо иных причин. Во-вторых, не исключено, что она могла бы помочь в процессе проектирования новых разработок.

В параграфе показывается, что, несмотря на возможную полезность логической дедукции в задачах прикладного содержания, *зародиться* идея вывода сложных утверждений из принятых без доказательства основоположений в рамках практической деятельности всё же никак не может. Косвенно на это указывает отсутствие на сегодняшний день успешных примеров применения аксиоматического метода как в первом, так и во втором перечисленных случаях.

Действительной причиной отсутствия успехов в первом случае при этом оказывается принципиальная невозможность учета общей физической теорией всех особенностей поведения сконструированной технической новинки в сложных внешних условиях. Качественная новизна воплощенных в объекте технических идей вынуждает осуществлять проверку не в мысленном или компьютерном, а в реальном эксперименте. А это и означает, что на стадии проверки правильности разработанных практических предписаний применение аксиоматического метода не сулит никаких реальных выгод. Причиной неудач попыток применения аксиоматического метода в задачах проектирования оказывается максимально «недедуктивный» характер операции синтеза: если построение проекта содержит 10 отдельных шагов, то на каждом шаге, т.е. 10 раз, приходится привлекать информацию, не заложенную с самого начала в исходные основоположения дедуктивной теории, построенной специально для осуществления синтеза плана.

Тем самым показано, что подлинный источник становления дедуктивного метода может быть найден только в теоретической сфере деятельности, ценность и значение которой не зависят от наличия сиюминутной выгоды, определяясь факторами иного – не материального – характера. Наличие теоретической сферы «знания ради знания» становится, таким образом, первой формальной предпосылкой возникновения дедуктивного метода.

В **третьем параграфе** «Стихийность и сознательность в возникновении аксиоматического метода» рассматривается вопрос о возможности зарождения идеи аксиоматического способа построения знания в качестве побочного продукта действий, имеющих внешний характер по отношению к данному результату (именно так возникает дедуктивный метод согласно концепции А.Д. Александрова).

В первой части параграфа показано, что исключение повторов в изложении учебного материала с целью достижения максимальной его компактности недостаточно для автоматического преобразования какой-либо области знания в дедуктивную науку.

Во второй части параграфа показано, что в действительности основная функция дедуктивного метода не прагматическая (как выглядит дело в «учебной» концепции его возникновения), а идеологическая, когда на первый план выходит задача сужения возможностей для оспаривания предъявляемых выводов со стороны оппонентов теории. Наиболее эффективным средством защиты конкретного утверждения теории является предварительная формулировка всех используемых в нем без доказательства фактов *до* формулировки результата и реального осуществления рассуждения.

В случае, когда принятые без доказательства факты преподносятся оппоненту *после* формулировки неприемлемого для него утверждения, он просто переносит свою отрицательную установку с конечного вывода на одну (или несколько) из посылок. Если же все указанные факты были сообщены ему до формулировки результата (в таком случае они просто формируют предметную область будущего рассуждения), то тогда оппонент должен определить свое к ним отношение исходя из них самих, а не из внешней по отношению к ним установки, связанной с критической оценкой рассматриваемого утверждения. Поскольку их отрицание равносильно отрицанию самой предметной области теории, то до спора по существу одного из её конкретных результатов дело попросту не дойдет. Коль скоро отрицание всей теории лишено смысла, то тогда оппонент будет вынужден согласиться и с неприятным для него выводом, избежать которого при иной линии поведения автора результата он всеми силами постарался бы. Никакой лучшей стратегии в деле защиты результатов «чистой» теории от предполагаемых возражений не существует. Дедуктивный метод построения науки предстает в этой связи как максимально эффективный способ защиты как отдельных, так и всех результатов теории от возможного их опровержения.

Сомнение обычно вызывают лишь наиболее сложные вопросы теории. В каждом из этих случаев речь идет о возможных спорах между специалистами, которым нет необходимости ставить под сомнение сами основы своей теории, а, следовательно, и требовать максимально возможной строгости с первых шагов её построения. Последнее необходимо лишь в том случае, когда подозрение вызывают *все* результаты теории независимо от специфики их содержания. А это происходит тогда, когда критика ведется не изнутри, а с *внешней* по отношению к теории позиции. Именно при наличии такого общего критического настроя и возникает потребность в преобразовании науки в форму дедуктивной теории.

Охарактеризовав аксиоматический способ построения теории как максимально эффективное средство защиты её результатов от внешней критики, можно констатировать, что преобразование науки в дедуктивную форму могло произойти только в результате последовательных целенаправленных действий по выявлению и формулированию тех простейших определений и утверждений, к которым сводятся в конечном счете все её теоремы и предложения. Устранение повторов в изложении теории на основе выявленных постулатов и аксиом, что вполне может диктоваться и имеющими внешний характер по отношению к сущности логической дедукции учебными целями, и должно в итоге привести к расположению материала в соответствии с канонами аксиоматического метода. Отказ от использования содержательных представлений об объектах в процессе построения теории, формализм его отдельных шагов гарантируют непреложность выводов для самого придирчивого критика, если только он имел неосторожность согласиться с исходными основоположениями.

Тем самым мы получаем вторую формальную предпосылку возникновения дедуктивного метода: в обществе должна возникнуть релятивистская установка, защищающая тезис: у каждого – истина своя. Доказательный вывод на основе предварительно сформулированных начальных положений становится в таком случае неизбежной защитной реакцией науки от разрушительного для неё софистического релятивизма.

Четвертый параграф «Роль геометрии в становлении дедуктивного метода» посвящен проблеме: имеется ли для дедуктивного метода какая-либо «предпочтительная» предметная область или же он может рассматриваться как универсальный способ построения математического знания? Для Д. Гильберта и Н. Бурбаки, безусловно, правильным является второй вариант ответа. Однако С.А. Яновская в 1956 г. поставила и дала ответ на вопрос о причинах, по которым арифметика более чем на два тысячелетия позже геометрии приняла аксиоматическую форму[5]. Тем самым геометрия оказывается более приемлемой кандидатурой на роль прародительницы аксиоматического метода, нежели арифметика, что, очевидно, противоречит универсалистским притязаниям дедуктивного метода построения научного знания.

В первой части параграфа показано, что аксиоматический метод не может зародиться не только в естественнонаучных теориях, где существует «внешний» способ проверки утверждения теории, не сводящийся к удостоверению отсутствия ошибок в его выводе, но и в арифметике. Каждое предложение, выводимое из аксиом формализованной арифметики, обладает и «содержательным» доказательством, не уступающим по степени убедительности формальной дедукции. Аксиоматический вывод всегда может быть преобразован в содержательное рассуждение с помощью интерпретации всех шагов вывода на «квазипредметной» модели. Последнее возможно по той

[5] *Яновская С.А.* Из истории аксиоматики // Историко-математические исследования. М., 1958. Вып. XI. С. 63–96.

причине, что сами законы счета, служащие прообразом аксиом формальной арифметики, не только обладают подобной интерпретацией, но и исторически могли быть осознаны только благодаря рефлексии над фактически осуществляемым пересчетом предметов путем перевода этой деятельности в план мысленного созерцания и представления. Так как вопрос об истинности аксиом не обсуждается в рамках дедуктивной теории, то справедливость любого формально выведенного арифметического утверждения обусловлена принятием исходных основоположений, в то время как после «квазипредметной» интерпретации этот момент условности полностью исчезает. А это означает, что переход на точку зрения аксиоматики не дает никакого выигрыша в отношении степени убедительности обоснования арифметических утверждений. Наличие независимой внешней проверки справедливости предложений теоретической арифметики лишает её «внутреннего стимула» к преобразованию в дедуктивную форму. Вследствие этого арифметика также ни при каких обстоятельствах не могла стать первой дедуктивной дисциплиной.

В геометрии, напротив, наряду с утверждениями, не требующими обращения к логической дедукции (например, доказываемого путем перегибания равенства углов при основании равнобедренного треугольника), значительное количество предложений не может быть доказано «предметным» образом. Поэтому геометрия вправе претендовать на роль «прародительницы» аксиоматического метода. Но это само по себе не означает, что никакая другая наука на подобную роль претендовать не может.

Для того чтобы в какой-то теоретической дисциплине могла зародиться идея логической дедукции необходимо, чтобы утверждения о свойствах её объектов не допускали иного способа проверки, кроме повторения процесса мысленного их конструирования в соответствии с заранее принятыми требованиями. Такой дисциплиной могла бы, в принципе, стать и логика, предметная область которой вообще не ограничена никакими рамками. Во второй части параграфа, однако, показано, что осмысление практики дискуссий не может привести к возникновению идеи аксиоматического метода.

Существо дискуссии требует выхода за рамки формализованных представлений о предмете спора, поскольку с точки зрения дедуктивного метода оппонентам пришлось бы иметь дело одновременно с двумя противоречащими друг другу системами аксиом. Последний удобен тогда, когда излагается и, соответственно, оспаривается только одна точка зрения.

