Виктор Васильевич
Прасолов

История математики
(Часть 1)

История математики до конца 17 века

Москва
2015

Оглавление

Предисловие

История математики — важная часть математического образования. Полезно знать и понимать не только сами математические понятия, но и то, как они возникли и как развивались. В этой книге описана прежде всего история возникновения и развития математических идей и понятий. Знаменитые сейчас теоремы нередко открывались для весьма неожиданных узких целей и лишь потом находили более широкое применение. Для понимания истории математики необходимо также иметь некоторое представление о биографиях математиков. В этом отношении я стремился ограничиться самым необходимым, особенно стараясь избегать обсуждения различных черт характера великих математиков.

Геометрия зародилась в Древнем Египте и Вавилоне в связи с потребностями измерения земельных участков, построения храмов и дворцов. Когда Нил размывал участок обрабатываемой земли, для взимания налогов было важно знать, сколько именно земли потеряно. Египетские землемеры использовали для своих измерений и построений туго натянутые верёвки.

Примерно тогда же геометрия появилась в Древней Индии и Древнем Китае. В Индии геометрические сведения излагались в многочисленных трактатах о построении алтарей. Эти трактаты назывались «Правила веревки», поскольку основным инструментом для построений, как и в Египте, были веревки. В Китае составлением трактатов по арифметике и геометрии занимались важные сановники. Математика была одним из шести искусств, которым обучались дети китайских аристократов.

Важнейшее изменение в понимании того, что такое геометрия, произошло в Древней Греции. До греков геометрия представляла собой собрание полученных из опыта правил и фактов, и только у греков появились теоремы и доказательства, и именно тогда геометрия приобрела близкий к современному вид.

Развитие математики шло сложными путями, многие из которых сразу или постепенно оказались тупиковыми. Важнейшие понятия, общепринятые сейчас, сложились не сразу. Из-за этого многие математики по разным поводам допускали ошибки, которые часто хорошо характеризуют состояние математики их времени, и поэтому иногда имеет смысл поговорить и об этих ошибках.

Глава 1.

Древний Египет и Вавилон

1.1. Древний Египет

Возникновению математики предшествовало возникновение понятия числа и формирование системы записи чисел. До появления математики должны были также сформироваться представления об основных геометрических фигурах. Рисунки могли появиться только тогда, когда возникло представление о подобии фигур. Некоторые египетские рисунки показывают, что для изображения подобных фигур использовались квадратные сетки. Уже на первых рисунках встречаются попытки изображения перпендикулярных и параллельных прямых. В орнаментах часто встречаются шестиугольники. Но пятиугольники и десятиугольники на рисунках в Древнем Египте не встречаются.

В Египте хранили, передавали и развивали научные знания, в том числе и математические, так называемые писцы. Должность писца была очень почётной. В одном тексте читаем: «Писец руководит всеми, и не обложена налогами работа в письме. На неё нет налогов.» В другом тексте о писцах говорится: «Это больше, чем любая должность, и нет ничего равного им в этой стране.»

Египетские тексты записаны на хрупком папирусе, иногда на коже. Такие тексты сохранялись гораздо хуже и реже, чем вавилонские тексты, которые писались клинописью на сырой глине, а затем обжигались. До нашего времени сохранилось огромное число вавилонских математических клинописных текстов, а египетских математических папирусов сохранилось очень мало.

Самый большой из сохранившихся до наших дней математический папирус — это папирус Райнда, названный по имени владельца, который приобрёл его в 1858 г. Папирус Райнда составлен писцом Ахмесом (1680-1620 до н.э.); он содержит 84 задачи. Другой большой математический папирус — так называемый Московский папирус, хранящийся в Музее изобразительных искусств имени А.С.Пушкина. Он содержит 25 задач. Оба эти математических папируса составлены для учебных целей и переписаны с оригиналов, восходящих примерно к 1900 г. до н.э.

Папирус Райнда начинается обещанием научить «совершенному и основательному исследованию всех вещей, пониманию их сущности, познанию всех тайн…». А в действительности речь идёт только о тайнах счёта и о вычислениях с дробями.

1.1.1. Древнегреческие свидетельства о египетской математике

Древние греки считали Египет страной, в которой зародились почти все науки. При этом причины возникновения математики назывались едва ли не противоположные. Прокл писал: «Как у финикийцев начало точному знанию чисел было положено благодаря торговле и сделкам, так и у египтян геометрия была изобретена по указанной причине. Съездив в Египет, Фалес впервые перенёс эту науку в Элладу…» Подробно обосновывал происхождение геометрии (точнее сказать, землемерия) практическими потребностями Геродот: «Этот царь (Сесострис), как передавали жрецы, также разделил землю между всеми жителями и дал каждому по квадратному участку равной величины. От этого царь стал получать доход, повелев взимать ежегодную поземельную подать. Если река отрывала у кого-нибудь часть его участка, то владелец мог прийти и объявить царю о случившемся. А царь посылал людей удостовериться в этом и измерить, насколько уменьшился участок, для того чтобы владелец уплачивал подать соразмерно величине оставшегося надела. Мне думается, что при этом-то и было изобретено землемерное искусство и затем перенесено в Элладу.» Аристотель же не считал практические потребности сколько-нибудь важными для возникновения математики: «...математические искусства были созданы прежде всего в Египте, ибо там было предоставлено жрецам время для досуга».

Изобретение математики приписывали иногда египетскому богу Тоту. В диалоге Платона «Федр» Сократ говорит: «Так вот, я слышал, что близ египетского Навкратиса родился один из древних тамошних богов, которому посвящена птица, называемая ибисом. А самому божеству имя было Тевт. Он первый изобрёл число, счёт, геометрию, астрономию, вдобавок игру в шашки и в кости, а также и письмена.»

Очень важным свидетельством являются слова Демокрита: «Никто не превзошел меня в складывании линий, сопровождающемся доказательством, — даже так называемые гарпедонапты у египтян.» Это едва ли не единственное прямое указание на то, что в египетской геометрии были доказательства. Косвенным указанием являются, например, слова Прокла о том, что Фалес впервые перенёс геометрию из Египта в Элладу. Для греков геометрия подразумевала доказательства.

1.1.2. Характер египетской математики

В египетских математических папирусах много задач, возникающих из практики. Они связаны с распределением заработной платы между известным числом рабочих, вычислением необходимого количества зерна для приготовления заданного количества хлеба или пива, переводом одних мер в другие. Основное внимание уделяется не методам решения задач, а самим вычислениям.

Эти задачи имели большое значение для писцов, управлявших многими важными делами в Египте. Об этом свидетельствует один очень интересный текст папируса, в котором писец упрекает другого писца в математическом невежестве: «Ну вот, ты приходишь и наполняешь меня твоей должностью. Теперь я хочу объяснить тебе, в чем твоя сущность, когда ты говоришь: «Я полномочный писец войска». Тебе дают озеро, которое ты должен выкопать. Тогда ты приходишь ко мне, чтобы осведомиться насчёт провианта для солдат, ты говоришь:

«Вычисли его мне». Ты неисправен по своей должности, и то, что я тебя должен поучать выполнению твоих обязанностей, обрушится на твой же затылок. Иди сюда, я скажу тебе кое-что в дополнение к тому, что ты сказал. Я ставлю тебя в затруднительное положение, когда я заставлю тебя представить себе следующее: ты царский писец, ты приведён к окну для аудиенции для какого-нибудь замечательного дела, когда горы изрыгают огромные памятники для Гора [т. е. для царя], владыки обеих стран. Я открываю тебе приказ твоего господина. Ибо смотри, ты — опытный писец, стоящий во главе войска. Необходимо сделать укрепление в 730 локтей длины и 55 локтей ширины, состоящее из 120 ящиков, наполненных балками и камышом; в верхней части его высота 60 локтей, в середине 30 локтей с. . . 15 локтей, и его. . . имеет 5 локтей. Спрашивают у генералов, сколько для этого укрепления потребно кирпичей, и собрались все писцы, и ни один из них ничего не знает, они все полагаются на тебя и говорят: «Мой друг, ты — опытный писец, так реши же это быстро для нас». Вот ты имеешь знаменитое имя; пусть же в этом месте найдётся хоть один, который возвеличит всех тридцать. Не допусти, чтобы о тебе сказали: «Есть также и такие вещи, которых и ты не знаешь».

Для развлечения изучающих математику приводились и задачи, явно возникшие не из практики. Вот одна из наиболее известных таких задач: «Есть 7 домов, и в каждом живёт по 7 кошек. Каждая кошка съела 7 мышей, каждая мышь съела 7 колосьев ячменя. Каждый колос мог дать 7 мер хлеба. Найти сумму домов, кошек, мышей, колосьев и мер.» В ответе получается 19607.

1.1.3. Египетские дроби

Деление $m : n$ египтяне иногда представляли как умножение m на аликвотную дробь $1/n$. Других дробей египтяне не рассматривали, за исключением дробей $2/3$ и $3/4$ (и иногда дробей $2/n$). Эти дроби, как и дроби $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/6$ и $1/8$ часто встречались на практике, а потому имели специальные названия.

Папирус Райнда начинается с таблицы представления дробей $2/n$

для n от 3 до 101 в виде сумм аликвотных дробей. Например, $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$.

Использование только аликвотных дробей — характерная особенность египетской математики. Обычно достаточно скоро возникали дроби общего вида и развитие математики не останавливалось на аликвотных дробях.

1.1.4. Вычисления «аха»

Египетское слово «аха» означает «куча», «груда», «количество». Количество здесь — неизвестная величина, которую нужно найти. Вычисление «аха» приблизительно соответствует нашим уравнениям первой степени с одним неизвестным. Пример таких вычислений даёт задача 26 из папируса Райнда. «Количество и его четвертая часть дают вместе 15». Таким образом, речь идёт о решении уравнения $x + \frac{1}{4}x = 15$. Египетское решение начинается так: «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно 1; вместе 5». Затем производится деление $15 : 5 = 3$, а в конце умножение $4 \cdot 3 = 12$. Требуемое количество равно 12.

Здесь используется приём, который в средневековой Европе получил название «метод ложного положения». Начинаем с того, что в качестве искомого количества берём произвольное число (в рассматриваемом случае это 4, для которого легко вычислить четвёртую часть). Четыре и его четвёртая часть вместе дают 5. Но результат должен быть равен 15, поэтому выбранное количество нужно ещё умножить на $15 : 5 = 3$.

Вычисления «аха» использовались и для решения двучленных квадратных уравнений вида $ax^2 = b$. Например, решается такая задача. «Квадрат и другой квадрат, сторона которого есть $\frac{3}{4}$ стороны первого квадрата, имеют вместе площадь 100. Вычисли мне это.» В решении берётся квадрат со стороной 1, тогда сторона другого квадрата равна $\frac{3}{4}$. Сумма площадей этих квадратов равна $1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$. Квадратный корень из этой площади равен $\frac{5}{4}$. Квадратный корень из 100 равен 10. А сколько раз $\frac{5}{4}$ входит в 10? Ясно, что 8 раз. Поэтому стороны искомых

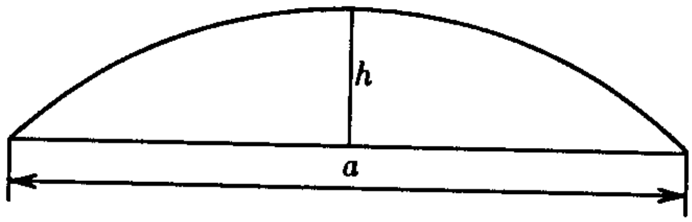

Рис. 1.1.

квадратов равны 8 и $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$.

Данные в условии только что разобранной задачи выбраны, конечно, не случайно. Ясно, что составитель этой задачи был хорошо знаком с тождеством $3^2 + 4^2 = 5^2$.

1.1.5. Вычисление площадей

В Древнем Египте умели правильно вычислять площадь треугольника и трапеции. При этом площадь представляли в виде прямоугольника: площадь треугольника представляли в виде площади прямоугольника, одна сторона которого равна половине основания треугольника, а другая — его высоте; площадь трапеции представляли в виде площади прямоугольника, одна сторона которого равна полусумме оснований трапеции, а другая — её высоте.

Наряду с правильными формулами применяли и приближённые формулы. Например, площадь четырёхугольника со сторонами a, b, c и d вычисляли по формуле $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$. Для четырёхугольника, не очень сильно отличающегося от прямоугольника, это приближение достаточно хорошее.

Площадь круга диаметра d считали равной $\left(\frac{8d}{9}\right)^2$. Эту формулу мы ещё обсудим более подробно.

В одном из египетских папирусов, правда, сравнительно позднем (III в. до н. э.), есть интересная приближённая формула для вычисления площади сегмента круга. Если h — высота сегмента, a — длина хорды, отсекающей этот сегмент (рис. 1.1), то его площадь S в этом папирусе считается равной $\frac{ah+h^2}{2}$. В книге «Метрика» Герон использует формулу $S = \frac{ah+h^2}{2} + \frac{1}{14}\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Он также пишет, что «древние» использовали формулу $S = \frac{ah+h^2}{2}$. Герон полагал, что эту формулу они получили, считая площадь круга равной $3R^2$ (тогда для полукруга, т. е. в случае $a = 2h$, формула даёт точный результат). Сам он использует более точное значение $\pi = 22/7$. Если считать, что это значение точное, а не приближённое, то для полукруга его формула даёт точный результат. Для сегментов, близких к полукругу, формула Герона точнее египетской, но при малых по сравнению с a значениями h применять её нельзя. Свидетельства Герона важны для нас, потому что он жил в Александрии и там познакомился со многими традициями египетской математики.

1.1.6. Египетский треугольник

Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 получил название *египетского треугольника*. Это произошло, по-видимому, благодаря упоминанию о нём в сочинении Плутарха «Об Исиде и Осирисе»: «И, видимо, египтяне сравнивают природу Всеобщности с красивейшим из треугольников... Этот треугольник имеет катет из трёх частей, основание — из четырёх и гипотенузу — из пяти... Таким образом, катет можно считать мужским началом, основание — женским, а гипотенузу — отпрыском обоих». Но свидетельство Плутарха относится к сравнительно позднему времени (II в.). Что же касается часто встречающихся рассказов о том, что в Египте для построения прямого угла применяли верёвку с узлами, отстоящими друг от друга на расстояния 3, 4 и 5, то эта легенда без каких-либо обоснований появилась в конце XIX века.

Соотношение $3^2 + 4^2 = 5^2$ египтянам было известно; составитель задачи, разобранной на с. 16, это тождество знал. Но тождество $3^2 + 4^2 = 5^2$ не предполагает знания теоремы Пифагора; оно могло возникнуть и без связи с прямоугольными треугольниками. Во всяком случае, в указанной задаче прямой связи с прямоугольными треугольниками нет.

Единственное подтверждение того, что египтянам был известен прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5, дают обмеры памятников архитектуры Египта. Например, в храме Аменхотепа на острове Элефантина (XVI в. до н. э.) использованы пропорции этого треугольника.

1.1.7. Задача московского папируса

В 1930 г. В. В. Струве опубликовал перевод математического папируса, хранящегося в Государственном музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина. Десятая задача этого папируса произвела настоящую сенсацию в мире историков математики. В этой задаче, как считал Струве, вычислялась площадь полусферы. Вот его перевод: «Форма вычисления корзины, если тебе называют корзину с устьем диаметра $4\frac{1}{2}$. О, дай мне знать её поверхность! Сосчитай $\frac{1}{9}$ от 9, потому что корзина есть половина яйца. Получается 1. Посчитай остаток за 8. Сосчитай $\frac{1}{9}$ от 8. Получится $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. Отними от 8 эти $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. Получается $7\frac{1}{9}$. Сосчитай $7\frac{1}{9}$ $4\frac{1}{2}$ раза. Получается 32. Смотри: это и есть поверхность. Ты правильно нашёл.»

Струве считал, что «корзина с устьем диаметра $4\frac{1}{2}$» — это полусфера с диаметром $d = 4\frac{1}{2}$. При этом площадь S полусферы в решении задачи вычисляется по формуле

$$S = d\left\{\left(2d - \frac{1}{9}\cdot 2d\right) - \frac{1}{9}\left(2d - \frac{1}{9}\cdot 2d\right)\right\} = 2\left(\frac{8}{9}d\right)^2. \tag{1.1}$$

В Египте площадь круга с диаметром d вычисляли как $(8d/9)^2$. При таком приближении для числа π формула (1.1) правильная. В самом деле, площадь сферы в 4 раза больше площади большого круга (экватора) этой сферы.

Это толкование весьма заманчиво, потому что формула для вычисления площади сферы свидетельствует об очень высоком уровне развития математики. Но даже сам Струве не считал своё толкование единственно возможным, и почти сразу после него Пит и Нейгебауэр предложили другие переводы и толкования. Больше всего споров вызывает иероглиф, который Струве перевёл как «корзина»; этот ие-

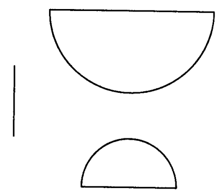

Рис. 1.2.

роглиф изображён на рис. 1.2. Выражение «корзина есть половина яйца» свидетельствует, по-видимому, о том, что «корзина» — это некоторый специальный технический термин, и это выражение означает, например, что «полушарие есть половина шара». Отметим, кстати, что перевод «яйцо» весьма условен, потому что соответствующее место папируса сильно испорчено. Этот технический термин может означать не только половину шара, но и половину круга (посмотрите ещё раз на рис. 1.2). Струве не исключал такой возможности, тем более что $4\frac{1}{2}$ может означать не только диаметр d, но и радиус r. Во втором случае речь должна идти о полукруге, потому что его площадь равна $\pi r^2/2$, а площадь полусферы равна $\pi d^2/2$. Употребляемый в тексте предлог «r» также свидетельствует о том, что речь идет, по-видимому, о двумерной, а не трёхмерной фигуре. Поэтому весьма вероятно, что в задаче приведено вычисление площади полукруга.

Есть ещё и другие толкования текста этой задачи. Пит предположил, что речь идёт не о поверхности полусферы, а о половине боковой поверхности цилиндра диаметром $4\frac{1}{2}$ и такой же высотой. Нейгебауэр предположил, что речь идёт о вычислении поверхности купола.

* * *

При любом толковании задачи 10 московского математического папируса ясно, что она связана с числом π, причём для него используется стандартное для египтян приближение $4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3{,}14$. Это приближение выглядит странно. Его происхождение пытались объяснить по-разному, но почти все гипотезы неубедительны. Одна из наиболее правдоподобных гипотез выдвинута в книге [16]. Она основана на формуле (1). Согласно этой формуле, площадь круга диаметра d

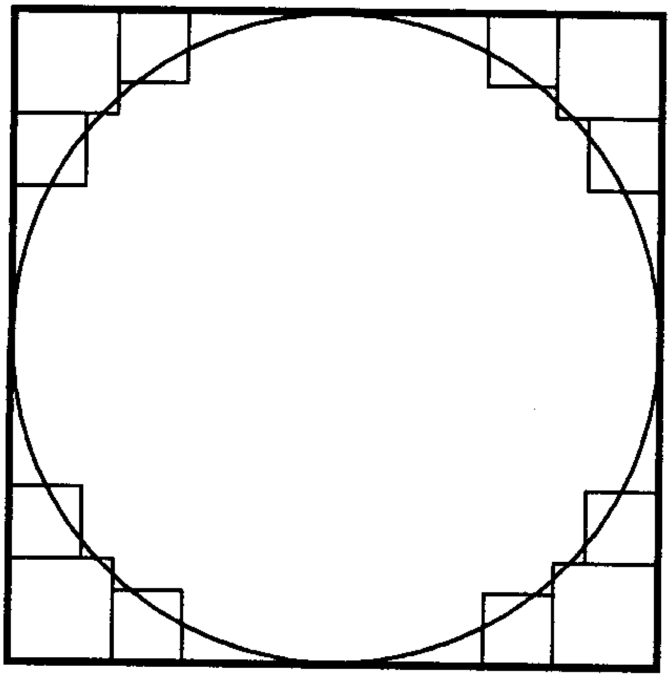

Рис. 1.3.

должна вычисляться как $\left(1 - \frac{1}{9}\right) d^2 - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right) d^2$. Такую последовательность вычислений можно объяснить следующим образом. Впишем круг в квадрат со стороной 1. Вырежем из этого квадрата четыре квадратика со стороной 1/6 (рис. 1.3). Площадь оставшейся части равна $1 - 4\left(\frac{1}{6}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9}$, но она ещё явно больше площади круга. Вырежем ещё восемь квадратиков со стороной 1/9 (рис. 1.3). Их площадь равна $\frac{8}{81} = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)$, а площадь оставшейся части равна $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)$. Возможно, что египтяне поступили именно так и решили, что площадь оставшейся части равна площади круга.

Интересные, хотя и менее правдоподобные гипотезы о происхождении древнеегипетской формулы для площади круга предложены в статьях [5] и [23].

1.1.8. Объём усечённой пирамиды

Применение египтянами формулы для вычисления площади сферы вызывает сомнения. Но применение ими формулы для вычисления объема усечённой пирамиды с квадратными основаниями несомненно. Не совсем ясна лишь форма этой пирамиды. Сохранившийся чертёж нето-

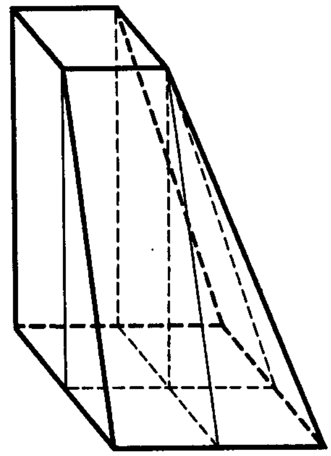

Рис. 1.4.

чен. По-видимому, в задаче рассматривалась пирамида, две смежные боковые грани которой перпендикулярны основаниям (рис. 1.4).

Объём усечённой пирамиды, основаниями которой являются квадраты со сторонами $a = 2$ и $b = 4$, а высота h равна 6, в задаче 14 московского математического папируса вычислялся как $\frac{6}{3} \cdot \left(2^2 + 2 \cdot 4 + 4^2\right)$, т. е. как $\frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$. Эта формула точная.

Объём пирамиды, вообще говоря, нельзя найти путём разрезания куба. Это можно сделать лишь для некоторых пирамид. Например, в вавилонских глиняных табличках вычисляется лишь объём пирамиды, угол между основанием (квадратным) и боковыми гранями которой равен 45°, а куб можно разрезать на шесть таких пирамид (подробности см. на с. 43).

Данные египетской задачи в этом отношении таковы, что от общего случая эта конкретная задача ничем существенным не отличается. Таким образом, если формула для нахождения объёма усеченной пирамиды не была случайной догадкой, то для её доказательства требовалось применение предельного перехода в том или ином виде.

Нет никаких оснований сомневаться в том, что объём пирамиды был найден раньше, чем объём усечённой пирамиды. Но переход от пирамиды к усечённой пирамиде у египтян должен был вызвать затруднения. На рис. 1.4 показано, как рассматриваемую усечённую пирамиду можно разрезать на прямоугольный параллелепипед, две призмы и пи-

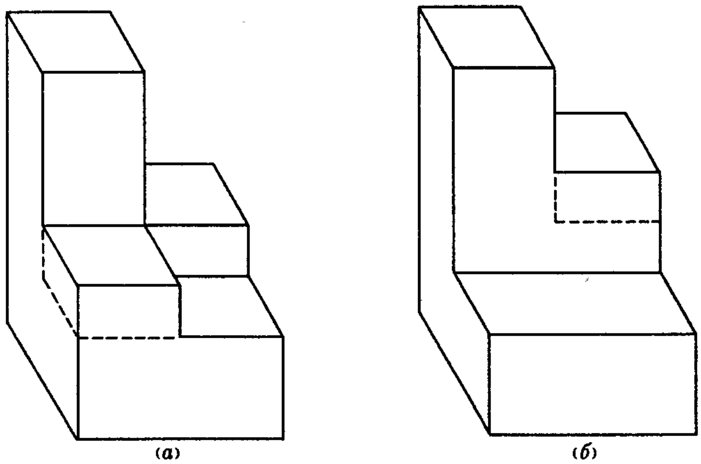

Рис. 1.5.

рамиду. Поэтому объём усечённой пирамиды равен

$$a^2h + (b-a)ah + (b-a)^2h/3 = abh + (b-a)^2h/3$$

(переход от одной из этих формул к другой можно осуществить, сложив из двух призм параллелепипед). Но переход от этих формул к применявшейся египтянами формуле $\left(a^2 + ab + b^2\right) h/3$ далеко не очевиден. Алгебраическое тождество $3ab + (b-a)^2 = a^2 + ab + b^2$ египтянам вряд ли было хорошо знакомо. Переход от одной формулы к другой, скорее всего, был осуществлён геометрически. Это можно было сделать, например, следующим образом. Заменим призмы и пирамиду на равновеликие им прямоугольные параллелепипеды (рис. 1.5, *а*). Затем отрежем от параллелепипеда, соответствующего одной из призм, часть, возвышающуюся над параллелепипедом, соответствующим пирамиде (на рис. 1.5, *а* эти разрезы изображены штриховыми линиями). Отрезанную часть приставим к параллелепипеду, соответствующему второй призме (рис. 1.5, *б*). Плоскости, удалённые от основания полученной фигуры на расстояния $h/3$ и $2h/3$, разрезают её на прямоугольные параллелепипеды объёма $a^2h/3$, $abh/3$ и $b^2h/3$.

1.1.9. Архитектура

Исследование египетской архитектуры имеет большое значение для истории математики. Например, в математических папирусах не упо-

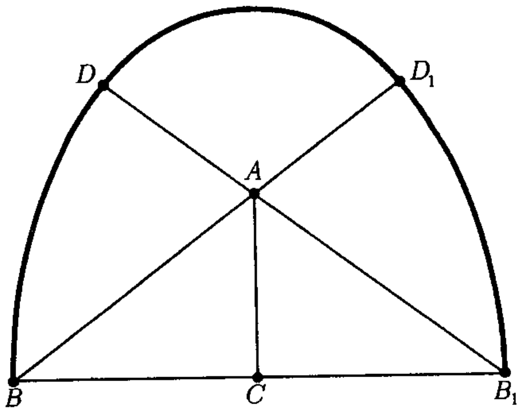

Рис. 1.6.

минается прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 (египетский треугольник), но обмеры архитектурных памятников показывают, что пропорции этого треугольника использовались в египетской архитектуре. Своды египетских храмов выглядят обычно следующим образом. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 5$ и катетами $AC = 3$ и $BC = 4$; AB_1C — такой же треугольник (рис. 1.6). Проведём дуги B_1D_1 и BD окружностей радиуса BB_1 с центрами B и B_1 (точки D_1 и D лежат на прямых AB и AB_1 соответственно), а затем проведём дугу DD_1 окружности с центром A.

Функции архитекторов и математиков слились в египетских гарпедонаптах («натягивателях верёвок»). При заложении храмов совершалась торжественная церемония — натягивание верёвок для определения направлений стен храма. О важности этой церемонии свидетельствуют египетские рисунки, на которых изображены совершающие её фараоны в белых или красных коронах, боги, богини, жрецы. О натягивании верёвок фараонами при заложении храмов есть и письменные свидетельства. Храм Амона-Ра в Карнаке ориентирован на точку восхода Солнца в день зимнего солнцестояния. На одной из его стен изображён фараон Тутмос III (1500 г. до н. э.), натягивающий верёвку при заложении храма. На другом рисунке фараон при заложении храма проводит мотыгой священную борозду.

Непосредственное отношение к египетской геометрии имеет поня-

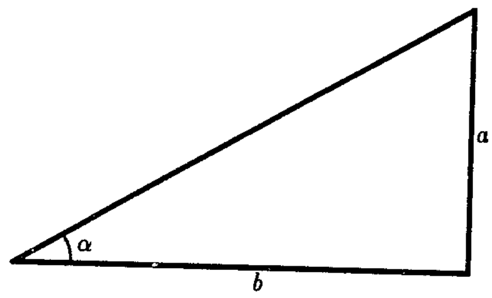

Рис. 1.7.

тие наклона, применявшееся в архитектуре. При этом длины в вертикальном направлении измеряли в царских локтях, а в горизонтальном — в ладонях (царский локоть считали равным семи ладоням, а обычный — шести). Наклоном называли величину b/a (рис. 1.7), где a равно 1 локтю, b — расстояние, измеренное в ладонях. Так как $b/a = 7 \operatorname{ctg} \alpha$, то эту величину лучше назвать покатостью: она тем меньше, чем больше (круче) наклон. Любопытно, что в Вавилоне горизонтальные и вертикальные отрезки тоже измеряли в разных единицах: вертикальные, как и в Египте, измеряли в локтях, а горизонтальные отрезки — в единицах GAR, где 1GAR = 12 локтей.

Понятие наклона свидетельствует о том, что египтяне имели некоторое представление о подобии треугольников.

Единица измерения наклона позволяет сделать достаточно правдоподобные предположения о том, какими принципами руководствовались египетские архитекторы при выборе угла наклона граней пирамид. В этом отношении наиболее изучена пирамида Хеопса, поэтому мы разберём некоторые гипотезы о выборе угла наклона её граней. Одно из первых известных нам объяснений содержится в книге Геродота «История» (V в. до н. э.): «Она четырёхсторонняя, каждая сторона её шириной в 8 плефров и такой же высоты.» Длина стороны пирамиды Хеопса равна 233 м; это весьма хорошо согласуется со значением 8 плефров (236,8 м). Но высота пирамиды равна 147 м и отличается от длины стороны слишком сильно. Брёйнс, рецензируя книгу по истории древнеегипетской математики, высказал предположение, что в этом месте текст Геродота испорчен (см. [21]). Он предложил изменить в этом тексте одну букву, после чего перевод текста выглядит следующим образом: «Она четырехсторонняя, каждая сторона её шириной в 8 плефров и равна квадрату высоты». (Имеется в виду, что площадь стороны пирамиды равна квадрату высоты). Это толкование очень хорошо согласуется с реальными размерами пирамиды Хеопса. В самом деле, пусть a — сторона пирамиды, b — высота грани, h — высота пирамиды. Тогда по условию $ab/2 = h^2$, а по теореме Пифагора $4h^2 = 4b^2 - a^2$. Следовательно, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = a^2+4h^2+b^2 = 5b^2$, а значит, $b = \frac{a}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ и $h^2 = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Если φ — угол боковой грани такой пирамиды, то $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, поэтому $\varphi \approx 51^\circ\,49'\,38''$. Это хорошо согласуется с измерениями угла наклона грани пирамиды Хеопса, дающими значение $51^\circ\,50'$.

Согласно толкованию Брёйнса, при сооружении пирамиды Хеопса использованы пропорции золотого сечения. (Золотым сечением называют такое деление отрезка AB точкой C, что $AC : AB = BC : AC$; если $AC = x$ и $BC = 1$, то $x : (x+1) = 1 : x$, т. е. $x = (1+\sqrt{5})/2$.) Но это толкование не единственное. Весьма интересное объяснение выбора угла наклона грани не только пирамиды Хеопса, но и других пирамид предложено в статье [29]. Как мы уже говорили, для измерения угла наклона в Египте использовали величину $7\operatorname{ctg}\alpha$. Робинс и Шют, авторы этой статьи, установили, что наиболее распространен был наклон граней, при котором эта величина равна $5\frac{1}{2}$; в более поздней архитектуре (около XVII в. до н. э.) величина $5\frac{1}{2}$ заменилась на $5\frac{1}{4}$. Если $7\operatorname{ctg}\alpha = 5\frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha = 7 : 5\frac{1}{2} = \frac{14}{11}$, т. е. $\alpha \approx 51^\circ\,50'\,34''$. Эта величина тоже очень хорошо согласуется с углом наклона грани пирамиды Хеопса. Если же $7\operatorname{ctg}\alpha = 5\frac{1}{4}$, то $\operatorname{tg}\alpha = 7 : \frac{21}{4} = 4 : 3$, т. е. в этом случае мы приходим к пропорциям треугольника со сторонами 3, 4 и 5 (египетского треугольника). Возможно, изменение угла наклона пирамид связано с сознательным применением пропорций этого треугольника.

1.2. Вавилон

Математика Древнего Вавилона известна нам в основном из расшифрованных текстов глиняных табличек. Некоторые из этих клинописных текстов содержат разные задачи и таблицы чисел. Эти задачи большей частью учебные; такие глиняные таблички были своего рода учебниками.

В Вавилоне должность писца считалась столь же почётной, как и в Египте: «Тот, кто в совершенстве овладеет искусством писать на табличках, будет сверкать подобно солнцу.» Каждый писец должен был хорошо знать математику.

Вавилонская техника вычислений была гораздо более совершенной, чем египетская, и задачи решались тоже более сложные, например, связанные с системами линейных уравнений и с квадратными уравнениями. От аликвотных дробей, на которых остановилась египетская математика, в Вавилоне быстро перешли к дробям общего вида.

В Вавилоне использовались две системы счисления: десятичная и шестидесятиричная. Точнее говоря, в шестидесятиричной системе числа записывались в виде $a_n \cdot 60^n + \dots + a_1 \cdot 60 + a_0$, а для записи чисел $a_0, \dots, a_n$ использовались два символа, один из которых обозначал единицы, а другой — десятки. Запись была неоднозначной: числа, отношение которых равно 60, записывались одинаково; кроме того, отсутствовал знак пропуска разряда, соответствующий нашему нулю, поэтому, например, числа $60 + 1$ и $60^2 + 1$ тоже записывались одинаково. Какое именно написано число, порой можно понять лишь из контекста.

Для вычислений в Вавилоне широко использовались разного рода таблицы. Во многом это связано с тем, что вычисления в шестидесятиричной системе более сложные, чем в десятичной. В частности, таблица умножения слишком велика, и запомнить её почти невозможно. Вместо деления производилось умножение на обратную величину, поэтому часто применялись таблицы обратных величин. Сначала в такие таблицы включались только те обратные величины чисел, которые были конечными шестидесятиричными дробями, т.е. обратные величины чисел вида $2^a 3^b 5^c$. В более позднее время в таблицы включались и приближённые значения обратных величин чисел 7, 11, 13, 17, 19 и т.д. Известна даже таблица чисел вида $n^3 + n^2$. Её, по-видимому, использовали для решения уравнения $x^3 + x^2 = a$, встречающегося в одной из табличек.

1.2.1. Одна вавилонская задача

Чтобы стало ясно, что представляют собой дошедшие до нас вавилонские математические тексты, приведём конкретный пример. К этому тексту нам ещё не раз придётся возвращаться, потому что в нём слились многие особенности вавилонской математики. Вот перевод этого текста.

«Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади; 183 получилось у меня. Затем я длину и ширину сложил: 27. Спрашивается длина, ширина и площадь.

(Даны)	27 и 183	суммы
(Результат)	15 длина	180 площадь.
	12 ширина	

Ты сделаешь так:

$$\begin{aligned} 27 + 183 &= 210, \\ 27 + 2 &= 29. \end{aligned}$$

Возьми половину от 29 (это даёт 14,5).

$$\begin{aligned} 14{,}5 \times 14{,}5 &= 210{,}25, \\ 210{,}25 - 210 &= 0{,}25. \end{aligned}$$

0,25 имеет квадратный корень 0,5.

$$\begin{aligned} 14{,}5 + 0{,}5 &= 15 \qquad \text{длина}, \\ 14{,}5 - 0{,}5 &= 14 \qquad \text{ширина}. \end{aligned}$$

Отними 2, которые ты прибавил к 27, от ширины 14; 12 истинная ширина.

15 длину, 12 ширину я перемножил:

$$\begin{aligned} 15 \times 12 &= 180 \qquad \text{площадь}, \\ 15 - 12 &= 3, \\ 180 + 3 &= 183. \text{»} \end{aligned}$$

Решение задачи приведено в виде последовательности операций с некоторыми числами. Для вавилонских текстов это характерно. Общие правила в них содержатся крайне редко. Но в данном случае легко понять, что означают все встречающиеся числа, т. е. решение можно перевести на современный алгебраический язык. Пусть x — длина, y — ширина прямоугольника. В задаче требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x - y = 183, \\ x + y = 27. \end{cases}$$

Для упрощения этой системы делается замена $y' = y + 2$. Тогда $xy' = xy + 2x = (xy + x - y) + (x + y) = 183 + 27 = 210$ и $x + y' = x + y + 2 = 27 + 2 = 29$.

Система уравнений

$$\begin{cases} xy = p, \\ x + y = a \end{cases}$$

в Вавилоне решалась обычно по правилу $x = a/2 + w$ и $y = a/2 - w$, где $w = \sqrt{(a/2)^2 - p}$. Это правило применено и в нашем случае: $(a/2)^2 = (29/2)^2 = 210{,}25$ и $(a/2)^2 - p = 210{,}25 - 210 = 0{,}25$. Далее вычисляется $x = (a/2) + w = 14{,}5 + \sqrt{0{,}25} = 14{,}5 + 0{,}5 = 15$ и $y' = (a/2) - w = 14{,}5 - 0{,}5 = 14$. Наконец, $y = y' - 2 = 14 - 2 = 12$.

Комментирование этого текста не вызывает затруднений. Но у многих других табличек с математическими текстами важные для их понимания части отломаны или сколоты. Кроме того, в них встречаются ошибки и описки.

1.2.2. Квадратные уравнения

В математических табличках часто встречаются задачи, связанные с квадратными уравнениями. Рецепты для решения таких задач показывают, что вавилонские математики знали общее правило решения квадратных уравнений тех типов квадратных уравнений, которые они рассматривали. А рассматривали они только два типа квадратных уравнений: $x^2 + ax = b$ и $x^2 - ax = b$. В Вавилоне операции сложения и вычитания были известны, но числа рассматривались только положительные. Корни уравнений, разумеется, могли быть только положительными. Есть ещё один тип квадратных уравнений, которые могут иметь положительные корни, а именно, $x^2 + b = ax$. Но уравнения такого типа в Вавилоне не рассматривали. Это довольно странно, потому что эквивалентные им системы уравнений $x + y = a$, $xy = b$, как видно из первого нашего примера вавилонской задачи, в Вавилоне решали. Возможно, уравнения типа $x^2 + b = ax$ не рассматривали потому, что такие уравнения могли иметь не один положительный корень (как уравнения $x^2 + ax = b$ и $x^2 - ax = b$), а два. По-видимому, вавилонские математики не понимали, как к этому нужно относиться.

Корень уравнения $x^2 - ax = b$ находился по правилу, которое можно выразить формулой

$$\sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2}.$$

Система уравнений $xy = p$, $x - y = q$ решалась по следующему правилу:

$$x = w + \frac{q}{2}, \quad y = w - \frac{q}{2}, \quad w = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p}.$$

1.2.3. Несколько задач с площадями

Вавилонские математические тексты содержат несколько интересных задач, связанных с площадями треугольников и трапеций. О том, какими методами они решались, почти ничего не известно; из табличек можно лишь понять, по каким формулам вычислялся ответ. До некоторой степени можно быть уверенным лишь в следующем:

1) никаких сколько-нибудь серьезных алгебраических преобразований вавилонские математики не производили;

2) они знали и использовали тот факт, что если фигуру разрезать на части и сложить из них другую фигуру, то площади обеих фигур и суммы площадей частей будут равны (наиболее ранние известные доказательства геометрических теорем в Индии и Китае основаны именно на этом);

3) они знали свойства подобных треугольников и умели их использовать.

В вавилонских табличках есть задача, которую можно сформулировать следующим образом.

Задача 1. *Основания трапеции равны a и b. Отрезок длиной x, параллельный основаниям трапеции, делит её на две части равной площади. Найти x, если известны a и b.*

Ответ вычисляется по правильной формуле $x = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$. Для решения этой задачи достаточно знать, что площади подобных треугольников пропорциональны квадратам соответственных сторон. В самом деле, продолжим стороны трапеции до пересечения (рис. 1.8). Площадь одной части трапеции равна разности площадей треугольников с основаниями x и a, а площадь второй части равна разности площадей треугольников с основаниями b и x. Поэтому $x^2-a^2 = b^2-x^2$, т. е. $x^2 = \left(a^2 + b^2\right)/2$.

Следующая задача не связана непосредственно с предыдущей, но её можно к ней свести, и такое решение для вавилонских математиков всё же более естественно, чем решение, использующее сложные алгебраические преобразования.

Задача 2. *Прямоугольный треугольник разделён на две части отрезком, параллельным одному из катетов. Известны величины b, $\Delta = S_1 - S_2$ и $\delta = y_2 - y_1$ (рис. 1.9). Нужно найти y_1, S_1, y_2 и S_2.*

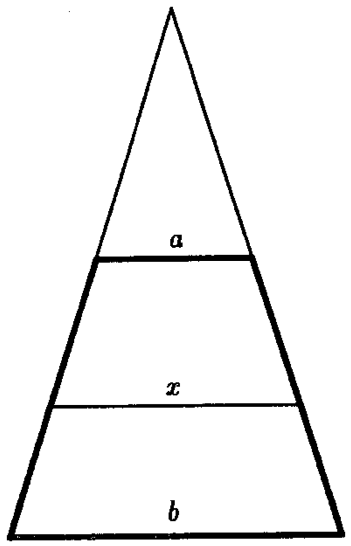

Рис. 1.8.

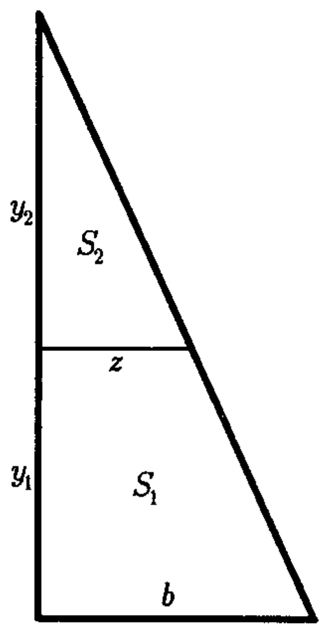

Рис. 1.9.

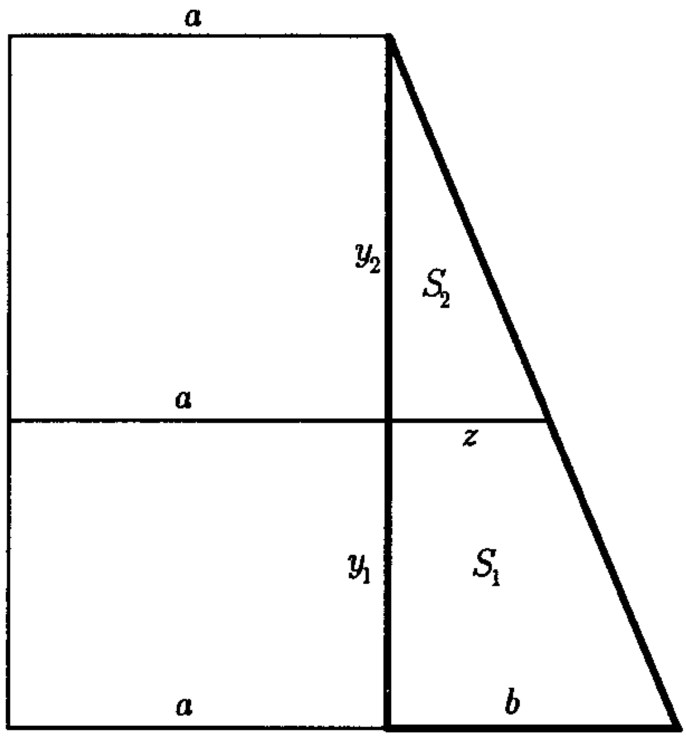

Рис. 1.10.

Основная сложность в решении этой задачи — вычисление длины z отрезка, делящего треугольник (получение ответа в табличке начинается именно с вычисления z). Этот отрезок можно вычислить следующим образом. Достроим треугольник до трапеции, чтобы продолжение отрезка z делило её на две равновеликие части (рис. 1.10). Существование такой трапеции следует из того, что $S_1 > S_2$ и $y_1 < y_2$. В самом деле, с увеличением a разность площадей прямоугольников размером $a \times y_2$ и $a \times y_1$ возрастает, поэтому для некоторого a она равна $S_1 - S_2$, и тогда $S_1 + ay_1 = S_2 + ay_2$. Это значение a равно $\frac{S_1 - S_2}{y_2 - y_1} = \frac{\Delta}{\delta}$. Воспользовавшись результатом задачи 1, получим $2(a+z)^2 = a^2 + (a+b)^2$, т. е.

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\delta} + b\right)^2\right]} - \frac{\Delta}{\delta}.$$

В условии одной из вавилонских задач (см. с. 33) в качестве одного из данных использован «наклон» — отношение катетов прямоугольного треугольника. Поэтому не будет очень большой натяжкой записать

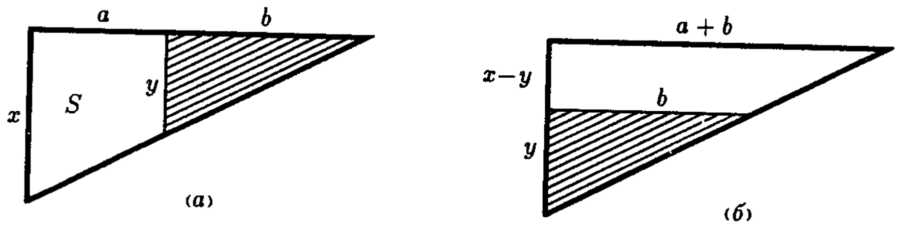

Рис. 1.11.

$y_1 = k(b-z)$, $S_2 = \frac{kz^2}{2}$ и $S_1 + S_2 = \frac{kb^2}{2}$. Тогда

$$\Delta = S_1 - S_2 = (S_1+S_2) - 2S_2 = \frac{kb^2}{2} - kz^2$$

и $y_1 = \frac{\Delta}{(b^2/2)-z^2}(b-z)$. Далее, $S_1 = \frac{(b+z)y_1}{2}$, $y_2 = y_1 + \delta$ и $S_2 = \frac{zy_2}{2}$.

Задача 3. *Прямоугольный треугольник разделён отрезком, параллельным одному из катетов, на треугольник и трапецию. Известны площадь трапеции S и длины отрезков a и b (рис. 1.11,* а*). Требуется найти длины отрезков x и y.*

Для решения этой задачи можно использовать соотношения $x+y = \frac{2S}{a}$ и $x - y = \frac{2S}{a+2b}$. Подставив значения $S = 320$, $a = 20$ и $b = 30$, приведённые в табличке, получим $x = 20$ и $y = 12$.

Соотношение $x+y = \frac{2S}{a}$ получается из формулы для площади трапеции. Соотношение $x-y = \frac{2S}{a+2b}$ можно переписать в виде $x-y = \frac{a(x+y)}{a+2b}$. Несложными алгебраическими преобразованиями его можно получить из соотношения $y : b = x : (a+b)$. Но его можно получить и геометрически. Прямоугольный треугольник с катетами y и b можно отрезать от треугольника с катетами x и $a+b$ двумя способами (см. рис. 1.11, *а* и *б*). Поэтому площадь трапеции с основаниями $a+b$ и b и высотой $x-y$ равна S, т. е. $S = (x-y)(a+2b)/2$.

Задача 4. *Сечение насыпи имеет форму равнобедренной трапеции с высотой h и основаниями a и b. Известны площадь S этой трапеции, большее основание a и наклон насыпи $\beta = \frac{a-b}{2h}$ (наклон — котангенс угла при основании трапеции). Нужно найти меньшее основание b.*

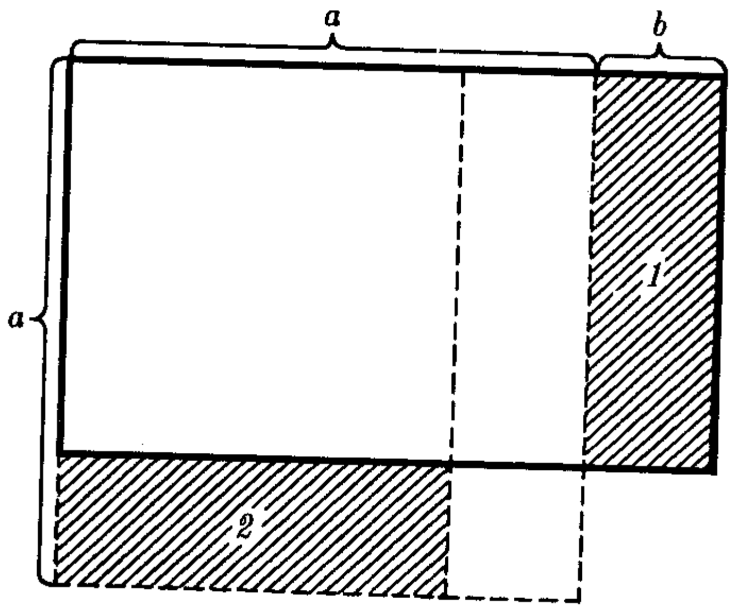

Рис. 1.12.

Так как $S\beta = \frac{h(a+b)}{2} \cdot \frac{a-b}{2h} = \frac{a^2-b^2}{4}$, то $b^2 = a^2 - 4S\beta$. В табличке число b вычисляется именно по этой формуле. Более того, в другой задаче этого же текста a вычисляется по формуле $a^2 = b^2 + 4S\beta$. Из этого, пожалуй, можно сделать вывод, что в Вавилоне тождество $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ было известно. Это тождество можно доказать геометрически, переместив фигуру *1* на место фигуры *2* (рис. 1.12). Обнаружить это тождество арифметически, вычисляя сумму и разность конкретных чисел a и b, а затем их произведение, весьма затруднительно. Такого рода доказательство должно использовать алгебраические преобразования. Поэтому для вавилонских математиков более правдоподобно геометрическое доказательство.

В этой задаче нужно отметить ещё появление в качестве одного из данных «наклона», соответствующего котангенсу угла. Это свидетельствует о том, что понятие наклона было достаточно привычным для вавилонских математиков, а это понятие включает в себя представление о подобии треугольников.

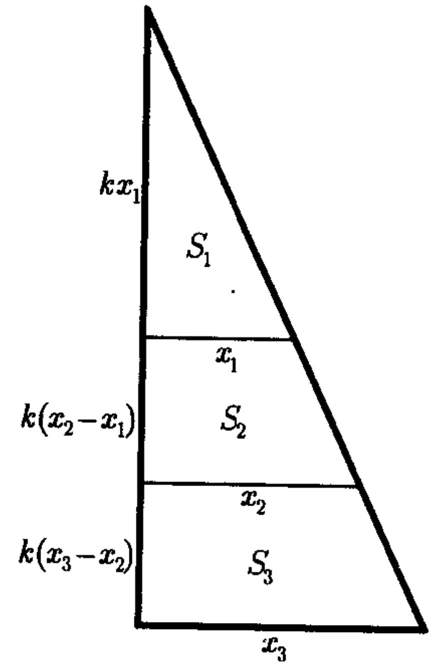

Рис. 1.13.

1.2.4. Задачи с площадями и решение уравнений в целых числах

Составители школьных учебников и в наше время часто стараются подбирать данные в условии задачи так, чтобы в ответе получилось целое число. Это делали и составители задач клинописных табличек в Вавилоне. Поэтому им пришлось столкнуться с решением уравнений $x^2+y^2=z^2$ и $p^2+q^2=2r^2$ в целых числах. Решения первого уравнения называют *пифагоровыми тройками*, а решения второго — ***вавилонскими тройками***; при записи числа в тройках обычно располагают в порядке возрастания. Вавилонские тройки возникают в задачах 1 и 2: данные в условиях этих задач подобраны так, что решения уравнения $p^2+q^2=2r^2$ целочисленные, а именно (1, 5, 7) и (7, 13, 17).

Пифагоровы тройки возникают при решении следующей задачи.

Задача 5. *Прямоугольный треугольник разделен двумя отрезками, параллельными одному из катетов, на три части, площади которых равны S_1, S_2 и S_3 (рис. 1.13). Какими должны быть длины отрезков x_1, x_2 и x_3, чтобы выполнялось равенство $S_1=S_3$?*

Воспользовавшись обозначениями рис. 1.13, легко проверить, что $S_1=kx_1^2/2$ и $S_3=k(x_3-x_2)(x_3+x_2)/2$. Значит, равенство $S_1=S_3$

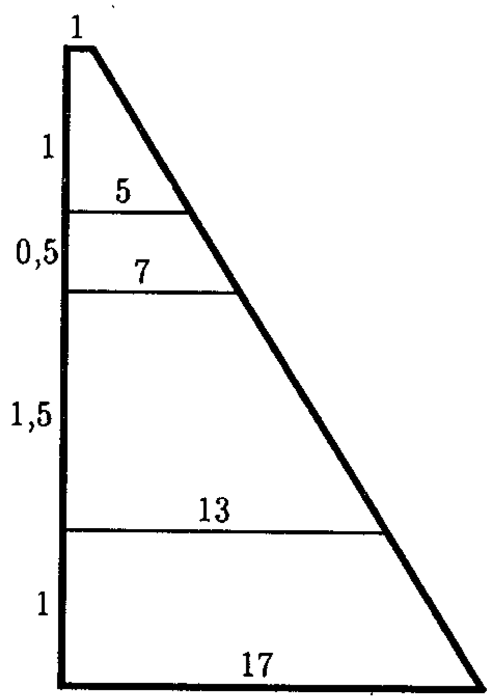

Рис. 1.14.

эквивалентно равенству $x_1^2 = x_3^2 - x_2^2$, т. е. $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. На глиняных табличках встречаются изображения таких разбиений треугольника на три части, причём эти чертежи соответствуют пифагоровой тройке (3, 4, 5). Эта задача показывает, что пифагоровы тройки возникали и независимо от теоремы Пифагора.

Более естественно, казалось бы, выяснить сначала, когда выполняется равенство $S_1 = S_2$. Но табличек с такими чертежами нет, и это не случайно. В самом деле, равенство $S_1 = S_2$ эквивалентно равенству $x_1^2 = x_2^2 - x_1^2$, т. е. $x_2^2 = 2x_1^2$. Поэтому табличка с примером решения задачи 5 свидетельствует, по-видимому, о том, что вавилонские математики пытались решить в натуральных числах уравнение $x^2 = 2y^2$.

Вавилонские тройки можно получать из пифагоровых троек. В самом деле, если $x^2 + y^2 = z^2$ и $p = x - y$, $q = x + y$, $r = z$, то $p^2 + q^2 = 2(x^2 + y^2) = 2r^2$.

На глиняных табличках встречаются изображения разбиений трапеций на пары равновеликих трапеций. На рис. 1.14 приведён (в искаженном масштабе) один из таких примеров: площади двух верхних трапеций равны 3, а площади двух нижних равны 15. Известна табличка и с разбиением трапеции на три пары равновеликих трапеций. Согласно задаче 1 длины оснований трапеций в таких разбиениях образуют последовательность x_1, x_2, ..., обладающую тем свойством, что $x_1^2+x_3^2 = 2x_2^2$, $x_3^2+x_5^2 = 2x_4^2$, ... В результате мы приходим к задаче построения последовательности вавилонских троек, в которой наибольшее число каждой тройки совпадает с наименьшим числом следующей за ней тройки. Для построения такой последовательности рассмотрим сначала последовательность пифагоровых троек $((n+1)^2-n^2, 2n(n+1), (n+1)^2+n^2)$; ей соответствует последовательность вавилонских троек $(2n^2-1, 2n^2+2n+1, 2n^2+4n+1)$. Так как $2n^2+4n+1 = 2(n+1)^2-1$, то эта последовательность обладает требуемым свойством. При этом мы получаем тройки (1, 5, 7), (7, 13, 17), (17, 25, 31), (31, 41, 49), (49, 61, 71), ... Последовательность продолжается и дальше, но мы ограничились перечислением лишь тех троек, которые действительно встречаются в вавилонских табличках.

1.2.5. Прямоугольные треугольники

Вавилонские таблички содержат много задач о прямоугольных треугольниках, использующих теорему Пифагора. Их решения свидетельствуют о том, что эта теорема была известна в Вавилоне задолго до рождения Пифагора. Решения, правда, не всегда верные. Например, гипотенуза z прямоугольного треугольника с катетами $x = 3$ и $y = 4$ в одной табличке вычисляется сразу двумя способами: $z = x + \frac{y}{2}$ и $z = y + \frac{x}{3}$. Обе формулы дают верный результат, но лишь в этом частном случае. Однако в решениях других задач той же самой таблички теорема Пифагора применяется верно. Уже в следующей задаче катет x прямоугольного треугольника со вторым катетом $y = 4$ и гипотенузой $z = 5$ вычисляется по формуле $x = \sqrt{z^2 - y^2}$.

Во многих вавилонских задачах о прямоугольных треугольниках заданы две величины (сумма или разность катетов, сумма или разность катета и гипотенузы, сумма всех сторон, произведение катетов) и нужно определить длины катетов. Рассмотрим несколько таких задач, обозначая катеты прямоугольника буквами x и y, а гипотенузу буквой z.

Задача 6. *Вертикально стоящая рейка возвышается над стеной на 3 локтя. Если верхний конец рейки опереть на верх стены, то нижний конец отодвинется от стены на 9 локтей. Найти длину рейки и высоту стены.*

В этой задаче даны величины $d = z - y$ и $a = x$. Требуемые величины z и y вычисляются в табличке по формулам $z = \frac{(a^2+d^2)/2}{d}$ и $y = \sqrt{z^2 - a^2}$, катет y можно вычислить проще: $y = z - d$. Выражение для z можно получить следующим образом. Сложив равенства $a^2 = x^2 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y) = d(z+y)$ и $d^2 = d(z-y)$, получаем $a^2 + d^2 = 2dz$.

Известна также задача, в которой вместо величины $d = x - y$ дана величина $b = z + y$. Эту задачу можно решить аналогично: сложив равенства $a^2 = b(z-y)$ и $b^2 = b(z+y)$, получаем $z = \frac{a^2+b^2}{2b}$. В табличке, правда, сначала вычисляется $y = \frac{b^2-a^2}{2b}$, а затем вычисляется $z = b - y$.

Задача 7. *Даны величины $x+y+z = a$ и $xy = b$. Нужно найти x.*

Для решения этой задачи возведём в квадрат обе части равенства $x + y = a - z$. В результате получим $x^2 + 2xy + y^2 = a^2 - 2az + z^2$. Учитывая, что $x^2 + y^2 = z^2$ и $xy = b$ получаем $z = \frac{a^2-2b}{2a}$. В одной из табличек сформулировано общее правило для вычисления z по данным a и b. Это весьма редкий случай; обычно решение в табличках приводится для конкретных чисел.

Замечание. *Формула $z = \frac{a^2-2b}{2a} = \frac{a}{2} - \frac{b}{a}$ эквивалентна тождеству $z = p - r$ где p — полупериметр, $r = \frac{b}{a} = \frac{S}{p}$ — радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника.*

Задачи о прямоугольных треугольниках часто приводили к системам уравнений с двумя неизвестными. Если задано произведение катетов и их сумма или разность, то получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} x \pm y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Решения таких систем находили по правилу $x = \frac{a}{2} + w$ и $y = \pm\left(\frac{a}{2} - w\right)$, где $w = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$.

Решения систем уравнений вида

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x \pm y = b. \end{cases}$$

находили по правилу $x = \frac{b}{2} + w$ и $y = \pm\left(\frac{b}{2} - w\right)$, где $w = \sqrt{\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

В одной из табличек вычислены площади правильных пятиугольника, шестиугольника и семиугольника со стороной 1. По-видимому, площадь S_n правильного n-угольника со стороной 1 вычислялась по формуле

$$S_n = \frac{n}{12}\sqrt{n^2 - 9}. \tag{1.2}$$

Эту (приближённую) формулу можно получить с помощью теоремы Пифагора следующим образом. Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, h_n — расстояние от центра описанной окружности до стороны, d — диаметр описанной окружности. Тогда

$$S_n = \frac{n a_n h_n}{2} = \frac{n a_n}{2}\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}. \tag{1.3}$$

Длину окружности считали равной $d/3$. Если длину окружности считать равной $n a_n$, то при $a_n = 1$ получим $d = n/3$. Если подставить в (1.3) значения $a_n = 1$ и $d = n/3$, то получим (1.2).

1.2.6. Табличка Плимтон 322

В коллекции Джорджа Плимтона под номером 322 была зарегистрирована очень интересная глиняная табличка, датируемая 1800 г. до н. э. В ней приведены четыре столбца чисел, причём последние три столбца в привычной нам десятичной записи (после исправления нескольких ошибок или описок) выглядят следующим образом:

119	169	1
3367	4825	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161	289	13
1771	3229	14
56	106	15

Числа первого столбца таблички получены следующим образом. Обозначим числа второго и третьего столбцов (т. е. первого и второго столбцов приведённой нами таблицы) буквами b и c соответственно. В первом столбце записаны числа c^2/a^2, где $a^2 = c^2 - b^2$.

Легко заметить, что в табличке записаны числа пифагоровых троек, причём величина c^2/a^2 (а значит, и величина b/a) изменяется строго монотонно. Кроме того, простыми делителями чисел a являются лишь 2, 3 и 5. Числа вида $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$, где k, l и m — целые числа, характеризуются тем, что соответствующие им шестидесятиричные дроби конечны. Все пифагоровы тройки нашей таблицы получаются с помощью чисел такого вида следующим образом. Для получения первой тройки нужно взять дробь $\frac{12}{5}$ и рассмотреть числа $\frac{12}{5} - \frac{5}{12} = \frac{119}{60}$ и $\frac{12}{5} + \frac{5}{12} = \frac{169}{60}$. Для получения остальных троек нужно взять следующие дроби: $\frac{64}{27}$, $\frac{79}{32}$, $\frac{125}{54}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{54}{25}$, $\frac{32}{15}$, $\frac{25}{12}$, $\frac{81}{40}$, 2, $\frac{48}{25}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{50}{27}$, $\frac{9}{5}$. Эти дроби монотонно убывают от $\frac{12}{5} = 2{,}4$ до $\frac{9}{5} = 1{,}8$. Более того, в указанных пределах нет других дробей вида $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, знаменатели которых меньше 60. Наиболее правдоподобно следующее объяснение происхождения таблички Плимтон 322. Так как $\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\right) = \frac{c^2-b^2}{a^2} = 1$, то $\frac{c}{a}+\frac{b}{a}=t$, $\frac{c}{a}-\frac{b}{a}=\frac{1}{t}$. Поэтому $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ и $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$. У вавилонян были таблички значений обратных величин целых чисел. Эти таблички можно было использовать для вычисления значений $t=rs^{-1}$ и $t^{-1}=sr^{-1}$, где r и s — целые числа. Как мы уже говорили, для получения конечных шестидесятиричных дробей нужно было, чтобы числа s и r имели вид $2^k\cdot 3^l\cdot 5^m$. Числа в табличке Плимтон 322 удовлетворяют условию $b<a$; для положительных t это условие можно записать в виде $t^2-2t-1<0$, т. е. $1-\sqrt{2}<t<1+\sqrt{2}$. В нашем случае остается ограничение $1<t<1+\sqrt{2}$. Числа в табличке Плимтон 322 можно охарактеризовать как все пифагоровы тройки, соответствующие числам $t=sr$, где s и r — целые числа вида $2^k\cdot 3^l\cdot 5^m$, причём $r<60$ и $9/5<t<1+\sqrt{2}$.

1.2.7. Окружность

Одной из задач, связанных с окружностью, является вычисление длины s хорды при заданных диаметре d и высоте a сегмента, отсекаемого хордой. Применив теорему Пифагора к треугольнику OAB (рис. 1.15), получаем $s^2/4=R^2-(R-a)^2$, т. е. $s=\sqrt{4R^2-(2R-2a)^2}=\sqrt{d^2-(d-2a)^2}$. В табличках длина хорды вычисляется именно по этой формуле.

* * *

С окружностью связана весьма любопытная, хотя и очень грубая, приближённая формула $S=L^2/12$, где S — площадь круга, L — длина окружности. В Вавилоне использовалась также формула $L=3d$, где d — диаметр.

Происхождение формулы $S=L^2/12$ непонятно; у неё нет геометрической наглядности. В статье [32] Зайденберг выдвинул две гипотезы о происхождении этой формулы. Комбинируя встречающиеся в табличках формулы $S=L^2/12$ и $L=3d$, можно получить формулы $S=Ld/4$ и $S=3d^2/4$. Зайденберг поэтому считает весьма вероятным, что интересующая нас формула была получена подстановкой

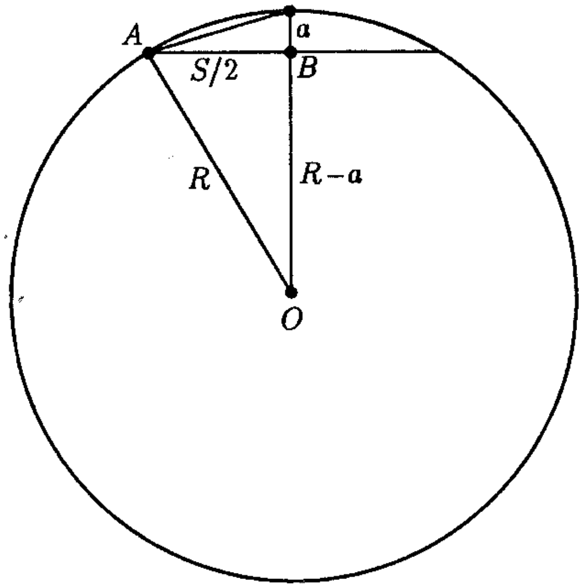

Рис. 1.15.

выражения $d = L/3$ в одну из этих формул. Предпочтение он отдаёт формуле $S = Ld/4$ по следующим причинам:

1. Эта формула в отличие от всех остальных точная. (Она связана с представлением круга в виде объединения бесконечно малых равнобедренных треугольников с вершинами в его центре.) В этом случае становится понятным спокойное отношение вавилонских математиков к столь грубому приближению как $\pi \approx 3$.

2. В одной из вавилонских табличек площадь полукруга вычисляется как четверть произведения длины дуги полукруга на его диаметр.

Длина окружности и площадь круга выражаются через диаметр формулами $L = \pi_1 d$ и $S = \pi_2 d^2/4$. Было ли вавилонским математикам известно, что $\pi_1 = \pi_2$? Приближённая формула $S \approx L^2/12$ эквивалентна равенству $\pi_2 d/4 \approx \pi_1^2 d^2/12$, т. е. $\pi_1^2 = 3\pi_2$, из которого никак нельзя сделать вывод о том, что $\pi_1 = \pi_2$. Но соотношение $S = Ld/4$ сразу же приводит к равенству $\pi_1 = \pi_2$. Поэтому вавилонские математики могли понимать, что $\pi_1 = \pi_2$.

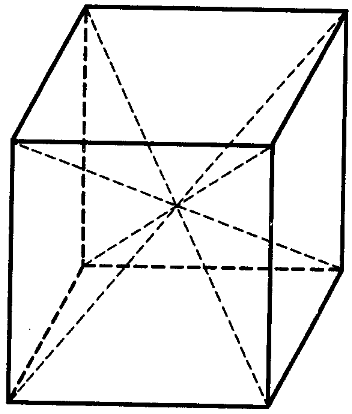

Рис. 1.16.

1.2.8. Объём усечённой пирамиды

В одной из вавилонских табличек приведено вычисление объема усечённой пирамиды с квадратными основаниями. Метод разрезания на части позволяет найти объём не любой пирамиды, поэтому вывод формулы объёма пирамиды в общем случае требует предельного перехода. Но вычислить объём некоторых пирамид можно путём разрезания куба. Например, куб можно разрезать на шесть равных пирамид, взяв в качестве их общей вершины центр куба, а в качестве оснований — его грани (рис. 1.16). В этих пирамидах угол между плоскостями боковых граней и плоскостью основания равен 45°. В табличке вычисления производятся для усечённой пирамиды именно с таким углом между боковыми гранями и основанием. Таблички с вычислением объёмов других пирамид не известны, поэтому нет оснований делать выводы о том, что вавилонские математики умели вычислять объём любой пирамиды.

Текст интересующей нас таблички, к сожалению, испорчен в очень важном для расшифровки месте. В задаче требуется найти объём, вероятно, водохранилища, имеющего форму усечённой пирамиды с квадратными основаниями, причём известны сторона верхнего (большего) основания $a = 10$, высота пирамиды $h = 1{,}5$ (сторона и высота заданы в разных единицах измерения, и решение начинается с того, что высота приводится к тем же единицам измерения, что и сторона) и «наклон» 1, соответствующий углу 45°. Сторона b другого основания вычисляется как $10 - 3 = 7$, т. е. $b = a - 2h$. Затем берётся величина $\frac{17}{2} = 8{,}5$, т. е. $\frac{a+b}{2}$. Эта величина возводится в квадрат; получаем $72\frac{1}{4}$. Затем с величиной $\frac{a-b}{2}$ производится некоторая операция, в результате которой получается $\frac{3}{4}$. Но какая именно операция, непонятно, потому что текст испорчен. По поводу того, что делается в табличке с величиной $\frac{a-b}{2}$, есть два мнения. Согласно одному мнению вычисляется величина $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. В этом случае мы получаем верную формулу

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right],$$

но такое толкование не очень хорошо согласуется с остатками текста. Согласно другому мнению вычисляется величина $\frac{a-b}{4} = \frac{3}{4}$. В этом случае мы получаем бессмысленную формулу

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{a-b}{4}\right],$$

но такое толкование всё же нельзя исключить.

Формула для вычисления объёма усеченной пирамиды могла быть получена, например, следующим образом. Слагаемое $h\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ соответствует, скорее всего, параллелепипеду с высотой h, основанием которого является квадрат со стороной $\frac{a+b}{2}$. Такой параллелепипед образуют плоскости оснований усеченной пирамиды и плоскости, проходящие через средние линии боковых граней (которые являются трапециями) перпендикулярно плоскостям оснований. Разрежем усеченную пирамиду по этим плоскостям. В результате получим четыре пирамиды, четыре призмы и ещё некоторую фигуру (рис. 1.17). Если же фигуру попытаться дополнить призмами до параллелепипеда, то призмы перекроются, причём их общими частями будут четыре такие же пирамиды, какие были получены раньше. Высоты у всех пирамид равны $\frac{h}{2}$, а основания являются квадратами со стороной $\frac{a-b}{4}$. Сумма объёмов этих пирамид равна $\frac{8}{3} \cdot \frac{h}{2}\left(\frac{a-b}{4}\right)^2 = \frac{h}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, причём формулу для вычисления объёма таких пирамид можно получить путём разрезания куба.

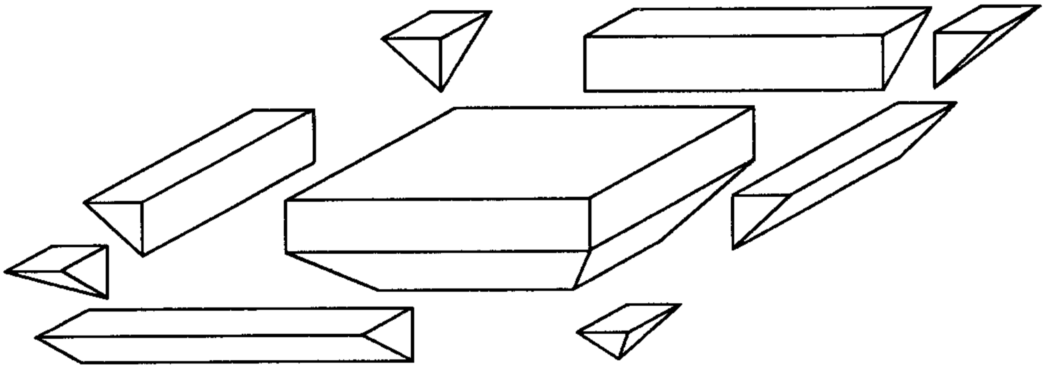

Рис. 1.17.

1.2.9. Арифметические и геометрические прогрессии

Вавилоняне знали правило суммирования n членов арифметической прогрессии a_1, a_2, …, a_n:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

В вавилонских табличках III–II вв. до н.э. встречаются задачи с суммированием членов геометрической прогрессии, например, 1, 2, 2^2, …, 2^9.

Наиболее замечательно правило вычисления суммы $1^2+2^2+\dots+10^2$. Но оно встречается уже после того, как суммы квадратов научился вычислять Архимед, и неизвестно был ли получен этот результат самостоятельно.

1.2.10. Заключение

Математика в Древнем Египте и Вавилоне не была дедуктивной наукой, как впоследствии в Греции. Она имела догматический характер, что отражало авторитарный склад мышления в деспотических и жёстко иерархических государствах. Математикам не нужно было убеждать других в истинности их правил и методов, никто с ними не спорил. Становление и развитие математики как дедуктивной науки связано с Древней Грецией, где по многим вопросам происходили жаркие споры философов.

Глава 2.

Древняя Греция

Развитие математики в Древней Греции началось в Малой Азии, в ионийских городах. Фалес Милетский испытал большое влияние математики Древнего Египта и Вавилона, которые он посетил во время своих путешествий и куда он уже в старости советовал поехать юному Пифагору. В последующем развитии важнейшую роль играла пифагорейская школа, основанная в так называемой Великой Греции (восточное побережье Италии, где в то время были многочисленные греческие колонии). Затем центр сместился в Афины, в школы Платона и Аристотеля. А последняя стадия связана с городом Александрия в Египте; после завоеваний Александра Македонского этот город находился в сфере влияния греческой культуры. И здесь снова греческая математика испытывает большое влияние математики Древнего Египта и Вавилона (очень велико было также влияние вавилонской астрономии).

Слово «математика» греческого происхождения. В современном значении оно встречается впервые у Аристотеля. Ещё у его учителя Платона это слово означало любой важный предмет изучения. В диалоге «Государство» Платон считает главной математикой идею Бога. Но в «Законах» он говорит, что есть три математики, наиболее подходящих свободнорождённому: арифметика, наука измерения (геометрия) и астрономия. Это уже весьма близко к современному смылу слова «математика». Такое употребление этого слова связано с пифагорейской школой, многие представители которой были друзьями Платона. Пифагорейцы называли математиками тех, кто глубоко усвоил их учение, основную часть которого составляла именно математика в современном смысле. Последователи Аристотеля объясняли значение слова «математика» так. Риторику и поэзию может понимать и тот, кто их специально не изучал. А предмет, называемый математикой, может понять только тот, кто его предварительно изучил.

Греческую науку часто изображают чисто теоретической, далёкой от практики и от наблюдений. Это неправильное представление. Например, астрономические наблюдения проводились очень тщательно. В частности, было отмечено лунное затмение в такой момент, когда Солнце и Луна находились над горизонтом (были видимы). Это противоречило объяснению лунных затмений (Луна попадает в тень, отбрасываемую Землёй). Над этим явлением греческие физики и математики долго думали. Возможно, именно из-за него Анаксагор и некоторые другие считали, что есть другие небесные тела, которые иногда вызывают лунные затмения. Потом нашли правильное объяснение: в действительности Солнце находится ниже горизонта, но из-за преломления лучей света кажется, что оно находится выше горизонта. В связи с этим приводили опыт с пустым кувшином и кольцом, лежащим на его дне. Сначала кольцо невидимо, но после наливания воды в кувшин оно становится видимым.

Трудно проследить, какие именно обстоятельства привели к той строгости рассуждений, которой придерживались древнегреческие математики. Строгость их рассуждений — явление исключительное. Когда древнегреческая наука угасла, эта строгость была утрачена на два тысячелетия, и возврат к древнегреческой строгости рассуждений произошёл лишь в XIX веке.

2.1. Фалес Милетский (624-546 до н.э.)

Одним из первых древнегреческих геометров был Фалес, который родился в городе Милете в Малой Азии. Фалес Милетский многое перенял из геометрии Египта и Вавилона во время своих путешествий. Известен рассказ о том, что он вычислил высоту египетской пирамиды, измерив её тень в тот момент, когда длина тени, отбрасываемой предметом равна длине самого предмета. Так пишут ранние историки. Но Плутарх (живший уже гораздо позже) пишет, что Фалес при этом измерении рассматривал подобные треугольники и приравнивал отношения соответственных сторон. Это, скорее всего, просто домыслы Плутарха.

Однажды Фалес, предвидя большой урожай оливок, взял в наём все маслодавильни и, став фактическим монополистом в изготовлении оливкового масла, нажил целое состояние.

Известен рассказ Геродота о том, что Фалес предсказал солнечное затмение (современные историки полагают, что речь идёт о солнечном затмении 585 г. до н.э.). Предсказание солнечного затмения требует многолетних астрономических наблюдений, поэтому Фалес должен был хорошо знать вавилонскую астрономию.

Считается, что Фалес открыл следующие геометрические факты: 1) диаметр делит круг пополам; 2) углы при основании равнобедренного треугольника равны; 3) углы между двумя пересекающимися прямыми равны; 4) если сторона и прилегающие к ней углы одного треугольника равны стороне и прилегающим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны; 5) вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.

Сообщение Прокла о том, что Фалес первым доказал, что диаметр делит круг пополам, пытались оспорить многие историки математики. Это предложение не доказывается даже у Евклида, и если Фалес считал необходимым доказывать такие очевидные вещи, то это означает, что математика Фалеса обладала строгой логической структурой. Но со свидетельством Прокла, которому были доступны утерянные впоследствии источники, спорить трудно. Фалес заслуженно пользуется славой человека, который ввёл в геометрию доказательства.

В список геометрических фактов, открытых Фалесом, включено лишь то, о чём есть непосредственные свидетельства древнегреческих источников. В нём отсутствует теорема, которая в последние десятилетия называется у нас во многих школьных учебниках теоремой

Фалеса, а до того без специального названия входила обычно в раздел «теоремы о пропорциональных отрезках». Некоторые историки математики, основываясь, в частности, на крайне сомнительном свидетельстве Плутарха, решили, что Фалес мог знать теорему, приписываемую ему школьными учебниками. Поэтому термин «теорема Фалеса» получил распространение в нашей стране и отчасти во Франции, но не в Англии и не в Германии. Точнее говоря, на английском языке теоремой Фалеса обычно называют теорему о том, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.

Фалеса, когда он уже был стариком, посетил юноша Пифагор. Фалес поделился с ним тем, что знал, и посоветовал поехать в Египет для продолжения изучения геометрии.

2.2. Пифагор (580-520 до н.э.)

Для современников Пифагор был прежде всего религиозным пророком. Он создал мистическое религиозное учение, которое отличалось от многочисленных мистических религий того времени тем, что очищение души и соединение с божеством достигались при помощи математики. Это учение было столь влиятельным, что Пифагора многие его ученики обожествляли.

Пифагор родился на острове Самос в Эгейском море. Юношей он отправился в странствия, продлившиеся более 20 лет. Прежде всего Пифагор посетил Милет, чтобы встретиться с Фалесом. Фалес передал ему знания, какие мог, и побудил его плыть в Египет. Много лет Пифагор провел в храмах Египта, изучая астрономию и геометрию. После этого 10 лет он находился в плену в Вавилонии, а затем вернулся на Самос. Недолго пожив там, он переехал в город Кротон на юге Италии (там было так много древнегреческих колоний, что эта область Италии называлась в то время Великой Грецией). В Кротоне у Пифагора сначала было 200 учеников, а потом более 2000. Он проповедовал презрение к славе и богатству, уважение к старшим, воздержание от мяса, отказ от вина; его ученики принимали обет щадить и не губить животных, не вредных для человека. Пифагорейцы считали свое имущество общим и не брали плату за обучение тех, кто к ним приходил. Важную роль в воспитании учеников Пифагор отводил музыке. Он первым разработал теоретические основы музыки и установил, что числовые отношения играют в музыке большую роль. Это побудило Пифагора обратить внимание на важность количественных соотношений в познании природы; ему принадлежит тезис «Все вещи суть числа». В его учении числа и мистика чисел играли важную роль. Например, Пифагор учил, что небесным богам нужно приносить нечётное, а подземным чётное число приношений.

Пифагорейцы верили в переселение душ. Как пишет Ямвлих, Пифагор очень живо и ясно припоминал множество случаев из своих прежних жизней, которые прожила когда-то его душа перед тем, как была заключена в это тело, и с помощью несомненных доказательств утверждал, что он был Эвфорбом, сыном Панфоя, противником Патрокла. Из стихов Гомера Пифагор особенно восхвалял строки о «гордом сердцем Эвфорбе».

Ученики Пифагора были разделены на две группы. В первой группе были начинающие. Их называли акусматиками, т.е. слушателями, потому что они прослушивали обобщенный свод знаний без подробного изложения и слушали поучения без доказательств. Более продвинутых учеников Пифагора называли математиками, т.е. познавателями; они изучали всю суть науки и занимались доказательствами.

Известна история об ученике Пифагора, которому Пифагор сначала платил деньги за каждую усвоенную им теорему, а потом ученик так увлёкся, что уже сам захотел платить за обучение.

Традиционно пифагорейцы изучали четыре предмета: арифметику, музыку, геометрию и астрономию. Школа Пифагора существовала много столетий после его смерти. Именно в этой школе была обнаружена и доказана иррациональность числа $\sqrt{2}$ (несоизмеримость диагонали квадрата и его стороны). Это открытие потребовало пересмотра всех основ пифагорейской математики, потому что противоречило основному тезису «Все вещи суть числа». Дело в том, что под

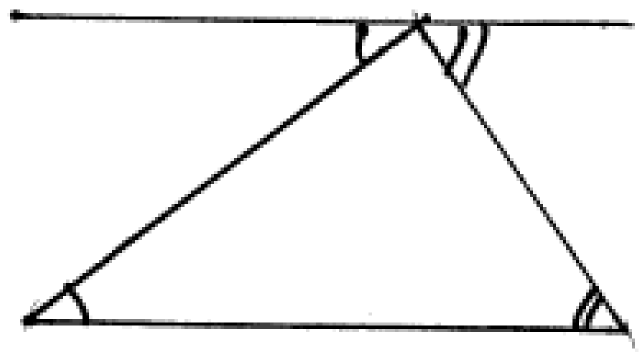

Рис. 2.1.

числами подразумевались только натуральные числа и их отношения.

Пифагорейцы нашли рекуррентный способ построения приближений числа $\sqrt{2}$ рациональными числами d_n/a_n, где $a_{n+1} = a_n + d_n$, $d_{n+1} = 2a_n + d_n$ и $a_1 = d_1 = 1$.

Разделение чисел на чётные и нечётные восходит к Пифагору.

Пифагорейцы доказали теорему о том, что сумма углов любого треугольника равна двум прямым углам. Их доказательство было следующее: через вершину треугольника проводилась прямая, параллельная противоположной стороне, и приравнивались две пары накрест лежащих углов (рис. 2.1). По-видимому, пифагорейцам была известна и теорема о сумме углов многоугольника (и о сумме его внешних углов — эту теорему упоминает Аристотель). Пифагорейцы знали, какими правильными многоугольниками можно замостить плоскость.

С именем Пифагора связана теорема о том, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах. Сведения о том, как именно доказывал Пифагор эту теорему, до нашего времени не дошли. Сохранились лишь неясные упоминания о «знаменитом чертеже» Пифагора, причём уже древнегреческие историки не были уверены, что этот чертёж относился именно к теореме Пифагора. Ситуация осложняется ещё и тем, что у пифагорейцев был обычай все свои открытия приписывать Пифагору.

Пифагор знал, что площадь квадрата, сторона которого равна целому числу n, равна n^2. Поэтому для прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами он знал, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Пифагору был известен прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5, т.е. он знал тождество $3^2+4^2=5^2$. Он получил и более общее равенство

$$m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2,$$

где число m нечётно. Геометрический смысл этого равенства — добавление гномона к квадрату. Требуется лишь выбрать гномон так, чтобы его площадь была полным квадратом. Для этого гномон с шириной 1 добавляется к квадрату со стороной $\frac{m^2-1}{2}$ и в результате получается квадрат со стороной $\frac{m^2+1}{2}$; площадь гномона при этом равна m^2.

Другое равенство такого типа приписывают Платону:

$$(2m)^2+(m^2-1)^2=(m^2+1)^2,$$

где m — любое целое число. Геометрически это равенство означает добавление к квадрату со стороной m^2-1 двух последовательных гномонов с шириной 1 (или одного гномона с шириной 2), чтобы получился квадрат со стороной m^2+1.

Первоначально *гномоном* (т.е. индикатором) в Древней Греции называли часть солнечных часов, отбрасывающую тень. Затем так стали называть иструмент, предназначенный для построения прямых углов. В математике этот термин означал фигуру, полученную при вырезании меньшего квадрата из большего (рис. 2.2, *а*). Более общий гномон, полученный при вырезании меньшего параллелограмма из большего (рис. 2.2, *б*), рассматривает Евклид.

Гномон играл большую роль в математике пифагорейцев. В геометрии с помошью гномона решали задачи на приложение площадей, а в арифметике с помошью гномона доказывали, что $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Эта формула была известна Пифагору. Доказывали её так: сначала квадрат со стороной n разделяли на гномон и квадрат со стороной $n-1$, затем так же разделяли меньший квадрат и т.д.

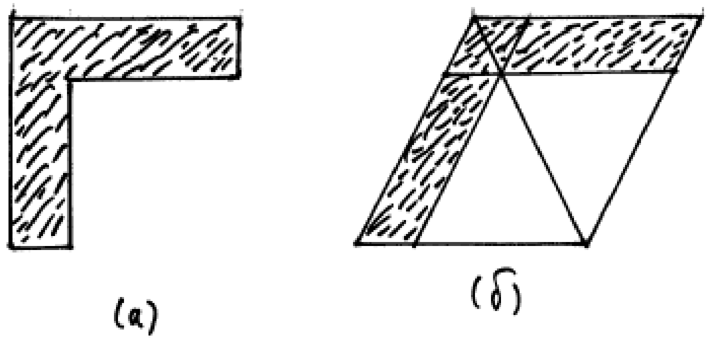

Рис. 2.2.

Метод приложения площадей (историки математики часто называют его «геометрическая алгебра») был разработан пифагорейцами (если не самим Пифагором). Этот метод позволяет геометрически решать квадратные уравнения.

У пифагорейцев была теория пропорций, но только для соизмеримых величин. (Для несоизмеримых величин теорию пропорций разработал Евдокс.) Но пифагорейцы без колебаний пользовались ей в применении к любым величинам до того момента, когда была открыта несоизмеримость стороны квадрата и его диагонали.

Пифагор открыл золотое сечение[1], т.е. деление отрезка AB точкой M, для которого $AM : AB = MB : AM$. Оно играет большую роль в пифагорейской теории музыки. Золотое сечение тесно связано с правильным пятиугольником: отношение стороны правильного пятиугольника к его диагонали равно отношению отрезков в золотом сечении. Соответственно, оно связано и с правильной пятиконечной звездой (пентаграммой). Пятиконечная звезда служила опознавательным знаком для пифагорейцев; она символизировала здоровье. Когда один пифагореец умирал на чужбине и не мог заплатить человеку, который за ним ухаживал, он велел ему изобразить на жилище пентаграмму: если мимо будет проходить пифагореец, то он обязательно спросит о ней. И действительно, несколько лет спустя проходивший

[1]Первое дошедшее до нас письменное упоминание о золотом сечении содержится в «Началах» Евклида. Но там оно называется делением отрезка «в крайнем и среднем отношении». В 1509 г. известный итальянский математик Лука Пачолли использовал термин «божественная пропорция». А термин «золотое сечение» ввёл немецкий математик Мартин Ом (1792-1872), младший брат знаменитого физика Георга Ома, в честь которого названа единица измерения сопротивления.

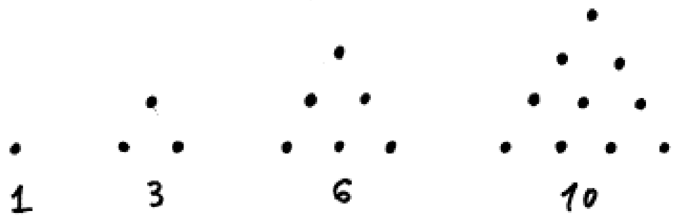

Рис. 2.3.

мимо пифагореец увидел этот знак, и хозяин дома получил богатое вознаграждение.

Пифагорейцы, по-видимому, имели представление о правильных многогранниках. Найден этрусский додекаэдр; это означает, что додекаэдр имеет весьма древнее происхождение. Пифагореец Гиппас дал построение шара, описанного вокруг додекаэдра. Есть указание, что куб, тетраэдр и додекаэдр происходят от пифагорейцев, а октаэдр и икосаэдр введены Теэтетом. Но, возможно, Теэтет лишь обосновал то наглядное представление, которое было у пифагорейцев. Октаэдр и икосаэдр отличаются от остальных правильных многогранников тем, что в вершине сходятся не 3 грани, а 4 или 5, и поэтому для октаэдра и для икосаэдра сходящиеся в одной вершине грани образуют нежёсткую конструкцию. Возможно, именно с этим связано то, что октаэдр и икосаэдр, были обнаружены позже остальных правильных многогранников.

Весьма вероятно, что Пифагор ввёл треугольные числа. (Треугольные числа — это числа вида $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$; происхождение такого названия поясняет рис. 2.3). Квадратные числа (квадраты целых чисел) были известны Пифагору.

Во времена Пифагора были известны три средних: арифметическое (числа a, c и b образуют арифметическую прогрессию, т.е. $c = \frac{a+b}{2}$), геометрическое (числа a, c и b образуют геометрическую прогрессию, т.е. $c = \sqrt{ab}$) и гармоническое (числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{b}$ образуют арифметическую прогрессию, т.е. $c = \frac{ab}{a+b}$).

Пифагор сделал важные открытия и в астрономии. Он одним из первых утверждал, что Земля имеет форму шара. Вряд ли такой вывод он сделал из того, что во время лунного затмения тень, отбрасываемая Землёй, круглая. Такое объяснение лунных затмений предложил лишь гораздо позже Анаксагор. Скорее всего, Пифагор исходил из эстетических математических представлений о совершенстве круглой формы. Пифагор также установил тождественность утренней и вечерней звезды (Венеры). До него считали, что Венера утром и Венера вечером (утренняя звезда и вечерняя звезда) — это две разные планеты

2.3. Зенон (490-430 до н.э.)

Зенон не был математиком, но его рассуждения о природе бесконечного оказали очень большое влияние на развитие греческой математики, заставив математиков осторожно обращаться с бесконечностью — не только исключить актуальную бесконечность, но и с потенциальной бесконечностью обращаться более аккуратно, чем это было принято до Зенона (по поводу актуальной и потенциальной бесконечности см. с. 59).

Зенон привёл логические рассуждения, показывающие, что как пространство, так и время, одновременно должны быть бесконечно делимыми и не могут быть бесконечно делимым, и что невозможна множественность вещей. Он был любимым учеником Парменида — главы школы элеатов, который первым начал строить философию на основе логических рассуждений. Симпликий писал, что до Парменида философы высказывали своё мнение без доказательств. Именно Парменид впервые высказал логические законы тождества и исключённого третьего и применял их в своих доказательствах.

Апории Зенона сохранились лишь в пересказе его противников, дававших свои объяснения его «заблуждений». Не исключено, что они несколько исказили рассуждения Зенона, чтобы их было проще опровергать. При этом сохранилась лишь малая часть из 40 разработанных Зеноном апорий, основанных на трудностях, происходящих из анализа непрерывности.

Наиболее известны следующие апории Зенона (первые 4 из них приводит Аристотель с своей книге «Физика»).

1. «Дихотомия». Движущееся тело перемещается на какое-то расстояние. Но всякое расстояние делимо до бесконечности, поэтому движущееся тело должно сначала пройти половину того расстояния, на которое оно перемещается, и лишь после этого всё расстояние. Однако до этого тело должно пройти половину оставшейся половины расстояния и т.д. Стало быть, половины бесконечны, а бесконечные по числу величины нельзя пройти за конечное время.

2. «Ахиллес и черепаха». Пусть быстроногий Ахиллес бежит за черепахой. Ему требуется какое-то время, чтобы добежать до исходного пункта черепахи, уползающей от него. За то время, за которое Ахиллес достиг пункта, где находилась черепаха, она проползла какое-то расстояние, которое Ахиллесу придётся пробежать. За это время черепаха снова проползёт какое-то расстояние и т.д. В силу бесконечной делимости пространства можно брать всё меньшие и меньшие расстояния — до бесконечности. Следовательно, быстроногий Ахиллес не сможет догнать медленно ползущую черепаху.

3. «Стрела». Движущаяся стрела в любой момент либо движется, либо находится в покое. Если момент времени неделим, то стрела в этот момент не может двигаться, потому что если бы она двигалась, то момент можно было бы разделить. Но если стрела не может двигаться в каждый момент, то она не может двигаться вообще, потому что время складывается из моментов. Следовательно, движущаяся стрела пребывает в покое.

4. «Стадион». На стадионе неподвижно стоят одинаковые предметы $A_1, \dots, A_n$ (на рис. 2.4, *а* $n = 8$). Предметы $B_1, \dots, B_n$ и $C_1, \dots, C_n$, равные по размеру предметам A и расположенные так, как показано на рис. 2.4, *а*, начинают двигаться в указанных направлениях с равными скоростями. Предметы B_n и C_1 одновременно окажутся на противоположных концах предметов A (рис. 2.4, *б*). При этом предмет C_8 пройдёт мимо всех предметов B, а предмет B_8 мимо лишь половины предметов A. Следовательно, время будет тоже половинным, так как каждый предмет мимо каждого проходит в одинаковое время.

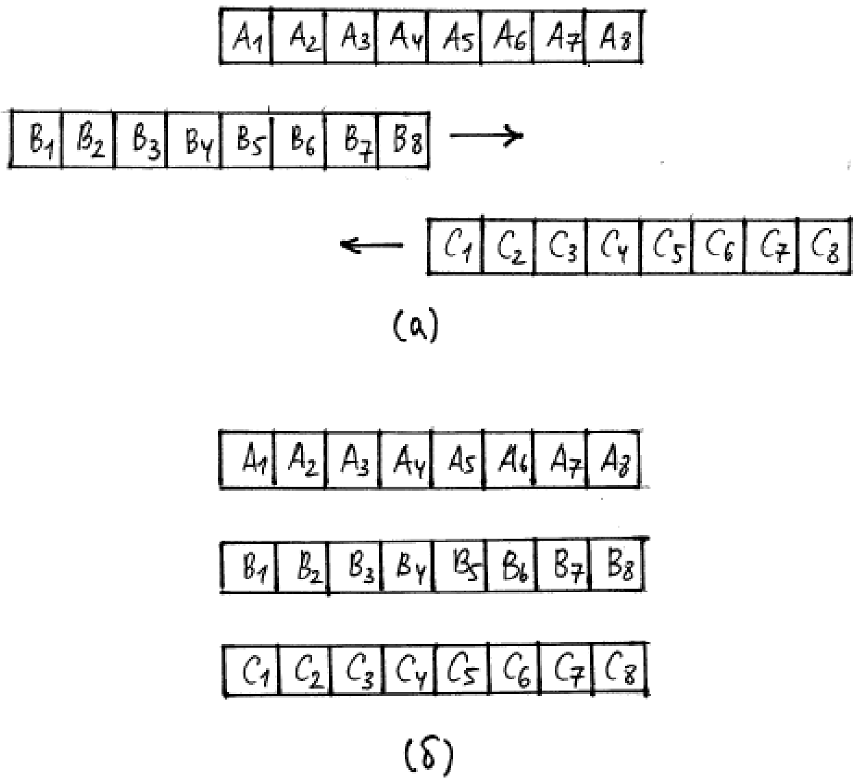

Рис. 2.4.

(Аристотель, опровергая это рассуждение Зенона, говорит, что ошибка в предположении, что предмет затрачивает равное время, двигаясь мимо неподвижного предмета и мимо движущегося. Но Зенон здесь рассуждает о неделимых моментах времени и неделимых элементах пространства.)

5. «Куча». Одна песчинка, очевидно, не образует кучи песка. Если n песчинок не образуют кучу песка, то после добавления ещё одной песчинки они по-прежнему не будут образовывать кучи песка. Следовательно, никакое число песчинок не образует кучу песка.

Первая и вторая апории должны были показать противоречивость предположения о том, что возможно бесконечное деление пространства и времени. После этого оставалось предположить, что пространство и время состоят из неделимых элементов. Именно против этого предположения направлены третья и четвёртая апории.

Техника доказательств была разработана в жарких спорах представителей разных философских школ, под жёсткой критикой со стороны философов-противников. Важную роль сыграли также публичные выступления в суде, где нужно было доказывать свою правоту безупречными рассуждениями и опровергать утверждения противника. Представление древнегреческих математиков о том, что такое доказательство, практически такое же, как у нас. Доказательство состоит из исходных положений, которые должны быть ясны всем, и промежуточных рассуждений, с которыми должен быть согласен собеседник. Правила рассуждений были выработаны экспериментально, в спорах. Как только аксиомы сформулированы, никакие новые попытки прибегнуть к интуиции уже недопустимы — правдоподобные рассуждения нельзя принимать в расчёт. Но это, конечно, было только теоретическое требование, на практике оно не могло быть выполнено.

От разрушительной критики Зеноном понятия бесконечности впечатление у всех философов осталось неизгладимое. По-видимому, именно из-за этой критики древнегреческие математики избегали вводить в рассуждения «актуальную бесконечность» (т.е. множества, содержащие бесконечное число элементов, которые предполагаются существующими одновременно) и ограничивались «потенциальной бесконечностью», т.е. возможностью увеличивать данную величину (или уменьшать её, если речь идёт о «непрерывной» величине). Типичный пример — формулировка Евклида: «Первых чисел существует больше всякого предложенного количества первых чисел». Евклид также нигде не говорит о бесконечных прямых, а говорит только об отрезках, хотя и использует при этом слово «прямая». Он отмечает, что отрезок можно многократно продолжать, получая при этом каждый раз новый отрезок (но не всю прямую). Знаменитый пятый постулат также использует возможность продолжить отрезки: «Если секущая пересекает две прямые так, что сумма односторонних углов меньше двух прямых углов, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где сумма односторонних углов меньше двух прямых углов.» (Здесь под двумя прямыми, конечно, подразумеваются два отрезка, потому и говорится о продолжении прямых.)

Метод исчерпывания, разработанный древнегреческими математиками для доказательства теорем, которые впоследствии доказывались переходом к пределу, избегал актуальной бесконечности, и именно поэтому удовлетворял высочайшим требованиями строгости. Создатели анализа неоднократно сетовали, что разработанные ими методы с точки зрения строгости очень сильно уступают методу исчерпывания, и лишь иногда высказывали надежду, что когда-нибудь их методы получат такое же строгое обоснование, как метод исчерпывания.

2.4. Три классические задачи на построение

В дальнейшем, начиная уже с Гиппократа Хиосского, нам неоднократно предстоит встретиться с тремя классическими задачами на построение, интерес к которым у древнегреческих геометров возник очень рано и сохранялся до самого заката древнегреческой математики. Поэтому сейчас уместно вкратце рассказать об этих задачах, нарушив хронологическую последовательность.

2.4.1. Удвоение куба

О возникновении задачи удвоения куба сохранилась следующая легенда: «...во время эпидемии чумы послали афиняне в Дельфы вопросить оракула, что им сделать, чтоб чума прекратилась. Бог ответил им: удвоить алтарь и принести на нем жертвы. А так как алтарь был кубической формы, они взгромоздили на него ещё один такой же куб, думая тем исполнить повеление оракула. Когда же чума после этого не прекратилась, отправились они к Платону и спросили, что же теперь делать. Тот отвечал: „Сердится на вас бог за незнание геометрии“, — и объяснил, что следовало подразумевать здесь не простое удвоение, но найти некое среднее пропорциональное и произвести удвоение с его помощью; и как только они это сделали, чума тотчас же кончилась». Эта легенда сравнительно поздняя; в ней многое искажено: задачей удвоения куба занимался ещё Гиппократ Хиосский, живший до Платона. Но эту легенду сохранило несколько источников. В ней много интересного: для древних греков совсем не чуждым было мнение, что боги могут гневаться за незнание геометрии.

Для практических целей точное решение задачи удвоения куба не было нужно, но математиков она заинтересовала. Гиппократ Хиосский переформулировал задачу примерно так: «По отрезкам a и $2a$ построить такие отрезки x и y, что $a : x = x : y = y : 2a$». В самом деле, тогда

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = \frac{1}{2},$$

т. е. $x^3 = 2a^3$. Эта переформулировка была существенна. Алгебра возникла гораздо позже, и древнегреческие математики произведение двух отрезков представляли как прямоугольник; для сложения двух произведений отрезков приходилось преобразовывать прямоугольники в равновеликие им прямоугольники с общей стороной, чтобы их можно было прикладывать друг к другу. Произведение трёх отрезков приходилось рассматривать уже как параллелепипед. Преобразовывать параллелепипеды было бы слишком сложно, а замечание Гиппократа позволяло работать с отношениями отрезков. В дальнейшем все решали задачу именно в формулировке Гиппократа, причём, как правило, в общем виде: отрезок $2a$ заменяли на произвольный отрезок b и строили такие отрезки x и y, что $a : x = x : y = y : b$. В этом случае

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b} \text{ и } \left(\frac{y}{b}\right)^3 = \frac{a}{b},$$

т. е. $x = \sqrt[3]{a^2b}$ и $y = \sqrt[3]{ab^2}$. Решение этой задачи позволяло также для прямоугольного параллелепипеда строить ребро куба, объём которого равен объёму параллелепипеда (по этому поводу в одном древнегреческом тексте говорится: «После этого мы сможем вообще любой заданный ограниченный параллелограммами объём превращать в куб...»; этот текст Евдема Родосского, друга и ученика Аристотеля, даёт прямое указание на интерес математиков к задаче превращения параллелепипеда в куб). Поясним, как по рёбрам p, q и r прямоугольного параллелепипеда можно построить ребро нужного куба. По данным сторонам p и q прямоугольника строить сторону a квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника, умели уже на самом раннем этапе развития древнегреческой математики. Ясно также, что если $a = \sqrt{pq}$ и $b = r$, то $\sqrt[3]{pqr} = \sqrt[3]{a^2 b}$. Таким образом, искомое ребро куба — это отрезок x (в предыдущих обозначениях).

По разным причинам древнегреческие математики при построениях циркуль и линейку предпочитали всем другим инструментам. Здесь, впрочем, нужно сделать уточнение. Ни о циркуле, ни о линейке в их сочинениях речи нет; говорится лишь о «построениях посредством прямых и окружностей». Более того, для Евклида построение окружности означает не совсем то же самое, что использование циркуля. Согласно третьему постулату Евклида, можно строить лишь окружность с данным центром A, проходящую через данную точку B. Окружность с данным центром A и данным радиусом BC этот постулат строить не позволял (это построение описано Евклидом в предложении 2 книги 1). Циркуль, конечно же, позволил бы выполнять такие построения. По-видимому, формулировка постулата Евклида связана с уходящим в глубокую древность построением окружностей с помощью колышка и привязанной к нему верёвки. В этом случае для построения окружности с центром A и радиусом BC пришлось бы сначала забить колышек в точке B, отметить на верёвке точку C, а затем выдернуть колышек и забить его в точке A. Лишь после этого можно было строить требуемую окружность. Такое построение, при котором нужно было забивать колышек не один, а два раза, существенно отличается от элементарного построения.

В Греции циркуль был изобретен в X в. до н. э., задолго до Евклида, в связи с потребностями керамического производства. В это время широкое распространение получил геометрический стиль, и циркуль был нужен для изображения на керамике концентрических окружностей. Греческая мифология связывает изобретение циркуля с именем Талоса (согласно другим источникам — Пердикса), племянника Дедала. О Талосе пишет древнегреческий историк Диодор Сицилийский (I в. до н. э.): «Точно так же, изобретя циркуль и некоторые другие технические приспособления, он достиг большой славы». Римский писатель Гигин (I в. до н. э.) сообщает: «Пердикс, сын сестры Дедала, изобрёл циркуль и пилу из рыбьего хвоста». Об этом изобретении двенадцатилетнего мальчика упоминает даже знаменитый римский поэт Овидий (I в. до н. э.) в поэме «Метаморфозы»:

> Первый железным узлом два железных конца съединил он,
> Чтобы, когда друг от друга они в расстоянии равном,
> Часть стояла одна, другая же круг обводила.

Дедал известен в греческой мифологии как искуснейший изобретатель и архитектор. (Странным образом гораздо более знаменит ныне его неразумный сын Икар, который прославился тем, что, несмотря на подробные наставления отца, так и не научился правильно пользоваться сделанными Дедалом крыльями из перьев, скрепленных воском.) Одарённость отданного ему в обучение племянника, грозившая затмить его славу, вызвала у Дедала зависть, и он столкнул его с акрополя.

* * *

Скорее всего, древнегреческие математики достаточно быстро поняли, что задачу удвоения куба нельзя решить с помощью циркуля и линейки, хотя доказать этого они не могли и, по-видимому, даже не пытались. По поводу того, чем помимо циркуля и линейки можно пользоваться при построениях, у древнегреческих математиков были разные мнения. Первое решение задачи удвоения куба, полученное великим полководцем и математиком Архитом Тарентским, трудно даже назвать построением. Он получил решение как пересечение цилиндра, конуса и тора. Ни о какой практической реализации такого решения не могло быть и речи. Несколько более позднее решение Менехма было уже в некотором смысле оптимальным: он находил решение как пересечение двух конических сечений. Оптимальным это решение было вот в каком смысле. На последнем этапе развития древнегреческой математики, через несколько веков после Менехма, сложилась следующая классификация задач на построение, изложенная александрийским математиком Паппом:

1) плоские задачи (решаемые с помощью прямых и окружностей, т. е. с помощью циркуля и линейки);

2) пространственные задачи (решаемые с помощью конических сечений, т. е. параболы, гиперболы и эллипса; название, по-видимому, связано с тем, что использовались сечения пространственной фигуры — конуса);

3) граммические задачи, решаемые лишь с помощью других, более сложных кривых линий (от греческого $\gamma\rho\alpha\mu\mu\eta$ — линия).

Папп писал, что если задачу можно решить с помощью прямых и окружностей, то было бы ошибкой использовать в геометрии для её решения другие инструменты. Он был уверен, что задачу удвоения куба нельзя решить с помощью прямых и окружностей.

Классификация Паппа неполная. Она не включает построения, использующие специальные инструменты, а такие построения встречались у древнегреческих математиков нередко. Специальные инструменты для решения задачи удвоения куба использовали Эратосфен и Никомед; специальный инструмент использован также в решении, приписываемом Платону.

За первым решением задачи удвоения куба, полученым Архитом Тарентским, последовали решения Платона, Менехма и Никомеда. Обо всех этих решениях подробно рассказано в параграфах, посвящённых этим учёным.

Три математика древности, Аполлоний (III в. до н. э.), Филон Византийский (III в. до н. э.) и Герон (I в. н. э.) в разное время предложили фактически одно и то же решение задачи удвоения куба. Но они не указали, с помощью каких инструментов можно было бы осуществить такое построение.

Рассмотрим прямоугольник $ABDC$, где AB и AC — данные отрезки. Пусть E — точка пересечения диагоналей этого прямоугольника. Для решения задачи удвоения куба достаточно выполнить любое из следующих эквивалентных построений (рис. 2.5):

1) провести окружность с центром E так, чтобы точка D лежала на отрезке, соединяющем точки пересечения этой окружности с лучами

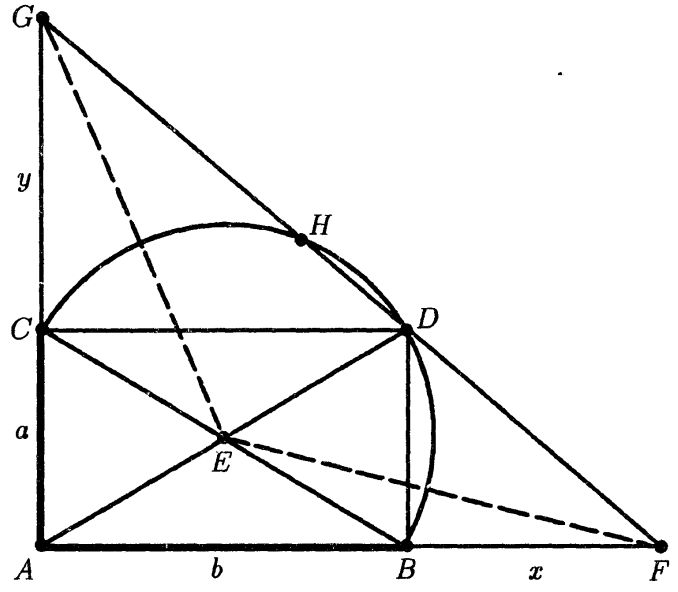

Рис. 2.5.

AB и AC (Аполлоний);

2) провести через точку D прямую так, чтобы описанная окружность прямоугольника $ABDC$ и прямые AB и AC высекали на ней равные отрезки GH и DF (Филон);

3) провести через точку D прямую так, чтобы она пересекала прямые AB и AC в точках, равноудалённых от точки E (Герон).

Построения Аполлония и Герона, очевидно, эквивалентны. Что же касается построения Филона, то достаточно заметить, что точка E лежит на серединном перпендикуляре к отрезку DH, поэтому равенства $GH = DF$ и $GE = EF$ эквивалентны.

Пусть $a = AC$, $b = AB$, $x = BF$ и $y = GC$. Докажем, что $a : x = x : y = y : b$. Из подобия треугольников CGD и BDF следует, что $xy = ab$. Равенство $GE = EF$ можно записать в виде $\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$, т. е. $x(x+b) = y(y+a)$. Мы доказали, что $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$, поэтому $\frac{a+y}{x+b} = \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$. Кроме того, мы доказали, что $\frac{x}{y} = \frac{y+a}{x+b}$. Следовательно, $\frac{a}{x} = \frac{y}{b} = \frac{a+y}{x+b} = \frac{x}{y}$.

Для решения задачи удвоения куба Диокл (II в. до н. э.) предложил использовать кривую, которую впоследствии называли *циссоидой*. Эта кривая получается следующим образом. Проведём в окруж-

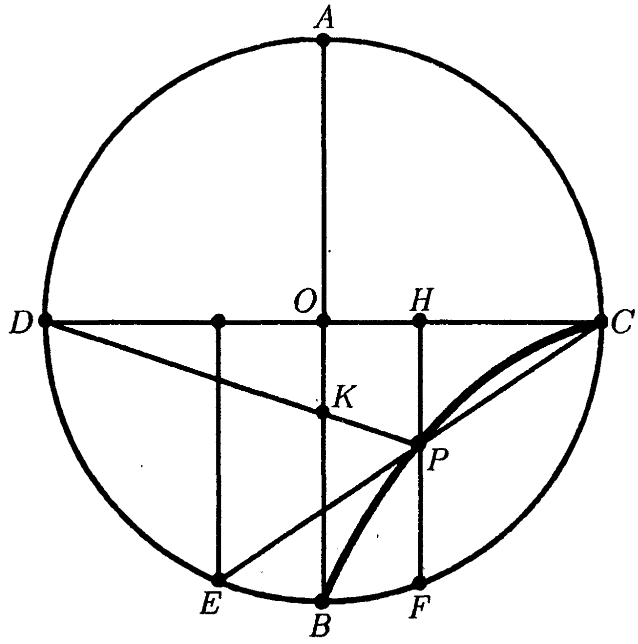

Рис. 2.6.

ности два перпендикулярных диаметра AB и CD. Отложим на дугах BC и BD равные дуги BF и BE. Пусть P — точка пересечения отрезка CE и перпендикуляра, опущенного из точки F на отрезок CD (рис. 2.6). Когда точка F перемещается по дуге BC, точка P заметает циссоиду Диокла.

Ясно, что $\angle HDF = \angle HFC$ и $\angle HDF = \angle HCP$. Поэтому $\angle HDF = \angle HFC = \angle HCP = \alpha$, где α — некоторый угол, и $DH : HF = HF : HC = HC : HP = \operatorname{tg} \alpha$. Для построения таких отрезков x и y, что $a : x = x : y = y : b$, где a и b — данные отрезки, причём $a > b$, можно поступить следующим образом. Возьмём на радиусе OB такую точку K, что $DO : OK = a : b$. Пусть P — точка пересечения луча DK и циссоиды. Тогда $DH : HF = HF : HC = HC : HP$ и $DH : HP = a : b$. Следовательно, $x = kHF$ и $y = kHC$, где $k = \frac{a}{DH} = \frac{b}{HP}$.

После Диокла почти такие же решения предложили Папп (III в. н. э.) и Спор. В этих решениях проводилась прямая DK (см. рис. 2.6), а затем вокруг точки C начинали вращать линейку; нужно было добиться того, чтобы диаметр AB делил отрезок EP пополам (E и P — точки пересечения линейки с окружностью и с прямой DK соответственно).

Покажем, что циссоида задаётся уравнением третьей степени. Пусть радиус рассматриваемой окружности равен a. Введём систему координат Oxy так, что $x = OH$ и $y = HP$. Равенство $DH \cdot HP = HF \cdot HC$ перепишется тогда в виде $(a+x)y = \sqrt{a^2 - x^2}(a-x)$, т. е. $y^2(a+x) = (a-x)^3$. Диокл рассматривал лишь ту часть кривой, заданной этим уравнением, которая лежит внутри угла BOC.

2.4.2. Трисекция угла

О возникновении задачи трисекции угла (т. е. деления угла на три равные части) никаких интересных легенд нет. По-видимому, она появилась внутри самой математики в связи с решением задачи о построении правильных многоугольников. Построение правильного пятиугольника циркулем и линейкой должно было произвести на пифагорейцев большое впечатление, потому что правильная пятиконечная звезда была их опознавательным знаком (она символизировала здоровье). Циркулем и линейкой можно построить правильные шестиугольник и восьмиугольник, но нельзя построить правильные семиугольник и девятиугольник. А попытки построить правильный девятиугольник как раз и должны были привести к задаче трисекции угла, потому что для построения правильного девятиугольника нужно построить угол $\frac{360^\circ}{9} = \frac{120^\circ}{3}$, т.е. разделить на три равные части угол 120° (который можно построить циркулем и линейкой).

При решении задачи трисекции угла можно ограничиться случаем острого угла, потому что если $\varphi > 90^\circ$, то $\frac{\varphi}{3} = \frac{\varphi - 90^\circ}{3} + 30^\circ$, а угол 30° легко построить циркулем и линейкой.

При решении задач на построение древнегреческие геометры часто использовали так называемый способ «вставок». Он заключается в том, чтобы вставить отрезок данной длины между двумя данными прямыми, т.е. через данную точку провести прямую так, чтобы две данные прямые высекали на ней отрезок данной длины.

С помощью способа «вставок» разделить угол на три равные части очень легко. Возьмём на стороне угла с вершиной B произвольную точку A и опустим из неё перпендикуляр AC на другую сторо-

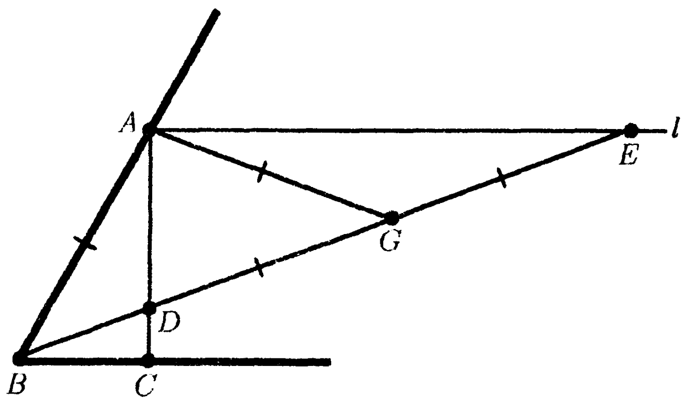

Рис. 2.7.

ну (рис. 2.7). Проведём через точку A луч l, сонаправленный с лучом BC. Вставим теперь между лучами AC и l отрезок DE длиной $2AB$ так, чтобы его продолжение проходило через точку B. Тогда $\angle EBC = \angle ABC/3$. В самом деле, пусть G — середина отрезка DE. Точка A лежит на окружности с диаметром DE, поэтому $AG = GE = DE/2 = AB$. Треугольники BAG и AGE равнобедренные, поэтому $\angle ABG = \angle AGB = 2\angle AEG = 2\angle EBC$.

Папп Александрийский показал, что задача «вставления» отрезка между данными перпендикулярными прямыми l_1 и l_2 сводится к построению точки пересечения окружности и гиперболы. Действительно, рассмотрим прямоугольник $ABCD$, продолжения сторон BC и CD которого являются данными прямыми, а вершина A является данной точкой, через которую нужно провести прямую, пересекающую прямые l_1 и l_2 в таких точках E и F, что отрезок EF имеет данную длину (рис. 2.8). Достроим треугольник DEF до параллелограмма $DEFG$. Для построения искомой прямой достаточно построить точку G, а затем через точку A провести прямую, параллельную прямой DG. Точка G удалена от точки D на данное расстояние $DG = EF$, поэтому точка G лежит на окружности, которую можно построить. С другой стороны, из подобия треугольников ABF и EDA получаем $AB : ED = BF : AD$, т. е. $ED \cdot BF = AB \cdot AD$. Следовательно, $FG \cdot BF = ED \cdot BF = AB \cdot AD = S_{ABCD}$, т. е. точка G лежит на гиперболе (если направить оси Ox и Oy по лучам BF и BA, то эта

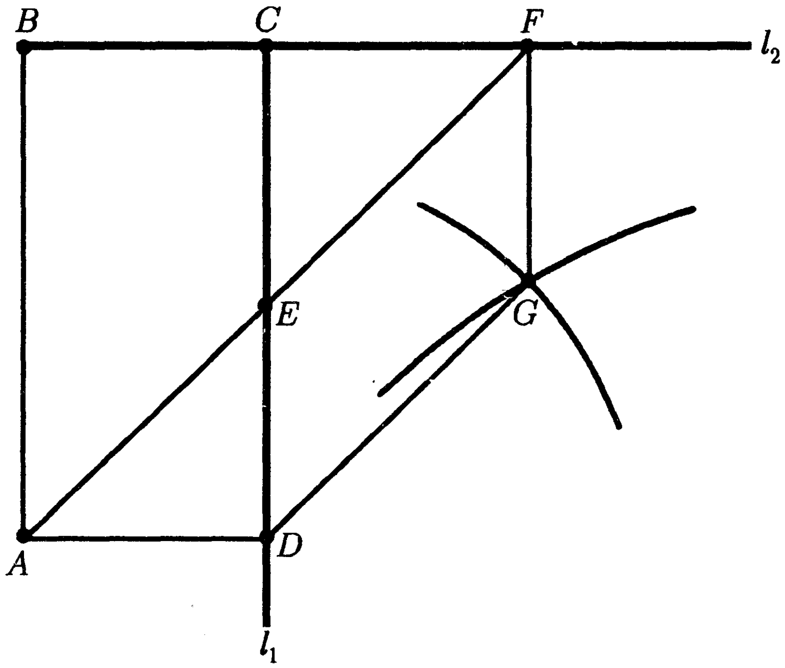

Рис. 2.8.

гипербола задаётся уравнением $xy = S_{ABCD}$).

Это построение почти без изменений можно применить и в случае неперпендикулярных прямых l_1 и l_2.

Одно из решений задачи трисекции угла получено Архимедом (см. с. 156).

2.4.3. Квадратура круга

Задача *квадратуры круга*, т. е. построения квадрата, равновеликого данному кругу, в Древней Греции была, по-видимому, очень популярна. Плутарх сообщает, что философ Анаксагор (ок. 500 — 428 гг. до н. э.) в тюрьме занимался этой задачей. О ней говорится и в комедии Аристофана «Птицы» (414 г. до н. э.): «Приложив сюда линейку, круг описываю циркулем, и верх и низ... Потом линейкой отношу прямую. Круг теперь подобен четырёхугольнику.» Это упоминание в комедии означает, что задача квадратуры круга была общеизвестна.

Наиболее ранние дошедшие до нас древнегреческие решения задачи квадратуры круга на первый взгляд кажутся просто глупостью. Афинянин Антифонт вписывал в круг многоугольник (треугольник или квадрат), затем делил дуги пополам и строил вписанный многоугольник с удвоенным числом сторон и т. д. Он думал, что в конце концов получится многоугольник, который, благодаря крайней малости своих сторон, совпадёт с окружностью. Бризон взял квадрат, вписанный в круг, и квадрат, описанный около круга, а затем взял квадрат, лежащий между ними. Он утверждал, что площадь последнего квадрата равна площади круга.

Позднейшие древнегреческие комментаторы к решениям Антифонта и Бризона относились пренебрежительно и их вообще не обсуждали. Но деятельность Антифонта и Бризона не следует недооценивать. Для решения задачи квадратуры круга необходимо было понять, что же такое площадь круга, а для этого было нужно представление о пределе. В Древней Индии обошли эти трудности, приняв на веру неточное решение этой задачи. Антифонт и Бризон наощупь искали понятие предела. В их рассуждениях неверного много, но есть и кое-что очень важное; созданный впоследствии метод исчерпывания многое у них перенял. Архимед при вычислении числа π как отношения длины окружности к диаметру использовал как идею Антифонта (переход от вписанного n-угольника к вписанному $2n$-угольнику), так и идею Бризона (применение не только вписанных, но и описанных многоугольников).

Решение задачи квадратуры круга с помощью кривой, названной впоследствии *квадратрисой Динострата*, получил Динострат (см. с. 91).

На этом мы закончим отступление о трёх классических задачах на построение.

2.5. Гиппократ Хиосский (470-410 до н.э.)

Гиппократ первым составил «Начала» аналогичные «Началам» Евклида. Эти «Начала» не сохранились.

Наиболее известен Гиппократ открытием так называемых луночек Гиппократа. Другое важное открытие Гиппократа состоит в том, что он свёл задачу удвоения куба к нахождению двух средних членов x и y в пропорции $a : x = x : y = y : b$ для заданных a и b. Этим впоследствии пользовались все, кто занимался задачей удвоения куба.

С точки зрения математики квадратура луночек, выполненная Гиппократом, с решением задачи квадратуры круга не связана, потому что все его примеры основаны как раз на том, что число π не входит в выражения для площадей некоторых луночек. Но исторически его деятельность непосредственно связана с попыткой решить задачу квадратуры круга. Более того, позднейшие комментаторы даже писали, будто сам Гиппократ был уверен, что он решил задачу квадратуры круга. Но это, по-видимому, просто недоразумение. Гиппократ должен был хорошо понимать, что он делал и что он сделал. Хотя он жил задолго до Евклида и Архимеда, уровень его математических познаний весьма высок.

Будем называть *луночкой* фигуру, ограниченную двумя дугами окружностей (рис. 2.9). Гиппократ привёл три примера квадрируемых луночек, т. е. луночек, для которых легко построить равновеликие им многоугольники. Наиболее известен его первый пример. Рассмотрим полукруг с диаметром AB. Пусть O — середина отрезка AB, C — середина дуги AB. Построим также полукруг на катете BC прямоугольного треугольника ABC. Тогда площадь заштрихованной на рис. 2.10 луночки равна площади прямоугольного треугольника BOC. В самом деле, как площадь сектора BOC, так и площадь полукруга с диаметром BC равна половине площади полукруга с диаметром AB. Поэтому, вырезав из этих фигур их общую часть — сегмент BC, получим равновеликие фигуры.

Для построения второго примера Гиппократ взял равнобедренную трапецию $ABCD$, основания BC и AD которой равны 1 и $\sqrt{3}$, а боковые стороны AB и CD равны 1. Рассмотрим луночку, ограниченную описанной окружностью S трапеции $ABCD$ и окружностью S_1, полученной из окружности S при гомотетии, переводящей отрезок BC в отрезок AD (рис. 2.11). Площадь сегмента AD в три раза больше площади каждого из сегментов AB, BC и CD, т. е. она равна сум-

Рис. 2.9.

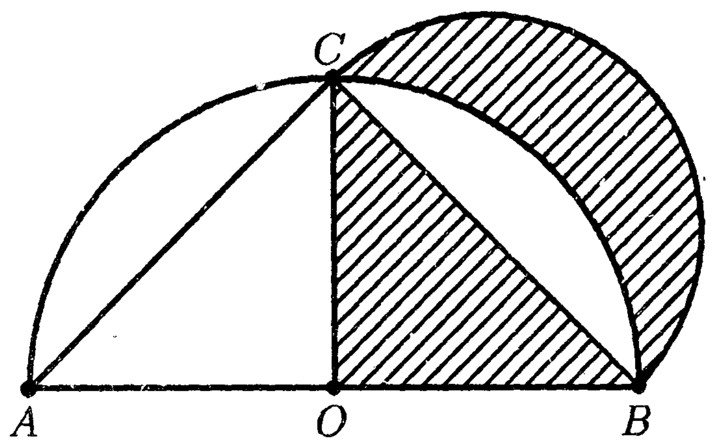

Рис. 2.10.

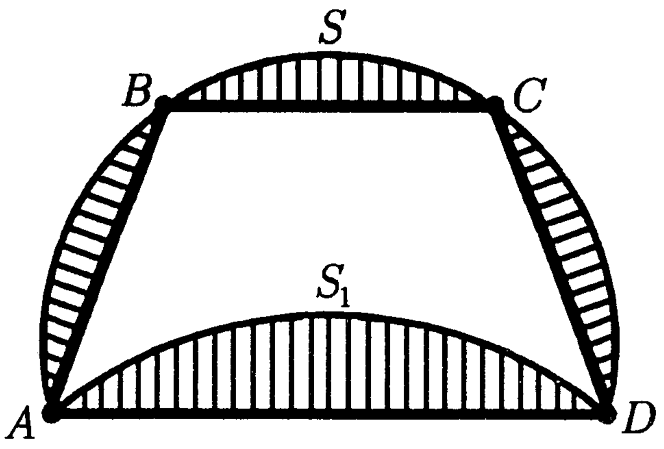

Рис. 2.11.

ме их площадей. Поэтому площадь луночки равна площади трапеции $ABCD$.

Для построения третьего примера Гиппократ взял трапецию $ABCD$, в которой основание BC и боковые стороны AB и CD равны 1 и, кроме того, $AO = OD = \sqrt{3/2}$, где O — точка пересечения диагоналей. Эту трапецию он строит следующим образом. Возьмём на луче BC такую точку E, что $BE = 2BC$, и рассмотрим окружность S с диаметром BE. Пусть l — серединный перпендикуляр к отрезку BC. Используя способ «вставок», построим отрезок $OD = \sqrt{3/2}BC$ с концами, лежащими соответственно на прямой l и окружности S, продолжение которого проходит через точку B. Точка A симметрична точке D относительно прямой l (рис. 2.12). Рассмотрим описанные окружности трапеции $ABCD$ и треугольника AOD. Ясно, что площади каждого из сегментов, ограниченных хордами AO и OD, в $3/2$ раза больше площади каждого из сегментов, ограниченных хордами AB, BC и CD. Поэтому площадь первых двух сегментов равна площади трёх других сегментов. Следовательно, площадь луночки, ограниченной дугами $ABCD$ и AOD, равна площади многоугольника $ABCDO$.

В каждом из этих трёх примеров для доказательства нужно знать, что площади кругов относятся как квадраты их диаметров. Ученик Аристотеля Евдем Родосский (IV в. до н.э.) в написанной им истории древнегреческой геометрии утверждает, что Гиппократ это действи-

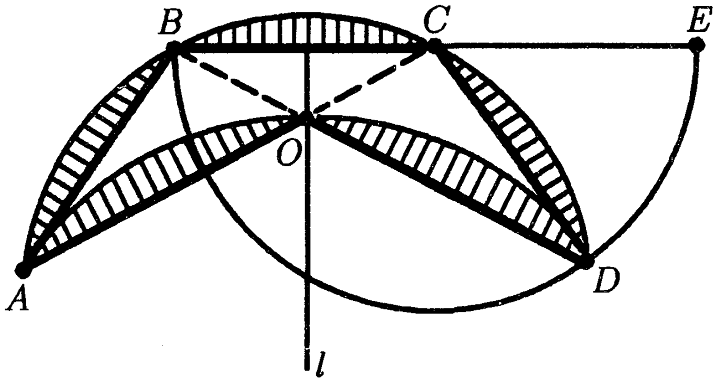

Рис. 2.12.

тельно умел доказывать. У Евклида это доказывается методом исчерпывания, и без чего-нибудь вроде метода исчерпывания здесь нельзя обойтись.

Впоследствии конструкция Гиппократа была обобщена. Но прежде чем перейти к этому обобщению, нужно обсудить третий пример Гиппократа. Дело в том, что применение способа «вставок» в этом случае излишне: трапецию $ABCD$ можно построить с помощью циркуля и линейки. Рассмотрим окружность с диаметром AB. Пусть O — центр этой окружности, l — серединный перпендикуляр к отрезку OB. Докажем, что с помощью циркуля и линейки можно вставить между окружностью и прямой l отрезок PQ данной длины d, продолжение которого проходит через точку B (рис. 2.13). Введём систему координат с началом в центре окружности и осью Ox, направленной по лучу OB. Пусть точка P имеет координаты (x, y). Тогда $x^2 + y^2 = R^2$, где R — радиус окружности, и $PQ : KQ = PB : LB$ (см. рис. 2.13), т. е. $d : (\frac{R}{2} - x) = \sqrt{y^2 + (R-x)^2} : (R - x)$. Учитывая, что $y^2 + (R-x)^2 = (y^2 + x^2) + R^2 - 2Rx = 2R(R-x)$, получим $d^2(R-x) = 2R(\frac{R}{2} - x)^2$, т. е. x — корень квадратного уравнения. Это означает, что точку P можно построить с помощью циркуля и линейки.

Конструкцию Гиппократа можно обобщить следующим образом. Разделим дугу AB некоторой окружности на n равных частей и соединим точки A и B с точками деления (рис. 2.14). Точки пересечения

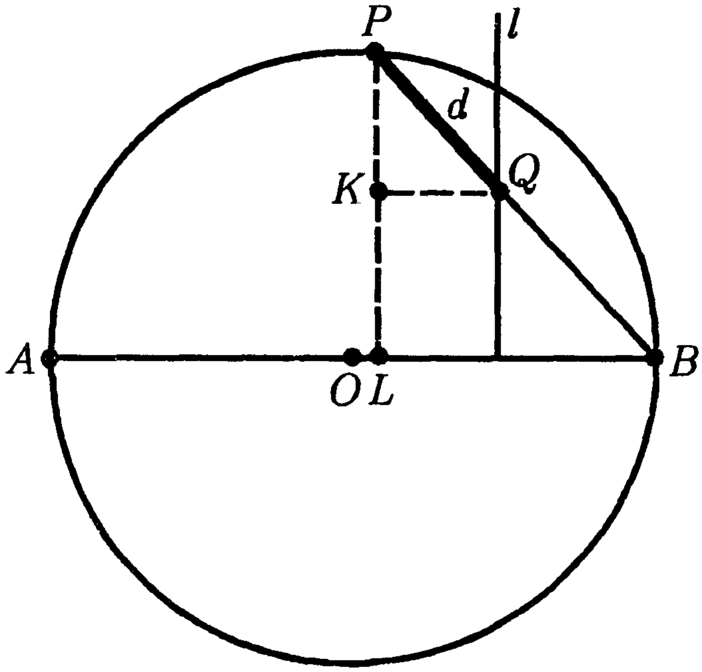

Рис. 2.13.

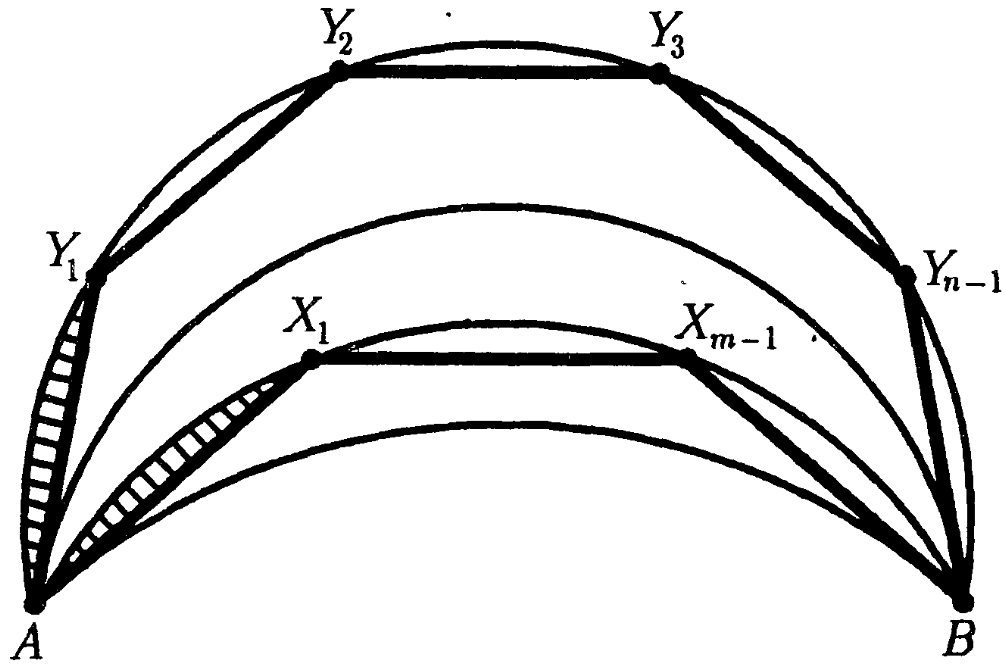

Рис. 2.14.

полученных отрезков лежат на $n-2$ окружностях, проходящих через точки A и B. Если $n\varphi$ — угловая величина дуги AB исходной окружности, то дуги AB этих окружностей состоят соответственно из $n-1, n-2, \ldots, 2$ дуг с угловой величиной φ. К этим окружностям следует добавить также окружность, угловая величина дуги AB которой равна φ. Площадь луночки, ограниченной дугами AY_1B и AX_1B (см. рис. 2.14), равна площади многоугольника $AY_1 \ldots Y_{n-1}BX_{m-1} \ldots X_1$, если отношение площадей сегментов AY_1 и AX_1 равно m/n. В самом деле, тогда площадь n сегментов $AY_1, Y_1Y_2, \ldots, Y_{n-1}B$ равна площади m сегментов $AX_1, X_1X_2, \ldots, X_{m-1}B$. Сегменты AY_1 и AX_1 подобны, так как на них опираются равные углы ABY_1 и ABX_1. Итак, мы приходим к соотношению $AY_1^2 : AX_1^2 = m : n$. По теореме синусов имеем $AY_1 : AX_1 = \sin AX_1B : \sin AY_1B = \sin\left(\frac{2\pi - m\varphi}{2}\right) : \sin\left(\frac{2\pi - n\varphi}{2}\right) = \sin m\alpha : \sin n\alpha$, где $\alpha = \varphi/2$. В итоге получаем, что если корень уравнения $\sin m\alpha : \sin n\alpha = \sqrt{m} : \sqrt{n}$ можно построить с помощью циркуля и линейки, то существует квадрируемая луночка описанного выше типа. Найденные Гиппократом примеры квадрируемых луночек соответствуют парам $(1,2)$, $(1,3)$ и $(2,3)$. В 1766 г. было обнаружено, что пара $(1,5)$ тоже соответствует квадрируемой луночке, а в 1840 г. была обнаружена ещё одна такая пара — $(3,5)$. И лишь в 1934 г. известный советский математик Н. Г. Чеботарев доказал, что никаких других квадрируемых луночек с нечётными m и n нет. (Основная трудность заключается в том, чтобы выяснить, можно ли корень уравнения $\sin m\alpha : \sin n\alpha = \sqrt{m} : \sqrt{n}$ построить с помощью циркуля и линейки.)

Гиппократ не ограничился тем, что нашёл эти весьма редкие и интересные примеры квадрируемых луночек. Он их детально исследовал: доказал, что во втором случае внешняя дуга больше 180°, а в третьем меньше 180°. По-видимому, именно это привело к недоразумению. Позднейшие древнегреческие комментаторы решили, будто Гиппократ, найдя квадрируемые луночки с внешней дугой 180°, больше 180° и меньше 180°, подумал, что тем самым он доказал квадрируемость любой луночки и квадрируемость круга. Но сочинения этих комментаторов показывают, что математику они понимали хуже Гиппократа. Так что заблуждались, скорее всего, они сами, а не Гиппократ.

2.6. Феодор Киренский (465-398 до н.э.)

Феодор Киренский известен тем, что обучил Платона математике и доказал иррациональность некоторых квадратных корней из натуральных чисел.

Иррациональность числа $\sqrt{2}$ была известна ещё пифагорейцам. В диалоге Платона «Теэтет» говорится, что Феодор доказал иррациональность квадратных корней из чисел от 3 до 17 (исключая 4, 9 и 16). Процитируем соответствующее место диалога: «**Теэтет.** Вот Феодор объяснял нам на чертежах нечто о сторонах квадрата, [площадь которого выражена продолговатым числом], налагая их на трёхфутовый и пятифутовый [отрезки] соответственно и доказывая, что по длине они несоизмеримы с однофутовым [отрезком]; и так перебирая [эти отрезки] один за другим, он дошёл до семнадцатифутового. Тут его что-то остановило.»

Сразу возникают два вопроса. Почему пифагорейцы остановились на $\sqrt{2}$? Почему Феодор остановился на $\sqrt{17}$?

На первый вопрос ответить легко. Пифагорейцы не знали общей теории делимости целых чисел. Для доказательства теоремы о том, что любое натуральное число единственным образом разлагается в произведение простых чисел, нужна весьма продвинутая теория, включающая алгоритм Евклида. Этой общей теорией пифагорейцы не владели. Но для числа $\sqrt{2}$ эта общая теория была не нужна, достаточно было теории делимости на 2, которую пифагорейцы знали.

По поводу ответа на второй вопрос есть только несколько догадок и предположений. Было предложено несколько доказательств, которые годятся для чисел от 3 до 17, но не годятся в общем случае. (Для доказательства в общем случае обычно используется единственность разложения на простые множители, которая обычно доказывается с помощью алгоритма Евклида.) Наиболее убедительной представляется гипотеза, предложенная в статье [4]. Эта гипотеза состоит в том, что специально отмеченные в диалоге числа 3 и 5 означают, что Феодор в своём доказательстве применял остатки от деления на 3 и на 5. Деление с остатком — существенно более элементарная операция, чем алгоритм Евклида, который заключается в последовательном выполнении делений с остатком по определённому правилу; эта операция была известна и до появления алгоритма Евклида. Число $\sqrt{n}$, где n — натуральное число, является рациональным тогда и только тогда, когда уравнение

$$a^2 = nb^2 \tag{1}$$

имеет целочисленное решение (a, b); при этом можно считать, что числа a и b не имеют общих делителей. Составим таблицы остатков от деления на 3 и на 5 произведения двух чисел:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Эти таблицы показывают, что **произведение двух натуральных чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них делится на 3**, и **произведение двух натуральных чисел делится на 5 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них делится на 5**. Эти утверждения позволяют доказать, что если n делится на 3 или на 5 и не делится на квадрат натурального числа, превосходящего 1, то уравнение (1) не имеет целочисленных решений. Действительно, пусть $n = 3k$, где k не делится на 3. Тогда $a^2 = a \cdot a$ делится на 3, поэтому a делится на 3. Следовательно, $a^2 = 3kb^2$ делится на 9, поэтому kb^2 делится на 3. По условию k не делится на 3, поэтому b^2 делится на 3, а значит, b делится на 3, а это противоречит тому, что числа a и b не имеют общих делителей. Для чисел вида $5k$ рассуждения аналогичны.

Таким образом, мы можем исключить из рассмотрения числа n, делящиеся на 2, 3 или 5, а также, все числа, делящиеся на квадраты. После этого остаются числа 7, 11, 13, 17, 19, ... Пусть n — одно из этих чисел. Таблица остатков от деления на 3 показывает, что если уравнение (1) имеет целочисленное решение (и числа a и b не имеют общих делителей), то оба числа a и b не делятся на 3 и их квадраты при делении на 3 дают в остатке 1. Поэтому **число n имеет вид** $3k+1$. После этого замечания приходим к списку 7, 13, 19, ... Пусть n — одно из этих чисел. Таблица остатков от деления на 5 показывает, что если уравнение (1) имеет целочисленное решение (и числа a и b не имеют общих делителей), то оба числа a и b не делятся на 5 и их квадраты при делении на 5 дают в остатке 1 или 4. Поэтому **число n имеет вид** $5k+1$ **или** $5k+4$. После этого замечания остаётся список, начинающийся с числа 19, которое при делении на 3 даёт в остатке 1, а при делении на 5 даёт в остатке 4, и для него наши рассуждения не работают. Таким образом, эти рассуждения дают доказательство для всех чисел от 2 до 17 (число $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ исключается из рассмотрения по очевидным причинам).

2.7. Архит Тарентский (428-350 до н.э.)

В начале IV в. до н. э. пифагорейцы были изгнаны из почти всех греческих колоний в южной Италии. Лишь в Таренте Архит сумел сохранить полуаристократический режим, и этот город остался единственным существенным политическим центром пифагорейцев. В своём городе Архит был очень влиятельным человеком. Диоген Лаэртский писал о нём: «Всяческими своими добродетелями вызывал он всеобщее восхищение и был над своими согражданами военачальником семь раз, тогда как другие по закону не военачальствовали более одного года... в своё военачальство он ни разу не потерпел поражения; а однажды, когда ему стали завидовать, он отказался от начальства, и войско тотчас было разбито.»

Архит был очень дружен с философом Платоном. Их обоих обучил математике Феодор Киренский. Однажды Архит даже спас Платона от смерти. Эту историю рассказал Диоген Лаэртский: «...во второй раз он <Платон> ездил к Дионисию Младшему просить о земле и людях, чтобы жить по законам его Государства <«Государство» — книга Платона>. Дионисий обещал, но не дал. Некоторые пишут, что при этом он попал было в беду, оттого что побуждал Диона и Феодота к освобождению острова; но пифагореец Архит в письме к Дионисию добился для него прощения и свободного возвращения в Афины.»

Архит обучил математике Евдокса.

Научные интересы Архита на первый взгляд поражают разнообразием. Самым главным его достижением является решение задачи удвоения куба. Другим важным достижением являются его теоретико-числовые исследования, составившие основу восьмой книги «Начал» Евклида. Кроме того, Архита с полным основанием называли крупнейшим пифагорейским теоретиком музыки. Более близкое знакомство со всеми этими результатами Архита поражает, однако, странным единообразием при таком разнообразии. Решая задачу удвоения куба, он между данными отрезками a и b вставляет отрезки x и y, образующие пропорцию $a : x = x : y = y : b$. В теории чисел Архит исследует, когда между данными натуральными числами a и b можно вставить натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$, образующие пропорцию $a : x_1 = x_1 : x_2 = \ldots = x_{n-1} : x_n = x_n : b$. В теории музыки Архит изучает средние и пропорции: среднее арифметическое ($a - b = b - c$, т. е. $b = (a+c)/2$), среднее геометрическое ($a : b = b : c$, т. е. $b = \sqrt{ac}$) и среднее гармоническое $\left(\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}, \text{ т. е. } b = \frac{2ac}{a+c}\right)$.

Архит занимался также механикой и, по-видимому, любил мастерить разные приспособления. Диоген Лаэртский писал о нём: «Он первый упорядочил механику, приложив к ней математические основы, и первый свёл движение механизмов к геометрическому чертежу.» Об изобретениях Архита есть не очень достоверные сведения, будто он изготовил деревянного голубя, который мог летать, и совершенно достоверное сообщение Аристотеля, что Архит изобрёл детскую погремушку: «С другой стороны, и дети должны иметь какое-нибудь занимательное дело, и в этом отношении нужно считать прекрасным изо-

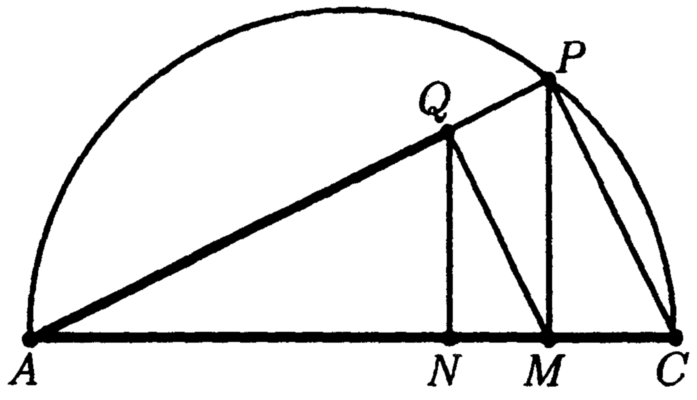

Рис. 2.15.

бретением ту погремушку Архита, которую дают малым детям, чтобы они, занимаясь ею, не ломали ничего из домашних вещей: ведь то, что молодо, не может оставаться спокойным.» Аристотелю приходится поверить, потому что он был лучшим учеником Платона, близкого друга Архита.

Архит получил первое решение задачи удвоения куба. Его решение прямое и естественное, но для современного восприятия оно одно из наиболее сложных, потому что оно полностью геометрическое и современная алгебраизация ничем не помогает его понять. Прежде чем перейти к решению Архита, рассмотрим рис. 2.15. На этом рисунке изображён полукруг с диаметром AC; из точки P, лежащей на окружности, опущен перпендикуляр PM на диаметр AC, из точки M опущен перпендикуляр MQ на отрезок AP, а из точки Q опущен перпендикуляр QN на диаметр AC. Ясно, что

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AP}{AM} = \frac{AM}{AQ},$$

поэтому

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{AC}{AP} \cdot \frac{AP}{AM} \cdot \frac{AM}{AQ} = \left(\frac{AM}{AQ}\right)^3.$$

В частности, если $AC = 2AQ$, то $AM = \sqrt[3]{2}AQ$.

Чтобы прийти к рис. 2.15, поступим следующим образом. Пусть AB и AC — данные отрезки, причём $AB < AC$. Тогда можно считать,

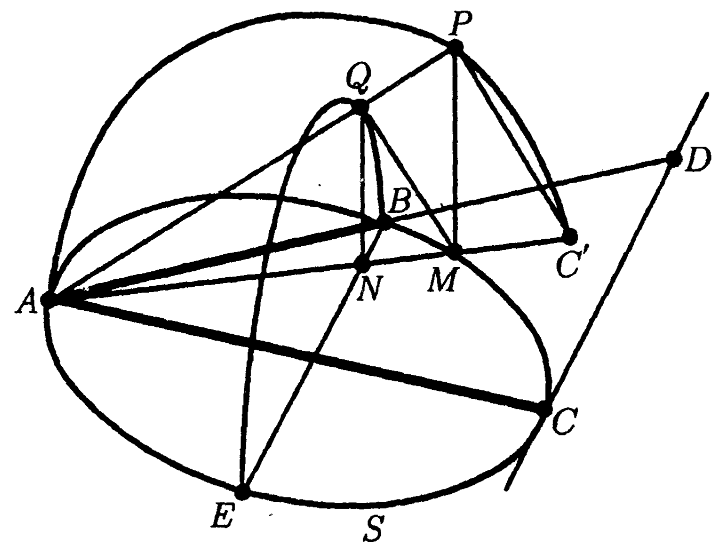

Рис. 2.16.

что точка B лежит на окружности S с диаметром AC (рис. 2.16). Рассмотрим три поверхности:

1) цилиндр с основанием S;

2) конус с осью AC и образующей AD, где D — точка пересечения прямой AB и касательной к окружности S в точке C (этот конус получается при вращении прямоугольного треугольника ACD вокруг катета AC);

3) повернём окружность S на 90° вокруг оси AC и будем вращать полученную окружность S' вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости окружности S; в результате получим поверхность вырожденного тора (тор получается при вращении круга относительно оси l, лежащей в плоскости круга и удалённой от него на некоторое расстояние a (рис. 2.17); если, как в нашем случае, $a = 0$, то получаем вырожденный тор).

Пусть P — одна из точек пересечения трёх рассматриваемых поверхностей (см. рис. 2.16); M — проекция точки P на плоскость окружности S. Точка P лежит на поверхности цилиндра, поэтому точка M лежит на окружности S. Проведём через точку B хорду BE, перпендикулярную диаметру AC. Пусть Q — точка отрезка AP, проецирующаяся в некоторую точку N отрезка BE. Так как AP — обра-

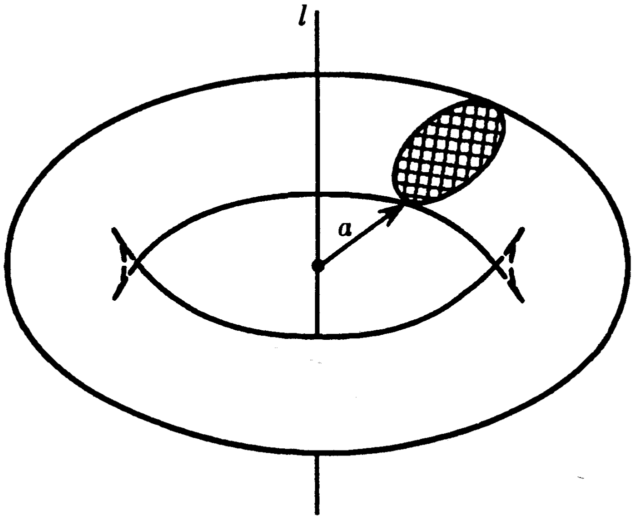

Рис. 2.17.

зующая конуса, то $AQ = AB$. Точка Q лежит на окружности с диаметром BE, поэтому $QN^2 = EN \cdot NB = AN \cdot NM$, т. е. точка Q лежит на окружности с диаметром AM и $\angle AQM = 90°$. Следовательно, $QM \parallel PC'$. В итоге мы приходим к рис. 2.15, нужно лишь в обозначениях этого рисунка заменить C на C'. Следовательно, $AC : AP = AP : AM = AM : AB$, а если $AC = 2AB$, то $AM = \sqrt[3]{2}AB$.

2.8. Платон (428-347 до н.э.)

Платон основал философскую школу, получившую название Академия от рощи близ Афин, в которой она находилась. Платон требовал от всех своих учеников, чтобы они основательно изучили геометрию, прежде чем он обучит их своей философии. Над входом в Академию было написано: «Да не войдёт сюда не знающий геометрии.»

Платон с увлечением занимался математикой, многие знаменитые математики того времени были его близкими друзьями. Аристотель, много лет проведший в школе Платона, достаточно хорошо знал математику, но не был ей увлечён так, как Платон.

Сам Платон не сделал важных математических открытий, но он ценил математику как превосходное средство тренировки ума, и убеждённость Платона в ценности математики оказалась важной для её развития.

Платон тщательно разрабатывал идею доказательства. Он настаивал на точности определений и ясности предположений. Всё это в дальнейшем послужило Евклиду, принадлежавшему к школе Платона, основанием для систематического подхода к математике.

Правильные многогранники часто называют *платоновыми телами*, потому что о них идёт речь в диалоге Платона «Тимей». Но они не были открыты Платоном. Куб, тетраэдр и додекаэдр были известны пифагорейцам, а октаэдр и икосаэдр открыл Теэтет.

Платон различал арифметику (науку, изучающую свойства чисел) и логистику (искусство вычислений).

Евтокий, комментатор сочинений Архимеда, сообщает, что Платон предложил следующее решение задачи удвоения куба. Построим прямоугольный треугольник OAB, катетами которого являются данные отрезки a и b (рис. 2.18). Если на продолжениях катетов OB и OA нам удастся построить такие точки X и Y, что прямые AX и BY параллельны, а прямая XY им перпендикулярна, то задача удвоения куба будет решена. В самом деле, треугольники AOX, XOY и YOB подобны, поэтому $a : x = x : y = y : b$.

Для построения точек X и Y можно воспользоваться инструментом, состоящим из жёсткого прямого угла $X'Y'B'$, по стороне $X'Y'$ которого свободно движется перпендикулярная ей прямая $X'A'$. Расположим для этого прямой угол $X'Y'B'$ так, чтобы его сторона $Y'B'$ проходила через точку B, а вершина Y' лежала на прямой AO. Затем передвинем прямую $X'A$ так, чтобы она проходила через точку A. Нам нужно, чтобы точка X' оказалась при этом на прямой OB. Этого можно добиться, поворачивая наш инструмент.

Евтокий описал также устройство нужного для построения инструмента. Он состоял из жесткой П-образной рамы, в стойках которой были вырезаны пазы и по ним двигалась рейка (рис. 2.19). Рассматриваемое построение можно также выполнить с помощью двух прямых углов, двигая сторону одного угла по стороне другого угла (рис. 2.20).

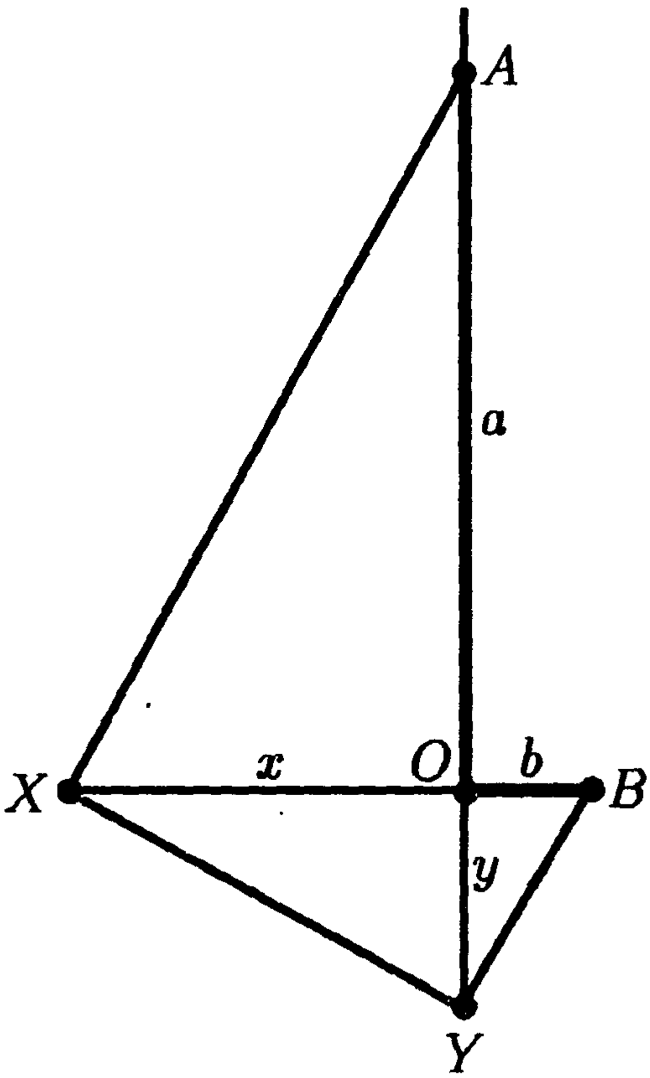

Рис. 2.18.

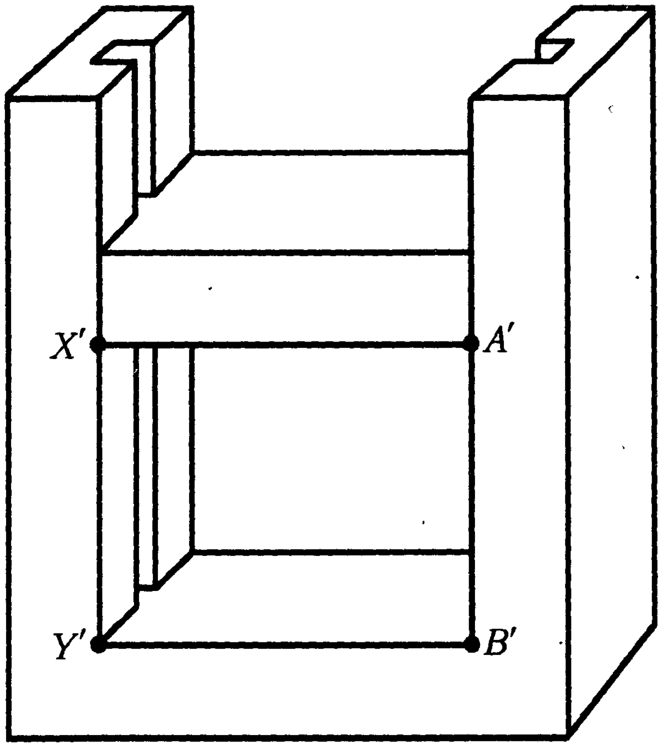

Рис. 2.19.

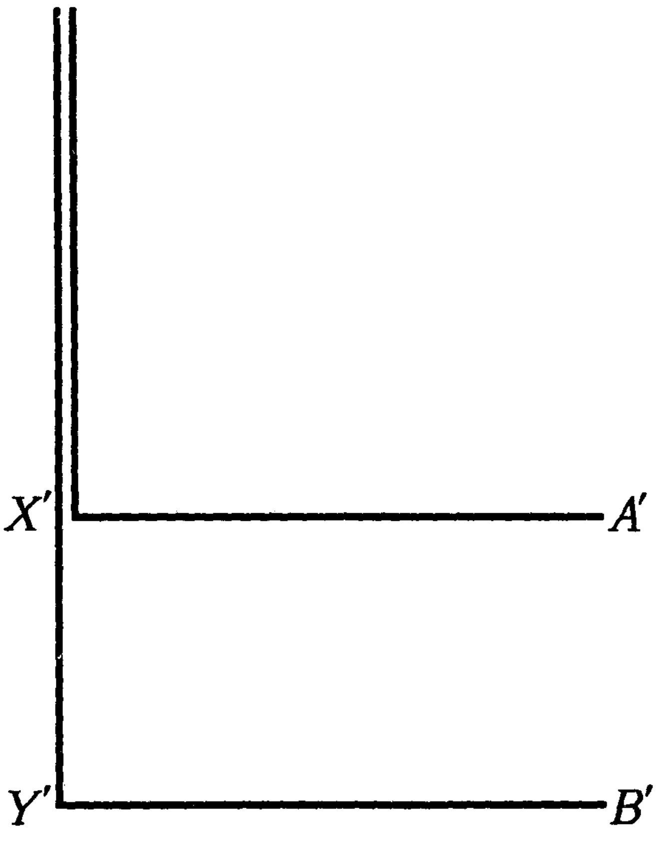

Рис. 2.20.

Принадлежность этого решения Платону весьма сомнительна. Об этом решении сообщает только Евтокий, а другие источники среди авторов решений задачи удвоения куба Платона не упоминают. Но это не главное. Дело в том, что Платон отвергал механические доказательства как разрушающие всё лучшее в геометрии. Он предпочитал идеи в чистом виде. Всерьёз рассматривать такое решение Платон действительно не мог. Но не исключено, что это решение он предложил в шутку, насмехаясь над построениями с помощью инструментов, которыми надлежит пользоваться лишь ремесленникам (такую гипотезу высказал известный математик и историк математики Б. Л. ван дер Варден).

2.9. Теэтет Афинский (415-369 до н.э.)

Никаких сочинений Теэтета на сохранилось, но о его математических работах, относящихся к теории иррациональных чисел, учению о пропорциональности и правильным многогранникам, можно составить достаточно полное представление по сочинениям древнегреческих математиков и философов. Платон очень высоко ценил Теэтета и отвёл ему важную роль в двух диалогах («Теэтет» и «Софист»). В двух книгах «Начал» Евклида излагаются результаты Теэтета: в книге X, посвященной соизмеримым и несоизмеримым величинам, и в книге XIII, посвящённой правильным многограммикам.

Продолжая исследования Феодора Киренского, который доказал иррациональность квадратых корней чисел от 3 до 17, не являющихся полными квадратами, Теэтет доказал иррациональность всех квадратных корней из натуральных чисел, не являющихся полными квадратами. Он доказал также аналогичное утверждение для кубических корней. Кроме того, Теэтет получил классификацию квадратичных иррациональностей определённого вида.

Теэтет ввёл октаэдр и икосаэдр в дополнение к кубу, правильному тетраэдру и додекаэдру, которые были известны пифагорейцам. Раннее открытие куба и правильного тетраэдра неудивительно, а додекаэдр требует комментариев. В природе встречаются кристаллы пирита, близкие по форме к додекаэдру. Сохранился также додекаэдр, неизвестно для каких целей изготовленный этрусскими ремесленниками около 500 г. до н.э. Кроме того, правильный тетраэдр, куб и додекаэдр проще изготовить из правильных многоугольников: скрепив три треугольника, квадрата или пятиугольника, мы сразу получаем жёсткую конструкцию. А чтобы получить октаэдр и икосаэдр, нужно срепить соответственно четыре и пять треугольников, поэтому сначала получается нежёсткая конструкция; она становится жёсткой только потом.

2.10. Евдокс Книдский (408-355 до н.э.)

По свидетельству Архимеда Демокрит установил, что объём пирамиды равен 1/3 объёма призмы, имеющей с ней одинаковые основание и высоту, а объём конуса равен 1/3 объёма соответствующего цилиндра, но доказательств не дал. По-видимому, Демокрит в соответствии со своей философией пытался составить пирамиду и конус из конечного числа элементарных частей — атомов.

Строго обосновал результаты Демокрита Евдокс. Архимед считал, что Демокрит, угадавший ответ, существенно помог Евдоксу. Сам Архимед часто использовал методы механики, чтобы угадать ответ, который он впоследствии обосновывал строго.

Евдокс родился в Книде на юго-западе Малой Азии около 408 г. до н.э. В молодости он побывал в Великой Греции, где изучал математику под руководством Архита Тарентского.

Евдокс создал общее учение об отношениях (пропорциях) и метод исчерпывания — аналог предельного перехода, не обращающийся к актуальной бесконечности. (Название «метод исчерпывания» появилось в начале XVII века в связи с работами Григория Сен-Винцента и было перенесено на способ доказательства, применяемый древнегреческими математиками, хотя и весьма плохо отражало суть этого метода.)

Понятие величины у Евдокса охватывает длины отрезков, площади, объёмы. Оно вводится с помощью аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства. У Евклида эти аксиомы формулируются так:

1) Равные одному и тому же равны между собой.

2) И если к равным прибавить равные, то и целые будут равны.

3) И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.

4) И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

5) И целое больше части.

Отношение можно рассматривать не для всех величин. Евдокс вводит в связи с этим знаменитую аксиому. Этой аксиомой впоследствии несколько раз пользовался Архимед (не забывая отдать должное Евдоксу), поэтому её часто называют *аксиомой Архимеда* или *аксиомой Евдокса–Архимеда*. У Евклида эта аксиома сформулирована так: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они взятые кратно, могут превзойти друг друга.» Это означает, что величины a и b имеют отношение между собой, если найдутся такие натуральные числа m и n, что $ma > b$ и $nb > a$.

Равенство двух отношений Евдокс опредлеляет следующим образом. Величины a и b имеют такое же отношение, как величины c и d, если для любых натуральных m и n: 1) либо $ma > nb$ и $mc > nd$, 2) либо $ma = nb$ и $mc = nd$, 3) либо $ma < nb$ и $mc < nd$.

Две пары величин, имеющих одно и то же отношение, называются *пропорциональными*. Доказывается, что если две пары величин пропорциональны третьей паре, то они сами пропорциональны. (Если $a : b = e : f$ и $c : d = e : f$, то $a : b = c : d$.)

Евдокс говорит, что отношение $a : b$ больше отношения $c : d$, если найдутся такие натуральные числа m и n, что одновременно $ma > nb$ и $mc \leq nd$.

Учение о пропорциях фактически эквивалентно аккуратному определению действительных чисел. Дедекинд, разработавший строгую теорию действительных чисел на основе так называемых *дедекиндовых сечений*, основывался на идеях Евдокса.

Метод исчерпывания, разработанный Евдоксом, основан на предложении X, 1 из «Начал» Евклида: «Если даны две величины и из большей вычитается часть, бо́льшая половины, а из остатка — снова часть, бо́льшая половины, и это повторяется постоянно, то когда-нибудь остается величина, которая меньше, чем меньшая из данных величин.» Действительно, если из a вычесть $a_1 > \frac{a}{2}$, то получим $a - a_1 < \frac{a}{2}$, т.е. каждый раз получается величина, которая меньше половины исходной. Поэтому после нескольких таких операций получится величина, которая меньше, чем меньшая из данных величин. (Здесь применяется аксиома Евдокса–Архимеда.)

Вот как метод исчерпывания применялся для доказательства того, что площади кругов относятся как квадраты диаметров. Пусть S_1 и S_2 — площади кругов с диаметрами d_1 и d_2. Предположим, что $\frac{S_1}{S_2} \neq \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Выберем Σ_2 так, что $\frac{S_1}{\Sigma_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Здесь Σ_2 должно быть меньше или больше S_2. Предположим сначала, что $\Sigma_2 < S_2$. Впишем во второй круг квадрат, затем правильный 8-угольник, затем правильный 16-угольник и т.д. Площадь квадрата больше половины площади круга. Площадь каждого из треугольников, построенных на его сторонах при построении 8-угольника, больше половины площади сегмента круга, в который этот треугольник вписан. Аналогично на каждом шаге из остатка (круг минус многоугольник) вычитается больше половины, поэтому на каком-то шаге площадь остатка окажется меньше $S_2 - \Sigma_2$. Пусть P_2 — площадь многоугольника на этом шаге. Тогда $S_2 - P_2 < S_2 - \Sigma_2$, т.е. $P_2 > \Sigma_2$. В первый круг тоже будем вписывать аналогично правильные многоугольники, и пусть P_1 — площадь правильного многоугольника, полученного на соответствующем шаге. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты их соответственных элементов, поэтому $\frac{P_1}{P_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{S_1}{\Sigma_2}$. Следовательно, $\frac{S_1}{P_1} = \frac{\Sigma_2}{P_2}$. Но этого не может быть, потому что $S_1 > P_1$, а $\Sigma_2 < P_2$. Чтобы прийти к противоречию, предположив, что $\Sigma_2 > S_2$, достаточно поменять местами первый и второй круг.

Евдокс занимался и задачей удвоения куба, но об этом известно лишь то, что он решил её с помощью кривых линий.

Евдокс предложил систему движения планет по сферам. В центре покоится Земля. Для объяснения движения каждой планеты используется по четыре сферы, а для объяснения движения Солнца и Луны — по три.

2.11. Динострат (390-320 до н.э.)

Динострат — брат Менехма, о котором скоро пойдёт речь.

Гиппий из Элиды (460-400 до н.э.) предложил использовать для деления угла в данном отношении кривую, которую впоследствии Динострат использовал для решения задачи квадратуры круга. Это решение сохранилось лишь в передаче Паппа, который жил на пять веков позже Динострата. Мы сначала перескажем текст Паппа, а затем прокомментируем его, следуя статье [31], потому что с точки зрения истории математики в этом решении слишком много загадочного.

Квадратриса Динострата получается следующим образом. Рассмотрим квадрат $ABCD$ (рис. 2.21). Пусть концы отрезка BC равномерно движутся по прямым BA и CD, а отрезок AB равномерно вращается вокруг точки A, причём в положение AD оба отрезка приходят одновременно. Пусть, далее, в некоторый момент отрезок BC занимает положение $B'C'$, а отрезок AB занимает положение AN; L — точка пересечения отрезков $B'C'$ и AN. Квадратриса Динострата — это множество всех точек L. Если квадратриса пересекает отрезок AD в точке K, то длина дуги BD (т.е. длина дуги четверти окружности) равна AB^2/AK (это мы докажем чуть позже). Поэтому площадь круга радиуса AB равна площади прямоугольника со сторонами $4AB^2/AK$ и $AB/2$; эти отрезки легко строятся с помощью циркуля и линейки, если известны отрезки AB и AK. Построив прямоугольник, можно построить равновеликий ему квадрат.

Папп пишет, что против этого решения Спор выдвинул два серьёзных возражения, с которыми сам он полностью согласен.

1) Чтобы согласовать движение отрезков BC и AB, нужно заранее знать отношение длины дуги четверти окружности к радиусу. Поэтому решить задачу квадратуры круга с помощью квадратрисы

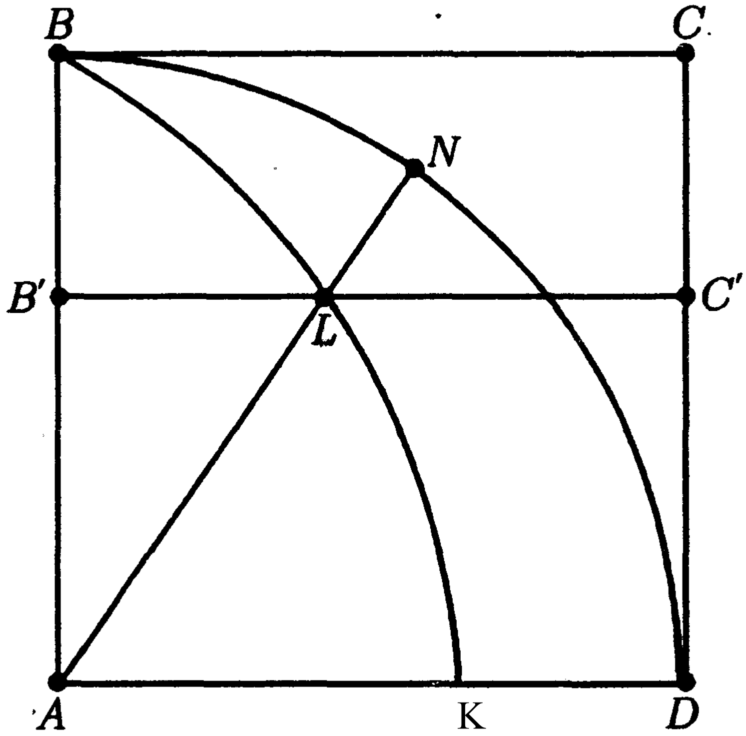

Рис. 2.21.

Динострата можно, только если её решение уже известно.

2) Точку K построить нельзя, потому что в соответствующий момент времени отрезок и радиус совпадают. Как пересечения отрезков $B'C'$ и AN можно строить лишь точки, близкие к точке K, но не саму точку K. Говоря современным языком, точку K можно построить лишь как предел точек квадратрисы.

Докажем теперь, следуя Паппу, что длина дуги BD действительно равна AB^2/AK, т. е. $\overset{\frown}{BD} : AB = AB : AK$, где $\overset{\frown}{BD}$ — длина дуги BD (в этом параграфе мы будем использовать такое нестандартное обозначение). Доказательство проведём методом от противного. Ясно, что $\overset{\frown}{BD} : AB = AB : AK_1$, где AK_1 — некоторый отрезок, и поэтому достаточно доказать, что длина отрезка AK_1 не может быть ни больше, ни меньше длины отрезка AK.

Предположим сначала, что $AK_1 > AK$. Тогда окружность радиуса AK_1 с центром A пересекает квадратрису в некоторой точке L, а сторону AB — в точке Z (рис. 2.22). Так как $\overset{\frown}{BD} : AB = AB :$

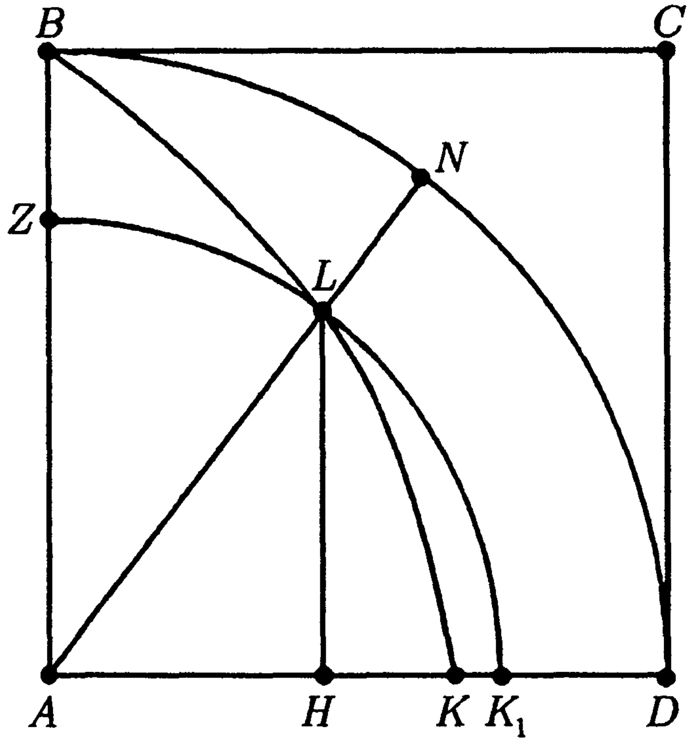

Рис. 2.22.

$AK_1 = \overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{ZK_1}$, то $AB = \overset{\frown}{ZK_1}$. По определению квадратрисы $\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{ND} = BA : LH$. Но $\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{ND} = \overset{\frown}{ZK_1} : \overset{\frown}{LK_1}$ и $BA : LH = \overset{\frown}{ZK_1} : LH$, поэтому $\overset{\frown}{LK_1} = LH$, что, как пишет Папп, «нелепо».

Предположим теперь, что $AK_1 < AK$. Тогда касательная в точке K_1 к окружности радиуса AK_1 с центром A пересекает квадратрису в некоторой точке L. Прямая AL пересекает окружности с радиусами AK_1 и AD в точках M и N соответственно (рис. 2.23). Так как $\overset{\frown}{BD} : AB = AB : AK_1 = \overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{ZK_1}$, то $AB = \overset{\frown}{ZK_1}$. По определению квадратрисы $\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{ND} = BA : LK_1$. Но $\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{ND} = \overset{\frown}{ZK_1} : \overset{\frown}{MK_1}$ и $BA : LK_1 = \overset{\frown}{ZK_1} : LK_1$, поэтому $\overset{\frown}{MK_1} = LK_1$, что, как снова пишет Папп, «нелепо».

В этом решении много загадочного. Прежде всего, непонятно, какую именно задачу решал Динострат: задачу квадратуры круга, т. е. построения квадрата, равновеликого данному кругу, или же задачу спрямления окружности, т. е. построения отрезка, длина которого равна длине данной окружности. Со времён Архимеда эти задачи были

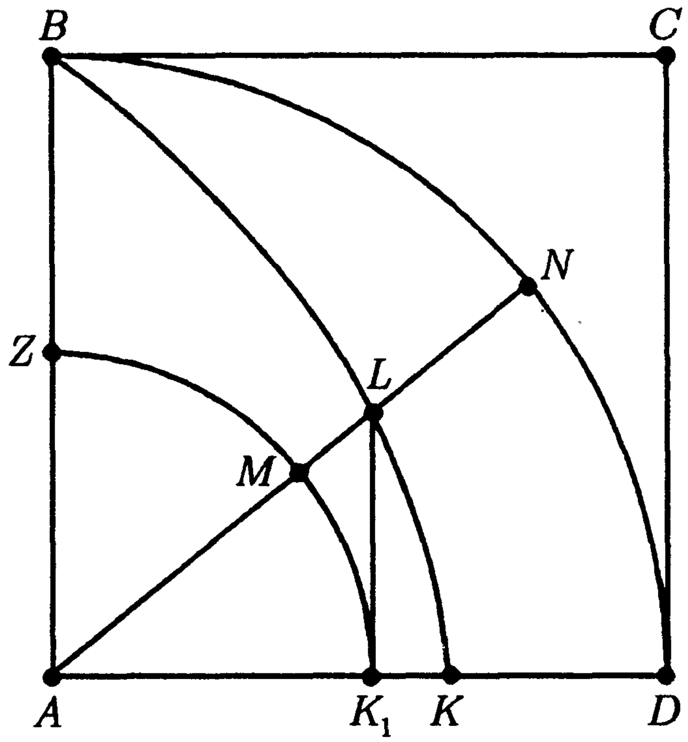

Рис. 2.23.

эквивалентны: он доказал, что если радиус окружности равен R, а длина окружности равна L, то площадь круга равна площади прямоугольника со сторонами R и $L/2$. Но ведь Динострат жил задолго до Архимеда, а то доказательство, которое приводит Папп, даёт именно спрямление окружности, а не квадратуру круга! Как же это понимать? Возможно, у Динострата было доказательство, дающее именно квадратуру круга, а Папп просто привёл другое доказательство, но это совершенно невероятно. Скорее всего, теорема, доказанная Архимедом, была известна (без доказательства) ещё во времена Динострата. К сожалению, книга Архимеда «Измерение круга» дошла до нас в сильно искажённом виде. Возможно, что у неё было предисловие, в котором Архимед излагал предысторию своей теоремы, но это предисловие не сохранилось; книга начинается сразу формулировкой теоремы: «Всякий круг равен прямоугольному треугольнику, причём радиус круга равен одной из прилегающих к прямому углу сторон, а периметр — основанию треугольника».

В приведённом доказательстве свойства квадратрисы Папп использует теорему о том, что отношение длин окружностей равно отношению их радиусов. Это весьма странно. В «Началах» Евклида, который жил после Динострата, есть теорема о том, что площади кругов относятся как квадраты радиусов, а вот нужной нам теоремы нет, причём это не случайно. Для сравнения площадей фигур есть естественный способ: если одна фигура лежит внутри другой, то площадь внутренней фигуры меньше площади внешней. А как сравнивать длины кривых? Евклид не смог предложить никакого разумного способа, строгость которого его бы устраивала. Возможный подход к сравнению длин кривых у Евклида слегка намечен. В его «Началах» есть теорема о том, что одна сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Прокл писал, что эпикурейские математики считали смешным доказывать такое положение, так как его прекрасно знает осёл, идущий к сену по прямой линии. Архимед поступил ещё решительнее эпикурейцев. Он счёл необходимым принять без доказательства, что если две выпуклые кривые имеют общие концы и одна из них лежит внутри другой (рис. 2.24), то длина внутренней кривой меньше длины внешней. Более того, аналогичное утверждение он принял без доказательства не только для кривых, но и для поверхностей, и лишь эта смелость позволила ему доказать знаменитую теорему о том, что отношение площадей поверхностей шара и описанного около него цилиндра равна 2/3. (Архимед очень гордился этой теоремой и теоремой об объёме шара и завещал высечь на его надгробии цилиндр, описанный вокруг шара; по этому знаку Цицерон нашел могилу Архимеда «среди терниев и чертополоха».) Принимать без доказательства Архимед мог, казалось бы, лишь те утверждения, которые были очевидны для тел и фигур, с которыми он умел обращаться. Но вовсе не очевидно, например, что если один тетраэдр лежит внутри другого, то площадь поверхности внутреннего тетраэдра меньше площади поверхности внешнего.

В тексте Паппа есть ещё два загадочных места, а именно неравенства, которые он считает очевидными и молчаливо обходит. При разборе случая $AK < AK_1$ Папп считает очевидным, что $LH < \overset{\frown}{LK_1}$ (см. рис. 2.22), а при разборе случая $AK > AK_1$ он считает очевид-

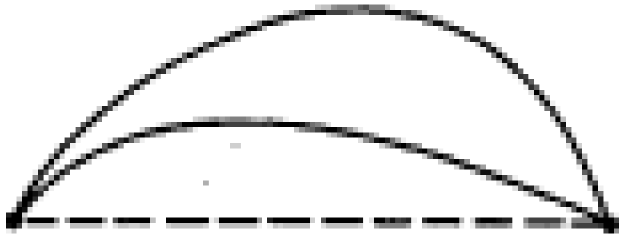

Рис. 2.24.

ным, что $\overset{\frown}{MK} < LK_1$ (см. рис. 2.23). Для удобства изобразим все нужные отрезки и дуги на одном рисунке. Неравенства $PQ < \overset{\frown}{PQ}_1 < P_1Q_1$ (рис. 2.25) для окружности радиуса 1 можно записать в виде $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$. Первое неравенство ещё можно счесть очевидным: $PQ < PQ_1 < \overset{\frown}{PQ}_1$. Но как быть со вторым неравенством? Обычно его доказывают следующим образом: если радиус окружности равен 1 и S — площадь сектора POQ_1, то неравенство $2S < 2S_{OP_1Q_1}$ можно переписать в виде $\alpha < \operatorname{tg}\alpha$ (а неравенство $2S_{OPQ} < 2S$ можно переписать в виде $\sin\alpha < \alpha$). Но при этом нельзя обойтись без соотношения $S = R \cdot L/2$, где S — площадь сектора, R — радиус окружности, L — длина дуги сектора, а до Архимеда доказательства этого соотношения не было. По-видимому, формула для вычисления площади сектора Динострату была известна, но без доказательства. Эту формулу древнегреческие математики могли перенять от египетских или вавилонских математиков (по крайней мере, площадь полукруга в Вавилоне вычисляли именно по такой формуле).

$* * *$

Приведенное выше описание квадратрисы не устраивало древнегреческих математиков по многим причинам. Они вообще не любили вводить движение в математику, а в данном случае речь шла сразу о движении двух отрезков, причём эти движения нужно было согласовывать. Поэтому были предложены два описания квадратрисы с помощью пересечения поверхностей (они сохранились в сочинениях Паппа).

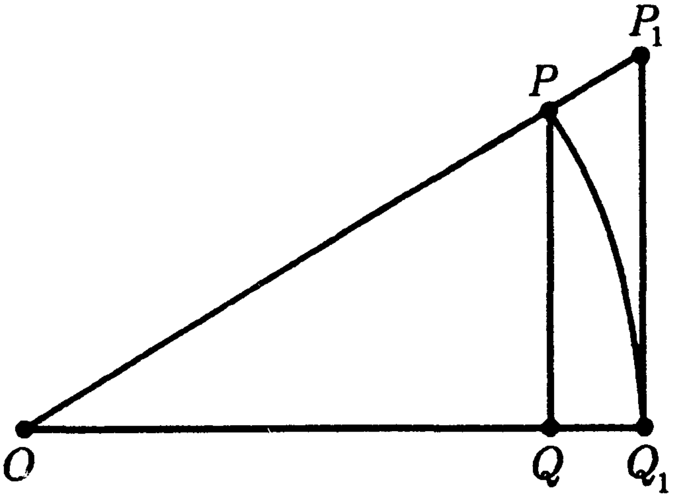

Рис. 2.25.