Если содержательная сторона дискуссии служит препятствием для её эффективной аксиоматизации, то формальный её аспект вполне поддается изложению в духе логической дедукции. О чем бы ни шла полемика и кто бы в ней ни участвовал, в её «структуре» содержатся такие элементы, отказ от которых равносилен разрушению всей «конструкции спора». Если один из оппонентов согласился с тем, что из утверждения A следует утверждение B, а затем признал справедливость A, то он будет вынужден принять и утверждение B, как бы это не было ему невыгодно или неприятно. Поставить под сомнение заключительный вывод означало бы лишить в дальнейшем также и себя самого какого-либо способа принуждения противника. Аналогичным образом, нельзя не согласиться с одним из двух взаимоисключающих высказываний при условии, что оба они не могут быть одновременно ложными, а также с другими подобными «метаутверждениями», обязательность которых вытекает не из специфики «материи» спора, а из одной лишь его формы, «предполагающей» равные права участников дискуссии.

По мере накопления подобных универсальных правил и под напором критики вездесущих оппонентов рано или поздно придется поставить вопрос и об их обосновании. И тогда придется выделить среди этих правил простейшие и показать, что все остальные к ним сводятся. Но это и было бы дедуктивным построением «теории ведения спора», или, в современной терминологии, – логики высказываний. При таком сценарии первой дедуктивной наукой оказалась бы не геометрия, а логика. Однако на пути его реализации также возникают трудности.

Формальные правила, регулирующие поведение спорящих сторон, не зависят не только от содержания дискутируемых вопросов, но и от способа вывода заключений. Совершенно не важно, имеет ли он форму дедуктивного вывода из заранее оговоренных посылок, апеллирует ли к реальности или является всего лишь более или менее правдоподобным, рассчитанным на неопытность оппонента рассуждением, – во всех этих случаях в узловые моменты спора нейтральный судья-наблюдатель в состоянии вынести вердикт по поводу отдельных утверждений, ссылаясь на один только факт согласия каждого из участников спора с некоторыми из предшествующих предложений. Апелляция к формальной схеме умозаключения может быть целесообразной лишь тогда, когда доказательство посылок вывода произошло достаточно давно и оппонент мог уже и позабыть о нём, однако эта схема никогда не приводится в абстрактно-логическом виде, но всегда только в её содержательном «обрамлении». Поэтому те правила вывода, которые создатель «теории спора» мог бы извлечь из реальной практики дискуссий, расположив затем их в соответствии с канонами аксиоматического метода, всё равно использовались бы на деле в их неформальном, «дотеоретическом» виде, и особенности дедуктивного построения логики высказываний никак не отразились бы на реальном предмете теории. Для того чтобы подобная теория «работала», а только это и могло бы оправдать её существование (и последующую её аксиоматизацию), она должна способствовать отысканию таких новых способов умозаключений, которые в практике дискуссий прежде не встречались и появились в ней затем именно благодаря дедуктивной форме данной теории. Но это в действительности невозможно.

В дискуссии формальный момент всегда подчинен её предметному содержанию. Если открытая дедуктивно-теоретически новая схема вывода «внедряется» в материальную ткань полемики, становясь ведущей стороной в одной из критических точек дискуссии, то это означает, что *не зависящая ни от какого содержания* схема в состоянии сформировать из «материи спора» адекватное себе *содержательное* умозаключение, способствующее достижению целей одного из участников диспута. Само собой понятно, что детерминируемая своим собственным содержанием структура дискуссионного процесса не допустит «вторжение» в неё со стороны «вещи», никак с этим содержанием не связанной. По этой причине если исторически дедуктивное изложение логики высказываний всё же возникает (как это имело место у стоиков), то оно должно быть привнесено в неё извне. Отсюда, в свою очередь, следует, что должна существовать *особая предметная область*, специфическое содержание которой, как и в геометрии, способно породить из себя идеи аксиоматики.

Специфическая роль геометрии в историческом становлении идей аксиоматического метода объясняется парадоксальным сочетанием двух противоположных обстоятельств: хотя свойства геометрических объектов в силу их особой наглядности могут быть открыты и разъяснены независимо от какой бы то ни было аксиоматики и дедукции, доказательство их истинности в большинстве случаев невозможно без опоры на предварительно сформулированные аксиомы и постулаты. Равенство внешнего угла треугольника сумме внутренних не смежных с ним углов не предполагает для объяснения его смысла каких-либо особых познаний в геометрии, однако для его доказательства пришлось бы углубиться в основы аксиоматического метода.

В арифметике и догадка, и проверка истинности сделанного утверждения вполне могут обходиться без явного формулирования дедуктивных основоположений, касающихся свойств натуральных чисел, что, собственно, и делает в ней аксиоматический метод «излишней роскошью». В логике высказываний сложные правила умозаключений невозможно, как и в геометрии, обосновать вне рамок аксиоматического метода, но уже сам способ их получения, коль скоро они не извлечены из реальной практики рассуждений, фактически является также и их доказательством. Если помимо геометрии никакая другая наука не обладает указанными ранее свойствами, это и означало бы, что ставшее умозрительной дисциплиной искусство землемерия является единственной областью знания, в лоне которой способен зародиться аксиоматический метод. Двойственный характер объектов «первой дедуктивной науки», становящихся «идеальными» при окончательном изложении её результатов, но в процессе их обоснования не противополагаемых чувственной реальности и потому целиком принадлежащих ей, накладывает достаточно жесткие условия, чтобы отождествить их с геометрическими фигурами. Обоснованию этого утверждения и посвящена заключительная часть параграфа.

<u>**Пятый параграф «**Дедуктивный метод и математика восточных цивилизаций»</u> занимает промежуточное положение в диссертации. Рассмотрение

формальных предпосылок в первой главе представляет собой вспомогательное средство для реконструкции исторического процесса, при этом условия места и времени в их конкретной определенности не играют никакой роли (хотя то обстоятельство, что человеческая деятельность не может протекать вне пространства и времени, весьма существенно для полученных выводов). Это и дает основание для «применимости» их к любой цивилизации, будь то Индия, Китай или Вавилон. Вместе с тем, даже самое поверхностное обращение к истории этих цивилизаций указывает на недостаточность найденных предпосылок для выявления причин уникального характера эллинской математики. В Вавилоне и других восточных государствах с древнейших времен были известны многие свойства фигур, включаемые ныне в курс аксиоматически построенной геометрии. А с появлением во второй половине I тыс. до н. э. в Индии и Китае противостоящих друг другу философских школ неминуемо должна была возникнуть потребность в защите их базисных положений от нападок оппонентов. Тем не менее, несмотря на наличие необходимых формальных предпосылок, дедуктивный способ рассуждений так и не сформировался ни в индийской, ни в китайской науке. А это означает, что для объяснения уникального характера греческой дедуктивной геометрии желательно более конкретно определить её специфику по отношению к геометрическим знаниям стран Востока.

Значение математики для философии вообще и философии науки в частности связывают, в первую очередь, с фактом открытия неевклидовой геометрии. Создание на базе отрицания постулата о параллельных теории столь же непротиворечивой, сколь и «Начала» Евклида, выявило «недоказуемость» возможности построения на заданном отрезке самой простой и главной фигуры в землемерном искусстве – прямоугольника. Существование прямоугольника на заданном основании, в свою очередь, логически эквивалентно утверждению о равенстве суммы углов треугольника двум прямым. А это свойство стало предметом изучения только у греческих ученых.

Хотя формулировки обоих утверждений относятся к ограниченным фигурам, строгое их доказательство предполагает «выход в бесконечность»: и то, и другое требуют использования понятия параллельности, а там, где в чертеже возникают параллельные линии, неотъемлемой его частью становятся и заключающиеся между ними части плоскости. Поскольку неограниченная часть плоскости может рассматриваться как корректно определенное целое лишь в предположении однозначности продолжения прямой (угол как неограниченное подмножество плоскости должен однозначно определяться любой своей конечной частью), важно знать, можно ли её гарантировать в рамках предметно осуществляемых построений. В параграфе показано, что при помощи реальных циркуля и линейки прямую в действительности однозначно продолжить нельзя. Тем самым понятие бесконечного угла оказывается принадлежащим уже не «геометрии чертежей», а науке, изучающей свойства идеальных, невещественных объектов.

Ключевую роль у Евклида в доказательстве однозначности продолжения прямой играет предложение I, 14, обратное к предложению I, 13, утверждающему постоянство суммы двух углов: заданного угла и смежного с ним. Уже сама формулировка этих двух предложений предполагает IV постулат о равенстве всех прямых углов. Именно этот постулат и является «ответственным» за превращение геометрии из науки о реальных чертежах в теорию, исследующую фигуры и тела, существующие исключительно в человеческом воображении.

Если бы в древнегреческой математике не возник раздел, изучающий свойства углов в треугольнике, то не было бы необходимости в переходе от «предметной» геометрии Фалеса к идеальной евклидовой геометрии. В математике восточных цивилизаций геометрия углов не рассматривалась, вследствие чего все её утверждения могли быть обоснованы наглядно-предметным образом при неявно и бессознательно принимаемой «аксиоме существования прямоугольника» – предположении, впервые поставленном под сомнение Ламбертом лишь в XVIII в.