Задание кривой как пересечения поверхностей считалось наиболее законным. Греческие математики безоговорочно верили в то, что пересечение поверхностей даёт «хорошую» кривую, а также в то, что кривые обязательно пересекаются в тех случаях, когда это, так сказать, «видно». Архит Тарентский без каких-либо сомнений рассматривал пересечение цилиндра, конуса и тора (точнее говоря, он рассматривал сначала кривую, которую вычерчивает на цилиндре вращающийся полукруг, а затем брал точку пересечения этой кривой и конуса). Евклид не счёл нужным в свою систему аксиом вводить аксиомы, связанные с пересечением окружностей, а уже в самом первом предложении «Начал» для построения равностороннего треугольника он использовал то, что окружность радиуса AB с центром A пересекается с окружностью радиуса BA с центром B.

Первый способ задания квадратрисы использует винтовую линию. Винтовая линия получается при движении точки по поверхности цилиндра, слагающемся из двух движений: движения с постоянной скоростью, направленной параллельно оси цилиндра, и вращения по окружности основания цилиндра с постоянной угловой скоростью (рис. 2.26). Рассмотрим четверть круга и лежащую над ней часть винтовой линии (на рис. 2.27 она изображена пунктиром). Опустим из точки L, лежащей на радиусе AN, перпендикуляр LH на радиус AC. Пусть

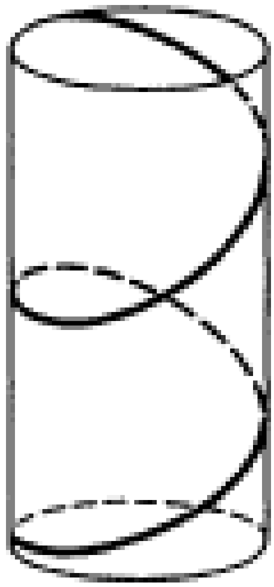

Рис. 2.26.

$LH : \overset{\frown}{NC} = p$; если $p = AB : \overset{\frown}{BC}$, то точка L лежит на квадратрисе. Если Q — точка винтовой линии, проецирующаяся в точку N, то по свойству винтовой линии $QN : \overset{\frown}{NC} = q$ — постоянная величина. Пусть P — такая точка перпендикуляра l к плоскости ABC, восставленного из точки A, что $PQ \parallel AN$; R — точка отрезка PQ, проецирующаяся в точку L. Тогда $LH : RL = (LH : \overset{\frown}{NC}) : (RL : \overset{\frown}{NC}) = p : q$, т. е. точка R лежит в плоскости Π, проходящей через прямую AC и образующей с плоскостью ABC угол α, где $\operatorname{tg} \alpha = p/q$. Кривая, образованная точками R, является пересечением плоскости Π и поверхности, образованной отрезками PQ (точка P движется по прямой l, а точка Q движется по винтовой линии), а квадратриса является ортогональной проекцией этой кривой на плоскость ABC.

Второй способ задания квадратрисы как пересечения поверхностей использует спираль Архимеда, т. е. кривую, которую заметает точка M, равномерно движущаяся по радиусу AN, который в свою очередь равномерно вращается вокруг точки A. Рассмотрим часть спирали, полученную при повороте радиуса AN на 90° от положения AC до положения AB (рис. 2.28). Опустим из точки L, лежащей на ква-

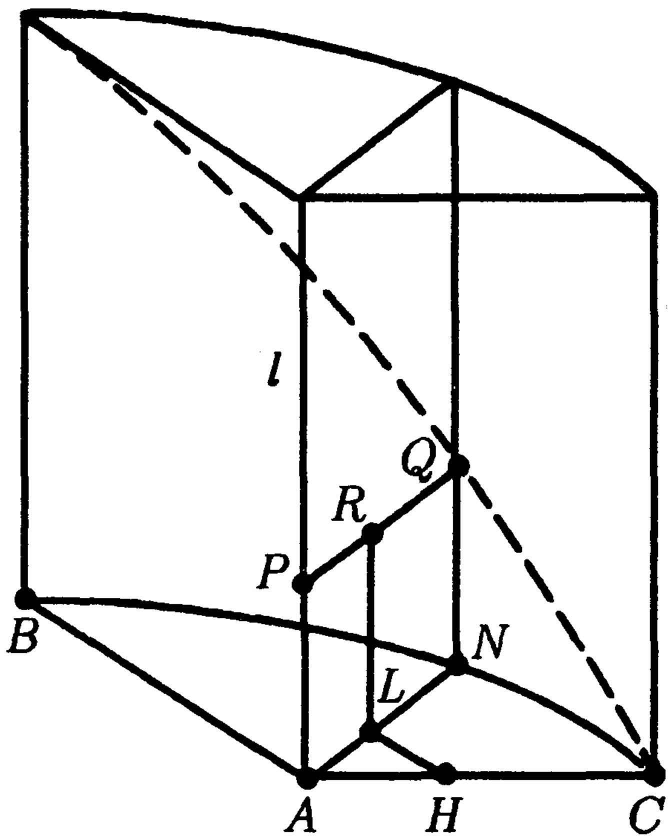

Рис. 2.27.

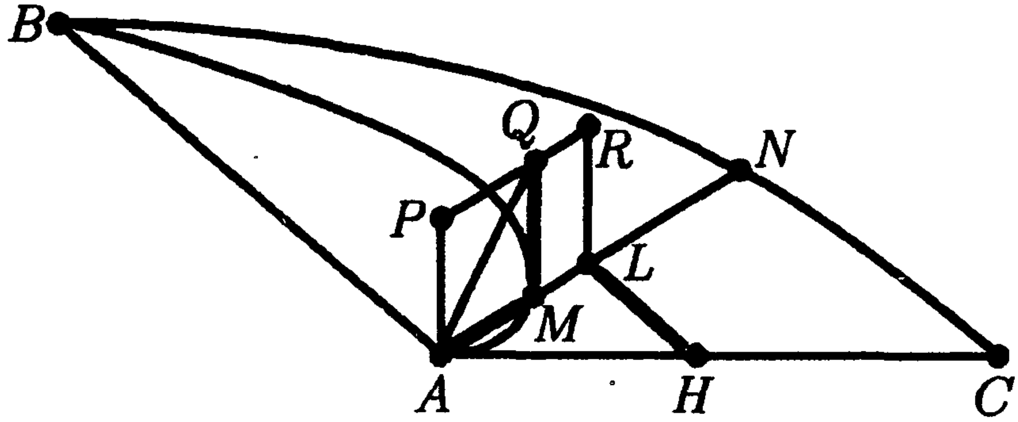

Рис. 2.28.

дратрисе, перпендикуляр LH на отрезок AC. По свойству квадратрисы $LH : \overset{\frown}{NC} = AB : \overset{\frown}{BC}$, а по свойству спирали Архимеда $AB : \overset{\frown}{BC} = AM : \overset{\frown}{NC}$, поэтому $LH = AM$. Восставим из точек A, M и L перпендикуляры AP, MQ и LR к плоскости ABC длиной $LH = AM$. Точка Q лежит как на цилиндре над спиралью, так и на конусе, осью которого является луч AP, а угол между осью и образующей равен 45°. Кривая, образованная точками Q, является пересечением этих двух поверхностей. Рассмотрим теперь поверхность, образованную лучами PQ. Так как $RL = LH$, то точка R лежит на пересечении этой поверхности и плоскости, проходящей через прямую AC и образующей с плоскостью ABC угол 45°. Квадратриса является ортогональной проекцией кривой, образованной точками R, на плоскость ABC.

2.12. Аристотель (384-322 до н.э.)

В 17 лет Аристотель начал обучаться в Академии Платона, которой в то время вместо Платона, уехавшего на Сицилию, временно руководил Евдокс Книдский. Затем Аристотель сам стал учителем и оставался в Академии 20 лет. В 335 г до н.э. он основал свою философскую школу, которая получила название Лицей.

Аристотель впервые отчетливо сформулировал основные принципы аксиоматического построения науки, развивая учения Пифагора и Платона. Он отмечал, что при доказательстве того или иного утверждения мы опираемся на ранее установленные факты. Поэтому те положения, с которых мы начинаем построение науки, не могут быть логически доказаны — их следует принять в качестве аксиом. Аристотель детально разработал понятия аксиомы и постулата.

Аристотель считал, что законы движения тел земных и небесных различны. В пределах Земли естественное движение тела — по прямой, а для небесных тел естественное движение — по окружности.

Аристотель часто цитирует аксиому, что если из равных вычесть равные, то остатки равны. Но он нигде не приводит примеров геометрических постулатов. Это означает, что постулаты Евклида софрмулировал сам Евклид.

Воплощением учения Аристотеля об аксиомах, постулатах, определениях и доказательствах явился знаменитый труд Евклида «Начала». В нём сформулировано сравнительно небольшое количество аксиом и постулатов, из которых выведены почти все известные в то время теоремы. Аристотель (а следуя ему и Евклид) различал аксиомы (истины, общие для всех наук) и постулаты (истины, свойственные определённой науке). Впоследствии это различие почти утратилось, и сейчас то, что Евклид называл постулатами, обычно тоже называют аксиомами.

Аристотель неоднократно упоминает гипотезу о том, что сумма углов треугольника не равна двум прямым углам. Он даже пишет («О небе» 281 b 5-7), что если принять такую гипотезу, то диагональ квадрата соизмерима с его стороной. В другом месте («Метафизика» 1052 a 6-7) он пишет, что сумма углов треугольника не может быть иногда равной двум прямым, а иногда не равной. Это означает, что ещё до Евклида древнегреческие математики занимались обсуждением вопроса, что получится, если принять постулат о том, что сумма углов треугольника не равна двум прямым углам.

В сочинении «Метеорологика» (книга III, глава 5) Аристотель при обсуждении свойств радуги доказывает теорему об окружности Аполлония. Так что либо это место — позднейшая вставка, либо теорема об окружности Аполлония была известна задолго до Аполлония. И мнения по этому поводу расходятся. Евтокий (IV в), знаменитый комментатор трудов Архимеда и Аполлония, считал, что эта теорема была доказана Аполлонием. Известный английский историк математики Хит (Heath) считал, что эта теорема могла быть известна во времена Архимеда, и потому могла быть включена в текст «Метеорогики» им самим.

В сочинении «О небе» (ii 4 287 a 27) утверждается, что среди всех фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг. Так что изопериметрической задачей занимались задолго до Зенодора.

Аристотель во многом прояснил такие важные для математики понятия как *непрерывность* и *бесконечность*. Аристотель признавал только потенциальную бесконечность. Аристотель пишет, что математикам нужно лишь, чтобы конечную прямую (т.е. отрезок) можно было продолжать, сколько требуется. Евклид пользуется только этим свойством (например, в формулировке пятого постулата). Аристотель отрицал даже потенциальное существование суммы выличин, превосходящей данную величину. Это противоречило аксиоме Евдокса, и впоследствии Архимеду приходилось оправдываться в использовании этой аксиомы по примеру древних геометров.

Аристотель неоднократно писал об открытой ещё пифагорейцами несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны, но он не упоминает о хорошо известном Платому дальнейшем развитии теории квадратичных иррациональностей Феодором и Теэтетом.

2.13. Менехм (380-320 до н.э.)

Менехм, ученик Евдокса, брат Динстрата, прославился как астроном и математик.

О Менехме рассказывают, что когда Александр Македонский попросил его показать ему более короткий путь, чтобы изучить геометрию, Менехм ответил: «О царь, для путешествующих по этой стране есть царские дороги и дороги для простых граждан, но в геометрии для всех одна дорога.» То же самое рассказывают о Евклиде и царе

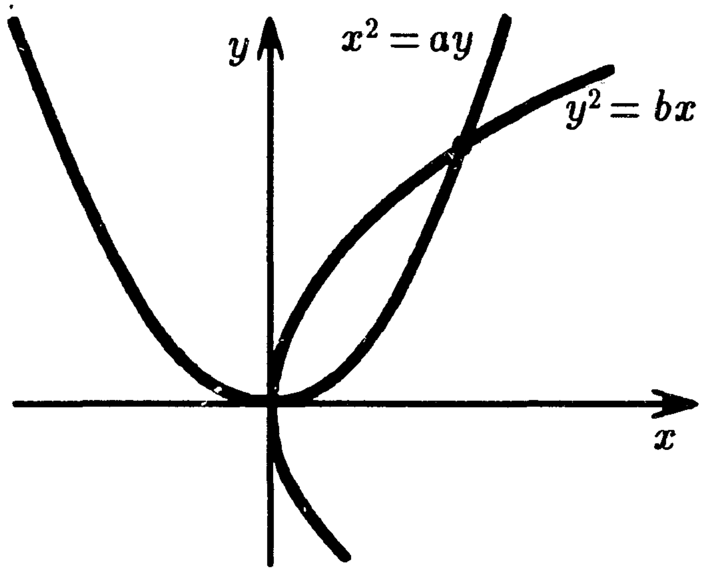

Рис. 2.29.

Птолемее, но, вероятно, эта история произошла именно с Менехмом.

Важнейшее достижение Менехма — открытие конических сечений. Они понадобились ему для решения задачи удвоения куба. На современном алгебраическом языке это решение изложить очень легко. Если даны отрезки a и b и мы хотим найти такие отрезки x и y, что $a : x = x : y = y : b$, то их можно получить, решив любую из двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = ay, \\ y^2 = bx \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x^2 = ay, \\ xy = ab. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения решение первой системы уравнений сводится к построению точки пересечения двух парабол (рис. 2.29), а решение второй системы — к построению точки пересечения параболы и гиперболы (рис. 2.30). Обе параболы и гипербола проходят через одну точку.

Менехм предложил оба эти решения.

Параболу и гиперболу Менехм, скорее всего, получал как сечения конуса плоскостью, перпендикулярной образующей конуса. В то время рассматривали только конусы вращения и называли их остроугольными, прямоугольными и тупоугольными в соответствии с тем, каким

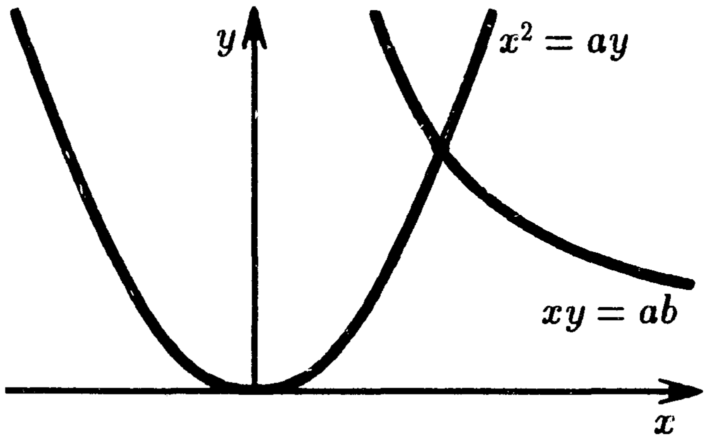

Рис. 2.30.

было осевое сечение. Парабола получалась как сечение прямоугольного конуса, а гипербола — тупоугольного. Это было отражено в древнейших названиях параболы и гиперболы.

В Древней Греции не было систематического использования системы координат, но для конических сечений были известны их уравнения сначала в прямоугольных, а затем и в косоугольных координатах. Древнегреческие математики называли эти уравнения *симптомами* конических сечений. Предложенные Менехмом решения задачи удвоения куба показывают, что он должен был знать симптомы параболы и равнобочной гиперболы.

Симптом параболы, являющейся сечением прямоугольного конуса, перпендикулярным образующей, Менехм мог получить следующим образом. Рассмотрим осевое сечение конуса плоскостью, перпендикулярной плоскости, в которой лежит парабола. Пусть P — точка параболы, N — проекция этой точки на плоскость осевого сечения (рис. 2.31). Сечение конуса, парпендикулярное его оси, является окружностью, поэтому $PN^2 = BN \cdot NC = \sqrt{2}AN \cdot AG = 2AN \cdot AL$. Таким образом, $PN^2 = 2AL \cdot AN$. Это и есть симптом параболы: если ось абсцисс — это ось параболы, а начало координат — точка A, то уравнение параболы записывается в виде $y^2 = 2ax$, где $a = AL$.

Ситуация с гиперболой гораздо сложнее. Менехму нужна была именно равнобочная гипербола. Чтобы получить её как сечение конуса

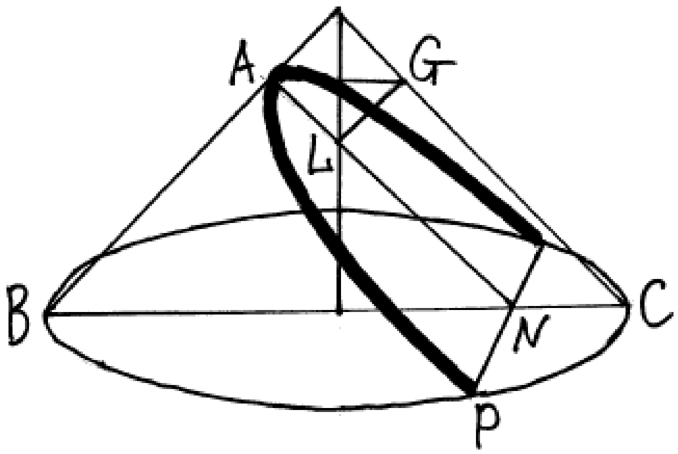

Рис. 2.31.

плоскостью, перпендикулярной образующей, конус нужно выбрать специальным образом, и это сложная задача. Поэтому нельзя исключить, что Менехм получал равнобочную гиперболу как сечение того же самого прямоугольного конуса, но теперь уже плоскостью, параллельной оси.

2.14. Евклид (325-265 до н.э.)

О жизни Евклида почти ничего не известно. Сохранились лишь отрывочные упоминания о нём у его комментаторов, но и эти краткие дееписания производят впечатление и заставляют задуматься. Наиболее известен рассказ Прокла о том, что когда Птолемей I, царь Египта, спросил у Евклида, нет ли более короткого пути к геометрии, чем его «Начала», Евклид твёрдо ответил, что в геометрии нет царских дорог. А короткий рассказ Стобея с полной определённостью показывает взгляды Евклида на практическое значение математики. Один из тех, кто только начал учиться геометрии у Евклида, спросил его, усвоив лишь первое предложение: «А что я получу, выучив всё это?» Евклид позвал своего раба и сказал: «Дай ему три обола[2], ему, бедняжке, ведь нужно извлечь из учения выгоду.»

Датировка жизни Евклида основана на рассказе Прокла: правление

[2]Обол — древнегреческая монета; дневной заработок ремесленника составлял как раз примерно три обола.

Птолемея I, с которым беседовал Евклид в зрелые годы, приходится на 306 — 283 гг. до н. э.; это вполне согласуется со словами Прокла о том, что Евклид был моложе, чем ученики Платона, но старше, чем Эратосфен и Архимед. Прокл говорит также, что Евклид был платоником; во всяком случае, по-видимому, его учителями геометрии были афинские платоники. Папп сообщает, что Аполлоний очень долгое время провёл с учениками Евклида в Александрии; значит, Евклид основал в Александрии школу.

Вот, по сути дела, и все сколько-нибудь достоверные сведения о жизни Евклида. Но и явно недостоверные вымыслы тоже интересны: они свидетельствуют о распространенности трудов Евклида и о его славе. Арабские источники, например, сообщают, что Евклид жил в Дамаске, и даже производят его имя от арабских слов «Укли» (ключ) и «Дис» (измерение, геометрия), т. е. «ключ к геометрии».

Когда в Европе начали возникать университеты, во многих из них студенты изучали «Начала» Евклида (эта книга изначально была предназначена для взрослых людей, не для школьников; перенос структуры «Начал» в школьные учебники является явным недоразумением). Изучение «Начал» было весьма поверхностным; они считались очень трудной и запутанной книгой. В XVI в. соискатели степени магистра искусств должны были торжественно поклясться, что они прослушали лекции по первым шести книгам Евклида. Теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника (книга I, предложение 5) казалась студентам очень трудной «вследствие большого количества встречающихся в ней линий и углов». Из-за непривычки к математическим рассуждениям студентам приходилось заучивать доказательства Евклида наизусть. Первую книгу «Начал» усваивали очень немногие. Например, уже доказательство теоремы Пифагора (предложение I, 47) могло быть диссертацией магистра математики.

До Евклида тоже писали книги такого рода. Первым написал свои «Начала» Гиппократ Хиосских. Более тщательно составил «Начала» Леонт, ученик Неоклида. Хорошие «Начала» составил Тевдий из Магнесии. Но все эти «Начала» утратили свое значение после появления

«Начал» Евклида и до нашего времени не сохранились, потому что их больше не переписывали.

«Начала» Евклида использовались в качестве учебника геометрии вплоть до XIX в. Все современные школьные учебники геометрии отличаются от книги Евклида лишь несущественными дополнениями и существенными сокращениями.

Евклид собрал многое из открытого Евдоксом и улучшил многое из открытого Теэтетом. Он также дал строгие доказательства того, что до него доказывалось менее строго. Сравнение доказательств Евклида с теми доказательствами, которые встречаются у Аристотеля, показывает, что многие доказательства Евклида оригинальные, причём уже для самых первых предложений.

Евклид описывал геометрию как систему предложений (теорем), которые последовательно выводятся из нескольких перечисленных им основых понятий и истин. Такое построение геометрии называют *синтетическим*. Все написанные впоследствии учебники геометрии очень многим обязаны книге Евклида. Его схему изложения использовали не только в книгах по математике, но и по механике (Ньютон) и даже по философии (Спиноза).

Из всех известных во времена Евклида математических теорий в «Начала» не вошло не так уж много: учение о конических сечениях; сферическая геометрия; исследования, связанные с тремя классическими задачами на построение; квадрируемые луночки Гиппократа.

Евклид не приводит ни одного численного примера. Он ничего не говорит о способах вычислений, которые должны были существовать в его время.

Помимо «Начал» Евклид написал ещё 10 книг по математике и её приложениям (астрономия, оптика, теория музыки), многие из которых сохранились до нашего времени. Но влияние всех остальных книг Евклида было несравненно меньше.

По-гречески книга Евклида называлась $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$ (от этого слова происходит русское «стихия»), а в латинском переводе она называлась «Elements».

«Начала» Евклида состоят из 13 книг, последняя из которых посвящена построению правильных многогранников. Впоследствии другими авторами были написаны дополнительно книги 14 и 15, посвящённые правильным многогранникам. (Книгу 14 написал александриец Гипсикл около 200 г. н. э., а книга 15 была написана, вероятно, в VI в. н. э.)

2.14.1. Книга I

Евклид начинает с определений.

1) Точка есть то, что не имеет частей.

2) Линия же — длина без ширины.

3) Концы же линии — точки.

4) Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.

5) Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

6) Концы же поверхности — линии.

7) Плоская поверхность есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.

Далее следуют определения угла, круга, треугольника, четырёхугольника. Последнее определение такое.

23) Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той ни с другой стороны не встречаются.

После определений следуют постулаты.

Допустим:

1) Что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.

2) И что ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.

3) И что из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.

4) И что все прямые углы равны между собой.

5) И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

За постулатами, которые относятся к определённым геометрическим понятиям, идут аксиомы (общие понятия), которые относятся ко всем наукам: «Равные одному и тому же равны и между собой», «Целое больше части» и т.п.

В третьем постулате Евклида говорится, что можно построить окружность с данным центром и данным радиусом, проведённым из этого центра. Возможность построить окружность с данным центром и радиусом, заданным в другом месте плоскости, доказывается в предложении I, 2. У такой формулировки третьего постулата есть разные объяснения: 1) это согласуется с требованием не делать излишних гипотез; 2) такое построение окружности могло быть связано с построением с помощью колышка и верёвки, а не с помощью циркуля.

Пятый постулат своей тяжеловесной формулировкой и меньшей очевидностью резко отличается от остальных постулатов. Это побудило многих математиков полагать, что пятый постулат лишний, т.е. он на самом деле является теоремой, которую можно вывести из остальных постулатов и аксиом Евклида. И лишь открытие неевклидовой геометрии Гауссом, Лобачевским и Бойяи подтвердило, что Евклид был прав: без пятого постулата нельзя обойтись в построении его геометрии.

Система постулатов и аксиом Евклида неполна, поэтому логическая структура «Начал» Евклида, на современный взгляд, странная. С одной стороны, Евклид формулирует определения, постулаты и аксиомы, из которых он затем выводит теоремы. С другой стороны, некоторые утверждения он считает очевидными и использует их без каких-либо оговорок. У Евклида нет аксиом движения, нет аксиом непрерывности, но ему приходится ими пользоваться. Причина, по-видимому, в том, что формулировка и тех и других аксиом в то время была бы чрезвычайно трудна.

Движений Евклид старался по возможности избегать, но с непрерывностью ему пришлось столкнуться уже в первом предложении о существовании равностороннего треугольника с данной стороной AB. Его рассуждения следующие. Построим окружность с центром A и радиусом AB и окружность с центром B и радиусом BA. (Возможность таких построений оговорена постулатом 3.) Эти окружности обязательно пересекутся в некоторой точке C. (Вот пример утверждения, очевидного с точки зрения Евклида.) Проведём прямые AC и CB. (Возможность проведения прямой через две точки оговорена постулатом 1.) Тогда $AC = AB$ и $CB = AB$, поэтому $AC = CB$. (Это следует из аксиомы 1: равные одному и тому же равны и между собой.) Трудно сказать, по каким причинам утверждение о том, что рассматриваемые окружности пересекаются в некоторой точке, казалось Евклиду более очевидным, чем те утверждения, которые он выделил в качестве постулатов и аксиом. По-видимому, это было связано с тем, что понятия, связанные с непрерывностью, в то время ещё не были разработаны.

Ещё один пример утверждение, которое для Евклида очевидно, — это единственность прямой, проходящей через две точки (у Евклида есть постулат о существовании такой прямой, но ничего не говорится о том, что такая прямая единственна).

«Начала» Евклида отвечали всем требованиям строгости рассуждений, которые были выработаны древнегреческими математиками и философами. Для греков построение было единственным достоверным способом доказательства существования чего-либо. Возможно, именно поэтому доказательство существования правильного треугольника с заданной стороной представлялось Евклиду и его современникам безупречным. Аксиоматический метод в то время ещё только начинал разрабатываться и не достиг того уровня, на который поставил его Гильберт. Многие рассуждения, которые не были непосредственным логическим выводом из аксиом, считались греками достоверными.

В первой книге «Начал» обуждаются различные геометрические построения. Начинается она с построения равностороннего треугольника, затем следуют построение биссектрисы угла и построение перпендикуляра к прямой. Далее в первой книге доказываются признаки равенства треугольников.

Евклид, по-видимому, был недоволен формулировкой пятого постулата. Он избегал им пользоваться до тех пор, пока это было возможно — в первых 28 теоремах пятый постулат не используется. Первое его использование — в теореме 29 (о равенстве накрест лежащих углов, образованных при пересечении секущей двух параллельных прямых). При таком построении геометрии Евклид мог опираться на исследования предшествующих геометров, тщательно изучавших как следствия из гипотезы о том, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам, так и следствия из гипотезы о том, что сумма углов треугольника не равна двум прямым.

Прежде чем воспользоваться серединой отрезка (I, 16), Евклид доказывает путём построения (I, 10), что эта точка действительно существует. Так же он поступает и во всех других подобных случаях.

При построении треугольника с заданными сторонами (I, 22) Евклид не доказывает, что треугольник существует (хотя и оговаривает, что каждая сторона должна быть меньше двух других сторон).

Предложения 33-48 относятся к площадям параллелограммов и треугольников. Здесь вводится понятие равновеликих фигур.

Предложения 42-45 относятся к задаче о построении квадрата, равновеликого данному многоугольнику. Окончательно эта задача будет решена только в книге II (предложение 14). В книге I Евклид сначала строит параллелограмм с данным углом, равновеликий данному треугольнику (предложение 42). Затем он доказывает лемму, на которой основано решение этой задачи: параллелограммы, заштрихованные на рис. 2.32, равновелики. Эта лемма позволяет по данному параллелограмму построить равновеликий ему параллелограмм с данной стороной и такими же углами. На этом и основано решение задачи: из двух параллелограммов с одинаковыми углами, у каждого из которых есть сторона данной длины, можно составить один параллелограмм. Именно так Евклид доказывает предложение 44, которое заключается в построении параллелограмма с данными углами, равновеликого

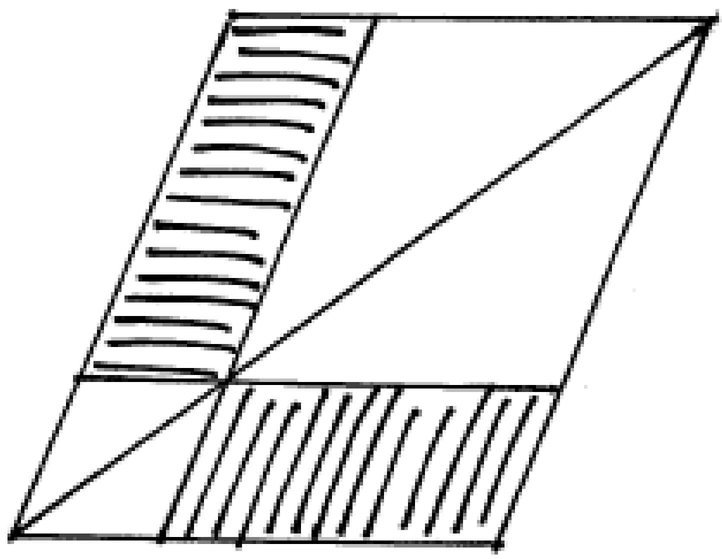

Рис. 2.32.

данному многоугольнику.

Евклид систематически излагает результаты, полученные его предшественниками, не упоминая их имен. Например, теорема Пифагора — это предложение I, 47 «Начал». Евклид не упоминает ни имени Пифагора, ни имени автора того доказательства, которое он приводит. Доказательство теоремы Пифагора у Евклида следующее. Опустим из вершины A перпендикуляр AL на сторону DE квадрата (рис. 2.33). Треугольники ABD и FBC равны, поэтому площадь прямоугольника с диагональю BL равна удвоенной площади треугольника ABD, т. е. удвоенной площади треугольника FBC, а она, в свою очередь, равна площади квадрата $ABFH$. Аналогично доказывается, что площадь прямоугольника с диагональю CL равна площади квадрата $ACKG$.

Это доказательство во многом похоже на доказательство предложения VIII, 17, но оно избегает применения пропорций и опирается только на книгу I. Это доказательство, по-видимому, придумал сам Евклид.

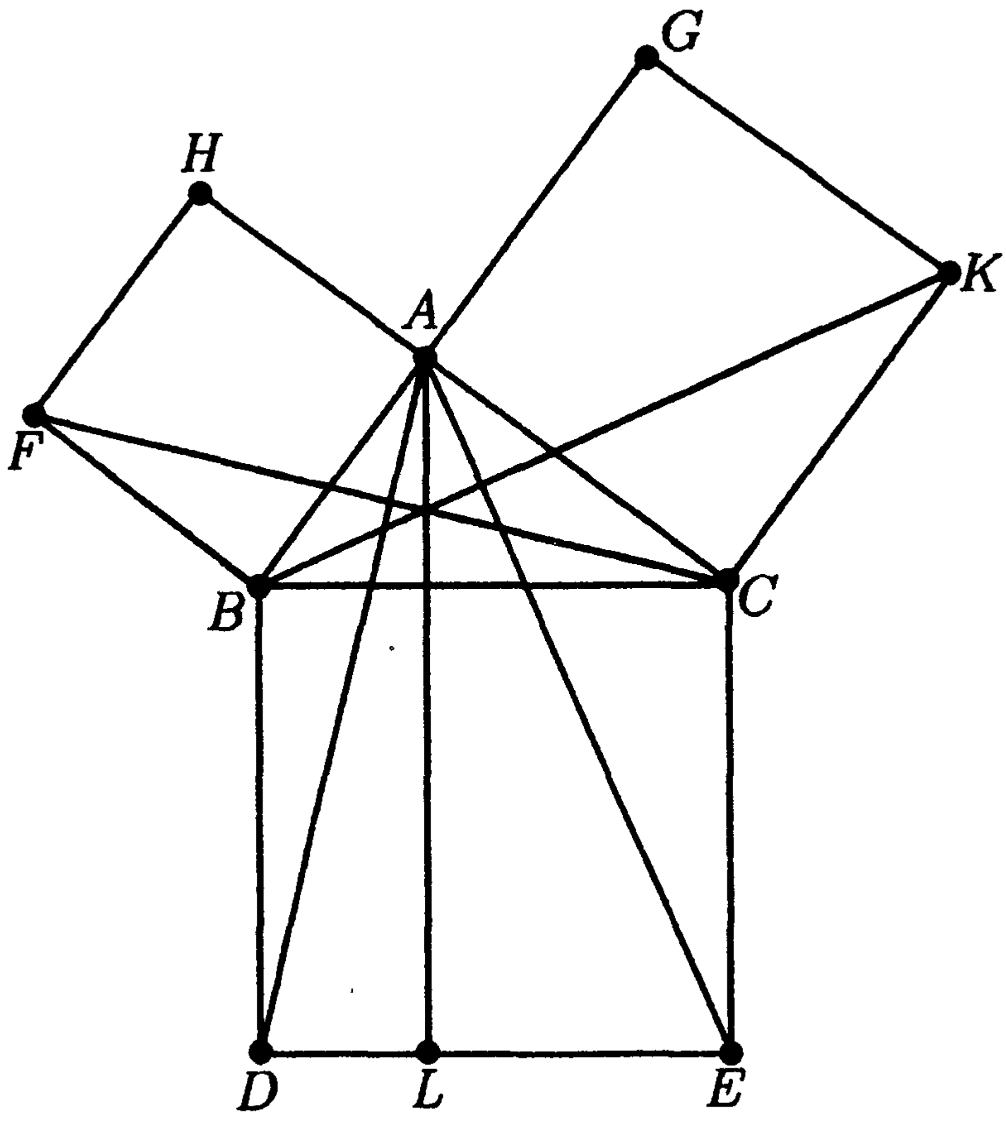

Рис. 2.33.

2.14.2. Книга II

Основу книги II составляет так называемая *геометрическая алгебра*, разработанная ещё пифагорейцами. Геометрическая алгебра поразительно напоминает обычную школьную алгебру, но все алгебраические преобразования, влючая решение квадратных уравнений, выполняются геометрически. Возникает даже впечатление, будто греки нарочно перевели на геометрический язык алгебраические операции (именно поэтому и возникло впоследствии такое название: «геометрическая алгебра»). Возможно, пифагорейцы в ранние времена использовали какие-то алгебраические преобразования с числами. Но после открытия несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали такие преобразования стали невозможными. Для древнегреческих математиков число было либо натуральным, либо положительным рациональным, поэтому диагональ квадрата со стороной 1 они не могли представлять себе как число, они могли представлять её только как отрезок. А произведение двух отрезков они представляли как прямоугольник.

В этой книге рассматриваются не параллелограммы общего вида, а прямоугольники и квадраты. Важное место во многих конструкциях занимает гномон.

В предложении II, 4 Евклид доказывает геометрически формулу квадрата суммы: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (Евклид формулирует это как равенство площади одного квадрата сумме площадей двух других квадратов и удвоенной площади прямоугольника). Идея этого доказательства представлена на рис. 2.34.

Древнегреческие математики не были знакомы с понятием отрицательного числа, поэтому формула квадрата разности доказывается отдельно в предложении II, 7. Площади можно было только складывать, но не вычитать, поэтому у Евклида формула квадрата разности (на языке площадей квадратов и прямоугольников) выглядит так: $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$. Идея доказательства этой формулы представлена на рис. 2.35.

С алгебраической точки зрения предложения II, 5 и II, 6 представля-

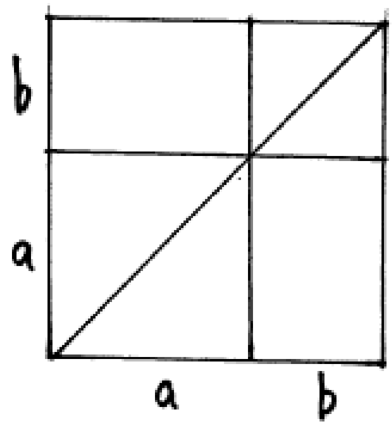

Рис. 2.34.

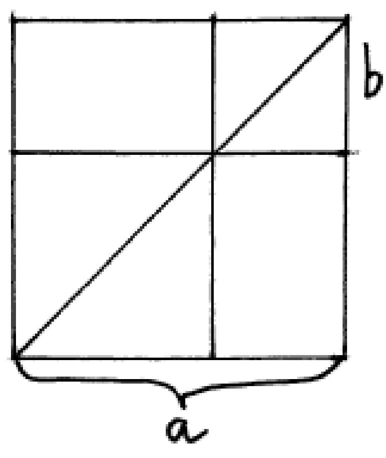

Рис. 2.35.

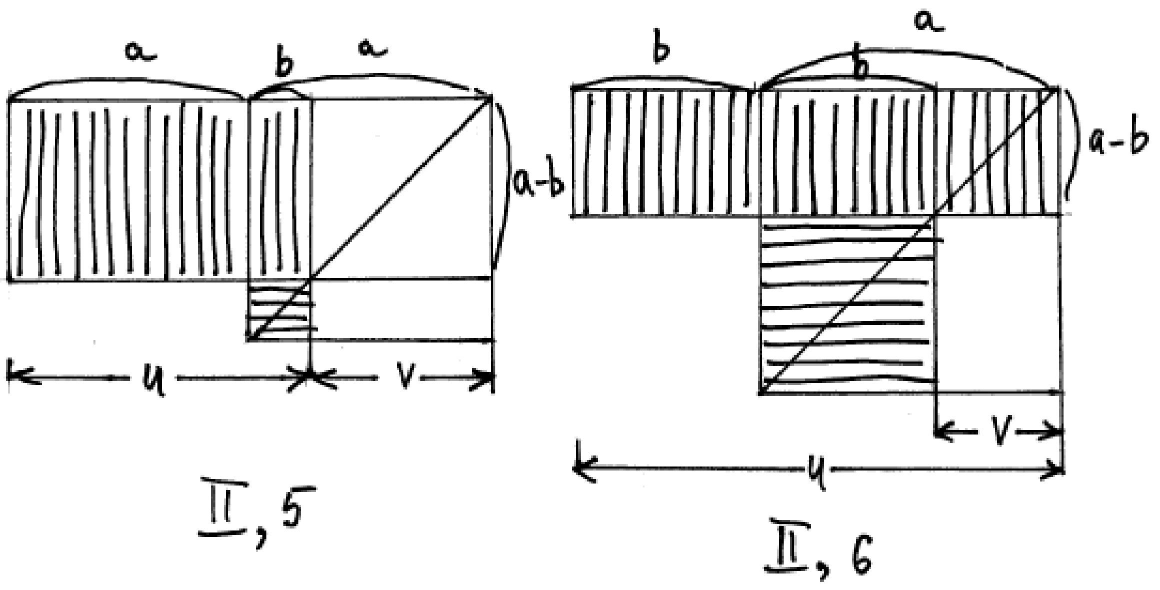

Рис. 2.36.

ют собой одно и то же тождество: $(a-b)(a+b)+b^2=a^2$. У Евклида они формулируются на языке площадей. Если воспользоваться рисунком 2.36, то эти предложения можно сформулировать так: сумма площади заштрихованного прямоугольника и заштрихованного квадрата равна площади большого квадрата. Требуемое утверждение следует из того, что заштрихованный прямоугольник равновелик гномону, который получается вырезанием заштрихованного квадрата из большого квадрата.

В книге «О заданных величинах» Евклид применяет предложения II, 5 и II, 6, чтобы доказать, что если дано произведение uv и сумма $u+v$ (или разность $u-v$), то известны и сами отрезки u и v. При этом произведение uv дано как сторона c квадрата, площадь которого равна uv, т.е. $c^2=uv$. Если даны отрезки c и $u+v=2a$, то Евклид применяет предложение II, 5 и находит $b=\frac{u-v}{2}$ как катет прямоугольного треугольника, у которого известны катет c и гипотенуза a. А если даны отрезки c и $u-v=2b$, то Евклид применяет предложение II, 6 и находит $a=\frac{u+v}{2}$ как гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого известны катеты c и b.

Предложения II, 5 и II, 6 тесно связаны с предложениями VI, 28 и VI, 29, в которых к данному отрезку требуется приложить прямо-

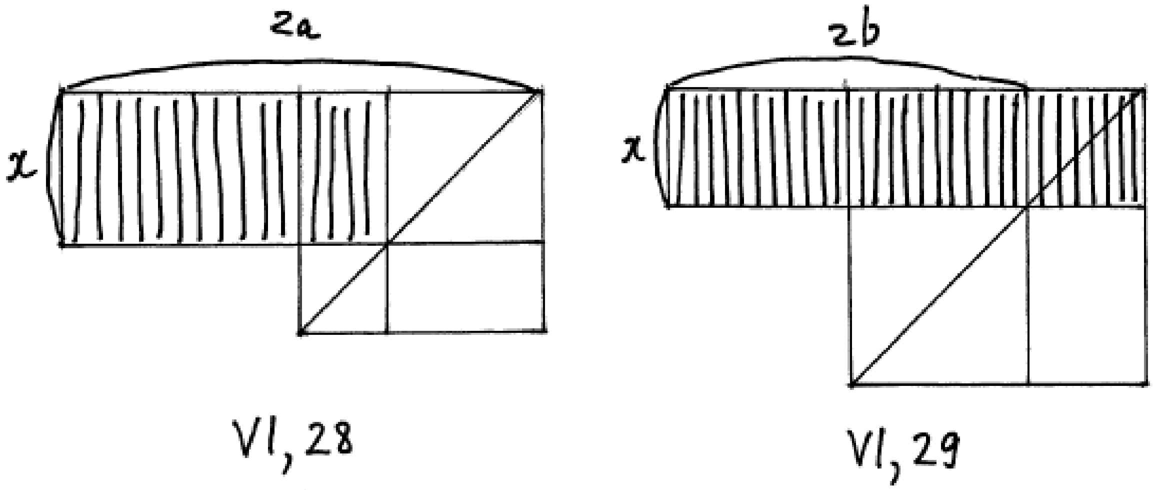

Рис. 2.37.

угольник[3] данной площади с недостатком или с избытком. Что такое приложение с недостатком и с избытком, поясняет рис. 2.37: берётся прямоугольник, одной из сторон которого является данный отрезок, и от этого прямоугольника либо отрезается квадрат, либо к нему прикладывается квадрат. На алгебраическом языке это означает, что нужно решить уравнение $2ax - x^2 = c^2$ или $2bx + x^2 = c^2$, где c — сторона данного квадрата. (Предполагается, что площадь искомого прямоугольника задана как квадрат со стороной c; таким образом, $c^2 = (a - b)(a + b)$.) Согласно предложениям II, 5 и II, 6 получаем: $c^2 + b^2 = a^2$. Для решения уравнения $2ax - x^2 = c^2$ находим $b = a - x$ как катет прямоугольного треугольника, у которого известны катет c и гипотенуза a; для решения уравнения $2bx+x^2 = c^2$ находим $a = b+x$ как гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого известны катеты c и b.

Приложение с недостатком называлось *эллиптическим приложением площадей*, а приложение с избытком — *гиперболическим приложением площадей*. И было ещё *параболическое приложение площадей*, когда к данному отрезку требовалось приложить прямоугольник данной площади.

В предложении II, 11 Евклид строит золотое сечение: «Заданный

[3]В действительности, у Евклида формулировка несколько более общая: рассматриваются не прямоугольники, а параллелограммы.

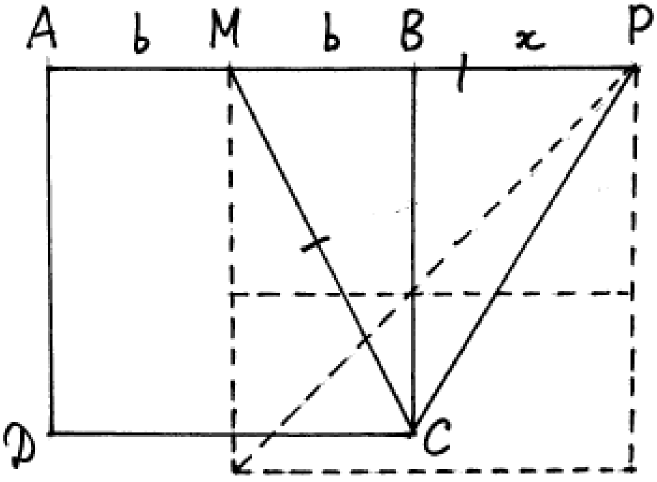

Рис. 2.38.

отрезок разделить таким образом, чтобы прямоугольник, построенный на всём отрезке и на одной из частей, равнялся квадрату, построенному на другой части». Это построение тесно связано с решением квадратного уравнения $x^2 = p(p - x)$. Евклид не решает это уравнение. Он заранее знает корень этого уравнения, и просто описывает, как этот корень построить, а затем с помощью предложения II, 6 проверяет, что действительно построен нужный корень. Делается это так. Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной p и построим середину M стороны AB. На луче MB построим отрезок MP, равный отрезку MC (рис. 2.38). Тогда BP — искомый отрезок x. Действительно, воспользуемся предложением II, 6, и при этом, чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями рис. 2.36, положим $b = p/2$. В результате получим $x(2b + x) + b^2 = (b + x)^2$. По построению $(b + x)^2 = MP^2 = MC^2 = b^2 + (2b)^2$ (здесь мы воспользовались теоремой Пифагора), поэтому $x(2b+x) = (2b)^2$, т.е. $x(p+x) = p^2$. Это уравнение получается из исходного уравнения $x^2 = p(p - x)$, если к обеим его частям добавить px.

Из теоремы Пифагора Евклид выводит утверждение, очень близкое к теореме косинусов. Он отдельно рассматривает случаи тупого и острого угла треугольника (предложения II, 12 и II, 13). Например, для тупого угла рассуждения Евклида следующие. Опустим перпен-

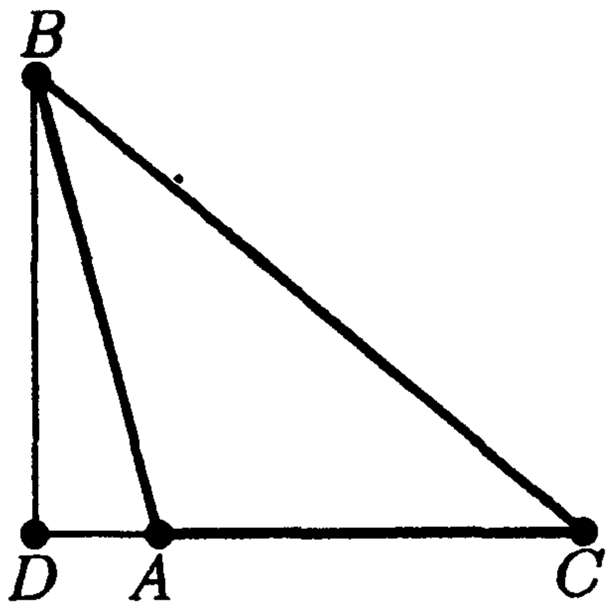

Рис. 2.39.

дикуляр BD на продолжение стороны AC (рис. 2.39). Из тождества $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ следует, что $DC^2 = DA^2+AC^2+2DA\cdot AC$. Добавим к обеим частям полученного равенства DB^2 и воспользуемся тем, что по теореме Пифагора $DC^2 + DB^2 = BC^2$ и $DA^2 + DB^2 = AB^2$. В результате получим

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC.$$

От теоремы косинусов это отличается лишь тем, что DA нужно заменить на $-AB\cos A$. Но во времена Евклида синусов и косинусов ещё не было.

В предложении II, 14 Евклид завершает решение задачи о приложении площадей, начатое в книге I. Для данного многоугольника он строит равновеликий ему квадрат. В книге I уже был построен прямоугольник, равновеликий данному многоугольнику, поэтому остаётся построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику. Построение стороны квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами a и b, представлено на рис. 2.40: сторона искомого квадрата — это отрезок CD. Доказательство основано на теореме Пифагора: $CD^2 = OD^2 - OC^2 = (OD + OC)(OD - OC) = ab$.

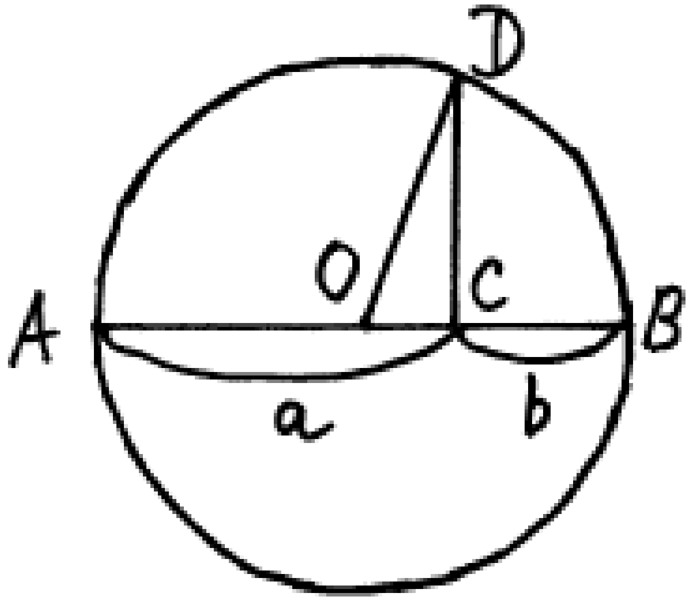

Рис. 2.40.

2.14.3. Книга III

Книга III посвящена кругам, в ней обсуждаются свойства вписанных углов и касательных. Вот как, например, Евклид строит касательную из данной точки A к данной окружности. Пусть E — центр данной окружности, D — точка пересечения данной окружности и отрезка EA. Построим окружность радиуса EA с центром E и найдём точку I, в которой эту окружность пересекает перпендикуляр к прямой AE, восставленный из точки D (рис. 2.41). Пусть B — точка пересечения отрезка IE с исходной окружностью. Тогда AB — искомая касательная. Это следует из того, что треугольники ABE и IDE равны.

В книге III доказываются многие теоремы о свойствах окружностей, входящие ныне в школьную программу. Например, теорема о вписанном угле (предложение III, 20), теорема о двух пересекающихся хордах (предложение III, 35: «Если в круге две прямые пересекают друг друга, то прямоугольник, заключённый между отрезками одной, равен прямоугольнику, заключённому между отрезками другой»), теорема о квадрате касательной (предложение III, 36).

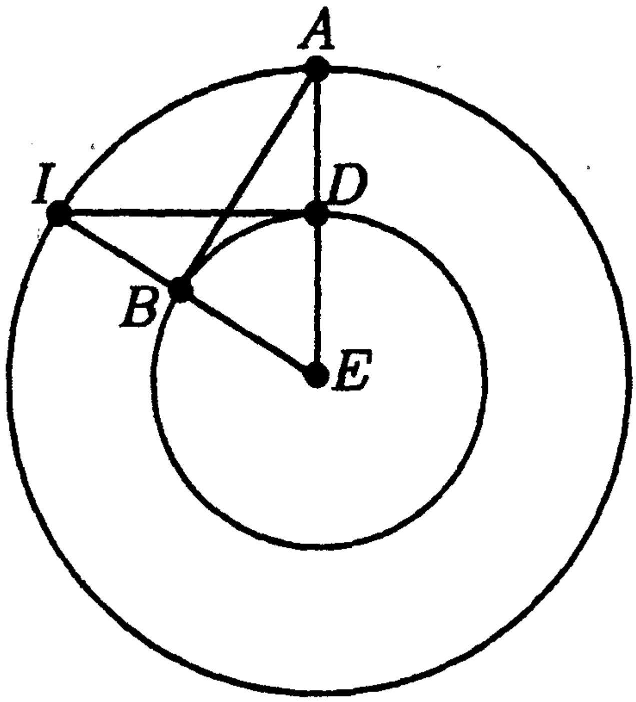

Рис. 2.41.

2.14.4. Книга IV

В книге IV снова рассматриваются круги, но уже вместе с многоугольниками, вписанными или описанными.

В книге IV Евклид описывает построение правильного пятиугольника. Это построение довольно сложное. Оно выглядит как перевод на геометрический язык некоторой алгебраической формулы с квадратными корнями. Завершается книга IV построением правильного 15-угольника (на основе построения правильных пятиугольника и треугольника).

Древнегреческий комментатор утверждает, что всё в этой книге принадлежит пифагорейцам.

2.14.5. Книга V

Теория пропорциональности отрезков была разработана Евдоксом Книдским. Она подробно изложена в V книге «Начал» Евклида. Эта теория довольно сложная. Дело в том, что у древнегреческих математиков не было понятия действительного числа; они рассматривали только натуральные числа и уже в более позднее время изредка использовали положительные рациональные числа. Поэтому они не могли отождествить длину отрезка с числом. В теории пропорциональности Евдокса фактически доказываются свойства действительных чисел, и именно поэтому она такая сложная.

Древнегреческий комментатор пишет, что все согласны с тем, что последовательность изложения в книге V целиком принадлежит Евклиду.

Во времена Евклида теория пропорций Евдокса была ещё новинкой, и она не могла найти себе место в начале сочинения Евклида. До V книги Евклиду приходилось избегать теории пропорций. По-видимому, именно по этой причине Евклид придумал то доказательство теоремы Пифагора, которое помещено в книге I. Без пропорций доказываются теоремы о степени точки по отношению к окружности в книге III и с их помощью строится правильный пятиугольник.

Определение 4 характеризует величины, к которым может применяться теория пропорций: «Говорят, что величины *имеют отношение* между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга.» Это определение фактически эквивалентно аксиоме Архимеда, на которой основан метод исчерпывания.

Важнейшую роль играет определение равенства отношений (определение 5): «Говорят, что *величины находятся в том же отношении*: первая ко второй и третья к четвёртой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвёртой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке.»

2.14.6. Книга VI

В книге VI общая теория пропорций, изложенная в книге V, применяется к планиметрии. Книга начинается с определений; в частности, даются определения подобных фигур и *деления отрезка в крайнем и среднем отношении* (так называлось во времена Евклида золотое сечение).

Евклид не определяет произведение двух отношений. Но в предложении VI, 23 фактически содержится практическое определение этого важного понятия. Это предложение таково: «Равноугольные параллелограммы имеют друг к другу составное отношение их сторон.» Другими словами, отношение площадей двух параллелограммов с общим углом равно произведению отношений их сторон.

Предложение VI, 25 заключается в том, чтобы построить многоугольник, подобный данному и равновеликий данному. Эта задача восходит к пифагорейцам.

В предложении VI, 27 на языке площадей параллелограммов формулируется и решается задача о нахождении максимума функции $x(a - x)$.

Предложения VI, 28 и VI, 29, относяшиеся к приложению площадей, мы уже обсудили на с. 116. Это — геометрический эквивалент решения квадратного уравнения, когда это уравнение имеет вещественный положительный корень.

Странно выглядит предложение VI, 33 о том, что углы пропорциональны дугам, которые они вырезают на окружности. Углы не удовлетворяют характеристическому свойству величин, к которым может применяться теория пропорций (см. с. 122). Поэтому к углам не могла применяться терия пропорций. По-видимому, это предложение — позднейшая неумелая вставка, что подтверждается и весьма неуклюжим доказательством.

2.14.7. Книги VII-IX

Эти книги посвящены арифметике. Теория рациональных и целых чисел излагается в них уже после общей теории пропорций, но не основываясь на ней. Доказательства здесь, по-видимому, те же самые, которыми пользовались до Евдокса. Интересно, что транзитивность пропорциональности пар натуральных чисел Евклид не доказывает, хотя транзитивность пропорциональности пар величин он строго доказывает (предложение V, 11). Коммутативность умножения целых чисел доказывается в предложении VII, 16, а коммутативность произведения отношений доказывается в предложениях V, 22-23.

В предложениях VII, 1-3 находится общая мера двух или трёх неравных чисел. Предложение 1 — это тест для проверки взаимной простоты двух чисел. В предложениях VII, 4-19 повторяется теория пропорций, но теперь уже не в общем, а в частном случае. Предложение VII, 34 — это *алгоритм Евклида* для двух чисел, а предложение VII, 39 — для любого набора чисел.

Книга VIII посвящена геометрическим прогрессиям.

Предложение IX, 14 эквивалентно теореме о единственности разложения числа на простые множители. Предложение IX, 20 — доказательство бесконечности множества простых чисел; это доказательство то же самое, что и сейчас обычно даётся (предполагается, что a, b, c, $\ldots$ — это все простые числа и их конечное число, рассматривается наименьшее число, которое на них делится, и к нему прибавляется 1; полученное число не делится ни на одно из простых чисел). Предложения IX, 21-34 трактуют о наиболее простых свойствах делимости на 2. Они восходят, по-видимому, к тому времени, когда ещё не была развита общая теория простых чисел. Предложение IX, 35 — сумма геометрической прогрессии (конечной). Завершает книгу IX предложение 36 о совершенных числах: если сумма $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$ — простое число, то оно, умноженное на 2^n даёт *совершенное число*, сумма делителей которого равна самому числу. Совершенные числа впервые встречаются у Евклида.

На какое-то время греков завело в тупик то, что произведение двух длин они считали площадью, т.е. произведение двух объектов одного рода было объектом совсем другого рода. В частности, величины и произведения величин нельзя было складывать. Из этого тупика разными путями вышли Герон и Диофант. И Архимед, по-видимому, тоже.

2.14.8. Книга X

Книга X посвящена соизмеримым и несоизмеримым величинам. В ней приводится классификация квадратичных иррациональностей определённого вида. Эта классификация очень глубокая, но в дальнейшем она не развивалась и не использовалась, поэтому на ней мы не будем останавливаться. Отметим только, что во многих отношениях это самая совершенная и продвинутая книга «Начал». Значительная часть результатов книги X, в том числе квадратичных иррациональностей, принадлежит Теэтету.

На предложении X, 1 основано применение метода исчерпывания: для двух заданных величин, если от большей отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то остаётся некоторая величина, которая будет меньше заданной величины.

2.14.9. Книга XI

Стереометрия начинается у Евклида с книги XI. В этой книге он доказывает разные теоремы о плоскостях, параллелепипедах, трёхгранных углах. Например, он доказывает, что в трёхгранном угле любой плоский угол меньше суммы двух других плоских углов (предложение XI, 20), а сумма всех плоских углов меньше четырёх прямых углов (предложение XI, 21).

Предложение XI, 20 Евклид доказывает следующим образом. Достаточно доказать, что наибольший плоский угол меньше суммы двух других плоских углов. Поэтому будем считать, что в трёхгранном угле $ABCD$ с вершиной A угол BAC наибольший. Тогда внутри угла BAC можно выбрать точку E так, что $\angle BAE = \angle BAD$ и $AE = AD$ (точкой C мы считаем при этом точку пересечения прямой BE и ребра AC). В таком случае треугольники BAE и BAD равны, а значит, $BE = BD$. Поэтому из неравенства $BD + DC > BC$ и равенства $BC = BE + EC$ следует, что $DC > EC$. В треугольниках DAC и EAC стороны DA и EA равны, а сторона AC у них общая. Поэтому из неравенства $DC > EC$ следует, что $\angle DAC > \angle EAC$. Это означает, что

$$\angle BAD + \angle DAC > \angle BAE + \angle EAC = \angle BAC.$$

Предложение XI, 21 Евклид выводит из предложения XI, 20. Вместо трёхгранного угла $ABCD$ с вершиной A он рассматривает тетраэдр $ABCD$ и применяет неравенство, доказанное в предложении XI, 20, к трёхгранным углам с вершинами B, C и D. В результате он получает, что сумма углов треугольника BCD меньше суммы тех углов треугольников BAC, CAD и DAB, которые прилегают к его сторонам. Последняя сумма равна $3\pi - \Sigma$, где Σ — сумма углов треугольников BAC, CAD, DAB при вершине A. Таким образом, $\pi < 3\pi - \Sigma$, т. е. $\Sigma < 2\pi$.

2.14.10. Книга XII

Книга XII посвящена методу исчерпывания: последовательно доказывается, что площади кругов относятся как квадраты их диаметров; объёмы пирамид с равными высотами относятся как площади оснований; объём конуса равен трети объёма цилиндра с тем же основанием и той же высотой; объёмы конусов (цилиндров) с равными высотами относятся как площади оснований; объёмы подобных конусов (цилиндров) относятся как кубы диаметров их оснований; объёмы сфер относятся как кубы их диаметров.

2.14.11. Книга XIII

«Начала» Евклида увенчиваются книгой XIII, посвящённой теории правильных многогранников. Многие исследователи «Начал» высказывали мнение, что Евклид весь свой трактат написал лишь для того, чтобы систематически изложить теорию правильных многогранников. Это мнение основано на том, что Евклид был последователем Платона, а Платон уделял правильным многогранникам большое внимание. Основная цель Евклида в этой книге — построение правильных многогранников, вписанных в данную сферу.

При построении икосаэдра Евклид использует следующие два вспомогательных утверждения.

1. *Если отрезок AB составлен из стороны AC правильного 10-угольника и стороны BC правильного 6-угольника, вписанных в окружность одного радиуса, то*

$$AB : BC = BC : AC.$$

2. *Если правильные 5-угольник, 6-угольник и 10-угольник вписаны в одну и ту же окружность, то квадрат стороны 5-угольника равен сумме квадратов сторон 6-угольника и 10-угольника.*

Для доказательства первого утверждения Евклид рассматривает правильный 10-угольник со стороной AC и на продолжении стороны AC откладывает отрезок CB, равный стороне правильного 6-угольника, вписанного в ту же самую окружность (рис. 2.42). После этого он показывает, что треугольники ABO и AOC подобны. Следовательно, $AB : AO = AO : AC$. Учитывая, что $AO = CO = CB$, получаем требуемое.

Второе утверждение Евклид доказывает следующим образом. Сравнивая углы, он показывает, что треугольники IBN и ABI подобны (рис. 2.43) и треугольники BAK и KAN тоже подобны. Поэтому $IB : AB = BN : BI$ и $BA : KA = AK : AN$, т. е. $IB^2 = AB \cdot BN$ и $AK^2 = AB \cdot AN$. Учитывая, что $AN + BN = AB$, получаем требуемое равенство

$$IB^2 + AK^2 = AB^2.$$

Икосаэдр (правильный многогранник с 12 вершинами, гранями которого служат 20 правильных треугольников) Евклид получает по следующей схеме. Возьмём отрезок $O_1O_2 = R$ и построим в пространстве круги радиуса R с центрами O_1 и O_2, лежащие в плоскостях, ортогональных прямой O_1O_2. Впишем в эти круги правильные 5-угольники так, чтобы проекции вершин каждого 5-угольника на плоскость другого 5-угольника попадали в середины дуг, стягиваемых сторонами 5-угольника. Отложим на продолжениях отрезка O_1O_2 за его концы

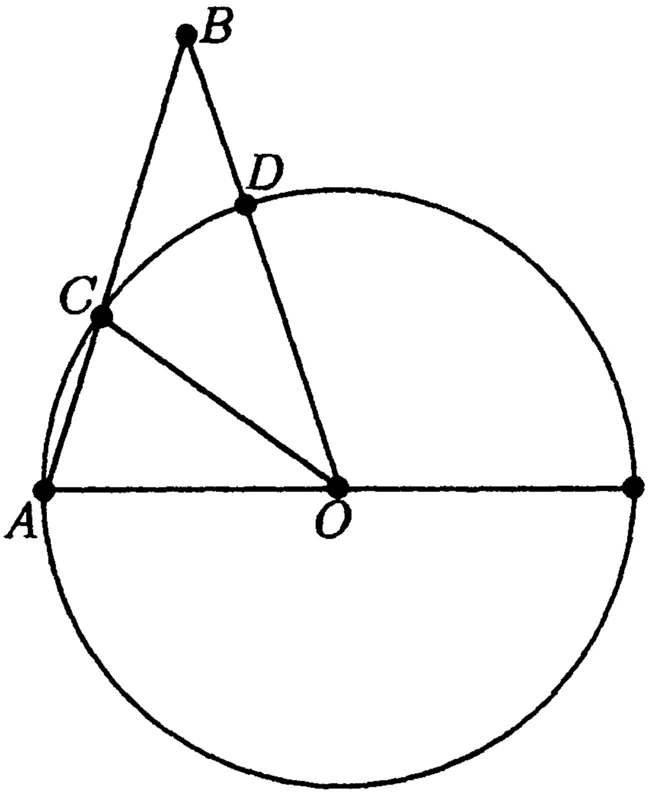

Рис. 2.42.

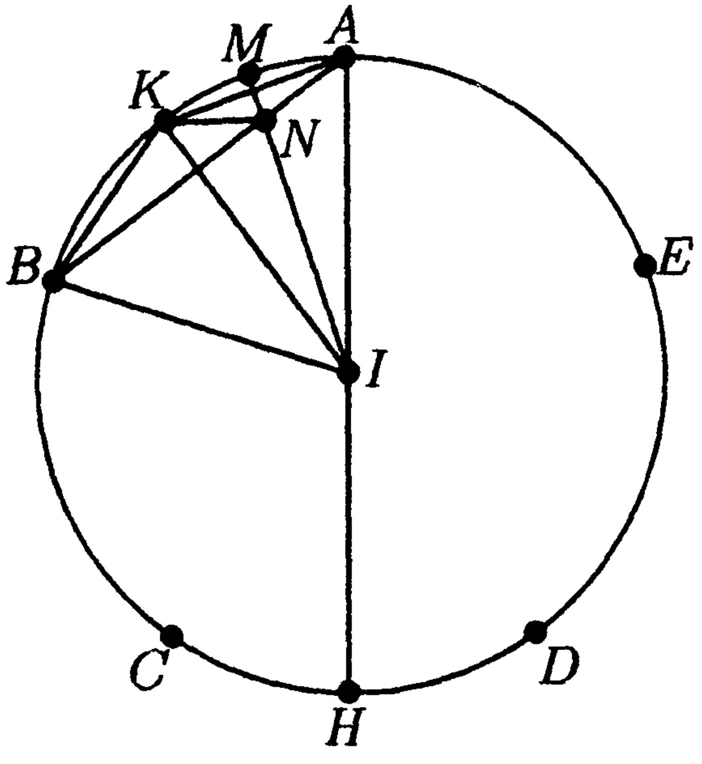

Рис. 2.43.

отрезки O_1A_1 и O_2A_2, равные стороне правильного 10-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Точки A_1 и A_2 вместе с вершинами двух рассматриваемых 5-угольников служат вершинами искомого икосаэдра. В самом деле, из утверждения 1 следует, что вершины рассматриваемых 5-угольников лежат на сфере с диаметром A_1A_2, а из утверждения 2 следует, что длины всех ребер полученного многогранника равны стороне правильного 5-угольника, вписанного в окружность радиуса R (нужно отдельно рассмотреть расстояние между точкой A_i и вершиной 5-угольника и расстояние между двумя вершинами разных 5-угольников).

Додекаэдр (правильный многогранник с 20 вершинами, гранями которого служат 12 правильных пятиугольников) Евклид строит с помощью куба. Мы изложим его конструкцию на более современном языке, используя не только геометрию, но и алгебру. Пусть x — такой отрезок, что $x : 1 = 1 : (x+1)$, т. е. $x^2 + x = 1$. Рассмотрим куб с ребром $2(x+1)$ и разделим средние линии его граней на отрезки длиной $x, 2, x$. Затем из точек деления проведём внешние нормали к граням куба и отложим на них отрезки длиной 1. Покажем, что пятиугольник $ABCDE$ (рис. 2.44) правильный. Прежде всего нужно убедиться, что вершины этого пятиугольника лежат в одной плоскости. Для этого можно рассмотреть проекцию на плоскость, перпендикулярную ребру CE, и воспользоваться тем, что полученные при такой проекции прямоугольные треугольники с катетами $(1, x)$ и $(1+x, 1)$ подобны. Равенство сторон рассматриваемого пятиугольника следует из того, что

$$BC^2 = CD^2 = (1+x)^2 + x^2 + 1 = 4 = AB^2.$$

Для доказательства равенства углов воспользуемся тем, что

$$AC^2 = BE^2 = (1+x)^2 + (2+x)^2 + 1 = 4(1+x)^2 = EC^2.$$

Таким образом, треугольники EAB, ABC и CDE являются равными равнобедренными треугольниками, а треугольники ACE и BEC равнобедренные. Поэтому в рассматриваемом пятиугольнике углы при

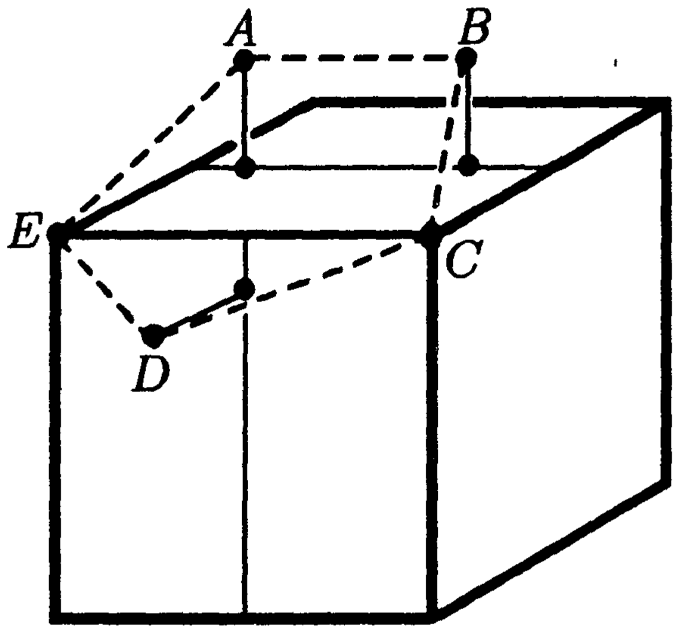

Рис. 2.44.

вершинах A, B и D равны. Кроме того, равны углы при вершинах B и C, так как $\angle ABC = \angle DCE$ и $\angle EBC = \angle ECB$. Аналогично доказывается равенство углов при вершинах A и E.

Точки A, B и D лежат на описанной сфере куба, поскольку они удалены от центра куба на расстояние, квадрат которого равен

$$(2+x)^2 + 1 = 3(1+x)^2.$$

Теперь нужно выбрать в каждой грани куба среднюю линию так, чтобы выбранные средние линии не имели общих точек (после того как в одной из граней куба выбрана одна из двух средних линий, это делается ровно одним способом). Проделав для каждой из этих средних линий описанную выше конструкцию, получим додекаэдр.

2.14.12. Другие сочинения Евклида

Из других сочинений Евклида наибольшее значение имеет книга «Data» («О заданных величинах»), уже упоминавшаяся на с. 116. Она состоит из предложений такого типа: если даны или определены некоторые величины, то какие-то другие величины тоже будут определены.

В арабском переводе сохранилось небольшое сочинение «О делении фигур». В нём обсуждается вопрос о делении многоугольников на две равновеликие части (или на две части с заданным отношением площадей) прямой данного направления или проходящей через данную точку. В частности, решается вавилонская задача о делении трапеции прямой, параллельной основаниям, на две равновеликие части (см. с. 30).

2.15. Аристарх Самосский (310-230 до н.э)

Аристарха Самосского, первым высказавшего гипотезу о том, что Земля вращается вокруг Солнца, историк математики сэр Томас Хит назвал Коперником античности. Гипотеза Аристарха, как и гипотеза Коперника, не была поддержана их современниками, нашедшими много доводов против этой гипотезы. Один из доводов был такой: если бы Земля не была неподвижной, то должны были бы меняться видимые расстояния между звёздами. На это Аристарх справедливо возразил, что орбита Земли чрезвычайно мала по сравнению с расстоянием от Земли до звёзд.

Аристарх вычислил расстояния от Земли до Солнца и Луны и отношение диаметра Солнца к диаметру Земли. При этом ему пришлось разработать основы тригонометрии. В частности, Аристарх первым получил оценки сверху и снизу для, говоря современным языком, синусов углов 3° и 1°. Аристарх использовал неравенства для острых углов α и β, которые в современных обозначениях можно записать так:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

если $\alpha > \beta$.

2.16. Архимед (287-212 до н.э.)

2.16.1. Биография

Архимед был не только учёным-теоретиком. Он сыграл выдающуюся роль в организации обороны от римлян своего родного города, Сиракуз. Поэтому сведений о его жизни сохранилось несравненно больше, чем о жизни Евклида или Паппа.

Архимед родился в 287 г. до н. э. в семье астронома Фидия. Первые произведения, посвящённые механике и математике, он написал в возрасте 40 лет. Толчком к развитию гениальных математических способностей Архимеда в столь позднем возрасте послужила поездка Архимеда в Александрию, где он познакомился с Кононом и Эратосфеном. После смерти Конона Архимед поддерживал связь с его учеником Досифеем. Многие дошедшие до нас трактаты Архимеда начинаются словами: «Архимед приветствует Досифея».

Основные сведения об Архимеде, которые приводят историки, относятся к последнему этапу его жизни — обороне Сиракуз. Из других историй наиболее известен следующий рассказ римского архитектора Витрувия.

«Что же до Архимеда, то из всех его многочисленных и замечательных открытий приводимое мною является, несомненно, доказательством прямо-таки безграничной изобретательности. А именно, когда Гиерон, достигший царской власти в Сиракузах, после удачного завершения своих предприятий, решил по обету бессмертным богам поместить в одном из храмов золотой венец, он заказал его за определённую плату и отвесил нужное количество золота подрядчику. В назначенный по договору срок тот доставил царю тонко исполненную работу, в точности, видимо, соответствующую весу отпущенного на неё золота.

После же того как сделан был донос, что часть золота была утаена и при изготовлении венца в него было примешано такое же количество серебра, Гиерон, негодуя на нанесённое ему оскорбление и не находя способа доказать эту покражу, обратился к Архимеду с просьбой взять на себя разрешение этого вопроса. Случилось так, что в то время как

Архимед над этим думал, он пошёл в баню и, садясь в ванну, заметил, что чем глубже он погружается в неё своим телом, тем больше через край вытекает воды. И как только это указало ему способ разрешения его вопроса, он, не медля, вне себя от радости, выскочил из ванны и голый бросился к себе домой, громко крича, что нашёл то, что искал; ибо на бегу он то и дело восклицал по-гречески: $\varepsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$, $\varepsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$.

Тогда, исходя из этого открытия, он, говорят, сделал два слитка одинакового веса с венцом — один из золота, другой из серебра. Сделав это, он взял объёмистый сосуд, наполнил его до самых краев водой и опустил в него серебряный слиток, при погружении которого вода вытекла в количестве, равном величине слитка. Вынув затем слиток, он долил воды, отмерив её секстарием, так, чтобы она опять сравнялась с краями, как и раньше. Так он определил, что серебро по весу соответствует известному количеству воды.

Проделав этот опыт, он подобным же образом опустил в наполненный водой сосуд золотой слиток и, вынув его, нашёл посредством прежнего измерения, что воды убавилось не столько же, а меньше, насколько меньше был объём золотого слитка сравнительно с равным ему по весу серебряным. После же этого, вновь наполнив сосуд и опустив в то же количество воды самый венец, он нашел, что воды вытекло больше, чем при погружении золотого слитка такого же веса; и таким образом, исходя из того, что венец вытеснил больше воды, чем слиток, он показал примесь в золоте серебра и обнаружил покражу подрядчика.»

Наиболее раннее описание обороны Сиракуз содержится в «Истории» Полибия, написанной всего через полвека после разрушения Сиракуз. Вот что он писал.

«Приготовивши шалаши, метательные орудия и всё прочее, нужное для осады, римляне надеялись при многочисленности рабочих рук покончить с приготовлениями в течение пяти дней и не дать неприятелю подготовиться. Но при этом они не приняли в расчёт искусства Архимеда, не догадались, что иногда дарование одного человека способно сделать больше, чем огромное множество рук...

...Архимед соорудил машины, приспособив их к метанию снарядов на любое расстояние. Так, если неприятель подплывал издали, то Архимед поражал его из дальнобойных камнеметальниц тяжелыми снарядами или стрелами и повергал в трудное и беспомощное положение. Когда же снаряды начинали летать поверх неприятеля, то Архимед употреблял в дело меньшие машины, каждый раз сообразуясь с расстоянием, и наводил на римлян такой ужас, что они никак не решались идти на приступ или приблизиться к городу на судах...

Некоторые машины отражали нападение неприятеля, защищённого и прикрытого плетнём от стрел, выпускаемых через отверстие в стене; в таком случае бросаемые камни соответствующей тяжести прогоняли нападающих римлян с передних частей корабля. Кроме того, с машины спускалась прикреплённая к цепи железная лапа; управлявший жерлом машины захватывал в каком-нибудь месте этой лапой нос корабля и потом опускал вниз находящийся внутри города конец машины. Когда нос судна был таким образом поднят и судно поставлено отвесно на корму, то плечо рычага закреплялось неподвижно, а лапа вместе с цепью отделялись от машины освобождающего приспособления. Вследствие этого некоторые суда ложились на бок, другие совсем опрокидывались, большинство же от падения носом с значительной высоты в море погружались и наполнялись водой, внося большой беспорядок и ужас среди экипажа...

...Римляне оставались под стенами города в течение восьми месяцев, и не было такой уловки или отважного дела, перед которым они остановились бы, но на приступ идти они уже ни разу не осмеливались.

Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело направленного на какое-либо дело. Вот и теперь: располагая столь значительными силами сухопутными и морскими, римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъял из среды сиракузян одного старца. Но так как этот один был среди сиракузян, то римляне не дерзали нападать на город или по крайней мере употреблять те способы нападение, отразить которые Архимед был в силах.»

После длительной осады римляне всё же взяли Сиракузы. Во время грабежа города Архимед погиб. Наиболее подробно обстоятельства его смерти описал Плутарх в жизнеописании Марцелла, римского полководца, осаждавшего Сиракузы.

«Всего более жалел Марцелл о смерти Архимеда. Последний находился дома, рассматривая какую-то геометрическую фигуру; так как он погрузился в это исследование всем своим умом и всеми чувствами, то не заметил шума, производимого бегавшими туда и сюда римлянами, и не знал, что город уже был в их власти. Вдруг перед ним явился солдат с приказом следовать за ним к Марцеллу. Архимед отказался идти, пока не найдёт доказательства своей задачи. Раздраженный римлянин вытаскивает меч и убивает его. Другие говорят, что какой-то солдат пошёл на него с мечом чтобы убить, а Архимед настоятельно стал просить его подождать немного, пока он закончит задачу, но солдат, которому было мало дела до его доказательства, пронзил его мечом. Третьи говорят, что Архимед сам пошёл к Марцеллу, неся в ящике математические инструменты — солнечные квадранты, небесные глобусы и угломеры для измерения видимой величины Солнца, но попавшиеся ему по дороге солдаты подумали, что он несёт в ящике золото, и убили его, чтобы овладеть этим золотом. Во всяком случае, все историки признают, что Марцелл был очень опечален смертью Архимеда, сторонился убийцы, как святотатца, и, приказавши отыскать родственников Архимеда, милостиво с ними обошёлся.»

Как пишет Цицерон, Марцелл взял себе после взятия Сиракуз единственную добычу — сферу, изготовленную Архимедом. Эта сфера представляла движения Солнца, Луны и пяти планет. Сфера Архимеда изумляла всех, кто её видел. В эпоху Диоклетиана её даже использовали как аргумент в теологических спорах:

«Я вас спрашиваю, ведь мог же сицилиец Архимед воспроизвести образ и подобие мира в выпуклой округлости меди, где он так разместил и поставил Солнце и Луну, что они как-будто совершали каждодневно неравные движения и воспроизводили небесные вращения; он мог не только показать восход и заход Солнца, рост и убывание Луны, но сделать так, чтобы при вращении этой сферической поверхности можно было видеть различные течения планет; так неужели же Бог не мог воспроизвести и сотворить натуральные вещи, подобие которых мог сделать человек своим искусством и хитростью.»

Изумительную характеристику Архимеда оставил нам Плутарх. Но при её чтении следует иметь в виду, что Плутарх жил спустя несколько столетий после Архимеда и он описывает не столько реального Архимеда, сколько свой собственный идеал учёного и человека.

«Архимед имел возвышенную душу и глубокий ум, и, обладая громадными богатствами геометрических теорий, он не хотел оставить ни одного сочинения относительно построения тех машин, которые доставили ему славу знания, не только доступного человеку, но почти божественного... Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед. Одни приписывают эту ясность его высоким дарованиям, другие же — тому напряжённому труду, при помощи которого ему удавалось дать своим открытиям такое выражение, что они становятся доступными без труда. Если читатель сам не находит доказательства, то при изучении архимедовых сочинений у него создаётся впечатление, что он и сам смог бы без труда найти решение — таким лёгким и быстрым путем Архимед приводит к тому, что он хотел доказать. Поэтому не кажется невероятным, что он, как рассказывают, будучи околдован геометрией, забывал о пище и пренебрегал заботами о своём теле. Часто его насильно заставляли принимать ванну и натираться мазями, а он чертил на золе геометрические фигуры и на своём намазанном маслом теле проводил пальцем линии, — настолько он был охвачен этим занятием и действительно одухотворён музами. И хотя у него было много прекрасных открытий, он, говорят, просил своих родственников и друзей начертить на его могиле только цилиндр и содержащийся в нём шар и указать соотношение между объёмами этих тел. Таков был Архимед, который благодаря своим глубоким познаниям в механике смог, насколько это от него зависело, сохранить от поражения и себя самого и свой город.»

Архимед очень гордился тем, что вычислил площадь поверхности шара, и даже завещал поставить на своём надгробном памятнике шар и цилиндр. Цицерон по этому признаку нашёл в Сиракузах всеми забытую могилу Архимеда, со всех сторон заросшую терновником.

Самое раннее сочинение Архимеда — «Квадратура параболы» послано Досифею. В нём Архимед пишет, что узнал о смерти математика и астронома Конона. Известен рассказ, что когда египетский царь Птолемей III Эвергет уходил в поход на Антиохию, его жена Береника принесла в дар богам свои волосы, чтобы помочь благополучному возвращению мужа. Эти волосы из храма пропали. Конон объявил, что обнаружил на небе новую группу звёзд, которые и есть вознесённые на небеса волосы. Так появилось название созвездия «Волосы Береники». Дата похода Птолемея III известна — это 246 г. до н.э. Таким образом, первое сочинение Архимеда написано позже 246 г. до н.э., а родился он в 287 г., т.е. ко времени написания этой работы ему было больше 40 лет.

Лейбниц писал: «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаёшь удивляться всем новейшим открытиям геометров.»

Теперь мы обсудим математические сочинения Архимеда, оставляя в стороне очень важные для истории физики сочинения по механике и гидростатике.

2.16.2. «Метод»

Сочинение Архимеда «О механических теоремах. Метод, сообщённый Эратосфену» долгое время считалось утерянным. Лишь в 1906 году его обнаружил в Константинополе датский филолог Гейберг, подготовивший много изданий текстов древнегреческих математиков. Хронологически это не первое сочинение Архимеда, но именно в нём он рассказывает, как получил несколько своих важных результатов, которые затем строго доказал уже другими методами. Архимед не считал, что этот метод даёт строгое доказательство: «Рассмотрение при помощи этого метода ещё не является доказательством; однако получить при помощи этого метода некоторое предварительное представление об

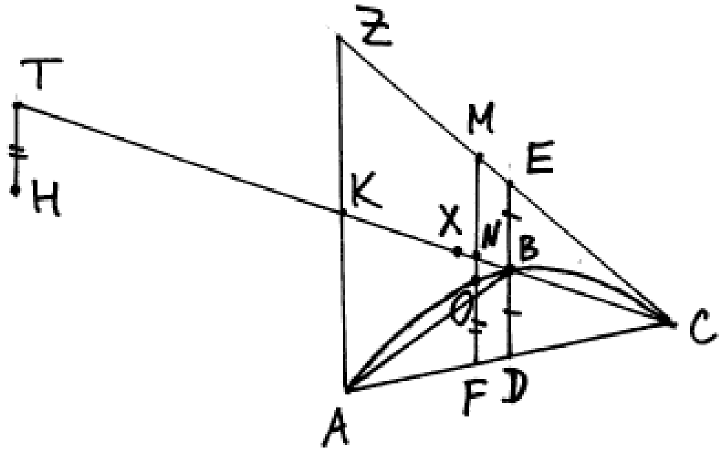

Рис. 2.45.

исследуемом, а затем найти и само доказательство, гораздо удобнее, чем производить изыскания, ничего не зная. Поэтому и относительно теорем о конусе и пирамиде, для которых Евдокс первый нашёл доказательство, а именно, что всякий конус составляет третью часть цилиндра, а пирамида — третью часть призмы с тем же самым основанием и равной высотой, немалую долю заслуги я уделяю и Демокриту, который первый высказал это положение относительно упомянутых фигур, хотя и без доказательства.»

Архимед рассказывает о нескольких теоремах, которые он открыл с помощью механического метода. Начинает он с той теоремы, которую открыл первой. В этой теореме вычисляется площадь сегмента параболы. Мы разберём эту теорему и ещё теоремы об объёме шара и о центре тяжести параболического сегмента.

Площадь сегмента параболы

Рассмотрим сегмент параболы, ограниченный прямой AC и параболой ABC (рис. 2.45). Через точку C проведём касательную к параболе, а через середину D отрезка AC проведём прямую, параллельную оси параболы. Эта прямая пересекает касательную в точке E, а параболу — в точке B. Архимед утверждает, что площадь сегмента параболы равна $\frac{4}{3}$ площади треугольника ABC.

Проведём через точку A прямую, параллельную оси параболы. Она пересекает прямые BC и EC в точках K и Z. На продолжении отрезка CK за точку K отложим отрезок KT, равный отрезку CK.

Представим, что отрезок CT — рычаг, который может вращаться вокруг точки K. Проведём через произвольную точку O параболы прямую, параллельную оси параболы. Эта прямая пересекает отрезки AC и ZC в точках F и M. Архимед доказывает, что отрезок TH, равный отрезку OF, уравновешивает отрезок FM. Для этого он замечает, что

$$FM : FO = AC : AF = KC : KN = KT : KN.$$

Равенство $FM : FO = AC : AF$ — это свойство параболы, известное во времена Архимеда. Его несложно проверить в координатах, а чтобы понять, как свойства такого рода доказывали древнегреческие математики, следует обратиться к параграфу об Аполлонии.

До этого места рассуждения были строгими. Затем Архимед говорит, что сегмент параболы составлен из отрезков, подобных OF, а треугольник AZC составлен из отрезков, подобных FM, поэтому сегмент параболы, подвешенный в точке T, уравновесит треугольник AZC. Это — ключевой момент во всех рассуждениях. И любой математик XVII или XVIII в. счёл бы такое доказательство вполне строгими. Но для Архимеда это лишь убедительный способ найти правильный ответ, который затем нужно строго обосновать.

Дальше уже всё просто. Частным случаем равенства $FM : FO = AC : AF$ является равенство $ED = 2BD$, т.е. $BD = BE$. Поэтому отрезок CK — медиана треугольника AZC, а значит, центр масс X треугольника AZC лежит на отрезке KC и делит его в отношении 1:2. Плечо KT рычага втрое больше плеча KX, поэтому вес треугольника AZC втрое больше веса сегмента параболы. А площадь треугольника ABC в 4 раза меньше площади треугольника AZC.

Объём шара

Архимед доказывает, что объём цилиндра, описанного вокруг шара, в $1\frac{1}{2}$ раза больше объёма шара. Для этого он рассматривает цилиндр, радиус основания которого вдвое больше радиуса шара, и конус, основанием которого служит основание нового цилиндра (на рис. 2.46 изображено осевое сечение этого конуса). Легко проверить, что

$$CD^2 + CE^2 = CA^2 + CE^2 = AE^2 = AC \cdot AB,$$

поэтому

$$(CD^2 + CE^2) : CF^2 = (AC \cdot AB) : AB^2 = AC : AB.$$

Это означает, что сумма площадей кругов с радиусами CD и CE относится к площади круга с радиусом CF как AC относится к AB. Поэтому если мы рассмотрим равноплечный рычаг TB с точкой опоры A, то круги с радиусами CD и CE, перемещённые в точку T, уравновесят круг с радиусом CF. Большой цилиндр состоит из таких кругов. Из этого можно сделать вывод, что шар и конус, подвешенные в точке T, уравновесят большой цилиндр (расположенный в исходном положении). Центр тяжести большого цилиндра находится в точке O — середине отрезка AB. Поэтому объём большого цилиндра в два раза больше суммы объёмов шара и конуса. Учитывая, что объём конуса равен $\frac{1}{3}$ объёма большого цилиндра, получаем требуемое.

Центр тяжести сегмента параболоида вращения

Архимед показывает, что центр тяжести K сегмента параболоида вращения, отсечённого плоскостью, перпендикулярной оси вращения, лежит на оси вращения и делит отрезок OB в отношении 2:1 (рис. 2.47). Для этого он вписывает в сегмент конус и пользуется тем, что $AC^2 : AD^2 = OB : OA$ (это свойство параболы было известно Архимеду). Рассмотрим равноплечный рычаг TB с точкой опоры O и подвесим круг радиуса AD в точке T. Этот круг уравновесит круг радиуса AC, находящийся на своём месте. Таким образом, конус, подвешенный в точке T, уравновесит параболический сегмент. Этот параболический сегмент весит в $\frac{3}{2}$ раза больше, чем конус, поэтому плечи OT и OK относятся как 3:2.

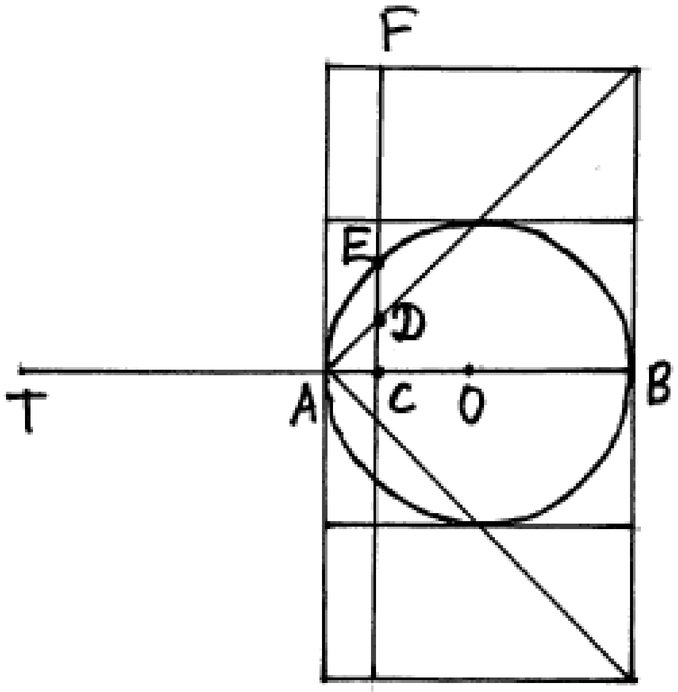

Рис. 2.46.

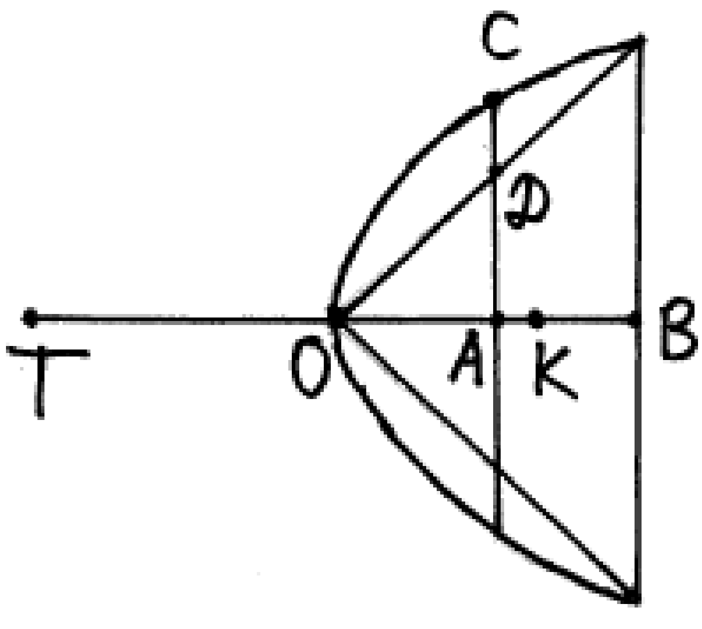

Рис. 2.47.

2.16.3. О шаре и цилиндре

Сочинение Архимеда «О шаре и цилиндре», состоящее из двух больших писем Досифею, занимает в математическом наследии Архимеда центральное место как по своему объёму, так и по разработанным там методам.

На своем надгробии Архимед завещал изобразить цилиндр и шар, вписанный в этот цилиндр. (По этому надгробию Цицерон впоследствии смог отыскать могилу Архимеда.) То, что Архимед высоко ценил теоремы, доказанные им в сочинении «О шаре и цилиндре», видно и из самого его письма Досифею:

«Конечно, эти свойства были и раньше по самой природе присущи упомянутым фигурам, но всё же они оставались неизвестными тем, кто до нас занимался геометрией, и никому из них не пришло на ум, что все эти фигуры являются соизмеримыми друг с другом; поэтому я не поколебался бы сравнить эти теоремы с теми, которые были открыты другими геометрами, и в частности с наиболее выдающимися теоремами, которые были установлены для тел Евдоксом, а именно, что всякая пирамида составляет третью часть призмы, имеющей с пирамидой одно и то же основание и одинаковую высоту, и что всякий конус составляет третью часть цилиндра, имеющего с конусом одно и то же основание и одинаковую высоту; действительно, хотя эти свойства по самой природе всегда были присущи указанным телам, но всё же оказалось, что они остались неизвестными многим жившим до Евдокса знаменитым геометрам и ни одному из них не пришли на ум. Теперь же их могут усмотреть все, имеющие к тому силы. Было бы очень хорошо, если бы они были обнародованы ещё при жизни Конона; он был, как мы считаем, наиболее способным продумать их и дать о них подходящий отзыв. Полагая, что было бы очень хорошо передать их сведущим в математике людям, мы посылаем тебе запись их доказательств; теперь их могут рассмотреть все занимающиеся математикой.»

Для вычисления площади поверхности и объёма шара Архимеду пришлось создавать новые методы, которые впоследствии привели к интегральному исчислению. Поэтому его доказательства, включающие и подготовительные теоремы для этих методов, весьма длинные.

Первое письмо

В первом письме Архимед доказывает следующие теоремы:

1) поверхность всякого шара в четыре раза больше его большого круга;

2) поверхность всякого шарового сегмента равна кругу, радиус которого равен [отрезку] прямой, проведённой из вершины сегмента к окружности круга, составляющего основание сегмента;

3) для всякого шара цилиндр, имеющий основанием большой круг этого шара, а высотой — прямую, равную диаметру шара, и сам [т. е. его объём] будет в полтора раза больше этого шара, и поверхность его тоже в полтора раза больше поверхности этого шара.

Для доказательства этих теорем недостаточно аксиом Евклида, и Архимед вводит дополнительные аксиомы и допущения. В этих аксиомах определяются, в частности, выпуклые кривые и выпуклые поверхности. Допущения (постулаты) Архимеда представляют большой интерес, поэтому перечислим их все.

1) Из всех линий, имеющих одни и те же концы, прямая будет наименьшей.

2) Если две кривые с общими концами, расположенные в одной плоскости, выпуклы в одну сторону и одна из них целиком охватывается другой, то первая будет меньше второй.

3) Из всех поверхностей, ограничиваемых одной и той же плоской кривой, наименьшей будет плоскость.

4) Аналог постулата 2 для поверхностей.

5) Если разность двух неравных линий, поверхностей или объёмов сложить саму с собой достаточное число раз, то она может превзойти любую заданную величину того же рода. Это — знаменитая *аксиома Архимеда*. Она тесно связана с аксиомой, которую применял Евдокс, и Архимед упоминает Евдокса как своего предшественника. Но неко-

торая разница есть. Напомним, что у Евклида аксиома Евдокса выступает в следующем виде: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они взятые кратно, могут превзойти друг друга.» Таким образом, у Евдокса меньшая величина, складываемая с собой, может превзойти бо́льшую, а у Архимеда меньшая величина заменяется на разность большей и меньшей. По-видимому, это видоизменение направлено против атомистики Демокрита, у которого разность двух площадей могла представлять линию, а разность объёмов — площадь.

Архимед даёт определение площади боковой поверхности цилиндра и конуса, рассматривая вписанные и описанные призмы и пирамиды. Затем он в обоих случаях находит круг, площадь которого равна площади боковой поверхности. В случае цилиндра (соответственно, конуса) радиус этого круга равен среднему геометрическому образующей конуса и диаметра (соответственно, радиуса) основания. Доказательство проводится методом исчерпывания.

Затем Архимед переходит к определению площади поверхности и объёма шара. Он вписывает в окружность правильный многоульник, число сторон которого делится на 4, и врашает его вокруг прямой, соединяющей две противоположные вершины. В результате в шар оказывается вписанной фигура, состоящая из двух конусов и нескольких усечённых конусов. Архимед рассматривает также аналогичную фигуру, описанную вокруг шара. Он вычисляет сумму площадей боковых поверхностей вписанных (соответственно, описанных) конусов и затем находит площадь поверхности шара. Чтобы найти объём, Архимед сначала доказывает, что сумма объёмов вписанных конусов меньше учетверённого объёма конуса с высотой r и основанием r (r — радиус сферы), а сумма объёмов описанных — больше, а затем пользуется тем, что объёмы вписанных конусов относятся к объёмам описанных как кубы их сторон.

Аналогично Архимед находит площадь поверхности и объём шарового сегмента. При этом он на геометрическом языке фактически вычисляет интеграл $\int_0^\alpha \sin\theta\, d\theta = 1 - \cos\alpha$.

Второе письмо

Во втором письме Архимед решает задачи, связанные с объёмом шара и шарового сегмента.

Для заданного конуса или цилиндра найти шар, равный по объёму этому конусу или цилиндру. Эта задача сводится к кубическому уравнению $x^3 = b^2c$, хорошо изученному древнегреческими математиками при решении задачи удвоения куба.

Разделить данный шар так, чтобы отношение объёмов его сегментов было заданным. Эта *задача Архимеда* приводит к кубическому уравнению $x^2(a - x) = b^2c$. Решением этой задачи занимались многие арабские математики. Та часть труда Архимеда, в которой разбиралось решение этого уравнения не сохранилась. Однако Евтокий нашёл рукопись, написанную на обычном для Архимеда дорийском диалекте, и потому приписал её Архимеду. В этой рукописи решение уравнения $x^2(a - x) = b^2c$ находится как пересечение параболы $x^2 = \frac{c^2}{a}y$ и равнобочной гиперболы $(a - x)y = ab$. Уравнение $x^2(a-x) = b^2c$ имеет решение, если максимум выражения $x^2(a-x)$ не превосходит b^2c. В рукописи доказывается, что максимум этого выражения достигается при $x = \frac{2}{3}a$. Доказательство основано на том, что если $bc^2 = \frac{4}{27}a^3$, то парабола и гипербола касаются в точке, для которой $x = \frac{2}{3}a$.

Завершается второе письмо Архимеда Досифею доказательством следующей теоремы: *Среди всех сферических сегментов, ограниченных равными поверхностями, наибольший объём имеет полушарие.*

2.16.4. Измерение круга

В этом сочинении Архимед сначала методом исчерпывания доказывает, что площадь круга равна площади треугольника, основанием которого является длина окружности, а высотой — радиус круга. Затем, вычисляя периметр вписанного 96-угольника, он показывает, что (говоря современным языком) число π меньше $3\frac{1}{7}$, а вычисляя периметр описанного 96-угольника, показывает, что оно больше $3\frac{10}{71}$. При этих вычислениях Архимед считает известным, что

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

2.16.5. О коноидах и сфероидах

Прямоугольными коноидами Архимед называл параболоиды вращения, а тупоугольными коноидами — полости двуполостных гиперболоидов вращения. Сфероидами он называл эллипсоиды вращения. Архимед вычисляет объём сфероида и объём сегмента коноида, отсечённого произвольной плоскостью.

Сначала Архимед доказывает, что объём сегмента параболоида вращения, отсечённого плоскостью, перпендикулярной оси вращения, в полтора раза больше объёма конуса с тем же основанием и той же высотой. Для этого он разрезает сегмент на n слоёв одинаковой толщины (рис. 2.48). Эти слои позволяют построить набор цилиндров, содержащих сегмент, и набор цилиндров, содержащихся в сегменте. Объём первого набора равен $A + 2A + 3A + \dots + nA$, а второго $A+2A+3A+\dots+(n-1)A$ (здесь A — объём наименьшего цилиндра). Архимед применяет доказанные им в начале сочинения неравенства

$$2(A + 2A + 3A + \dots + nA) > n^2A > 2(A + 2A + 3A + \dots + (n-1)A).$$

После этого остаётся лишь заметить, что разность между объёмом первого набора и второго равна объёму наибольшего цилинда (и он стремится к нулю при $n \to \infty$), а объём конуса, с которым сравнивается сегмент, равен $\frac{1}{3}n^2A$.

Переход от сечения, перпендикулярного оси, к произвольному сечению уже чисто геометрический, хотя и далеко не тривильный. Архимед доказывает, что все сечение параболоида вращения параллельными плоскостями являются эллипсами, подобными друг другу. После этого уже можно повторить предыдущие рассуждения без особого труда.

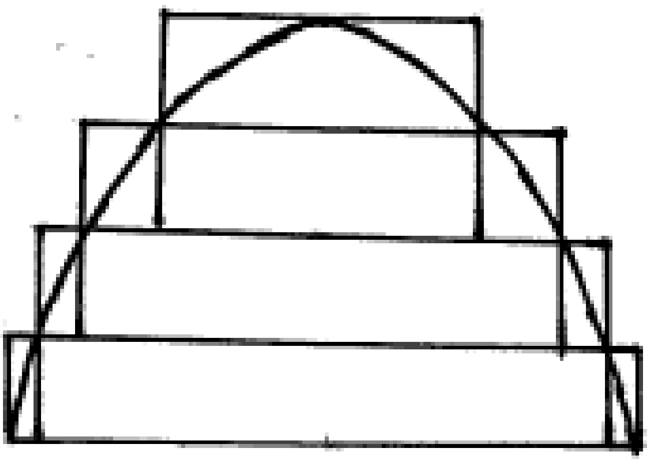

Рис. 2.48.

Для гиперболоидов и эллипсоидов вращения рассуждения Архимеда аналогичные, но вычисления теперь более сложные. Для параболоидов вращения понадобились оценки суммы $\sum_{k=1}^{n} k$. Теперь же помимо этих оценок нужны ещё оценки суммы $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Действительно, уравнения элиипса и гиперболы можно записать в виде $x^2 = b^2 \mp a^2y^2$. Нас интересуют сечения прямыми $y = y_0 + kh$, и объёмы цилиндров с одинаковыми высотами пропорциональны квадратам абсцис. Чтобы получить оценки для сумм объёмов этих цилиндров, нужно получить оценки для сумм $\sum_{k=1}^{n} k$ и $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Для второй суммы Архимед использует доказанные им оценки

$$3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 < n^3 < 3\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

2.16.6. О спиралях

Архимед даёт кинематическое определение спирали. Пусть луч равномерно вращается вокруг точки O, а по этому лучу равномерно движется точка X; тогда точка X движется по кривой, которую впоследствии назвали *спиралью Архимеда*.

К углам не могла применяться теория отношений (пропорций), потому что она применялась только к величинам, которые могли быть сколь угодно велики, а у греков угол не мог быть больше двух прямых.

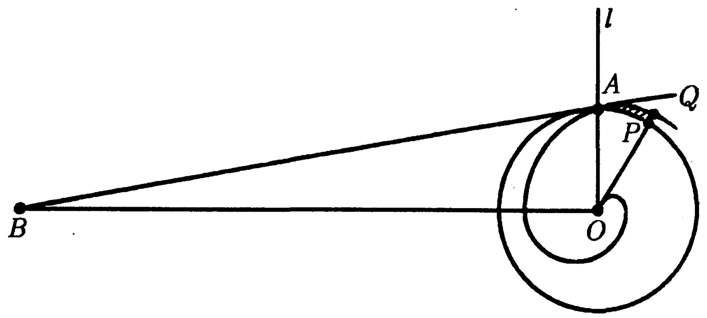

Рис. 2.49.

Архимед даёт кинематическое определение спирали, поскольку он не может говорить о пропорциональности радиус-векторов и углов. Но из этого определения он извлекает всё, что ему нужно, как если бы он использовал эту пропорциональность. Например, Архимед доказывает следующее: «Если к спирали, описанной в течение одного какого-нибудь оборота, провести из начала спирали несколько прямых, образующих друг с другом равные углы, то эти прямые будут превышать друг друга на равные величины.»

Архимед решает две задачи: построение касательной к спирали и вычисление площади между двумя последовательными витками спирали или внутри первого витка.

Касательную к спирали Архимед применил для решения задачи квадратуры круга. Рассмотрим один виток спирали, т. е. часть спирали, которую проходит точка X при повороте луча на $360°$. Пусть l — начальное положение луча (оно же совпадает с конечным положением); A — точка X в конечном положении; B — точка пересечения касательной к спирали в точке A и перпендикуляра к лучу l, восставленного из точки O. Теорема, доказанная Архимедом, заключается в том, что длина отрезка OB равна длине окружности с радиусом OA (рис. 2.49).

Доказать это утверждение можно следующим образом. Пусть P — точка окружности S радиуса OA с центром O, близкая к точке A; Q — точка пересечения луча OP и спирали. По свойству спирали $\overset{\frown}{AP} : PQ = L : R$, где L — длина окружности S, R — радиус

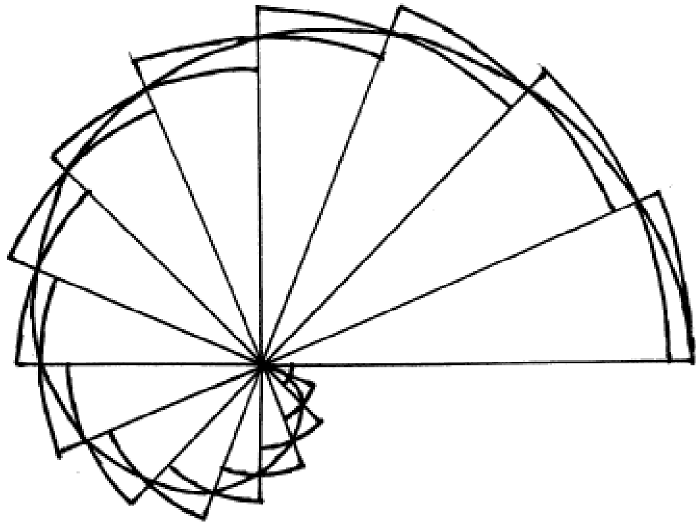

Рис. 2.50.

этой окружности. Значит, если точка P стремится к A, то отношение $AP : PQ$ стремится к $L : R = 2\pi$. При этом направления сторон AP и PQ треугольника APQ стремятся к направлениям отрезков BO и AO соответственно. Следовательно, направление отрезка AQ стремится к направлению гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны прямым BO и AO и их отношение равно 2π. Поэтому $BO : AO = 2\pi$, так как направление касательной в точке A есть предельное направление отрезка AQ.

Сам Архимед даёт, конечно же, более строгое доказательство. Оно проводится методом от противного с использованием некоторых неравенств.

Для вычисления площади фигуры, ограниченной витком спирали, Архимед рассматривает секторы круга, дающие оценку сверху и оценку снизу (рис. 2.50). И всё снова, как и в сочинении о коноидах и сфероидах, сводится к оценке суммы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Но теперь Архимед даёт точную формулу для этой суммы и выводит из неё нужные оценки.

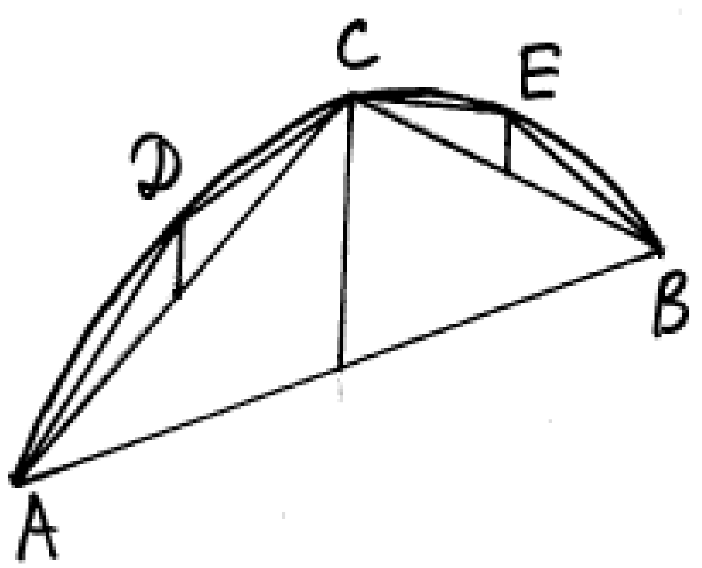

Рис. 2.51.

2.16.7. Квадратура параболы

В этом сочинении Архимед приводит два вывода доказанной им теоремы о площади произвольного сегмента параболы. Эта теорема сформулирована и доказана на с. 138. Первое доказательство такое же, как приведённое выше, только теперь Архимед делает его строгим, используя метод исчерпывания. Второе доказательство геометрическое. Архимед проводит через середину отрезка AB прямую, параллельную оси параболы; эта прямая пересекает параболу в точке C (рис. 2.51). Аналогично строятся точки D и E. Архимед доказывает, что площадь каждого из треугольников ADC и BEC равна $\frac{1}{8}$ площади треугольника ABC. Такие же треугольники можно строить и дальше. Поэтому квадратура параболы, говоря современным языком, сводится к нахождению суммы бесконечной геометрической прогрессии $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{4}{3}$. Архимед фактически это и делает, не говоря, конечно, о сумме бесконечного ряда.

2.16.8. Книга лемм

В наследии Архимеда «Книга лемм», сохранившаяся только в арабском переводе, занимает далеко не центральное место. Но в отношении гео-

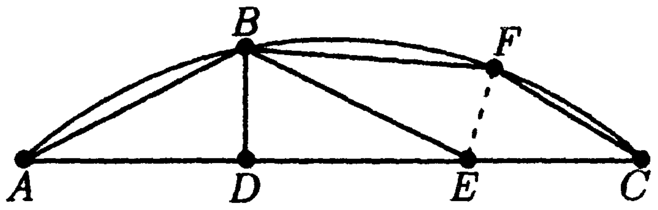

Рис. 2.52.

метрических задач — это одна из наиболее интересных книг за всю историю математики. В этой книге содержится 15 лемм. Мы приведём некоторые из них, указывая их номера.

III. *Хорда AC отсекает от круга сегмент. На ограничивающей этот сегмент дуге окружности взяты точки B и F так, что $AB = BF$. Из точки B опущен перпендикуляр BD на хорду AC и на AC взята точка E так, что $AD = DE$ (рис. 2.52). Тогда $CE = CF$.*

Доказательство. Четырёхугольник $CFBA$ вписанный, поэтому

$$\angle BAC + \angle BFC = 180^\circ.$$

А так как

$$\angle BEA + \angle BEC = 180^\circ \quad \text{и} \quad \angle BEA = \angle BAC,$$

то $\angle BFC = \angle BEC$. Но треугольник EBF равнобедренный, поэтому треугольник ECF тоже равнобедренный.

IV. *На отрезке AC взята точка D и на отрезках AC, AD и CD как на диаметрах построены полуокружности (рис. 2.53). Заштрихованную фигуру Архимед назвал «арбелон»[4]. Восставим из точки D перпендикуляр BD. Тогда площадь арбелона равна площади круга с диаметром BD.*

Доказательство. Пусть $AD = a$ и $CD = b$. Тогда площадь арбелона равна

$$\frac{1}{2}\left[\pi(a+b)^2 - \pi a^2 - \pi b^2\right] = \pi ab.$$

[4] $\alpha\rho\beta\eta\lambda o\nu$ — скребок, скорняжный нож.

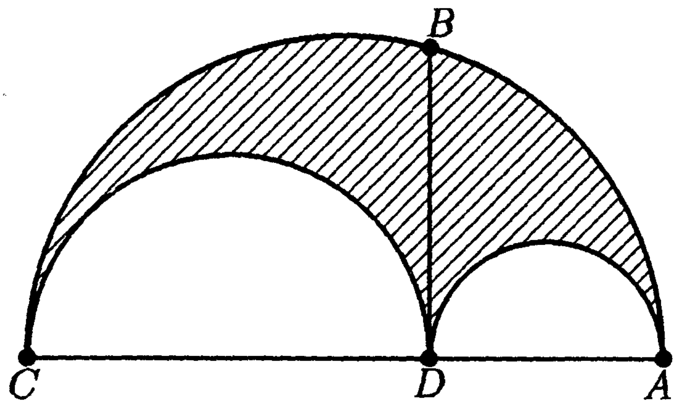

Рис. 2.53.

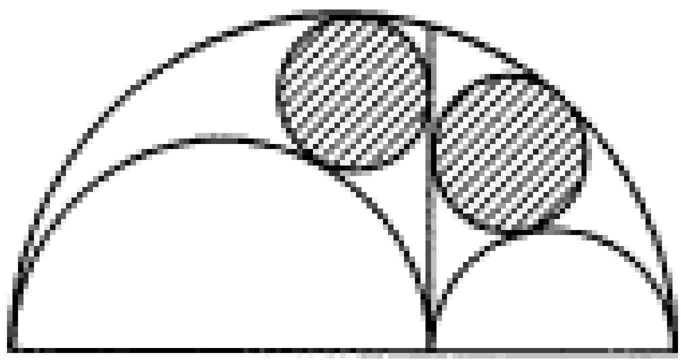

Рис. 2.54.

Кроме того, $BD^2 = ab$. (Архимед все эти рассуждения проводит на языке геометрии.)

V. *Круги, вписанные в левую и правую части арбелона, равны (рис. 2.54).*

Доказательство. Нам потребуется более подробный чертёж (рис. 2.55). Точки касания F и G служат центрами подобия окружностей. Поэтому, например, точки F, H и B лежат на одной прямой и точки H, G и A лежат на одной прямой. Пусть I — точка пересечения прямой AH и большой полуокружности. Тогда точки B, I, D лежат на одной прямой. Это следует из теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке: в самом деле, в треугольнике ADB отрезки BF и DC являются высотами, поэтому AI тоже высота.

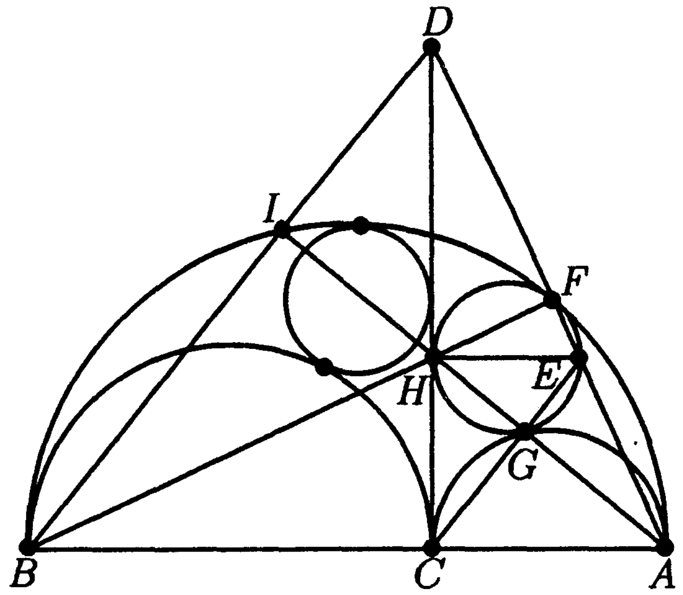

Рис. 2.55.

Итак, $\angle BIA = \angle CGA = 90°$, поэтому $BD \parallel CE$. Следовательно,

$$AC : HE = AD : DE = AB : BC,$$

т. е.

$$HE = \frac{AC \cdot BC}{AB}.$$

Для диаметра второй окружности получаем точно такое же выражение.

2.16.9. Теорема о ломаной, вписанной в круг

Теорема Архимеда о ломаной, вписанной в круг, сохранилась, в частности, в передаче арабского математика аль-Бируни (973—1050 гг. н. э.).

Пусть D — середина дуги AC, B — некоторая точка этой дуги (рис. 2.56). Тогда основание E перпендикуляра, опущенного из точки D на ломаную ABC, делит длину этой ломаной пополам.

В арабских переводах сочинений Архимеда сохранилось несколько доказательств этой теоремы. Одно из доказательств следующее. Отложим от точки D дугу DH, равную дуге BD, а от точки E отложим

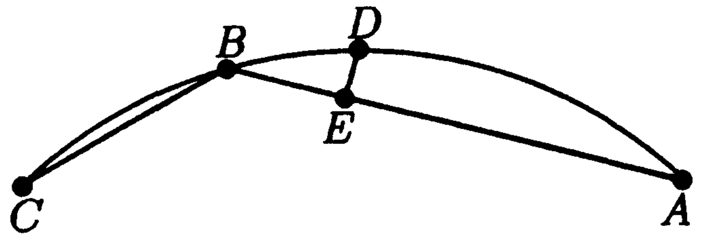

Рис. 2.56.

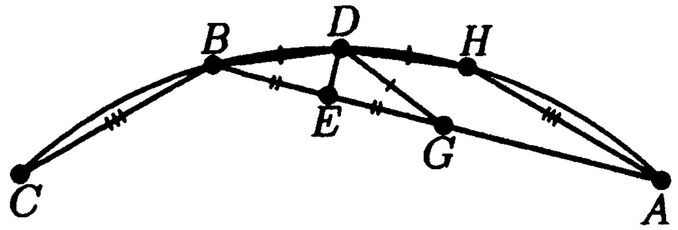

Рис. 2.57.

отрезок EG, равный отрезку BE (рис. 2.57). Тогда

$$\angle HDA + \angle DAB = \angle DBA = \angle DGB,$$

$$\angle GAD + \angle GDA = \angle DGB,$$

поэтому $\angle GDA = \angle HDA$. Но в таком случае из равенства $DH = DG$ следует равенство $AH = AG$ т. е. $BC = AG$.

2.16.10. Формула Герона

По недоразумению формулу, которую Архимед доказал за несколько веков до Герона, называют *формулой Герона.* Дело в том, что эта формула стала известна европейским математикам из сочинений Герона. Лишь в конце прошлого века из нескольких арабских рукописей выяснилось, что эта формула была известна уже Архимеду. Доказательство Архимеда опирается на предыдущую «теорему о ломаной, вписанной в круг». (Герон приводит совсем другое доказательство.)

При доказательстве теоремы о ломаной, вписанной в круг, было показано, что треугольники AMD и CBD равны (рис. 2.58), поэтому площадь треугольника ADC равна площади пятиугольника $AMDBC$,

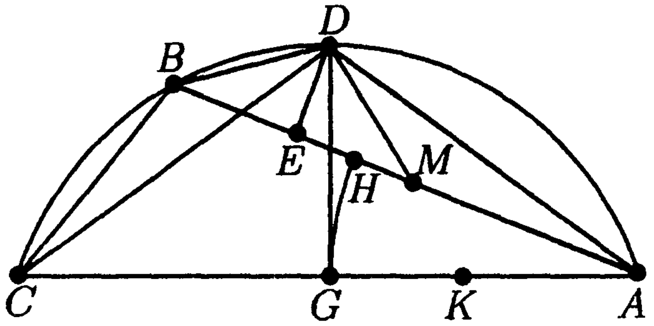

Рис. 2.58.

а площадь этого пятиугольника равна сумме площадей треугольников ABC и BDM. Таким образом, площадь треугольника ABC равна разности площадей треугольников ADC и BDM, т. е. она равна

$$DG \cdot GA - DE \cdot EB.$$

Равнобедренные треугольники ADC и BDM подобны, так как углы DBA и DCA опираются на одну и ту же дугу. Поэтому

$$\frac{DG^2 - DE^2}{DG \cdot GA - DE \cdot EB} = \frac{DG \cdot GA - DE \cdot EB}{GA^2 - EB^2}.$$

Действительно, это равенство имеет вид

$$\frac{x^2 - y^2}{x(kx) - y(ky)} = \frac{x(kx) - y(ky)}{(kx)^2 - (ky)^2}.$$

Для вычисления разности $DG^2 - DE^2$ можно воспользоваться тем, что

$$DG^2 + AG^2 = AD^2 = DE^2 + EA^2$$

и

$$EA^2 = AH^2 + 2AH \cdot EH + EH^2 = AG^2 + 2AH \cdot EH + EH^2.$$

В результате получим

$$DG^2 - DE^2 = EH(EH + 2AH).$$

Несложно показать, что $EH = p - b$ и $EH + 2AH = p$ (здесь p — полупериметр, $b = AC$).

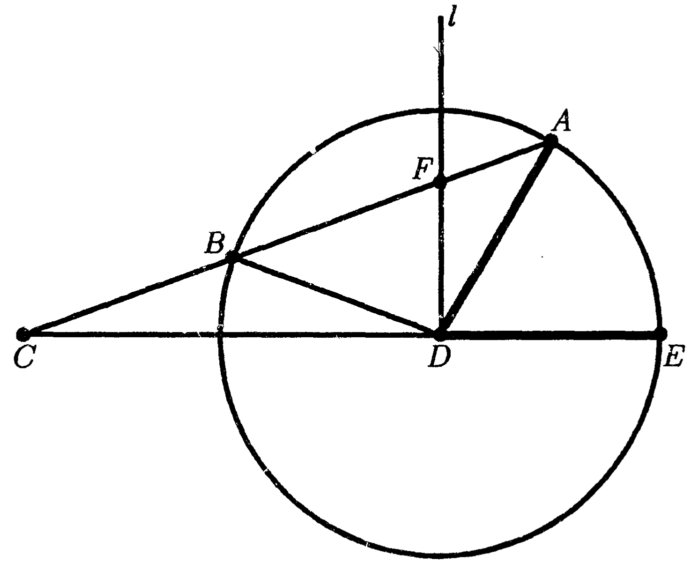

Рис. 2.59.

Для вычисления разности $GA^2 - EB^2$ Архимед строит на отрезке AG вспомогательную точку K так, что $BE = GK$. Тогда

$$GA^2 - GK^2 = KA^2 + 2KA \cdot GK = KA(KA + 2GK).$$

Несложно показать, что $KA = p - c$ и $KA + 2GK = p - a$.

2.16.11. Трисекция угла

Архимед предложил одно из решений задачи трисекции угла способом «вставок». В его решении нужно вставить отрезок данной длины между прямой и окружностью. Рассмотрим угол ADE; можно считать, что D — центр окружности, а точки A и E лежат на окружности. Проведём через точку A прямую так, чтобы окружность и прямая DE высекали на ней отрезок BC, длина которого равна радиусу окружности (рис. 2.59). Тогда $\angle BDC = \angle ADE/3$. В самом деле, $\angle ADE = \angle ACD + \angle CAD$, а так как треугольники CBD и ADB равнобедренные, то $\angle BCD = \angle BDC$ и $\angle ABD = \angle BAD$, поэтому $\angle ACD + \angle CAD = \angle BDC + 2\angle BDC = 3\angle BDC$.

Для трисекции угла способом Архимеда удобно использовать линейку с двумя делениями, расстояние между которыми равно радиусу окружности. Можно слегка изменить способ Архимеда и использовать для трисекции угла линейку с двумя делениями, расстояние между которыми равно не радиусу, а диаметру окружности. Рассмотрим для этого прямоугольный треугольник CDF, гипотенуза CF которого лежит на прямой CA (см. рис. 2.59). Точка B является серединой гипотенузы CF, поэтому $CF = 2CB = 2DE$. Значит, для трисекции угла ADE нужно восставить из точки D перпендикуляр l к прямой DE и вставить между прямыми DC и l отрезок CF длиной $2DE$ так, чтобы прямая CF проходила через точку A.

2.16.12. Построение правильного семиугольника

Архимедово построение правильного семиугольника сохранилось только на арабском языке, в передаче аль-Бируни. Архимед строит треугольник со сторонами x, y и z, заштрихованный на рис. 2.60. На этом рисунке легко выделить три подобных треугольника, у каждого из которых один угол равен α, а другой 2α. Из подобия этих треугольников получаем $z : x = x : (y + z)$ и $z : (x + y) = y : z$, т.е. $z(y + z) = x^2$ и $y(x + y) = z^2$. Считая заданной величину $y + z = a$, получаем систему уравнений $a(a - y) = x^2$ и $(x + y)y = (a - y)^2$. Эти уравнения задают два конических сечения, и мы находим искомое решение как пересечение двух конических сечений. (Циркулем и линейкой построить правильный семиугольник нельзя.)

2.16.13. Исчисление песка

В сочинении «Исчисление песка» Архимед разработал способ обозначения больших чисел и показал, что этим способом можно записать число песчинок, заполняющих всё мировое пространство (которое, по мнению Архимеда, было очень большим, но ограниченным). Это сочинение интересно также сообщениями Архимеда об астрономических представлениях того времени.

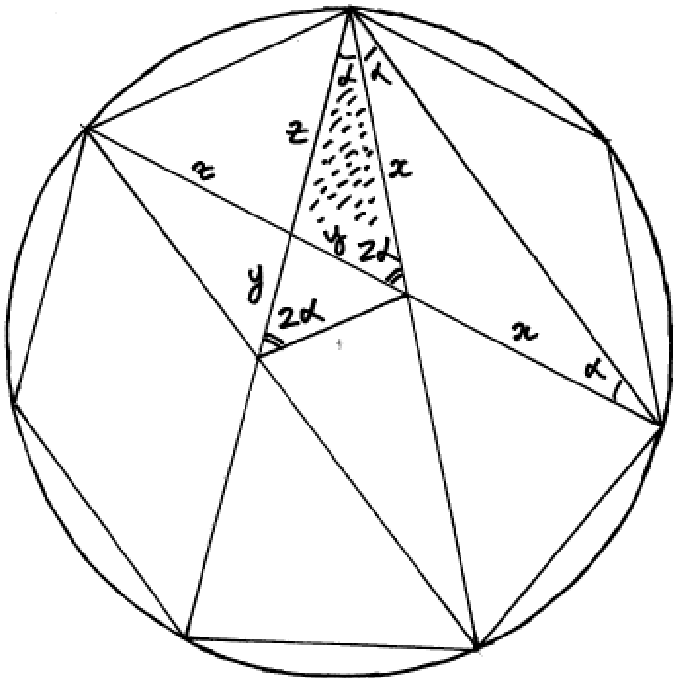

Рис. 2.60.

2.16.14. Полуправильные многогранники

Сочинение Архимеда о полуправильных многогранниках не сохранилось. О нём сообщает Папп в пятой книге своего «Математического собрания».

2.17. Никомед (280-210 до н.э.)

Мы уже неоднократно упоминали, что весьма распространённым способом решения задач на построение в Древней Греции был способ «вставок» (neusis). Он заключался в том, что через данную точку O проводилась прямая, на которой две данные прямые l_1 и l_2 (или, например, прямая и окружность) высекали отрезок данной длины (рис. 2.61), т. е. между данными прямыми вставлялся отрезок данной длины, продолжение которого проходило через данную точку. Задачу построения такого отрезка нельзя решить с помощью циркуля и линейки, но для её решения можно, вообще говоря, использовать линейку с двумя делениями, расстояние между которыми равно длине данного отрезка. Так некоторые древнегреческие математики и делали, но, судя по все-

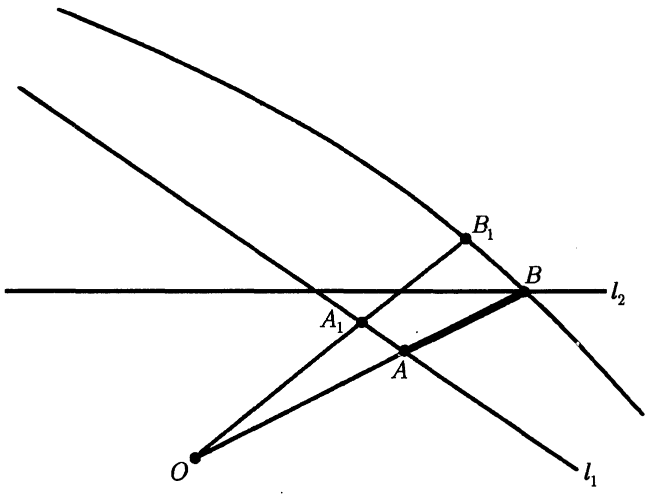

Рис. 2.61.

му, к построениям с помощью линейки с двумя делениями в Древней Греции относились неодобрительно.

Для построений, использующих «вставки», Никомед предложил специальную кривую — конхоиду. Эта кривая строится следующим образом. Будем вращать вокруг точки O прямую. Пусть A_1 — точка пересечения этой прямой с прямой l_1, а B_1 — такая её точка, что отрезок A_1B_1 имеет данную длину (см. рис. 2.61). Кривую, которую заметает при этом точка B_1, и называют *конхоидой*. Точка B пересечения конхоиды и прямой l_2 задаёт искомую прямую OB.

Никомед изготовил также инструмент для вычерчивания конхоид. Этот инструмент состоял из неподвижной Т-образной рамы с прямолинейной прорезью и шипом A и из подвижной рейки с прорезью и шипом B (рис. 2.62). Шип A жёстко закреплён на раме, а шип B — на рейке. Диаметр шипов равен ширине прорезей. Заострённый конец рейки при движении, направляемом шипами и прорезями, описывает конхоиду (точнее говоря, часть конхоиды). Способ «вставок» даёт возможность производить построения, которые нельзя выполнить с помощью циркуля и линейки. Он, например, легко позволяет разделить любой угол на три равные части (см. с. 67); при этом можно даже ограничиться случаем, когда прямые l_1 и l_2, между которыми нужно вставить данный отрезок, перпендикулярны. Задачу удвоения куба с

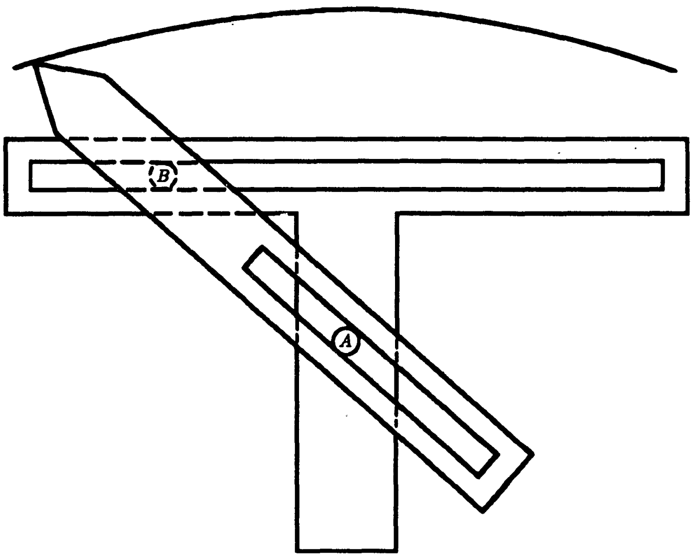

Рис. 2.62.

помощью способа «вставок» решить тоже можно, но это решение существенно сложнее трисекции угла, и прямые l_1 и l_2 уже нельзя считать перпендикулярными (точнее говоря, чтобы решить задачу удвоения куба посредством вставления некоторого отрезка между перпендикулярными прямыми, придётся дополнительно произвести сложные построения с помощью циркуля и линейки). Весьма простое построение для решения задачи удвоения куба нашёл Никомед, но его доказательство того, что это построение действительно даёт нужный отрезок, слишком длинное и сложное, а главное, из доказательства совсем не видно, как это решение можно было придумать. Поэтому мы начнём с того, что постараемся понять, каким образом способ «вставок» можно применить к решению задачи удвоения куба.

Пусть даны прямые l_1 и l_2, точка F и отрезок длиной r. Попробуем выяснить, как должны быть расположены эти прямые и точка и каким должно быть число r, чтобы длина x отрезка CK оказалась равной $\sqrt[3]{a^2b}$, где a и b — данные отрезки (рис. 2.63). Опустим из точки F перпендикуляр FE на прямую l_2 и проведём через точку F прямую FG, параллельную прямой l_1 (G — точка прямой l_2). Чтобы задать расположение прямых l_1 и l_2 и точки F, достаточно задать числа $s = FC$, $u = EC$ и $w = GE$. Числа s, u, w и r нужно подобрать так,

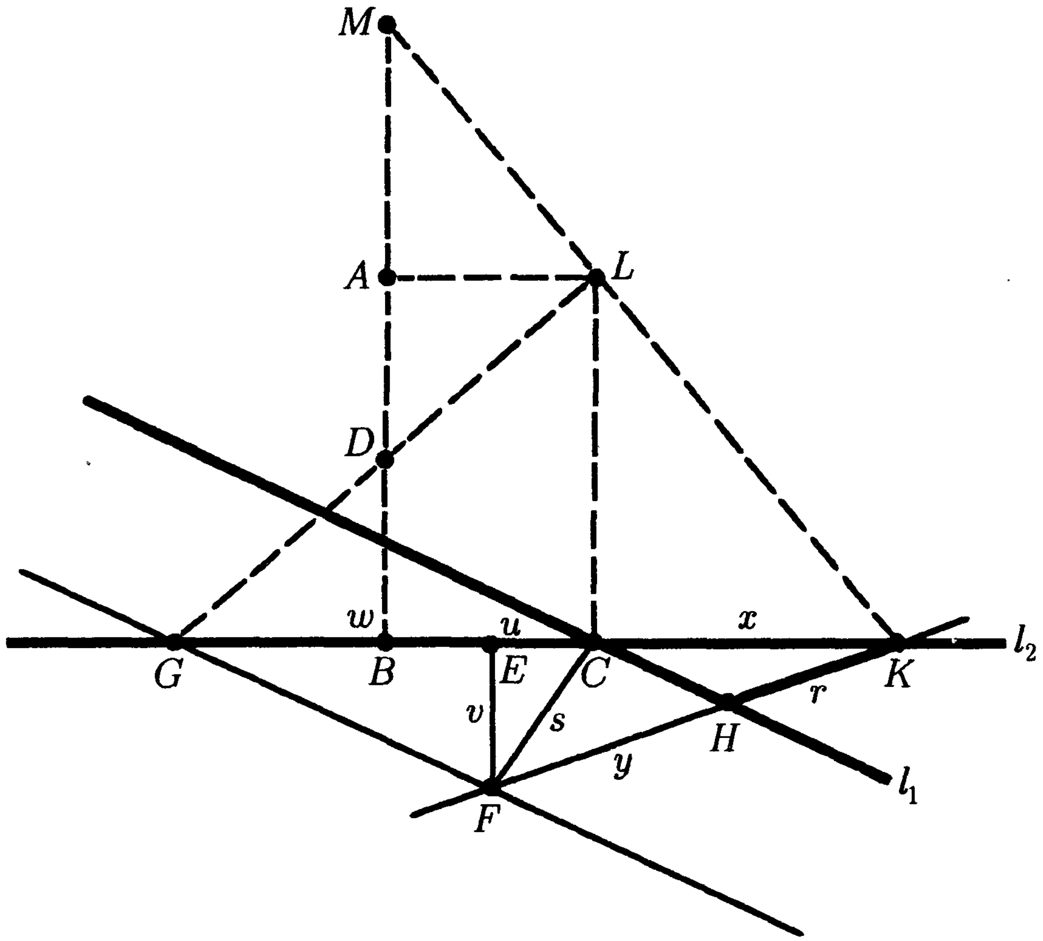

Рис. 2.63.

чтобы получилось $x = \sqrt[3]{a^2b}$ и отрезки с длинами s, u, w и r легко строились бы с помощью отрезков a и b.

Ясно, что $y = \frac{r(u+w)}{x} = \frac{r(u+w)x^2}{x^3} = cx^2$, где $c = \frac{r(u+w)}{x^3} = \frac{r(u+w)}{a^2b}$. А так как

$$(x+u)^2 + (s^2 - u^2) = KE^2 + EF^2 = FK^2 = (r+y)^2 = (r+cx^2)^2,$$

то

$$x^2 + 2xu + s^2 = r^2 + 2rcx^2 + c^2x^3x = r^2 + 2rcx^2 + c^2a^2bx.$$

Вполне естественно приравнять коэффициенты при x^2, x и x^0. В результате получаем $2rc = 1$, $2u = c^2a^2b$ и $r = s$. Следовательно, $2u = c^2a^2b = \frac{a^2b}{4r^2}$, т. е. $8ur^2 = ba^2$. Кроме того,

$$u + w = \frac{xy}{r} = \frac{x(cx^2)}{(2rc)r} = \frac{cx^3}{2r^2c} = \frac{a^2b}{2r^2} = 4u,$$

т. е. $w = 3u$. Итак, числа u и r должны удовлетворять соотношению $8ur^2 = ba^2$, а числа s и w задаются равенствами $s = r$ и $w = 3u$. Пожалуй, наиболее естественно положить $u = \frac{b}{2}$ и $r = \frac{a}{2}$. Так Никомед и сделал, хотя мы и не можем с уверенностью сказать, что ход его поисков был таким же, как у нас. Но едва ли Никомед смог бы найти это решение, если бы искал его наобум.

Построение Никомеда изображено пунктиром на рис. 2.63. Построим прямоугольник $ABCL$ со сторонами $AB = a$ и $BC = b$. Пусть D и E — середины сторон AB и BC, G — точка пересечения прямых DL и BC. Построим точку F так, что $FE \perp BC$ и $CF = AD$, а затем через точку C проведём прямую l_1, параллельную прямой GF. Если теперь провести через точку F прямую так, что $HK = CF = AD$, то $CK = \sqrt[3]{AB^2 \cdot BC}$ и, как легко проверить, $AM = \sqrt[3]{AB \cdot BC^2}$, где M — точка пересечения прямых AB и KL.

Мы не будем воспроизводить доказательство Никомеда, а воспользуемся снова обозначениями рис. 2.63. Подставляя наши значения чисел u, w, s и r в равенства $xy = r(u+w)$ и $x^2+2xu+s^2 = y^2+2ry+r^2$, получаем $xy = ab$ и $x(x+b) = y(y+a)$. Следовательно,

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b} = \frac{a+y}{x+b} \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} = \frac{y+a}{x+b} = \frac{a}{x} = \frac{y}{b}.$$

Никомед в качестве искомых отрезков указал отрезки CK и MA; он, по-видимому, не заметил, что $MA = FH$. Своим решением Никомед очень гордился и считал, что оно гораздо лучше построения Эратосфена, которое он высмеивал как непрактичное и негеометрическое.

Легко проверить, что конхоида задаётся уравнением четвертой степени. В самом деле, из рис. 2.64 видно, что $\sqrt{x^2+y^2} : y = r : (y-a)$, т. е. $(x^2+y^2)(y-a)^2 - r^2y^2 = 0$.

Папп Александрийский показал, что «вставление» отрезка между прямыми можно свести к нахождению точки пересечения окружности и гиперболы.

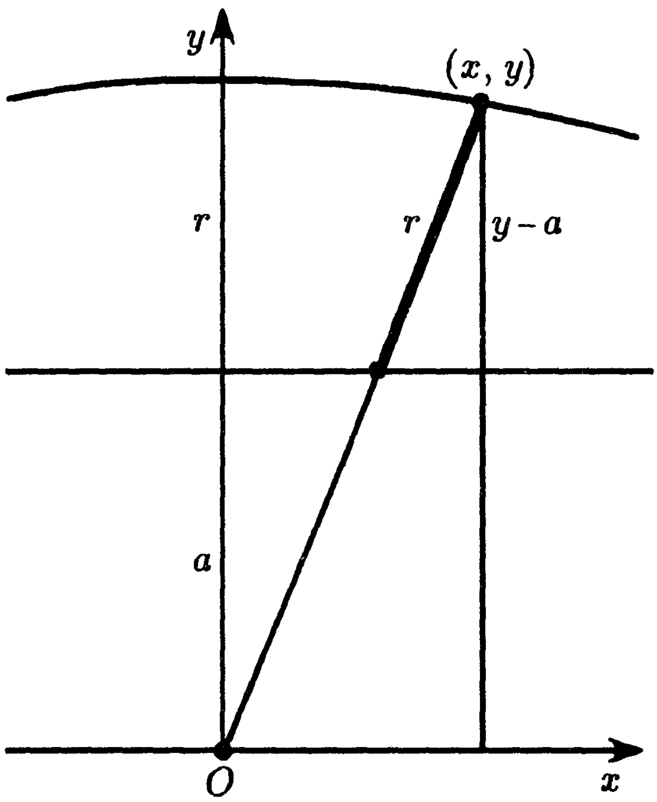

Рис. 2.64.

2.18. Эратосфен Киренский (276-194 до н. э.)

Круг интересов Эратосфена, современника Архимеда, был очень широк. Он более точно, чем его предшественники, измерил длину земного меридиана. Широко известен его способ нахождения простых чисел — *решето Эратосфена*. (Этот способ заключается в следующем. Сначала к простым числам мы относим 2 и вычёркиваем все числа, делящиеся на 2. Затем берём наименьшее из оставшихся чисел; его мы тоже относим к простым и вычёркиваем все числа, делящиеся на него, и т.д.) Но ни в одной из многочисленных областей своих интересов он не достиг первенства, за что и получил два прозвания: Бета (вторая буква греческого алфавита должна была намекать на то, что Эратосфен во всём второй) и Пятиборец.

Измерение земного меридина Эратосфен произвёл следующим образом. Расстояние от Александрии до Сиены, расположенной почти точно к югу от Александрии, он принял равным 5000 стадиям. Во время летнего солнцестояния в Сиене Солнце стоит в зените, т.е. вертикально установленный гномон не отбрасывает тени, а в Александрии Солнце отклоняется от зенита на 1/50 долю четырёх прямых углов. Из этого Эратосфен вывёл, что окружность Земли равна $50 \times 5000 = 250\,000$ стадий.

Эратосфену также принадлежит одно из решений задачи удвоения куба. Это решение использует инструмент, состоящий из трёх равных прямоугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$, противоположные стороны которых могут перемещаться по двум параллельным прямым, и на этих прямоугольниках нарисованы их диагонали A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 (рис. 2.65). Пусть расстояние между прямыми равно данному отрезку a, а на стороне B_3C_3 взята точка M так, что отрезок C_3M равен данному отрезку b. Диагонали A_2C_2 и A_3C_3 пересекают стороны B_1C_1 и B_2C_2 в точках K и L соответственно. Прямоугольники можно сдвинуть так, чтобы точки A_1, K, L и M оказались на одной прямой. Фиксируем для этого прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ и будем двигать прямоугольник $A_2B_2C_2D_2$ так, чтобы точка K прошла путь от точки B_1 до точки C_1. Для каждого положения прямоугольника $A_2B_2C_2D_2$ найдется такое положение прямоугольника $A_3B_3C_3D_3$, что точка L лежит на прямой A_1K. Пусть прямая, на которой лежат точки A_1, K и L, пересекает сторону B_3C_3 в точке M'. Ясно, что если точка K пробегает весь отрезок B_1C_1, то точка M' пробегает весь отрезок B_3C_3, а значит, в некоторый момент она совпадает с точкой M. Когда прямоугольники приведены в нужное положение, трапеции $A_1KC_1D_1$, KLC_2C_1 и LMC_3C_2 подобны (трапеции, у которых соответственно параллельны стороны и одна из пар диагоналей, подобны), поэтому $a : x = x : y = y : b$, где $x = KC_1$ и $y = LC_2$.

Если вы возьмёте три прямоугольника, нарисуете на них диагонали и попробуете осуществить построение Эратосфена, то увидите, что его метод не очень удобен — хлопотно проверять, что точки A_1, K, L и M лежат на одной прямой. Но Эратосфен своим решением очень гордился. Он даже сочинил эпиграмму:

Если из малого куба двойной замышляешь устроить,

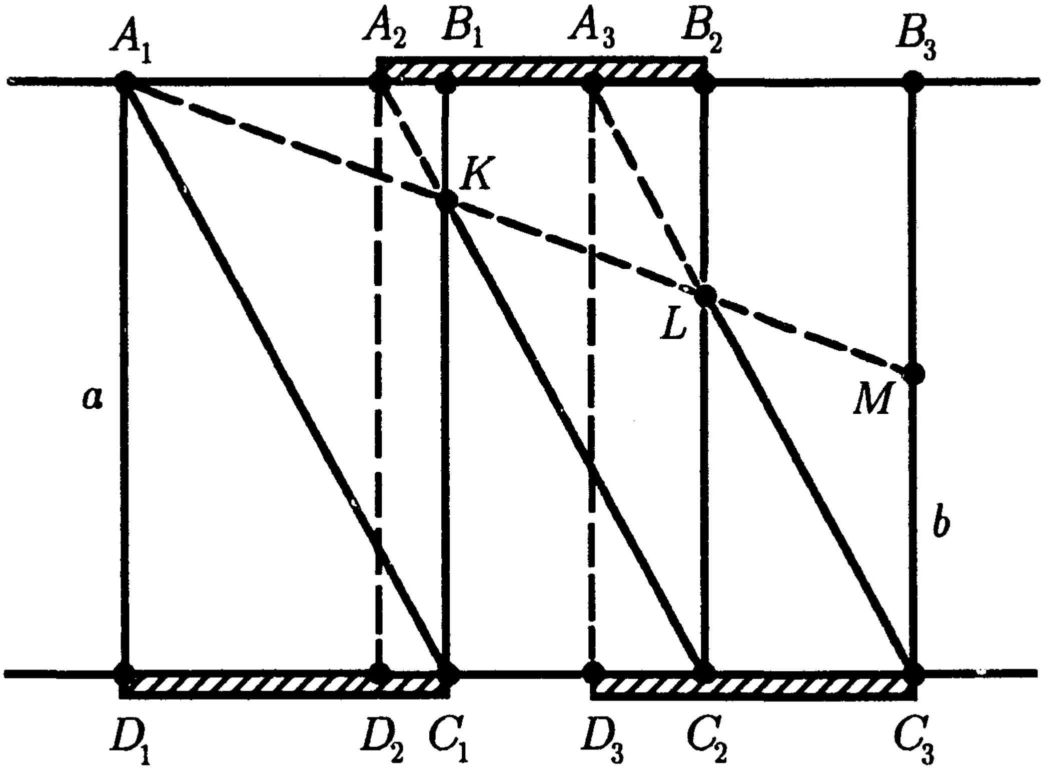

Рис. 2.65.

Друг, или данный объём к форме другой привести,
Чтоб хорошо удалось тебе это, вздумал ли погреб
Ты измерять, или ров, или широкую пасть
Глуби колодца, возьми на смежных концами пластинках
Средние линии две, сжатые между таблиц.
Не прибегай для этого ты к тяжёлым цилиндрам Архита,
Конуса ты не секи, корня Менехма триад;
Также не надо держать с богоравным Евдоксом совета,
Выгнутых линий его формы не надо чертить.
С этими ж ты табличками тысячи средних построишь,
Двигайся смело вперед, с меньших из данных начав.

. . .

Пусть же свершится всё это, и каждый смотрящий пусть скажет:
«Это Кирены сын выдумал Эратосфен».

2.19. Аполлоний Пергский (262-190 до н.э.)

Ещё юношей Аполлоний приехал в Александрию и учился там у учеников Евклида. Он был не только великим математиком, но и великим астрономом. Наиболее знаменитое сочинение Аполлония посвящено коническим сечениям. Конические сечения открыл Менехм; им были посвящены не сохранившиеся до нашего времени сочинения Аристея и Евклида. Архимед в своих сочинениях свободно использует многие свойства конических сечений, по-видимому, опираясь на трактат Евклида.

До Аполлония эллипсы, параболы и гиперболы получались как сечения плоскостью, перпендикулярной к одной из образующих, остроугольного, прямоугольного и тупоугольного конусов. Аполлоний же детально разработал теорию сечений конуса произвольными плоскостями. Кроме того, он первым стал рассматривать две ветви гиперболы как одну кривую. Это позволило единообразно сформулировать некоторые свойства элипса и гиперболы.

Интресно, что в обширном трактате Аполлония не встречаются директрисы. (У Паппа директрисы уже есть: он доказывает, что если даны точка и прямая, то множество точек, для которых отношение расстояния до данной точки к расстоянию до данной прямой имеет заданное значение, является коническим сечением.)

2.19.1. Книга I

Первая книга содержит способ получения конических сечений и их симптомы (т.е. уравнения в прямоугольных и косоугольных координатах). Здесь же Аполлоний вводит «противолежащие конические сечения», т.е. вторые ветви гипербол.

Аполлоний начинает с определения кругового конуса общего вида (не прямого, а наклонного). Конус задаётся окружностью (ограничивающей основание конуса) и точкой, не лежащей в плоскости основания: через точку проводятся прямые, соединяющие её с точками окружности. Таким образом, конус у Аполлония бесконечен в обе стороны.

Затем Аполлоний определяет диаметр коники как прямую, делящую пополам каждую из всех хорд, имеющих заданное направление. Сами эти параллельные хорды он называет *ординатами.*[5] Сопряжённые диаметры — это два диаметра, каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому. Ось — это диаметр, делящий пополам перпендикулярные ему хорды.

Осью (наклонного) конуса Аполлоний называет прямую, соединяющую его вершину с центром его основания. Он доказывает, что все сечения плоскостями, параллельными плоскости основания, являются окружностями, и что есть ещё одно семейство параллельных сечений, являющихся окружностями. Затем Аполлоний изучает произвольные сечения конуса. И в этом уже очень существенное обобщение по сравнению с его предшественниками, рассматривавшими лишь такие сечения конуса, для которых конус и секущая плоскость имели общую плоскость симметрии. Аполлоний очень просто получает симптом конического сечения в этом общем случае. Пусть плоскость пересекает основание конуса с вершиной S по некоторому отрезку. Проведём диаметр PQ основания, перпендикулярный этому отрезку, и через этот диаметр и вершину конуса проведём плоскость (рис. 2.66). Эта плоскость пересекает коническое сечение в точках A и B. Через произвольную точку X конического сечения проведём плоскость, параллельную плоскости основания. Она пересечёт конус по некоторой окружности. Плоскость SPQ пересекает эту окружность по диаметру CD, параллельному PQ. Секущая плоскость пересекает новую окружность по отрезку XX', перпендикулярному CD, поэтому середина E отрезка XX' лежит на CD. При этом $XE^2 = CE \cdot ED$. Проведём через вершину конуса прямую, параллельную AB. Она пересекает прямую PQ в некоторой точке F. Из подобия треугольников получаем: $\frac{EC}{EB} = \frac{FP}{FS}$

[5]Конечно, слово «ордината» не греческое, а латинское. Имеется в виду не термин самого Аполлония, а последующий перевод этого термина на латинский язык. Но вошедший во все языки термин «ордината» берёт начало именно отсюда.

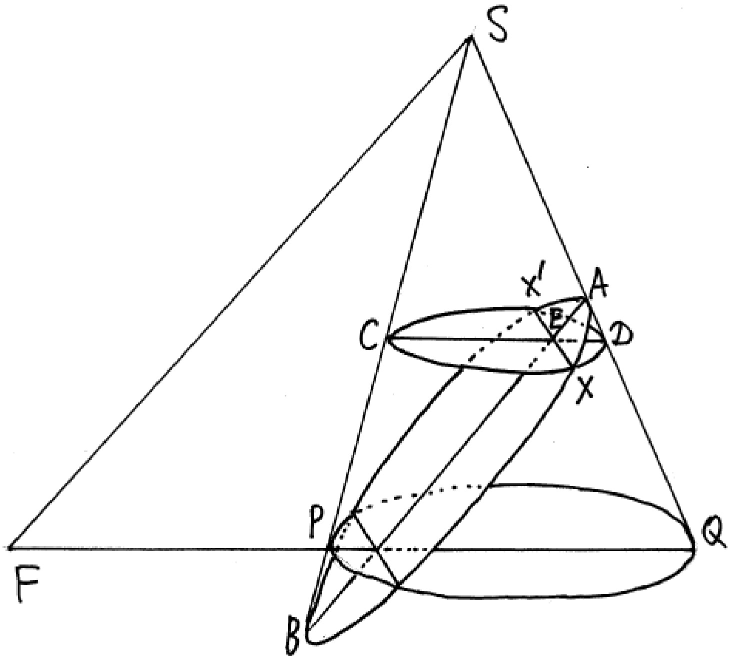

Рис. 2.66.

и $\frac{ED}{EA} = \frac{FQ}{FS}$, следовательно,

$$\frac{XE^2}{EA \cdot EB} = \frac{EC \cdot ED}{EA \cdot EB} = \frac{FP \cdot FQ}{FS^2} = \alpha.$$

Это и есть искомый симптом: если обозначить длину отрезка EX через y, а длины отрезков AE и BE через x и x_1 (рис. 2.67), то симптом записывается в виде $y^2 = \alpha x x_1$. Симтомы такого же вида получали и до Аполлония, но в частном случае, когда хорда XX' перпендикулярна диаметру AB, делящему её пополам. Другими словами, до Аполлония симптом получали только в прямоугольной системе координат, а Аполлоний получил симптом и в косоугольной системе координат.

Отрезки AE и BE называли *абсциссами* от латинского abscissus — отрезанный. Терминология и общая схема системы координат здесь видны отчётливо. Но это не была система координат в современном понимании. Прежде всего, она применялась только к вполне конкретной задаче и не могла быть отделена от конических сечений. Древнегреческие геометры не пытались даже записать уравнение прямой[6] в

[6] У Апполония было утверждение, которое можно рассматривать как запись уравнения прямой в некоторой системе координат, но оно было получено как частный случай общей задачи, не имеющей отношения к системе координат.

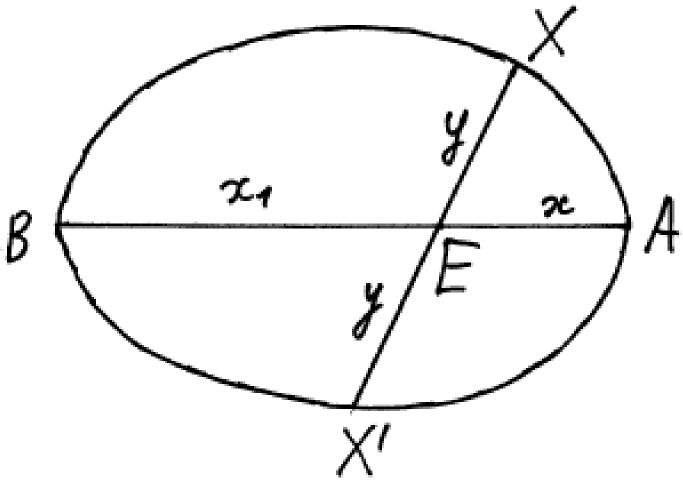

Рис. 2.67.

координатах, а уж про представление кривых степени выше двух не могло быть и речи.

Аполлоний приводит симптом эллипса к новому виду, воспользовавшись тем, что $x + x_1 = a$, где $a = AB$ — постоянный отрезок. Таким образом, $y^2 = \alpha x(a - x) = x(p - \alpha x)$. Аналогично для гиперболы получаем $y^2 = x(p + \alpha x)$, а для параболы $y^2 = px$. Для эллипса прямоугольник $x \times (p - \alpha x)$ отличается от прямоугольника $x \times p$ недостатком $x \times \alpha x$, для гиперболы прямоугольник $x \times (p + \alpha x)$ отличается от прямоугольника $x \times p$ избытком $x \times \alpha x$. Названия парабола, эллипс и гипербола произошли от греческих слов «приложение», «недостаток» и «избыток». Здесь имеется в виду приложение одного прямоугольника к другому: точное приложение, приложение с недостатком и приложение с избытком.

В этой книге Аполлоний вводит также центр конического сечения и сопряжённые диаметры.

2.19.2. Книга II

Вторая книга рассматривает диаметры, главные оси, асимптоты и необходимое для так называемых *диоризмов* — т.е. выяснения, когда какое-либо построение возможно или нет. Аполлоний показывает, что относительно асимптот гипербола задаётся уравнением $xy = \text{const}$.

2.19.3. Книга III

В предисловии к «Коническим сечениям» Аполлоний говорит, что предложения книги III могут быть использованы для окончательного решения задачи о геометрических местах к трём или четырём прямым, для которой у Евклида нет полного решения. Речь идёт о следующей задаче: определить геометрическое место точек, расстояния x, y, z и t от которых до четырёх данных прямых удовлетворяют соотношению $xy = \alpha zt$ (если две последние прямые совпадают, то получается геометрическое место к трём прямым). Впоследствии эта задача послужила Ферма и Декарту стимулом для введения системы координат на плоскости. Аполлоний не приводит решения этой задачи, но предложений книги III действительно для этого вполне достаточно.

В третьей книге Аполлоний разрабатывает теорию полюсов и поляр.

2.19.4. Книга IV

В четвёртой книге изучается, во скольких точках конические сечения могут пересекать друг друга или окружность. Здесь новое по сравнению с предшественниками — рассмотрение двух ветвей гиперболы.

2.19.5. Книга V

В пятой книге рассматривается задача о том, как из данной точки провести наибольший или наименьший отрезок к коническому сечению. Аполлоний находит все нормали к конике, проходящие через данную точку, и выясняет, при каком положении точки задача имеет два, три или четыре решения. Аполлоний берёт точку на главной оси коники, проводит через эту точку перпендикуляр к оси и находит на этом перпендикуляре точку, при переходе через которую число нормалей меняется с двух на четыре. Эти рассуждения фактически позволяют описать эволюту коники (т.е. огибающую семейства нормалей).

2.19.6. Книга VI

В шестой книге рассматривается равенство и подобие конических сечений.

2.19.7. Книги VII и VIII

В седьмой книге рассматривались предложения, необходимые для диоризмов, а в восьмой (до нашего времени не сохранившейся) — задачи, к которым относятся эти диоризмы. В седьмой книге Аполлоний, в частности, доказывает, что для эллипса сумма квадратов двух сопряжённых диаметров равна сумме квадратов главных осей, и что площадь параллелограмма, двумя сторонами которого служат половины сопряжённых диаметров, равна площади прямоугольника, двумя сторонами которого служат половины главных осей. Знаменитый английский астроном Эдмунд Галлей попытался восстановить утерянную восьмую книгу трактата Аполлония.

2.19.8. Другие сочинения Аполлония

Многие сочинения Аполлония не сохранились, и о них известно только из упоминаний о них в других трактатах древнегреческих геометров, в основном, в геометрическом «Собрании» Паппа. Там, в частности, упоминается о знаменитой задаче Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей, и о трактате, в котором Аполлоний исследовал, какие вставки можно выполнить с помощью конических сечений, а какие нельзя. Папп довольно подробно рассказывает о сочинении Аполлония «О плоских геометрических местах» в двух книгах (плоские геометрические места — это прямые и окружности). В первой книге Аполлоний рассматривает некоторый класс преобразований, переводящих окружности и прямые в окружности и прямые, в частности, он рассматривает инверсию относительно точки. Аполлоний приводит также утверждение, эквивалентное тому, что уравнение $x + ay = c$ задаёт прямую (точнее говоря, часть прямой, потому что все числа рассматриваются как отрезки, т.е. они положительны). Но это утверждение нельзя рассматривать как вывод уравнения прямой в системе координат. Аполлония интересует совсем другое. Пусть дано n прямых и n отрезков $a_1, \ldots, a_n$ и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — расстояния от точки до данных прямых, тогда геометрическое место точек, для которых $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_nx_n$, представляет собой прямую. (Папп приводит формулировку утверждения Аполлония только при $n = 3$ и говорит, что для нескольких прямых всё аналогично.) Во второй книге содержалась теорема об *окружности Аполлония*: геометрическое место точек X, для которых $AX : XB = \text{const}$ — окружность. (Это утверждение встречается в сочинении Аристотеля «Метеорологика», но нет уверенности, что это не позднейшая вставка.) Там же содержадась теорема о том, что геометрические места точек, для которых $AX^2 = a^2 + mBX^2$ или $\alpha AX^2 + \beta BX^2 + \gamma CX^2 + \cdots = \text{const}$, — окружности.

В предисловии к так называемой книге XIV «Начал» Евклида (принадлежащей Гипсиклу) говорится, что Аполлоний написал трактат о сравнении икосаэдра и додекаэдра, вписанных в одну сферу. Там он доказал, что площади поверхностей этих многогранников относятся как их объёмы. Доказательство было основано на том, что расстояния от центра сферы до граней икосаэдра и додекаэдра равны, т.е. многограники описаны вокруг одной и той же сферы.

2.20. Зенодор (ок. 200-140 до н. э.)

Зенодор написал трактат «Об изопериметрических фигурах», не сохранившийся до нашего времени. О содержании этого трактата сообщают Теон Александрийский и Папп. Зенодор доказал, что из всех многоугольников с заданным числом сторон и заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный многоугольник. Он доказал также, что площадь круга больше, чем площадь любого многоугольника с тем же периметром; это доказательство использует теорему Архимеда о том, что площадь круга равна половине площади прямоугольника, смежные стороны которого — периметр круга и его радиус. Зенодор занимался и стереометрическими задачами. Он утверждал, что сфера имеет наибольшую площадь среди всех фигур, ограничивающих заданный объём, но доказал это только в том случае, когда фигура — правильный многогранник.

2.21. Гипсикл Александрийский (ок. 190-120 до н. э.)

Гипсикл написал небольшое сочинение о правильных многогранниках, который обычно включают в современные издания «Начал» Евклида в качестве книги XIV. В этом сочинении Гипсикл сравнивает поверхности и объёмы додекаэдра и икосаэдра, вписанных в один и тот же шар. На эту тему написал сочинение Аполлоний, которое обсуждали отец Гипсикла со своим другом и решили, что доказательства Аполлония неудовлетворительны. Они нашли свои доказательства, и Гипсикл излагает эти доказательства. Вслед за Аполлонием он доказывает, что если додекаэдр и икосаэдр вписаны в один и тот же шар, то расстояние от центра шара до грани икосаэдра равно расстоянию от центра шара до грани додекаэдра, и выводит из этого, что отношение объёма додекаэдра к объёму икосаэдра равно отношению поверхности додекаэдра к поверхности икосаэдра.

Гипсикл также дал общее определение многоугольных чисел. Мы начинаем с 1 и увеличиваем слагаемые на общую разность. Если общая разность равна 1, то получаем треугольные числа, если общая разность равна 2, то получаем квадратные числа, если общая разность равна 3, то получаем пятиугольные числа. Например, третье пятиугольное число равно $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 3)$. В современных обозначениях n-е m-угольное число равно $\frac{n[2+(n-1)(m-2)]}{2}$.

2.22. Герон Александрийский (ок. 10-75)

Герон очень много писал о различных областях математики и физики; его сохранившиеся до нашего времени сочинения занимают 5 томов.

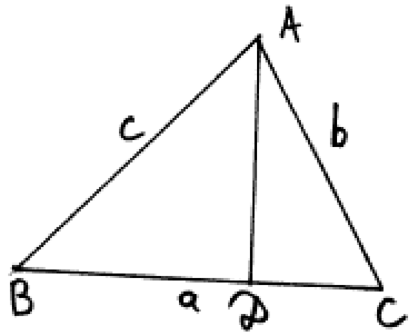

Рис. 2.68.

Практические вопросы интересовали его гораздо больше, чем теоретические. Его основные трактаты по математике — «Метрика» и «Диоптра».

В книге I трактата «Метрика» обсуждаются площади треугольников, четырёхугольников, правильных многоугольников, эллипса, сегмента параболы, а также площади поверхности пространственных фигур (цилиндра, конуса, сферы и сектора сферы). В предисловии говорится, что впервые геометрия возникла из практических потребностей измерения и распределения земли (откуда и происходит её название), а уже потом возникла потребность измерения пространственных фигур. Именно в книге I доказана *формула Герона*. Как мы уже упоминали (см. с. 154) эта формула была доказана Архимедом задолго до Герона, но доказательство Герона отличается от доказательства Архимеда. Герон приводит два способа вычисления площади треугольника, стороны которого известны. Первый из них непосредственно основан на предложениях II, 12 и 13 Евклида (см. с. 118). С помощью этих предложений можно вычислить отрезки BD и CD, где AD — высота треугольника ABC (рис. 2.68). Действительно, $c^2 = a^2 + b^2 \mp 2a \cdot CD$, поэтому $CD = \pm\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. Затем по теореме Пифагора можно вычислить высоту $AD = \sqrt{b^2 - CD^2}$ и, наконец, площадь треугольника. В качестве примеров Герон приводит остроугольный треугольник со сторонами 14, 15 и 13 и тупоугольный треугольник со сторонами 11, 13 и 20. Высота в обоих случаях равна 12 (эти треугольники составлены из пифогоровых треугольников, рис. 2.69).

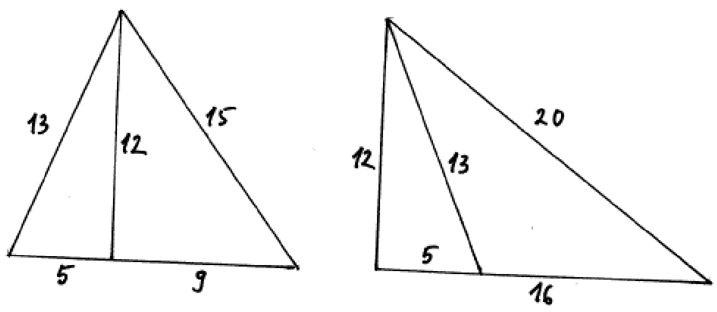

Рис. 2.69.

Второй способ вычисления площади треугольника, стороны которого известны, — это и есть собственно формула Герона: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, где p — полупериметр. Герон приводит доказательство этой формулы не только в книге «Метрика», но и в книге «Диоптра». Его доказательство такое. Впишем в треугольник ABC окружность с центром H, которая касается его сторон AB, BC и AC в точках D, E и F (рис. 2.70). Площадь S треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AHB, BHC и CHA, поэтому $S = pr$, где p — полупериметр треугольника ABC, r — радиус вписанной в него окружности. Отложим на луче CB точку G так, что $CG = p$. Тогда $BG = AD$. В результате получаем $S^2 = (pr)^2 = CG^2 \cdot EH^2$. Рассмотрим теперь точку L, в которой пересекаются перпендикуляры, восставленные в точках B и H к прямым BC и HC соответственно. Точки B и H лежат на окружности с диаметром CL, поэтому

$$\angle CHB + \angle CLB = 180^\circ. \qquad (1)$$

Выделим теперь пары равных углов: BHE и BHD, CHE и CHF, AHD и AHF. Сумма всех этих углов равна 360°, поэтому

$$\angle CHB + \angle AHD = 180^\circ. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) легко видеть, что углы AHD и CLB равны. Следовательно, прямоугольные треугольники AHD и CLB подобны. Поэтому $BC : BL = AD : DH = BG : HE$, а значит, $BC : BG = BL : HE$.

Из подобия треугольников BLK и EHK получаем $BL : HE = BK : KE$. Из двух последних пропорций следует, что $BC : BG =$

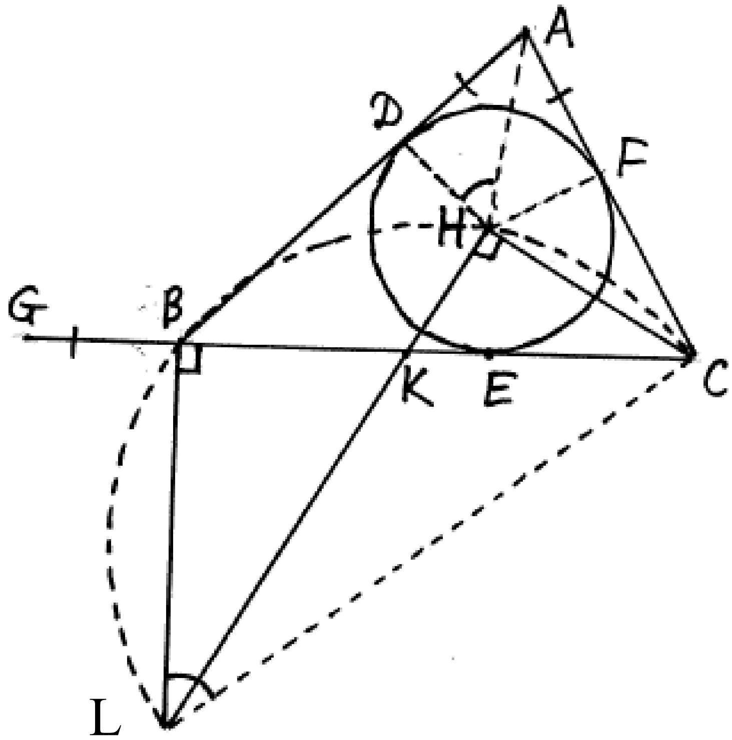

Рис. 2.70.

$BK : KE$, или $(BC+BG) : BG = (BK+KE) : KE$, т.е. $CG : BG = BE : KE$. Поэтому

$$\frac{CG^2}{CG \cdot BG} = \frac{BE \cdot EC}{KE \cdot EC},$$

или

$$CG^2 = \frac{(BE \cdot EC)(CG \cdot BG)}{KE \cdot EC}.$$

Треугольник KCH прямоугольный, поэтому $KE \cdot EC = HE^2$. В итоге получаем $S^2 = CG^2 \cdot HE^2 = CG \cdot BG \cdot BE \cdot EC = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Современнику Герона трудно было понять смысл соотношения $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. В то время геометры знали, что произведение двух отрезков — это площадь, произведение трёх отрезков — объём. А что же такое произведение четырёх отрезков? И даже в гораздо более позднюю эпоху Папп Александрийский неодобрительно писал, что некоторые авторы позволяют себе говорить о прямоугольнике, умноженном на прямоугольник, не объясняя толком, что же они под этим понимают.

Герон рассматривал и другие задачи, недопустимые с точки зрения многих его современников: он допускал сложение неоднородных величин, например площади и периметра, а такого разработанная Евдоксом и Евклидом теория не допускала. У Герона встречается, например, такая задача: «Дан квадрат, сумма площади и периметра которого равна 896; отделить площадь от периметра.»

Герон, конечно, понимал, что оба его способа вычисления площади треугольника с заданными сторонами эквивалентны. Но ему не удалось вывести формулу Герона непосредственно из формулы для длины отрезка CH. Не удалось это и Архимеду. Это является ярким свидетельством того, сколь неудобна и громоздка была геометрическая алгебра. Первым такой вывод формулы Герона получил Ньютон и привёл его в книге «Всеобщая арифметика». К тому времени более удобная техника алгебраических преобразований заменила геометрическую алгебру, что и позволило получить такое доказательство.

В связи с вычислением площади треугольника со сторонами 7, 8, 9 (она равна $\sqrt{720}$) Герон приводит следующее правило приближённого вычисления квадратных корней из натуральных чисел. Пусть a^2 — ближайший квадрат к целому числу A. В качестве первого приближения к $\sqrt{A}$ берём $a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$, в качестве второго $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$, и т.д.

Для круга Герон использует приближение Архимеда для числа π, т.е. $\frac{22}{7}$. Он считает, что длина окружности равна $\frac{44}{7}r$, а площадь круга равна $\frac{11}{14}d^2$, где r — радиус, а d — диаметр круга. Герон пишет, что древние использовали для площади сегмента круга приближение $\frac{1}{2}(b+h)h$, где b — основание сегмента, h — его высота. Это, по его мнению, соответствует приближённому значению 3 для числа π, поскольку для полукруга тогда получается точная формула. Те же, кто исследовал площади более тщательно, добавляли к этой формуле $\frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}b^2\right)$, т.е. использовали формулу $\frac{1}{2}(b+h)h + \frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}b^2\right)$, которая даёт для площади полукруга точное значение, если считать, что $\pi = \frac{22}{7}$.

В книге II обсуждаются объёмы различных трёхмерных тел: усечённой пирамиды, конуса, сферы, сегмента сферы. Герон рассматривает и другие тела, например, тор. Он вычисляет также объёмы правильных многогранников.

Книга III посвящена делению площадей и объёмов в данном отношении. В этой книге Герон приводит также способ вычисления кубических корней.

Трактат «Диоптра» начинается с подробного описания прибора для измерения углов и определения направлений, который как раз и назывался *диоптра*. Сам трактат посвящён измерению высот и расстояний и другим измерениям. В «Диоптре» Герон рассказывает, в частности, о задаче восстановления границ земельных участков, размытых при разливе Нила.

В трактате «Механика» Герон доказывает, что скорости складываются по правилу параллелограмма.

Среди многочисленных комментариев Герона к «Началам» Евклида интересны те новые доказательства, которые позволяют избегать применение метода от противного.

2.23. Менелай Александрийский (70-130)

Из многочисленных книг астронома и математика Менелая сохранилась (в арабском переводе) только «Сферика». В этой книге рассматриваются сферические треугольники и их приложения в астрономии. Менелай первым дал определение сферического треугольника как фигуры, ограниченной дугами бо́льших окружностей. Для сферических треугольников Менелай доказывает теорему, аналог которой для треугольников на плоскости впоследствии стали называть *теоремой Менелая*. (Для треугольников на плоскости эта теорема, по-видимому, была известна до Менелая.) Менелай доказывает, что для сферического треугольника существуют вписанная окружность и описанная окружность.

Менелай избегал доказательств от противного. Евклид доказал предложение I, 25 (если стороны AB и AC треугольника ABC фиксированы, то сторона BC возрастает при возрастании угла A) методом от противного. Менелай предложил прямое доказательство этого предложения.

2.24. Клавдий Птолемей (85-165)

Самая знаменитая книга Птолемея — «Математическое собрание», вскоре получившая название «Величайшее собрание»; это название было переведено на арабский язык, и книга стала называться «Альмагест». В этой книге дано подробное описание движения Солнца, Луны и планет с помощью так называемых эпициклов, т.е. комбинаций движений по окружности. Эта книга оставалась непревзойдённой до появления гелиоцентрической теории Коперника.

В Древней Греции тригонометрические методы были основаны на сопоставлении каждому центральному углу длины хорды, на которую он опирается. Эта функция тесно связана с синусом: для окружности радиуса 1 длина хорды равна удвоенному синусу половинного угла. Для длины хорды Птолемей вывел формулы, аналогичные формулам для синуса суммы и разности двух углов и для синуса половинного угла. Для вывода формулы синуса суммы и разности двух углов Птолемей использовал теорему о вписанном четырёхугольнике (так называемую *теорему Птолемея*), которая была известна ещё Архимеду.

Для составления таблицы хорд Птолемей вычислил сторону правильного пятиугольника и сторону правильного десятиугольника, т.е. фактически он вычислил $\sin 36^\circ$ и $\sin 18^\circ$.

Птолемею не были известны тригонометрические формулы, справедливые для любых треугольников. При работе с остроугольными или тупоугольными треугольниками он разбивал их на прямоугольные. Но ему были знакомы тригонометрические формулы не только для прямоугольного треугольника на плоскости, но и для сферического прямоугольного треугольника.

Птолемей рассматривал стереографическую проекцию и доказал, что при стереографической проекции сохраняются углы.

2.25. Диофант Александрийский (200-284)

Наиболее важное сочинение Диофанта — «Арифметика» в тринадцати книгах, из которых сохранились лишь шесть. «Арифметика» — это сборник, состоящий из 189 тщательно подобранных задач, снабжённых решениями. Эти задачи иллюстрируют определённые методы, которые не формулируются в общем виде, но вполне ясны из решения однотипных задач.

Сохранился также фрагмент трактата Диофанта «О многоугольных числах».

Диофант допускает не только целые, но и рациональные решения; иррациональные и отрицательные решения он исключает. Ситуации, когда из меньшего числа вычитается большее, Диофант исключает. Но в промежуточных выкладках Диофант использует отрицательные числа; он даже сформулировал правило знаков для умножения положительных и отрицательных чисел.

У Диофанта впервые появляется буквенная символика алгебры, он использует некоторые сокращения для часто встречающихся величин и операций. Диофант использует обозначения, соответствующие нашим степеням неизвестной x^2, x^3, x^4 (квадратоквадрат), x^5 (квадратокуб) и x^6 (кубокуб). Дальше шестой степени он не идёт. Диофант использует также отрицательные степени. Знаки для операций умножения и деления Диофанту были не нужны, сложение обозначалось путём записывания подряд соответствующих членов. Специальный знак Диофант использовал только для вычитания.

Диофант не соблюдает требования однородности складываемых величин: он может складывать сторону и площадь, т.е. он трактует их как числа, а не как геометрические величины. Напомним, что Герон тоже рассматривал такие задачи (см. с. 177).

Диофант рассматривал только положительные значения квадратного корня, но трудно поверить в то, что он не знал, что квадратное уравнение может иметь два положительных корня.

Диофант не обсуждает решение уравнения вида $ax + by = c$. Для этого уравнения интерес представляет только решение в целых числах, но Диофанта интресовало только решение уравнений в рациональных числах.

При решении неопределённых квадратных уравнений Диофант получает, говоря на современном языке, *рациональную параметризацию коники*. Он показывает, что если уравнение $ax^2 + bx + c = y^2$ (с рациональными коэффициентами) имеет одно рациональное решение (x_0, y_0), то оно имеет бесконечно много решений. Диофант рассматривает только уравнение $ax^2 - c = y^2$, но его метод годится и в общем случае. Он ищет решение вида $(x_0 + t, y_0 - kt)$. Подставляя $x = x_0 + t$ и $y = y_0 - kt$ в уравнение $ax^2 - c = y^2$ и учитывая, что $ax_0^2 - c = y_0^2$, получаем $2ax_0t + at^2 = -2y_0kt + k^2t^2$, т.е. $t = 2\frac{ax_0+ky_0}{k^2-a}$. Для каждого рационального k мы получаем рациональное решение $(x_0 + t, y_0 - kt)$, где $t = 2\frac{ax_0+ky_0}{k^2-a}$.

Если через две рациональные точки кубической кривой, заданной уравнением с рациональными коэффициентами, провести прямую, то третья точка, в которой эта прямая пересекает кривую, тоже рациональная. Две точки могут при этом сливаться в одну, т.е. касательная к кубической кривой в рациональной точке пересекает кривую в рациональной точке. Это даёт способ нахождения новых рациональных решений кубического уравнения с двумя неизвестными по ранее найденным решениям. Диофант приводит задачи, решаемые фактически таким способом. При этом используется как проведение касательной, так и проведение секущей (но секущая проводится через бесконечно удалённую точку; в этом случае вычисления более простые, чем в случае, когда секущая проходит через две конечные рациональные точки). Попутно Диофант фактически получает для кубической кривой алгебраический способ нахождения углового коэффициента касательной, т.е. производной.

Диофант решает также следующую задачу: найти четыре разных пифагоровых треугольника с общей гипотенузой. Решение основано на использовании тождества $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$. Если $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ и $d = 3$, то мы получаем 4 представления числа 65 в виде суммы двух квадратов. Диофант не записывает это тождество; в явном виде впервые оно встречается у Фибоначчи.

2.26. Папп Александрийский (290-350)

2.26.1. Биография

Папп Александрийский был последним выдающимся геометром александрийской школы. А первая книга по геометрии, в которой появилось много новых по сравнению с древнегреческой математикой идей, начинается как раз с обсуждения одной из задач Паппа. Эта книга называется «Геометрия». Она была опубликована в приложении к философскому трактату Рене Декарта «Рассуждение о методе» в качестве образца применения этого разработанного им метода. (Правда, Декарт сначала написал «Геометрию», а потом уже «Рассуждение о методе».) Декарт внимательно изучил сочинения Паппа и высоко их ценил. В трактате «Правила для руководства ума» он писал:

«...Но я убежден, что какие-то первые семена истин, которые присущи человеческим умам от природы и которые мы в себе заглушаем, ежедневно читая и слыша о стольких различных заблуждениях, обладали в той безыскусной и незатейливой древности такою силой, что благодаря тому свету ума, при посредстве которого люди видели, что следует предпочитать добродетель удовольствию, а честное — полезному, даже если они и не знали, почему это обстояло именно так, они также познали истинные идеи философии и математики, хотя и не могли ещё овладеть в совершенстве самими науками. И мне по крайней мере кажется, что какие-то следы этой истинной математики обнаруживаются у Паппа и Диофанта, которые жили пусть и не в самую раннюю эпоху, но всё же за много веков до нашего времени.»

О жизни Паппа почти ничего не известно. Сохранились лишь некоторые сведения о том, когда именно он жил. Например, он наблюдал солнечное затмение и описал его; это солнечное затмение относят к 320 г. н. э. Это не очень хорошо согласуется к комментарием Теона

Александрийского[7], который в хронологических таблицах напротив имени Диоклетиана отметил: «В его эпоху писал Папп». Диоклетиан был провозглашен римским императором в 284 г., а в 305 г. он сложил с себя полномочия в соответствии с заранее принятым им решением.