Утверждение об обязательности для преобразования геометрии в дедуктивную науку наличия в ней раздела, изучающего свойства углов, может быть обосновано и чисто логическими рассуждениями. Поэтому её правомерно рассматривать в качестве формальной предпосылки возникновения аксиоматического метода. Обращение же к истории математики восточных цивилизации было использовано в работе исключительно с целью упрощения рассуждений.

Приведенное объяснение уникального характера греческой геометрии является неполным, так как необходимо также понять причины, воспрепятствовавшие изучению свойств произвольных углов в науке восточных цивилизаций. Эти причины могут иметь только конкретно-исторический характер. Их исследованию посвящена **<u>вторая</u> глава «Исторические предпосылки формирования дедуктивной математики»**.

<u>Первый параграф</u> <u>«Формирование идеала теоретического знания в древнегреческой математике»</u> посвящен выяснению обстоятельств, способствовавших становлению геометрии как абстрактной науки о свойствах фигур и тел.

Проблемы чисто теоретического характера появились в математике задолго до возникновения аксиоматического метода. В Вавилоне уже в эпоху Хаммурапи решались многочисленные задачи наподобие нахождения сторон прямоугольника по известным периметру и площади. Такого рода проблемы, возникающие в качестве обратных к непосредственно связанным с хозяйственной деятельностью прямым вычислительным задачам, не имели никогда никакого практического значения и относятся поэтому к теоретической математике. Вместе с тем, вавилоняне не смогли выработать представления об абстрактных математических объектах. В то же время Платон и Аристотель едины в том, что математические объекты относятся к области умопостигаемого и ни в коем случае не могут отождествляться с их чувственными изображениями. Поэтому подразделение знаний на теоретические и практически ориентированные, послужившее основой для нахождения первой из формальных предпосылок возникновения дедуктивной науки, недостаточно для выявления исторической специфики древнегреческой геометрии.

Поскольку ранее уже была установлена особая роль учения о свойствах углов в становлении дедуктивной математики, то естественно выяснить, каким образом в греческой геометрии закрепился такой его основополагающий факт, как равенство углов при основании равнобедренного треугольника. Подлинное значение данного утверждения в том, оно является единственным опосредующим звеном между свойствами сторон и свойствами углов в треугольнике, а следовательно, ни одна цивилизация, не зная его, не в состоянии приобщить к числу принадлежащих её науке сведений неочевидный факт постоянства суммы углов в каждом треугольнике независимо от величин составляющих его элементов. А без этого факта нет шансов и на создание дедуктивного способа построения математического знания силами «республики ученых» данной цивилизации.

Первая часть параграфа посвящена анализу обстоятельств, способствовавших открытию и фиксации в «памяти цивилизации» свойства углов равнобедренного треугольника. Показывается, что единственным «стимулом» для этого могло стать обеспечение симметрии при сооружении конструкций пирамидальной формы.

Хотя данный анализ опирается на сообщение Прокла о египетском происхождении геометрических познаний Фалеса, тем не менее, его, по существу, логический характер позволяет задним числом рассматривать вывод о решающей роли архитектуры египтян в обнаружении равенства углов в равнобедренном треугольнике в качестве *формальной предпосылки* возникновения дедуктивной науки: где бы и когда бы ни появилось построение теоретической геометрии на основе постулатов и аксиом, этому обязательно должна была предшествовать практика строительства пирамид. Тем самым отсутствие всюду кроме Древнего Египта построек, имеющих форму полной пирамиды, объясняет невозможность возникновения дедуктивной геометрии в Вавилоне, Индии и Китае.

Вместе с тем, являясь всего лишь *необходимым* условием возникновения аксиоматического метода, факт строительства пирамид сам по себе еще не предопределяет появление идеи логической дедукции. Причины преобразования практических геометрических сведений египтян в науку о свойствах абстрактных фигур могут быть найдены только в конкретных обстоятельствах жизни эллинской цивилизации VI—IV вв. до н. э.

Первая же попытка приступить к реализации данной программы наталкивается на препятствие, разрушающее рамки истории науки, внутри которых до сих пор велось исследование. Дело в том, что для Платона наиболее совершенным созданием человеческого ума является диалектика, причем именно в том отношении, которое выделяет аксиоматическую геометрию среди прочих дисциплин. Характеризуя специфику диалектического разума, Платон пишет в конце VI книги «Государства», что «бытие и все умопостигаемое при помощи диалектики можно созерцать яснее, чем то, что рассматривается с помощью только так называемых наук, которые исходят из предположений. Правда, и такие исследователи бывают вынуждены созерцать область умопостигаемого при помощи рассудка, а не посредством ощущений, но поскольку они рассматривают ее на основании своих предположений, не восходя к первоначалу, то... они и не могут постигнуть ее умом, хотя она вполне умопостигаема, если постичь ее первоначало»[6].

Проводимые в диалектике рассуждения роднит с геометрическими доказательствами стремление отказаться от помощи недостоверных чувственных ощущений, в максимально возможной степени заменив их «идеями» самими по себе. Поскольку, согласно Аристотелю[7], источником учения об идеях были проблемы поиска правильных определений «предметов нравственности», то именно этику допустимо, хотя бы гипотетически, рассматривать в качестве одной из *исторических* предпосылок возникновения дедуктивной геометрии. Причем «формальный прообраз» такой исторической предпосылки никак не мог быть обнаружен на предшествующей стадии исследования, поскольку между этикой, «предметы» которой не относятся к чувственно воспринимаемому, и аксиоматико-дедуктивной геометрией не просматривается никакой содержательной связи[8]. Проблема реконструкции исторической картины возникновения аксиоматического метода сводится, с учетом сделанных замечаний, к выбору между следующими альтернативами: 1) дедуктивный метод зарождается внутри геометрии независимо от философии; 2) опыт «работы» с невидимыми и неосязаемыми объектами при обсуждении этической проблематики аккумулируется внутри философии, которая затем способствует «идеализации» и геометрии.

Недоступность области умопостигаемого для чувств можно интерпретировать с современной точки зрения по-разному: как свидетельство бестелесности идей справедливости и рассудительности или, напротив, как признание их особого совершенства в отношении «телесного состава» и местоположения. Тексты Платона и Аристотеля дают достаточно указаний для вы-

---

[6] Государство, VI, 511c–d.
[7] Метафизика, I, 6, 987b 2–7.
[8] Спиноза, строя дедуктивным образом свою «Этику», сознательно ориентировался на геометрический образец.

бора правильной интерпретации причин доступности эйдосов лишь «кормчему души – уму»[9].

Слова элейца из фрагмента 131d–e диалога «Парменид»: «Но, положим, кто-нибудь из нас будет иметь часть малого: малое будет больше этой своей части; таким образом, само малое будет больше, а то, к чему прибавится отнятая от малого часть, станет меньше, а не больше прежнего», – невозможно понять, если полагать эйдос малого бестелесным. Что касается естественного для нашего сознания отождествления идей с мыслями, то там же анализируется (132b–d) и после рассмотрения отбрасывается и эта попытка интерпретации[10]. Вывод напрашивается сам собой: идеи в учении Платона столь же «вещественны», сколь и уподобляющиеся им предметы. И если аристотелевы аналоги платоновых идей – «формы» – определяются Стагиритом как сущность без материи[11], то, следовательно, именно Аристотелю, а не Платону принадлежит понимание общего как «бестелесного».

Аристотель прекрасно сознавал отличие собственного понимания форм-эйдосов от платоновских эйдосов-идей, замечая, что «нелепо утверждать, что существуют некие сущности помимо имеющихся в небе, а с другой – что эти сущности тождественны чувственно воспринимаемым вещам, разве лишь что первые вечны, а вторые преходящи. Действительно, утверждают, что есть сам-по-себе-человек, сама-по-себе-лошадь, само-по-себе-здоровье, и этим ограничиваются, поступая подобно тем, кто говорит, что есть боги, но они человекоподобны. В самом деле, и эти придумывали не что иное, как вечных людей, и те признают эйдосы не чем иным, как наделенными вечностью чувственно воспринимаемыми вещами»[12]. Признающие эйдосы «не в состоянии показать, каковы такого рода – непреходящие – сущности помимо единичных и чувственно воспринимаемых. Так вот, они объявляют их тождественными по виду с преходящими (эти-то сущности мы знаем), изобретают “самого-по-себе-человека” и “самое-по-себе-лошадь”, присоединяя к чувственно воспринимаемым вещам слово “само-по-себе”»[13].

Труды Аристотеля приоткрывают дверь в его творческую лабораторию, позволяя проследить ход его мысли в разрешении затруднений, из которых не могла выбраться мысль ортодоксальных последователей Платона. Так, для превращения эйдосов в бестелесные формы Аристотель строит для них «вместилище»: «форму форм» (или «эйдос эйдосов») – Ум-перводвигатель. Для обоснования его существования Стагирит замечает, что «в некоторых случаях само знание есть предмет [знания]: в знании о творчестве предмет – сущ-

---

[9] Федр, 247c.