Основное сочинение Паппа — «Математическое собрание» (*Synagōgē*), состоящее из 8 книг. В них он собрал всё, что нашёл интересного в трудах своих предшественников, присоединив к этому и свои находки. Книга I и первая половина книги II утеряны. В книге III разбирается задача о построении двух средних пропорциональных и средних (арифметического, геометрического, гармонического и других) двух отрезков; в ней также показано, как правильные многогранники можно вписать в сферу. Книга IV начинается несколькими теоремами планиметрии, а последняя её часть посвящена различным кривым, в том числе спирали Архимеда, конхоиде Никомеда и квадратрисе Динострата. Именно в этой книге Папп приводит свою классификацию кривых (см. с. 63). В предисловии к книге V Папп пишет о мудрости пчёл. Плоскость можно замостить лишь тремя видами одинаковых правильных многоугольников: треугольниками, квадратами и шестиугольниками, и мудрые пчёлы выбрали для своих сот фигуру с наибольшим числом углов, потому что такая фигура может вместить больше мёда при том же самом расходе воска. После этого Папп обращается к различным изопериметрическим задачам, поначалу следуя Зенодору. К изопериметрическим теоремам Зенодора Папп добавил такую: среди всех сегментов круга, имеющих заданный периметр, наибольшую площадь имеет полукруг. Папп не смог доказать, что среди всех тел с данной площадью поверхности наибольший объём имеет шар, но он доказал, что объём шара больше объёма любого правильного многогранника с такой же площадью поверхности. Кроме того, в книге V

[7]Теон Александрийский — отец знаменитой Ипатии, последнего математика александрийской школы. Она была обаятельна и красноречива, писала комментарии к трудам Диофанта и Аполлония. В Александрии Ипатия была профессором платоновской философии. Она дружила со многими христианами, но оставалась верна традициям классического (языческого) эллинизма. В христианской общине распространился слух, будто она восстановила римского префекта Ореста против епископа Кирилла. Из-за этого слуха в 418 г. н. э. толпа христианской черни убила Ипатию острыми черепками, растерзала её тело на куски и сожгла. После Ипатии с великой александрийской математической школой было покончено. Последняя сохранившаяся в Александрии библиотека была разгромлена за несколько лет до убийства Ипатии.

Папп обсуждает 13 полуправильных многогранников, открытых Архимедом. В книге VI Папп обсуждает трактаты других авторов по астрономии. В книге VII Папп обсуждает сочинения Евклида, Аполлония и Аристея с точки зрения *анализа* и *синтеза*: при анализе мы предполагаем уже известным то, что нужно доказать, и смотрим, из чего это следует, пока не дойдём до чего-нибудь уже действительно известного или до основополагающих принципов; при синтезе мы движемся в противоположном направлении. В книге VII Папп вводит двойное отношение четырёх точек и доказывает его инвариантность при проекциях; в этой же книге он вводит полюс и поляру относительно окружности. Книга VIII посвящена механике, но там встречается много чисто математических задач и теорем. В частности, Папп строит коническое сечение по пяти точкам; строит оси конического сечения по двум сопряжённым диаметрам.

Многие теоремы из «Математического собрания» Паппа стали широко известны лишь после того, как их заново открыли знаменитые учёные. Это относится к теореме Гюльдена об объёме тела вращения и к теореме Дезарга. И если теорему Гюльдена часто называют теоремой Паппа–Гюльдена, то теорему Дезарга никогда не называют теоремой Паппа–Дезарга. Более того, говоря о тех, кто заложил основы проективной геометрии, про Паппа часто забывают, хотя именно в его «Математическом собрании» впервые появились все основные теоремы проективной геометрии, в том числе и теорема о сохранении двойного отношения при проекциях.

Обсудим теперь более подробно некоторые из наиболее интересных теорем Паппа.

2.26.2. Обобщение теоремы Пифагора

В книге IV Папп доказывает обобщение теоремы Пифагора, которую он называет предложением I, 47 Евклида.

Пусть на сторонах AB и AC треугольника ABC построены произвольные параллелограммы $ABDE$ и $ACFG$. Пусть, далее, H — точка пересечения продолжений сторон DE и FG (рис. 2.71).

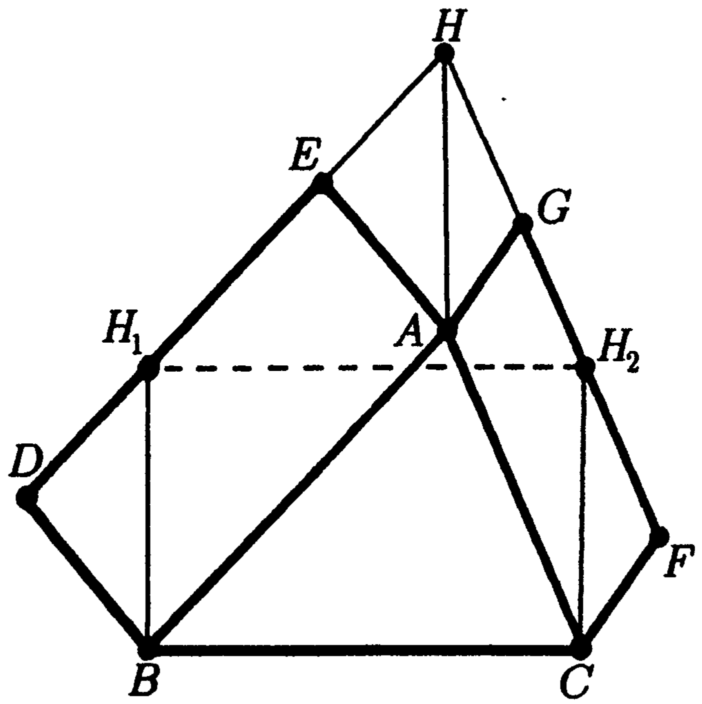

Рис. 2.71.

Тогда сумма площадей параллелограммов $ABDE$ и $ACFG$ равна площади параллелограмма, стороны которого равны и параллельны отрезкам BC и AH.

Доказательство. Параллелограммы $ABDE$ и $ACFG$ можно заменить на параллелограммы ABH_1H и ACH_2H, не меняя при этом их площадь. Ясно также, что сумма площадей двух новых параллелограммов равна площади параллелограмма BCH_2H_1,

2.26.3. Окружности, вписанные в арбелон

В книге IV Папп рассказывает также и о двух теоремах об окружностях, вписанных в арбелон. Папп не называет автора этих теорем, он просто пишет, что «в некоторых книгах приводится древнее предложение такого рода». Весьма вероятно, что автором этих теорем был Архимед.

Рассмотрим последовательность окружностей с центрами $O_1, O_2, \ldots$ вписанных в арбелон (рис. 2.72,а), и систему окружностей с центрами $O_1, O_2, \ldots,$ вписанных в фигуру, похожую на арбелон, но

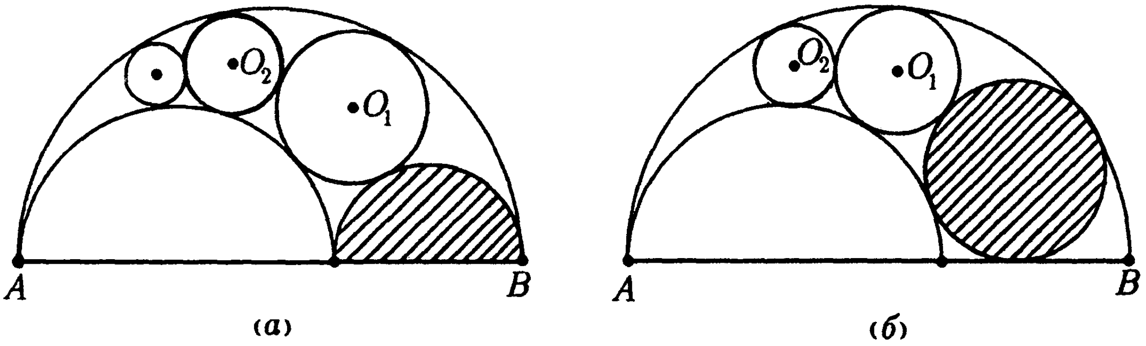

Рис. 2.72.

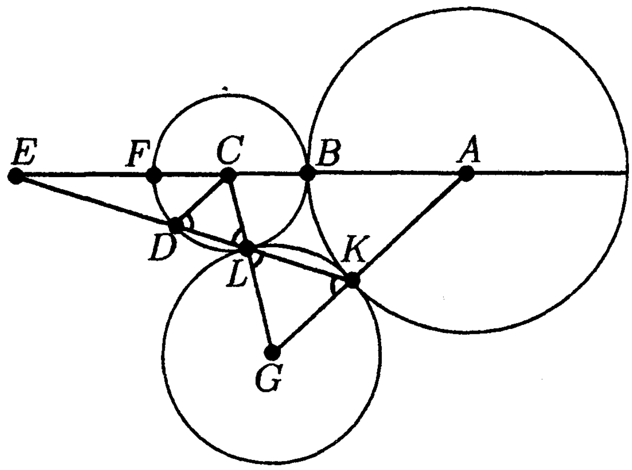

Рис. 2.73.

в которой вместо заштрихованного полукруга взят заштрихованный круг (рис. 2.72,б). Пусть p_k — расстояние от O_k до диаметра AB, d_k — диаметр окружности с центром O_k. Тогда

$$p_k = kd_k \quad \text{в случае (а),}$$

$$p_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) d_k \quad \text{в случае (б).}$$

Мы обсудим лишь случай (а). Для тех, кто знаком с инверсией, отметим, что после инверсии с центром A оба утверждения (а) и (б) становятся очевидны.

Доказательство Паппа основано на следующих трёх леммах.

Лемма 1. *Для трёх попарно касающихся (внешним образом)*

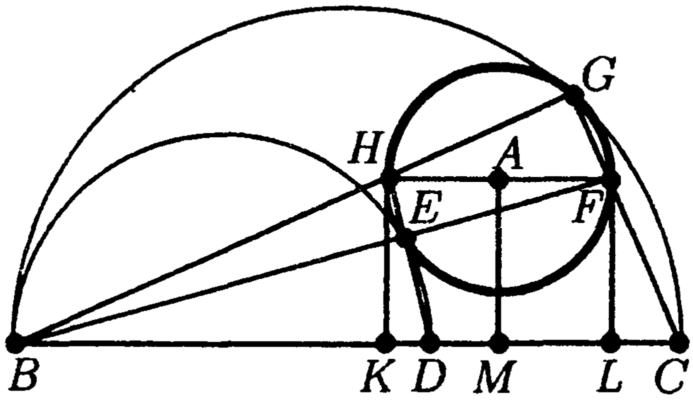

Рис. 2.74.

окружностей выполняются соотношения

$$AB : BC = AE : EC \text{ и } KE \cdot EL = EB^2$$

(рис. 2.73).

Доказательство. Так как $CD \parallel AG$, то

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{CD} = \frac{AE}{EC}.$$

Кроме того,

$$\frac{KE}{ED} = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{CF} = \frac{AE - AB}{EC - CF} = \frac{BE}{BF}.$$

Следовательно,

$$\frac{KE \cdot EL}{EL \cdot ED} = \frac{BE^2}{BE \cdot BF}.$$

Но $EL \cdot ED = BE \cdot BF$, поэтому $KE \cdot EL = BE^2$.

Лемма 2. *Для окружности радиуса r с центром A, касающейся двух полуокружностей, выполняются следующие соотношения:*

$$\frac{BM}{r} = \frac{BC + BD}{BC - BD}, \ BK \cdot LC = AM^2 \text{ (рис. 2.74).}$$

Доказательство. Из подобия пар треугольников BCG и BHK, BFL и BDE следует, что

$$BC \cdot BK = BH \cdot BG = BF \cdot BE = BD \cdot BL.$$

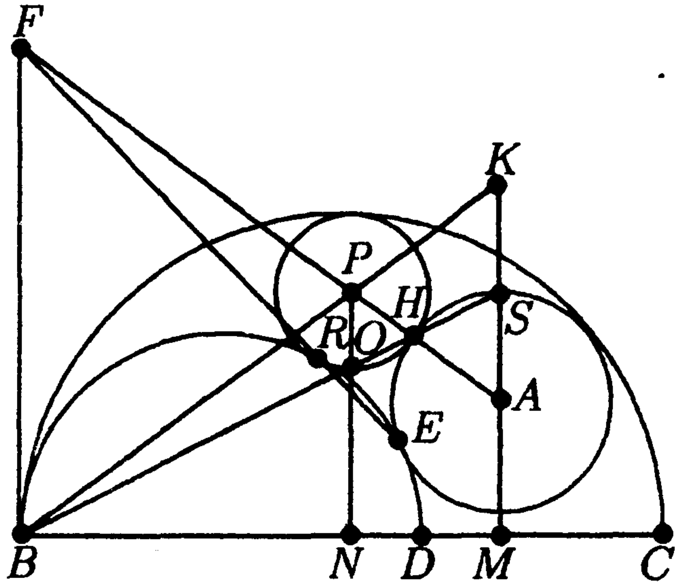

Рис. 2.75.

Поэтому

$$\frac{BC+BD}{BC-BD} = \frac{BL+BK}{BL-BK} = \frac{2BM}{KL} = \frac{BM}{r}.$$

Из подобия треугольников BHK и FCL следует, что

$$BK \cdot LC = KH \cdot FL = AM^2.$$

Лемма 3. *Две окружности с центрами A и P и диаметрами d и d' касаются друг друга и ещё двух полуокружностей (рис. 2.75). Тогда*

$$\frac{AM+d}{d} = \frac{PN}{d'}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2

$$\frac{BN}{PH} = \frac{BC+BD}{BC-BD} = \frac{BM}{AH}.$$

Пусть F — точка пересечения прямых AP и RE. Согласно лемме 1

$$\frac{FA}{FP} = \frac{AH}{PH} = \frac{BM}{BN}.$$

Поэтому точка F лежит на касательной к полуокружности, проходящей через точку B.

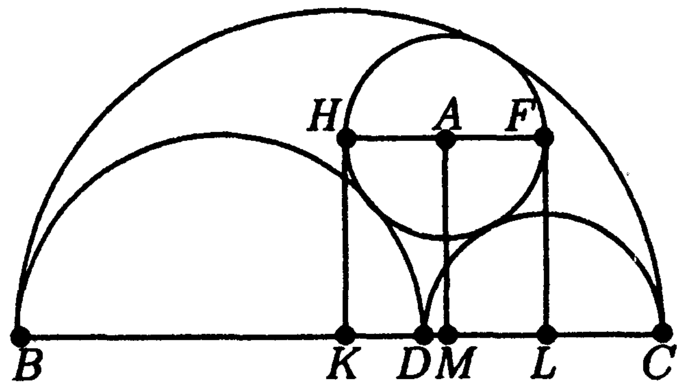

Рис. 2.76.

Согласно лемме 1

$$FH^2 = FE \cdot FR = FB^2, \text{ т. е. } FH = FB.$$

Из этого, в частности, следует, что точки O и S, в которых прямая BH пересекает перпендикуляры PN и AM, лежат на окружностях с центрами P и A соответственно. Поэтому

$$\frac{KS}{PO} = \frac{BK}{BP} = \frac{BM}{BN} = \frac{FA}{FP} = \frac{AH}{PH} = \frac{AS}{PO}.$$

т. е. $KS = AS$, а значит, $KA = d$.

Ясно также, что

$$\frac{MK}{KS} = \frac{PN}{PO}, \text{ т. е. } \frac{AM + d}{\frac{1}{2}d} = \frac{PN}{\frac{1}{2}d'},$$

что и требовалось.

Теперь уже можно доказать основное утверждение. Из леммы 3 следует, что

$$\frac{p_{k+1}}{d_{k+1}} = \frac{p_k + d_k}{d_k} = \frac{p_k}{d_k} + 1.$$

Поэтому достаточно доказать, что $p_1 = d_1$, т. е. $AM = KL$ (рис. 2.76).

При доказательстве леммы 1 было получено соотношение $BC \cdot BK = BD \cdot BL$, из которого следует, что

$$\frac{CD}{BD} = \frac{BC - BD}{BD} = \frac{BL - BK}{BK} = \frac{KL}{BK}. \tag{1}$$

Точки B и C играют одинаковую роль, поэтому выполняется также и соотношение
$$\frac{BD}{CD} = \frac{KL}{CL}. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что $BK \cdot CL = KL^2$. С другой стороны, согласно лемме 2, $BK \cdot CL = AM^2$, а значит, $KL = AM$, что и требовалось.

2.26.4. Теорема Паппа–Гульдена

В книге VII, посвящённой анализу и синтезу, сформулирована следующая теорема Паппа (впоследствии переоткрытая Гульденом): объём тела, образованного при вращении плоской фигуры вокруг какой-либо лежащей в её плоскости прямой, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной при вращении её центром тяжести.

2.26.5. Теоремы Паппа и Дезарга

В книге VII Папп приводит леммы к сочинениям Аполлония и Евклида, многие из которых утеряны. Особенно интересны леммы Паппа к утерянной книге Евклида «Поризмы» (поризмы — это предложения, занимающее промежуточное положение между теоремами и построениями). Папп, в частности, отмечает, что несколько поризмов Евклида можно объединить в одно утверждение, а именно:

Пусть четыре прямые пересекаются в точках A, B, C, P, Q и R (рис. 2.77). Если точки A, B и C фиксированы, а точки P и Q движутся по прямым, то точка R движется по прямой.

Очевидно, что когда точки P и Q сливаются в одну точку, весь треугольник PQR тоже сливается в одну точку. Поэтому третья фиксированная прямая проходит через точку пересечения первых двух. (Справедливости ради следует отметить, что сам Папп этого очевидного замечания не делает.) Таким образом, взяв другую пару точек P_1 и Q_1, мы получим конфигурацию знаменитой теоремы Дезарга (рис. 2.78).

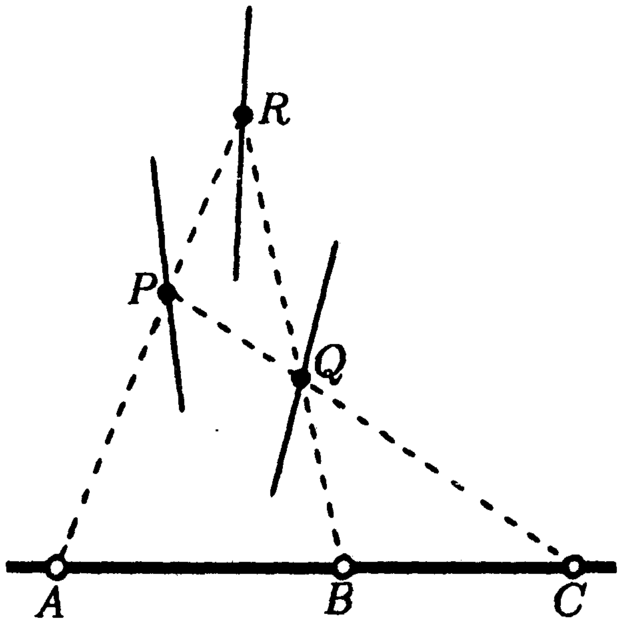

Рис. 2.77.

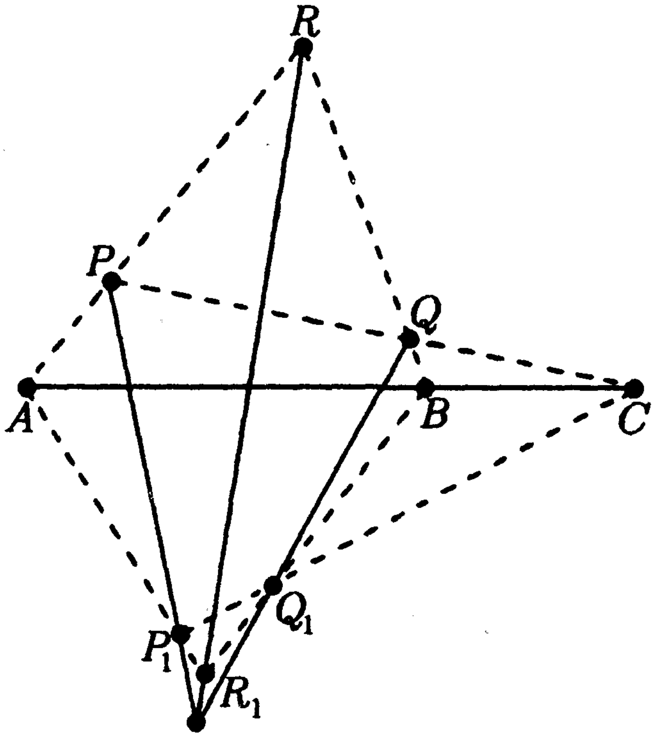

Рис. 2.78.

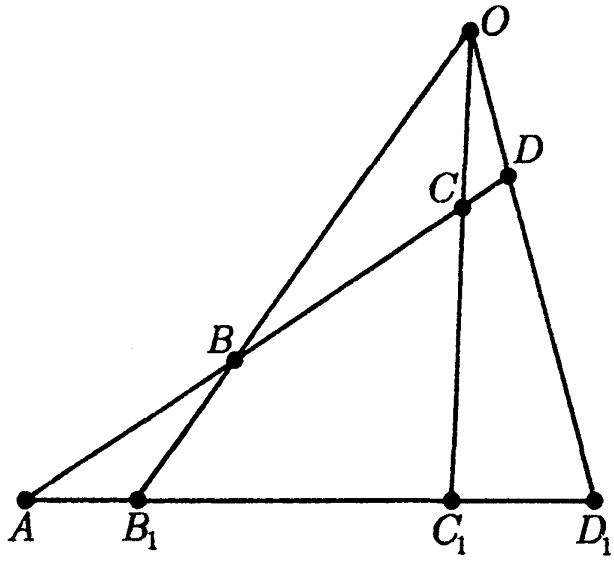

Рис. 2.79.

Полезным инструментом при доказательстве различных лемм Паппу служит утверждение о сохранении двойного отношения $\frac{AB \cdot DC}{AC \cdot DB}$ при проекциях одной прямой на другую, т. е.

$$\frac{AB \cdot DC}{AC \cdot DB} = \frac{AB_1 \cdot D_1C_1}{AC_1 \cdot D_1B_1} \tag{1}$$

(рис. 2.79). Папп рассматривает только частный случай сохранения двойного отношения, а именно, тот случай, когда точка A пересечения прямых сама участвует в двойном отношении. Но это не существенно. Дело в том, что если A' — произвольная точка прямой, на которой лежат точки A, B, C и D, то двойное отношение $\frac{A'B \cdot DC}{A'C \cdot DB}$ очевидным образом выражается через двойные отношения $\frac{AB \cdot DC}{AC \cdot DB}$ и $\frac{AB \cdot A'C}{AC \cdot A'B}$.

Соотношение (1) Папп доказывает следующим образом. Проведём через точку A прямые, параллельные прямым OD и OC. Они пересекут прямые OB и OD в точках K и L (рис. 2.80). Тогда

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AK}{OD} \text{ и } \frac{AB_1}{D_1B_1} = \frac{AK}{OD_1},$$

$$\frac{DC}{AC} = \frac{OD}{AL} \text{ и } \frac{D_1C_1}{AC_1} = \frac{OD_1}{AL}.$$

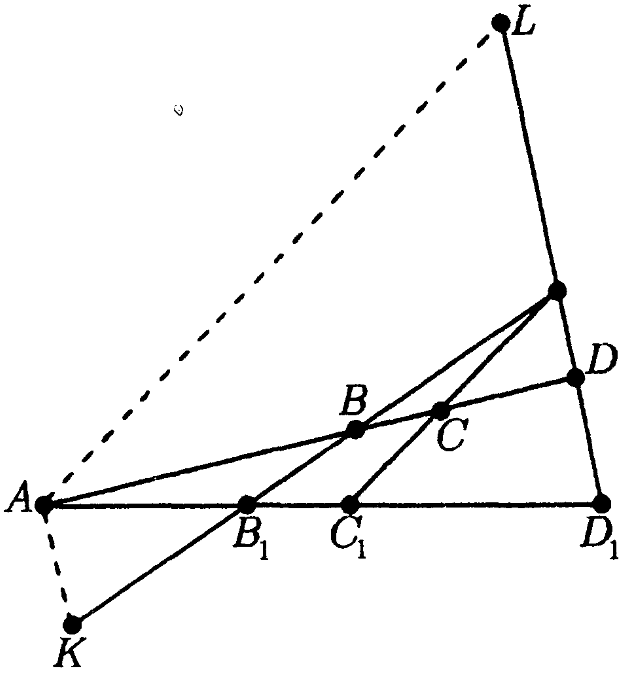

Рис. 2.80.

Поэтому

$$\frac{AB \cdot DC}{AC \cdot DB} = \frac{AK}{AL} = \frac{AB_1 \cdot D_1C_1}{AC_1 \cdot D_1B_1}.$$

С помощью утверждения о сохранении двойного отношения Папп доказывает свою знаменитую теорему:

Если на отрезках AB и DE взяты точки C и H и проведены прямые AH и CD, CE и BH, BD и AE, то их точки пересечения P, Q, R лежат на одной прямой (рис. 2.81).

2.26.6. Теорема о центре тяжести

Книга VIII посвящена в основном механике. Одна из наиболее интересных теорем этой книги следующая.

На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки D, E, F так, что

$$BD : DC = CE : EA = AF : FB.$$

Тогда центры тяжести треугольников ABC и DEF совпадают.

Папп приводит довольно длинное доказательство этой теоремы, опирающееся на теорему Менелая.

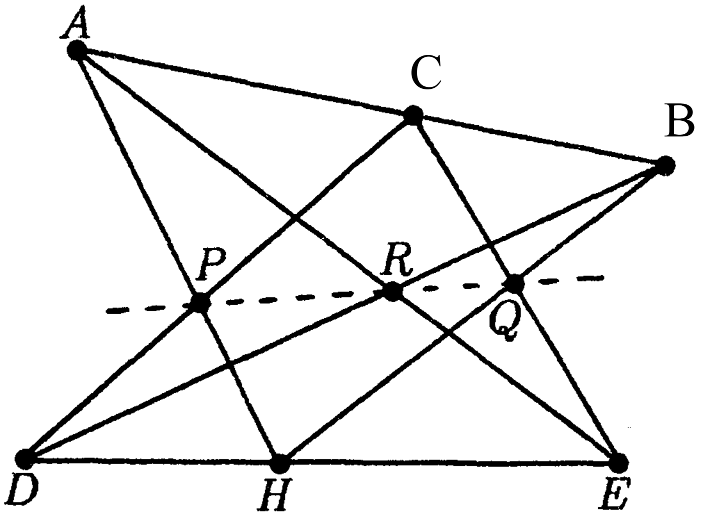

Рис. 2.81.

2.26.7. Итерационное удвоения куба

С помощью циркуля и линейки за конечное число шагов решить задачу удвоения куба нельзя, но решение методом последовательных приближений получить можно, причём многими разными способами. Одно из таких решений сохранилось в книге III «Математического собрания». История этого решения загадочна. Человека, который сообщил его Паппу, многие считали хорошим математиком. Их общие друзья попросили Паппа высказать свое мнение по поводу этого решения. Папп раздражённо ответил, что автор сам не понимает, что говорит, — он утверждает, будто нашел решение задачи удвоения куба с помощью лишь циркуля и линейки! Взаимопонимания, как видно, не было. Возможно, они даже не поговорили друг с другом. Произошло, скорее всего, следующее. Некий математик (Папп не упоминает его имени) предложил построение с помощью циркуля и линейки, повторяя которое на каждом шаге можно получать всё более и более точные решения задачи удвоения куба. Вряд ли он мог считать, что точное решение получается на третьем шаге, но Папп его понял именно так. Папп без труда убедился, что на третьем шаге точного решения не получается, и от дальнейших обсуждений наотрез отказался. Но всё же он привел это решение в своих сочинениях как пример неверных рассуждений.

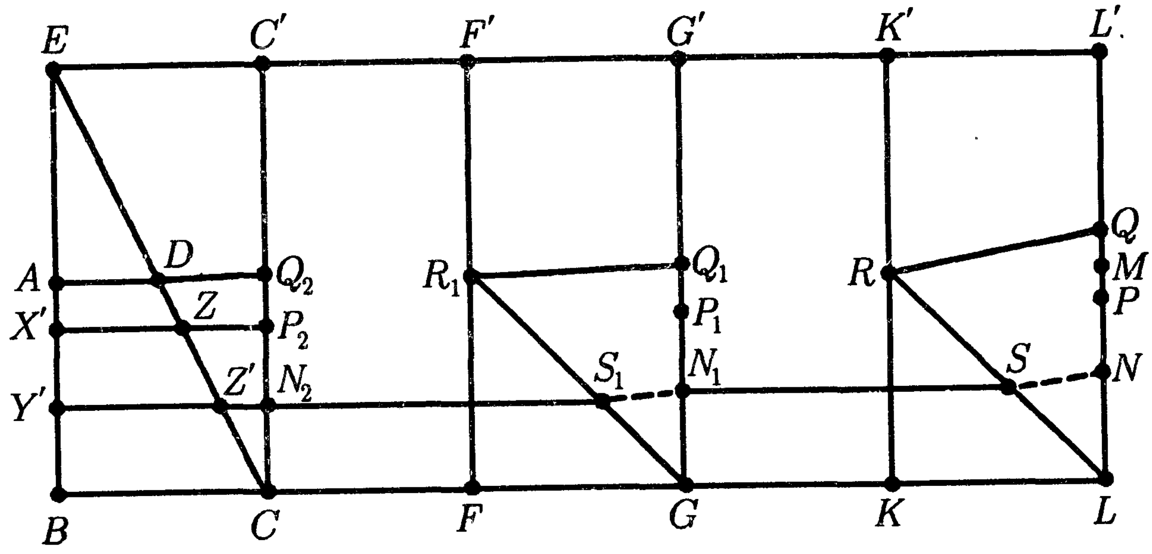

Рис. 2.82.

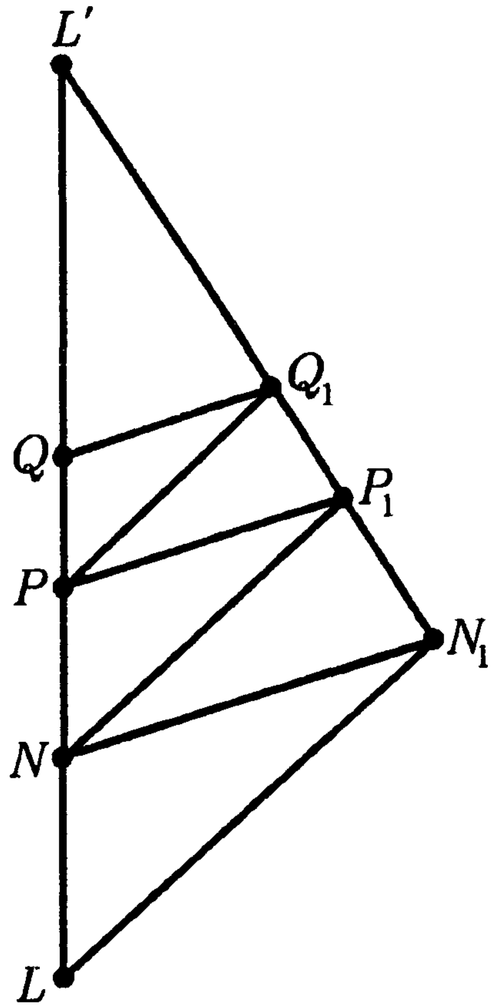

Рис. 2.83.

Папп изложил решение следующим образом. Пусть AB и AD — данные отрезки, причём $AB > AD$ и $AB \perp AD$ (рис. 2.82). Отложим на перпендикуляре к прямой AB, восставленном из точки B, отрезок BC, равный отрезку AB. Пусть E — точка пересечения прямых AB и CD. Отложим на луче BC отрезок $BL = 5BC$ и разделим его точками C, F, G и K на пять равных частей. Рассмотрим прямоугольник $EBLL'$. Возьмём на отрезке LL' такую точку M, что $LM = AB$. Пусть N — середина отрезка LM. Построим на отрезке LL' такие точки P и Q, что $L'L : L'N = L'N : L'P = L'P : L'Q$. На рис. 2.83 показано, как построить эти точки: через точку L' проводим произвольную прямую и откладываем на ней отрезок $L'N_1 = L'N$; дальнейшее построение видно из рисунка. Отложим на отрезке KK' отрезок $KR = LM = AB$, а на отрезке LR построим такую точку S, что $SN \parallel RQ$ (см. рис. 2.82). Затем на отрезке GG' построим такую точку N_1, что $SN_1 \parallel BL$, и для точки N_1 проведём такие же построения, как и для точки N (т. е. построим точки P_1 и Q_1), и повторим их для точки N_2. Если бы оказалось, что $Q_2A \parallel BC$, то $BC : Y'Z' = BE : Y'E = C'C : C'N_2$; $Y'Z' : X'Z = C'N_2 : C'P_2$ и $X'Z : AD = C'P_2 : C'Q_2$. А так как $C'C : C'N_2 = C'N_2 : C'P_2 = C'P_2 : C'Q_2$, то $BC : Y'Z' = Y'Z' : X'Z = X'Z : AD$, т. е. $Y'Z'$ и $X'Z$ — искомые отрезки. Папп, конечно, заметил, что прямая Q_2A не обязательно параллельна прямой BC, но он не заметил более глубоких свойств этого построения.

Докажем, что при последовательном повторении построения угол между прямыми Q_nR_n и BL стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^3 = 1 - a$ (рис. 2.84). Ясно, что $\frac{a}{1-x_{n+1}} = \frac{1-x_n^3}{1-x_n}$, т. е. $1 - x_{n+1} = a\frac{1-x_n}{1-x_n^3}$. Предположим сначала, что $0 < x_n^3 < 1 - a$. Тогда, с одной стороны, $1 - x_{n+1} = a\frac{1-x_n}{1-x_n^3} < 1 - x_n$, так как $1 - x_n^3 > a$. С другой стороны, $1 - x_{n+1} = \frac{a}{1+x_n+x_n^2} > \frac{a}{1+\sqrt[3]{1-a}+(\sqrt[3]{1-a})^2} = a\frac{1-\sqrt[3]{1-a}}{1-(1-a)} = 1 - \sqrt[3]{1-a}$, т. е. $x_{n+1} < \sqrt[3]{1-a}$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху и монотонно возрастает, поэтому она имеет предел. Если $1 - a < x_n^3 < 1$, то рассуждения аналогичны. Таким образом, процесс построения сходится для произвольной точки N, взятой на отрезке LL'. Но чем бли-

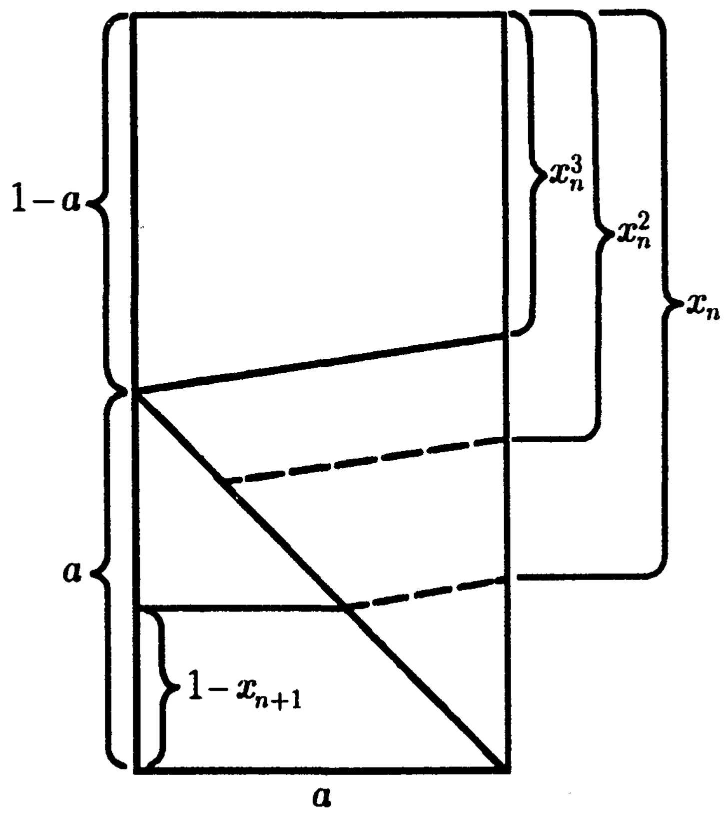

Рис. 2.84.

же $L'N/L'L$ к $\sqrt[3]{1-a}$, тем лучше сходимость. Автор решения задачи удвоения куба для $\sqrt[3]{1-0{,}5} = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}79$ выбрал приближение $L'N/L'L = 3/4 = 0{,}75$. Он, по-видимому, достаточно хорошо понимал, что делал.

Глава 3.

Китай. Индия. Арабские страны

Большинство математиков Китая, Индии и арабских стран были одновременно и астрономами; их работы по математике часто тесно связаны с их исследованиями по астрономии. Например, их интерес к решению в целых числах уравнений вида $ax + by = c$ был связан с астрономией. Тригонометрия также разрабатывалась для нужд астрономии.

3.1. Китай

Древнекитайские летописи относят применение угольника и циркуля для измерения земель к 2000 г. до н. э. На камне эпохи Хань (206 г. до н. э. — 220 г. н. э.) изображены боги-прародители Фуси, держащий угольник, и Нюйва, держащая циркуль. Математика была одним из шести основных искусств, которым обучались дети китайских аристократов ещё до эпохи Хань.

3.1.1. Математика в девяти книгах

Основной письменный источник для изучения древнекитайской математики — трактат «Математика в девяти книгах», в числе составителей которого были важные сановники: главный министр Чжан Цан (II в. до н. э.) и министр Гэн Чоу-чан (I в. до н. э.). Этот трактат энциклопедичен. Он содержит много разных задач по арифметике и геометрии с правилами их решения, но без доказательств этих правил. «Математика в девяти книгах» дошла до нас в редакции Лю Хуэя (III в.

н. э.), который написал к ней комментарии и дополнения. Он снабдил доказательствами некоторые правила, например, формулу для вычисления объёма пирамиды. К сожалению, никакие самостоятельные сочинения Лю Хуэя не сохранились.

Существенное значение имеет также «Трактат об измерительном шесте», написанный раньше «Математики в девяти книгах», но без её энциклопедичности.

3.1.2. Дроби

Действия над дробями в китайской арифметике были разработаны подробно. Первые задачи «Математики в девяти книгах» посвящены сокращению дробей, которое широко применялось. Применяемое правило сокращения дробей равносильно отысканию наибольшего общего делителя двух натуральных чисел с помощью алгоритма Евклида: «То, что можешь, раздели пополам; если нельзя разделить пополам, то установи количества числителя и знаменателя, из большего вычти меньшее; продолжай взаимно уменьшать, пока не получатся равные числа; на это равное и сократи.» Современное правило деления двух дробей как умножения одной дроби на перевёрнутую дробь в Китае использует в V в. Чжан Цю-цзянь; в Европе это правило первым сформулировал Штифель (XVI в.).

3.1.3. Площади

Книга I «Математики в девяти книгах» назвается «Общее измерение полей». Начинается она задачами об арифметических операциях с дробями, а задачи 25–38 посвящены вычислению площадей. В задаче 25 приведено правило для нахождения площади треугольника, а в задачах 27–30 приведено правило для нахождения площади трапеции.

В задачах 31 и 32 требуется вычислить площадь круга. При этом в условиях приведены излишние и даже, строго говоря, противоречивые данные: указаны диаметр d и длина окружности C, которые в обеих задачах связаны соотношением $d = 3C$. После условия задачи 32 приведены два правила для вычисления площади S круга. Для применения первого правила нужно действительно знать d и C. Это правило точное: $S = dC/4$. Второе правило приближённое: $S = 3d^2/4$.

Для вычисления площади сектора круга в решениях задач 33 и 34 приведена точная формула $S = dC/4$, где d — диаметр круга, C — длина ограничивающей сектор дуги.

Весьма интересна приближённая формула для вычисления площади сегмента круга: $S = (ah + h^2)/2$, где h — высота сегмента, a — длина отсекающей его хорды. Аналогичная формула применялась в Египте; она связана с приближённым значением $\pi = 3$ (см. с. 17). Эта формула используется для решения задач 35 и 36, причём в задаче 35 рассматривается полукруг, а для полукруга, с учётом приближения $\pi = 3$, эта формула точная.

Для вычисления площади кольца с внутренним радиусом r, внешним радиусом R и длинами внутренней и внешней окружностей c и C соответственно в задачах 37 и 38 применяется формула $S = \frac{C+c}{2}(R-r)$. Так как $c : r = C : R$, то $(C + c)(R - r) = CR - cr$.

3.1.4. Извлечение квадратных и кубических корней

В книге IV приводятся приёмы извлечения квадратных и кубических корней, основанные на возведении двучлена в квадрат и в куб на счётной доске.

3.1.5. Объёмы

Вычислению объёмов посвящена книга V «Математики в девяти книгах». Эта тема разработана очень подробно. Для вычисления объёма цилиндра и усечённого конуса применяются соответственно формулы $V = \frac{C^2h}{12}$ (задача 9) и $V = \frac{(Cc+C^2+c^2)h}{12}$ (задача 11), где C и c — длины окружностей оснований, h — высота. Если учесть применявшееся в Древнем Китае приближение $\pi = 3$ и заменить 12 на 4π, а 36 на 12π, то получим точные формулы.

Для вычисления объёма усечённой пирамиды высотой h, основания

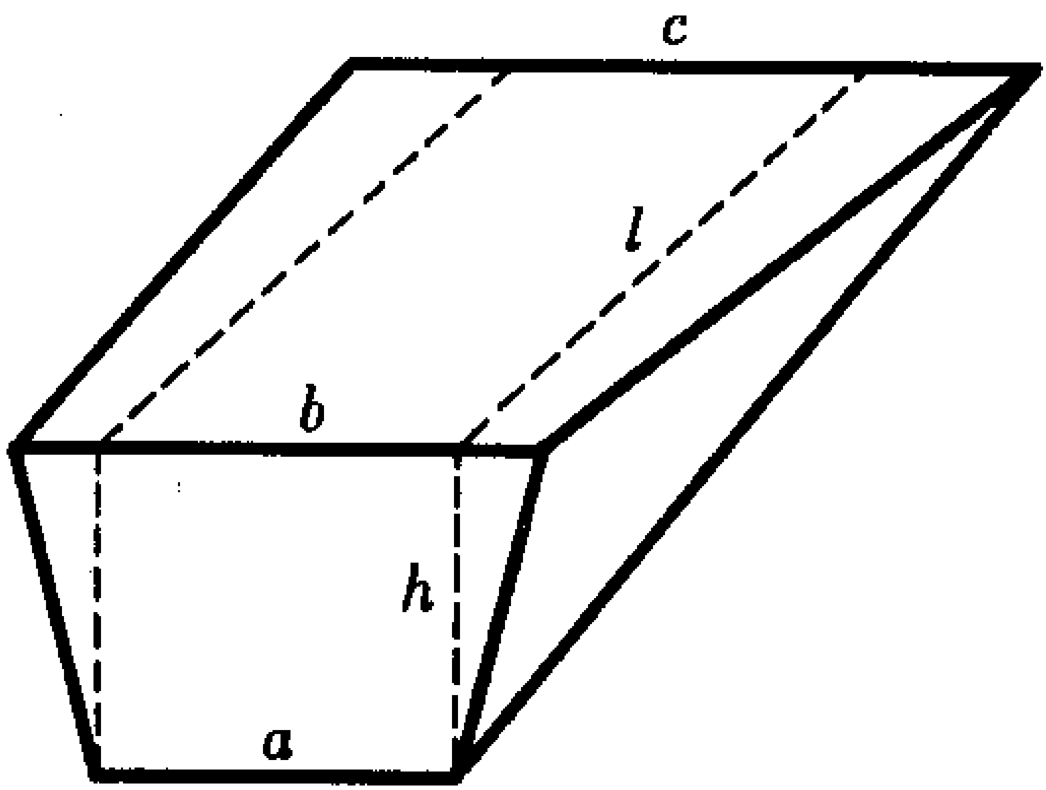

Рис. 3.1.

которой суть квадраты со сторонами a и b, используется формула $V = \frac{(a^2+b^2+ab)h}{3}$ (задача 10). По-видимому, формула для вычисления объёма усечённого конуса была получена по аналогии.

Помимо усечённой пирамиды в «Математике в девяти книгах» вычислены объёмы многих других многогранников. Например, в задаче 17 вычислен объём многогранника, двумя гранями которого являются перпендикулярные друг другу трапеции (рис. 3.1). Если основания этих трапеций равны a и b, b и c соответственно, а высоты равны h и l, то $V = lh(a+b+c)/6$. Эту формулу можно доказать, например, следующим образом:

$$V = \frac{1}{2}lha + 2\left[\frac{l}{2}(\frac{b-a}{2} + \frac{c-a}{2})\frac{h}{3}\right] = \frac{1}{6}lh(a+b+c).$$

Но непонятно, как именно она была получена в Древнем Китае.

В задачах 18, 19, 21 и 22 вычисляются объёмы обелисков различной формы (рис. 3.2). В отличие от усечённой пирамиды плоскости

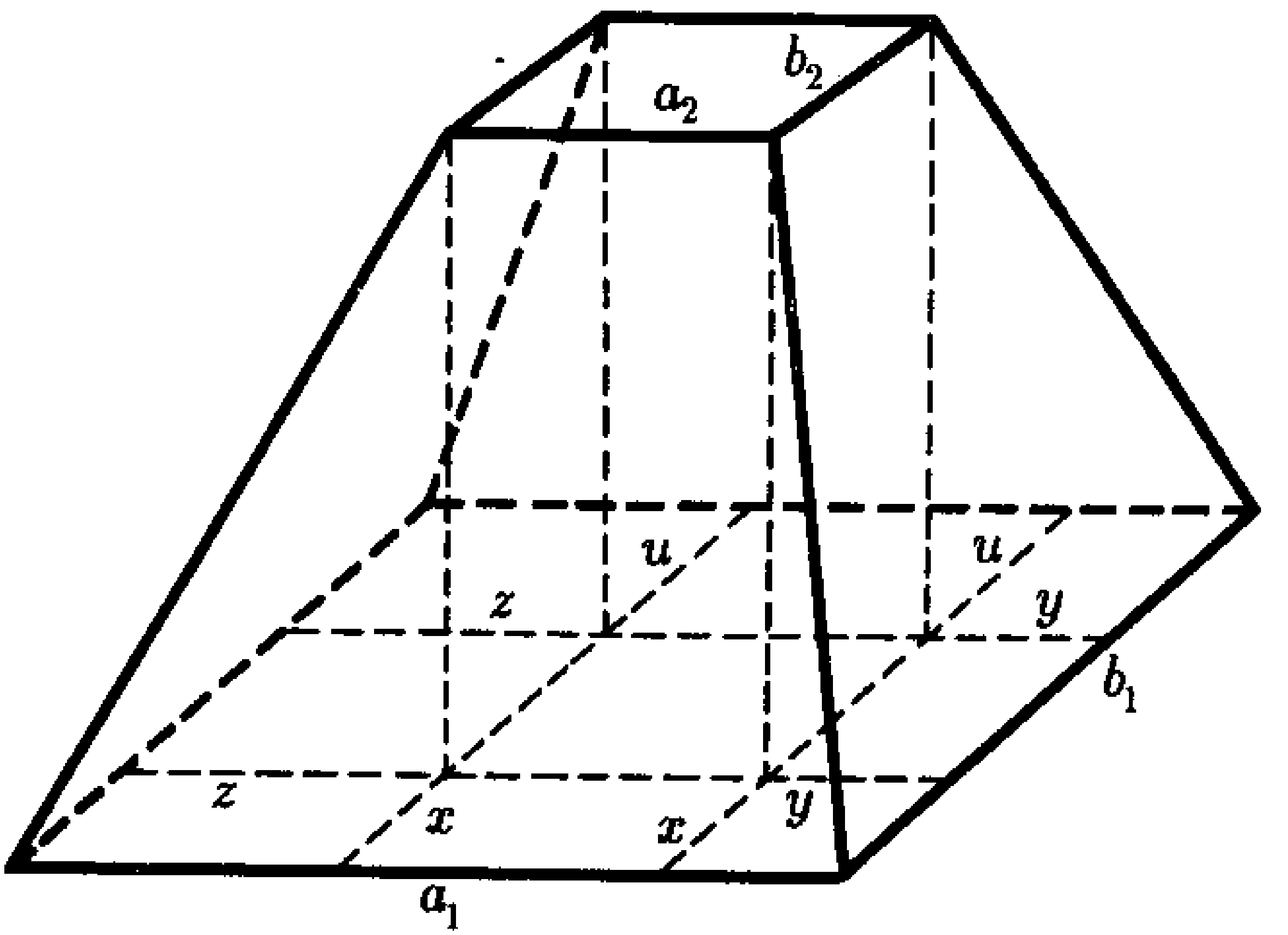

Рис. 3.2.

боковых граней этих обелисков не пересекаются в одной точке. Для вычисления объёма обелиска применяется формула

$$V = \frac{(2a_1 + a_2)b_1 + (2a_2 + a_1)b_2}{6}h.$$

Используя соотношения $x + u = b_1 - b_2$ и $y + z = a_1 - a_2$, доказать эту формулу можно следующим образом:

$$\begin{aligned} 6V &= h(6a_2b_2 + 3a_2x + 3a_2u + 3b_2y + 3b_2z + 2xy + 2xz + 2zu + 2uy) = \\ &= h(6a_2b_2 + 3a_2(b_1 - b_2) + 3b_2(a_1 - a_2) + 2(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)) = \\ &= h((2a_1 + a_2)b_1 + (a_1 + 2a_2)b_2). \end{aligned}$$

* * *

Вычисление объёмов всех рассмотренных нами многогранников можно свести к вычислению объёма четырёхугольной пирамиды с квадратным основанием (хотя и нет свидетельств того, что составители «Математики в девяти книгах» умели это делать). Формулу для вычисления объёма пирамиды нельзя доказать без использования предельного перехода в том или ином виде. Первое дошедшее до нас древнекитайское доказательство этой формулы содержится в комментариях Лю Хуэя (III в. н. э.) к «Математике в девяти книгах». Для вычисления объёма пирамиды с прямоугольным основанием и высотой, основание которой попадает в одну из вершин прямоугольника, он поступает следующим образом. Разрежем прямоугольный параллелепипед на две равные призмы, а затем одну из призм разрежем на пирамиду и тетраэдр (они изображены на рис. 3.3, но с некоторыми дополнительными разрезаниями). Пусть a_0, b_0 и c_0 — объёмы пирамиды, тетраэдра и призмы. Ясно, что $a_0 + b_0 = c_0$ и $c_0 = \frac{V}{2}$; где V — объём параллелепипеда. Нужно доказать, что $a_0 = 2b_0$ (тогда $a_0 = \frac{2c_0}{3} = \frac{V}{3}$). Пусть a_1, b_1 и c_1 — объёмы пирамиды, тетраэдра и призмы вдвое меньших размеров. Из рис. 3.3 видно, что $a_0 = 2a_1 + 4c_1$ (пирамида состоит из двух маленьких пирамид, двух маленьких призм и маленького параллелепипеда) и $b_0 = 2c_1 + 2b_1$ (тетраэдр состоит из двух маленьких призм

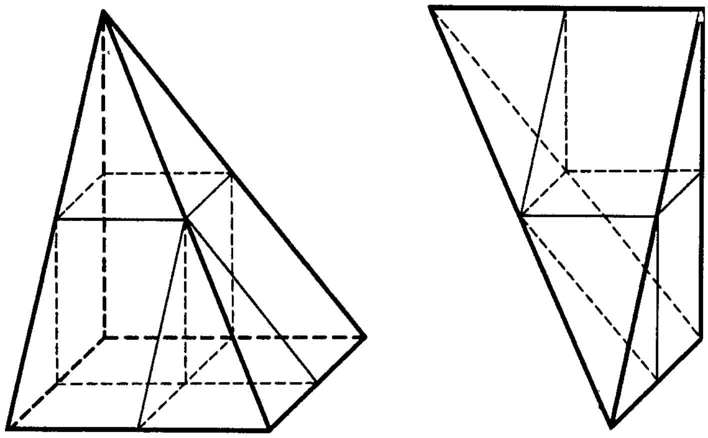

Рис. 3.3.

и двух маленьких тетраэдров). Продолжая процесс деления пополам, получаем

$$\begin{aligned} a_0 &= 4c_1 + 2a_1 = 4c_1 + 8c_2 + 4a_2 = \ldots, \\ b_0 &= 2c_1 + 2b_1 = 2c_1 + 4c_2 + 8b_2 = \ldots, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} a_0 &= (4c_1 + 8c_2 + \ldots + 2^{k+1}c_k) + 2^k a_k, \\ 2b_0 &= (4c_1 + 8c_2 + \ldots + 2^{k+1}c_k) + 2^{k+1} b_k. \end{aligned}$$

Лю Хуэй, конечно, не вводит подобных обозначений и не получает аналогичных формул, но его геометрические рассуждения именно таковы. По поводу частей, остающихся при последовательных делениях пополам фигур (соответствующих членам $2^k a_k$ и $2^{k+1} b_k$), Лю Хуэй говорит, что они становятся все более тонкими, а в конце концов совсем неуловимыми. В предельном положении они, по его мнению, не имеют формы и об их размерах нет смысла говорить, потому что это за пределами человеческого понимания. Так что остающимися фигурами интересоваться незачем.

* * *

Для вывода формулы объёма правильной усечённой пирамиды с высотой h, основания которой суть квадраты со сторонами a и b ($a < b$), Лю Хуэй поступает следующим образом. Усечённую пирамиду можно разрезать на прямоугольный параллелепипед размером $a \times a \times h$, четыре пирамиды с квадратными основаниями и четыре треугольные призмы. Пусть u, v и w — объёмы параллелепипеда, пирамиды и призмы; V — объём усечённой пирамиды. Тогда $V = u + 4v + 4w$. С другой стороны, зная, что объём пирамиды втрое меньше объёма прямоугольного параллелепипеда с теми же основанием и высотой, можно получить соотношения

$$\begin{aligned} a^2h &= u, \\ abh &= u + 4w, \\ b^2h &= u + 2 \cdot 4w + 3 \cdot 4v. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства, получим $h(a^2+ab+b^2) = 3(u+4v+4w) = 3V$. Помимо формулы $V = \frac{(ab+a^2+b^2)h}{3}$ Лю Хуэй приводит эквивалентную ей формулу $V = \frac{(b-a)^2h}{3} + abh$.

3.1.6. Системы линейных уравнений

Книги VII и VIII «Математики в девяти книгах» посвящены решению систем линейных уравнений. В них описаны методы, разработанные в разное время, без указания связи между ними. Сначала рассматриваются методы решения двух уравнений с двумя неизвестными, а затем более поздние методы общего решения систем линейных уравнений со многими неизвестными.

Самыми древними являются два метода «избытка и недостатка», применяемые для решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными. Первый из этих методов применяется в том случае, когда коэффициенты при одном неизвестном равны 1. Название связано с тем, что в задачах идёт речь об избытке или недостатке некоторый суммы денег. Например, в одной из задач нужно найти число покупателей и стоимость покупаемой вещи при двух условиях: если каждый покупатель заплатит 9, то избыток будет 11, а если каждый покупатель заплатит 6, то недостаток будет 16. Составители «Математики в девяти книгах» рассматривали только положительные числа, поэтому наряду со случаем «избыток-недостаток» они рассматривали другие случаи: «два избытка», «два недостатка», «избыток-равновесие» и «недостаток-равновесие». В современных обозначениях в задаче на «избыток-недостаток» нужно решить систему уравнений $a_1x = y + d_1$, $a_2x = y - d_2$, где $a_1 > a_2$. Согласно правилу нужно составить

$$\text{ши} = a_1d_2 + a_2d_1, \quad \text{фа} = d_1 + d_2, \quad \text{разность} = a_1 - a_2.$$

После этого неизвестные находятся по формулам

$$x = \frac{\text{фа}}{\text{разность}} = \frac{d_1 + d_2}{a_1 - a_2}, \quad y = \frac{\text{ши}}{\text{разность}} = \frac{a_1d_2 + a_2d_1}{a_1 - a_2}.$$

Для остальных случаев были разработаны аналогичные правила.

Книга VIII «Математики в девяти книгах» называется «Фан-чэн»; она посвящена решению систем n линейных уравнений с n неизвестными. Метод решения по своей сути совпадает с методом Гаусса: матрица системы линейных уравнений последовательно преобразуется к треугольному виду. Китайский метод отличается от метода Гаусса лишь тем, что все операции производятся на счётной доске. Само слово «фан-чэн» означает выстаривание чисел по клеткам.

В Китае при решении линейных уравнений впервые в истории стали применяться отрицательные числа. Для различения положительных и отрицательных коэффициентов были введены специальные термины и на счётной доске использовались палочки разного цвета: красные для положительных чисел и чёрные для отрицательных. Отрицательные числа были введены для формального распространения алгоритма решения линейных уравнений на любые задачи.

3.1.7. Теорема Пифагора и пифагоровы тройки

Китайские летописи относят применение прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4 и 5 к 2200 г. до н. э., но на это заявление вряд ли можно полагаться. Древнекитайская «Математика в девяти книгах», составленная в I в. до н. э. — I в. н. э., содержит много задач, решения которых используют теорему Пифагора. Решения этих задач приведены в виде общих правил, но доказательства теоремы Пифагора в этой

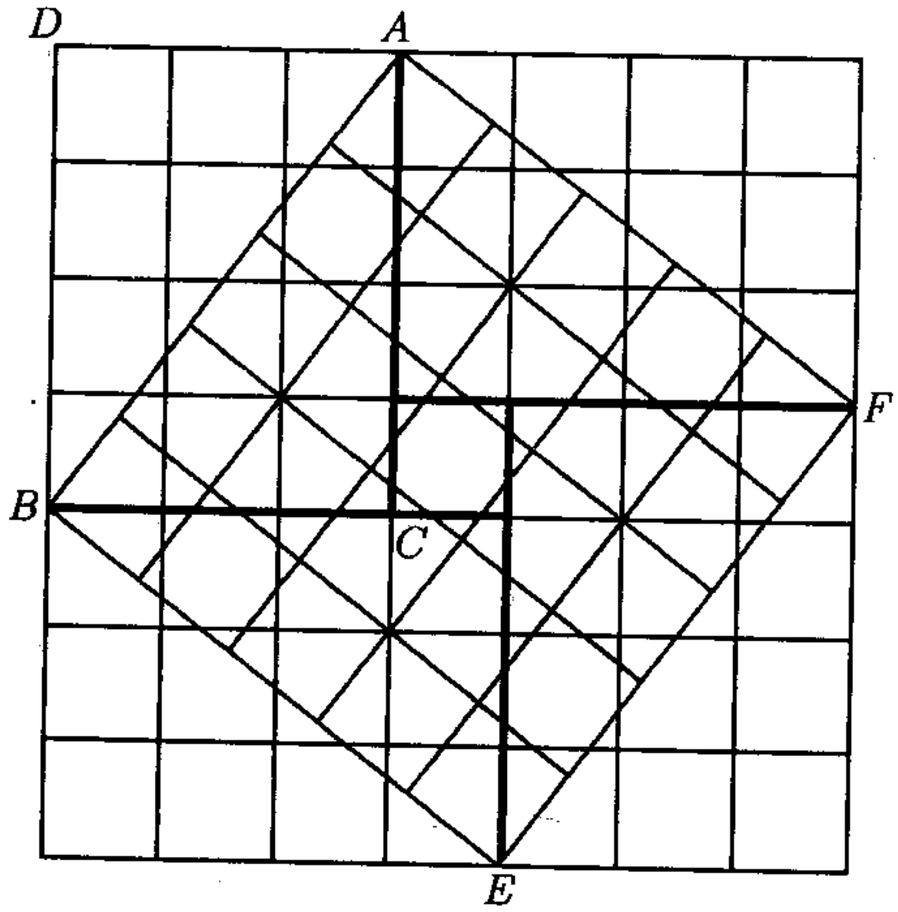

Рис. 3.4.

книге нет. Её доказательство приведено в комментариях к этой книге, относящихся к III в. н. э. На соответствующем чертеже (он схематично воспроизведён на рис. 3.4) изображён треугольник со сторонами 3, 4 и 5, но доказательство годится для любого прямоугольного треугольника. Произведение катетов BC и AC прямоугольного треугольника ABC равно площади прямоугольника $ACBD$, т. е. равно удвоенной площади треугольника ABC. Следовательно, прибавив площадь четырёх прямоугольных треугольников к площади внутреннего квадрата, получим площадь квадрата $ABEF$, т. е. $2ab+(b-a)^2=c^2$, а значит, $a^2+b^2=c^2$.

Последняя книга трактата «Математика в девяти книгах» посвящена прямоугольным треугольникам; первые 14 задач, которые решаются в ней, связаны с теоремой Пифагора. Эта книга называется

«Гоу-гу», потому что *гоу* — это меньший катет (обычно рисуемый горизонтально), *гу* — больший (вертикальный) катет, а *гоу-гу* — это и есть теорема Пифагора. Гипотенуза называется *сянь*. Гоу, гу и сянь мы будем обозначать a, b и c соответственно.

Задача 1 наиболее проста. *Известно*, что $a = 3$ и $b = 4$. *Нужно найти* c. Решение дано в виде общего правила, причём его запись очень короткая, — она состоит из 13 односложных иероглифов: «Возведи в квадрат гоу и гу. Сложи их и найди квадратный корень из суммы. Это и есть сянь.»

Задачи 2 и 3 тоже весьма просты: в них *по данным* $a = 3$, $c = 5$ (*соответственно* $b = 4$, $c = 5$) *требуется найти* b (*соответственно* a).

Задачи 4 и 5 тоже относятся к этому простейшему типу задач, но их формулировки гораздо интересней, а для решения задачи 5 нужно даже иметь представление о разворачивании цилиндрической поверхности на плоскость.

Задача 4 такова: *«Имеется бревно диаметром 2 чи 5 цуней. Если выпилить прямоугольный брус толщиной, например, 7 цуней, то спрашивается, какова будет его ширина?»* Так как 1 чи = 10 цуней и $25^2 - 7^2 = 24^2$, то ширина бруса равна 2 чи 4 цуня. Решение этой задачи неявно использует то, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.

В задаче 5 речь идёт фактически о вычислении длины винтовой линии: *«Имеется дерево в 2 чжана длиной, обхват его 3 чи. У его подножия растёт пуэрария, которая поднимается семью витками вокруг дерева до его вершины. Спрашивается, какова длина пуэрарии?»* Развернув винтовую линию на плоскость, получим прямоугольный треугольник с катетами 2 чжана = 20 чи и 7×3 чи = 21 чи. Длина пуэрарии равна гипотенузе этого треугольника. Остаётся заметить, что $20^2 + 21^2 = 29^2$.

Следующие 11 задач тоже связаны с соотношением $a^2 + b^2 = c^2$, но их решения более сложны; из этого соотношения они следуют не сразу. Например, в задачах 6–10 по данному катету и разности между гипотенузой и катетом нужно найти остальные элементы треугольника. При этом в задачах 6 и 7 даны a и $d = c - b$, а в задачах 8–10 даны b и $d = c - a$ (напомним, что $a < b$). К задачам 6–10 весьма близка задача 13. В ней вместо разности гипотенузы и катета дана их сумма. Решения задач 6–10 приведены в виде эквивалентных, но всё же различных правил. Решение задачи 6 основано на формуле $b = \frac{a^2-d^2}{2d}$, где $d = c - b$, а решения задач 7–10 основаны на формуле $c = \frac{1}{2}(\frac{a^2}{d} + d)$. Правило для решения задачи 13 аналогично правилам решения задач 7–10: $b = \frac{1}{2}(d_1 - \frac{a^2}{d_1})$, где $d_1 = c+b$. Эти формулы можно получить двумя разными способами. Во-первых, можно воспользоваться перегруппировкой площадей (рис. 3.5). Так как $a^2 = b^2 - c^2 = S_1 + S_2 + S_3 = 2S_1 + S_3 = 2b(c - b) + (c - b)^2 = 2bd + d^2$, то $b = \frac{a^2-d^2}{2d}$. А так как $S_1 + S_2 + S_3 = S_1 + S_4 + S_3 = (b + c)^2 - 2b(b + c) = d_1^2 - 2bd_1$, то $b = \frac{d_1^2-a^2}{2d_1}$. Во-вторых, тождества $c - b = \frac{a^2}{c+b}$ и $c + b = \frac{a^2}{c-b}$ можно преобразовать следующим образом: $(c + b) - 2b = \frac{a^2}{c+b}$ и $2c - (c - b) = \frac{a^2}{c-b}$, а значит, $b = \frac{1}{2}(d_1 - \frac{a^2}{d_1})$ и $c = \frac{1}{2}(\frac{a^2}{d} + d)$. Первый способ более естествен для математики древности, но он приводит к формуле, которая использована лишь в решении задачи 6; в решениях других задач использованы формулы, к которым приводит второй способ.

Математическое содержание задач 6–10 и 13 мы изложили. Но их формулировки весьма интересны, поэтому мы приведём их (для решения этих задач нужно знать, что 1 чжан = 10 чи = 100 цуней).

Задача 6. *Имеется водоём со стороной в* 1 *чжан. В центре его растёт камыш, который выступает над водой на* 1 *чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснётся его. Спрашивается, какова глубина воды и какова длина камыша?*

Задача 7. *Имеется столб, к его вершине привязан канат. Конец каната длиной* 3 *чи лежит на земле. Если канат натянуть, то расстояние до основания столба будет* 8 *чи. Спрашивается, какова длина каната?*

Задача 8. *Имеется стена высотой* 1 *чжан. К стене прислонён*

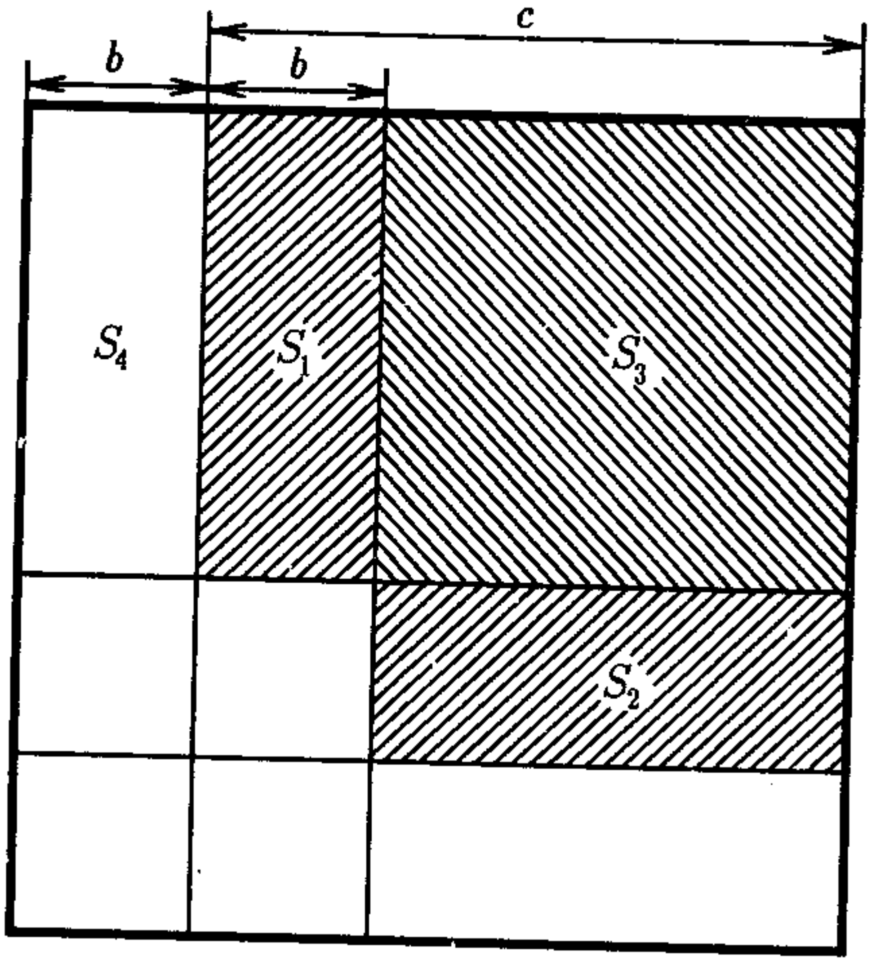

Рис. 3.5.

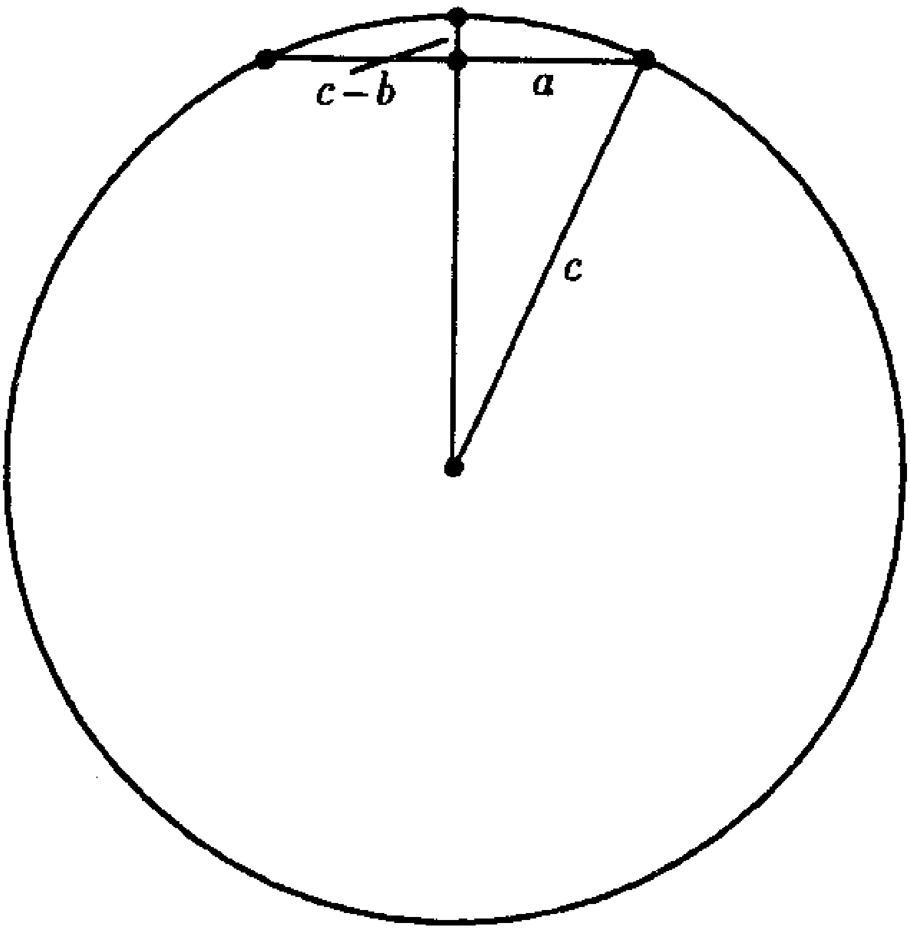

Рис. 3.6.

столб так, что высота наклонного столба сравнялась со стеной. Если столб оттащить на 1 чи от стены, то он упадёт на землю. Спрашивается, каков столб?

Задача 9. *Имеется замурованное в стену бревно, величина его неизвестна. Если спилить его на 1 цунь, то длина среза будет равна 1 чи. Спрашивается, каков диаметр бревна?*

(На рис. 3.6 $c - b = 1$ цунь, $2a = 1$ чи, $2c$ — искомый диаметр.)

Задача 10. *Имеются открытые ворота, которые удалены от порога на 1 чи и не совпадают на 2 цуня. Спрашивается, какова ширина ворот?*

Задача 13. *Имеется бамбук высотой 1 чжан. Вершину его согнули так, что она касается земли на расстоянии 3 чи от корня.*

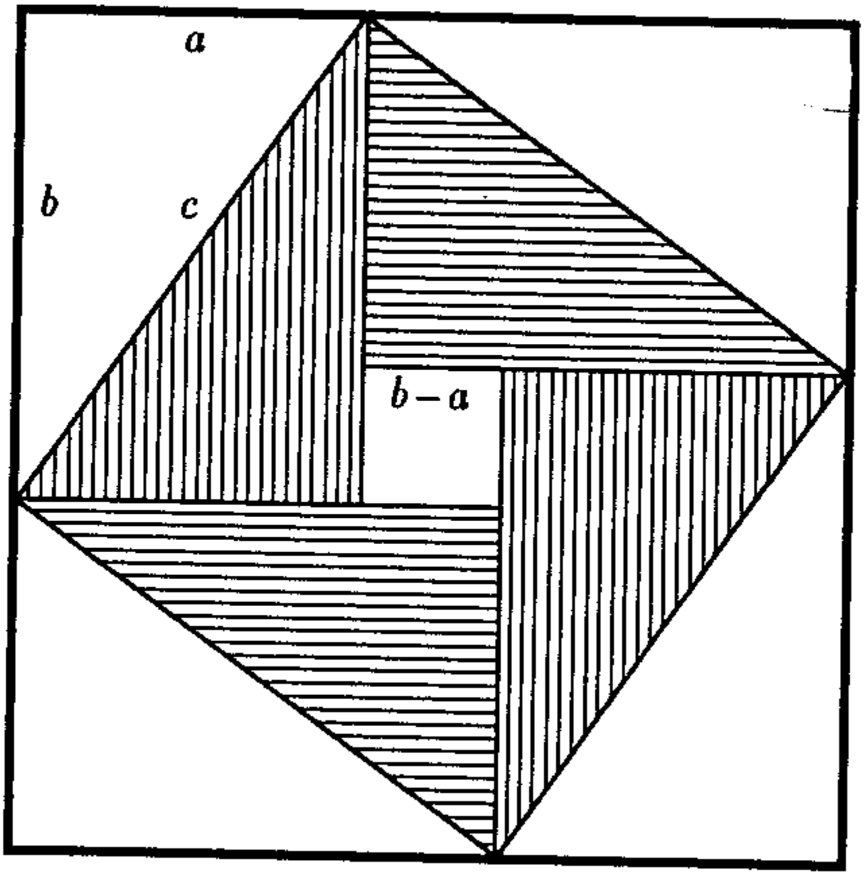

Рис. 3.7.

Спрашивается, какова высота после сгибания?

Задача 11 ещё более сложная: *«Имеется дверь, высота которой больше её ширины на* 6 *чи* 8 *цуней. Наибольшее расстояние между углами (диагональ)* 1 *чжан. Спрашивается, каковы ширина и высота двери?»* В этой задаче по данным $d = b - a$ и c нужно найти a и b. Ответ даётся в виде $a = f - \frac{d}{2}$, $b = f + \frac{d}{2}$, где $f = \sqrt{\frac{c^2 - 2(d/2)^2}{2}}$. В комментариях к «Математике в девяти книгах», относящихся к III в. н. э., решение этой задачи основано на уравнении $x^2 + dx = \frac{c^2 - d^2}{2}$, где $x = a$. Это соотношение в комментариях доказано следующим образом. Пусть S — площадь каждого из заштрихованных на рис. 3.7 треугольников. Тогда $\frac{c^2 - (b-a)^2}{2} = 2S = ab = x(x + (b - a)) = x^2 + (b - a)x$.

Задача 12 по формулировке близка к задаче 11: *«Имеется дверь неизвестной высоты и ширины. Ширина двери короче неизвест-*

ной длины бамбукового шеста (не хватает 4 чи), длина двери короче длины шеста (не хватает 2 чи) с диагональю длина шеста как раз совпадает. Спрашивается, каковы ширина, высота и диагональ двери?» В этой задаче по данным $c-a=p$ и $c-b=q$ требуется найти a, b и c. Ответ приведён в виде $a=q+\sqrt{2pq}$, $b=p+\sqrt{2pq}$, $c=p+q+\sqrt{2pq}$. Это весьма серьёзная задача. Едва ли не самое простое её решение дают преобразования $c^2+2pq=a^2+b^2+2pq=(c-p)^2+(c-q)^2+2pq=2c^2-2(p+q)c+(p+q)^2$, т. е. $2pq=(c-(p+q))^2$.

В задачах «Математики в девяти книгах» нам уже довелось встретить несколько пифагоровых троек. Решения задач 14 и 21 показывают, что составители этой книги владели общим правилом получения пифагоровых троек. Задача 14 такова: *«Два человека находятся в одном месте. Норма ходьбы A есть 7, норма ходьбы B есть 3. B идёт на восток. A идёт 10 бу на юг, затем идёт по косому направлению на северо восток до встречи с B. Спрашивается, какой путь прошёл каждый из них, A и B?»* В формулировке задачи 21 тоже участвует «норма ходьбы». В задаче 14 нужно найти прямоугольный треугольник с данным катетом a, стороны которого удовлетворяют соотношению $a+c=\frac{7b}{3}$. Правило, по которому находится ответ, годится для общего случая $a+c=\frac{pb}{q}$. Сначала находим $w=\frac{p^2+q^2}{2}$, $u=p^2-w=\frac{p^2-q^2}{2}$ и $v=pq$. Затем u, v и w умножаем на a и делим на u; в результате получаем a, и искомые b и c. Тройки чисел $(2u,2v,2w)=(p^2-q^2,2pq,p^2+q^2)$, где p и q — натуральные числа, составляют в совокупности все пифагоровы тройки. В комментариях к «Математике в девяти книгах» приведено следующее доказательство правила для решения задачи 14. На рис. 3.8 $S_1=S_2$, поэтому $b^2=c^2-a^2=S_1+S_3=S_2+S_3$, следовательно, $2c(a+c)=(S_4+S_5)+(S_2+S_3)=(a+c)^2+b^2$ и $a(a+c)=(S_4+S_5)-S_4=(a+c)^2-c(a+c)=(a+c)^2-((a+c)^2+b^2)/2$.

Если $(a+c):b=p:q$, то

$$\begin{aligned} a:b:c &= a(a+c):b(a+c):c(a+c) = \\ &= [(a+c)^2 - \frac{(a+c)^2+b^2}{2}]:b(a+c):[\frac{(a+c)^2+b^2}{2}] = \\ &= (p^2-q^2):2pq:(p^2+q^2). \end{aligned}$$

3.1.8. Две задачи о прямоугольных треугольниках

После задач на применение теоремы Пифагора в «Математике в девяти книгах» идут две задачи о прямоугольных треугольниках, не связанные с этой теоремой. В задаче 15 требуется *по данным катетам найти сторону квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник.* В комментариях к «Математике в девяти книгах» приведено следующее решение этой задачи. Пусть в прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат с диагональю BP. Достроим треугольник до прямоугольника $ABCD$ и построим прямоугольник $AEFG$, площадь которого равна площади прямоугольника $ABCD$ (рис. 3.9). Площадь прямоугольника $ABCD$ равна $2(S_1+S_2+S_3)$, а площадь части прямоугольника $AEFG$, лежащей внутри прямоугольника $ABCD$, равна $2S_1+S_2$. Поэтому площадь части прямоугольника $AEFG$, лежащей вне прямоугольника $ABCD$, равна S_2+2S_3. Следовательно, $BG=BC$, а значит, $AE=S_{AEFG}/AG=ab/(a+b)$.

В задаче 16 требуется *по данным катетам найти диаметр d вписанного круга.* Для вычисления d применяется формула $d = 2ab/(a+b+c)$, где c — гипотенуза. Для решения этой задачи достаточно приравнять правые части равенств $2S=ab$ и $2S=ar+br+cr$, где $r=d/2$.

3.1.9. Вычисление расстояний до недоступных объектов

В последней главе «Математики в девяти книгах» есть несложные задачи об измерении расстояний до недоступных объектов. В III в. н. э. Лю Хуэй добавил к этим задачам ещё девять задач, которые впоследствии были объединены в самостоятельный «Математический трактат

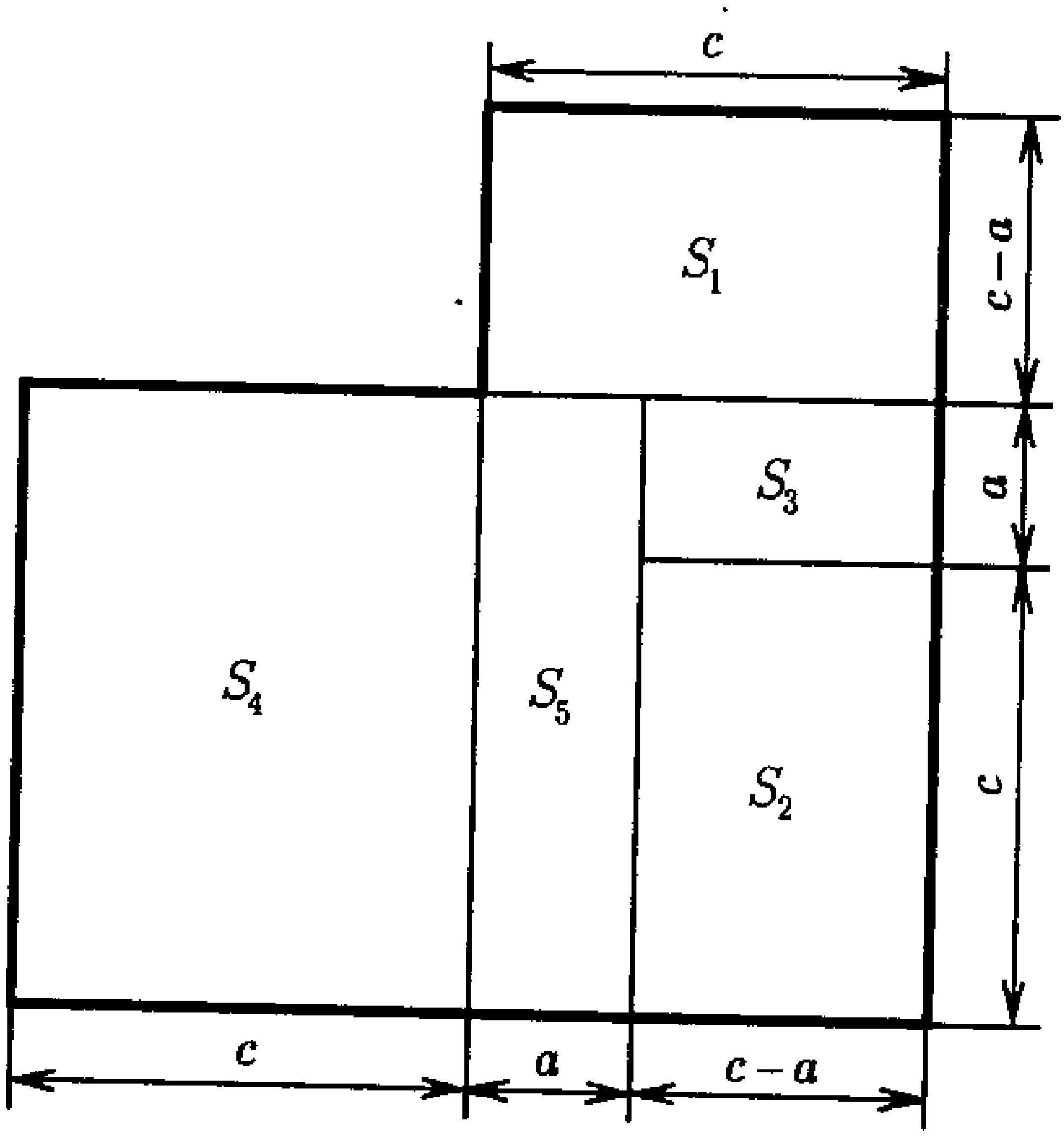

Рис. 3.8.

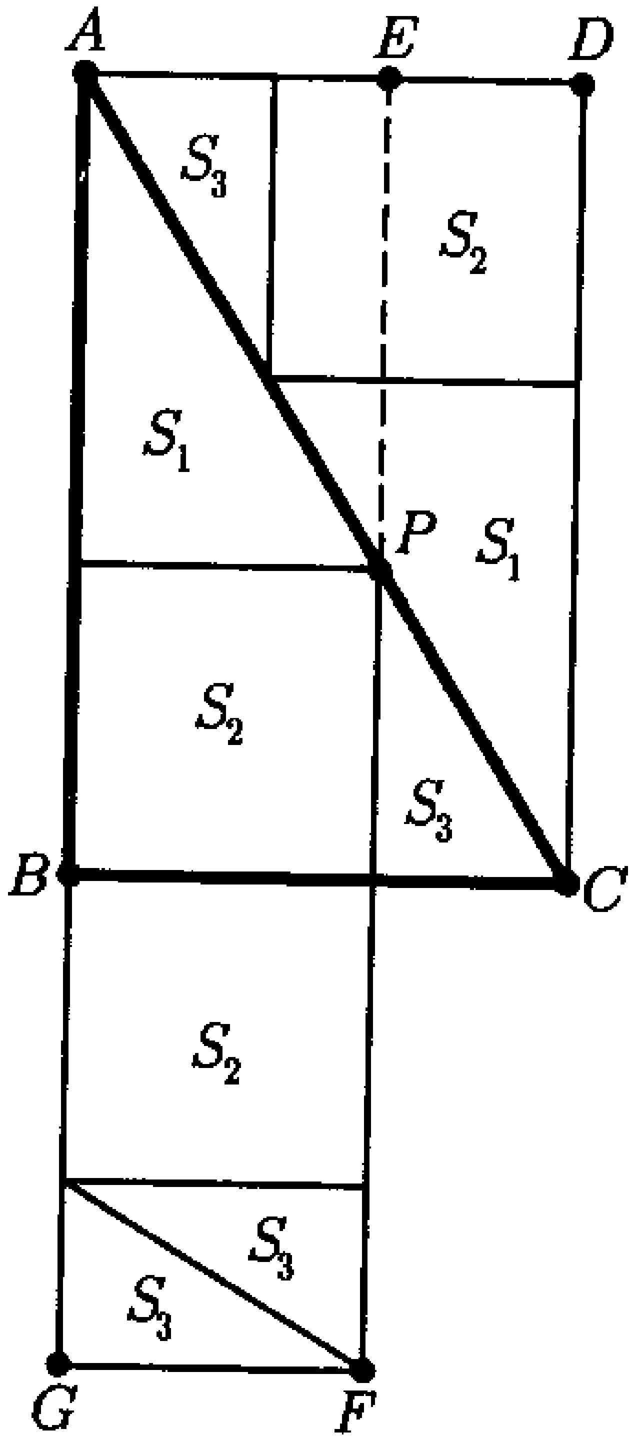

Рис. 3.9.

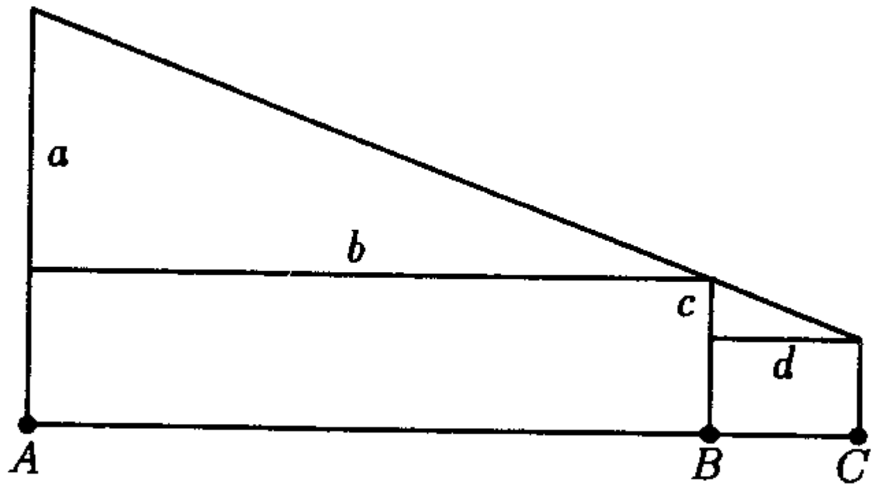

Рис. 3.10.

о морском острове». К сожалению, чертежи и доказательства Лю Хуэя были утеряны. Но сохранившиеся тексты задач и их решений свидетельствуют о весьма детальной разработке этой темы. Эти исследования уникальны; в Европе интерес к таким задачам возник гораздо позже, причём попали они туда из Китая.

Простейшая задача на вычисление недоступного расстояния — задача 23 из девятой книги «Математики в девяти книгах». В ней требуется *найти высоту горы A, если известно расстояние b от горы A до шеста B, расстояние d от шеста B до наблюдателя C и разность c между высотами шеста и наблюдателя* (рис. 3.10). Решение основано на соотношении $a = bc/d$. В «Математике в девяти книгах» и даже в комментариях к ней не встречается понятие подобных треугольников. По-видимому, доказательство соотношения $ad = bc$ было основано на равенстве площадей. Диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника; отрезав от них по два равных треугольника, получим два равный заштрихованных прямоугольника (рис. 3.11). Размеры этих прямоугольников равны $a \times d$ и $b \times c$, поэтому $ad = bc$. Комментарии к «Математике в девяти книгах» подтверждают, что доказательство было именно таким.

Задачи, решаемые Лю Хуэем, гораздо сложнее. Он пользуется тем,

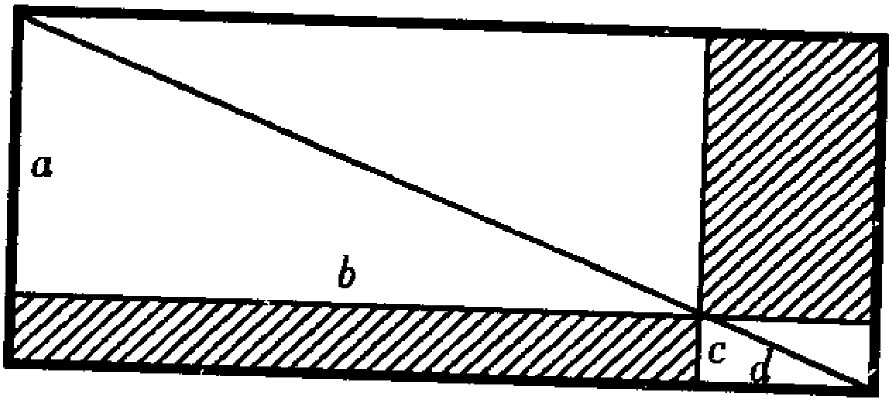

Рис. 3.11.

что два измерения позволяют вычислить сразу и высоту недоступного объекта, и расстояние до него. Уже в первой его задаче нужно с помощью двух наблюдений вычислить высоту острова и расстояние до него. На рис. 3.12 известны a — высота шеста, f — расстояние между двумя положениями шеста и расстояния c_1 и c_2. Требуется найти b и e. Эта задача, правда, не оригинальна. С её помощью ещё до Лю Хуэя пытались определить расстояние от Земли до Солнца, предполагая, что Земля плоская. Решение задачи основано на формулах $e = \frac{af}{c_2-c_1} + a$, $b = \frac{fc_1}{c_2-c_1}$. Их можно доказать с помощью подобия треугольников: $\frac{e-a}{a} = \frac{b}{c_1}$ и $\frac{e-a}{a} = \frac{b+f}{c_2}$. Приравнивая правые части этих равенств, получаем $b = \frac{fc_1}{c_2-c_1}$, поэтому $e - a = \frac{ab}{c_1} = \frac{af}{c_2-c_1}$. Но, как мы уже говорили, доказательство этих соотношений, по-видимому, было основано на равенстве площадей. Такое доказательство могло быть, например, следующим. Будем обозначать $S(AB)$ площадь прямоугольника с диагональю AB. Из рис. 3.12 видно, что $S(AB') = S(B'Q)$ и $S(AB) = S(BC) = S(B'C')$, т. е. $ab = (e-a)c_1$. Следовательно, $S(DB') = S(AB') - S(AB) = S(B'Q) - S(B'C') = S(PQ)$, т. е. $af = (e-a)(c_2-c_1)$. Поэтому

$$\frac{b}{f} = \frac{ab}{af} = \frac{(e-a)c_1}{(e-a)(c_2-c_1)} = \frac{c_1}{c_2-c_1}.$$

Наблюдения одной точки из двух разных точек можно комбиниро-

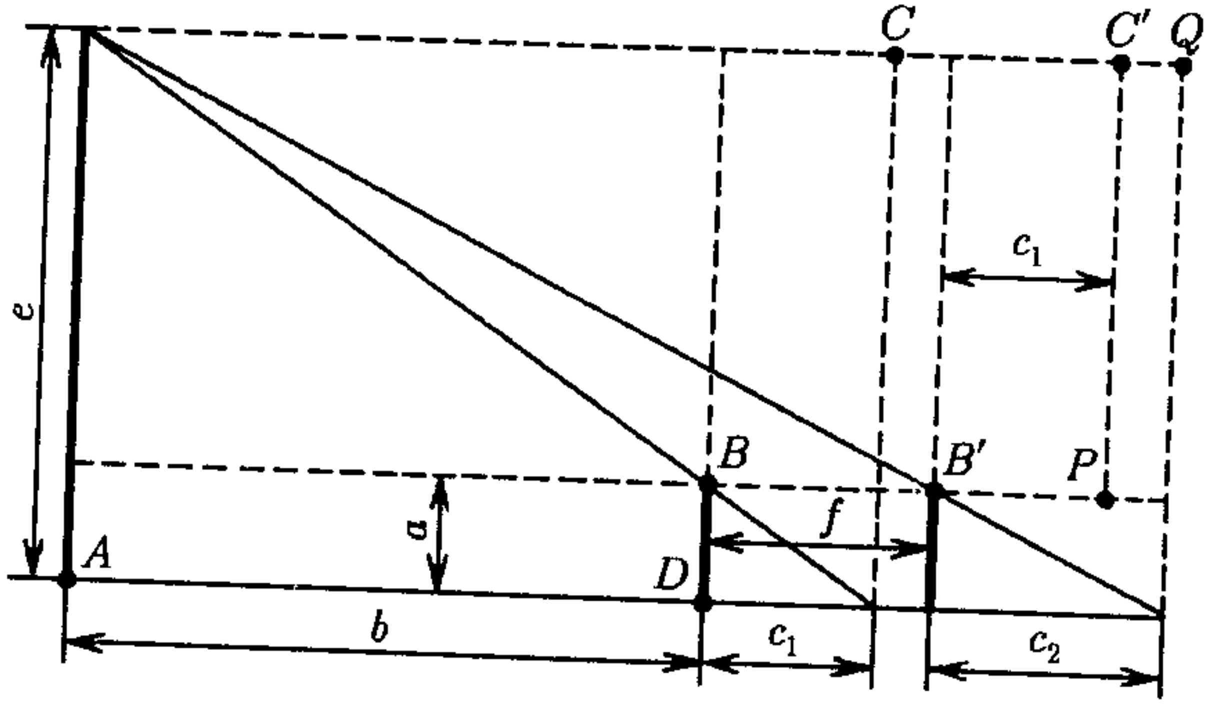

Рис. 3.12.

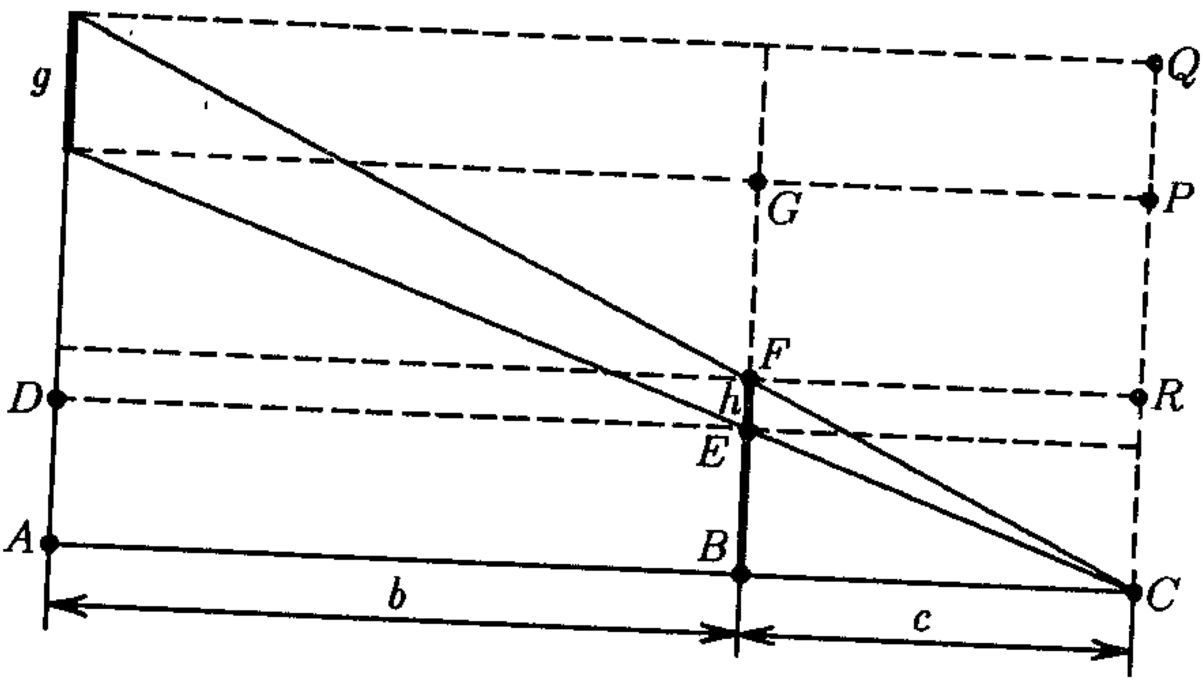

Рис. 3.13.

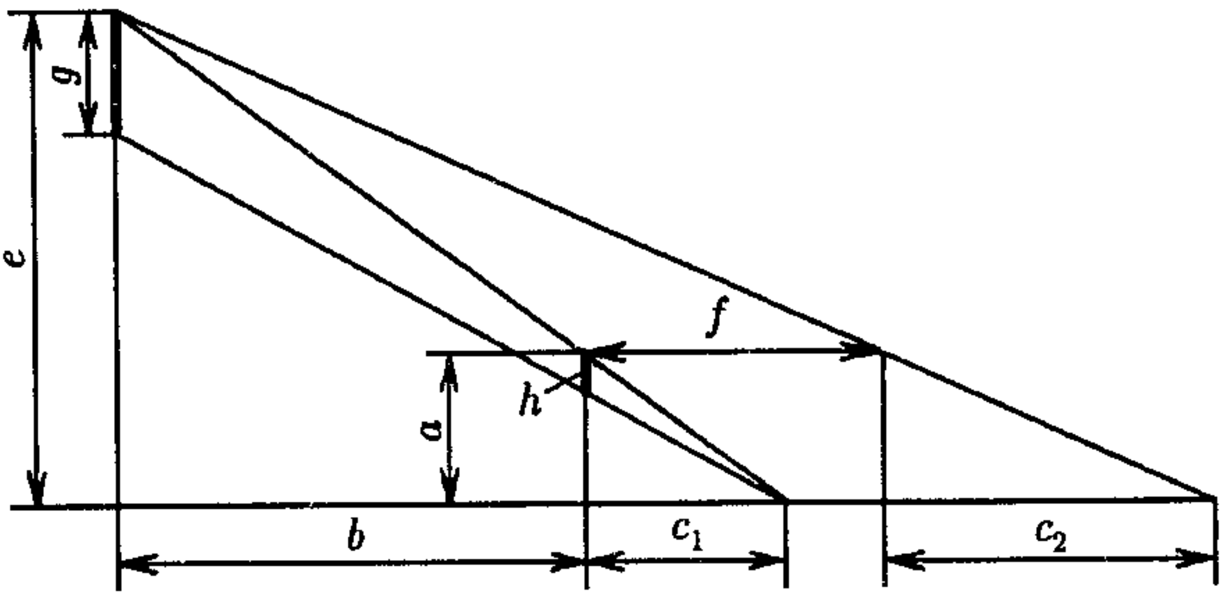

Рис. 3.14.

вать с наблюдениями двух разных точек из одной точки. Это нужно, например, для нахождения высоты дерева, растущего на вершине горы (рис. 3.13). Из подобия треугольников легко можно было бы получить соотношение $g : h = (b + c) : c$, т. е. $gc = h(b + c)$. С помощью площадей это соотношение можно получить следующим образом: $S(DF) = S(AF) - S(AE) = S(FQ) - S(EP)$; вычитая $S(FP)$ из $S(FQ)$ и $S(EP)$, получаем $S(DF) = S(GQ) - S(ER)$, т. е. $bh = gc - hc$.

Сочетание двух видов наблюдений появляется у Лю Хуэя уже в задаче 2. В этой задаче по данным h, f, c_1 и c_2 нужно найти высоту дерева g и расстояние до горы b (рис. 3.14). Если e — высота горы и дерева, a — высота шеста, то, как и в задаче 1, $e = \frac{af}{c_2 - c_1} + a$ и $b = \frac{fc_1}{c_2 - c_1}$. А так как $e : a = (b + c_1) : c_1 = g : h$, то $g = \frac{fh}{c_2 - c_1} + h$.

Ещё один вид наблюдений связан с измерением глубины ущелья с помощью угольника. Для этого одну и ту же точку дна ущелья наблюдают при двух положениях угольника (рис. 3.15). По известным величинам a_1, a_2, c и f нужно найти глубину b ущелья. Используя подобие треугольников, сделать это было бы несложно. В самом деле, с одной стороны, $CP = \frac{a_1(b+c)}{c}$, с другой стороны, $SP = \frac{a_2(b+c+f)}{c}$.

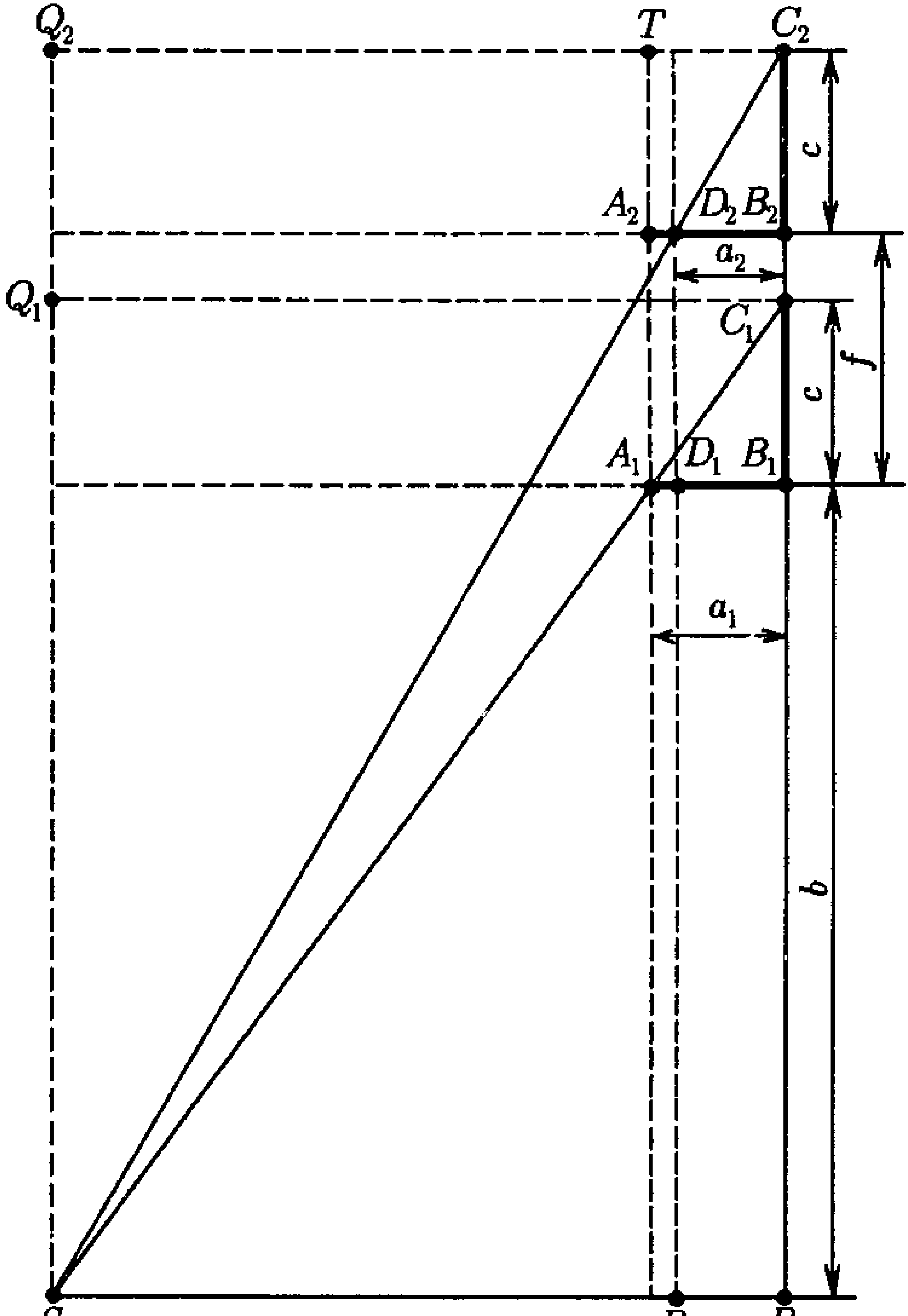

Рис. 3.15.

Приравнивая эти выражения, получаем $(a_1 - a_2)b + (a_1 - a_2)c = a_2 f$, т. е. $b = \frac{a_2 f}{a_1 - a_2} - c$. С помощью площадей это соотношение можно доказать следующим образом. Так как $S(RA_1) = S(PA_1) - S(PD_1)$ и $S(PA_1) = S(Q_1A_1) = S(Q_2A_2) = S(PD_2) - S(TD_2)$, то $S(RA_1) = S(PD_2) - S(TD_2) - S(PD_1) = S(B_1D_2) - S(TD_2)$. Следовательно, $b(a_1 - a_2) = a_2 f - c(a_1 - a_2)$, т. е. $b = \frac{f a_2}{a_1 - a_2} - c$.

Остальные задачи Лю Хуэя сводятся к сочетаниям этих видов наблюдений, и их можно решить, комбинируя указанные выше формулы.

3.1.10. Вычисление π

В комментариях к первой книге «Математики в девяти книгах» Лю Хуэй нашёл приближённое значение числа π, вычисляя площади правильных $6 \cdot 2^n$-угольников, вписанных в окружность. Для 3072-угольника он получил приближённое значение $3,14159$.

Ещё более точное значение π получил астроном и математик Цзу Чун-чжи (430-501). В не дошедшем до нас сочинении он показал, что $3,1415926 < \pi < 3,1415927$. Эта точность была превзойдена лишь 1000 лет спустя арабскими математиками. У Цзу Чун-чжи впервые встречается приближение числа π вида $\frac{355}{113}$.

3.1.11. Биномиальные коэффициенты

В трактате Чжу Ши-цзе (13 век) «Яшмовое зеркало четырёх элементов» содержится треугольная таблица биномиальных коэффициентов вплоть до 8-й степени. (Четыре элемента — это неизвестные, которыми служат стороны прямоугольного треугольника и ещё какая-нибудь связанная с ними величина.) Такая таблица до 6-й степени была известна и раньше: её знал Цзя Сянь (1010–1070). Эти китайские математики понимали способ образования биномиальных коэффициентов посредством сложения (треугольник Паскаля).

3.1.12. Китайская теорема об остатках

В «Математическом трактате», написанном Сунь-цзы в 3 или 4 веке, встречается следующая задача: «Найти число, которое при делении на числа 3, 5 и 7 даёт соответственно остатки 2, 3 и 2.» Правило решения приводится такое: «При делении на 3 остаток есть 2, поэтому возьмите 140. При делении на 5 остаток есть 3, поэтому возьмите 63. При делении на 7 остаток есть 2, поэтому возьмите 30. Сложив их вместе, получим 233. Из этого вычтите 210, и мы получим ответ.» Затем Сунь-цзы сообщает общее правило решение: «Если остаток от деления на 3 есть 1, возьмите 70; если остаток от деления на 5 есть 1, возьмите 21; если остаток от деления на 7 есть 1, возьмите 15. Если сумма этих чисел больше 106, вычитайте по 105, прежде чем получить ответ.»

В современных обозначениях речь идёт о решении системы сравнений $x \equiv r_1 \pmod{q_1}$, $x \equiv r_2 \pmod{q_2}$, $x \equiv r_3 \pmod{q_3}$ с попарно взаимно простыми модулями q_1, q_2, q_3. Для решения этой задачи сначала находят вспомогательные числа n_1, n_2 и n_3, для которых $n_1q_2q_3 \equiv 1 \pmod{q_1}$, $n_2q_1q_3 \equiv 1 \pmod{q_2}$ и $n_3q_1q_2 \equiv 1 \pmod{q_3}$, т.е. $35n_1 \equiv 1 \pmod 3$, $31n_2 \equiv 1 \pmod 5$ и $15n_3 \equiv 1 \pmod 7$. Полученные сравнения можно упростить, поделив 35 на 3 с остатком, и т.д.: $2n_1 \equiv 1 \pmod 3$, $n_2 \equiv 1 \pmod 5$ и $n_3 \equiv 1 \pmod 7$. Решение легко подбирается: $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ и $n_3 = 1$. Общее решение исходной системы сравнений находится так: $x \equiv (n_1q_2q_3r_1 + n_2q_1q_3r_1 + n_3q_1q_2r_3) \pmod{q_1q_2q_3}$, т.е. $x \equiv (70r_1 + 21r_2 + 15r_3) \pmod{105}$.

Цинь Цзю-шао в своём трактате (1247) приводит подробное решение задачи Сунь-цзы и говорит, что метод решения таких задач разработали составители календарей и астрономы.

Задача Сунь-цзы приводится в 1202 году в «Книге абака» Леонардо Пизанского.

3.1.13. Численное решение кубических уравнений

Ван Сяо-тун жил в самом начале царствования дома Тан (7-9 века). Он написал «Математический трактат о продолжении древних методов», в котором рассматривается, в частности, численное решение кубических уравнений и биквадратных уравнений. Это самое раннее сочинение, посвящённое решению уравнений алгебраическим способом. Задачи, решаемые Ван Сяо-туном, связаны с расчётом земляных работ при строительстве дамбы, плотины, канала, с вычислением ёмкости землехранилища. В этих задачах нужно вычислять объёмы некоторых неправильных тел, и они приводят к кубическим уравнениям.

Позже, уже в X в., решением кубических уравнений занимался Омар Хайям.

3.1.14. Вычисление сумм

Ян Хуэй (XIII в.) приводит правило суммирования первых n квадратов и первых n треугольных чисел.

3.1.15. Интерполяция

Для решения задач астрономии китайские математики использовали интерполяцию. Они первыми перешли от линейной интерполяции к квадратичной (VII в.), а затем и к кубической (XIII в.). При квадратичной интерполяции используется приближение квадратным трёхчленом, а при кубической — многочленом третьей степени.

3.1.16. Метод Руффини–Горнера

В XIII-XVI вв. в Китае был разработан метод численного решения уравнений высших степеней, который получил название «метод небесного элемента». Этот метод был создан в работах Цинь Цзю-шао, Ли Е, Чжу Ши-цзе и других. Этот метод переоткрыли Руффини (1809) и Горнер (1819) независимо друг от друга. Он основан на так называемой схеме Горнера — алгоритме вычисления значения многочлена $P(x)$ при данном x. Корень $x = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \dots$ многочлена $P(x)$ вычисляется следующим образом. Сначала подбором находим a_n, затем делаем подстановку $x = a_n 10^n + y$ и по схеме Горнера вычисля-

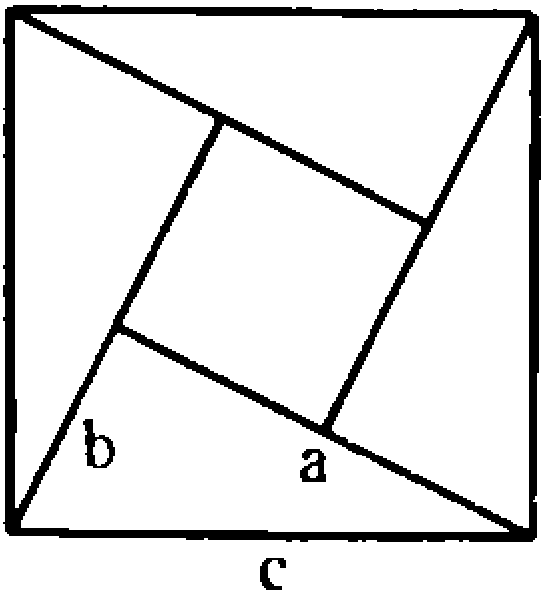

Рис. 3.16.

ем $Q(y) = P(x) = P(a_n 10^n + y)$. После этого находим первую цифру числа y и т.д.

В «Математике в девяти книгах» этот метод применялся для вычисления корней второй и третьей степени, но только в тех случаях, когда ответ — целое число. В трактатах Сунь-цзы и Чжан Цю-цзяня объясняется, как вычислить корень с точностью до любого знака.

3.2. Индия

Математические рассуждения в Древней Индии не были такими строгими, как в Древней Греции. Обычно рисовался чертёж, на котором основано доказательство, и под ним была краткая подпись: «Смотри!». Эти чертежи были достаточно ясные, и такой подход к изучению математики имел несомненные достоинства. Например, Бхаскара (XII в.) для доказательства теоремы Пифагора предлагал посмотреть на рис. 3.16 (длины катетов a и b и гипотенузы c на этом рисунке добавлены, чтобы пояснить доказательство: $c^2 = (a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$). Доказательства геометрических утверждений были крайне лаконичны, но часто весьма наглядны.

Цифры были придуманы в Индии. Мы называем цифры арабскими, потому что заимствовали их у арабов. Но сами арабы называли их индийскими, потому что заимствовали их у индийцев. Алгебраическая символика у индийцев была более продвинутая, чем у Диофанта.

Индийские математики рассматривали отдельные задачи, приводящие к линейным уравнениям, но общего метода решения линейных уравнений (как у китайских математиков) они не разработали. У них встречаются задачи, где требуется найти число, которое при делении на различные данные числа давало бы данные остатки. Возможно, задачи такого вида проникли в Индию из Китая, где в древности было найдено правило для их решения.

От вычислений с хордами к более удобным для вычислений синусам первыми перешли индийские астрономы в начале 5 века. Само название «синус» восходит к этим ученым. Они использовали термин «джива» — хорда, тетива лука. В арабских книгах его переделали в слово «джиба», которое не имело обиходного смысла, а потом заменили на настоящее арабское слово «джайб» — пазуха, вырез платья, выпуклость. При переводах арабских книг на латынь стали применять слово sinus — буквальный перевод слова «джайб».

В 16 веке индийские математики получили ряды для арктангенса, синуса и косинуса (на 100–200 лет раньше, чем в Европе).

3.2.1. Построение алтарей

Наиболее важные сведения о раннем этапе развития древнеиндийской математике содержатся в трактатах о построении алтарей. Эти трактаты носят общее название «Сульва-сутра», что в переводе с санскрита означает «правила верёвки» (основным инструментом при разметке алтарей служила верёвка). Они сохранились в нескольких редакциях, составленных в разное время: Баудхайана (800 г. до н. э.), Манава (750 г. до н. э), Апастамба (600 г. до н.э.), Катиайана (200 г. до н. э.). Основой для их датировки служит лишь историческая грамматика санскрита. Но в 500 — 400 г. до н. э. Панини составил очень подробную грамматику санскрита, которая вплоть до XIX в. оставалась наиболее полной и разработанной грамматикой во всем мире. Она содержит свыше 4000 правил и даёт обильный материал для датировки на основе исторической грамматики.

Форме алтаря в Древней Индии придавалось большое значение. Считалось, что любое отклонение от установленной формы или размера алтаря не только лишает жертвоприношение всякого смысла, но и может вызвать нежелательный эффект. В такой ситуации требование точности приобретало уже не практический, а математический характер.

Индийские алтари были самой разной формы. Были алтари в форме квадрата, круга, полукруга, равнобедренного треугольника. Были алтари в виде сокола с прямыми или изогнутыми крыльями, алтари в виде черепахи. Один из наиболее почитаемых алтарей, махаведи, имел форму равнобедренной трапеции. Но многие алтари разной формы должны были иметь одну и ту же площадь. В связи с этим возникала, например, задача превращения квадрата в равновеликий ему круг, круга в равновеликий ему полукруг, прямоугольника в равновеликий ему квадрат. Кроме того, в некоторых случаях требовалось увеличить площадь алтаря на строго определенную величину, сохранив при этом его форму.

С построением алтарей связана также одна интересная задача. Алтарь в форме сокола состоял из пяти слоев кирпичей. В каждом слое было 200 кирпичей; слои 1, 3 и 5 были одинаковые, слои 3 и 4 тоже. Но при этом требовалось, чтобы ни над каким швом между кирпичами одного слоя не было шва между кирпичами следующего слоя. Кирпичи должны были располагаться достаточно симметрично, и желательно было обойтись наименьшим количеством различных форм кирпичей.

Как мы уже говорили, подход к построениям в «Сульва-сутре» во многом скорее математический, нежели практический. Точности и правильности построений придается большое значение. При этом возникают элементы доказательств. Например, для определения площади равнобедренной трапеции, одну из ее частей отрезают и перекладывают, как показано на рис. 3.17. Это, бесспорно, уже математическое

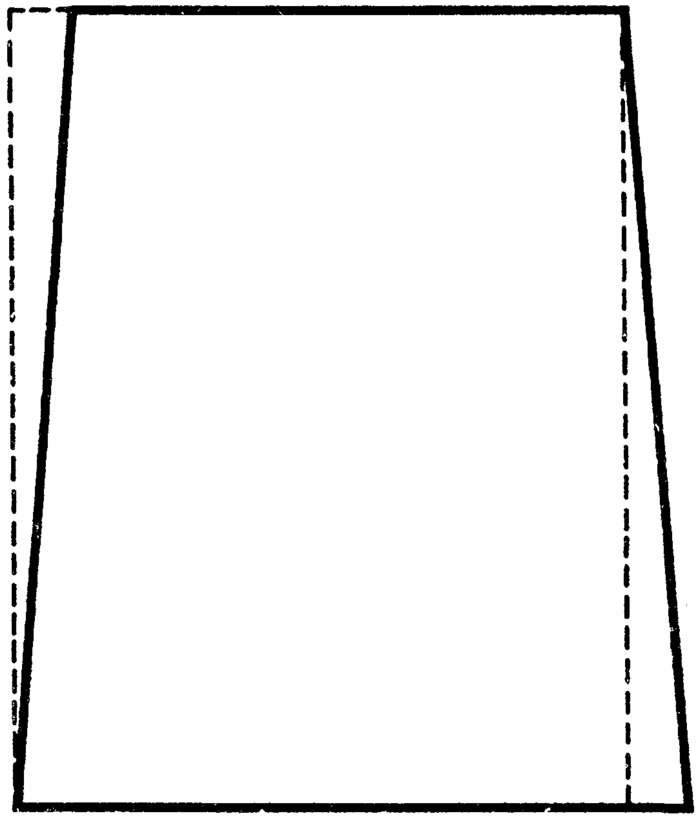

Рис. 3.17.

доказательство. Формулировка теоремы Пифагора, содержащаяся в «Сульва-сутре», тоже свидетельствует о математическом подходе.

3.2.2. Построение квадрата

«Сульва-сутра» содержит несколько разных способов построения квадрата. Наиболее простое из этих построений — проведение в круге двух перпендикулярных диаметров. Возьмём верёвку длиной $2r$ и отметим её середину. Затем натянем верёвку и забьём колышки A и B в её концах, а колышек O в её середине. Построим окружность радиуса r с центром O и окружности радиуса $2r$ с центрами A и B (рис 3.18). Соединив точки пересечения больших окружностей, построим квадрат $ACBD$. Но сторона этого квадрата равна $r\sqrt{2}$, т. е. сразу построить таким образом квадрат с заданной стороной нельзя.

Для построения квадрата с данной стороной $2r$ это построение нужно продолжить. Проведём окружности радиуса r с центрами A, B, C

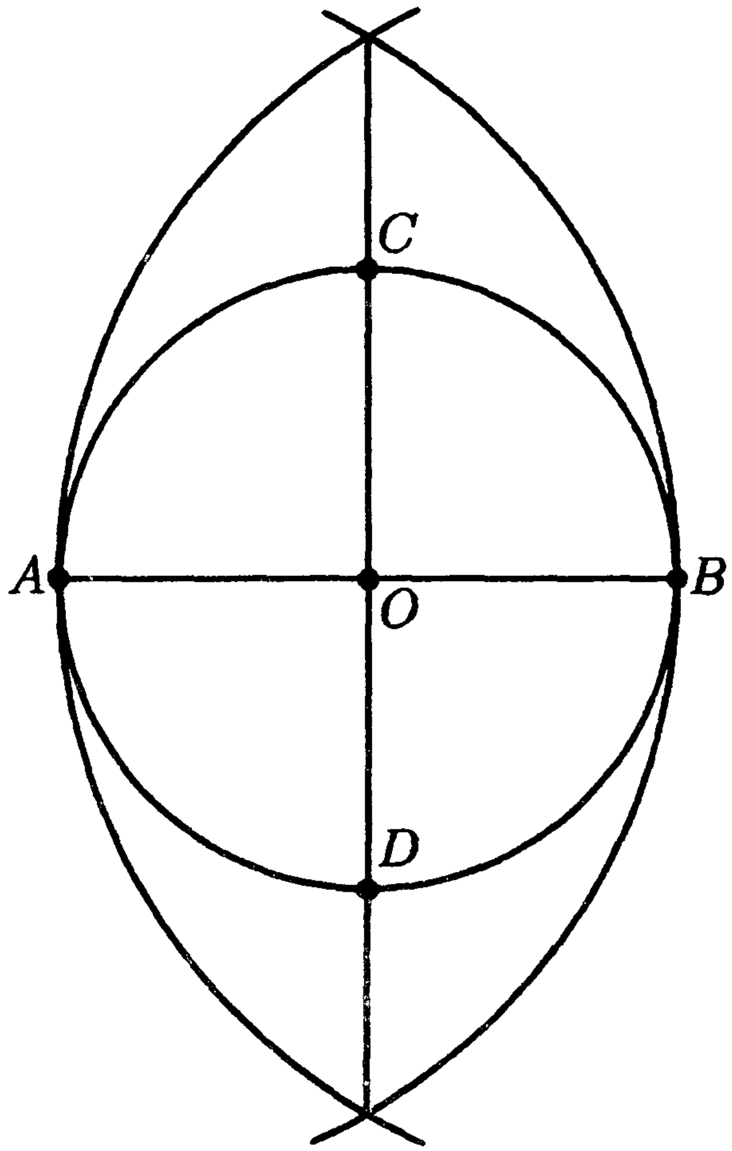

Рис. 3.18.

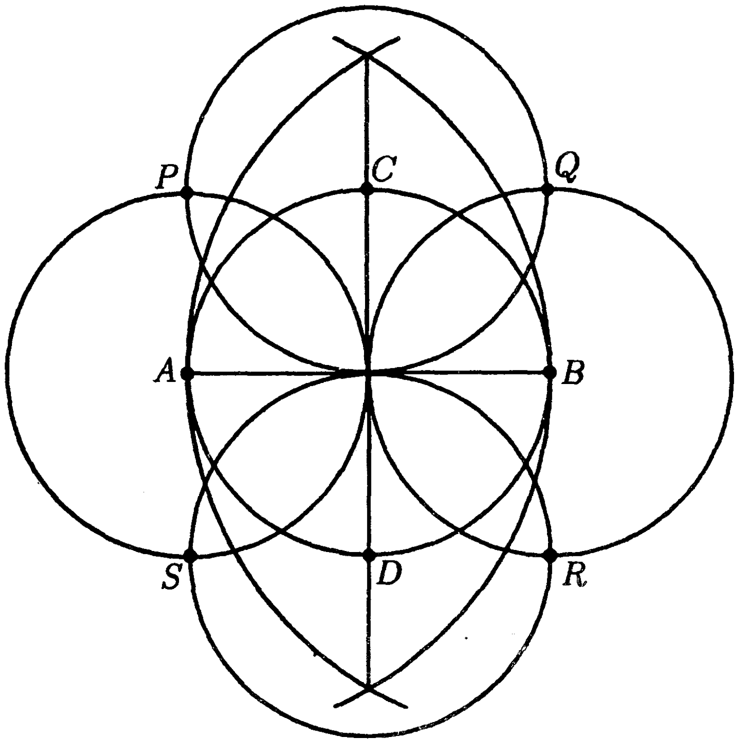

Рис. 3.19.

и D. Точки пересечения этих окружностей являются вершинами квадрата $PQRS$ со стороной $2r$ (рис. 3.19).

В «Сульва-сутре» приведено простое построение квадрата с помощью бамбуковой палки, длина которой равна стороне квадрата (точнее говоря, чуть больше стороны квадрата). Высверлим на концах бамбуковой палки два отверстия, расстояние между которыми равно стороне квадрата, а затем высверлим отверстие посредине между этими отверстиями. Положим палку и забьём колышки в концевые отверстия. Снимем палку с одного колышка и, вращая её вокруг второго колышка, проведём окружность. Аналогично проведём окружность, закрепив второй конец палки. Расположим теперь палку так, чтобы один её конец находился в середине исходного положения, а сама она при этом проходила через точку пересечения окружностей (рис. 3.20). Пусть A — положение второго конца палки. Нам остаётся расположить палку так, чтобы её середина находилась в точке A, а сама она касалась окружностей (на рис. 3.20 это положение изображено штриховой рамкой).

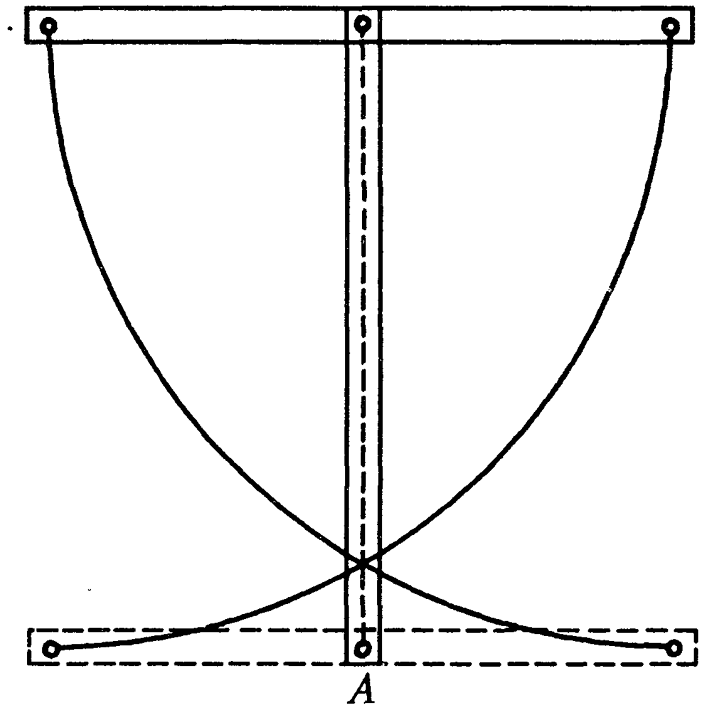

Рис. 3.20.

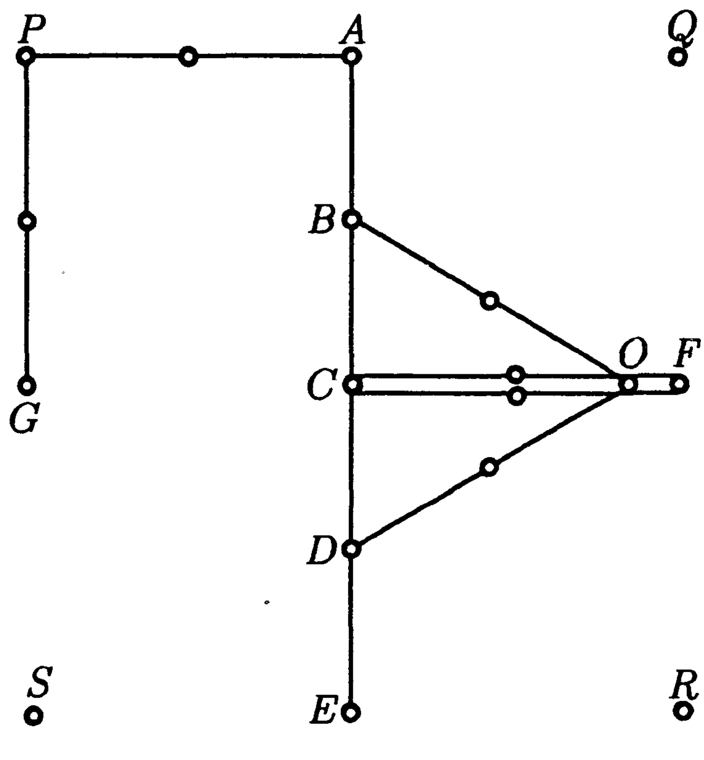

Рис. 3.21.

Весьма интересно построение квадрата со стороной a с помощью верёвки с пятью узелками, делящими её на четыре части длиной $a/4$. Натянем эту верёвку и вобьём колышки A, B, C, D и E в узелках. Снимем верёвку с колышков и наденем её концевые узелки на колышки B и D. Затем оттянем верёвку за середину и вобьём в полученной точке O колышек (рис. 3.21). Наденем оба концевых узелка на точку C и оттянем верёвку за середину так, чтобы она проходила через точку O, и вобьём в полученную точку F колышек. Аналогично построим точку G. Надев концевые узлы верёвки на колышки A и G и оттянув верёвку за середину, можно построить вершину P квадрата $PQRS$ со стороной a; остальные вершины строятся аналогично.

3.2.3. Теорема Пифагора

В одной из ранних редакций книги «Сульва-сутра» (Апастамба, 600 г. до н. э.) содержится формулировка теоремы Пифагора: «Диагональ прямоугольника образует оба квадрата, которые вертикальная и горизонтальная стороны образуют по отдельности». Случай прямоугольника с равными сторонами выделен особо: «Диагональ квадрата образует удвоенную площадь».

Нет никаких достоверных свидетельств того, что составители «Сульва-сутры» знали не только формулировку теоремы Пифагора, но и её доказательство. Но для построения квадрата, площадь которого в два раза меньше площади исходного квадрата, они поступали следующим образом. В серединах сторон исходного квадрата забивали колышки; они были вершинами искомого квадрата (рис. 3.22). Из этого построения доказательство теоремы Пифагора для квадрата следует очевидным образом: площадь большого квадрата, сторона которого равна диагонали маленького квадрата, вдвое больше площади маленького квадрата.

Основные применения теоремы Пифагора при разметке алтарей связаны с построением квадрата, площадь которого равна сумме или разности площадей двух данных квадратов. Построение стороны PQ квадрата, площадь которого равна сумме площадей двух данных ква-

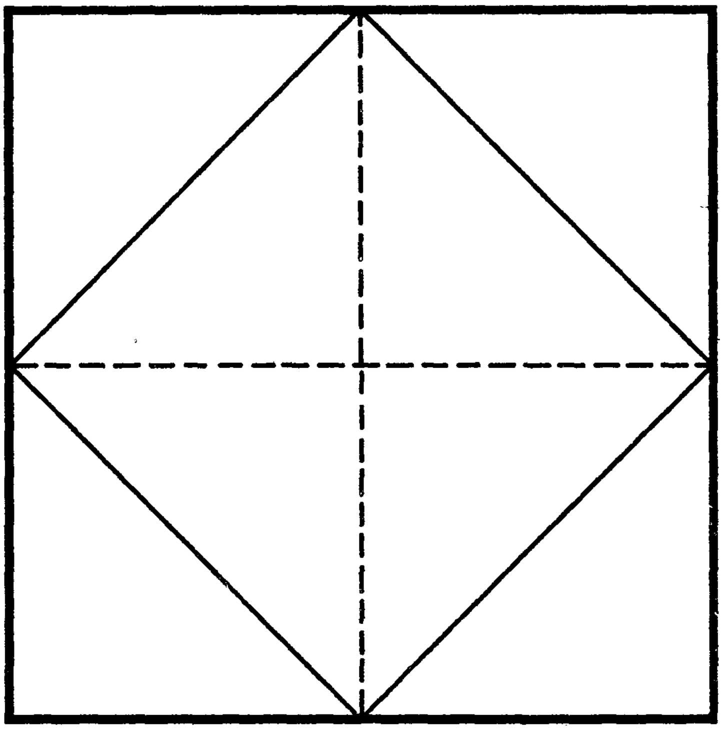

Рис. 3.22.

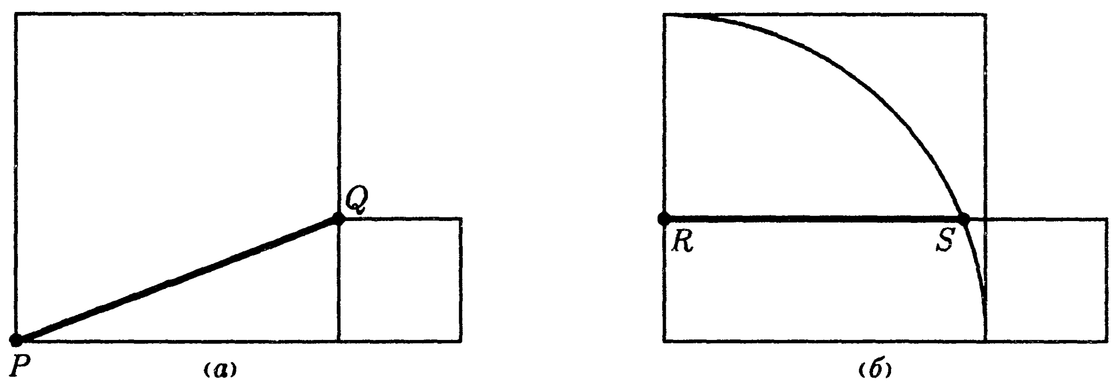

Рис. 3.23.

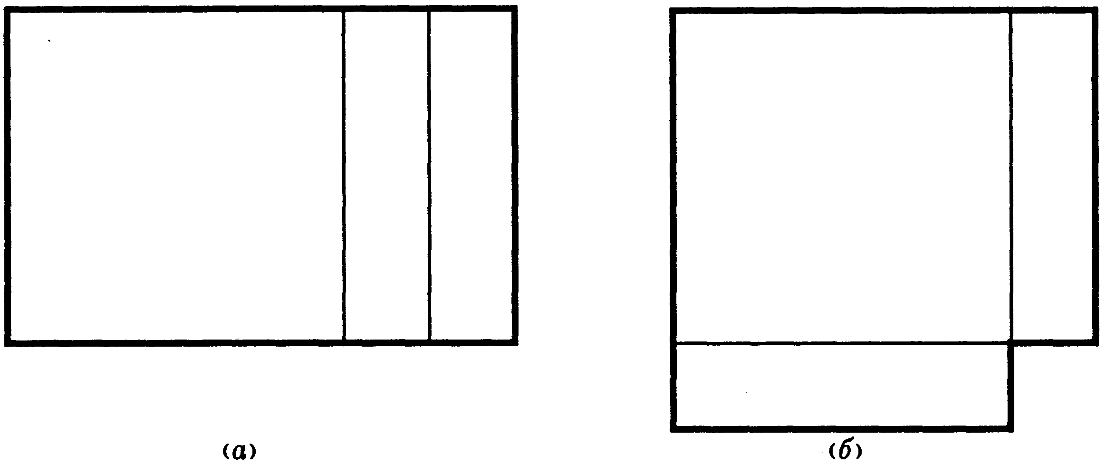

Рис. 3.24.

дратов, изображено на рис. 3.23,a; построение стороны RS квадрата, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов, изображено на рис. 3.23,*б*. Последнее построение использовали при преобразовании прямоугольника в равновеликий ему квадрат. Для этого от прямоугольника отрезали квадрат, а оставшуюся часть разрезали на два равных прямоугольника (рис. 3.24,a). Затем один из прямоугольников перекладывали так, как показано на рис. 3.24,*б*. В результате площадь прямоугольника оказывалась равной разности площадей двух квадратов. После этого оставалось лишь построить квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов.

Представление площади прямоугольника в виде разности площадей двух квадратов можно перевести на алгебраический язык: если a и b — длины сторон прямоугольника, причём $a > b$, то

$$ab = \left(a + \frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Было бы слишком поспешно сразу же делать вывод о том, что это тождество для чисел было известно, но этому есть ещё и другие подтверждения. По крайней мере для $b = 1$ это тождество действительно было известно. Дело в том, что поздняя редакция «Сульва-сутры» (Катиайана, 200 г. до н. э.) содержит следующее правило для построения квадрата, площадь которого в n раз больше площади данного квадрата со стороной a. Построим равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = (n-1)a$ и боковыми сторонами $AC = CB = (n+1)a/2$. Тогда его высота CH равна стороне искомого квадрата. В самом деле, по теореме Пифагора $CH^2 = CA^2 - AH^2 = \left(\frac{(n+1)a}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)a}{2}\right)^2 = na^2$, т. е. $CH = a\sqrt{n}$. Это построение трудно объяснить чисто геометрически, без использования числового тождества

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = n.$$

Говоря о теореме Пифагора, следует различать две её формулировки, которые эквивалентны для нас, но эквивалентность которых для древних народов была совсем не очевидна. В первой формулировке речь идёт о площадях квадратов, построенных на сторонах треугольника, а во второй о некоторых числах (квадратах длин сторон треугольника). Приведённое выше построение отрезка длиной $a\sqrt{n}$ свидетельствует о том, что теорему Пифагора в древней Индии умели применять в обеих формулировках.

3.2.4. Пифагоровы треугольники

Одним из наиболее почитаемых алтарей в Древней Индий был алтарь махаведи, имеющий форму равнобедренной трапеции с основаниями 24 и 30 и высотой 36 (рис. 3.25). Если M и N — середины оснований BC и AD этой трапеции, то $MD^2 = 36^2+15^2 = 3^2(12^2+5^2) = 3^2 \cdot 13^2 = 39^2$. Таким образом, с алтарем махаведи естественным образом связан Пифагоров треугольник со сторонами 15, 36 и 39, подобный (с коэффициентом 3) треугольнику со сторонами 5, 12 и 13. С этим алтарем связано удивительно много пифагоровых треугольников; они изображены на рис. 3.26. Упоминание треугольников, изображённых на рис. 3.26, *в*—*д*, может показаться некоторой натяжкой. Но это не так. Во-первых, в книге «Сульва-сутра» перечислены все эти пифагоровы треугольники, и только они. Во-вторых, для построения алтаря махаведи можно было использовать пифагоровы треугольники, у которых один из катетов равен 15 или 12. В самом деле, для построения треугольника

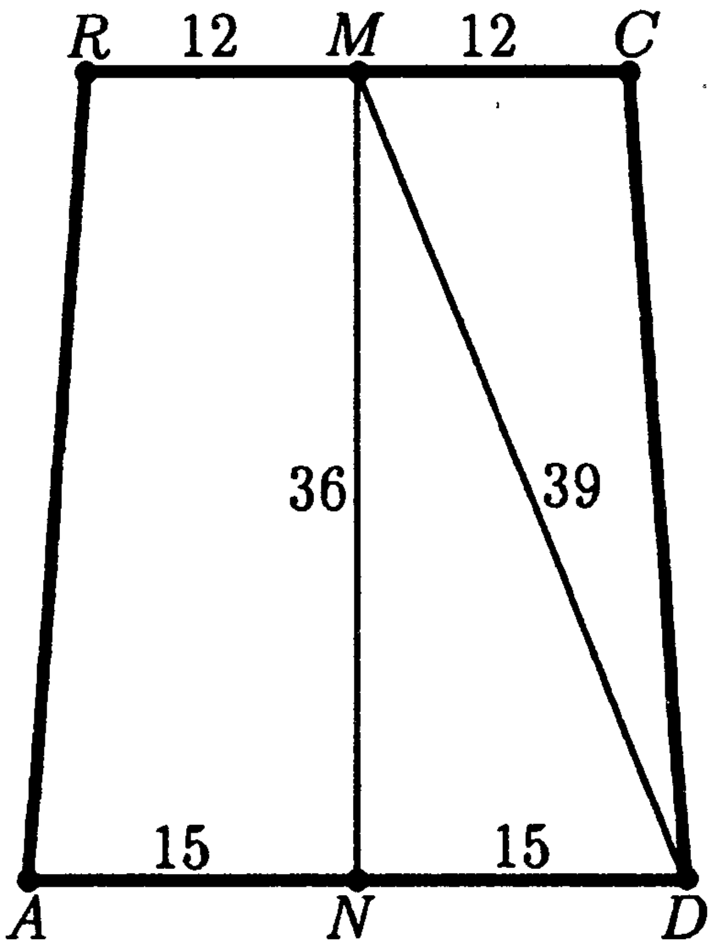

Рис. 3.25.

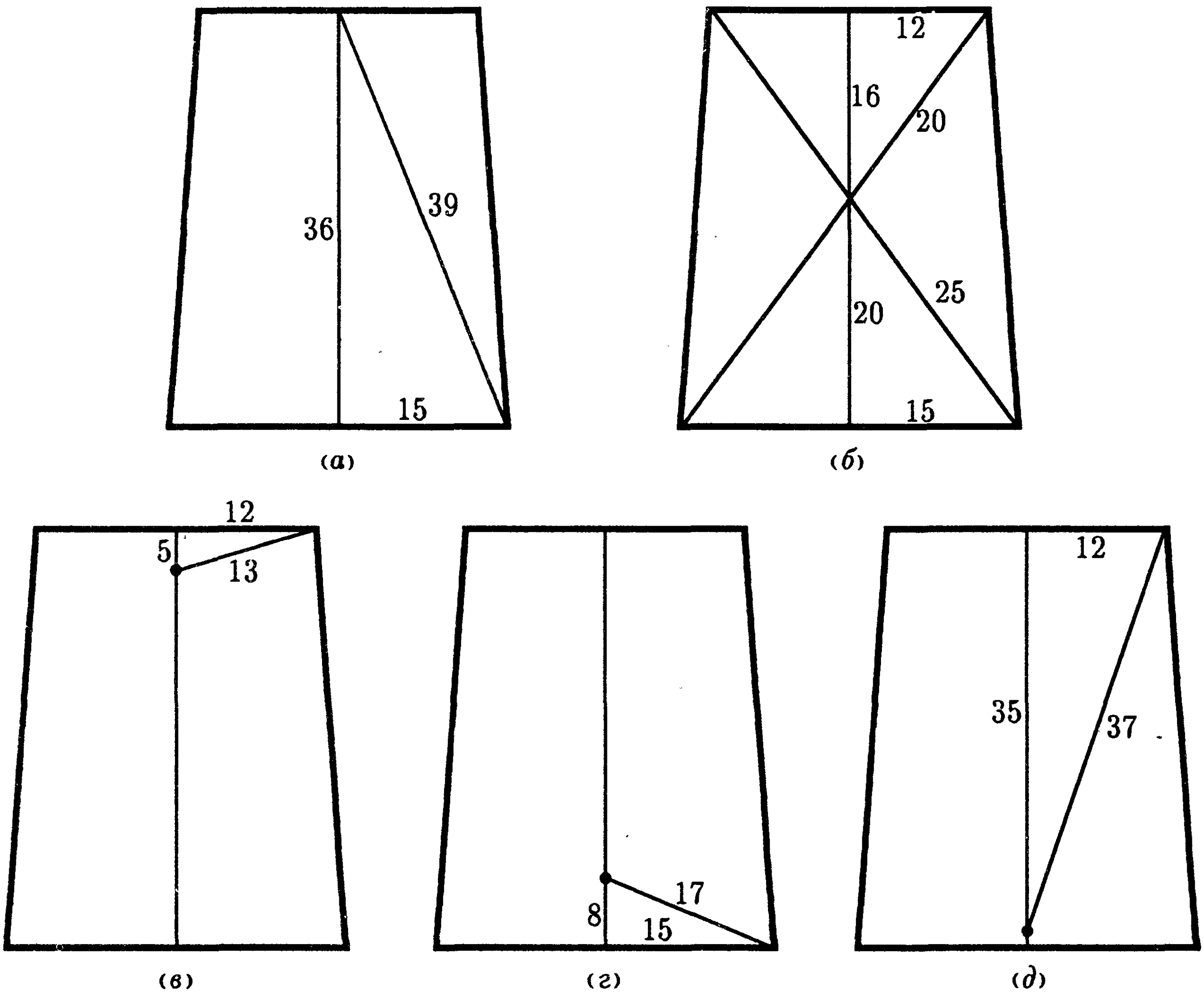

Рис. 3.26.

MND (см. рис. 3.25) «Сульва-сутра» рекомендует поступить следующим образом. Возьмём верёвку длиной $39 + 15 = 54$, на которой есть отметки 39 и 15. Построим с её помощью отрезок MN длиной 36. Затем привяжем концы верёвки к колышкам M и N и оттянем верёвку за отметку 15. В результате получим искомую точку D. Чтобы построить аналогичным образом точку C, нужно воспользоваться пифагоровым треугольником, один катет которого равен 12.

На рис. 3.26 встречаются следующие пифагоровы треугольники: $(3\lambda, 4\lambda, 5\lambda)$, где $\lambda = 4$ или 5; $(5\lambda, 12\lambda, 13\lambda)$, где $\lambda = 1$ или 3; (8, 15, 17); (12, 35, 37). Пифагорову тройку (12, 35, 37) вряд ли можно было найти простым перебором. По-видимому, составители «Сульва-сутры» знали какой-то способ нахождения пифагоровых троек. Весьма вероятно, что их способ был следующий. Как мы уже говорили, им было известно тождество $(\frac{n+1}{2})^2 - (\frac{n-1}{2}) = n$. Пусть $n = m^2$. Тогда треугольник со сторонами $\frac{m^2-1}{2}$, m и $\frac{m^2+1}{2}$ прямоугольный. Для $m = 2$, 3, 4, 5 и 6 получаем соответственно пифагоровы тройки (3, 4, 5), (4, 3, 5), (15, 8, 17), (12, 5, 13) и (35, 12, 37). Это как раз те пифагоровы тройки, которые содержатся в «Сульва-сутре»; вряд ли это случайно.

3.2.5. Площадь круга

Особое значение при построении алтарей имела площадь. Поэтому длина окружности строителей алтарей не интересовала, но в каждой редакции «Сульва-сутры» приведено несколько разных правил для превращения круга в равновеликий ему квадрат или квадрата в равновеликий ему круг. Эти правила дают некоторые приближённые формулы для вычисления площади круга, т. е. приближённые значения числа π. Среди этих приближений встречаются и весьма грубые. Например, одно из правил для построения стороны квадрата, равновеликого данному кругу, рекомендует разделить диаметр на 15 равных частей и взять 13 таких частей. Согласно этому правилу $\frac{\pi d^2}{4} = S = a^2 = \left(\frac{13}{15}\right)^2 d^2$, т. е. $\pi = 4 \cdot \left(\frac{13}{15}\right)^2 \approx 3{,}004$.

Хорошее приближение для числа π содержит одна из наиболее ран-

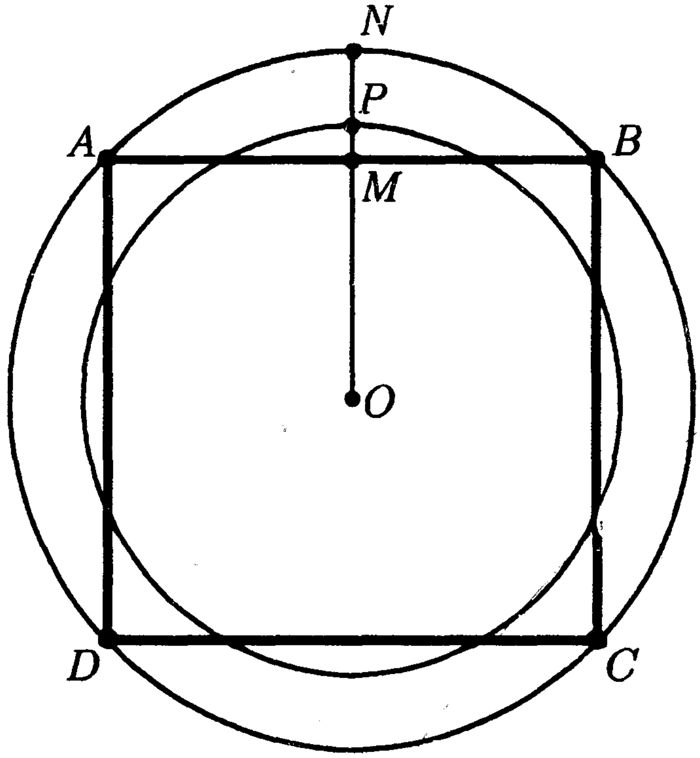

Рис. 3.27.

них редакций «Сульва-сутры» (Манава, 750 г. до н. э.). В этой книге говорится, что площадь квадрата со стороной 2 равна площади круга радиуса $1\frac{1}{8}$. Согласно этому правилу $\pi\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^2 = 4$, т. е. $\pi = 4\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^2 \approx 3{,}16$. Такое же приближение для числа π использовали в Древнем Египте.

Среди различных приближений для числа π в «Сульва-сутре» резко выделяется значение 3,088. Правила, приводящие к нему, содержатся во всех редакциях, причём этих правил два — геометрическое и алгебраическое. По-видимому, именно эту величину составители «Сульва-сутры» считали точным значением отношения площади круга к площади квадрата, построенного на его радиусе.

Основное построение, связанное с этим приближённым значением, таково. Опишем вокруг квадрата $ABCD$ окружность и проведём в ней радиус ON, перпендикулярный стороне AB; этот радиус пересекает сторону AB в точке M (рис. 3.27). Построим точку P, делящую отрезок MN в отношении $MP : PN = 1 : 2$. Тогда OP предлагается взять в качестве радиуса круга, равновеликого квадрату $ABCD$. Если a — сторона квадрата $ABCD$, R — радиус полученного круга, то

$R = \frac{a}{2} + \frac{1}{3}(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2}) = a\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$. Значит, согласно предлагаемому правилу $a^2 = \pi R^2 = a^2\frac{\pi}{9}\cdot\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2\pi}{18}\cdot(3+2\sqrt{2})$, т. е. $\pi = \frac{18}{3+2\sqrt{2}} \approx 3{,}088$. Для получения точного решения число $\frac{1}{3}$ нужно заменить на число λ, удовлетворяющее соотношению $1 = \pi\left(\frac{1}{2} + \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)\right)^2$, т. е. $\lambda = \frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2}\right)$. Последовательными наилучшими приближениями числа λ рациональными числами являются дроби $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{9}{29}$ ... Взяв, например, $\frac{4}{13}$ вместо $\frac{1}{3}$, получим для числа π приближённое значение $3{,}147\ldots$

Для решения обратной задачи, т. е. для построения квадрата, равновеликого данному кругу, «Сульва-сутра» предлагает следующее правило. Пусть d — диаметр круга. Тогда сторона a искомого квадрата равна

$$d\cdot\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8\cdot 29} - \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6} + \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right).$$

Так как $a^2 = \pi\frac{d^2}{4}$, то это правило дает для числа π приближённое значение 3,088. Гораздо более точное значение числа π дает менее громоздкая формула $a = d\cdot(\frac{7}{8} + \frac{1}{8\cdot 11})$; в этом случае для числа π получаем приближённое значение $2\left(\frac{a}{d}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{39}{44}\right)^2 \approx 3{,}1426$. Почти совпадающие не очень точные приближённые значения числа π в геометрическом и алгебраическом правилах свидетельствуют о родстве этих правил. Это родство подтверждается тем, что второе правило можно получить из первого, воспользовавшись приближённым значением

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34} = \frac{577}{408} \approx 1{,}414216,$$

которое содержится в книге «Сульва-сутра». От точного значения $\sqrt{2} = 1{,}414214\ldots$ оно отличается лишь в шестом знаке после запятой. Тождество

$$577^2 = 332\,929 = 2\cdot 408^2 + 1$$

свидетельствует о том, что это приближение очень хорошее; дробь $577/408$ входит в число подходящих дробей разложения $\sqrt{2}$ в цепную дробь. Согласно первому (геометрическому) правилу

$$\frac{d}{a} = \frac{2R}{a} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{3}.$$

Если мы подставим для $\sqrt{2}$ указанное приближенное значение, то получим $\frac{d}{a} = \frac{1393}{1224}$, т. е. $\frac{a}{d} = \frac{1224}{1393}$. Легко проверить, что

$$\frac{1224}{1393} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{41}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1393}.$$

Отбросив последнее слагаемое, получим второе (алгебраическое) правило.

По-видимому, первое из рассмотренных нами правил (геометрическое) считалось точным. Религиозные обряды закрепили авторитет этого решения задачи о превращении квадрата в равновеликий ему круг. Но обратить это построение геометрически (для превращения круга в равновеликий ему квадрат) древние индийцы не сумели. Им пришлось воспользоваться алгеброй; применив приближённое значение числа $\sqrt{2}$, они нашли весьма неудобное, совсем не геометрическое построение, при котором отрезки нужно было несколько раз делить на равные части. Рассмотренные нами два правила, приводящие к приближённому значению $\pi \approx 3{,}088$, свидетельствуют о том, что составители «Сульва-сутры» к решению задач подходили не только геометрически, но и алгебраически. Здесь, правда, под алгеброй мы подразумеваем всего лишь умение сопоставлять отношению отрезков отношение чисел и умение производить с этими отношениями некоторые преобразования. Но это не так мало, как может показаться на первый взгляд.

3.2.6. Построение квадрата, равновеликого прямоугольнику

В книге «Сульва-сутра» квадрат, равновеликий данному прямоугольнику $ABCD$, строился следующим образом. Пусть для определённости $AB < BC$. Отрежем от прямоугольника $ABCD$ квадрат со стороной AB и разрежем оставшийся прямоугольник на два равных прямоугольника; один из этих прямоугольников приложим к квадрату. В

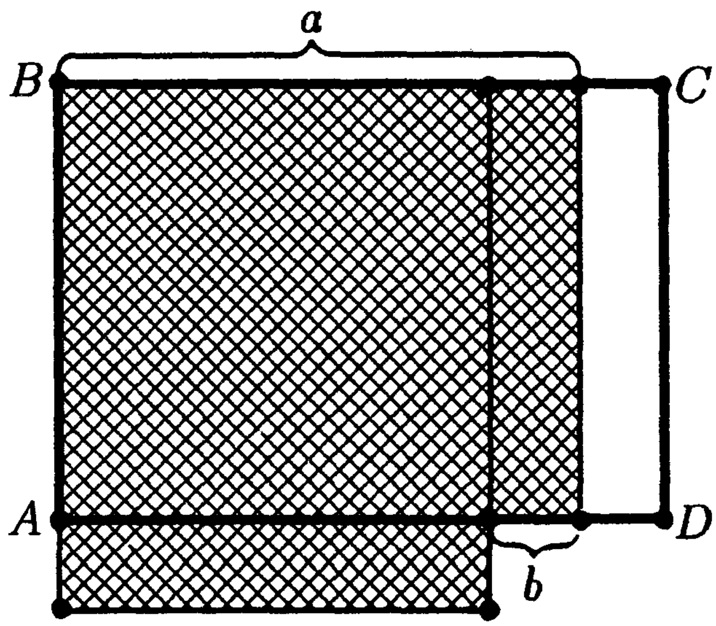

Рис. 3.28.

результате получим фигуру, заштрихованную на рис. 3.28. Эта фигура является квадратом со стороной a, из которого вырезан квадрат со стороной b. Её площадь равна площади квадрата со стороной x, где $x^2 = a^2 - b^2$. Для построения отрезка x можно воспользоваться теоремой Пифагора: этот отрезок является катетом прямоугольного треугольника с гипотенузой a и катетом b. В книге «Сульва-сутра» теорема Пифагора приведена в следующей формулировке: «Диагональ прямоугольника образует оба квадрата, которые вертикальная и горизонтальная стороны образуют по отдельности». Это, по-видимому, первая по времени формулировка теоремы Пифагора (сам Пифагор родился, скорее всего, уже после того как была написана «Сульва-сутра»; к тому же сохранившиеся древнегреческие формулировки и доказательства его теоремы относятся к гораздо более поздней эпохе).

Построение, описанное в книге «Сульва-сутра», далеко не самое простое. Более простое решение видно из рис. 3.29: если хорда CD, перпендикулярная диаметру AB, пересекает его в точке O, то $CO^2 = CO \cdot OD = AO \cdot OB$, т. е. CO — сторона квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами AO и OB. Евклид при-

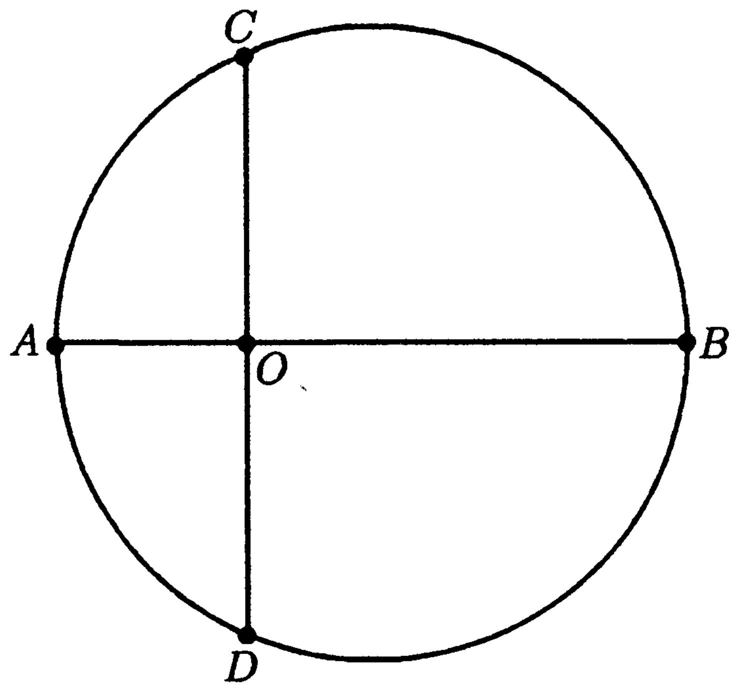

Рис. 3.29.

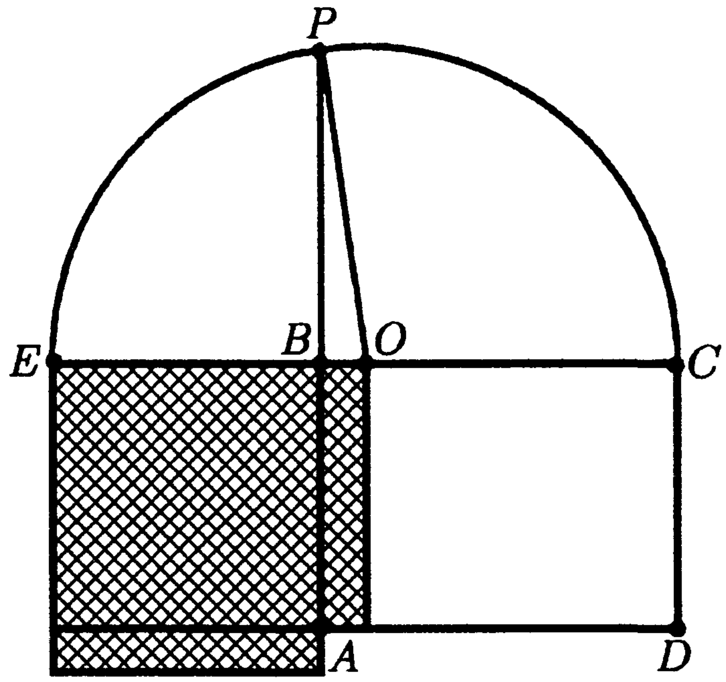

Рис. 3.30.

водит именно такое построение, но доказательство у него точно такое же, как в книге «Сульва-сутра»; оно тоже основано на теореме Пифагора. Возьмём на продолжении стороны BC за точку B такую точку E, что $BE = AB$. Пусть O — середина отрезка EC, P — точка пересечения луча AB и окружности с диаметром EC (рис. 3.30). Евклид доказывает, что площадь квадрата со стороной BP равна площади прямоугольника $ABCD$, следующим образом. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна площади заштрихованной фигуры. Следовательно, она равна разности площадей квадратов со сторонами $EO = OP$ и BO. По теореме Пифагора площадь квадрата, построенного на катете BP прямоугольного треугольника OBP, равна разности площадей квадратов, построенных на гипотенузе OP и катете BO.

Такое странное доказательство Евклида трудно объяснить. Теорема о том, что $CO \cdot OD = AO \cdot OB$ (см. рис. 3.29), ему известна, причём доказывает её он, опираясь тоже фактически лишь на теорему Пифагора (не используя весьма сложной теории отношений). Во всяком случае, совпадение древнегреческого и древнеиндийского доказательств вряд ли случайно.

3.2.7. Математика раннего джайнизма

Книга «Сульва-сутра», содержащая правила для построения алтарей, сложилась в связи с ритуалами ведийской религии. Ведизм был не единственной религией Древней Индии. В середине I тысячелетия до н. э. возникли две новые религии — буддизм и джайнизм. Ранние джайнские тексты содержат много математических сведений. Датировка этих текстов затруднительна, но предположительно их относят примерно к тому же времени, что и «Сульва-сутру».

Ведийские и джайнские интересы к математике существенно различались. Строителей ведийских алтарей интересовала лишь площадь круга, а джайнов — не только площадь круга, но и длина окружности. Более того, джайнские математики должны были понимать, что отношение площади круга к квадрату радиуса равно отношению длины окружности к диаметру. В самом деле, они знали точную фор-

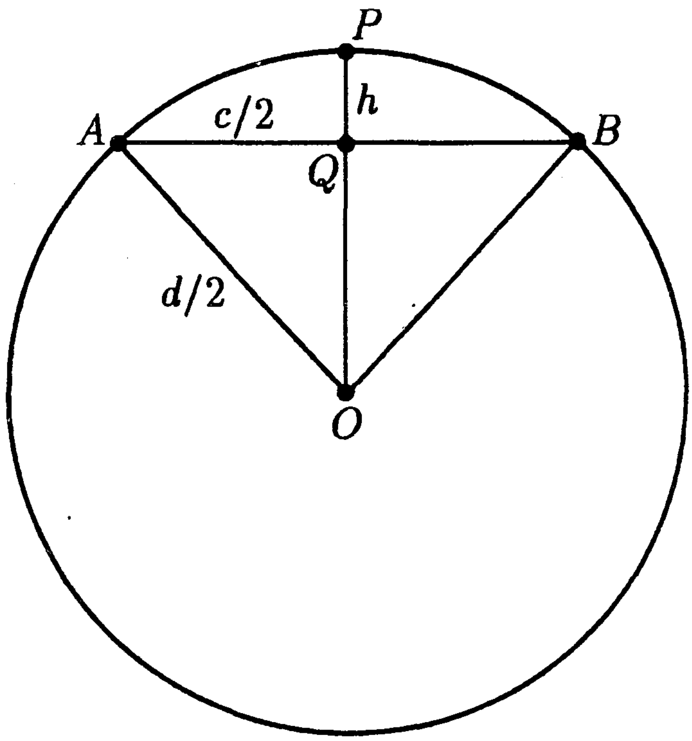

Рис. 3.31.

мулу для площади круга: $S = \frac{Ld}{4}$, где S — площадь круга, L — длина окружности, d — диаметр. А из этой формулы следует, что $L : d = S : \frac{d^2}{4} = S : R^2$.

Для длины окружности джайны использовали приближённую формулу $L = \sqrt{10d^2}$. Эта формула даёт приближённое значение $\pi \approx 3{,}162\ldots$ Оно весьма близко к приближённому значению $\pi \approx 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$, потому что

$$\left(4 \cdot (\frac{8}{9})^2\right)^2 = \left(\frac{256}{81}\right)^2 = \frac{65536}{6561} = 10 - \frac{74}{6561}.$$

Джайнских математиков интересовала также связь между элементами сегмента круга. Пусть d — диаметр круга, h — высота сегмента, c — длина хорды, отсекающей сегмент, a — длина сегмента. Применив теорему Пифагора к треугольнику AOQ (рис. 3.31), получим $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2} - h\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Из этого соотношения можно получить формулы

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{4h(d-h)}, \\ d &= \frac{(c^2/4)+h^2}{h}, \\ h &= \frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{2}. \end{aligned}$$

Все эти формулы содержатся в джайнских текстах. В них есть также формулы, связывающие величины a, h и c:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{6h^2+c^2}, \\ c &= \sqrt{a^2-6h^2}, \\ h &= \sqrt{\frac{a^2-c^2}{6}}. \end{aligned}$$

Эти формулы следуют из соотношения $a^2 = c^2 + 6h^2$. Это приближённое соотношение, скорее всего, связано с приближённой формулой $L = \sqrt{10d^2}$ для длины окружности. При изменении угла $\alpha = \angle AOB$ от 0 до 180° величина $k(\alpha)$, где $a^2 = c^2 + k(\alpha)h^2$, изменяется от $5\frac{1}{3} \approx 5{,}33$ до $\pi^2 - 4 \approx 5{,}87$. Но если для полукруга мы применим формулу $L = \sqrt{10d^2}$, которую использовали джайны, то получим $a^2 = \frac{10d^2}{4}$, $c^2 = d^2$ и $h^2 = \frac{d^2}{4}$, поэтому

$$k = \frac{a^2-c^2}{h^2} = (\frac{10d^2}{4} - d^2)/\frac{d^2}{4} = 6.$$

Напомним, что точно таким же образом (с помощью приближённого значения $\pi = 3$) получали приближённую формулу $s = \frac{ch+h^2}{2}$ для площади сегмента, которая есть у египтян и в сочинениях Герона (см. с. 17) , а также в древнекитайской «Математике в девяти книгах» и у индийского математика Махавиры (850 г. н. э.).

Приближённую формулу $L = \sqrt{10d^2}$ джайны могли получить с помощью формулы $h = (d - \sqrt{d^2 - c^2})/2$ следующим образом. Высота h_6 сегмента, отсекаемого стороной правильного шестиугольника, равна

$$\left(d - \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{4}}\right)\bigg/ 2 = \frac{d(2-\sqrt{3})}{4}.$$

Если число $\sqrt{3}$ заменить его приближённым значением $5/3$, то получим $h_6 \approx \frac{d}{12}$ (в действительности $h_6 < \frac{d}{12}$, так как $\sqrt{3} > \frac{5}{3}$). Стороны a_6 и a_{12} правильных шести- и двенадцатиугольников, вписанных в окружность, связаны соотношением $a_{12}^2 = h_6^2 + \frac{a_6^2}{4}$. Поэтому $a_{12}^2 \approx \left(\frac{d}{12}\right)^2 + \frac{d^2}{16} = \frac{10d^2}{144}$, а значит, квадрат периметра правильного двенадцатиугольника приближённо равен $10d^2$, причём величина $10d^2$ чуть больше квадрата периметра, длина окружности тоже чуть больше периметра вписанного двенадцатиугольника, поэтому число $\sqrt{10d^2}$ вполне могли считать значением длины окружности (точным или приближённым).

3.2.8. Ариабхата (476-550)

В 499 г. Ариабхата составил трактат в стихах по астрономии и математике. Там он даёт решение задачи на сложные проценты, приводящей к квадратному уравнению. Приводит он также и решение уравнения $ax + b = cy$ в целых числах, но более подробно оно изложено позже в сочинениях Брахмагупты и Бхаскары. Ариабхата был хорошо знаком со свойствами арифметической прогрессии. Он приводит также правила суммирования треугольных чисел, квадратов и кубов. Для числа π он получил самое точное для того времени приближённое значение 3,1416, но предпочитал использовать на практике значение $\sqrt{10} \approx 3,1622$.

3.2.9. Варахамхира (505-578)

Варахамхира получил тригонометрические формулы, которые в современных обозначениях можно записать так: $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x$.

До него джайнские математики занимались комбинатороной задачей о вычислении того, сколькими способами можно выбрать m предметов из n, т.е. о вычислении биномиальных коэффициентов C_n^m. Они получили выражение $C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$. Варахамхира подошёл к этой задаче по-другому и фактически получил треугольник Паскаля.

3.2.10. Брахмагупта (VII в.)

Около 628 г. Брахмагупта составил трактат в стихах «Усовершенствованная наука Брахмы». Математике посвящены всего лишь две из 20 глав этого трактата, но они существенно продвинули математику Древней Индии. Брахмагупта сформулировал общее правило решения квадратных уравнений. Он ввёл не только нуль как результат вычитания числа из самого себя, но и отрицательные числа, которые он интерпретировал как долг. Брахмагупта сформулировал правила операций сложения и вычитания с нулём и с отрицательными числами. Но, говоря о «большем» и «меньшем» в случае отрицательных чисел, он подразумевает их абсолютные величины. Индийские математики после Брахмагупты уже систематически пользовались отрицательными числами.

Брахмагупте ещё не была известна двузначность квадратного корня, но уже Махавира в 850 году писал, что квадратный корень из положительного числа — это положительное и отрицательное числа, а отрицательное число не имеет квадратного корня.

Брахмагупта приводит так называемую формулу Герона для площади треугольника и обобщает её на четырёхугольники, вписанные в окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — длины сторон четырёхугольника, а p — их полусумма (*формула Брахмагупты*). Брахмагупта приводит также выражения для квадратов длин диагоналей вписанного четырёхугольника через его стороны:

$$x^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}, y^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}.$$

Брахмагупта не оговаривает, что эти формулы верны только для вписанных четырёхугольников, но его интересовали только такие четырёхугольники. Более того, его интересовали вписанные четырёхугольники с перпендикулярными диагоналями. Возможно, Брахмагупта получил свои формулы именно для вписанных четырёхугольников с перпендикулярными диагоналями. Брахмагупта складывает вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями из четырёх пи-

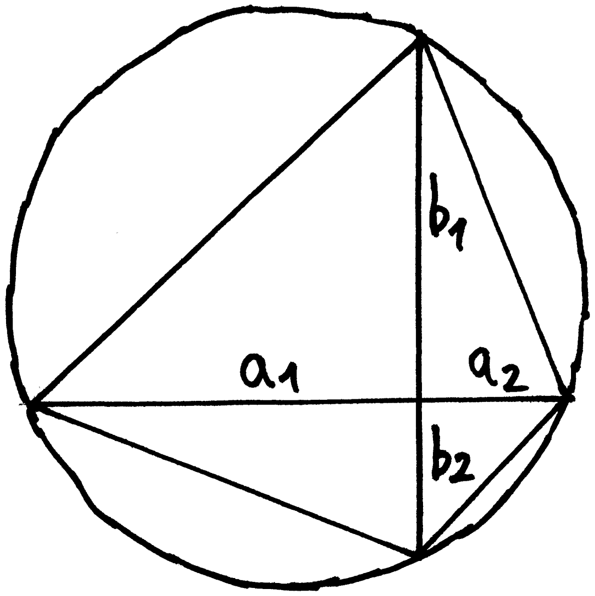

Рис. 3.32.

фагоровых треугольников и получает четырёхугольник с целочисленными сторонами, диагоналями и площадью. (Катеты этих пифагоровых треугольников должны удовлетворять соотношению $a_1a_2 = b_1b_2$, рис. 3.32).

Брахмагупта даёт правило нахождения прямоугольных треугольников с рациональными сторонами:

$$\text{катеты } m, \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n} - n\right), \text{ гипотенуза } \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n} + n\right).$$

Для решения в целых числах уравнения $ax+c = by$ Брахмагупта, по-видимому, использовал непрерывные дроби. Он также нашёл решения в целых числах нескольких уравнений вида $ax^2+1 = y^2$. Например, он нашёл наименьшее решение уравнения $61x^2 + 1 = y^2$ ($x = 226153980$, $y = 1766319049$).

Брахмагупта сформулировал (без доказательства) правило вычисления суммы первых n квадратов и кубов и получил интерполяционную формулу для вычисления синусов.

3.2.11. Махавира (800-870)

Около 850 года Махавира составил «Краткий курс арифметики». По содержанию этот трактат близок к трактату Брахмагупты, но содержит как упрощения, так и дополнительную информацию.

Это самый ранний индийский трактат, целиком посвященный математике. Более ранние трактаты помимо математики содержали также астрономию.

Махавира приводит правило суммирования геометрической прогрессии.

Брахмагупте ещё не была известна двузначность квадратного корня, но уже Махавира писал, что квадратный корень из положительного числа — это положительное и отрицательное числа, а отрицательное число не имеет квадратного корня.

3.2.12. Сридхара (870-930)

В своём трактате «Патиганита», написанном по обычаю того времени в стихах, Сридхара приводит различные правила выполнения арифметических операций, включая вычисление квадратых и кубических корней. Он приводит правило вычисления, сколькими способами можно выбрать n предметов из m предметов. Сридхара приводит также способы нахождения рациональных решений уравнений вида $ax^2+b=y^2$. Он одним из первых сформулировал правило решения квадратных уравнений.

3.2.13. Бхаскара (1114-1178)

Бхаскара впервые сформулировал правила умножения и деления для отрицательных чисел. Он также сормулировал условие существования двух положительных корней квадратного уравнения.

Бхаскара решал задачу о нахождении катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника по площади и периметру. Эта задача сводится к системе уравнений. Он также рассматривал специально подобранные уравнения третьей и четвёртой степени. Бхаскара приводит формулы для синуса суммы и разности двух углов.

Бхаскара много занимался решением уравнений в целых числах. Он приводит решение уравнения $ax + b = cy$ в целых числах, основанное на цепных дробях, и решает уравнение $xy = ax+by+c$ в целых числах, приводя его к виду $(x - a)(y - b) = c + ab$. Вслед за Брахмагуптой он занимался решением в целых числах уравнения $ax^2 + 1 = b^2$ и на примерах изложил общий способ решения этого уравнения.

Бхаскара приводит приёмы вычисления перестановок и сочетаний.

3.2.14. Мадхава (1350-1425)

Мадхава открыл ряды для $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{arctg} x$ около 1400 года, за 200 лет до того, как они были переоткрыты в Европе. Эти открытия Мадхавы известны лишь в более поздних пересказах, но и даже эти пересказы были написаны за 100 лет до открытий в Европе. Ряды даются в словесной формулировке.

3.2.15. Нилаканта (1444-1544)

В 1501-1502 годы Никаланта написал «Научный сборник». В нём он более чем за 150 лет до Грегори и Лейбница привёл ряд для арктангенса в словесной формулировке: «Возьми дугу окружности, такую, что её синус меньше косинуса. Умножь синус дуги на радиус и раздели на косинус. Это даст первое количество. Умножь это количество на квадрат синуса и раздели на квадрат косинуса, получишь второе количество. Повторяй это, умножая на квадрат синуса и деля на квадрат косинуса. Полученные количества раздели на нечётные целые числа 1, 3, 5, … Если полученные количества ты станешь поперменно вычитать из первого и прибавлять к нему, то в конечном счёте получишь дугу окружности.»

Эта словесная формулировка соответствует разложению

$$\varphi = \operatorname{tg} \varphi - \frac{\operatorname{tg}^3 \varphi}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 \varphi}{5} - \dots$$

В «Научном сборнике» для числа π приведено приближённое значение $\frac{104348}{33215} = 3,1415926539\ldots$

3.3. Арабские страны

Арабская математика, в отличие от математики Древнего Китая и Древней Индии, развивалась под сильным влиянием математики Древней Греции. При абассидах на арабский язык были переведены «Начала» Евклида и «Альмагест» Птолемея. Затем были переведены труды Диофанта, Герона, Архимеда, Аполлония. Арабы усвоили греческую математику несравненно глубже, чем римляне, для которых математика не стала элементом их цивилизации. Арабские математики вполне овладели не только конкретными знаниями, но и дедуктивным методом греков.

Арабские математики послужили также посредниками при знакомстве европейских математиков в Средние века с достижениями индийских математиков (например, с позиционной десятичной системой записи чисел). Санскритский термин *сунья* (пустое), которым называли нуль индийцы, арабы перевели как *ас-сыфр*, откуда происходит слово *цифра*.

3.3.1. Ал-Хабаш (770-870)

Ал-Хабаш составил несколько тригонометрических таблиц, в частности, таблицу значений синуса. Кроме того, он составил таблицу отношений длины вертикального шеста к длине отбрасываемой им тени в зависимости от высоты Солнца, т.е. таблицу котангенсов, а также таблицу «обращённых теней», т.е. тангенсов. Таким образом, тангенс и котангенс появились вначале не в связи с линиями в круге, а в связи со сравнением катетов прямоугольного треугольника.

3.3.2. Мухаммад ал-Хорезми (787-850)

Калиф ал-Мамун (сын знаменитого Гаруна ал-Рашида) создал в Багдаде академию под названием Дом Мудрости. Там переводили древнегреческие философские и научные труды. Ал-Хорезми работал в этом Доме Мудрости под покровительством самого ал-Мамуна, которому посвящены два трактата ал-Хорезми.

Десятичная позиционная нумерация впервые на арабском языке описана в книге ал-Хорезми «Об индийском счёте». Оригинальный текст не сохранился, известен лишь латинский перевод (Algoritmi de numero Indorum; здесь Algoritmi — латинизированная форма фамилии автора). Эта книга — первое руководство по арифметике, основанное на позиционном принципе. Ал-Хорезми подробно описывает сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Его руководство сыграло большую роль в развитии арифметики. Фамилия автора в латинизорованной форме Algorismus или Algorithmus в средневековой Европе стала обозначать всю систему десятичной позиционной арифметрики. Термин *алгоритм* в смысле регулярного вычислительного процесса, за конечное число шагов приводящего к решению некоторого класса задач, впервые стал употреблять Лейбниц.

Центральное место в книге ал-Хорезми «Краткая книга об исчислении ал-джабра и ал-мукабалы», с которой связано происхождение термина *алгебра*, занимает решение квадратных уравнений. При этом рассматриваются шесть основных классов уравнений первой и второй степени: 1) $ax^2 = bx$; 2) $ax^2 = c$; 3) $bx = c$; 4) $ax^2 + bx = c$; 5) $ax^2+c = bx$; 6) $bx+c = ax^2$. Чтобы решить уравнение первой или второй степени, его нужно было свести к одному из этих шести типов. Для этого применялись две основные операции: ал-джабр (восполнение) и ал-мукабала (противопоставление). Ал-джабр — это перенос вычитаемых членов в другую часть уравнения в виде прибавляемых членов. Ал-мукабала — это сокращение равных членов в обеих частях. Ал-Хорезми формулирует правила, дающие лишь положительные корни. Правила для четвёртого и шестого классов обоснованы с помощью

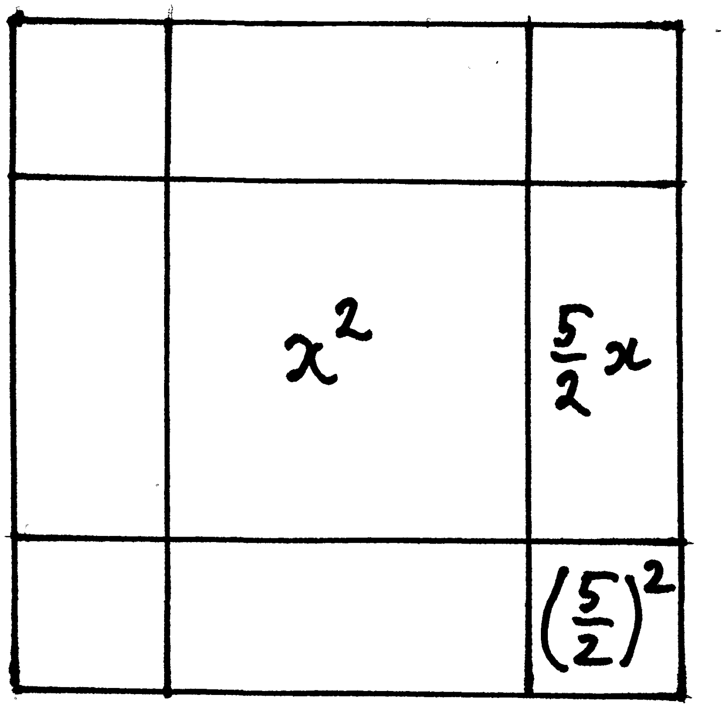

Рис. 3.33.

преобразований прямоугольных фигур.

Ал-Хорезми приводит два способа решения уравнения $x^2 + 10x = 39$: сначала алгебраический, а затем геометрический. Геометрическое решение следующее. Построим квадрат со стороной x, приложим к нему 4 прямоугольника со сторонами $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ и x, а затем добавим ещё 4 квадрата со стороной $\frac{5}{2}$ (рис. 3.33). В результате получится квадрат со стороной $x + 2 \cdot \frac{5}{2} = x + 5$. Площадь этого квадрата равна $x^2 + 10x + 4\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 39 + 25 = 64$, поэтому $x + 5 = 8$, а значит, $x = 3$. Этот способ даёт только положительный корень, отрицательные корни ал-Хорезми не интересуют.

В книге ал-Хорезми сформировано представление об алгебре, как о науке, занимающейся решением уравнений в радикалах.

Никаких символов ал-Хорезми не использует, его изложение чисто словесное и весьма пространное.

Термин *дробь* (по-старословянски *ломаное число*) тоже восходит к ал-Хорезми. Для дробей он использовал название каср, от касра — ломать. Так возникло латинское название fraction и названия в других языках. Ал-Хорезми описывает прежде всего шестидесятеричные дроби.

Ал-Хорезми решает и простейшие задачи о треугольниках, связанные с применением алгебры. Например, он вычисляет площадь треугольника со сторонами 13, 14 и 15. Ал-Хорезми приводит выражение площади круга через диаметр, использующее для π приближённое значение $3\frac{1}{7}$. Он также приводит правило вычисления площади сегмента круга по дуге, хорде и высоте сегмента. Ал-Хорезми приводит правила вычисления объёма призмы, пирамиды, цилиндра, конуса.

3.3.3. Ал-Джаухари (800-860)

Ал-Джаухари написал трактат «Комментарии к Евклиду», содержащий примерно 50 предложений, дополняющих «Начала» Евклида. Наиболее интересны его исследования пятого постулата Евклида. Ал-Джаухари первым из арабских математиков попытался доказать пятый постулат. Предложенное им доказательство основано на следующем неявном допущении: если при пересечении двух прямых некоторой секущей образуются равные накрест лежащие углы, то при пересечении этих же прямых любой другой секущей тоже образуются равные накрест лежащие углы. Из этого он выводит, что средняя линия треугольника равна половине его основания, а также, что через любую данную точку внутри данного угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла. Из последнего утверждения уже и выводится пятый постулат. Неполноту доказательства Ал-Джаухари отметил ат-Туси.

3.3.4. Сабит ибн Корра (836-901)

Сабит ибн Корра применял арифметические операции к отношениям геометрических величин, чего не делали греки. Это было важно для введения общего понятия числа.