[10] О существенности данного обстоятельства для понимания Платона см.: *Сергеев К.А., Слинин Я.А.* Природа и разум: Античная парадигма. Л., 1991. С. 210–212, 234–235.

[11] Метафизика, VII, 7, 1032b 1, 13–14.

[12] Ibid. III, 2, 997b 5–12.

[13] Ibid. VII, 16, 1040b 30–34.

ность, взятая без материи, и суть бытия, в знании умозрительном – определение и мышление», вследствие чего раз «постигаемое мыслью и ум не отличны друг от друга у того, что не имеет материи, то они будут одно и то же»[14].

В «Метафизике» Аристотель ставит творческие и умозрительные науки на одну ступень, однако по другим его работам можно проследить, что «равноправия» здесь нет. На основе VII и VIII книг «Метафизики», а также трактатов «Физика» и «О небе» в работе показывается, что представление о предмете «творческих наук» как о лишенном материи у Стагирита является производным от аналогичного представления о предмете теоретических наук (точнее – в силу установленного ранее – геометрии). Тем самым, ни диалектика Платона, ни «первая философия» Аристотеля не могли выполнить роль «катализатора» в процессе преобразовании геометрии в дедуктивную дисциплину. Данный процесс протекал всецело в рамках «созревания» соответствующих формальных предпосылок, а именно – возникновения теоретической науки о свойствах фигур и углов, а также формирования «критической установки» по отношению к знанию вообще.

Становление теоретической геометрии в Древней Греции VI–IV вв. до н. э. могло происходить одним из двух способов. В случае, если заимствованные в Египте геометрические познания получали какие-либо практические приложения в новой цивилизации, теоретическая геометрия должна была развиваться наряду с практическим искусством землемерия. Но возможен и другой вариант, когда по тем или иным причинам подобные применения оказались невозможны и геометрия на земле Эллады стала теоретической наукой *поневоле*.

В.Д. Блаватский[15] описывает следующие виды общественных работ в Древней Греции: вырубка лесов на склонах гор, создание в колониях Ю. Италии и Сицилии в VIII–VII вв. до н. э. садов и виноградников, осушение болот, строительство, разработка каменоломен и рудников, прокладка дорог, сооружение каналов и гаваней. К этому списку можно добавить планировку наделов (клеров) в греческих колониях. В Метапонте, к примеру, предположительно уже в VII вв. до н. э. применялась довольно сложная система планировки клеров, в которой наделы вместе образовывали поле в виде параллелограмма с перпендикулярными диагоналями. Всё это свидетельствует, казалось бы, в пользу широкого практического применения методов геометрии в античности.

Прокл в комментариях к Евклиду приписывает родоначальнику греческой геометрии Фалесу знание теорем о делении круга диаметром пополам, о равенстве углов в равнобедренном треугольнике, равенстве вертикальных углов, а также признак равенства треугольников по стороне и двум приле-

[14] Ibid. XII, 9, 1075a 1–4.
[15] *Блаватский В.Д.* Природа и античное общество. М., 1966.

жащим углам. Но все эти предложения в задачах землемерия не играют существенной роли, поскольку основными при измерении земли являются фигуры с прямыми углами. Острые и тупые углы не могут быть предметом специального интереса в практической геометрии. Источником указанных фактов могло быть лишь египетское искусство строительства пирамид, в котором наряду с вопросами о величинах площадей и объемов важное значение придавалось также элементам возводившихся сооружений, имеющим *треугольную* форму.

Форма объекта существенна лишь тогда, когда незначительная погрешность на отдельной стадии процесса его построения может обернуться непоправимыми потерями. Греческий храм, например, хотя и содержит элементы треугольной формы (обладающие зеркальной симметрией фронтоны), однако в них вполне допустимы незначительные отклонения от симметрии в силу плоского характера конструкции, так что контроль за равенством углов при основании фронтона не должен быть таким же строгим, как в случае пирамиды. То обстоятельство, что для практических потребностей греческой цивилизации, по крайней мере на протяжении VI–IV вв. до н. э., вполне достаточно было использования свойств прямоугольных фигур, в то время как заимствованная из Египта геометрия занималась изучением «произвольных углов», и обусловило *теоретический* характер последней.

Последняя часть § 2.1 посвящена выяснению специфики древнегреческой геометрии в том виде, как она сформировалась на рубеже V–IV вв. до н.э., а также выяснению её роли в формировании логики стоиков.

В дедуктивной геометрии человек впервые сталкивается с ситуацией, когда оформленная в виде речи мысль оказывается замкнутой сама на себя. И если в «творческих логосах» душа направлена в первую очередь на создаваемые при помощи них вещи, в то время как сопутствующие слова играют сугубо подчиненную роль, то в «теоретических логосах» слово становится решающим и единственным фактором утверждения их истинности. Хотя представления о геометрических объектах первоначально возникают в индивидуальной душе не без помощи чувственных восприятий, в *доказательствах* их свойств опираются не на эти впечатления, а исключительно на словесно сформулированные предположения. Поэтому именно геометрия вынудила стоиков подразделить представления на чувственные, которые воспринимаются посредством одного или нескольких органов чувств, и внечувственные, возникающие в человеке при помощи речи. Последние стоики стали называть специально изобретенным термином □□□□□□. Существование подобного бестелесного лектон стоики обосновывали, ссылаясь на пример с восприятием речи: «*…обозначаемое* – тот предмет, выражаемый звуком, который мы постигаем своим рассудком, как уже заранее существующий, а варвары не воспринимают, хотя и слышат звук…»[16]

Если Платон, имея в виду практическое назначение языка, уподоблял имена орудиям[17], то стоики своим примером зафиксировали ситуацию «незаинтересованного», созерцательного отношения к иностранному языку, благодаря чему и смогли расширить свою концепцию «бестелесных высказываний» с предложений, касающихся свойств геометрических объектов, на суждения общего вида. Подобным образом вместе с геометрическими предложениями статус бестелесных получают и все высказывания, служащие объектом изучения стоической логики.

Во **втором параграфе** «Софистика и математическая строгость» предметом анализа является общественная атмосфера древнегреческих полисов с точки зрения наличия в ней условий, благоприятствовавших преобразованию теоретической геометрии в форму дедуктивной науки. Обращение к источникам без труда позволяет найти «исторический аналог» найденной в первой главе формальной предпосылке. Для выявленной при помощи сугубо логических рассуждений релятивистской установки, характеризующейся тезисом: «у каждого – истина своя», имеется выразитель соответствующих взглядов – Протагор, полагавший, что «о всяком предмете можно сказать двояко и противоположным образом»[18].

Распространение в греческих полисах практики словесных споров, в которых участники ради победы были готовы на самые изощренные ухищрения, не могло не затронуть и геометрию. Стоило только поставить под сомнение само существование основной фигуры землемерного искусства – квадрата, и неявно принимавшаяся «аксиома прямоугольника» неизбежно должна была быть эксплицирована в виде требований, касающихся условия параллельности двух прямых и равенства всех прямых углов (V и IV постулаты Евклида), а вслед за этим обязательно должны были появиться и остальные постулаты геометрии.

Первые три геометрические постулата не только не являются очевидными, но, в каком-то смысле, даже противоречат обыденному опыту только приступающего к занятиям этой наукой: в реальной практике землемерных построений нельзя гарантировать ни проведение прямой между произвольными точками, ни проведения окружности малого или, напротив, очень большого радиуса. Поэтому Аристотель и говорит про постулат, что он представляет собой «нечто противное мнению изучающего или нечто такое, что, будучи доказываемым, принимается или применяется недоказанным»[19].

---

[16] Перевод Е.П. Ернштедта (Античные теории языка и стиля. М.-Л., 1936. С. 69) соответствующего места (VIII, 11–12) сочинения Секста Эмпирика «Против ученых».

[17] Кратил, 388a–d.

[18] *Диоген Лаэртский*. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов, IX, 51.

[19] Вторая аналитика, I, 10, 76b 32–34.

Новая геометрия, имеющая дело с идеальными точками, линиями и поверхностями, включает в качестве составной части прежнюю геометрию чертежей, расширяя сферу её применения в область сколь угодно больших и сколь угодно малых расстояний. При этом она может даже не затрагивать употреблявшиеся в ней прежде словесные обороты, за что платоновский Сократ не без основания упрекал геометров. Именно это обстоятельство делает затруднительными нападки на её утверждения со стороны последователей протагоровского релятивизма.

Теоретический характер древнегреческой геометрии, наличие в её составе учения о свойствах углов делали неизбежным её превращение в дедуктивную науку в конкретных исторических условиях кризиса античного полиса. То обстоятельство, что данное преобразование не вытекает из «природы» математики как таковой, а обусловлено внешними по отношению к ней причинами, было очевидно для Платона, на глазах которого происходил этот процесс. Указывая математикам на недостаток способа изложения, когда при использовании предположений они не отдают в них отчета, Платон пытался исправить его, подчинив построение наук принципам диалектического метода. Этот метод, исходящий из рассмотрения беспредпосылочного начала – Блага, по мнению философа, единственный в состоянии сделать геометрию и следующие за ней науки подлинным знанием[20].

Аристотель, допуская возможность ниспровержения геометрии «на основании принципов, более достоверных, чем ее аксиомы»[21], считал, в противоположность учителю, его космологические гипотезы менее достоверными, чем допущения математиков. И именно геометрические постулаты он и положил в основание собственных философских построений.

<u>Третий параграф</u> <u>«Геометрия египтян и дедуктивная математика»</u> посвящен оставшемуся открытым в § 1.5 вопросу о причинах отсутствия дедуктивного метода в египетской геометрии. Вряд ли подлежит сомнению наличие теоретической установки относительно собственного землемерного искусства у жрецов Египта. Кроме того, поскольку засвидетельствовано «ограбление гробниц Двадцатой династии, к которому… были с выгодой для себя причастны высшие власти»[22], указывающее на ослабление древних религиозных традиций, в Египте к концу первого тысячелетия до н.э. сложились объективные предпосылки также для роста софистических умонастроений. Могло ли в таком случае что-либо воспрепятствовать созданию египтянами аксиоматической геометрии?

Если бы египтяне построили свою геометрию на принципах дедукции, то в таком случае им пришлось бы, как и сделавшим это в IV в. до н.э. грекам,

---

[20] Государство, VII, 533b–d.

[21] О небе, III, 1, 299a 5–6.

[22] *Франкфорт Г., Франкфорт Г.А., Уилсон Дж., Якобсен Т.* В преддверии философии. Духовные искания древнего человека. М., 1984. С. 93.

поставить под сомнение возможность построения прямоугольника. Что же мог бы возразить хранитель египетской геометрической мудрости софистически настроенному оппоненту? Достаточно сослаться на факт успешной постройки пирамид: если бы при разметке основания вместо квадрата получился четырехугольник, имеющий только два или три прямых угла, то это с самого начала нарушило бы симметрию сооружения и не позволило бы свести вверху воедино все четыре боковых грани.

Подобный ответ выглядит неубедительным только с позиций человека, различающего идеальные и реальные геометрические фигуры. С подобной точки зрения любой, даже самым тщательным образом построенный, квадрат в действительности таковым не является, поскольку обязательно отклоняется от «совершенного образца». Но такое противопоставление идеальных и реальных объектов возможно только на базе уже возникшей дедуктивной геометрии и не должно приниматься во внимание в процессе анализа её *генезиса*. В действительной истории становления аксиоматического метода переход к постулированию «идеальных геометрических построений» приходится осуществлять тогда, когда критерий практики – в самом буквальном предметном смысле – перестает работать. Именно это и произошло в процессе обоснования греками «аксиомы прямоугольника», когда были сформулированы сначала пятый и четвертый, а затем и остальные постулаты евклидовых «Начал».

Заключительная часть параграфа посвящена объяснению причин невозможности стереометрического обоснования «аксиомы прямоугольника» в конкретных исторических условиях существования эллинской геометрии, чем и завершается историческая часть диссертационной работы.

То или иное объяснение причин возникновения определенного явления не может не отразиться на понимании его наличного состояния и оценке перспектив развития в будущем. В **третьей главе «Аксиоматический метод и современное научное познание»** аксиоматический метод рассматривается прежде всего в аспекте настоящего, что выдвигает на первый план проблемы математического образования. Будущее аксиоматического метода – это ширящиеся попытки создания эффективно действующих интеллектуальных систем. Проблематика подобного рода естественным образом возникла в § 1.2 при анализе первой из формальных предпосылок возникновения аксиоматического метода, где она рассматривалась под углом зрения прошлого. В данной главе акцент переносится с прошлого на настоящее и будущее.

Первый параграф «Аксиоматический метод и преподавание математики» посвящен педагогическим аспектам преподавания школьного курса геометрии. Сомнение в целесообразности продолжения преподавания геометрии в классическом стиле евклидовых «Начал» высказал в 60-х гг. прошлого столетия Ж. Дьедонне. Вместо изучения свойств треугольников, четырехугольников и окружностей он предложил «попытаться научить детей думать на примере небольшого числа хорошо подобранных понятий…»[23]

Поскольку аксиоматика возникла как средство убеждения в истинности уже найденных каким-то образом утверждений, то нет никакой уверенности, что она может быть использована также и как эффективное эвристическое средство решения *новых* для учащихся задач. В § 1.2 отмечалось, что реально проводимое доказательство является «максимально недедуктивным» из-за содержательного характера цели, «организующей» отбор релевантных логических посылок. Дедукция из аксиом при решении задачи может оказаться полезной, если ученику посчастливилось выбрать среди множества всех утверждений теории те несколько предложений, от которых действительно зависит успех в её решении. Поскольку в удачности выбора можно убедиться, только решив задачу, то подобный, опирающийся на аксиоматическую структуру теории, способ решения превращается в бессистемный набор проб и ошибок с далеко не гарантированным успешным результатом из-за большого количества возможных «стартовых предложений».

Главная польза от изучения геометрии не в тренировке дисциплины мышления, которую за пределами этой науки человеку, не собирающемуся посвятить себя теоретической математике, едва ли удастся когда-нибудь применить, а в развитии совсем иного искусства, связанного не с дедуктивной формой изложения, а с её наглядным содержанием. Развитое теоретическое мышление предполагает умение находить связи между явлениями, недоступные обыденному взгляду. Это достигается путем нахождения одной или нескольких «промежуточных ситуаций», совмещающих в себе характеристики двух, выглядящих на первый взгляд совершенно не связанными между собой, явлений. Такие новые явления находятся как бы «посередине» между исходными наличными явлениями, и потому их поиск называется *опосредствованием*. Искусству нахождения подобного рода опосредующих звеньев геометрия способна учить как никакой другой школьный предмет.

Если на место евклидовой геометрии в основу школьного геометрического курса положить понятия и методы абстрактной линейной алгебры, как предлагал Дьедонне, то возможность обучения на наглядном материале искусству опосредствования будет безвозвратно утеряна. А обучение «линейному мышлению», которое действительно способен привить указанный курс, далеко не равнозначно обучению искусству самостоятельно думать. Ссылки на важность линейной алгебры для теории чисел, теоретической физики, анализа, геометрии и топологии плохо коррелируют с возможностью эффективного использования её идей при обучении учащихся искусству правильно ставить и умело разрешать вопросы, постоянно возникающие в многообразной человеческой жизни. «Линейное мышление» связано с математическим

[23] *Дьедонне Ж.* Линейная алгебра и элементарная геометрия. М., 1972. С. 13.

аппаратом научных дисциплин, а не с их действительным содержанием. Поэтому даже овладение школьником в полном объеме глубоким трудом Дьедонне не окажет ему впоследствии автоматической помощи в решении какой-то проблемы физики, биологии или экономики.

Линейная алгебра отражает своими достоинствами не содержание использующих её аппарат дисциплин, а лишь их формальную количественную сторону. В то же время содержание курса евклидовой геометрии вполне соответствует свойствам реальных фигур и тел. Поэтому успешное овладение идеями традиционного курса геометрии в не меньшей степени полезно с точки зрения развития универсальных мыслительных навыков, нежели овладение методами линейной алгебры, где до реальности надо еще уметь «добраться» посредством содержания той конкретной научной дисциплины, в которой используется её элегантный аппарат. Если же учащийся вообще не планирует заниматься в будущем научной деятельностью, то с точки зрения развития его мышления традиционная школьная геометрия должна иметь несомненное преимущество. Курс геометрии Евклида в большей мере приспособлен для развития универсальных навыков творческого мышления, и с этой точки зрения оригинальный проект Дьедонне изначально был обречен на неудачу.

Во **втором параграфе** «Теоретическая математика как социокультурное образование» предметом анализа является место математики в современной культуре.

Упорядочение математического мира на основе понятия *структуры*, достигнутое в XX веке усилиями Н. Бурбаки, не избавляет от основной проблемы, состоящей во взаимоотношении мира экспериментального и мира математического: «В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм – математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно, почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм»[24]. Это признание Бурбаки возвращает нас, по сути, ко времени построения Аристотелем «первой философии», объяснившей эффективность применения математики к описанию движения небесных тел тем, что математические формы находятся в Уме-перводвигателе, а тот, в свою очередь, управляет посредством мышления движением обнимаемого им Космоса[25]. И в концепции Бурбаки, и в первой философии Аристотеля факт соответствия математических форм явлениям окружающего мира попросту констатируется, поскольку основная идея «объяснения» не подлежит дальнейшей конкретизации.

[24] *Бурбаки Н.* Архитектура математики / Очерки по истории математики. М., 1963. С. 258 сл.
[25] См.: Метафизика, XII, 8.

Главный вывод, вытекающий из исторического рассмотрения проблемы возникновения принятого в математике способа рассуждений, состоит в том, что словесная дедукция частных утверждений науки из общих начальных положений вызвана объективно происшедшим превращением прикладного землемерного искусства в сугубо теоретическую дисциплину, сопровождавшимся полным забвением «архитектурных» истоков. Эта традиция была затем перенесена из геометрии в арифметику, а спустя многие столетия и на другие классические разделы математики, включая анализ бесконечно малых. Так постепенно и сформировалось то огромное здание математики, которое с позиций по-новому понятого аксиоматического метода перестроил в своем многотомном труде Бурбаки.