Ибн Корра сформулировал теорему синусов для сферического прямоугольного треугольника: $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B$.

Ибн Корра доказывал пятый постулат Евклида, основываясь на том, что если две прямые удаляются друг от друга в одном направлении, то в противоположном направлении они сближаются. Из этого он вывел сначала существование параллелограмма, а затем уже и пятый постулат. При другом подходе он исходит из существования равноотстоящих прямых. Из этого он сначала доказывает существование прямоугольника.

Арабским математикам, по-видимому, не был известен трактат Архимеда о квадратуре параболы. Ибн Корра произвёл квадратуру сегмента параболы другим способом. Он впервые применил неравномерное деление отрезка интегрирования. Он разделил отрезок интегрирования на части, относящиеся как 1:3:5:7:… Тогда ординаты относятся как 1:2:3:4:… Его вычисление равносильно вычислению интеграла $\int_0^a \sqrt{x}dx$. Ибн Синан, внук Ибн Корры, прозвёл квадратуру параболы другим способом, впервые введя аффинные преобразования. Сначала он показал, что если при аффинном преобразовании один многоугольник переходит в другой, а треугольник в первом многоугольнике переходит в треугольник во втором, то отношение площадей многоугольников равно отношению площадей треугольников. Затем с помощью метода исчерпывания он переносит это утверждение на сегменты параболы и вписанные в них треугольники, основаниями которых служат хорды сегментов, а вершинами — концы диаметров, сопряжённых с этими хордами. На сторонах такого треугольника он строит меньшие треугольники, вписанные в хорды, и доказывает, что площади этих треугольников относятся как 1:8. Далее, на современном языке, если площадь треугольника равна x, то площадь сегмента равна $x\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots\right)=\frac{3x}{4}$.

Ибн Корра вычислил также объём параболического купола (ограниченного параболоидом вращения).

Ибн Корра показал, что при простых $p=3\cdot2^n-1$, $q=3\cdot2^{n-1}-1$, $r=9\cdot2^{2n-1}$ числа $M=2^npq$ и $N=2^nr$ являются *дружественными*, т.е. каждое из них равно сумме делителей другого. При $n=2$ получается пара дружественных чисел 220 и 284, известная неопифагорейцам.

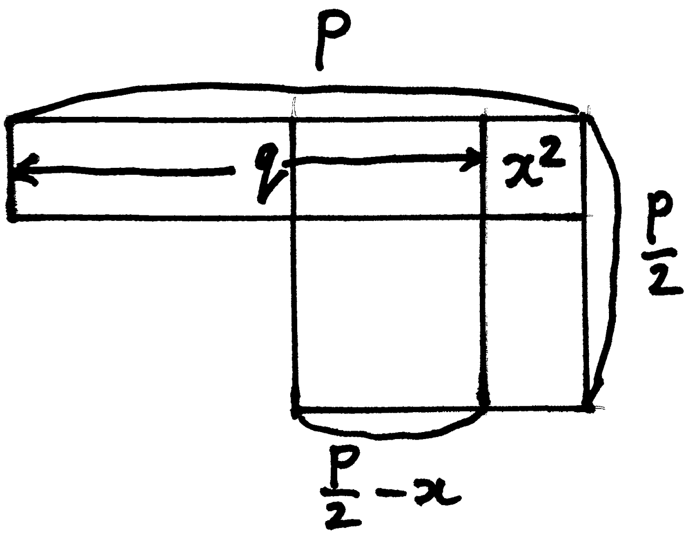

Рис. 3.34.

3.3.5. Абу Камил (850-930)

Абу Камил, родившийся в Египте, первым после ал-Хорезми написал трактат по алгебре. Алгебра у него ограничена квадратными уравнениями. Обоснование правил решения квадратных уравнений у абу Камила, как и у ал-Хорезми, геометрическое, но он обращается непосредственно к соответствующим предложениям Евклида. Например, уравнение $x^2 + q = px$ он решает следующим образом. Приложим к квадрату со стороной x прямоугольник площади q (рис. 3.34). Квадрат и прямоугольник вместе составляют прямоугольник площади $x^2 + q = px$. Поэтому согласно предложению II, 5 из «Начал» Евклида $q + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. В случае, когда $x < \frac{p}{2}$, из этого получаем

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p}{2} - q}.$$

Абу Камил делает сложные преобразования квадратичных иррациональностей. Он решает биквадратные уравнения и систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z &= 10, \\ xz &= y^2, \\ x^2 + y^2 &= z^2, \end{cases}$$

где $x < y < z$.

Абу Камил не соблюдает обычное для древней математики требование, что складывать можно только однородные величины. Например, он решает такую задачу: «Найти высоту равностороннего треугольника, у которого сумма площади и высоты равна 10.»

Важный шаг вперёд, сделанный Абу Камилом в алгебре, — работа со степенями выше x^2, вплоть до x^8. Предложенная им терминология аналогична терминологии Диофанта.

Специальное сочинение Абу Камил посвятил решению в натуральных числах систем неопределённых линейных уравнений. Он первым из арабских математиков обратился к решению диофантовых уравнений. Абу Камил приводит примеры, когда целочисленное решение единственно, когда решений несколько и когда решений нет. В этих примерах первое уравнение одно и то же: $x+y+z=100$, а вторые уравнения разные: $5x+\frac{y}{10}+z=100$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+2z=100$ и $3x+\frac{y}{20}+\frac{z}{3}=100$. Наиболее сложная система уравнений, которую решает Абу Камил, следующая:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+u+v & = & 100, \\ 2x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{u}{4}+v & = & 100. \end{array}\right.$$

Он строит две серии решений и всего находит 2676 решений.

Сочинения абу Камила важны ещё и потому, что они оказали большое влияние на Фибоначчи.

3.3.6. Ал-Баттани (850-929)

Ал-Баттани известен своими чрезвычайно точными астрономическими наблюдениями. Одновременно с Сабитом ибн Коррой он сформулировал теорему синусов для сферического прямоугольного треугольника: $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B$. Он также доказал теорему косинусов для сферических треугольников:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

3.3.7. Ан-Найризи (875-940)

Ан-Найризи развивал теорию параллельных, опираясь на определение параллельных прямых, которое дали древнегреческие математики Посидоний (135-51 до н.э.) и Аганис (VI в.). Говоря современным языком, они определяли прямую, параллельную данной прямой, как *эквидистанту*, т.е. как множество точек плоскости, находящихся на одном и том же расстоянии от данной прямой. Это определение неявно подразумевает, что эквидистанта — это прямая[1], а из такого предположения пятый постулат можно вывести, что Ан-Найризи и делает, сначала устанавливая существование прямоугольника.

Ан-Найризи доказал общую теорему синусов для сферических треугольников:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

3.3.8. Ал-Хазин (900-971)

Ал-Хазин написал комментарий к X книге «Начал» Евклида. Он также дал решение задачи Архимеда (о делении шара на части с заданным отношением объёмов) с помощью конических сечений.

3.3.9. Абу-л-Вафа (940-998)

Абу-л-Вафа написал много оригинальных сочинений по математике и обширные комментарии к Евклиду, Диофанту и Птолемею.

Абу-л-Вафа (по-видимому, под влиянием индийских математиков) использует отрицательные числа; другие арабские математики средневековья этого не делали.

В «Книге о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений» Абу-л-Вафа рассматривает около 15 задач на построение с помощью циркуля постоянного раствора. Такие задачи встречались и раньше, но он первым их систематизировал. Отдельная глава этой

[1]В геометрии Лобачевского и в сферической геометрии эквидистанта — это кривая.

книги посвящена задаче о разрезании нескольких квадратов так, чтобы из их частей можно было составить один квадрат. В частности, он разрезает два произвольных квадрата и составляет из них один квадрат, что фактически даёт доказательство теоремы Пифагора.

Для числа π он всегда использует приближение $\frac{22}{7}$.

Абу-л-Вафа описал способы измерения расстояний до недоступных предметов и их высоты. Вслед за Ан-Найризи он другим способом доказал общую теорему синусов для сферических треугольников. Абу-л-Вафа составил таблицы синусов с интервалом в $15'$. Он составил также таблицы тангенсов и котангенсов.

3.3.10. Ал-Кухи (940-1000)

Ал-Кухи дал полный разбор задачи Архимеда о делении шара, которой до него занимался ал-Хазин. Ал-Кухи сформулировал новую задачу такого же типа: построить сегмент шара, объём которого равен объёму одного данного сегмента, а площадь поверхности равна площади поверхности другого данного сегмента. Эта задача тоже сводится к решению кубического уравнения, и ал-Кухи дал её решение с помощью параболы и гиперболы.

3.3.11. Ал-Ходжанди (940-1000)

Ал-Ходжанди полагал, что ему удалось доказать, что сумма двух кубических чисел не является кубическим числом, т.е. уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ не имеет решений в натуральных числах. Это доказательство не сохранилось, но Ибн ал-Хуссейн считал это доказательство недостаточным.

3.3.12. Ибн Юнис (950-1009)

Ибн Юнис известен прежде всего как астроном, и его математические исследования связаны с астрономией. Составленные им астрономические таблицы отличались очень большой точностью. Он составил также очень точные таблицы синусов с интервалом в $1'$; тригонометрические функции он определял для дуг, а не для углов. Сферическая тригонометрия в его работах достигла высокого уровня.

Ибн Юнис с помощью ортогональной проекции вывел соотношение, равносильное формуле

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).$$

3.3.13. Ал-Караджи (953-1029)

Ал-Караджи описал способ построение треугольника Паскаля; это описание сохранилось только в более позднем пересказе.

Ал-Караджи нашёл правила вычисления некоторых сумм, например,

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = (1+2+3+\dots+n)\left(\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}\right)$$

и

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2.$$

Для суммы квадратов он нашёл только правило, доказательство ему найти не удалось. А для суммы кубов он приводит такое доказательство. Разобьём квадрат со стороной $1+2+3+\dots+n$ на гномоны, толщина которых равна n, $n-1$, ... (см. рис. 3.35 для $n=4$). Площадь каждого такого гномона легко вычислить. Действительно, гномон толщины n можно представить в виде объединения двух прямоугольников размером $n\times(1+2+3+\dots+n)$, причём общей частью этих прямоугольников является квадрат со стороной n. Поэтому площадь гномона равна

$$2n(1+2+3+\dots+n)-n^2 = 2n\frac{n(n+1)}{2}-n^2 = n^3.$$

Сумма площадей всех этих гомонов и квадрата со стороной 1 равна $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$.

Ал-Караджи приводит и некоторые другие правила вычисления сумм:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(n-1)n = (1+2+\dots+n)\left(\frac{2}{3}n-\frac{2}{3}\right)$$

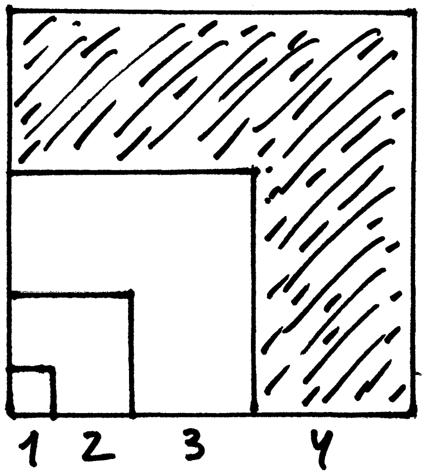

Рис. 3.35.

и

$$1{\cdot}2{\cdot}3+2{\cdot}3{\cdot}4+\cdots+(n-2)(n-1)n=(1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3)-(1+2+\cdots+(n-1)).$$

Последнее правило непосредственно следует из тождества $(k-1)k(k+1)=k^3-k$.

Ал-Караджи ищет рациональные решения уравнений $x^2+5=y^2$ и $x^2-10=y^2$ следующим образом. В первом случае он полагает $y=x+1$, а во втором $y=x-1$. Он получает соответственно $x=2$ и $x=\frac{11}{2}$.

Ал-Караджи в значительной мере освободил алгебру от геометрических операций, заменив их арифметическими. Это позволило производить операции с неизвестной величиной таким же способом, как арифметические операции с известной величиной. Его важным достижением было определение x^2, x^3, … без ссылок на геометрию; он близко подошёл к формуле $x^{n+m}=x^nx^m$. Определив мономы, ал-Караджи перешёл к определению многочленов и операций с ними.

3.3.14. Ибн ал-Хуссейн (первая половина XI века)

Ибн ал-Хуссейн занимался следующей задачей: найти квадрат целого числа, который при увеличении и при уменьшении на одну и ту же данную величину становится квадратом целого числа. Он находит такой пример: $5^2+24=7^2$ и $5^2-24=1^2$. Основой для построения этого

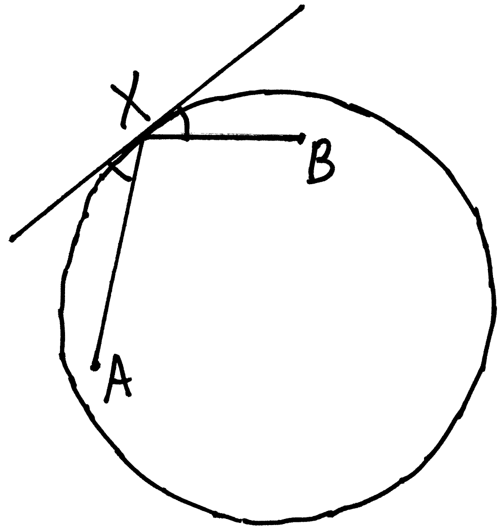

Рис. 3.36.

примера ему послужило тождество

$$(u^2+v^2)^2 \pm 4uv(u^2-v^2) = (u^2-v^2 \pm 2uv)^2.$$

Если положить $u=2$ и $v=1$, то как раз и получится искомый пример.

Ибн ал-Хуссейн проявлял интерес к доказательству того, что уравнение $x^3+y^3=z^3$ не имеет решений в натуральных числах. Он разобрал доказательство, которое получил Ал-Ходжанди, и счёл его недостаточным. Сам он тоже не смог найти доказательство.

3.3.15. Ибн ал-Хайсам (965-1039)

Ибн ал-Хайсам в Европе был известен под именем Альгазен. Он поставил и решил с помощью окружности и гиперболы следующую задачу из оптики (*задача Альгазена*): по данным положениям глаза A и светящейся точки B найти точку X цилиндрического зеркала, в которой происходит отражение (рис. 3.36). Задача Альгазена приводит к уравнению четвёртой степени. Впоследствии этой задачей занимались Гюйгенс и Барроу. Вскоре после Ал-Хазина Ибн ал-Хайсам дал решение задачи Архимеда с помощью параболы и гиперболы.

Ибн ал-Хайсам вычислил объём тела, полученного при вращении сегмента параболы. Эту задачу решил до него Архимед в сочинении «О коноидах и сфероидах», которое не было известно арабским математикам. Решение ал-Хайсама отличается от решения Архимеда. Используя полученную им формулу для суммы четвёртых степеней, ал-Хайсам фактически вычисляет $\int_0^a x^4 dx$.

Ибн ал-Хайсам занимался доказательством пятого постулата Евклида. Он использовал определение параллельных прямых, которое в арабскую математику ввёл Ан-Найризи (прямая, параллельная данной, определялась как эквидистанта: см. с. 260). Ибн ал-Хайсам рассмотрел множество концов перпендикуляров данной длины к данной прямой и путём длинных, но неубедительных рассуждений «доказал», что это множество — прямая. После этого уже можно смело доказывать пятый постулат, что ал-Хайсам и сделал. Для этого он рассмотрел четырёхугольник с тремя прямыми углами (четырёхугольник $ABDC$ с прямыми углами A, B и D на рис. 3.37; этот рисунок схематично воспроизводит чертёж из рукописи ал-Хайсама). Чтобы доказать, что четвёртый угол C тоже прямой, ал-Хайсам сначала доказывает методом от противного, что $CD = AB$. Предположим, что $CD > AB$. Продолжим сторону CA на отрезок AE, равный ей, и проведём перпендикуляр EF к прямой DB. Легко доказать, что $EF = CD > AB$. Проведём через точку B перпендикуляр BH к прямой DF, равный CD. Точки C, H и E равноудалены от прямой DF, поэтому, как «доказал» ал-Хайсам, они лежат на одной прямой. Тем самым, прямые CAE и CHE ограничивают поверхность, чего не может быть (так пишет ал-Хайсам; по-другому можно сказать, что через точки C и E проходят две разные прямые). Аналогично получаем противоречие в случае, когда $CD < AB$. Доказав равенство сторон AB и CD, легко доказать, что четвёртый угол C прямой. Доказано существование прямоугольника, а из этого уже можно вывести и сам пятый постулат.

Одним из главных результатов ал-Хайсама было то, что он установил связь между пятым постулатом и суммой углов четырёхугольника. Кроме того, он ввёл оба четырёхугольника, которые впоследствии при исследовании пятого постулата встречались у Хайяма и Саккери (четырёхугольник $CDEF$ с двумя прямыми углами и двумя равными противоположными сторонами — так называемый четырёхугольник

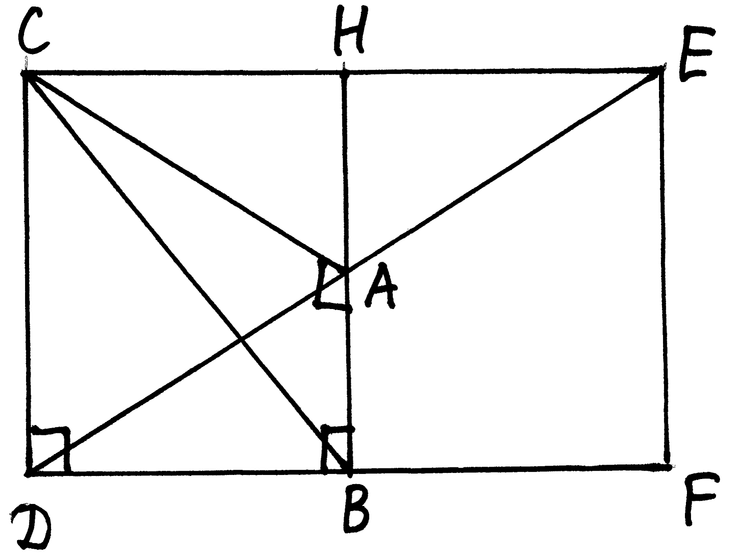

Рис. 3.37.

Саккери) и у Ламберта (четырёхугольник $ABDC$ с тремя прямыми углами).

Ибн ал-Хайсам решил одну задачу из теории чисел, связанную с так называемой теоремой Вильсона: найти число, которое при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 даёт в остатке 1 и делится на 7. Эта задача имеет бесконечно много решений; он указывает решение $(7-1)!+1$. Делимость этого числа на 7 следует из теоремы Вильсона. Ибн ал-Хайсам находит также все решения этой задачи (это фактически частный случай китайской теоремы об остатках).

3.3.16. Ал-Бируни (973-1048)

К кубическим уравнениям арабских математиков приводили всё новые и новые задачи. Например, Ал-Бируни для вычисления синуса 1° вычислил сторону правильного девятиугольника. Сначала он показал, что сторона x правильного 18-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, является корнем кубического уравнения $x^3+1=3x$. Его доказательство заключалось в следующем. Пусть O — центр описанной окружности, $AB=x$ — сторона правильного 18-угольника. Построим точки C, D и E на отрезках OB и OA так, что $ED=DC=CA=x$ (рис. 3.38). Простое вычисление углов показывает, что $OE=ED=x$.

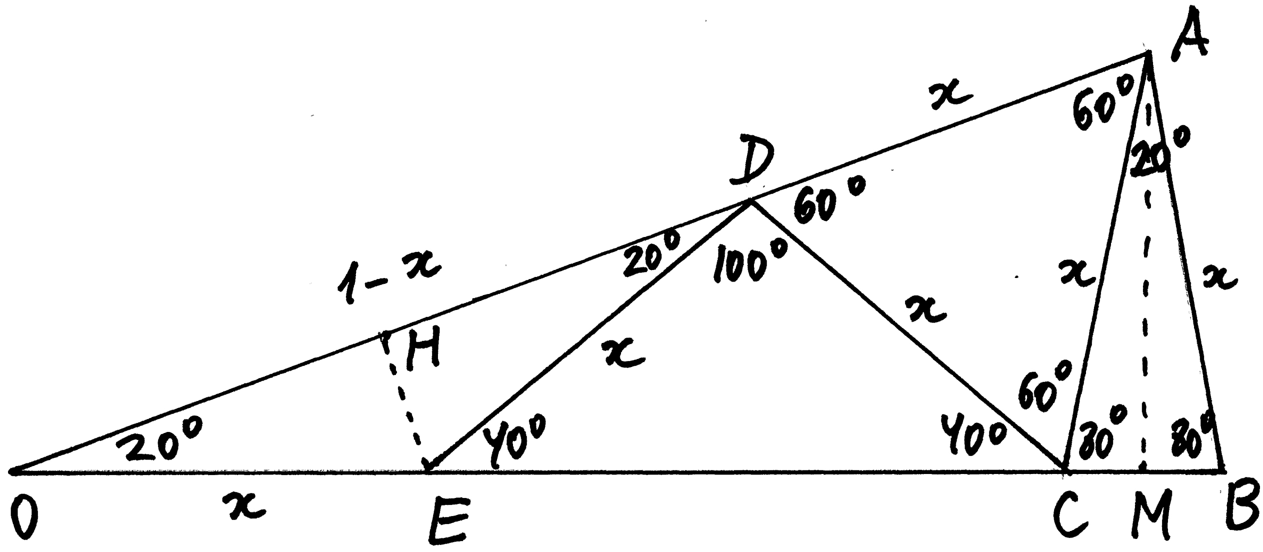

Рис. 3.38.

Из подобных треугольников OAB и ABC получаем $1 : x = x : BC$, т.е. $BC = x^2$. Из подобных треугольников OEH и OAM получаем $x : \left(\frac{1-x}{2}\right) = 1 : \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, т.е. $x^3 + 1 = 3x$.

Затем ал-Бируни вычисляет сторону правильного девятиугольника (если известна сторона правильного $2n$-угольника, то вычисление стороны правильного n-угольника, вписанного в ту же окружность, сводится к решению квадратного уравнения). В результате приближённых вычислений ал-Бируни нашёл 4 шестидесятиричных знака синуса $1°$ (это было ему нужно для составления таблиц синусов).

3.3.17. Омар Хайям (1048-1131)

В 1077 г. Омар Хайям написал «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида». Первая книга «Комментариев» посвящена теории параллельных. Хайям не считал убедительным доказательство пятого постулата ал-Хайсамом. Он возражал против использования движений при определении параллельной прямой как эквидистанты. Хайям предлагает заменить пятый постулат другим постулатом: две сближающиеся прямые пересекаются, и невозможно, чтобы сближающиеся прямые расходились в направлении сближения. В этом постулате сразу два утверждения, причём из каждого из них можно вывести пятый постулат. Из своего постулата Хайям выводит, что два перпендикуляра к одной и той же прямой эквидистантны. Затем он исследует четырёхугольник $ABCD$ с двумя равными сторонами AD и BC, перпендикулярными к третьей стороне AB (такой же четырёхугольник рассматривал впоследствии Саккери). Сначала Хайям доказывает, что $\angle C = \angle D$ и серединный перпендикуляр к стороне AB является серединным перпендикуляром к стороне CD (рис. 3.39). По поводу углов C и D Хайям делает три предположения: 1) эти углы острые; 2) эти углы тупые; 3) эти углы прямые. Предположив, что углы C и D острые, продолжим перпендикуляр EG на отрезок GH, равный EG, и через точку H проведём перпендикуляр к прямой EH. Перегнём чертёж по прямой CD; при этом прямая PQ перейдёт в прямую AB. Пусть P' и Q' — образы точек P и Q. Тогда $\angle P'CG = \angle PCG > \angle BCG$, поэтому $Q'P' > AB$, т.е. $QP > AB$. Это означает, что перпендикуляры к прямой AB, проведённые через точки A и B, расходятся. Но это противоречит тому, что перпендикуляры к одной прямой эквидистантны. Аналогично предположение о том, что углы C и D тупые, приводит к тому, что такие же перпендикуляры оказываются сходящимися. Таким образом, Омар Хайям совершенно правильно доказал, что в геометрии Лобачевского перпендикуляры к одной прямой сходятся, а в сферической геометрии расходятся.

Вторая и третья книги «Комментариев» посвящены теории отношений. Хайям считает евклидово определение пропорциональности правильным, но не объясняющим сути дела. По его мнению подлинный смысл отношения заключается в процессе измерения одной величины с помощью другой. Для определения равенства и неравенства двух отношений Хайям применяет процедуру, эквивалентную разложению в непрерывную дробь. Эта процедура основана на алгоритме Евклида. Пусть дано отношение a/b. Построим последовательность целых неотрицательных чисел n_1, n_2, $\ldots$ следующим образом: $a = n_1 b + r_1$, $b = n_2 r_2 + r_2$, $r_1 = n_3 r_2 + r_3$, $\ldots$, где $0 \le r_1 < a$, $0 \le r_2 < b$, $0 \le r_i < r_{i-2}$. Если дано другое отношение c/d, то для него аналогично можно построить последовательность n'_1, n'_2, $\ldots$ Отношения a/b

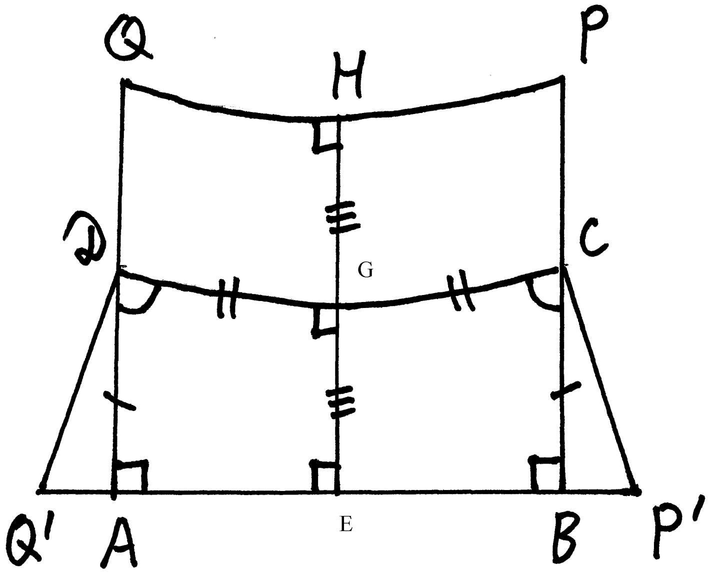

Рис. 3.39.

и c/d равны, если $n_i = n_i'$ для всех i. Определение неравенства отношений более тонкое, потому что цепная дробь, включающая нечётное число чисел n_i, меньше чем a/b, а включающая чётное число — больше. Поэтому если $n_1 = n_1'$, $n_2 = n_2'$, $\ldots$, $n_{k-1} = n_{k-1}'$ и $n_k > n_k'$, то $a/b < c/d$, если k нечётно, и $a/b > c/d$, если k чётно. Хайям доказывает, что его определение неравенства отношений эквивалентно определению Евклида. Доказательство основано на теореме о существовании четвёртой пропорциональной к трём данным величинам a, b и c (этой теоремы нет у Евклида, хотя он неявно использовал её несколько раз). Хайям занимался изучением составных отношений (т.е. произведений отношений). Это понятие встречается у Евклида в формулировке предложения VI, 23 о том, что площади параллелограммов с общим углом находятся в составном отношении их сторон, но само это понятие у Евклида не определяется. Исследования Хайяма существенно повлияли на формирование понятия числа.

Хайям подробно исследовал решение кубических уравнений. Его интересовало геометрическое построение корней с помошью конических сечений, определение числа положительных решений и их границ. Он выделил 14 классов кубических уравнений; в эту классификацию вошли только уравнения, у которых есть положительные корни. Он заметил, что кубическое уравнение может иметь два положительных решения, но при разборе уравнения $x^3 + bx = cx^2 + a$ сделал ошибку и потому не заметил, что кубическое уравнение может иметь три положительных решения. В случае одного или двух решений его анализ правильный. Хайям рассматривает такую задачу: «Найти прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна сумме одного из катетов и высоты, опущенной на гипотенузу.» Он приводит её к уравнению $x^3+200x = 20x^2+2000$. Положительный корень он находит как пересечение гиперболы (с перпендикулярными асимптотами) и окружности и вычисляет также приближённое значение этого корня с помощью тригонометрических таблиц.

Хайям пишет, что для решения кубического уравнения необходимы конические сечения, и корень такого уравнения нельзя построить циркулем и линейкой. Исторически это первое указание на то, что уравнения третьей степени, вообще говоря, не решаются с помощью циркуля и линейки.

3.3.18. Ибн Яхья ал-Магриби ал-Самавал (1130-1180)

Трактаты ал-Самавала, происходившего из еврейской семьи, написаны по-арабски. Он способствовал дальнейшей арифметизации алгебры, определил многочлены и операции с ними. Рассматривал отрицательные числа и нуль (в Европе это стали делать лишь много столетий спустя). Арифметические действия с нулём и с отрицательными числами он понимал вполне хорошо.

3.3.19. Шараф ад-дин ат-Туси (1135-1213)

В трактате по алгебре Шараф ад-дин ат-Туси продолжил исследование кубических уравнений. При разборе случая, когда уравнение имеет вид $x^3 + a = bx$ $(a, b > 0)$, он алгебраически находит, что максимум функции $bx - x^3$ при положительных x достигается при $x = \sqrt{\frac{b}{3}}$; этот максимум равен $2\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}$. Таким образом, если $a \leq 2\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}$, т.е. $\frac{b^3}{27} -$

$\frac{a^2}{4} \geq 0$, то рассматриваемое уравнение имеет положительный корень.

3.3.20. Насир ад-дин ат-Туси (1201-1274)

В «Трактате о полном четырёхстороннике» ат-Туси (1260) рассматриваются, в частности, задачи сферической геометрии. В нём впервые систематически обсуждается решение треугольников и впервые даётся полное построение тригонометрии. Наиболее трудные задачи решения сферических треугольников (то трём сторонам или по трём углам) разобрал именно ат-Туси. В этом трактате 5 книг. В книге I ат-Туси ещё более подробно, чем Омар Хайям, излагает теорию составных отношений. Он доказывает, например, коммутативность умножения. В книге II даётся несколько доказательств теоремы Менелая на плоскости. В книге III вводятся понятия синуса и косинуса и доказываются основные теоремы тригонометрии. Здесь же даётся решение плоских треугольников, сначала прямоугольных, а затем произвольных. В книге IV доказывается теорема Менелая для сферического треугольника. Она выводится из теоремы Менелая на плоскости с помощью вспомогательных утверждений из книги III. Книга V посвящена решению сферических треугольников. Для прямоугольного сферического треугольника ат-Туси получил формулу $\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$ и тем самым разобрал последний остававшийся случай решения прямоугольного сферического треугольника (по данным углам A и B). В этой книге попутно вводятся понятия тангенса, котангенса, секанса и косеканса. Ат-Туси доказывает *теорему тангенсов* для прямоугольного сферического треугольника: $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} b} = \sin \alpha$. Решив прямоугольные сферические треугольники, ат-Туси переходит к произвольным треугольникам. Ат-Туси впервые решает задачу о вычислении сторон сферического треугольника по трём углам; в связи с этим у него появляется теория *полярного треугольника*, вершины которого являются полюсами сторон исходного треугольника и наоборот. Для решения сферического треугольника по углам ат-Туси устанавливает связь между сторонами и углами исходного треугольника и полярного.

Ат-Туси предложил новую модель движения Луны, отличную от птолемеевской. В этой модели он использовал 8 равномерно вращающихся сфер. В связи с этими астрономическими исследованиями Ат-Туси доказал, что точка окружности, катящейся внутри окружности вдвое большего радиуса, описывает диаметр бо́льшей окружности. Это означало, что прямолинейное движение можно разложить на два равномерных движения по окружности.

Ат-Туси разработал различные методы вычисления таблиц синусов. Он составил таблицы синусов с точностью до трёх шестидесятиричных знаков.

Ат-Туси продолжил исседования по теории параллельных. Он подробно изложил и критически разобрал теории параллельных ал-Джаухари, ибн ал-Хайсама и Хайяма. Вслед за Хайямом ат-Туси разбирает гипотезы тупого и острого угла для четырёхугольника специального вида. Он предложил другое опровержение этих гипотез, которое основано на постулате, похожем на постулат Хайяма: если две прямые, лежащие в одной плоскости, в одном направлении расходятся, то они не могут в этом направлении сходится, если только они не пересекаются. Помимо этого постулата он использовал также, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

Ат-Туси написал 5 трактатов по логике. Он написал также трактат о вычислении корня степени n из целого числа. В этом трактате он определил коэффициенты разложения бинома любой натуральной степени и указал на соотношение между биномиальными коэффициентами. Так что биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля были ему известны.

3.3.21. Джемшид Гиясэддин Ал-Каши (1380-1450)

Ал-Каши ввёл десятичные дроби. Они издавна употреблялись в Китае, но подробно описал операции с десятичными дробями и регулярно стал их применять именно ал-Каши. До него для астрономических вычислений широко употреблялись шестидесятеричные дроби. Сам ал-Каши прежде всего разрабатывал операции с шестидесятеричными дробями, а десятичные дроби он ввёл по аналогии с шестидесятеричными. В Европе систематическое употребление десятичных дробей ввёл голландец С.Стевин (1585).

Для трисекции угла ал-Каши разработал итеррационный метод. Он записал уравнение $x^3+q=px$ в виде $x=\frac{q+x^3}{p}$. В качестве первого приближения берётся $x_1=\frac{q}{p}$ и полагается $x_{n+1}=\frac{q+x_n}{p}$. Так он с большой точностью вычислил $\sin 1^\circ$.

Многие арабские математики занимались вычислением числа π (отношения длины окружности к радиусу), но они долго не могли превзойти точности, достигнутой в Древней Греции. Первым этого добился ал-Каши, получив 16 верных десятичных знаков. Он с очень большой точностью вычислил длину окружности как среднее арифметическое вписанного и описанного правильных многоугольников с $3\cdot 2^{28}$ сторонами.

Ал-Каши изложил правило возведения бинома в любую натуральную степень. Он даёт аддитивное правило последовательного вычисления биномиальных коэффициентов и приводит таблицу биномиальных коэффициентов до 9-й степени включительно. Формулу возведения бинома в степень ал-Каши использует для приближённого вычисления корней n-й степени.

3.3.22. Ал-Каласади (1412-1486)

В трактате ал-Каласади по алгебре нет существенно новых результатов, но в нём впервые появляется разработанная алгебраическая символика (до этого арабские математики использовали только словесные формулировки). У ал-Каласади есть обозначение квадратного корня, обозначения неизвестной, а также её квадрата и куба, есть знак равенства. Его обозначения — короткие арабские слова или начальные буквы слов. В Европе развитие алгебраической символики началось примерно в это же время.

Глава 4.

Средние века и Возрождение

4.1. Византия

О византийских математиках сохранилось очень мало сведений. Известно, что Анфемий из Трал (ум. 534), строитель собора Св. Софии в Константинополе, написал трактат о зажигательных стёклах, интересный для истории конических сечений; в нём он предложил построение эллипса с помощью нити, закреплённой в фокусах. Ученик Анфемя — Исидор из Милета. Один из учеников Исидора написал трактат о правильных многогранниках, часто присоединяемый к изданиям «Начал» Евклида в качестве книги XV. Говоря о правиле нахождения углов между гранями правильного многогранника, он пишет, что этот вопрос был поставлен «по инициативе Исидора, великого нашего учителя».

С XI века в Византии некоторое распространение получают арабские цифры и позиционная нумерация. Максим Плануд из Никомедии (1260-1310) объясняет употребление девяти знаков для чисел от 1 до 9, а также знака, называемого *цифра* и «обозначающего ничто». Все эти знаки, по словам Плаунда, происходят из Индии.

4.2. Средневековая Европа

Возрождение математики в Европе началось с переводов арабских трактатов по математике (в том числе и переведённых, в свою очередь, с греческого). Переводы с греческого долгое время были редкостью. Важную роль в развитии математики играли университеты, которые появились сначала в Италии (XI в.), а затем во Франции и в Англии (XII в.). Уровень развития математики очень долго оставался крайне низким. Ещё в XVI в. в Парижском университете кандидаты на степень магистра вместо сдачи экзамена по геометрии присягали, что прослушали лекции по шести первым книгам «Начал».

4.2.1. Герберт (946-1003)

Французский монах Герберт, ставший в 999 году римским папой под именем Сильвестра II, написал несколько сочинений по математике. В частности, он восстановил забытые со времён Римской Империи правила счёта на аббаке. Крайне низкий уровень математической культуры того времени хорошо характеризует выдвинутое против Герберта обвинение, что он умеет делить любые сколь угодно большие числа, а потому запродался дьяволу.

4.2.2. Леонардо Пизанский по прозванию Фибоначчи (1180-1240)

Леонардо Пизанский более известен под именем Фибоначчи, т.е. сын Боначчи. Его отец — купец, торговавший в Алжире. Там Леонардо изучал метематику у арабских учителей.

Основной труд Леонардо — «Книга аббака» — написан в 1202 г. и существенно переработан в 1228 г. Он посвящён не только счётной доске, но и арифметике вообще. Леонардо показывает преимущества индийской записи чисел (он говорит о девяти цифрах — без нуля).

В главе XII приведена знаменитая задача о кроликах: «Сколько пар кроликов родится в течение года от одной пары кроликов, если каждая пара приносит ежемесячно по паре, рождают кролики со второго месяца после своего рождения, и если ни одна пара не погибает?» После первого месяца будут 2 пары. После второго месяца из них одна пара принесёт одну пару и получится 3 пары. После третьего месяца будет 2+3=5 пар, ..., после двенадцатого месяца будет 144+233=377 пар. Эту последовательность можно продолжать дальше. Числа, возникающие при этом, получили название *чисел Фибоначчи*.

У Леонардо впервые появляется и популярная впоследствии задача о наименьшем числе гирь, с помощью которых можно взвесить все целые веса, меньшие данного. Он использует гири $1, 3, 9, 27, \ldots$: любое натуральное число можно представить в виде суммы и разности таких чисел (каждое число берётся не более одного раза).

Леонардо разбирает много разных задач, приводящих к линейным уравнениям. В связи с этими задачами он первым в Европе пришёл к мысли о введении отрицательных чисел и их толковании как долга. В главе XIV Леонардо излагает способы приближённого вычисления квадратного и кубического корней: $\sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1}$.

Изложение у Леонардо словесное. Неизвестную величину он называет res (вещь) или radix (корень); это — латинские переводы арабских терминов.

В 1220 г. Леонардо написал книгу «Практика геометрии». Там впервые приводится доказательство того, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (сам этот факт был известен Архимеду). Леонардо приводит также теорему о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда.

В книге «Цветок» Леонардо изучал кубическое уравнение $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$; сначала он доказал, что оно не имеет целых (положительных) решений, затем, что не имеет рациональных решений и решение не может быть квадратом рационального числа и не может также быть ни одной из иррациональностей, встречающихся у Евклида. После этого он с большой точностью вычисляет корень этого уравнения. Эту задачу, среди нескольких других, ему предложили как вызов (она есть у Омара Хайяма, который приводит решение посредством пересечения окружности и гиперболы; у него эта задача возникла из геометрии).

В «Книге квадратов» (1225) Фибоначчи доказывает, что каждый полный квадрат — сумма последовательных нечётных чисел. Он описывает построение пифагоровых троек и доказывает, что числа x^2+y^2 и $x^2 - y^2$ не могут быть одновременно квадратами, и что $x^4 - y^4$ не может быть квадратом. Фибоначчи доказывает также тождество $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$.

4.2.3. Томас Брадвардин (1290–1349)

Английский мыслитель Томас Брадвардин, в конце жизни ставший архиепископом Кентерберийским, написал несколько сочинений по математике и механике. В «Трактате о пропорциях или о пропорциях скоростей при движениях» он изучал равномерное движение тел. Математическими рассуждениями показал, что следующие два утверждения Аристотеля о скорости движения несовместимы. 1) Движение возможно лишь в том случае, когда действующая на тело сила больше силы сопротивления. 2) Скорость тела пропорциональна действующей на него силе, делённой на силу сопротивления. Действительно, если мы фиксируем действующую силу, а силу сопротивления будем последовательно удваивать, то в какой-то момент сила сопротивления станет больше действующей силы. Тогда по первому правилу скорость тела должна быть равна нулю, а по второму правилу скорость этого тела не может быть равна нулю.

В связи с исследованием скоростей Брадвардин подробно излагает учение о составных отношениях, приближаясь при этом к идее дробных показателей степени. Он вводит «половинное» отношение, соответствующее $\sqrt{a} : \sqrt{b}$. Вскоре эту идею развил Николя Орем.

В «Трактате о континууме» Брадвардин исследует непрерывное и дискретное, излагает различные взгляды на строение континуума, которых придерживались его предшественники и современники, и приводит свои рассуждения о природе континуума. Свою позицию он формулирует так: «Утверждение, полагающее, что континуум состоит из конечного числа неделимых, враждебно всем наукам, всем им противоборствует и потому всеми ими единодушно отвергается.»

4.2.4. Ричард Суайнсхед (первая половина XIV века)

В «Книге калькуляций» Ричарда Суайнсхеда (ок. 1350) впервые появляется понятие о мгновенной скорости. Он рассуждает об интенсивности формы как о переменной интенсивности качества. Суайнсхед анализирует примеры изменеиния интенсивностей. Он говорит, что при равномерном росте интенсивности средняя интенсивность на некотором промежутке есть среднее арифметическое начальной и конечной интенсивностей. Рассматривая другой пример, когда интенсивности на последовательных участках промежутка, разбитого в геометрической прогрессии $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, ..., растут в арифметической прогрессии 1, 2, 3, он получает (на современном языке), что

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 3 + \frac{1}{2^4} \cdot 4 + \cdots = 2.$$

Чёткого определения понятия мгновенной скорости у Суайнсхеда не было, да и не могло быть, потому что в Средние века, как и в древности, рассматривали отношения только однородных величин — нельзя было рассмотреть отношение пути ко времени. Поэтому при сравнении скоростей сопоставляли либо пути, пройденные за одно и то же время, либо времена, за которые проходится один и тот же путь.

4.2.5. Никола Орем (1323–1382)

Французский математик Никола Орем продолжил исследования Брадвардина о составных отношениях и Суайнсхеда об интенсивности. Он написал трактат о сфере и два трактата об отношениях, очень важных для дальнейшего развития математики.

Наряду с n-кратными отношениями Орем ввёл дробно-рациональные отношения, соответствующие дробным степеням чисел, и подошёл к понятию иррационального показателя (он считал, что такие отношения можно заключить между достаточно близкими дробными отношениями).

Орем ввёл понятие ускорения. Он исследовал равноускоренное движение и доказал, что при таком движении средняя скорость равна среднему арифметическому начальной и конечной скоростей, а пройденный путь пропорционален квадрату времени. При этих исследованиях Орем ввёл графическое представление зависимостей.

Орем доказал расходимость гармонического ряда, заметив, что каждая из сумм $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$, ... больше $\frac{1}{2}$.

Последователь Орема португалец Альвар Томас сформулировал общее правило суммирования ряда

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

при $|x| < 1$.

4.3. Возрождение

4.3.1. Иоганн Мюллер по прозванию Региомонтан (1436-1476)

Иоганн Мюллер родился в маленьком городке Кёнигсберге в Баварии. В переводе на русский язык название этого города означает «королевская гора», а если перевести на латынь, то получится Regio monte. Поэтому Иоганна Мюллера называли на латинский манер Региомонтан. Он написал первое крупное сочинение в Европе по тригонометрии — «Пять книг о треугольниках всех видов». Многое Региомонтан взял из арабских источников, но, помимо систематизации этого материала, он снабдил некоторые утверждения своими оригинальными доказательствами.

Региомонтан первым доказал теорему косинусов в знакомом нам виде. Теорему синусов он также формулирует и применяет для решения треугольников. Региомонтан составил также таблицы синусов.

Региомонтан считал, что его сочинение о треугольниках необходимо астрономам (сам он много занимался астрономией). Книги III, IV и V посвящены сферической геометрии, важной для астрономии.

Региомонтан первым стал печатать книги по астрономии и математике, 20 лет спустя после изобретения печатного станка.

4.3.2. Теория перспективы

В дальнейшем на возникновение и развитие проективной геометрии большое влияние оказала теория перспективы, которую разрабатывали многие художники и архитекторы эпохи Возрождения. Теорию перспективы разрабатывали, в частности, Леон-Баттиста Альберти

(1404-1472) в трактате «О живописи» (1435), Пьеро деи Франчески (1410-1492) в трактате «О перспективе в живописи», Леонардо да Винчи (1452-1519) и Альбрехт Дюрер (1471-1528).

4.3.3. Лука Пачоли (1445-1515)

Основной труд Пачоли — «Сумма по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» (1487 г., издан в 1494 г.). В этой энциклопедии математических знаний того времени Почоли излагает правила и приёмы арифметических действий, действия с дробями, а также алгебру, которую он называет regula della cosa. Он рассматривает линейные уравнения, квадратные уравнения и некоторые виды биквадратных уравнений.

«Сумма» содержит также много разных задач. Одна из них впоследствии стала знаменитой в теории вероятностей. Игра в кости, в которой выигрывает тот, кто получает 6 очков, была прервана, когда один из игороков получил 5, а второй 2 очка. Спрашивается, в какой пропорции следует разделить ставку? Пачоли ошибочно считал, что в отношении 5:2.

В «Сумме» изложена изобретённая Лукой Пачоли двойная бухгалтерия, когда все денежные операции записываются в двух столбцах — кредита (доход) и дебета (долг). Она, по-видимому, повлияла на его трактовку отрицательных чисел.

По настоянию Леонардо да Винчи Лука Пачоли написал книгу «О божественной пропорции» (1497 год, издана в 1509 году). Леонардо сделал к этой книге рисунки правильных многогранников.

4.3.4. Никола Шюке (1445-1500)

Николя Шюке составил рукописный труд «Наука о числах в трёх частях» (1484). В нём он использовал отрицательные числа и ввёл не только нулевой, но и отрицательный показатели. Утверждал (без доказательства), что число $\frac{a+b}{c+d}$ заключено между $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{d}$. Воспользовался этим для итеррационного решения квадратного уравнения.

4.3.5. Леонардо да Винчи (1452-1519)

В записках Леонардо да Винчи часто встречаются различные математические задачи. Много внимания он уделил звёздчатым многогранникам и построению правильных многоугольников. При построениях он часто требует, чтобы циркуль имел постоянный раствор (построениями такого рода занимался Абу-л-Вафа).

При исследовании центров тяжести полукруга и тетраэдра, а также при вычислении площади эллипса, Леонардо применил методы Архимеда. Теоретически Леонардо высказывался против неделимых, но на практике он применял метод неделимых (по-видимому, он применял его не для доказательства, а лишь для поиска ответа).

Леонардо изобрёл циркуль для пропорционального увеличения или уменьшения фигур и прибор для построения параболы.

4.3.6. Косисты

Важные шаги в развитии алгебраической символики сделали коссисты — немецкие алгебраисты XVI в. Такое название связано с тем, что они называли алгебру Coss — от итальянского cosa (вещь), обозначавшего неизвестную у итальянских алгебраистов. Именно коссисты первыми стали употреблять знаки $+$ и $-$. Известный коссист Адам Ризе (1489–1559) издал в 1552 г. учебник, про который он пишет, что его оригинал написан по-арабски, переведён на греческий Архимедом, а потом на латынь Апулеем.

4.3.7. Михаэль Штифель (1468-1567)

Крупнейший коссист — Михаэль Штифель. Он вычислил, что 19 октября 1533 г. будет конец мира. После того как предсказанный им конец мира не произошёл, Штифель, желая понять свою ошибку, всерьёз занялся математикой.

Штифель дал словесную формулировку бинома Ньютона для любого натурального n и сформулировал правило вычисления биномиальных коэффициентов (это не совсем правило Паскаля, потому что Штифель записывал лишь часть треугольника Паскаля, избегая повторений) и составил таблицу биномиальных коэффициентов до 17-й степени.

Штифель был первым, кто рассматривал отрицательные числа как числа, меньшие нуля. Использование отрицательных чисел позволяет вместо трёх видов квадратных уравнений

$$x^2 = ax + b, \quad x^2 + ax = b, \quad x^2 + b = ax$$

рассматривать любой из них. В Индии так делал уже Брахмагупта, а в Европе такая единая трактовка впервые встречается у Штифеля.

Штифель первым в Европе сформулировал современное правило деления одной дроби на другую как умножение на перевёрнутую дробь. До этого для деления одной дроби на другую их обычно приводили к общему значенателю.

4.3.8. Коперник (1473-1543)

Коперник оказал существенное влияние на развитие тригонометрии. Ему были ближе труды Птолемея, а не арабских математиков и Региомонтана. Коперник, доказал, что точка окружности, катящейся внутри окружности вдвое большего радиуса, описывает диаметр бóльшей окружности. Неизвестно, узнал он об этой теореме из сочинений Насир ад-дина ат-Туси или обнаружил её сам.

4.3.9. Решение кубического уравнения

Первым кубическое уравнение в радикалах решил профессор Болонского университета Сципион дель Ферро (1456–1526). Сделал он это для уравнения вида $x^3 + ax = b$. Он не опубликовал это решение, но сообщил его своему ученику Фиору, который пользовался им на математических турнирах. На одним из таких турниров в 1535 г. Фиор встретился с Николо Тартальей (1500–1557). Тарталья самостоятельно нашёл правило дель Ферро и решил все предложенные ему задачи. Это настолько обескуражило Фиора, что он не смог решить ни одной из предложенных ему задач. На следующий день после турнира Тарталья нашёл и решение уравнения $x^3 = ax + b$. В 1539 г. об открытии

Тартальи узнал Джироламо Кардано (1501–1556) и выпросил у него формулировку решения, поклявшись её не публиковать. Познакомившись с бумагами дель Ферро, Кардано нарушил клятву, и опубликовал обработанное им решение с упоминанием об авторстве Тартальи. Тем не менее, закрепилось название *формула Кардано*.

Уравнение $x^3+ax=b$ дель Ферро и Тарталья решали так. Сначала они находили u и v, удовлетворяющие системе уравнений $u-v=b$, $uv=\left(\frac{a}{3}\right)^3$ (это сводится к решению квадратного уравнения), а затем уже находили $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$. При решении уравнения $x^3=ax+b$ Тарталья поступал так: $u+v=b$, $uv=\left(\frac{a}{3}\right)^3$ и $x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$. Доказательство Кардано было геометрическое, с помощью разрезания куба на части.

Кардано признавал отрицательные корни уравнения. Он знал не только о наличии трёх корней кубического уравнения, но и о том, что сумма этих корней равна (по абсолютной величине) коэффициенту при x^2.

Для уравнения $x^3=ax+b$ получалось решение

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

При $\left(\frac{b}{2}\right)^2<\left(\frac{a}{3}\right)^3$ это решение становится непригодным: действительный корень оказывается суммой двух комплексных чисел. Кардано не смог разобраться с этим. С этой проблемой разобрался Рафаэль Бомбелли.

Уравнение четвёртой степени решил Луиджи Феррари (1522-1565), ученик Кардано. Общее уравнение сводится к виду $x^4+ax^2+bx+c=0$. Феррари заметил, что

$$\left(x^2+\frac{a}{2}\right)^2=x^4+ax^2+\frac{a^2}{4}=-bx-c+\frac{a^2}{4},$$

и добавил к обеим частям $2\left(x^2+\frac{a}{2}\right)t+t^2$, чтобы получить в левой части полный квадрат. При этом правая часть принимает вид

$$2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right).$$

Этот квадратный трёхчлен является полным квадратом, когда его дискриминант обращается в нуль, т.е.

$$b^2 = 2t(4t^2 + 4at + a^2 - 4c).$$

Получилось кубическое уравнение; найдём его корень t_0. Извлекая квадратный корень из двух стоящих в левой и правой части полных квадратов, получаем два квадратных уравнения

$$x^3 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm\sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t}\right).$$

Тарталья определил число различных сочетаний из n элементов по m (без повторений). Познакомившись с таблицей биномиальных коэффициентов, составленной Штифелем, Тарталья расширил её и стал записывать в виде квадрата; диагональ отсекает от этого квадрата треугольник Паскаля. Таблицу биномиальных коэффициентов Таральья составлял, чтобы определить, сколько возможно существенно различных выпадений при бросании r игральных костей. Кардано тоже изучал задачу о бросании костей.

4.3.10. Герард Меркатор (1512-1594)

Фламандский картограф и географ Герард Кремер перевёл свою фамилию, означавшую «купец», и стал называться Меркатор. При составлении карт используются различные проекции сферы на плоскость. В 1569 г. Меркатор впервые применил проекцию, получившую название *проекция Меркатора*. При этой проекции параллели и меридианы представляются перпендикулярными прямыми.

4.3.11. Рафаэль Бомбелли (1526-1573)

Книга Бомбелли «Алгебра» опубликована в 1572 г. В этой книге он свободно обращается с отрицательными числами и приводит правило знаков для умножения чисел.

Как уже говорилось, при $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$ решение Кардано для уравнения $x^3 = ax + b$ становится непригодным, потому что действительный корень уравнения оказывается суммой двух комплексных чисел. Кардано не смог разобраться с этим. Бомбелли обнаружил, что при этом два кубических корня являются сопряжёнными числами. Например, действительный корень уравнения $x^3 = 15x + 4$ выражается формулой $\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$, и при этом $\sqrt[3]{2 \pm 11i} = 2 \pm i$. Бомбелли разработал правила обращения с комплексными числами.

В «Алгебре» Бомбелли представляет квадратные корни из натуральных чисел в виде непрерывных дробей.

4.3.12. Франсуа Виет (1540-1603)

Франсуа Виет был советником короля Генриха III, а после его смерти — Генриха IV. Славу ему принесла расшифровка переписки врагов Генриха III.

Виет отвергал слово «алгебра», потому что такого слова не было в европейских языках; он предлагал заменить его на «анализ». Надо сказать, что и в более поздние времена слова «алгебра» и «анализ» употреблялись как синонимы. Например, так делал Даламбер в знаменитой «Энциклопедии».

Виет, как и древнегреческие математики, считал необходимым соблюдать закон однородности, т.е. складывать только одинаковые степени.

Виет использовал словесное обозначение степеней. Он предложил неизвестные величины обозначать гласными (большими) буквами, а известные — согласными.

Виет предложил новый подход к решению кубических уравнений: уравнение $x^3 + 3ax = 2b$ заменой $y^2 + xy = a$ сводится к $y^6 + 2by^3 = a^3$.

При решении кубических уравнений вызывал трудности так называемый неприводимый случай, когда при решении кубического уравнения с вещественными корнями по формуле Кардано возникают квадратные корни из отрицательных чисел. Несложным преобразованием кубическое уравнение в неприводимом случае приводится к виду $q = z^3 - 3z$. Виет воспользовался известным ему тождеством

$$2\cos 3x = (2\cos x)^2 - 3(2\cos x)$$

и показал, что решение уравнения $q = z^3 - 3z$ сводится к нахождению неизвестной величины $2\cos x = z$ по известной величине $2\cos 3x = q$, т.е. к трисекции угла. (Коэффициент 2 перед косинусами связан с тем, что Виет использовал не синусы и косинусы, а хорды окружности.)

Виет знал и общие выражения $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$. Это позволило ему решить в 1594 г. уравнение 45-й степени, предложенное голландским математиком Адрианом ван Роуменом (1561-1615). Это было уравнение для хорды одной 45-й дуги в 24° (окружности радиуса 1). Виет нашёл и 22 других положительных корня этого уравнения.

Отрицательных корней Виет не признавал, хотя и был хорошо знаком с работами Кардано, который признавал отрицательные корни. Подстановку $y = x + a$, которую Кардано использовал для уничтожения члена второй степени в кубическом уравнении, Виет распространил на уравнения произвольной степени. На примерах уравнений с положительными корнями от второй до пятой степени и коэффициентом ± 1 при старшей степени показал, что коэффициенты при x^{n-1}, $x^{n-2}, x^{n-3}, \ldots$ — это (взятые с чередующимися знаками) сумма корней, сумма произведений пар корней, сумма произведений троек корней и т.д. (Для квадратных уравнений такое утверждение ранее высказывал Кардано.)

Виет нашёл выражение числа π в виде бесконечного произведения квадратных корней:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{90^\circ}{4}\cos\frac{90^\circ}{8}\cdots = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}$$

Доказательство этой формулы основано на следующем соображении: если площадь правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, равна S_n, то $S_n : S_{2n} = \cos\frac{180^\circ}{n}$.

Виет нашёл решение с помошью циркуля и линейки задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей. (Решение Аполлония было утеряно. Оно содержалось в его трактате «О касаниях», о котором рассказывает Папп.)

Виет ввёл термин *коэффициент*, сначала в весьма специальном случае.

4.3.13. Симон Стевин (1548-1620)

Широкое распространение десятичных дробей в Европе началось после посвящённой им книги фламандского математика Симона Стевина, изданной в 1585 г. До этого обычно использовались шестидесятеричные дроби.

Стевин писал о необходимости признания иррациональнымх чисел и возражал против того, чтобы их называли иррациональными или невыразимыми, потому что они всего лишь несоизмеримы.

Глава 5.

XVII век

В XVII в. впервые появляются академии. В 1601 г. в Риме была основана Академия Рысей (Accademia dei Lincei); её членом с 1611 г. был Галилей. Во Франции Дезарг, Декарт, Паскаль, Ферма и другие под руководством Мерсенна встречались частным образом с 1630 г. для обсуждения научных проблем. В 1666 г. Людовик XIV предоставил им право создать Королевскую Академию Наук, которой он оказывал поддержку. В Англии группа математиков и астрономов под руководством Джона Валлиса собиралась с 1645 г. Эта группа была официально признана в 1662 г. Карлом II и стала называться Лондонским Королевским Обществом. В 1700 г. в Германии была основана Берлинская Академия Наук. Первым её президентом стал Лейбниц. В 1724 г. в России Петр I основал Санк-Петербургскую Академию Наук.

Академии не только давали возможность учёным обсуждать интересующие их проблемы и обмениваться идеями, но и организовывали издание научных журналов. Правда, первый научный журнал, Journal des Savants, начал издаваться во Франции в 1665 г., до создания Королевской Академии Наук. В том же году начал выходить журнал Philosophical Transaction of the Royal Society.

Одно из важнейших приобретений математики XVII в. — метод координат. Координатный подход резко расширил класс кривых, которыми могли заниматься геометры, по сравнению с теми кривыми, которыми занимались древнегреческие геометры. Уже Декарт писал, что метод координат может работать не только на плоскости, но и в пространстве, и давал краткие пояснения этого. Ферма тоже об этом вкратце писал, и обещал написать подробнее, когда у него найдётся свободное время. Чуть более подробно об этом написал Лагир. Но сколько-нибудь подробные работы о координатах в трёхмерном пространстве появились лишь в XVIII в.

Более позднее, но и более важное приобретение математики XVII в. — дифференциальное и интегральное исчисление. Взаимно обратный характер задач, решаемых теперь с помощью дифференцирования и интегрирования, не был ясен для Ферма и Декарта. Его открыл Исаак Барроу, учитель Ньютона. Основной вклад в развитие математического анализа в XVII в. внесли Ньютон и Лейбниц. Обозначения Лейбница ($\int$ и dx) оказались более удобными, чем обозначения Ньютона ($\dot{x}$). Первым пробным камнем для испытания правильности и применимости нового исчисления явилась задача о цепной линии (т.е. о том, как выглядит тяжёлая нить с закреплёнными концами). Эту задачу впервые поставил Галилей; он высказал предположение (оказавшееся неверным), что эта кривая представляет собой параболу. Лейбниц и Иоганн Бернулли решили её с помощью нового исчисления, а Гюйгенс, который не сумел освоить новое исчисление, исследовал её старыми методами.

Алгебра и анализ в XVII в. не имели логического обоснования, но проблемы их логического обоснования пока мало интересовали математиков. Ферма, Паскаль и Барроу признавали, что их работам о вычислении площадей и методе неделимых недостаёт строгости, но были уверены, что эти работы можно обоснованть на таком же уровне строгости, как это было у Архимеда. У Ньютона и Лейбница не было строгих определений производной и интеграла. Они полагались на согласованность результатов и плодотворность метода и двигались вперёд.

В XVII и XVIII вв. никто из тех, кто внёс наибольший вклад в развитие математики, не был математиком по преимуществу. Декарт, Гюйгенс и Ньютон внесли больший вклад в развитие физики, чем математики. Паскаль, Ферма и Лейбниц активно занимались физикой. Декарт считал, что в математику помимо алгебры и геометрии входят астрономия, музыка, оптика и механика.

Галилей и Ньютон, хотя и настаивали на необходимости экспериментов, но это были по-преимуществу мысленные эксперименты для подтверждения уже полученных результатов. Они были уверены в том, что мир устроен просто, и достаточно немногочисленных, но хорошо продуманных экспериментов. А вера в простоту устройства мира опиралась на их веру в то, что законы природы описываются на языке математики.

Следует отметить, что в XVII в. целью математики постепенно становятся общие, а не частные результаты.

5.1. Логарифмы

Швейцарец Иост Бюрги (1552-1632) около 1610 г. изготовил таблицы, которые он долго не публиковал и опубликовал их уже после Непера. Он исходил из соответствия между умножением в геометрической прогрессии и сложением в арифеметической прогрессии. Бюрги составил таблицу геометрической прогрессии со знаменателем 1,0001. Его таблица не получила распространения, потому что она была менее удобна, чем таблица Непера, и появилась, когда таблицы Непера уже были широко известны.

Шотландец Джон Непер (1550-1617) к открытию люгарифмов пришёл не позднее 1594 г., но таблицы опубликовал лишь спустя 20 лет, в 1614 г. Эти таблицы содержали логарифмы синусов и косинусов. В отличие от Бюрги, рассматривавшего две дискретные прогрессии, Непер рассматривал логарифмы для всех значений непрерывно меняющихся тригонометрических величин — синуса и косинуса. Логарифм он определяет кинематически следующим образом. Пусть две точки начинают двигаться одновременно с одной и той же начальной скоростью. Первая точка движется по лучу с постоянной скоростью, вторая точка движется по отрезку длины 10^7 со скоростью, равной расстоянию от неё до того конца отрезка, по направлению к которому она движется. Тогда длина пути, пройденного первой точкой, равна неперову логарифму длины пути, пройденного второй точкой. Неперов логарифм числа x линейно выражается через натуральный логарифм: $-10^7 \ln x + 10^7 \ln 10^7$. Такое отличие от натурального логарифма связано с той целью, которую ставит перед собой Непер: вычисление логарифмов полухорд окружности радиуса 10^7. Непер хочет, чтобы они были положительными. В вычислениях у Непера была ошибка, повлекшая за собой ошибку в большей части таблицы в седьмом знаке.

Неперовы логарифмы были неудобны тем, что логарифм 1 не был равен 0. Он этого неудобства избавился Генри Бригс (1561-1631); кроме того, он стал использовать в качестве основания логарифмов основание 10. Это ему предложил в 1615 г. сам Непер, которому ухудшившееся здоровье не позволяло проделать необходимые огромные вычисления. Бригс опубликовал свои таблицы в 1624 г.

Всё это делалось для упрощения вычислений в астрономии. Лаплас говорил, что логарифмы вдвое увеличивают жизнь астрономов, сокращая их работу, связанную с вычислениями. Одним из первых оценил пользу логарифмов для вычислений в астрономии Кеплер.

Экспоненциальная функция появилась позже, потому что в то время ещё не рассматривали степени с дробными показателями.

Появление логарифмов способствовало развитию преобразований тригонометрических формул к виду, удобному для логарифмирования. В частности, Непер предложил следующий формулы для сферического треугольника:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}, \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Эти формулы получили название *аналогии Непера*. Дело в том, что греческое слово «аналогия» в XVII в. часто употреблялось вместо латинского термина «пропорция».

5.2. Томас Гарриот (1560-1621)

Томас Гарриот основал английскую школу алгебры. При решении уравнений он рассматривал отрицательные корни и даже комплексные корни. Гарриот значительно усовершенствовал алгебраическую символику. Знаки $>$ и $<$ впервые появились в посмертном издании его книги по алгебре (1631), но эти обозначения введены не самим Гарриотом, а издателем этой книги.

В 1601 г., за 20 лет до Снеллиуса, Гарриот открыл закон преломления света.

Гарриот изучал траекторию движения снаряда и раскладывал действующие на него силы на горизонтальную и вертикальную составляющие. Он очень близко подошёл к векторному решению задачи о нахождении скорости снаряда. В 1607 г. Гарриот выяснил, что снаряд движется по параболе.

В письме к Кеплеру Гарриот упомянул задачу о наиболее плотной упаковке сфер. Кеплер не смог решить эту задачу, но в 1611 г. он высказал гипотезу, что наиболее плотная упаковка получается тогда, когда сферы укладываются слоями, причём центры сфер верхнего слоя расположены над центрами отверстий нижнего слоя. Эта *гипотеза Кеплера* оставалась недоказанной до 1998 г.

5.3. Галилео Галилей (1564-1642)

Открытия Галилея в области математики не такие великие, как в астрономии и механике, но всё же они весьма существенные.

Не позднее 1586 г. Галилей нашёл центр тяжести усечённого параболоида вращения. Но вскоре Валерио получил более общие результаты, и Галилей отказался от публикации своего сочинения. (Позже он включил его в свои «Беседы».)

Задуманный труд о неделимых Галилей не завершил, но идеи Галилея оказали большое влияние на Кавальери.

В «Беседах о математических доказательствах» (1638) Галилей показывает, что всех квадратов натуральных чисел, с одной стороны, меньше, чем всех натуральных чисел, а с другой стороны, их столько же. Он объясняет это так: «Свойства равенства, а также большей и меньшей величины, не имеют места там, где дело идёт о бесконечности, они применимы только к конечным количествам.» Галилей доказывает, что при равноускоренном движении, начинающемся с нулевой скоростью, путь проходится за то же время, что и при равномерном движении со скоростью, равной половине конечной скорости равноускоренного движения. Это он делает, сравнивая площадь треугольника и площадь прямоугольника. Галилей устанавливает, что наибольшая дальность полёта при заданной начальной скорости достигается, когда тело брошено под углом 45° к горизонту.

Галилей установил, что тяжёлая точка съёзжает в нижнюю точку вертикально расположенной окружности по дуге окружности быстрее, чем по хорде. В связи с этим он ошибочно считал, что дуга окружности — это та кривая, по которой тяжёлая точка быстрее всего попадает из одного положения в другое. Впоследствии кривая наискорейшего спуска получила название *брахистохрона*. В 1696 г. сразу несколько математиков независимо доказали, что брахистохрона — это не дуга окружности, как ошибочно считал Галилей, а другая кривая — хорошо известная к тому времени циклоида.

5.4. Иоганн Кеплер (1571-1630)

С 1594 г. Кеплер работал профессором математики и морали в Граце. В качестве астролога он должен был заниматься предсказанием не только погоды, но и политических событий. Кеплер говорил, что мать астрономия голодала бы, если бы ей на хлеб не зарабатывала её дочь астрология. Грац Кеплеру пришлось покинуть после того, как там начались гонения на протестантов. В 1600 г. Кеплер переехал в Прагу по приглашению придворного астронома и астролога Тихо Браге (1546-1601). После смерти Браге Кеплер занял его должность. Используя астрономические наблюдения Браге, Кеплер открыл первые два своих закона и опубликовал их в книге «Новая астрономия» (1609). Первый закон: каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Второй закон: каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём площадь сектора орбиты, описанная радиусом-вектором планеты, изменяется пропорционально времени. При формулировке второго закона Кеплер говорит не о площади, а о сумме радиусов-векторов. Чтобы придать этому смысл, нужно задать распределение точек на орбите, но Кеплер этого не делает.

Закон площадей сводит определение положения планеты на её орбите в данный момент времени к решению трансцендентного уравнения

$$\varphi + e\sin\varphi = kt,$$

которое получило название *уравнение Кеплера.*

Гипотеза Коперника о том, что Земля вращается вокруг Солнца, давала единообразное описание для движения планет, находящихся ближе к Солнцу, чем Земля, и находящихся от него дальше. Упрощалось также описание посредством эпициклов (уменьшалось число окружностей, участвующих в описании). Но выигрыша в точности не было. Наборот, система Птолемея давала более точное описание, чем система Коперника. И Тихо Браге, выполнивший самые точные для того времени измерения движения планет, отказался от системы Коперника и предпочитал ей систему Птолемея. Измерения Тихо Браге позволили Кеплеру предложить описание движения планет, которое совмещало простоту описания Коперника и точность описания Птолемея. Кеплер предположил, что Земля и другие планеты движутся по эллипсам, причём Солнце находится в одном из двух фокусов каждого из этих эллипсов.

Большое значение для истории геометрии имеет книга Кеплера «Оптическая часть астрономии» (1604). Здесь впервые вводится термин *фокус* и впервые появляется термин *бесконечно удалённый.* Кеплер говорит, что парабола — это эллипс (или гипербола), у которого один фокус удалён на бесконечное расстояние.

В урожайный для винограда 1612 г. Кеплер заинтересовался практическими правилами измерения объёмов бочек. Виноделы определяли вместимость бочек разной формы с помощью всего лишь одного промера — отметки на линейке, просунутой через наливное отверстие в середине верхней части бочки до края днища. В 1615 г. Кеплер опубликовал «Новое измерение винных бочек». Главная цель этой книги — выяснить, при какой форме бочка имеет наибольшую вместимость. Изучая этот вопрос, Кеплер пришёл к изопериметрическим задачам. Попутно он заметил, что по обе стороны от места наибольшего значения (максимума) величины её убывание вначале очень мало. Это было за 13 лет до того, как Ферма открыл общее правило нахождения экстремумов. Этим наблюдением Кеплер воспользовался для решения следующей задачи: вписать в данный шар цилиндр наибольшего объёма.

Первая часть книги содержит изложение сочинения Архимеда о шаре и цилиндре. Но Кеплер использует не строгие доказательства Архимеда, основанные на методе исчерпывания, а непосредственно вводит бесконечно малые величины. Замена строгих, но тяжеловесных методов, на нестрогие, но более удобные и лёгкие, позволила Кеплеру получить новые результаты, и он вычислил объёмы 87 новых тел.

Третий закон Кеплера (квадраты времён обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний от Солнца) опубликован в книге «Гармония мира» (1619).

Кеплер заметил, что отношение последовательных чисел Фибоначчи стремится к $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Во время судебного процесса против его матери, которую обвинили в колдовстве, Кеплер с риском для собственной жизни защищал её и спас от сожжения на костре.

5.5. Пауль Гульдин (1577-1643)

С 1635 по 1641 гг. издавалось сочинение Гульдина «О центре тяжести» в нескольких книгах. Во второй книге (1640) содержатся две теоремы об объёме и площади поверхности тела, полученного при вращении замкнутой кривой вокруг некоторой оси (предполагается, что ось не пересекает кривую и кривая лежит в плоскости, содержащей ось).

1. Площадь поверхности тела вращения равна произведению длины

кривой на длину кривой, заметаемой центром тяжести этой кривой.

2. Объём тела вращения равен произведению площади фигуры, ограниченной кривой, на длину кривой, заметаемой центром тяжести этой фигуры.

Эти теоремы без доказательства были ещё у Паппа (но их не было в том издании, которое было доступно Гульдину). Доказательства Гульдина весьма туманны и невразумительны. Более ясное доказательство (методом неделимых) дал Кавальери (1647).

5.6. Иоганн Фаульгабер (1580-1635)

Фаульгабер занимался изучением сумм степеней целых чисел. Он получил формулы для сумм $1^r + 2^r + \cdots + n^r$ при $r \leq 11$ (1617), а затем и при $r \leq 17$ (1631). При этом он получил фактически первые восемь чисел Бернулли. Фаульгабер отметил постоянство 20-х разностей последовательности $1^{20}, 2^{20}, 3^{20}, \ldots$

Фаульгабер заметил, что $1^r + 2^r + \cdots + n^r = S_r(n)$ — многочлен степени $r+1$ от n. Он утверждал также, что $S_r(n)$ полиномиально выражается через два первых многочлена $S_1(n)$ и $S_2(n)$. Доказательства он не привёл. Впервые доказательство этой теоремы получил Якоби в 1834 г. (у Якоби была книга Фаульгабера, поэтому он мог узнать из неё формулировку этой теоремы).

5.7. Григорий Сен-Винцент (1584-1667)

Основной труд Григория Сен-Винцента «Геометрический труд о квадратуре круга и конических сечений» закончен в 1629 г., но опубликован только в 1647 г. (В 1632 г., спасаясь бегством из осаждённой шведскими войсками Праги, он не смог взять свои бумаги, и получил их только много лет спустя.) В этом сочинении рассматривается сравнение объёмов тел, ограниченных цилиндрами и плоскостями; в координатах эти тела задаются неравенствами $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq y(x)$, $0 \leq z \leq z(x)$. Объём такого тела равен $\int_a^b y(x)z(x)\,dx$.

Выбирая функции $y(x)$ и $z(x)$ так, чтобы их произведение было постоянно, Сен-Винцент получает тела равного объёма. Например, если $y(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $z(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$, то полученное тело имеет такой же объём, как и тетраэдр, который получается, когда $y(x) = a - x$ и $z(x) = a + x$. Подход Сен-Винцента похож на подход Кавальери, но открыт незвисимо от него.

Сен-Винцент вычислил объём тела, отсекаемого от прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей через центр одного из оснований (и не пересекающей другое основание). Эта задача была уже решена Архимедом в послании Эратосфену, в то время ещё не обнаруженном.

Сен-Винцент первым установил, что если фигуру, ограниченную гиперболой $y = c^2/x$ и осью абсцисс, разрезать прямыми, параллельными оси ординат и проходящими через члены геометрической прогрессии, то получатся равновеликие фигуры. Лейбниц справедливо считал это открытие, устанавливающее связь между площадью под гиперболой и логарифмами, важнейшим достижением Сен-Винцента.

Сен-Винцент считал, что если в тело вписывать тонкие параллелепипеды и увеличивать их число, то они *исчерпают* всё тело. Термин *исчерпывание* после этого получил широкое распространение, и даже метод древних греков стали называть *методом исчерпывания*.

5.8. Жерар Дезарг (1591-1661)

Жерар Дезарг был по профессии архитектором и инженером. Его знаменитая теорема содержится в 12-страничном сочинении «Образец одного из способов для употребления перспективы» (1636). Она формулируется следующим образом: если прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников ABC и $A'B'C'$ пересекаются в одной точке, то точки пересечения их соответственных сторон лежат на одной прямой.

Основной труд Дезарга «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639) занимает всего

30 страниц. Здесь уже широко применяются проективные преобразования. Дезарг определил бесконечно удалённые точки как точки пересечения пучков параллельных прямых, а бесконечно удалённые прямые как прямые пересечения пучков параллельных плоскостей. Он обратил внимание на то, что двойное отношение $\frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC}$ четырёх точек A, B, C и D, лежащих на одной прямой, сохраняется при проекциях. Сам этот геометрический факт был известен ещё Паппу и Менелаю (Менелаю он был известен даже в сферической геометрии). Но они не воспринимали его с точки зрения проекций, а просто рассматривали конфигурацию из четырёх прямых на плоскости, пересекающихся в одной точке, и двух пересекающих их прямых. Дезарг рассматривал на прямой точки в инволюции и гармонические четвёрки точек. Инволюции прямой бывают двух типов: гиперболические и эллиптические. Гиперболическая инволюция задаётся формулой $x \mapsto a^2/x$; она имеет две неподвижные точки $\pm a$. Эллиптическая инволюция задаётся формулой $x \mapsto -a^2/x$; она не имеет неподвижных точек. Инволюция — это проективное преобразование прямой, совпадающее со своим обратным. Постепенно в математике стали называть инволюциями любые преобразования, совпадающие со своим обратным.

Дезарг пользовался своей собственной терминологией, часто заимствованной из ботаники. Все его термины забыты, за исключением термина инволюция (involution — скрученность молодых листьев).

Дезарг изучил полный четырёхсторонник[1] с точки зрения инволюций. Он доказал, что если рассмотреть семейство коник, проходящих через четыре точки, то на любой прямой эти коники будут высекать пары точек, находящихся в инволюции. Эту теорему тоже часто называют теоремой Дезарга. Среди рассматриваемых коник есть три вырожденные коники, соответствующие парам прямых, проходящих через данные точки.

Дезарг изучал поляры, которые ввёл ещё Папп. Поляра точки A относительно данной коники определяется следующим образом. На ка-

[1] Полным четырёхсторонником называют фигуру, образованную четырьмя точками и тремя парами прямых, проведённых через эти точки.

ждой прямой, проходящей через точку A, построим четвёртую гармоническую точку для точки A и двух точек пересечения прямой и коники. Все построенные точки лежат на одной прямой, которая и называется полярой точки A относительно данной коники.

Дополняя плоскость бесконечно удалённой прямой Дезарг трактует гиперболы и параболы как замкнутые кривые (пересекающие эту прямую в двух точках или касающиеся её).

Труды Дезарга были малопонятны для его современников (полностью его идеи усвоил лишь Паскаль, а частично — Лагир). Многие сочинения Дезарга были утеряны и не оказали большого влияния. Лишь в 1845 г. Шаль нашёл копию «Чернового наброска», сделанную в 1679 г. Лагиром. В 1951 г. был обнаружен и печатный экземпляр этого сочинения.

5.9. Альбер Жирар (1595-1632)

В 1626 г. Жирар опубликовал книгу «Тригонометрия», в которой впервые появляются сокращённые обозначения sin, cos, tan. В этой книге он доказал, что площадь сферического треугольника пропорциональна избытку суммы его углов над двумя прямыми углами (*формула Жирара*).

В книге «Новые открытия в алгебре» (1629) Жирар первым интерпретирует отрицательные числа, как движение в противоположном направлении по сравнению с положительными числами. Он принимает и использует не только отрицательные, но и комплексные корни. Это позволило ему сформулировать основную теорему алгебры в весьма общей форме. В этой книге Жирар приводит треугольник Паскаля задолго до Паскаля и использует его для изучения симметрических функций. В частности, он выражает суммы квадратов, кубов и четвёртых степеней корней многочлена через его коэффициенты. (Общие формулы такого рода получил Ньютон.)

В 1629 г. Жирар ввёл обозначение $\sqrt[n]{x}$ для обозначения корней произвольной степени.

В 1634 г. Жирар первым сформулировал индуктивное определение чисел Фибоначчи ($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) и показал, что отношение соседних чисел Фибоначчи стремится к золотому сечению.

5.10. Рене Декарт (1596-1650)

Шаль в «Историческом обзоре развития геометрических методов» пишет об идеях, которые развил Декарт в своей «Геометрии»: «Это дети, появившиеся без матери». Идеи Декарта действительно имели огромное преимущество перед теми, которые господствовали в математике до него.

Когда Декарт учился в школе, его здоровье было слабым, и он получил разрешение спать до 11 часов, и это стало его привычкой. Этой привычке ему пришлось изменить лишь в последний год жизни. Около 20 лет Декарт прожил в Голландии. В 1630 г. Декарт заявил Мерсенну, что устал от математики, и после этого математикой не занимался, за исключением краткого периода в 1637 г. В 1649 г. шведская королева Христина убедила Декарта переехать в Стокгольм и давать ей уроки. Но свободное для этого время было у неё только в 5 часов утра. Декарту пришлось отказаться от многолетней привычки поздно вставать, и он в холодном северном климате ежедневно рано по утрам ездил в королевский дворец. Через несколько месяцев он умер от воспаления лёгких.

«Геометрия» Декарта была опубликована как третье приложение к его философскому трактату «Рассуждение о методе». Это — исторически первая книга, которую современный математик может читать без затруднений, связанных со словесными формулировками вместо формул. Ещё Виет совсем незадолго до Декарта вместо привычного нам уравнения $x^3 - 3r^2x = r^3$ пишет

A cubus minus Z quadrato ter in A aequatur Z cubo.

Декарт внимательно читал Виета и многим ему обязан, но он гордо говорил, что начал там, где Виет остановился. Символические обозначения Декарта кардинально отличались от предшествующих ему словесных формулировок. Он обозначал известные величины первыми буквами алфавита, а неизвестные — последними. Но буквами он обозначал только положительные числа. Буквенные обозначения для положительных и отрицательных чисел встречаются у Иоганна Гудде в 1657 г.; Ньютон уже свободно использует эти обозначения. Обозначения для степеней у Декарта принимают современный вид: x^2, x^3, …(правда, квадрат ещё долгое время многие обозначали xx). Но эти обозначения он ещё не распространил на дробные и отрицательные показатели (это сделал Ньютон).

Декарт заинтересовался задачей о прямых, которой занимался сначала Аполлоний, а затем Папп. Их решение было утеряно. Декарту потребовалось шесть недель на решение этой задачи, и после этого он избавился от невысокого мнения об аналитических способностях древних. Задачу о прямых в случае $2n$ прямых можно сформулировать следующим образом. На плоскости даны два набора прямых по n прямых в каждом, и для каждой прямой задан угол. Из точки C проводятся прямые, образующие заданные углы с данными прямыми. Они пересекают прямые первого набора в точках $X_1, \ldots, X_n$, а прямые второго набора — в точках $Y_1, \ldots, Y_n$. Требуется найти множество точек C, для которых $CX_1 \ldots CX_n = kCY_1 \ldots CY_n$, где k — данное число. Для трёх прямых ищется множество точек C, для которых $CX_1 \cdot CX_2 = kCY_1^2$. Для $2n-1$ прямых ищется множество точек C, для которых $CX_1 \ldots CX_n = kCY_1 \ldots CY_{n-1}$, где k — отрезок. Эта задача оказалась чрезвычайно удобной для решения в координатах, потому что, например, для $2n$ прямых искомое множество задаётся уравнением

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i x + b_i y + c_i) - k\prod_{i=n+1}^{2n}(a_i x + b_i y + c_i) = 0.$$

А без использования координат задача получается трудная. Уравнение кривой (конического сечения), полученное при решении Декартом задачи о четырёх прямых, было первым заданием кривой уравнением в координатах. А при решении этой задачи для пяти прямых, четыре из которых перпендикулярны и находятся на равных расстояниях от соседних с ними, а пятая им перпендикулярна, вервые в истории геометрии появляется уравнение кривой третьей степени.

После этого Декарт пришёл к общему понятию о задании кривой уравнением $F(x, y) = 0$ и разработал метод координат. Сначала Декарт считал, что допустимыми являются лишь те кривые, каждую точку которых можно построить циркулем и линейкой.

Для кривых второй степени Декарт не доказывает, что они имеют две оси; он считает это известным (этот факт установлен Аполлонием). Аналитическая геометрия далеко не сразу смогла во всём превзойти достижения древнегреческих геометров. Ещё Ньютон при выводе законов Кеплера предпочитает ссылаться на Аполлония, а не на Декарта.

Для алгебраических кривых Декарт решил задачу о нахождении касательной и нормали методом исключения одной переменной из двух алгебраических уравнений. Сначала первичной для него была задача построения нормали. Для построения нормали в точке (a, b) алгебраической кривой $f(x, y) = 0$ Декарт разработал следующий алгебраический метод. Предположим, что эта нормаль пересекает ось абсцисс в точке $(c, 0)$. Рассмотрим окружность $(x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + b^2$ с центром в точке $(c, 0)$, проходящую через точку (a, b). Искомое число c определяется тем условием, что рассматриваемая окружность касается кривой. На алгебраическом языке это означает, что если мы исключим из уравнения $f(x, y) = 0$ и из уравнения окружности переменную y, то полученное уравнение $F(x) = 0$ должно иметь двукратный корень $x = a$. Для нахождения c Декрат использовал открытый им метод неопределённых коэффициентов. Запишем равенство $F(x) = (x-a)^2(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)$, где a_0, a_1, … — неопределённые коэффициенты. Приравнивая в обеих частях равенства коэффициенты при одинаковых степенях x, находим c и неопределённые коэффициенты.

Рассмотрим простейший пример: построение нормали к параболе $y^2 = kx$ в точке (a, b). Исключая y из уравнений $y^2 = kx$ и $(x-c)^2+y^2 =$

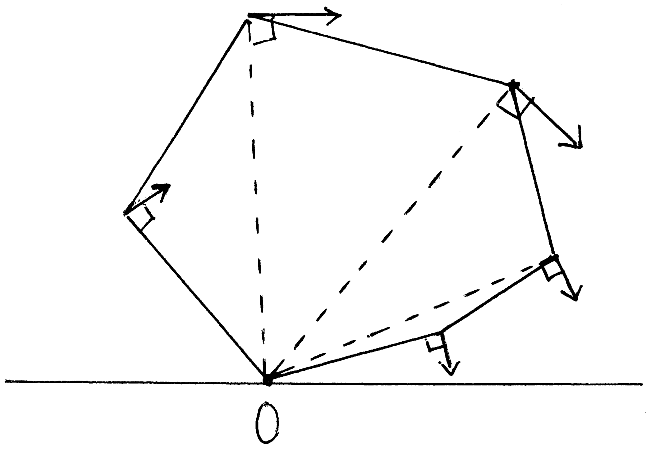

Рис. 5.1.

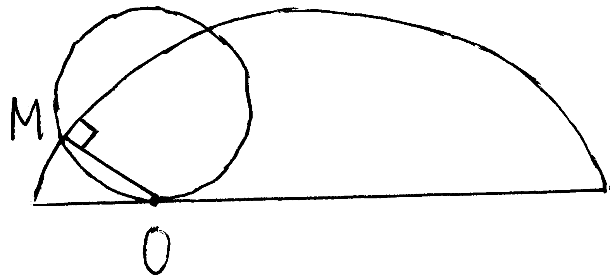

Рис. 5.2.

$(a-c)^2+b^2$, получаем $(x-c)^2+kx-(a-c)^2-b^2=0$. Этот квадратный трёхчлен должен быть равен $(x-a)^2$, поэтому $c=a+\frac{k}{2}$. В частности, $c-a=\frac{k}{2}$, т.е. поднормаль параболы постоянна.

Сам Декарт в 1638 г. заметил, что его метод проще применять не к нормалям, а к касательным: при этом нужно исключать переменную не из уравнения $f(x,y)=0$ и квадратного уравнения окружности, а из уравнения $f(x,y)=0$ и линейного уравнения прямой (касательной).

В 1638 г. Декарт построил нормаль к циклоиде независимо от Роберваля. Его подход был следующий. Рассмотрим вместо катящейся окружности катящийся многоугольник (рис. 5.1). Для каждой вершины многоугольника нормаль к траектории движения вершины проходит через опорную точку O. Поэтому для циклоиды нормаль в каждой точке M траектории проходит через опорную точку O окружности (рис. 5.2)

Начало книги III посвящено многочленам. Здесь они впервые обозначаются так же, как и сейчас. Декарт говорит (без доказательства), что число корней многочлена не превосходит его степени. Формулирует (тоже без доказательства) так называемое *правило знаков Декарта*: количество положительных (соответственно, отрицательных) корней многочлена не превосходит числа перемен (соответственно, повторений) знака в последовательности коэффициентов.

Декарт даёт новое решение уравнения четвёртой степени в радикалах. Для этого он замечает, что уравнение $x^4+px^2+qx+r=0$ можно записать в виде

$$\left(x^2-yx+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}\right)\left(x^2+yx+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}\right)=0,$$

где y находится из уравнения

$$y^6+2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2=0.$$

Последнее уравнение — кубическое относительно y^2.

Один из основных вопросов для Декарта — какие линии служат предметом геометрии. Сначала он считал геометрическими линиями те, которые строятся посредством шарнирных механизмов. Другие линии (например, спираль и квадратрису) он называл механическими. Декарт постулировал, что построение кривой посредством шарнирного механизма и задание кривой алгебраическим уравнением эквивалентны. Но это доказал лишь Кемпе в 1876 г.

Квадратриса Динострата занимает видное положение в книге Декарта «Геометрия». Одной из главных его целей было разделение кривых на «геометрические» и «механические». У Декарта нет единого определения «геометрических кривых»; к этому понятию он подходит разными путями и не только не доказывает эквивалентности получающихся при этом определений, но даже и не дает сколько-нибудь строгих определений. С современной точки зрения самым главным свойством этих кривых является то, что они задаются алгебраическими соотношениями. У Декарта такой подход намечен, но лишь как нечто второстепенное. Самый главный его подход к этим кривым — они должны задаваться некоторой комбинацией движений. Причины, по которым Декарт исключает из числа этих кривых квадратрису, не совсем ясны. Он пишет, что для квадратрисы между двумя движениями отрезков нет соотношения, которое можно измерить точно.

Декарт делает замечание о возможности распространить его метод на пространственные кривые посредством проектирования их точек на две взаимно перпендикулярные плоскости. Сам он не занимался разработкой этого вопроса, и этого замечания совершенно не достаточно для введения трёх координат в пространстве.

В 1630 г. Декарт получил выражение для суммы плоских углов выпуклого многогранника. Если обозначить число вершин, рёбер и граней через V, E и F соответственно, то словесно сформулированное выражение, полученное Декартом, можно записать в виде $2\pi(V-2)$. С другой стороны, если просуммировать углы всех граней многогранника, то для суммы плоских углов многогранника получаем выражение $2\pi(E-F)$. Приравнивая эти выражения, можно вывести теорему Эйлера, связывающую число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника. Записки Декарта о многогранниках были опубликованы лишь в 1860 г.

В «Геометрии» Декарт вводит единицу измерения и показывает, как тогда можно произведению отрезков сопоставить отрезок. Это позволяет рассматривать произведение любого числа отрезков и отказаться от принципа однородности. Декарт пишет, что он делает это, чтобы установить более тесную связь с числами. (Такой подход был уже у Бомбелли, но в той части его «Алгебры», которая осталась неопубликованной.)

Декарт принимает отрицательные числа в алгебре (корни уравнений), но не принимает их в геометрии. Возражения против признания отрицательных чисел у Декарта следующие: такое число должно быть меньше, чем ничто. В «Геометрии» Декарта говорится о «ложных» корнях уравнений, но он объединяет их вместе с «истинными» корнями в категорию «действительных» корней в противоположность «мнимым». Термины «действительные» (réelles) и «мнимые» (imagimaires) числа впоследствии были приняты другими математиками. Книга Декарта сыграла важную роль в распространении применения отрицательных чисел. Декарт геометрически истолковал отрицательные числа, как противоположно направленные отрезки.

Декарт рассматривал только ту часть кривой $x^3+y^3-axy=0$ (называемой *декартовым листом*), которая лежит в первом квадранте; дополнительные ветви декартова листа впервые рассмотрел Гюйгенс (1692).

Декарт предложил отнести кривые степени $2n-1$ и $2n$ к одному роду, потому что ошибочно считал, что уравнение степени $2n$ сводится к уравнению степени $2n-1$, как уравнение четвёртой степени сводится к кубическому уравнению. При этом Декарт отчётливо понимал, что степень кривой не зависит от выбора (прямоугольной или косоугольной) системы координат. Но доказательства этого факта у него нет.