Аксиоматический способ рассуждений оказал существенное воздействие не только на современную теоретическую математику, но и на весь стиль мышления европейской цивилизации. Данное обстоятельство может быть продемонстрировано на примере формирования понятий «смысл», «символ», «метафора».

Связь между представлением о «смысле» и аксиоматической геометрией может быть установлена достаточно просто. Действительно, мы говорим, что понимаем смысл явления или кем-то сказанного тогда, когда имеющиеся у нас сведения *не требуют* для уяснения этого самого смысла обращения к «внешнему опыту», т.е. пополнения наличных знаний. Иными словами, смысл – это мысль, обращенная сама на себя, а не на внешний мир. Именно это и отличает дедуктивный способ построения знания, когда мы берем при формулировке основоположений науки из реальности всё, что необходимо, как раз для того, чтобы впоследствии пользоваться исключительно данным, словесно сформулированным теоретическим базисом, не прибегая к помощи чувственного мира.

Аналогичным образом аксиоматический стиль мышления содействовал выработке представлений о символе и метафоре. Важность понятия символа для современной математики отметил Г. Вейль: «Математика – это наука о бесконечности, ее цель – символическое постижение бесконечности человеческим, то есть конечным»[26].

У Платона, как отмечал А.Ф. Лосев, «символизм… в значительной степени *дорефлективен*»[27]. Рефлексивное понимание символа достигается тогда, когда мы противопоставляем значение символа его непосредственно наглядному выражению. Подобное противопоставление может быть осуществлено только тогда, когда значение символа (например, бесконечность, постигаемая посредством конечных математических символов) принадлежит иному – внечувственному – миру. У Платона о противопоставлении идеальных объ-

[26] *Weyl H.* The Open World. New Haven, 1932. P. 8.
[27] Лосев А.Ф. История античной эстетики. Софисты. Сократ. Платон. М., 1969. С. 550.

ектов реальным не может быть и речи, поскольку вторые стремятся подражать и походить на первых. Другое дело у Аристотеля, у которого идеальные числа и фигуры бестелесны и действительно противоположны вещественным «копиям». Но их бестелесность, как показано в § 2.1 диссертационной работы, есть следствие их бестелесности в дедуктивной греческой геометрии. Таким образом, рефлексивное понимание символа, достигнутое позднеантичной мыслью, оказалось возможным лишь благодаря аксиоматически построенной математике.

Аналогичным образом обстоит дело и с понятием метафоры. Аристотель определяет метафору как «несвойственное имя, перенесенное с рода на вид, или с вида на род, или с вида на вид, или по аналогии»[28]. Предпосылкой для выработки Аристотелем понятия метафоры является представление о значении имени, при этом в качестве значений имен Стагирит рассматривал только *сущности*. В § 2.1 показано, что обоснование существования подобных "самобытных" вещей удалось Аристотелю только благодаря дедуктивному построению геометрии.

Важность дедуктивной геометрии для выработки понятия метафоры становится понятней в контексте вопроса о причинах отсутствия данного понятия у Платона. В то время как у Аристотеля связь имени с названным при его помощи предметом не играет никакой роли[29], у Платона, напротив, имя является подражанием вещи[30]. Если у Аристотеля исходным в соотношении «имя – вещь» является эйдос вещи, находящийся в Уме-перводвигателе, так что значением «логоса» этого эйдоса оказывается вещь в подлежащем Космосе, то у Платона всё наоборот: первична вещь, а имя подбирается законодателем в стремлении как можно лучше подражать природе вещи. Но тогда значением (знаком) оказывается не предмет, а слово. И это совершенно естественно: не вещь должна указывать на слово, как это получается у Аристотеля, а слово должно служить знаком (значением) вещи.

Перевернуть это соотношение Аристотелю удалось, «сделав» эйдосы вещей, находящихся в извечно существующем Космосе, бестелесными. Отсюда и безразличие Стагирита к разным наименованиям их у разных народов. При телесном понимании эйдосов у Платона «места» для метафоры (а метафора может стать таковой только как рефлексивное понятие) попросту не остается: имя во всей своей звуковой особенности слишком тесно привязано к именуемой посредством него вещи, чтобы возникала потребность в переносе «значений».

Поскольку в математике Индии и Китая не было аксиоматического метода, то в этих странах не было возможности перевернуть соотношение между словом и вещью, как это сделал при помощи дедуктивной геометрии

---

[28] *Аристотель.* Поэтика, 21, 1457b 6–8.
[29] Об истолковании, 1, 16a 5 – 8.
[30] Кратил, 430a–b.

Аристотель. Поэтому философское мышление в этих цивилизациях не было в состоянии создать ни представления об идеальных объектах, ни понятий смысла, символа или метафоры.

Заключительная часть параграфа посвящена попытке ограничить универсальность аксиоматического метода в математике средствами самой этой науки. Речь идет о знаменитой теореме Гёделя о неполноте.

В 1958 г. Гёдель[31] выделил в гильбертовской метаматематике две важных составных части: конструктивную и собственно «финитистскую», в соответствии с которой для представляющих доказательства знаковых комбинаций существенными оказываются исключительно пространственные сходства и различия. Из установленной в 1931 г. теоремы Гёдель дедуцирует необходимость отказа в доказательствах непротиворечивости от второй компоненты, что предполагает обращение к *смыслу* закодированных специальными знаками математических конструкций. Поскольку представление о смысле знаковых комбинаций могло возникнуть в европейской цивилизации только благодаря дедуктивной геометрии, то его использование для доказательства непротиворечивости аксиоматических теорий сохраняло за подобным обоснованием лишь относительное, но никак не абсолютное значение, на что надеялся основоположник финитистской программы. Но и этим проблемы с реализацией программы Гильберта не ограничиваются.

В формальных теориях первого порядка, рассматриваемых в теореме Гёделя о неполноте, аксиомы подразделяются на логические и собственные, причем в чистом исчислении предикатов имеются только аксиомы первого типа, не связанные с особенностями какой-либо конкретной предметной области. Можно показать, что в логических аксиомах, содержащих операцию отрицания, подразумевается при этом *внешнее* отрицание логических суждений, имеющее вид “*A* не есть *B*”. В собственных же аксиомах используется *внутреннее* отрицание “*A* есть не-*B*”, поскольку эти аксиомы «высекают» род из ничем не ограниченного универсума исчисления предикатов, в результате чего операция отрицания «незаметно» преобразуется из операции внешнего в операцию внутреннего отрицания.

Тем самым на «объектном» уровне оказываются «смешанными» два, вообще говоря, различных вида отрицания, в то время как в метатеории, где исследуются расположенные в пространстве последовательности символов, представляющие собой доказательства различных теорем формальной теории, может использоваться только «обычная» родовидовая логика, которой пользуются и физики, и химики, и биологи. Так как построение истинной, но недоказуемой формулы осуществляется Гёделем при помощи «смешения»

[31] *Gųdel K.* Ьber eine bisher noch nicht benьtzte Erweiterung des finiten Standpunktes // Dialectica. 1958. V. 12. № 3/4. P. 280–287.

объектного и мета- уровней, то подобное рассогласование в понимании операции отрицания вполне может сказаться на конечном выводе теоремы.

Данное обстоятельство не осознается как затруднение, поскольку в теоретико-множественной математике после работ Г. Кантора отождествление двух видов отрицания вошло в привычку[32], так что у специалистов в области метаматематики, в отличие от «ориентирующихся» исключительно на внутреннее отрицание ученых-естествоиспытателей, подобные вопросы не возникают. Но развеять недоумение неспециалистов могут только профессионалы, которые никаких проблем по указанной причине не замечают. Парадокс в том, что конкретной ошибки в доказательстве Гёделя указать нельзя, ибо в рамках господствующих идеализаций всё выглядит достаточно гладко. Но отсутствие полной ясности в «предметной интерпретации» финитных рассуждений Гёделя оставляет вопросы, ответ на которые невозможен без специального исследования. С социокультурной точки зрения это и означает, что теоретико-множественная математика (а вместе с ней и метаматематика) весьма удалена от других научных дисциплин, где повсеместно используется инструментарий родовидовой логики Аристотеля с присущим ей внутренним пониманием операции логического отрицания.

Третий параграф «Дедуктивный стиль мышления и искусственный интеллект» посвящен проблеме создания эффективно действующих интеллектуальных систем.

В первой части параграфа описываются парадигмы, в рамках которых проводились исследования на начальных стадиях развития ИИ, при этом особое внимание уделяется парадигме «знания + логический вывод», доминировавшей на втором этапе разработок интеллектуальных систем. Анализируются причины, в силу которых данная парадигма не могла стать основой для успешного создания эффективных ИС.

В последующем предпринимались попытки разработки подходов, выходящих за рамки указанной парадигмы, однако и они не привели к значительным успехам. Во второй части параграфа анализируется, существует ли вообще возможность выйти за рамки логической дедукции при построении интеллектуальных систем.

Для ответа на этот вопрос вводится специальное понятие: «дедуктивный интеллект». Под ДИ понимается человек, запрещающий себе в процессе решения проблемы как приобретение новых знаний, так и целенаправленный выбор уже имеющихся у него сведений (в качестве ДИ можно представлять себе конструктора ИС, пытающегося воспроизвести ход «рассуждений» искусственной системы, приведший к решению некоторой задачи). Далее показывается, что ДИ в состоянии предоставить решение некоторой проблемы

[32] Об этом см.: *Бычков С.Н., Зайцев Е.А., Шашкин Л.О.* Диагональная процедура Г. Кантора и теория множеств (историко-научный и логический контекст) // Историко-математические исследования. Вторая серия. 1999. Вып. 4 (39). С. 306–314.

лишь в том случае, когда её решение в той или иной форме известно ему заранее.

Всё многообразие задач, могущих быть предложенными ИС, естественным образом подразделяется на два класса: процедурные и декларативные. В первый входят те, ответом в которых является объект, который еще только предстоит построить в процессе решения. Ко второму относятся задачи, в которых достаточно ограничиться проверкой свойств объекта, заданного в самом условии. Соответственно, на процедурные и декларативные подразделяются и сведения *A, B, ..., D*, имеющиеся в ИС на момент поступления новой задачи: первые представляют собой решения задач, ответом в которых является объект, который строится в самом процессе решения, в то время как вторые представляют собой описания свойств объекта, заданного в изначальной формулировке утверждения.

Формальный характер критериев ограничения полного перебора допустимых способов решения предполагает формализацию также и цели предпринимаемых действий – задачи *P*, причем формализованная цель *P* должна быть присоединена явным образом ко всем имеющимся в ИС формализованным знаниям *A, B, ..., D*. Тогда полученная интеллектуальной системой процедурная задача: «Найти программу действий *P*, обеспечивающую выполнение заданного набора условий» может быть заменена на доказательство эквивалентного утверждения: «При наличии сведений *A, B, ..., D* задача *P* разрешима». Лишь в таком виде ДИ мог бы надеяться решить выделенную ИС проблему.

Разрешимость процедурной задачи *P* может быть установлена ДИ только путем синтеза процедурных знаний, находящихся среди формализованных сведений *A, B, ..., D*, причем в качестве основы синтеза он не может использовать ничего, кроме оставшихся сведений декларативного характера. Так как содержательная интерпретация результата каждого шага синтеза должна быть согласована с интерпретациями тех «кирпичиков» знания, с помощью которых производится данный синтез, а конечная цель синтеза – задача *P* – представлена в декларативном виде, то все исходные и промежуточные знания процедурного характера также должны быть переписаны в виде утверждений о разрешимости соответствующих задач.

После декларативной переформулировки поставленной проблемы и наличных сведений встает вопрос о допустимых средствах теперь уже логического способа синтеза процедурных знаний. Нетрудно проверить, что единственной логической операцией, пригодной для формального конструирования искомой программы *P*, может быть только импликация. В случае, если разрешимость задачи *P* непосредственно следует из разрешимости более простых процедурных задач *I, J, ..., L*, алгоритмический характер действий ДИ по её решению очевиден.

Сложности возникают только в том случае, когда хотя бы одна из задач *I, J, ..., L* не имеет непосредственного процедурного решения, находящегося в памяти ИС. Тогда для неё придется решать задачу разрешимости, аналогичную задаче для основной проблемы *P*. И так мы приходим к задаче отыскания логической схемы решения проблемы *P*, благодаря которой решение *P* сводится к «простым» процедурным задачам, для решения которых уже не нужно привлекать никаких сведений декларативного характера.

Задача построения логической схемы нахождения программы *P* на основе наличных декларативных сведений является чисто синтаксической. Если ДИ известен универсальный алгоритм «сборки» логических схем, то его привлечение дает искомый алгоритм решения процедурной задачи *P*. В состоянии ли он самостоятельно его отыскать?

Так как операция синтеза, как указывалось в § 1.2, является «максимально недедуктивной», то ДИ остается использовать лишь операцию анализа, при этом единственными формальными ограничениями на всём протяжении процесса «поиска алгоритма» могут быть только исключение повторений отдельных импликаций при составлении последовательности, а также исключение повторений среди целых кандидатов-последовательностей на роль логической схемы нахождения программы *P*. Но тогда подобный способ построения логической схемы сведётся к простому перебору, и никакого, даже самого малого, ограничения его получить не удастся. Поэтому и здесь ДИ вынужден будет воспользоваться готовым алгоритмом полного перебора последовательностей импликаций (способ нахождения этого алгоритма также требует многократного использования процедуры целенаправленного отбора сведений, недоступной ДИ).

В случае, когда задача *P* является декларативной (когда достаточно проверки свойств объекта, уже заданного в её условии) ДИ также должен с самого начала отказаться от стремления *построить* решение, ограничившись попытками получить ответ косвенным образом. Гарантией наличия определенных свойств *S, ..., W* у рассматриваемого в задаче объекта может быть только логическое доказательство этих свойств из исходного набора данных *A, B, ..., D*. Возможны следующие способы их проверки: записав формально утверждение о выводимости свойств из аксиом *A, B, ..., D*, преобразовать его к такому эквивалентному виду, в котором требуемая выводимость усматривалась бы очевидным образом, или, наоборот, предположив, что конъюнкция свойств *S, ..., W* неверна, придти в результате к противоречию.

Этими двумя случаями все возможности косвенной проверки наличия свойств у заданного в задаче *P* объекта полностью исчерпываются. В этом легко убедиться, учитывая, что отказ от полного перебора всех возможных способов вывода формулы *P* осуществим лишь при условии соединения в явном виде всех исходных данных *A, B, ..., D* с формальным описанием данной задачи. Имеется лишь два способа подобного соединения.

В первом к начальным сведениям присоединяется само содержащееся в задаче *P* утверждение, при этом содержательной интерпретацией формальной записи (*A, B, ..., D; P*) в рассматриваемом контексте может быть только не доказанное пока предположение о существовании вывода утверждения *P* из начальных аксиом. Второй способ заключается в присоединении к начальным аксиомам отрицания утверждения задачи *P*. Так как помимо отрицания не существует каких-либо других возможностей формального преобразования высказывания с удержанием его исходного смысла (двойное отрицание высказывания декларативного характера тождественно первоначальному), то все возможные способы формального соединения сведений-аксиом с условием задачи тем самым исчерпаны.

Суть каждого из указанных подходов заключается в преобразовании исходной формальной записи, объединяющей аксиомы с доказываемым утверждением, к некоторому специальному виду. В первом случае выражение вида (*A, B, ..., D; P*) должно быть преобразовано в одно или несколько подобных выражений, в каждом из которых по обе стороны от точки с запятой должна оказаться одна и та же последовательность знаков. Во втором случае в выражении (*A, B, ..., D; P'*) (символ *P'* означает отрицание утверждения *P*) должна появиться контрарная пара знаков *f* и *f'*, наличие которой и означает получение противоречия. Но, независимо от конкретного вида выражений, в которые стремятся преобразовать исходное формализованное условие задачи, в каждом из этих случаев приходится решать вспомогательную процедурную задачу, требующую построение нового, не заданного изначально объекта, удовлетворяющего некоторым строго определенным условиям. А её, как было показано ранее, ДИ может решить лишь при наличии в его памяти готового алгоритма. Иными словами, ни одна задача не может быть решена им самостоятельно.

Тем самым показано, что для создания эффективно действующих интеллектуальных систем необходимо научиться воспроизводить искусственным образом *целенаправленный отбор* наличных сведений в соответствии с предъявляемой для решения системе задачей.

В **четвертом параграфе** «Логическая парадигма ИИ: современные тенденции» анализируются тенденции последних лет в области искусственного интеллекта.

В 1996 г. один из ведущих современных специалистов в области ИИ А. Банди отмечал, что усилия исследователей, затраченные на создание нетрадиционных логических систем для построения новых вариантов автоматизированного вывода, не привели к существенным результатам. Попытки же разработки нелогических систем автоматизированного вывода наподобие семантических сетей, фреймов и продукционных правил вызывали кратковременный всплеск интереса, вслед за которым наступало понимание того, что в действительности за ними скрывается «старый волк в овечьей шкуре»[33]. Поэтому основанный на классической логике автоматизированный вывод и сегодня остается ключевой техникой в ИИ.

Заманчивую идею «укрупнения вывода» при помощи внесения корректив в стратегию поиска доказательства за счет извлечения позитивной информации из неудачных попыток предложил недавно Б. Бухбергер[34]. Существенную роль при этом играет то, что вместо стандартного языка логики предикатов он использует логику предикатов с переменными, являющимися последовательностями индивидных символов. Последнее позволяет естественным образом описывать схемы алгоритмов.

Для ряда задач (сортировка, слияние и разбиение наборов) демонстрируется схема автоматического синтеза алгоритмов, что, как будто, противоречит выводам § 3.3 диссертации. Но и здесь более внимательный анализ показывает, что основной нетривиальный момент в рассматриваемом подходе, заключающийся в преобразовании негативной информации (неудача в доказательстве корректности спецификации) в позитивную, достигается за счет того, что отрицание понимается авторами «внутренним образом» – как альтернатива в схеме рекурсии. Поэтому «самообучаемая» часть алгоритмического синтеза в действительности оказывается фиктивной, так как для получения в явном виде полной схемы решения задачи к числу аксиом приходится добавлять части спецификаций рекурсивных алгоритмов, хранящихся в библиотеке схем алгоритмов ИС.

В **Заключении** подводится итог сделанной работы, резюмируется её логика и основные выводы.

По теме диссертации опубликованы следующие основные работы:

В ведущих рецензируемых научных журналах:

1. Обоснование и культура // Философские науки. – 1992. – № 2. – С. 179–181 (в соавторстве с А.Ф. Кудряшевым).

2. Конференция «“Науки о природе” и “науки о духе”: предмет и метод на рубеже XXI века» // Философские науки. – 1995. – № 2–4. – С. 228–237.

3. Гипотетико-дедуктивный метод и гуманитарное знание // Вестник РГГУ. Вып. 3. Науки о природе и науки о духе: предмет и метод на рубеже XXI века / Отв. ред. Ю.Н. Афанасьев. – М.: Российск. гос. гуманит. ун-т. – 1996. – № 3. – С. 121–126.

---

[33] *Bundy A.* Artificial Mathematicians. May 23, 1996. P. 1.

[34] *Buchberger B., Craciun A.* Algorithm Synthesis by Lazy Thinking: Using Problem Schemes // Proceedings of SYNASC 2004, 6th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing. P. 90–106.

4. Математика в историческом измерении // Вопросы истории естествознания и техники. – 2003. – № 3. – С. 95–110.

Монография:

5. «Греческое чудо» и теоретическая математика. – Москва: Издательский центр РГГУ, 2007. – 192 с. (9,7 печ. л.)

В сборниках и коллективных монографиях:

6. К вопросу о возникновении дедуктивной математики // Современная математика: методологические и мировоззренческие проблемы. Ч. 2. – Москва–Обнинск, 1987. – С. 225–228.

7.Об особенностях античного метода исчерпывания // Историко-математические исследования. – 1990. – Вып. XXXII–XXXIII. – С. 11–20.

8.Искусственный интеллект и формальные дедуктивные теории // Математические методы решения инженерных задач. – М.: Ракетные войска стратегического назначения, 1993. – С. 32–37.

9.Математика как феномен культуры // Гуманитарные науки и новые информационные технологии: Сб. научн. трудов / Отв. ред. Ю.Н. Афанасьев. – М.: Российск. гос. гуманит. ун-т, 1994. – Вып. 2. – С. 143–148.

10.Дедуктивный метод и обоснование математики // Обоснование и культура: Сб. научных статей. – Уфа: Башкирск. ун-т, 1995. – С. 134–141.

11.Геометрия и аксиоматический метод // Историко-математические исследования. Серия 2.– 1996. – Вып. 1 (36). – № 2. – С. 195–204.

12.Четвертый постулат Евклида и потенциальная бесконечность // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты / Под ред. А.Г. Барабашева. – М.: Янус–К, 1997. – С. 35–39.

13.К критике канторовской диагональной процедуры // Традиционная логика и канторовская диагональная процедура. – М.: Янус–К, 1997. – С. 22–29 (в соавторстве с Л.О. Шашкиным).

14.Математика и образование // Философско-педагогический анализ проблемы гуманизации образовательного процесса. Сб. научн. статей. Вып.1. / Под ред. Г.В. Лобастова. – М., 1998. – С. 97–101.

15.Дедуктивное мышление и древнегреческий полис // Стили в математике: социокультурная философия математики / Под ред. А.Г. Барабашева. – СПб.: РХГИ, 1999. – С.288–304.

16.Диагональная процедура Г. Кантора и теория множеств (историко-научный и логический контекст) // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 1999. – Вып. 4 (39). – С. 303–324 (в соавторстве с Е.А. Зайцевым и Л.О. Шашкиным).

17.Канторовская диагональная процедура и непротиворечивость теории множеств // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 1999. – Вып. 5 (40). – С. 290–300 (в соавторстве с Л.О. Шашкиным).

18.Математическое образование студентов гуманитарных специальностей // Труды Международной конференции «Проблемы реализации многоуровневой системы образования. Наука в вузах» М., 1999. – С. 376–378.

19.Египетская геометрия и греческая наука // Историко-математические исследования. Вторая серия.– 2001. – Вып. 6 (41). – С. 277–284.

20.Как числа стали абстрактными? // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 2002. – Вып. 7 (42). – С. 190–201.

21.Метаматематика и опыт // Математика и опыт / Под ред. А.Г. Барабашева. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – С. 354–365.

22.Математика как теоретическая наука и как учебная дисциплина // Труды школы-семинара по проблемам фундирования профессиональной подготовки учителя математики. Посвящается 100-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2003. – С. 32–48.

23.Математическое мышление и искусство управления // Ученые труды факультета государственного управления МГУ. – 2003. – Вып. 2. – С. 142–158 (в соавторстве с А.А. Григоряном и Е.В. Шикиным).

24.О роли строгости в преподавании математики и математическом творчестве: взгляды А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда // Труды вторых Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. – С. 25–33.

25.О методологических проблемах преподавания элементов комбинаторики и теории вероятностей студентам гуманитарных специальностей // Труды третьих Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2005. – С. 87–96.

26.Природа математического мышления // Современные философские проблемы естественных, технических и социально-гуманитарных наук: Учебник для аспирантов и соискателей ученой степени кандидата наук / Под ред. В.В. Миронова. – М.: Гардарики, 2006. – С. 13–25.

27.Философские проблемы возникновения и исторической эволюции математики в культурном контексте // Современные философские проблемы естественных, технических и социально-гуманитарных наук: Учебник для аспирантов и соискателей ученой степени кандидата наук / Под ред. В.В. Миронова. – М.: Гардарики, 2006. – С. 25–34.

Тезисы выступлений на международных и всероссийских конференциях:

28.С.А. Яновская о применении аксиоматического метода в геометрии // Единство онтологии, теории познания и логики // Тезисы докладов научной конференции, посвященной 400-летию Р. Декарта и 100-летию С.А. Яновской. Уфа, 31 мая – 1 июня 1996 г. – Уфа: Издание Башкирского университета, 1996. С. 114–117.

29.Генезис объективного идеализма и геометрия // Ильенковские чтения: Тез. выступл. 18–19 февр. 1997 г. / Под науч. ред. Г.В. Лобастова. – М.: Академия печати, 1997. – С. 37–38.

30.Диалог как форма выражения содержания философии Платона // Когнитивное моделирование переговорного процесса: Тезисы докладов Всероссийской конференции (Москва, 17–18 декабря 1997 г.). – М., 1998. – С. 78–80.
31.Абстрактно-общее и математика // Ильенковские чтения: Тезисы докладов и сообщений межд. научн. конф. Зеленоград, 18–20 февр. 1999 / Под ред. Г.В. Лобастова. – Москва-Зеленоград, 1999. – С. 105–108.
32.Математические объекты в математике и за ее пределами // XXI век: будущее России в философском измерении: Материалы II Российского философского конгресса (7–11 июня 1999 г.). В 4 ч. Т. 1. Онтология, гносеология и методология науки, логика. Ч. 1. – Екатеринбург, 1999. – С. 207–208.
33.Естественнонаучное и гуманитарное образование в XXI веке // Стратегия опережающего развития для России XXI века: Тезисы докладов и сообщений межд. научн. конф. Москва, 18–19 июня 1999 г. Т.3. Ч.1. – М., 1999. – С. 53–54.
34.Математическое и гуманитарное образование: общее и особенное // Всероссийская конференция «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков», Дубна, сентябрь, 2000. – М.: МЦНМО, 2000. – С. 343–344.
35.Два понятия идеального: М.А. Лифшиц и Э.В. Ильенков // Ильенковские чтения. Материалы 2-й (24–25 марта 2000) и 3-й (16–17 февраля 2001) Международных научных конференций. Ч. 1. – М.: Российский государственный институт интеллектуальной собственности, 2002. – С. 16–20.
36.Творчество в современной философии // Ильенковские чтения. Материалы 2-й (24–25 марта 2000) и 3-й (16–17 февраля 2001) Международных научных конференций. Ч. 1. – М.: Российский государственный институт интеллектуальной собственности, 2002. – С.57–62.
37.Формальная и диалектическая логика в зеркале истории науки // Ильенков и Гегель. Материалы IX Международной научной конференции (26–27 апреля 2007 г.). – Ростов-на-Дону, 2007. – С. 173–174.

<u>В учебных пособиях:</u>

38.Естественный и искусственный интеллект: Проблемная лекция. – М.: РГГУ, 1995. – 42 с.
39.Математика в мировой культуре. – М.: РГГУ, 2006. – 228 с. (совместно с Е.А. Зайцевым).