Декарт (и независимо от него Ферма) нашёл две новые пары дружественных чисел 17 296 и 18 416, 9 363 584 и 9 437 056.

5.11. Бонавентура Кавальери (1598-1647)

Бонавентура Кавальери — ученик Галилея. В 1622 г. Кавальери сообщил Галилею свою концепцию вычисления площадей поверхностей и объёмов тел, систематически изложенную лишь в 1635 г. в книге «Геометрия, развитая некоторым новым способом при помощи неделимых частей непрерывных величин». Эта книга сыграла важную роль в развитии интегрального исчисления. Согласно Кавальери неделимые имеют на одно измерение меньше, чем фигура, которую они порождают при движении. Неделимые — это параллельные сечения. Доказательство Галилея для закона пути $s=\frac{1}{2}gt^2$ по известной скорости свободно падающего тела $v=gt$ проведено вполне в духе концепции Кавальери.

В «Геометрических этюдах» (1647) дал Кавальери более ясное доказательство теорем Гульдина методом неделимых. В эту книгу Кавальери включил также вычисление площади под кривой $y = x^n$ для натуральных $n \leq 9$. В ней он формулирует так называемый *принцип Кавальери*: если все соответственные сечения двух фигур находятся в постоянном отношении, то площади этих фигур тоже находятся в таком же отношении (здесь Кавальери рассматривает сечения параллельными плоскостями).

Кавальери в ответ на упрёки, что его методы вычисления площадей и объёмов недостаточно строгие, отвечал, что о строгости должна заботиться философия, а не геометрия.

5.12. Пьер Ферма (1601-1665)

По профессии Пьер Ферма был юристом. С 1631 г. он был советником парламента в Тулузе. Математикой он занимался в свободное время, которого у него оставалось не так уж много. Ферма писал мало и очень кратко. Свои работы он не публиковал. Он изложил их в рукописях, с которыми могли познакомиться очень немногие, и в письмах. Работы Ферма по арифметике были опубликованы его сыном в 1670 г., а остальные работы — в 1679 г.

5.12.1. Исчисление бесконечно малых

Около 1629 г. Ферма нашёл общий метод нахождения максимумов и минимумов. Он формулировал его следующим образом. В выражение, экстремальное значение которого нужно найти, вместо неизвестной величины A подставляется $A + E$, и оба выражения приближённо приравниваются друг другу. Затем в обеих сторонах равенства вычеркиваются одинаковые члены, производится деление на множитель E, и после этого E полагается равным нулю. Получающееся в результате уравнение даёт значение A, соответствующее экстремуму.

К 1629 г. Ферма умел вычислять площадь под кривой $y = x^n$ для всех натуральных n, но об этом он сообщал только в переписке. Сначала он использовал неравенства

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^{m} k^n.$$

Но это доказательство было весьма громоздким, и не годилось для дробных или отрицательных n. Поэтому Ферма придумал другой подход, основанный на неравномерном делении отрезка. Для квадратуры кривой $y = x^n$, где $n = p/q > 0$, Ферма поступал следующим образом. Разделим отрезок оси абсцисс от 0 до x точками $\alpha^k x$, где $k = 1$, 2, 3, … Для квадратуры нужно просуммировать площади прямоугольников, представляющие собой бесконечную геометрическую прогрессию с начальным членом $(1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}}$ и знаменателем $\alpha^{\frac{p+q}{q}}$. Сумма этой прогрессии равна $(1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}} \cdot \frac{1}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}}$. Положим $\alpha = \beta^q$. Тогда

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{q-1}}{1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{p+q-1}} \to \frac{q}{p+q}$$

при $\beta \to 1$.

Впоследствии Ферма вычислил площади и под более сожными кривыми, например, под так называемым *локоном Аньези* $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$ и под кривыми $y = (a^2 - x^2)^n$ для нечётных натуральных n.

5.12.2. Метод координат

Ферма разработал метод координат и задание кривых уравнениями одновременно с Декартом в рукописи под названием «Ad locos planos et solidos isagoge» (Введение в изучение плоских и пространственных мест). Древнегреческие геометры называли плоскими местами прямые и окружности, а пространственными местами — эллипсы, параболы и гиперболы. Ферма не стал публиковать свою рукопись, хотя и послал её Декарту, получив от него экземпляр «Геометрии». Ферма, так же как и Декарт, опирался в этом на труды Виета. Ферма объяснил, как уравнение с двумя неизвестными задаёт кривую, и рассмотрел простейшие примеры. Он доказал, что уравнение первой степени задаёт прямую, и рассмотрел примеры уравнений второй степени, и соответствующие им кривые.

Ферма захотел доказать предложения из утерянного сочинения Аполлония, которые дошли до нас благодаря Паппу. Разработанный им метод позволил легко их доказать. Например, Ферма доказал, следующую теорему Аполлония: геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до данных точек постоянна, — это окружность.

Ферма применял свою аналитическую геометрию и к определению геометрических мест в пространстве. При этом он, однако, не использует пространственные координаты, а определяет поверхности, исследуя свойства линии их пересечения с любой плоскостью. В частности, Ферма доказывает, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до данных точек постоянна (или, в более общем случае, удовлетворяет уравнению 1-й степени), — это сфера.

5.12.3. Теория чисел

Интерес Ферма к теории чисел во многом связан с двумя работами Баше де Мезириака (1581-1638). В книге «Приятные и занимательные задачи» (1612) Баше разработал метод решения уравнения $ax-by=c$ в целых числах, что побудило Ферма заняться решением в целых числах уравнений второй степени. Кроме того, Баше издал с комментариями «Арифметику» Диофанта в подлиннике и с латинским переводом (1621). Ферма внимательно читал это издание Диофанта, делая пометки на полях. Именно из этих пометок нам известно большинство результатов Ферма по теории чисел.

Наиболее известен Ферма тем, что сформулировал так называемую *великую теорему Ферма*: уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет ненулевых целых решений при $n>2$. Эту теорему он записал на полях книги Диофанта и сделал приписку, что на полях слишком мало места, чтобы привести здесь найденное им остроумное доказательство этой теоремы. Позднее Ферма сообщил доказательство только для $n=4$, поэтому вряд ли найденное им доказательство было верно. Лишь в 1995 г. Эндрю Уайлс опубликовал доказательство этой теоремы, найденное им в 1994 г.

В теории чисел Ферма разработал новый метод доказательства — метод бесконечного спуска. Сначала он доказывал методом бесконечного спуска только утверждения о несуществовании. Например, что не существует прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами, площадь которого — полный квадрат. В более развёрнутом виде, чем в изложении самого Ферма, это доказательство выглядит следующим образом. Пусть стороны прямоугольного треугольника, площадь которого является полным квадратом, равны $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ и $2xy$. Если две стороны имеют общий множитель k, то тогда третья сторона тоже делится на k, а площадь делится на k^2. Поэтому можно рассмотреть подобный треугольник, стороны которого уменьшены в k раз. Таким образом, можно считать, что числа x^2+y^2, x^2-y^2 и $2xy$ попарно взаимно простые. Следовательно, числа x и y взаимно простые, а числа $x+y$ и $x-y$ нечётные. Поэтому числа $x+y$ и $x-y$ взаимно простые. Площадь $xy(x-y)(x+y)$ является полным квадратом, причём все сомножители взаимно простые. Следовательно, $x = u^2$, $y = v^2$, $u^2 + v^2 = p^2$ и $u^2 - v^2 = q^2$. Из двух последних равенств получаем $2v^2 = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$. Числа $p+q$ и $p-q$ чётные, так как числа p^2 и q^2 нечётные. Других общих множителей, кроме 2, эти числа иметь не могут, так как иначе эти множители имели бы числа $2p$ и $2q$, а значит, и числа $p^2 = x+y$ и $q^2 = x-y$. Следовательно, $p+q = 2m^2$ и $p-q = n^2$ или $p+q = n^2$ и $p-q = 2m^2$, где число n чётное. Таким образом,

$$u^2 = \frac{p^2+q^2}{2} = (m^2)^2 + \left(\frac{n^2}{2}\right)^2.$$

Целые числа m^2, $\frac{n^2}{2}$ и u являются сторонами нового прямоугольного треугольника, площадь которого равна квадрату целого числа $\frac{mn}{2}$. Стороны этого нового треугольника меньше сторон исходного, так как квадрат его гипотенузы $u^2 = x$ является множителем одного из катетов исходного треугольника. Бесконечное уменьшение сторон целочисленных треугольников невозможно, поэтому предположение о существовании прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами, площадь которого — полный квадрат, неверно.

Если предположить, что разность $u^4 - v^4$ является полным квадратом, то те же самые рассуждения приводят к противоречию. Из этого следует, что уравнение $u^4 = v^4 + t^4$ не имеет решений в натуральных числах.

Метод бесконечного спуска хорошо приспособлен к доказательству несуществования. Ферма пришлось потрудиться, чтобы научиться доказывать методом бесконечного спуска и утверждения о существовании. Но он добился и этого и доказал методом бесконечного спуска, например, что любое простое число вида $4n+1$ представляется суммой двух квадратов.

Ферма полагал, что все числа $F(n) = 2^{2^n} + 1$ простые. При этом он, правда, отмечал, что у него нет полного доказательства. Эйлер показал, что число $F(5)$ не простое — оно делится на 641.

Ферма установил, что для каждого числа a, не делящегося на простое число p, существует такое число f, являющееся делителем числа $p-1$, что $a^f - 1$ делится на p. Из этого следует, что $a^{p-1} - 1$ делится на p (это стандартная формулировка так называемой *малой теоремы Ферма*).

Ферма впервые поставил вопрос о представимости простых чисел квадратичной формой $ax^2+bxy+cy^2$ и получил ответ для форм x^2+y^2, $x^2 \pm y^2$, x^2+3y^2 и x^2+xy+y^2. Ферма выяснил, что в виде x^2+y^2 представляются только прстые числа вида $4n+1$, причём каждое простое число такого вида представляется в виде суммы двух квадратов единственным образом. (Этот результат был известен ещё Диофанту). В виде x^2+2y^2 представимы простые числа вида $8n+1$ и $8n+3$ и только они. В виде x^2+3y^2 и x^2+xy+y^2 представимы простые числа вида $6n+1$.

Баше де Мезириак в своих комментариях к изданию «Арифметики» Диофанта высказал предположение, что любое натуральное число является суммой не более чем четырёх квадратов целых чисел. Ферма утверждал, что он умеет доказывать более общее утверждение: любое

n-угольное число является суммой n-угольных чисел в количестве не более n. Своё доказательство Ферма никому не сообщил. Для $n = 4$ эту теорему доказали Эйлер и Лагранж, для $n = 3$ Гаусс (1801), а в общем случае Коши (1815).

В 1657 г. Ферма предложил своим корреспондентам найти общее правило решения в целых числах уравнения $ax^2 + 1 = y^2$. Ферма предложил им также рассмотреть случаи, когда $a = 149$, 109 или 433. Английские математики сначала его не поняли: Броункер считал, что это уравнение нужно решить в рациональных числах. После разъяснений он нашёл решение для $a = 109$ с помошью разложения числа $\sqrt{109}$ в непрерывную дробь. Но он не смог доказать, что оно нашёл минимальное решение и что его способом можно найти все решения.

В статье 1765 г. Эйлер назвал уравнение $y^2 = ax^2 + 1$ *уравнением Пелля*. Сам Джон Пелль (1611-1685) ничего не публиковал об этом уравнении, но это уравнение исследуется в книге швейцарского математика Иоганна Рахна (1622-1676). Пелль обучал его математике и принимал участие в написании книги. По-видимому, Эйлеру была известна степень участия Пелля в исследовании этого уравнения.

Ферма (и независимо от него Декарт) нашёл две новые пары дружественных чисел 17 296 и 18 416, 9 363 584 и 9 437 056.

Поставленные Ферма арифметические проблемы 70 лет не поддавались решению, пока ими не занялся Эйлер, решив многие из них.

5.13. Жиль Персон Роберваль (1602-1675)

В 1628 г. Жиль Персон получил разрешение добавить к своей фамилии «де Роберваль», и с тех пор был известен под этим именем. Роберваль получил много важных результатов, относящихся к квадратурам (вычислению интегралов), но опубликовал лишь две не очень существенные статьи. У него были основания держать в секрете свои методы. Согласно воле Петра Рамуса, основателя кафедры Французского коллежа, которую занимал Роберваль, её профессор каждые три года должен был объявлять конкурс, ставя публично несколько вопросов. Тот,

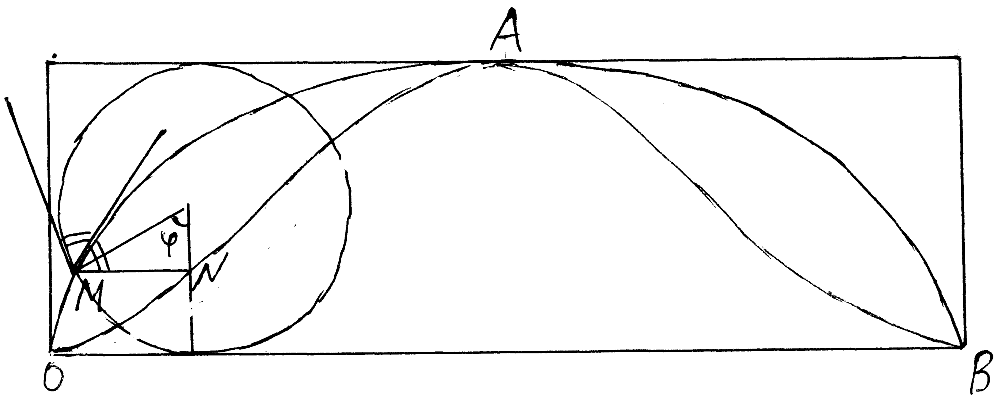

Рис. 5.3.

кто побеждал в конкурсе, имел право занять кафедру. Именно победив в таком соревновании Роберваль стал профессором в 1634 г., и он остерегался разглашать свои методы. Его основные труды были впервые напечатаны лишь посмертно, в 1693 г.

Около 1634 г. Роберваль вычислил площадь под кривой $y = x^n$ для всех натуральных n. В 1636 г. Ферма написал Робервалю о своей квадратуре кривых $y = x^n$ для всех натуральных n, не сообщая своего метода. Роберваль ответил, что он тоже пришёл к этому результату, используя неравенства

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^{m} k^n.$$

Роберваль вычислил также площадь под синусоидой.

Галилей назвал кривую, которую описывает точка обода движущегося колеса, *циклоидой*, и попытался определить площадь одной арки этой кривой. Мерсенн поставил Робервалю эту задачу, и тот в 1636 г. дал следующее её решение с помощью метода Кавальери (в 1638 г. это повторил Декарт, тоже воспользовавшись принципом Кавальери). Пусть колесо повернулось на угол φ и точка, описывающая циклоиду, находится в положении M (рис. 5.3). Наряду с циклоидой Роберваль рассмотрел вспомогательную кривую, описываемую проекцией N точки M на вертикальный диаметр катящегося колеса. Эту кривую он назвал спутницей циклоиды. Из симметричности спутницы циклоиды следует, что она делит пополам площадь прямоугольника, описанного вокруг арки циклоиды. Поэтому площадь под аркой циклоиды равна сумме половины площади этого прямоугольника и двух лепестков, заключённых между циклоидой и её спутницей. Сечение MN одного из лепестков одновременно является и сечением полукруга, радиус которого равен радиусу катящейся окружности. Поэтому площадь арки циклоиды равна $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot 2r + \pi r^2 = 3\pi r^2$. Нетрудно убедиться, что спутница циклоиды — синусоида. Роберваль вычислил также объём тела, образованного при вращении циклоиды вокруг основания.

Между 1635 и 1638 гг. Роберваль построил касательную к циклоиде кинематическим методом, основываясь на сложении скоростей по правилу параллелограмма. Движение точки M (см. рис. 5.3) складывается из двух движений: движения по окружности и поступательного движения, параллельного OB. Скорости этих движений равны, потому что длина окружности равна OB. Поэтому касательная к циклоиде — биссектриса угла между прямой MN и касательной к окружности в точке M.

Роберваль не публиковал свои результаты о квадратуре циклоиды. Первым квадратуру циклоиды опубликовал Торричелли в 1644 г. в своих «Геометрических трудах».

В 1643 г. Роберваль доказал равенство дуг параболы и спирали Архимеда при определённом выборе параметров.

5.14. Эванжелиста Торричелли (1608-1647)

Торричелли не был прямым учеником Галилея, но многое почерпнул из его работ. В 1641 г. он стал ассистентом Галиллея, но Галилей через несколько месяцев умер.

Торричелли первым дал пример спрямления кривой в 1640 г.; он определил отрезок, равный длине логарифмической спирали, отсчитываемой от полюса.

В работе «О максимумах и минимумах» (1640) решил задачу, поставленную Ферма: найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая. Эта точка получила название *точка Торричелли*.

В работе «О движении естественно падающих и брошенных тел» (1641 г., опубликовано в 1644 г.) Торричелли построил касательную к параболе кинематическим методом (с помощью сложения скоростей по правилу параллелограмма). В той же работе он нашёл огибающую семейства парабол — траекторий тел, бросаемых с одной и той же скоростью из одной и той же точки под разными углами. Это был первый пример нахождения огибающей семейства кривых. Эта огибающая — так называемая *парабола безопасности*.

Торричелли первым опубликовал квадратуру циклоиды в 1644 г. в своих «Геометрических трудах», написанных в 1641 г. Но эту квадратуру до него получил в 1634 г. Роберваль, не опубликовавший свои результаты.

Торричелли знаменит своими опытами с вакуумом, приведшими к изобретению барометра.

5.15. Франс ван Схоотен (1615-1660)

Познакомившись с работами Декарта, ван Схоотен так восхитился ясностью метода Декарта, что решил, будто греки тоже знали этот метод и пользовались им, чтобы получать свои результаты, но потом излагали их на запутанном языке геометрической алгебры. Ван Схоотен вместе со своими учениками, наиболее выдающимися из которых были Гюйгенс и Гудде, много способствовал распространению и развитию декартовой геометрии. В 1649 г. он перевёл на латинский язык «Геометрию» Декарта и снабдил её комментариями. Во втором латинском издании (1659-1661) есть три приложения, написанных его учениками. По книге ван Схоотена «Математические этюды» изучал математику Ньютон. В этой книге ван Схоотен первым предложил способ построение эллипса с помощью верёвки, концы которой прикреплены к двум колышкам.

5.16. Джон Валлис (1616-1703)

Джон Валлис прославился во время Английской революции (войны короля и парламента) расшифровкой перехваченных писем сторонников короля.

Валлис предложил первую геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Он основывался на построении среднего геометрического двух отрезков с помощью окружности и интерпретировал $\sqrt{-ab}$ как соответствующий (при этом построении) отрезок, перпендикулярный отрезкам a и $-b$ (или $-a$ и b). Но эта интерпретация не получила поддержки.

В книге о конических сечениях (1655) показал, что коники — это кривые, которые задаются уравнениями второй степени. Именно он первым ввёл отрицательные координаты (Декарт рассматривал только положительные координаты). Валлис рассматривает в этой книге не только кривые второй степени, но и кубическую параболу $x^3 = a^2y$. Опыта работы с отрицательными координатами тогда ещё было мало, и он ошибочно рисует график кубической параболы так же, как график обычной параболы (т.е. $y > 0$ при $x < 0$). Но уже в следующем году Валлис исправляет эту ошибку. Он считал, что Архимед и другие древние так запрятали методы, которыми они пришли к своим открытиям, что теперь проще изобрести всё заново, чем пытаться разобраться в их работах.

В книге о конических сечениях Валлис впервые использовал символ ∞. У Валлиса он символизоровал кривую, которую можно обходить бесконечно много раз. Этот же символ он использовал и в книге «Арифметика бесконечных», имевшей гораздо большее влияния.

Основной труд Валлиса — книга «Арифметика бесконечных» (Arithmetica infinitorum, 1656). Именно в этой книге содержится его наиболее знаменитое открытие — представление числа $\frac{4}{\pi}$ в виде бесконечной дроби.

Большое влияние на Валлиса оказала теория неделимых Кавальери. Сначала Валлис получает новым (арифметическим) методом результат, ранее доказанный геометрически. Для вычисления площади под параболой он вычислил отношение

$$\frac{0^2 + a^2 + \cdots + (na)^2}{(na)^2 + (na)^2 + \cdots + (na)^2} = \frac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2}$$

и показал, что при увеличении n оно стремится к $\frac{1}{3}$. После этого Валлис решил применить этот метод к кубам и более высоким степеням и получил, что

$$\frac{0^r + a^r + \cdots + (na)^r}{(na)^r + (na)^r + \cdots + (na)^r} \approx \frac{1}{r+1}$$

для натуральных r. Используя интерполяцию и метод неполной математической индукции, Валлис получил квадратуру кривых $y = x^r$ для всех рациональных r.

Затем Валлис занялся вычислением интеграла $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{4}$. Его целью было получить формулу для числа $\frac{\pi}{4}$. Это оказалось трудной задача. Сначала ему удалось вычислить интегралы $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ для натуральных n, но для $n = \frac{1}{2}$ ему ничего не удалось сделать. После этого для некоторых p и q он вывел формулу $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q dx = \frac{(p+q)!}{p!q!}$. Валлиса интересовал случай $p = q = \frac{1}{2}$, и в этом случае снова ничего не получилось. Но для $p = \frac{1}{2}$ и натуральных q Валлис смог вычислить нужный интеграл:

q	1	2	3	4
интеграл	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\cdot5}{2\cdot4}$	$\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}$	$\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}$

Валлис обозначил число $\frac{4}{\pi}$ специальным знаком $\square$. Через это число он смог выразить нужный интеграл для полуцелых q:

q	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
интеграл	$\square$	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{4\cdot6}{3\cdot5}\square$	$\frac{4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7}\square$

И последнее наблюдение: если a_1, a_2, a_3 и a_4 — значения интеграла для q, расположенных в порядке возрастания, то

$$\frac{a_1}{a_2} > \frac{a_2}{a_3} > \frac{a_3}{a_4}.$$

Применяя это неравенство для q, равных $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, Валлис получает неравенства

$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}\sqrt{\frac{8}{7}} > \square > \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}\sqrt{\frac{9}{8}}.$$

Затем, устремляя q к бесконечности, Валлис пришёл к своей знаменитой формуле

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\ldots}$$

В 1663 г. Валлис получил доказательство пятого постулата Евклида, исходя неверного предположения, что для любой фигуры существует подобная ей фигура произвольной величины. Валлис считал это предположение естественным, потому что для любого круга существует подобный ему круг произвольного размера.

В книге «Трактат об алгебре» (1685) Валлис привлёк внимание математиков к книге по алгебре Томаса Гарриота, ясно изложив её. (Валлис утверждал, что все результаты Декарта по алгебре взяты у Гарриота.) Валлис принимает отрицательные корни и комплексные корни.

5.17. Вильям Броункер (1620-1684)

Лорд Броункер был первым президентом Королевского общества.

Валлис, до публикации в 1656 г. полученного им представления числа $\frac{4}{\pi}$ в виде бесконечной дроби, показал эту формулу Броункеру, и тот преобразовал её к виду

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \ldots}}}}}$$

Броункер не объяснил, каким методом он преобразовал одну дробь в другую.

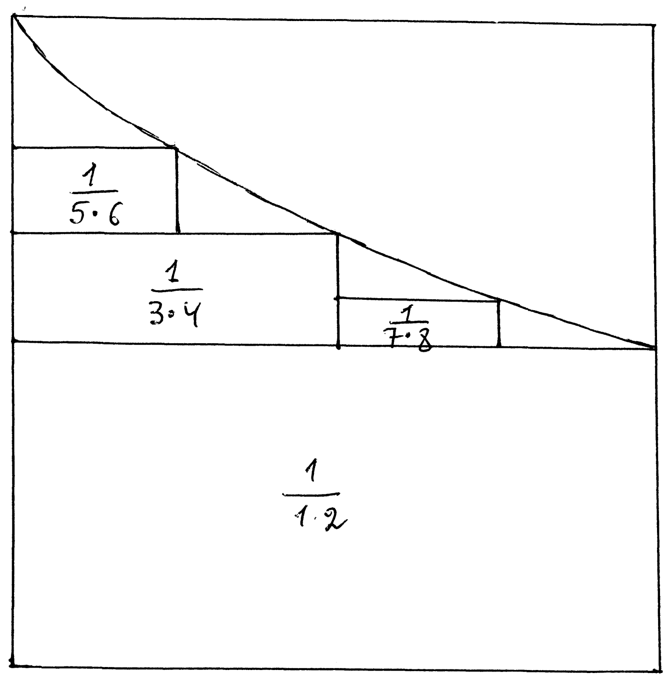

Рис. 5.4.

В 1658 г. Броункер с помощью непрерывных дробей получил решение уравнения, предложенного Ферма (уравнение Пелля).

Не позже 1657 г. Броункер получил квадратуру площади гиперболы $xy = 1$ от $x = 1$ до $x = 2$ в виде ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots$$

Но он опубликовал этот результат лишь 1668 г., и к этому времени эта квадратура была уже получена другим способом и опубликована в 1659 г. итальянским математиком Пьетро Менголи (1625-1686).

Для доказательства Броункер берёт квадрат со стороной 1, содержащий рассматриваемую дугу гиперболы, и делит сторону квадрата, лежащую на оси абсцисс, сначала пополам, потом на 4 части, и т.д. Тогда можно построить прямоугольники, площади которых равны $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3\cdot 4}$, $\frac{1}{5\cdot 6}$, $\frac{1}{7\cdot 8}$ и т.д. (рис. 5.4). Броункер доказывает сходимость полученного ряда, что математики впоследствии делали редко.

5.18. Николаус Меркатор (1620-1687)

Немецкий математик Николаус Кауфман шесть лет преподавал в университете Копенгагена, а потом, когда университет был закрыт во время чумы, переехал в Лондон и давал там частные уроки. Он перевёл свою фамилию, означавшую по-немецки «купец, торговец», на латынь, и стал называться Меркатор.

В 1668 г. Меркатор опубликовал книгу «Логарифмотехника». В этой книге он одним из первых рассмотрел бесконечный ряд, отличный от геометрической прогрессии. Меркатор пришёл к удачной мысли записать уравнение гиперболы в виде $y = \frac{1}{1+x}$. Эту дробь он разложил в бесконечный ряд $1-x+x^2-x^3+\ldots$ и проинтегрировал его почленно. В результате он получил квадратуру гиперболы в виде

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x} = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots$$

Вопрос сходимости этого ряда Меркатор не рассматривал.

До Меркатора такое же разложение логарифмической функции получили Гудде (1656) и Ньютон (1665), но они не опубликовали свои результаты.

5.19. Винченцо Вивиани (1622-1703)

Вивиани — ученик Галилея. С Галилеем он познакомился в 1639 г., когда тот уже ослеп и находился под домашним арестом. Вивиани первым нашёл касательную к циклоиде. Он сделал попытку восстановить книгу V «Конических сечений» Аполлония, в которой разбирались некоторые вопросы о максимумах и минимумах (в то время были известны только первые 4 книги Аполлония из 8). Посвященная этому книга Вивиани «О максимальных и минимальных значениях» вышла в 1659 г. Вивиани снова нашёл построение нормалей к коническому сечению, причём он нашёл именно решение Аполлония. Гипотезы Вивиани потвердил перевод труда Аполлония, изданный в 1661 г. Борелли на основе найденной им арабской рукописи, содержащей первые 7 книг

Аполлония. В своей книге Вивиани рассматривает и другие задачи на максимум и минимум. Одна из таких задач — найти точку, сумма расстояний от которой до трёх данных точек имеет минимальное значение. Этой задачей занимался уже ранее Торричелли.

В 1692 г. в качестве вызова другим математикам Вивиани предложил задачу, связанную с вычислением площадей частей сферы, которая приводила к рассмотрению кривой, впоследствии получившей название *кривая Вивиани*. Эта кривая — пересечение сферы и цилиндра (радиусом сферы служит диаметр кругового сечения цилиндра, т.е. центр сферы лежит на образующей цилиндра и радиус сферы равен диаметру цилиндра).

Вивиани написал первую биографию Галилея и собрал много его рукописей. Это собрание впоследствии оказалось весьма полезным при издании сочинений Галилея.

5.20. Блез Паскаль (1623-1662)

Отец Блеза Этьенн Паскаль (1588-1651) известен тем, что он открыл кривую, называемую *улиткой Паскаля*. Он решил, что его сын не будет изучать математику до 15 лет, и из их дома были убраны все учебники математики. Но в 12 лет Паскаль самостоятельно открыл, что сумма углов любого треугольника равна 180°; узнав об этом, отец разрешил ему читать Евклида. В 14 лет Паскаль начал сопровождать своего отца на научные собрания у Мерсенна. В 15 лет Паскаль познакомился с работами Дезарга, и они привели его в восторг.

В 1640 г. Паскаль напечатал в виде афиши тиражом 50 экземпляров своё сочинение «Опыт о кониках». Эти афиши были прибиты на стенах домов и розданы некоторым учёным. В этом сочинении было несколько определений и лемм; доказательства отсутствовали. Основной теоремой была теорема о шестиугольнике, вписанном в окружность: точки пересечения продолжений сторон такого шестиугольника лежат на одной прямой. Паскаль также отметил, что с помощью центральной проекции можно получить аналогичное утверждение для шестиугольника, вписанного в любое коническое сечение. При этом Паскаль воздаёт должное Дезаргу, разработавшему теорию проективных преобразований, как одному из наиболее искусных математиков того времени.

В 1647 г. Паскаль занимался экспериментами с атмосферным давлением и установил существование вакуума. Эту тему он обсудил с Декартом, который не поверил в существование вакуума, и написал Гюйгенсу, что у Паскаля слишком много вакуума в голове.

В 1653 г. Паскаль написал «Трактат о равновесии жидкостей», в котором содержится закон Паскаля для давления.

Важную роль в развитии комбинаторики сыграл «Трактат об арифметическом треугольнике» (1654 г., опубликован в 1665 г.). Там записана таблица сочетаний в треугольной форме (треугольник Паскаля). Но в похожем виде эта таблица уже встречалась в Азии и в Европе (у Штифеля и у Тартальи). Паскаль ввёл обозначение C_n^m и доказал соотношение $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$, предварительно доказав методом полной математической индукции, что $C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}$. Но этот закон образования биномиальных коэффициентов посредством умножения тоже был известен ранее — его знал Пьер Ферма (1636). Паскаль первым ввёл метод полной математической индукции.

В 1654 г. возникла переписка между Паскалем и Ферма по поводу задачи о справедливом разлеле ставки, когда игра прервана, и одному игроку недостаёт выигрыша двух партий, а другому — трёх. Ферма рассуждал так. Игра может продолжаться ещё не более четырёх партий. Для четырёх партий всего возможно 16 исходов. Из них в 11 случаях выигрывает первый, а в 5 второй. Поэтому ставку нужно разделить в отношении 11:5. Паскаль решает задачу о разделе ставки в общем случае, изучая таблицу биномиальных коэффициентов. Эта переписка заложила основы теории вероятностей.

В работах Паскаля получил дальнейшее развитие метод интегральных сумм. Он пользовался терминами из теории неделимых («сумма линий»), но всегда понимал под ними интегральные суммы. Паскаль считал, что метод неделимых по существу тождествен методу древ-

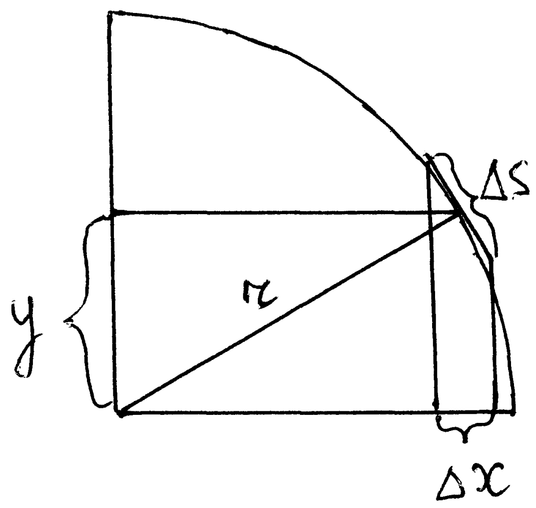

Рис. 5.5.

них, отличаясь лишь манерой выражения, и потому можно без опасения пользоваться языком неделимых.

В 1658 г. Паскаль применил принцип Кавальери для вычисления площади любого сегмента циклоиды и нахождения центра тяжести такого сегмента.

Сборник работ Паскаля о методе интегральных сумм был издан в 1659 г. Один из основных результатов Паскаля в этой области — вычисление интегралов $\int_0^\alpha \sin\varphi\,d\varphi = 1 - \cos\alpha$ и $\int_0^\alpha \cos\varphi\,d\varphi = \sin\alpha$. Он воспользовался для этого следующим замечанием. Из подобия треугольников следует, что $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{r}{y}$, где r — радиус окружности (рис. 5.5). Малый отрезок Δs можно заменить на дугу окружности. После этого при $r = 1$ получаем $\int_\alpha^\beta \sin\varphi\,d\varphi = \cos\alpha - \cos\beta$.

Лейбниц, изучая труды Паскаля, обратил особое внимание на треугольник с гипотенузой Δs. Он назвал этот треугольник *характеристическим*. Лейбниц обнаружил, что с помощью характеристического треугольника для произвольной кривой можно вычислять площадь поверхности, образованной при вращении этой кривой.

Интересным свидетельством того, с каким трудом усваивались операции с отрицательными числами, является следующее высказывание в знаменитой книге Паскаля «Мысли»: Слишком несомненная истина ставит в тупик (я знаю людей, которые так и не взяли в толк, что, если от нуля отнять четыре, в результате получится нуль).

5.21. Джованни Доменико Кассини (1625-1712)

Джованни Доменико Кассини родился в Италии. Переехав жить во Францию, он изменил своё имя на французский манер: Жан-Доминик.

В 1668 г., наблюдая за спутниками Юпитера, Кассини обнаружил расхождение в данных, которое он объяснил тем, что скорость света конечна. Это было первое предположение о конечности скорости света. Кассини был столь консервативен, что сам отказался от этой гипотезы и искал другие объяснения своих наблюдений. Но именно данные, полученные Кассини, через 7 лет послужили для первого вычисления скорости света Рёмером.

В 1680 г. Кассини предложил заменить эллипсы Кеплера кривыми четвёртой степени, которые назвали впоследствии *овалами Кассини*; он ошибочно полагал, что эти кривые точнее описывают орбиты планет. Овал Кассини — это множество точек, произведение расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов) постоянно. Лемниската Бернулли входит в это семейство. (Якоб Бернулли исследовал эту кривую на 14 лет позже Кассини.)

5.22. Иоганн Гудде (1628-1704)

Ученик ван Схоотена Иоганн Гудде 30 лет был бургомистром Амстердама. До того как он начал работать в городском совете в 1663 г., Гудде занимался математикой. Он открыл, что двукратный корень a многочлена $f(x)$ является также и корнем многочлена $f'(x)$, а потому $x - a$ можно найти как общий делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$. Он пришёл к этому выводу из чисто алгебраических соображений, не производя дифференцирования. Своё правило Гудде сформулировал следующим образом. Двукратный корень многочлена $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ является также корнем многочлена

$ax^n + (a+b)a_1x^{n-1} + (a+2b)a_2x^{n-2} + \dots + (a+nb)a_n$ для любых a и b. Для удобства вычислений Гудде полагал $a = n$ и $b = -1$. Тогда второй многочлен после сокращения на x оказывается равным $f'(x)$.

Гудде указывает, что предложенное им правило можно применить как к нахождению касательных, так и к решению задач на максимум и минимум. Разбирая рассмотренные Декартом примеры, Гудде показывает, что его правило приводит к более простому нахождению касательной, чем непосредственное применение метода неопределённых коэффициентов.

5.23. Христиан Гюйгенс (1629-1695)

Голландский математик Гюйгенс родился и умер в Гааге, но долгое время жил в Париже. В 1665 г. Кольбер (фактический глава правительства Людовика XIV) пригласил его возглавить создаваемую им Королевскую Академию Наук. С 1666 по 1681 гг. Гюйгенс жил в основном в Париже, но потом уехал на родину для лечения. Вернуться в Париж он уже не смог, потому что во Франции в это время начались гонения на протестантов.

В 1655 г. Гюйгенс впервые посетил Париж. Там он познакомился работами Паскаля и Ферма по теории вероятностей и заинтересовался этой областью математики. В 1657 г. Гюйгенс написал сочинение «О расчётах в азартной игре», которое вышло в виде приложения к «Математическим этюдам» его учителя ван Схоотена. Затем оно необнократно переиздавалось в виде отдельной книги, которая долгое время была единственной книгой по теории вероятностей. Гюйгенс вводит понятие математического ожидания. Именно оно было первым понятием из теории вероятностей (понятие вероятности события ввёл Якоб Бернулли много лет спустя).

В сочинении «Маятниковые часы» (1673) Гюйгенс доказал изохронность циклоидального маятника. Там же он ввёл понятие эволюты кривой (огибающей семейства нормалей к кривой) и нашёл эволюты циклоиды и параболы. Гюйгенс показал, что эволюта циклоиды — это некоторая другая циклоида, а эволюта параболы — полукубическая парабола. Гюйгенс изучил также эволюту эллипса. Он получил спрямление (т.е. вычислил длину дуги) циклоиды и полукубической параболы.

Гюйгенс применил к кругу метод, использованный Архимедом для квадратуры параболы. Это позволило ему получить более точные оценки площади круга через площадь вписанного и площадь описанного многоугольников, чем те, которые получил Архимед. При одном и том же числе сторон многоугольника неравенства Гюйгенса давали вдвое больше знаков числа π, чем неравенства Архимеда.

5.24. Исаак Барроу (1630-1677)

Летом 1663 г. в Кембридже появилась должность Лукасовского профессора математики благодаря пожертвованию Генри Лукаса. Эту должность занял Исаак Барроу (до этого он был профессором греческого языка). Во время семестра 1668-69 гг. он читал лекции по оптике, которые посещал Ньютон; эту тему они с Ньютоном часто обсуждали.

«Лекции по оптике» Барроу опубликованы в 1669 г., «Лекции по геометрии» в 1670 г., а «Лекции по математике» в 1683 г. Барроу не готовил свои книги к публикации. Среди других этим занимался и Ньютон. Он рекомендовал некоторые улучшения и кое-что добавил.

Лекции по оптике более теоретические, чем практические. Они в основном посвящены геометрической оптике. В лекциях по геометрии Барроу описывает метод касательных. Его обозначения были уже гораздо удобнее обозначений Ферма. Барроу установил, что задача вычисления площади под кривой и задача о построении касательной взаимно обратны. При этом он исходил из механических идей Галилея и Торричелли.

Большинство математических работ Барроу выполнены с 1663 по 1669 гг. В 1669 г. Барроу отказался от должности Лукасовского профессора, потому что был назначен священником короля. Его место занял Ньютон.

В «Лекциях по геометрии» содержится неравенство $(1+x)^n > 1+nx$ для положительных x и целых $n > 1$. Через 20 лет это неравенство независимо обнаружил Якоб Бернулли и опубликовал его в своей первой работе по теории рядов. Теперь это неравенство обычно называют *неравенством Бернулли*.

5.25. Кристофер Рен (1632-1723)

Рен и независимо от него Гук задолго до Ньютона предположили закон обратных квадратов для гравитационного притяжения тел.

В 1658 г. Рен получил спрямление циклоиды, т.е. вычислил длину её дуги, используя метод исчерпывания. Он первым решил задачу Кеплера о делении в данном отношении полукруга прямой, проходящей через данную точку на диаметре этого полукруга.

Рен играл ведущую роль в кружке учёных, который в 1662 г. стал Королевским обществом. С 1680 по 1682 гг. он был президентом Королевского общества.

Занимаясь оптикой, Рен обнаружил, что однополостный гиперболоид заполнен двумя семействами прямых; этот результат опубликован в 1669 г.

Рен много занимался архитектурой и был ведущим архитектором Англии в то время. После пожара Лондона (1666) выполнил геодезическую съёмку разрушенной части города с помощью трёх других геодезистов, одним из которых был Гук. Составил план восстановления города. Под его наблюдением была восстановлена 51 церковь.

5.26. Вильям Нейль (1637-1670)

В 1657 г. Нейль дал первый пример алгебраического спрямления алгебраической кривой. Он спрямил полукубическую параболу $y^2 = x^3$, которую с тех пор стали называть *параболой Нейля*. Нейль сообщил этот неожиданный результат Броункеру и Рену. Неожиданным он был потому, что Декарт и многие другие были уверены, что длины дуг алгебраических кривых не могут выражаться алгебраически.

5.27. Джеймс Грегори (1638-1675)

В 1667 г. Грегори опубликовал книгу «Истинная квадратура круга и гиперболы», в которой изложил основы геометрии бесконечно малых. В частности, он ввёл понятие сходимости, близкое к современному. В этой книге он также дал определение алгебраической функции и трансцендентной функции, алгебраического числа и трансцендентного числа, и попытался доказать, что числа π и e трансцендентные, но в его доказательстве была ошибка. Экземпляр этой книги Грегори послал Гюйгенсу. Тот ничего не ответил, но напечатал рецензию, в которой утверждал, что он первым открыл некоторые из опубликованных Грегори результатов. Это озадачило Грегори, который не мог знать об этих открытиях Гюйгенса, и впоследствии он не публиковал многие из своих открытий.

В 1668 г. в книге «Геометрические этюды» Грегори предложил ряд

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right).$$

Эта книга была первой попыткой написать учебник анализа. В ней впервые доказано, что метод касательных (дифференцирование) и метод квадратур (интегрирование) взаимно обратны.

В 1668 г. Грегори предложил формулу численного интегрирования, впоследствии предложенную Симпсоном и получившую название *формула Симпсона*.

В 1670 г. Грегори уже владел общим разложением бинома $(1+x)^{p/q}$, т.е. он открыл разложение бинома независимо от Ньютона и примерно одновременно с ним. В 1671 г. Грегори открыл *ряд Тейлора*, задолго до самого Тейлора (1715). К началу 1672 г. Грегори получил несколько важнейших разложений в ряд: для арктангенса, для тангенса, для секанса.

Грегори одним из первых начал понимать, что уравнение пятой степени нельзя решить в радикалах.

5.28. Георг Мор (1640-1697)

Георг Мор был почти неизвестен в своё время. В 1672 г. он опубликовал книгу «Датский Евклид», которая была прочно забыта до 1928 г. (возможно, не было продано ни одного экземпляра этой книги). В 1928 г. датский математик Хьельмслев обнаружил, что в этой книге содержится доказательство того, что любое построение, которое можно выполнить циркулем и линейкой, можно выполнить одним циркулем. За прошедшее время эта теорема, конечно, уже была открыта заново. Это сделал спустя 125 лет (в 1797 г.) итальянский математик Маскерони.

5.29. Филипп де Лагир (1640-1718)

Отец Лагира был художником и дружил с Дезаргом. Лагир тоже готовился стать художником и чертёжником. В 1660 г. он на 4 года поехал в Италию для совершенствования художественного мастерства. В это время у него возник интерес к изучению перспективы в живописи, и постепенно он стал заниматься математикой больше, чем живописью.

В 1679 г. Лагир мимоходом использовал координаты в пространстве, получив уравнение одной поверхности. Это было первым применением координат в пространстве, потому что Ферма и Декарт использовали только координаты на плоскости.

В геометрии Лагир в основном занимался коническими сечениями, применяя к ним проективный подход. Он обнаружил, что если точка движется по некоторой прямой, то её поляра вращается вокруг некоторой точки.

Лагир ввёл названия «абсцисса» и «ордината». Это был важный шаг, потому что до этого с координатами была большая путаница, часто приводившая даже хороших математиков к ошибкам, особенно при постепенном введении отрицательных координат. При этом особенно долго геометры не хотели вводить отрицательные абсциссы.

5.30. Секи Кова (1642-1708)

Японский математик Секи Кова сделал несколько выдающихся открытий, опредедив европейских математиков. В 1683 г. он, разрабатывая китайский метод решения систем линейных уравнения, пришёл к понятию определителя. В заметках Лейбница это понятие появляется примерно в то же время, но его письмо к Лопиталю, где понятие определителя сформулировано уже вполне чётко, написано на 10 лет позже.

Секи Кова знал степенной ряд для $(\arcsin x)^2$, вывод которого показывает, что ему была известна теорема о биноме, по крайней мере для показателя $\frac{1}{2}$. Секи Кова также открыл числа Бернулли раньше Якоба Бернулли.

Секи Кова получил 24 верных десятичных знака числа π.

5.31. Исаак Ньютон (1643-1727)

5.31.1. Биография

Когда Ньютону было около 15 лет, мать забрала его из школы, чтобы он занимался хозяйством. Это получалось у него плохо; он предпочитал сидеть под деревом с книгой или что-нибудь мастерить. Бывший учитель Ньютона посетил его мать и постарался убедить её дать сыну возможность завершить обучение в школе и подготовиться к поступлению в университет, чтобы не загубить на ферме столь многообещающий ум. Он даже предложил внести за него плату за обучение. Для матери Ньютона, едва умевшей читать и почитавшей только землевладение, это было крушением всех надежд. Она обратилась за советом к брату, на которого полагалась, и неожиданно он поддержал мнение учителя. Ньютон вернулся в школу и в 1661 г. отправился в Кембридж.

Очень большое влияние на Ньютона, начинающего изучать математику, оказали «Геометрия» Декарта и «Арифметика бесконечных»

Валлиса. В 1663 г. учителем Ньютона в Кембриджском университете стал Исаак Барроу, много занимавшийся задачами на касательные и обратными к ним задачами (эти задачи привели к созданию дифференциального и интегрального исчисления). Барроу, в частности, установил взаимную обратность дифференцирования и интегрирования, но он видел в этом лишь средство для решения обратных задач на касательные. Ньютон значительно развил идеи своего учителя.

На время чумы (1665-66) Кембридж был закрыт, и Ньютон провёл два года у матери. За это время он разработал теорию флюксий (основы математического анализа) и теорию тяготения, проделал опыты с призой по изучению спектра. В 1666 г. чума пошла на спад, но в Лондоне случился большой пожар, бушевавший четыре дня. Вернувшись в Кембридж, Ньютон не спешил делиться своими открытиями. Кое-что он рассказал только Исааку Барроу. В 1669 г. Барроу убедил Ньютона написать небольшой трактат «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», но Ньютон согласился лишь показать его нескольким математикам и не соглашался публиковать его (этот трактат опубликован лишь в 1711 г.).

В 1669 г. Барроу получил должность священника короля Карла II. Покидая Кембридж, Барроу оставил Ньютона своим преемником на кафедре.

В 1669 г. Ньютон первым изготовил рефлекторный телескоп (основанный на отражении, а не на преломлении света). Идея такого телескопа возникла у Джеймса Грегори, но он не смог его изготовить. В то время только Ньютон понимал, что важное преимущество рефлекторных телескопов над рефракторными состоит в отсутствии хроматической аберрации, свяазанной с тем, что лучи разного цвета преломляются под разными углами. Но он ошибочно полагал, что этот недостаток рефракторных телескопов невозможно устранить. За изготовление рефлекторного телескопа Ньютон в 1672 г. был избран членом Королевского общества.

После экспериментов с призмой Ньютон пришёл к убеждению, что свет состоит из частиц. Гук и Гюйгенс с этим не соглашались, считая, что природа света волновая.

В 1679 г. Гук высказал гипотезу, что движение планет объясняется их притяжением со стороны Солнца по закону обратных квадратов, и сообщил её Ньютону. Эта гипотеза сильно расходилась с господствовавшей тогда теорией вихрей Декарта, поэтому Ньютон сначала отнёсся к ней с недоверием, но постепенно понял, что с математической точки зрения эта идея чрезвычайно плодотворна. Идею Гука обсуждали астрономы, и в 1684 г. Кристофер Рен и Эдмонд Галлей поставили перед Гуком задачу: математически вывести из предположения, что сила притяжения планет Солнцем обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, эллиптическую форму орбит планет. Гук утверждал, что он умеет это выводить, но не предъявил доказательство. Спустя полгода Галлей решил поехать в Кембридж к Ньютону. На вопрос Галлея, какие траектории будут описывать планеты, если предположить, что сила притяжения их Солнцем обратно пропорциональна расстоянию, Ньютон без колебаний ответил: «Это будут эллипсы». На изумлённый вопрос Галлея, откуда он это знает, Ньютон ответил, что он это вычислил. Галлей попросил показать вычисления, но Ньютон не смог найти их среди своих бумаг. Ньютон пообещал повторить эти вычисления и прислать их по почте. Галлею пришлось ждать 3 месяца, но он всё же получил обещанные вычисления. Галлей немедленно поехал снова к Ньютону, чтобы узнать, согласится ли Ньютон представить свою статью перед Королевским обществом и опубликовать её. Ньютон захотел детально разработать свою теорию и после 18 месяцев упорного труда в апреле 1686 г. представил Королевскому обществу «Математические начала натуральной философии». Месяц спустя общество решило издать книгу Ньютона, но после этого выяснилось, что все деньги уже потрачены на дорогостоящее издание истории рыб. Тогда Галлей решил издать книгу за свой счёт.

Ньютон считал, что для поддержания стабильного состояния Солнечной системы требуется вмешательство посторонних сверхъестественных сил.

В 1689 г. Кембриджский университет должен был избрать двух членов Парламента; одним из них был избран Ньютон. В Парламенте он провёл около года, но выступал там только один раз (попросил закрыть окно, чтоб не дуло). В 1702 г. во время новых выборов в Парламент Ньютона спросили, хочет ли он, чтобы его выбрали снова. Он отказался.

Ньютон предпринял несколько безуспешных попыток получить другую должность (в Кембридже ему часто приходилось читать лекции в пустой аудитории, и это его раздражало). В 1692-93 гг. из-за тяжёлого переутомления (или отравления в ходе занятий алхимией) Ньютон страдал психическим расстройством. В 1696 г. Ньютон был назначен хранителем Монетного двора и переехал в Лондон; в 1699 г. он был назначен директором Монетного двора. Ньютону предстояла большая работа: из-за обилия в Англии фальшивых монет было решено полностью перечеканить монеты. В обязанности Ньютона входило также выявление фальшивомонетчиков.

В январе 1697 г. Ньютон получил письмо от Иоганна Бернулли, содержавшее две трудных задачи. Одна из них была опубликована 6 месяцев назад, но оставалась нерешённой, а другую решил Лейбниц, но Бернулли не сообщил Ньютону это решение, желая проверить способности Ньютона. Ньютон получил это письмо после тяжёлого рабочего дня на Монетном дворе. В первой задаче требовалось найти кривую, по которой должно двигаться тяжёлое тело под действием собственного веса, чтобы оно быстрее всего попало из одной данной точки в другую данную точку. Не поужинав, Ньютон принялся за решение задач. Через 12 часов он решил обе задачи и написал письмо президенту Королевского общества, изложив решения и попросив напечатать их анонимно. Иоганн Бернулли, прочитав эту статью, решил, что только Ньютон мог её написать: «Узнаю льва по отметке его когтей.»

В 1703 г. Ньютон был избран президентом Королевского общества и переизбирался каждый год вплоть до смерти.

В 1705 г. королева Анна посвятила Ньютона в рыцари (он был первым из учёных, удостоившимся этой чести за научные труды).

Ньютон отказывался публиковать свои работы по анализу. В 1676 г.

Лейбниц побывал в Лондоне. С Ньютоном он не встречался, но получил доступ к его бумагам, хранившимися у Джона Коллинза, и даже сделал из них какие-то выписки; лишь много позднее выяснилось, что никаких выписок, связанных с анализом, Лейбниц не делал. По поводу возникшего впоследствии спора между Ньютоном и Лейбницем о приоритете в открытии анализа бесконечно малых написано в параграфе, посвящённом Лейбницу.

5.31.2. Математические начала натуральной философии

При жизни Ньютона «Математические начала натуральной философии» (Philosophiae naturalis principia mathematica) издавались трижды: в 1687, 1713 и 1726 гг. Название, по-видимому, связано с критикой Декарта, которому, по мнению Ньютона, недоставало адекватных математических принципов. В названии отразилось также то, что Ньютон очень ценил «Начала» Евклида. Помощник Ньютона вспоминал, что за 5 лет только один раз видел его смеющимся: Ньютона рассмешил вопрос, есть ли какая-то польза от изучения «Начал» Евклида.

В 1670-е годы Ньютон начинает критически относиться к геометрии Декарта и к методам бесконечно малых. Он предпочитает методы древнегреческих математиков. Поэтому в «Началах» Ньютон обходится и без техники учения о флюксиях и без техники аналитической геометрии Декарта. Но он систематически применяет инфинитезимальные методы в синтетически-геометрической форме. (Только один раз он вскользь упоминает о флюксиях и форумулирует о них одно утверждение.) В «Началах» Ньютон пишет о движениях, изменениях или флюксиях величин (здесь у него впервые встречается термин *флюксия*).

Мысль Ньютона о единстве силы тяготения, управляющей падением земных тел и движением небесных тел, была нова. Ещё Галилей придерживался идеи Аристотеля, что земная механика и небесная механика подчиняются разным законам. В частности, свободное движение в земной механике прямолинейное, а в небесной — круговое. Галилею была также чужда мысль о дальнодействии (притяжении Земли Солнцем). Он считал, что о действии Солнца или Луны на Землю могут говорить только астрологи, и не верил в гипотезу Коперника о том, что приливы и отливы вызывают Луна и Солнце. Принцип действия на расстоянии долго не могли принять картезианцы (а картезианцами было большинство французских физиков и математиков). Ньютон не дал физического объяснения механизма всемирного тяготения.

В первой книге «Начал» Ньютон решает синтетически-геометрическим методом, в духе древнегреческих геометров, задачу Паппа, которую Декарт решил с помошью аналитической геометрии.

При решении задачи Кеплера о нахождении площади сектора эллипса Ньютон доказывает лемму о неалгебраичности площади сектора любого овала, отсекаемого прямой, вращающейся вокруг фиксированной точки. Доказательство основано на том, что после одного оборота добавляется площадь овала, что приводит к образованию спирали; прямая пересекает эту спираль в бесконечном числе точек, что противоречит алгебраичности.

Ньютон доказывает, что шар, плотность которого зависит только от расстояния до центра, притягивает частицу, расположенную вне его с такой же силой, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре. Точно так же он сводит притяжение двух шаров к притяжению двух точек.

Книга 2 «Начал натуральной философии» посвящена движению тела в сопротивляющейся среде. Ньютон нашёл форму тела вращения, испытывающего наименьшее сопротивление при движении в направлении оси вращения, сведя эту задачу к дифференциальному уравнению $\frac{yy'^3}{1+y'^2} = \frac{a}{4}$. Это была первая решённая задача вариационного исчисления. Ньютон не объяснил, как он получил дифференциальное уравнение, поэтому его задача не привлекла к себе внимания математиков и сначала не оказала влияния на возникновение вариационного исчисления.

В книге 3 Ньютон применяет к астрономии результаты, полученные в книге 1. Ньютон изучает приливы, форму Земли, некоторые отклонения в движении Луны, прецессию равноденствия, траектории комет.

Изучая траектории комет, Ньютон применяет метод интерполяции. В конце третьей книги (но только во втором издании) Ньютон написал знаменитое «Гипотез не измышляю».

5.31.3. Математический анализ

Зимой 1664 г. Ньютон установил биномиальную теорему для дробных показателей. Ньютон пришёл к пониманию взаимной обратности задачи проведения касательных и задачи вычисления площади под кривой. Он разработал алгоритм, по сути дела эквивалентный дифференциальному и интегральному исчислению Лейбница. Ньютон воспользовался биномиальной теоремой для решения задачи квадратур (почленное интегрирование).

Ньютон называет *флюентой* величину, которая непрерывно течёт (flows) во времени (например, площадь под кривой, которая возрастает при непрерывном изменении координаты); *флюксия* — это мгновенная скорость флюенты.

В работе «Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых» (1671) Ньютон описал способ нахождения разложений в ряд для ветвей алгебраической кривой в кратной точке (параллелограмм Ньютона). Параллелограмм Ньютона впоследствии сыграл очень важную роль в развитии теории алгебраических функций.

В 1676 г. Ньютон установил, что интеграл дифференциального бинома $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ выражается алгебраически в том и, насколько ему известно, только том случае, когда одно из чисел $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ или p натуральное. (Доказательство того, что в остальных случаях этот интеграл не выражается в элементарных функциях, получил Чебышев в 1853 г.)

В 1680 г. Ньютон попытался переформулировать свои результаты о флюксиях и флюентах на геометрическом языке, согласованном с методами древнегреческих математиков.

У Ньютона терминология, связанная с отношением исчезающих величин, была неустойчива. Иногда он использовал термин «метод первых и последних отношений». Ньютон указывает на аналогию отношения исчезающих величин с понятием мгновенной скорости.

В книге «Разностный метод» (1711) Ньютон доказывает свою интерполяционную формулу и выводит из неё формулу, получившую впоследствии название *формула Стирлинга*.

5.31.4. Всеобщая арифметика

В книге «Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе» (1707) Ньютон определяет число как отношение двух однородных величин. Это определение охватывает только положительные числа; нуль и отрицательные числа вводились дополнительно. Во «Всеобщей арифметике» Ньютон не приводит доказательств большинства теорем.

Во «Всеобщей арифметике» Ньютон впервые привёл алгебраическое доказательство формулы Герона. До этого техника алгебраических преобразований не была достаточно разработана для этих целей. Ньютон приводит также аналитическое решение задачи Паппа (в «Началах» Ньютон даёт её решение синтетически-геометрическим методом, в духе древнегреческих геометров).

Ньютон доказал (в «Началах» синтетически, т.е. без вычислений, а во «Всеобщей арифметике» аналитико-геометрически, что если два угла вращаются и точка пересечения их сторон движется по прямой, то вторая точка пересечения движется по конике. Эта теорема описывает конику как множество точек пересечения соответственных прямых в двух проективных пучках (теорию проективных пучков прямых построил Штейнер в 1832 г.).

Ньютон поставил и решил задачу, которую на современном языке можно сформулировать так. Пусть дан неприводимый многочлен степени $2m$ с целыми коэффиициентами и со старшим коэффициентом 1. Существует ли такое целое число d, что над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ этот многочлен разлагается на два множителя степени m?

Завершающая часть «Всеобщей арифметики» посвящена построению корней кубических уравнений с помощью конических сечений.

5.31.5. Классификация кубических кривых

В работе «Перечисление кривых третьего порядка» Ньютон дал классификацию кубических кривых (1667-68, опубликовано в 1704); он перечислил 72 типа кривых (6 типов он пропустил, что было обнаружено в XVIII в.). Ньютон даёт также проективную классификацию. Но он не приводит никаких доказательств.

5.32. Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (1646-1716)

В 16 лет Лейбниц поступил в университет в Лейпциге и изучал там философию и математику. В 1666 г. он подготовил диссертацию по философии под названием «Рассуждение о комбинаторном искусстве». В этом трактате введён термин *комбинаторика*. В нём содержится ряд теорем о сочетаниях и перестановках. Цель Лейбница была в том, чтобы свести все рассуждения и открытия к комбинациям некоторых основных элементов — цифр, букв, звуков, цветов. Такой подход характерен и для многих последующих работ Лейбница.

С 1672 г. Лейбниц в Париже изучал математику и физику под руководством Гюйгенса. В 1675 г. в Париж приехал Чирнгауз и подружился с Лейбницем. Именно в Париже Лейбниц получил свои основные результаты об анализе бесконечно малых, но опубликовал их гораздо позже. В его рукописи, относящейся к 1675 г., уже встречается обозначение интеграла $\int f(x)\,dx$. В 1676 г. Лейбниц получил равенство $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ как для целых, так и для рациональных n.

Лейбниц пришёл к созданию анализа бесконечно малых десятью годами позже Ньютона, но независимо от него. К тому времени, когда Ньютон опубликовал первую из своих работ по анализу, все основные работы Лейбница уже были опубликованы. Ньютон и Лейбниц не публиковали свои результаты по анализу более 10 лет, и много лет спустя это привело к ожесточённому спору по поводу приоритета, дополнительно разжигаемому их сторонниками.

В 1676 г. Лейбниц обменялся письмами с Ньютоном через посредство Ольденбурга. В это время он уже владел основными идеями и методами исчисления бесконечно малых, но узнал много интересных подробностей.

Ньютон послал Лейбницу письмо, в котором перечислил многие из своих результатов, но ничего не сообщил о методах. Лейбниц на это письмо ответил сразу, но до этого оно долго шло до него, и Ньютон решил, что Лейбниц ответил после шестинедельных раздумий. Письмо Ньютона побуждало Лейбница торопиться с публикацией полного изложения своих методов.

В октябре 1676 г. Ньютон написал Лейбницу второе письмо, которое было доставлено Лейбницу лишь в июне 1677 г., когда он был уже в Ганновере. Письмо было написано вежливо, но Ньютон был убеждён, что Лейбниц украл его методы. В ответном письме Лейбниц привёл некоторые подробности о своих методах дифференциального исчисления, в том числе правило дифференцирования сложной функции. Ньютон справедливо замечал, что методы Лейбница не позволили решить ни одной задачи, не решённой ранее. Но разработанный Лейбницем формализм доказал свою полезность при дальнейшем развитии анализа.

Всеобщая характеристика по замыслу Лейбница должна была стать единым алгоритмом математики и вообще всех формализованных наук, опирающимся на аппарат символической логики. Эта идея направляла многие его исследования. Именно поэтому он придавал большое значение символике, и его обозначения в анализе оказались более удобными, чем у Ньютона. В 1678 г. он писал Чирнгаузу: «Следует заботиться о том, чтобы знаки были удобны для открытия. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления.»

В 1673 г. Лейбниц ввёл термин *функция*. Понятие функции как величины, зависящей от переменной, сформировалось у Лейбница к 1697 г.

Лейбниц свёл вычисления площади круга к вычислению интеграла $\int \frac{z^2}{1+z^2}dz$ и получил ряд для арктангенса, который ранее уже получил

Грегори. Этот ряд даёт, в частности,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Рассматривая ряды с знакочередующимися членами, Лейбниц пришёл к общему вопросу о сходимости таких рядов. В 1705 г. в письме к Я.Герману Лейбниц сформулировал признак сходимости знакопеременного ряда: бесконечный знакопеременный ряд имеет конечную сумму, если абсолютная величина членов убывает и стремится к нулю (*признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда*). В 1713 г. Лейбниц в письме к Николаю Бернулли сформулировал определение сходящегося ряда.

Первые три работы Лейбница об исчислении бесконечно малых опубликованы в 1684, 1686 и 1693 гг. Это первые публикации на эту тему. Изобретение анализа бесконечно малых Лейбницем датируется между 1672 и 1676 гг. В это время Лейбниц находился в Париже с дипломатической миссией. К занятиям математикой его привлёк Гюйгенс. Девятилетнюю задержку публикации Лейбниц объяснял тем, что в это время был занят другими делами. Заняться публикацией Лейбница побудило ещё и то, что его друг Чирнгауз начал публиковать решения задач методом бесконечно малых, очень близкие к тому, что ему рассказал Лейбниц.

В 1678-79 гг. в письмах Чирнгаузу Лейбниц подробно рассказал, как он пришёл к дифференциальному и интегральному исчислению. Он указывает три главных источника своего открытия: 1) взятый у Паскаля и существенно обобщённый метод характеристического треугольника; 2) введённое Декартом и его последователями алгебраическое представление геометрических кривых; 3) открытия Валлиса и Меркатора в области бесконечных рядов вместе с исследованиями самого Лейбница о суммировании рядов при помощи порождающих их разностей.

В первой работе (1684) под влиянием Паскаля вводится *характеристический треугольник*. Лейбниц вводит термин *дифференциал* и обозначения dv и dx. Без доказательства приводятся правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного. Лейбниц отметил, что $dv = 0$ для максимума или минимума. Вводится второй дифференциал. Затем Лейбниц устанавливает правило дифференцирования степеней, корней и сложных функций. На четырёх примерах популярных в то время задач Лейбниц продемонстрировал силу нового метода. Один из этих примеров — вывод закона преломления в оптике. Лейбниц показывает, что его метод применим и к трасцендентым кривым, которые Декарт хотел изгнать из геометрии, считая их изучение невозможным.

Первая публикация Лейбница была очень краткой (в ней не было доказательств) и содержала много опечаток, что делало её понимание очень трудным. В 1687 г. Якоб Бернулли обратился к Лейбницу с просьбой дать ему некоторые пояснения, считая, что тот просто скрывает многие из своих методов. Якоб Бернулли не получил ответа от Лейбница и проник в тайны анализа самостоятельно и обучил им своего брата Иоганна. По мнению Якоба Бернулли публикация Лейбница была скорее загадкой, чем разъяснением. Гюйгенс тоже жаловался Лейбницу на туманность его изложения и сетовал, что вообще не может понять, что такое ddx.

Вторая работа (1686) посвящена интегральному исчилению. Лейбниц подчёркивает важность трансцендентых кривых для задачи квадратур. Интегрирование определяется через суммирование и представлено как операция, обратная дифференцированию. Лейбниц вводит обозначение $\int$ как стилизацию первой буквы слова summa.

Третья статья (1693) посвящена задаче квадратур. Лейбниц не проводит чёткого разделения между определёнными и неопределёнными интегралами, применяя для них одно и то же обозначение.

Лейбниц совместно с Иоганном Бернулли разработал алгоритм интегрирования рациональных функций. Сначала он дупустил ошибку, решив, что x^4+a^4 нельзя разложить на действительные квадратичные множители. Основы обращения с комплексными числами в то время ещё только начинали разрабатываться. Гюйгенс, когда Лейбниц ему сообщил, что $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$, нашёл это столь удивительным, что ответил ему, что в этом кроется что-то для нас непостижное.

Тождество $\frac{1}{x-a_1} - \frac{1}{x-a_2} = \frac{a_1-a_2}{(x-a_1)(x-a_2)}$ показывает, что интегрирование функции $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ сводится к интегрированию функций $\frac{1}{x-a_1}$ и $\frac{1}{x-a_2}$, где a_1 и a_2 — корни многочлена ax^2+bx+c. Для вещественных a_1 и a_2 интегралы от функций $\frac{1}{x-a_1}$ и $\frac{1}{x-a_2}$ выражаются через логарифмы. Но у многочлена с вещественными коэфиицентами корни могут быть комплексными, поэтому в результате могут получиться логарифмы от комплексных чисел. Лейбница сначала это не смущало, и он говорил, что комплексные числа здесь не причиняют вреда. Но впоследствии он считал, что логарифм от -1 не существует.

Определение трансцендентных чисел Лейбниц дал в 1686 г. Термины «алгебраический» и «трансцендентный» к кривым он применял ещё до этого; в 1684 г. Лейбниц считал, что нужно отказаться от терминологии Декарта (геометрические линии и механические линии), потому что трансцендентные кривые не следует исключать из геометрии. Различие между алгебраическими и трансцендентными функциями было отчетливо сформулировано Джеймсом Грегори в 1667 г. Он пытался доказать, что площадь кругового сегмента не может быть алгебраической функцией радиуса и хорды. Лейбниц доказал, что функция sin трансцендентная, и заодно решил задачу Грегори. Доказательство трансцедентности синуса у Лейбница следующее. Предположим, что x и $\sin x$ связаны алгебраическим соотношением $f(x, \sin x) = 0$. Тогда из двух соотношений $f(m \cdot \frac{x}{m}, \sin x) = 0$ и $f(\frac{x}{m}, \sin\frac{x}{m}) = 0$ можно исключить $\frac{x}{m}$ и получить соотношение $g(\sin x, \sin\frac{x}{m})$, причём степень r многочлена g не зависит от m. Таким образом, при заданном значении $\sin x$ величина $\sin\frac{x}{m}$ не может иметь более r значений. Получаем противоречие, поскольку при нечётном m при заданном значении $\sin x$ величина $\sin\frac{x}{m}$ имеет m различных значений.

В 1692 г. Лейбниц ввёл термин *координаты*. При этом он подчеркнул равноправие абсциссы и ординаты.

В 1696 г. маркиз Лопиталь опубликовал первый учебник анализа, основанный на лекциях, которые ему прочитал Лейбниц.

Лейбниц ввёл дифференцирование дробного порядка, используя бесконечный биномиальный ряд. Для вычисления дифференциалов дробного порядка он применил формулу дифференцирования показательной функции, приняв, что $d^n e^{mx} = m^n e^{mx}(dx)^n$ для всех n. Но эти исследования он не опубликовал. О них он сообщает, в частности, в письме к Лопиталю в 1695 г. Там он приводит формулу для дифференцирования порядка e:

$$d^e(xy) = d^e x \cdot d^0 y + \frac{e}{1} d^{e-1} x \cdot d^1 y + + \frac{e(e-1)}{1 \cdot 2} d^{e-2} x \cdot d^2 y + \frac{e(e-1)(e-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^{e-3} x \cdot d^3 y$$

Из связанного с дифференцированием дробного порядка он опубликовал только формулу дифференцирования произведения для натурального n.

В 1686 г. Лейбниц определил соприкасающуюся окружность с данной кривой и соприкосновения высших порядков. Он ошибочно полагал, что соприкасающаяся окружность имеет две (а не три, как правильно) совпадающие точки пересечения с кривой. Эту ошибку исправил в 1692 г. Якоб Бернулли.

В 1692 г. Лейбниц вкратце изложил определение огибающей семейства кривых и вывод уравнения огибающей; подробнее он это изложил в 1694 г.

Лейбниц считал, что основа математики — определения, а не аксиомы. Аксиомы вытекают из определений (и не могут быть произвольными).

В 1700 г., после пятилетних усилий, при содействии своей ученицы, дочери ганноверского герцога Софии-Шарлотты, вышедшей замуж за прусского государя, Лейбниц организовал Бранденбургское научное общество и стал первым его президентом; через несколько лет это общество было преобразовано в Берлинскую Академию наук. Пётр Первый трижды встречался с Лейбницем, обсуждая с ним план создания Академии наук в Санкт-Петербурге. Лейбниц участвовал также в создании академий в Дрездене и Вене.

Многие не принимали метод бесконечно малых. Лейбниц по-разному объяснял, что он подразумевает под бесконечно малыми и бесконечно большими величинами. Лейбниц писал и о настолько малых величинах, что они порождают несущественную ошибку; и о том, что земной шар считается точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звёзд, а шарик в наших руках — точкой по сравнению с радиусом земного шара. Писал он даже и о том, что ими можно надёжно пользоваться как идеальными понятиями, сокращающими рассуждения, и сходными с мнимыми корнями, которые, несмотря на то, что их называют мнимыми, не перестают от этого быть полезными. Эти слова Лейбница свидетельствуют не столько о том, как хорошо в то время было разработано понятие бесконечно малой величины, сколько о том, как плохо было разработано понятие мнимых чисел.

Лейбниц оставил неопубликованными свои работы, в которых он пришёл к понятию определителя. Впервые это понятие появилось у него в 1678 г.; при этом он естественным образом пришёл к необходимости снабжать коэффициенты линейных уравнений двумя индексами. Как и всегда, Лейбниц тщательно заботился об удобных обозначениях. Неопибликованные записки, относящиеся к 1684 г., содержат уже весьма удобные обозначения. В 1693 г. Лейбниц писал Лопиталю о пользе применения коэффициентов вида a_{10}, a_{11} и т.д. (коэффициент a_{10} Лейбниц обозначал 10 и называл его числом, чтобы отличить от буквы, т.е. коэффициента без индекса): «...Раз Вы говорите, что Вам трудно поверить, что пользование числами носит столь же общий характер и столь же удобно, как и пользование буквами, значит, я нехорошо выразил свою мысль. Нельзя сомневаться в общности, если принять во внимание, что можно пользоваться 2, 3 и т.д. так же, как a или b, если только иметь в виду, что это не настоящие числа. Так, $2 \cdot 3$ означает вовсе не 6, но то же, что ab. Что касается удобства, то оно очень велико, и поэтому я часто пользуюсь этим, особенно в длинных и трудных вычислениях, в которых легко ошибиться. Ибо, кроме удобства проверки с помощью чисел, а также отбрасывания девяток, я нахожу в этом очень важное преимущество даже для развития Анализа. Так как это открытие довольно своеобразно, я ещё не рассказывал о нём другим. Но вот в чём дело. Ведь верно, что когда приходится употреблять много букв, то эти буквы совсем не выражают отношений между обозначаемыми ими величинами; между тем, пользуясь числами, я могу это отношение выразить. Допустим, например, что предложены три простых уравнения с двумя неизвестными и требуется исключить эти два неизвестных, причём по общему правилу. Я полагаю $10 + 11x + 12y = 0 \quad (1)$ и $20 + 21x + 22y = 0 \quad (2)$ и $30 + 31x + 32y = 0 \quad (3)$, где предлагаемые числа выражены каждое двумя знаками, из которых первый показывает мне, какому уравнению принадлежит число, а второй показывает, какой оно принадлежит букве. Вычисляя таким образом, везде открываешь гармонии, которые не только служат нам порукой, но и сразу показывают нам правила или теоремы. Например, исключая сперва из первого и второго уравнений y, мы получим

$$\begin{array}{l} +10\cdot 22 + 11\cdot 22x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = 0, \\ -12\cdot 20 - 12\cdot 21x \end{array}$$

а исключая его из первого и третьего, мы получим

$$\begin{array}{l} +10\cdot 32 + 11\cdot 32x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = 0, \\ -12\cdot 30 - 12\cdot 31x \end{array}$$

где легко заметить, что эти два уравнения отличаются лишь тем, что предыдущий знак 2 заменяется на предыдущий знак 3. Впрочем, в каждом члене каждого уравнения предыдущие знаки одинаковы, а последующие знаки образуют одну и ту же сумму. Теперь остаётся исключить из четвёртого и пятого уравнений букву x, и тогда мы получим

$$\begin{array}{ccc} 10 & 21 & 32 \\ 11 & 22 & 30 \\ 12 & 20 & 31 \end{array} = \begin{array}{ccc} 10 & 22 & 31 \\ 11 & 20 & 32 \\ 12 & 21 & 30, \end{array}$$

что и представляет собой последнее уравнение, свободное от обоих неизвестных, которые желали исключить, и заключающее своё доказательство в самом себе, в силу заметных во всём гармоний, которые было бы весьма трудно открыть при употреблении букв a, b, c, особенно, когда число букв и уравнений велико. Часть секрета Анализа состоит в характеристике, т.е. в искусстве хорошо употреблять применяемые знаки, и по этому малому образцу Вы видите, Сударь, что Виет и Декарт ещё не познали все его тайны. Незначительно продолжив это вычисление, можно прийти к общей теореме для любого произвольного числа букв и простых уравнений». Полученное Лейбницем условие совместности трёх линейных уравнений с двумя неизвестными можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Открытие Лейбница значительно опередило своё время. Первая публикация, посвященная определителям, появилась лишь через 72 года, в 1750 г.; она принадлежит Г. Крамеру. Следует, однако, заметить, что японский математик Секи Кова пришёл к понятию определителя в 1683 г.

Лейбниц близко подошёл к понятию вектора. В 1679 г. он отправил Гюйгенсу письмо о геометрической характеристике. Лейбниц писал, что нужен анализ, который непосредственно выражает положение, как алгебра непосредственно выражает величину. Он писал также, что в геометрии, как и в алгебре, можно составлять уравнения, пользуясь конгруэнцией (для которой Лейбниц использует обозначение круг и над ним дуга полуокружности).

Лейбницу принадлежит идея «анализа положения» (analysis situs), которую впоследствии использовал Эйлер при решении задачи о кёнигсбергских мостах. Термин *топология*, введённый Листингом, является переводом на греческий язык латинского термина Лейбница.

В распространении двоичной системы счисления важную роль сыграла работа Лейбница «Изложение двоичной арифметики, для которой достаточно только двух цифр 0 и 1, с замечаниями о её пользе и о том, что она даёт смысл древним китайским фигурам Фохи». Фохи, о котором пишет Лейбниц, — это китайский бог-прародитель Фуси, а «фигуры Фохи» — рисунки из древнекитайских гадательных книг. Лейбниц ошибочно истолковал их как двоичные записи чисел; в действительности о применении в Древнем Китае двоичной системы счисления ничего не известно. Двоичную систему Лейбниц разработал в 1679 г., но ничего не публиковал на эту тему до 1701 г.

Лейбниц поставил задачу дедуктивного построения арифметики на основе аксиом. Он предложил две аксиомы (явно не достаточные):

1) каждое натуральное число, кроме 1, получается из натурального числа прибавлением к нему 1;

2) $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Последние годы жизни Лейбница были омрачены спором по поводу приоритета в открытии анализа. Лейбницев анализ распространился в континентальной Европе до того, как появилась первая публикация Ньютона в 1704 г. Ньютон и некоторые его последователи были уверены, что Лейбниц плагиатор. В 1711 г. Лейбниц прочитал в трудах Королевского общества статью Кейлла, в которой Лейбниц обвинялся в плагиате. Лейбниц потребовал опровержения, говоря, что он никогда не слышал о методе флюксий до того, как прочитал труды Валлиса. Кейлл ответил, что в двух письмах Ньютона было достаточно указаний, объясняющих основы анализа. После второго письма Лейбница, пользуясь своей дожностью президента Королевского общества, Ньютон назначил «независимую» комиссию, которая должна была решить, кто открыл анализ: он или Лейбниц. Комиссия была чрезвычайно пристрастная и даже не пыталась выяснить у Лейбница его версию событий. Ньютон сам написал отчёт этой комиссии, который был опубликован от её имени Королевским обществом в начале 1713 г. Лейбниц прочитал его лишь осенью 1714 г., но о содержании этого отчёта он уже знал из письма Иоганна Бернулли. Лейбниц ответил анонимным памфлетом, где в качестве довода в свою пользу приводил то, что Ньютон ошибочно понимал вторые производные и производные высших порядков. Продолжать спор с Кейллом Лейбниц отказался, но на письмо Ньютона он ответил и дал подробное описание своего открытия дифференциального исчисления.

Последователи Лейбница, особенно Якоб Бернулли, резко выступили против пристрастного отчёта комиссии. После этого теория Ньютона долгое время была распространена почти исключительно в Англии, а теория Лейбница — в континентальной Европе.

5.33. Джованни Чева (1647-1734)

Знаменитая *теорема Чевы* была опубликована в сочинении «О взаимопересекающихся прямых» в 1678 г. Эта теорема утверждает, что три отрезка, проведённых из вершин треугольника к его сторонам, пересекаются в одной точке, если произведение отношений, в которых эти отрезки делят стороны треугольника, равно 1.

Чева также переоткрыл и опубликовал теорему Менелая.

5.34. Эренфрид Вальтер фон Чирнгауз (1651-1708)

Предки саксонского дворянина Чирнгауза жили в Богемии и там их фамилия была Черноус. (Авторы, далёкие от истории математики, очень часто неправильно пишут его фамилию «Чирнгаузен».)

В 1675 г. Чирнгауз познакомился в Париже с Лейбницем и подружился с ним. Лейбниц сообщил ему некоторые основные принципы разработанного им анализа.

Чирнгауз исследовал свойства зеркал и в связи с этим изучал огибающую семейства лучей, которые получаются при отражении лучей света, выходящих из точки и отражающихся от некоторой кривой.

В 1683 г. Чирнгауз опубликовал преобразование для многочленов, которое, как он считал, позволяло решить в радикалах любое уравнение; в своей статье он показал, как этим методом решается кубическое уравнение. Лейбниц ещё до публикации указал ему, что для применения этого преобразования к уравнению степени $n > 4$ требуется решить уравнение степени больше n. Теме не менее, это преобразование, получившее название *преобразование Чирнгауза*, оказалось весьма полезным.

В 1683 г. Чирнгауз опубликовал ряд результатов Лейбница, выдавая их за свои. Это заставило Лейбница наконец-то начать публиковать свои результаты в 1684 г.

5.35. Мишель Ролль (1652-1719)

Основное сочинение Мишеля Ролля — «Трактат по алгебре» (1690). Ролль впервые чётко сформулировал, что любой корень n-й степени имеет n значений; при нечётном n все корни, кроме одного, комплексные, а при чётном n могут быть два действительных корня, а остальные мнимые. Он привёл способ решения в целых числах неопределённых уравнений первой степени с двумя неизвестными; это решение по идее совпадает с полученным позже решением Эйлера (1740). Ролль привёл также чисто алгебраический способ получения высших производных многочлена $f(x)$; они появляются как коэффициенты уравнения, которое получается при замене x на $x + z$. Ролль сообщает (без доказательства), что между двумя последовательными корнями уравнения $f^{(r)}(x) = 0$ есть корень уравнения $f^{(r+1)}(x) = 0$. Ролль применил алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов.

Теорема Ролля опубликована в 1691 г. Она утверждает, что если $f(a) = f(b) = 0$, то $f'(x) = 0$ для некоторого x, заключённого между a и b. Эта теорема была нужна Роллю для обоснования некоторых методов, приведённых в «Трактате по алгебре». В этой же работе Ролль предложил считать, что если $a > b$, то $-b > -a$ (до него при сравнении отрицательных чисел обычно упорядочивали их по абсолютной величине; так поступал, например, Декарт).

Следует иметь в виду, что работы Ролля чисто алгебраические, к анализу они не имеют никакого отношения. Ролль долгое время был активным противником анализа бесконечно малых; он был убеждён, что методы анализа бесконечно малых неизбежно приведут к ошибкам.

В «Трактате по алгебре» Ролль ввёл обозначение $\sqrt[n]{x}$.

5.36. Якоб Бернулли (1654-1705)

Якоб Бернулли и его младший брат Иоганн одними из первых смогли разобрать трудные для понимания статьи Лейбница и применить разработанные в них методы к решению новых задач.

В конце XVII в. многие математики занимались задачей об изохроне; так они называли кривую, двигаясь по которой под действием силы тяжести, частица попадает из любой точки в нижнюю точку за одно и то же время. Первым задачу об изохроне решил Лейбниц. В 1690 г. Якоб Бернулли показал, что эта задача сводится к дифференциальному уравнению

$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}.$$

Из равенства дифференциалов он сделал вывод о равенстве интегралов и получил решение

$$\frac{2b^2y - 2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y - a^3} = x\sqrt{a^3}.$$

В этой статье он ввёл термин *интеграл*. (Его брат Иоганн в автобиографии утверждал, что этот термин придумал он.)

В той же статье Якоб Бернулли поставил задачу о нахождении формы кривой, которую принимает тяжёлая гибкая нерастяжимая нить, подвешенная за оба конца (*цепная кривая*). Эту задачу ставил ещё Леонардо да Винчи; Галилей полагал, что это должна быть парабола. В 1691 г. Гюйгенс, Лейбниц и Иоганн Бернулли независимо получили решения этой задачи. Рассуждения Гюйгенса были туманными. Иоганн Бернулли вывел дифференциальное уравнение и нашёл его решение.

В 1691 г. Якоб Бернулли впервые выразил в виде эллиптического дифференциала элемент дуги параболической спирали, заданной в полярных координатах уравнением $(r - a)^2 = 2ap\varphi$. При этом он установил равенство определённых дуг спирали. К эллиптическим интегралам он пришёл также при изучении гибкой пластины с одним неподвижным концом. К этому же кругу вопросов относится лемниската Бернулли.

В 1692 г. Якоб Бернулли разработал общий метод нахождения эволюты кривой. Он обнаружил, что эволюта и каустика логарифмической спирали также являются логарифмическими спиралями. Это свойство столь поразило его, что он завещал изобразить на своём надгробии такую спираль с подписью eadem mutata resurgo (изменённая, я возрождаюсь прежней).

В 1694 г. Якоб Бернулли исследовал кривую, которую он назвал *лемниската*. Он не знал, что эта кривая является одной из кривых, входящих в уже известное семейство кривых — овалов Кассини.

В 1696 г. Якоб Бернулли решил дифференциальное уравнение

$$y' = p(x)y + q(x)y^n,$$

получившее название *уравнение Бернулли*.

В 1697 г. Якоб Бернулли решил задачу о брахистохроне (кривой скорейшего спуска), поставленную его братом Иоганном. Якоб не был первым, кто решил эту задачу, но в его решении был высказан важный для многих задач вариационного исчисления принцип: если какая-нибудь кривая обладает свойством максимума или минимума, то каждая её бесконечно малая часть обладает тем же свойством.

Наиболее важное сочинение Якоба Бернулли — книга «Ars Conjectandi» (Искусство предположений), изданная посмертно в 1713 г. Она состоит из четырёх частей. Первая часть — это сочинение Гюйгенса по теории вероятностей с подробными комментариями Бернулли.

Во второй части разрабатывается комбинаторика. Якоб Бернулли без доказательства сообщил формулу для суммы $1^n + 2^n + \cdots + k^n$ и указал рекуррентное соотношение между числами B_i, входящими в эту формулу. Теперь эти числа называют *числами Бернулли*. Фаульгабер ранее вычислил эти суммы сначала для $n \leq 11$ (1617), а затем и для $n \leq 17$ (1631).

Эйлер обобщил метод Бернулли для суммирования $f(1) + f(2) + \cdots + f(k)$ (*формула суммирования Эйлера–Маклорена*). Остаточный член в этой формуле суммирования получил гораздо позднее Пуассон.

В третьей части решаются 24 задачи по теории вероятностей. Задачи решаются в основном комбинаторными методами. Бернулли использует, в частности, условные вероятности.

Четвёртая часть посвящена приложениям. Там Бернулли высказывает также общие соображения о случайных событиях и доказывает свой закон больших чисел (есть и другие версии этого закона).

Якоб Бернулли намеревался дать различные приложения теории вероятностей к вопросу о продолжительности человеческой жизни, но во время этой работы он неожиданно умер. Бернулли первым наряду с априорными вероятностями ввёл апостериорные вероятности (формула для вычисления апостериорных вероятностей получена Т.Байесом).

5.37. Пьер Вариньон (1654-1722)

Наиболее известны работы Вариньона по механике, в которых он применил только что появившееся дифференциальное исчисление Лейбница.

В заметках Вариньона об обучении математике в школе, опубликованных в 1731 г., содержится *теорема Вариньона*: середины сторон черырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

5.38. Гийом Лопиталь(1661-1704)

В 1691 г. Иоганн Бернулли, который был на 6 лет моложе маркиза Лопиталя, приехал в Париж читать лекции о дифференциальном исчислении Лейбница. Лопиталь некоторое время посещал лекции Бернулли, а затем переехал в своё поместье. В этом поместье Бернулли читал лекции Лопиталю.

Иоганн Бернулли открыл правило вычисления предела дроби, у которой числитель и знаменатель стремятся к нулю. Лопиталь изложил это правило в главе 9 своего учебника по дифференциальному исчислению (1696), и теперь это правило известно как *правило Лопиталя*. Учебник Лопиталя, составленный на основе лекций, которые читал ему

Иоганн Бернулли, долгое время был единственным употребительным учебником дифференциального исчисления.

В учебнике Лопиталя обсуждаются точки перегиба, точки возврата, кривизна кривой, эволюты, производные высшего порядка.

До смерти Лопиталя Бернулли, получивший за свои лекции весьма большую оплату, молчал. Но потом он утверждал, что учебник этот, по сути дела, его. Найденная в 1921 г. рукопись лекций Бернулли подтверждает его слова.

5.39. Иоганн Бернулли (1667-1748)

Иоганн Бернулли был учеником своего брата Якоба и в какой-то степени Лейбница (переписка с Лейбницем началась, когда Иоганн Бернулли уже сложился как математик, но оказалась чрезвычайно плодотворной). В свою очередь, он был учителем Эйлера.

Первой математической работой Иоганна Бернулли был вывод уравнения цепной кривой (форму цепной кривой принимает тяжёлая гибкая нерастяжимая нить, подвешенная за оба конца). Эту задачу поставил его брат Якоб в 1691 г.; одновременно её решили также Лейбниц и Гюйгенс.

Иоганн Бернулли открыл правило вычисления предела дроби, у которой числитель и знаменатель стремятся к нулю. Его ученик маркиз Лопиталь изложил это правило в своём учебнике по анализу (1696), и теперь это правило известно как *правило Лопиталя*. Учебник Лопиталя, составленный на основе лекций, которые читал ему Иоганн Бернулли, долгое время был единственным употребительным учебником дифференциального исчисления.

В 1692 г. Иоганн Бернулли изучал огибающие семейств кривых. В частности, он нашёл параболу безопасности (ранее её геометрически нашёл Торричелли). В статьях 1692 и 1694 гг. Лейбниц получил общий метод нахождения огибающих семейств кривых.

В 1694 г. Иоганн Бернулли вывел ряд

$$\int_0^z n\,dz = nz - \frac{z^2}{2!}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{3!}\frac{d^2n}{dz^2} - \frac{z^4}{4!}\frac{d^3n}{dz^4} + \dots$$

В 1695 г. Иоганн Бернулли поставил задачу о нахождении кривых, сумма или разность дуг которых равна дуге окружности или отрезку прямой, и показал, что этим свойством обладают некоторые дуги кубической параболы $3a^2y = x^3$. Эти дуги выражаются эллиптическими интегралами.

В 1696 г. Иоганн Бернулли поставил задачу о брахистохроне, послужившую исходным пунктом создания вариационного исчисления. Формулировка этой задачи такова: «среди всех проходящих через две данные точки кривых найти ту, падая по которой тяжёлая точка пройдёт дугу между обеими точками в кратчайшее время». Помимо самого Иоганна эту задачу решил Лейбниц, предложивший объявить конкурс по её решению. Решение этой задачи представили Лопиталь, Якоб Бернулли и автор анонимной статьи в Philosophical Transaction. (Иоганн Бернулли сразу же узнал в нём Ньютона: «Льва узнают по когтям.») Решением этой задачи оказалась уже известная циклоида.

В связи с решением этой задачи напряжённые отношения между братьями Бернулли перешли в открытую ссору, продолжавшуюся до смерти Якоба.

В 1697 г. Иоганн Бернулли поставил задачу о нахождении на выпуклой поверхности кратчайшей кривой, соединяющей две данные точки (задачу о нахождении геодезической). При этом он овладел методом координат в пространстве и нашёл дифференциальное уравнение геодезической, но не смог его решить. В следующем году его брат дал решение для поверхностей вращения. Именно при решении этой задачи Иоганн Бернулли ввёл понятие соприкасающейся плоскости пространственной кривой как плоскости, проходящей через три соседние точки кривой (он установил, что в любой точке геодезической соприкасающаяся плоскость перпендикулярна к касательной поверхности).

В 1715 г. Иоганн Бернулли написал Лейбницу о задании точки в пространстве тремя координатами x, y, z, представляющими собой три перпендикулярных отрезка, проведённых к трём взаимно перпендикулярным плоскостям. Тем самым он фактически ввёл координаты в пространстве.

Совместно с Лейбницем Иоганн Бернулли разработал алгоритм интегрирования рациональных функций (Бернулли использовал метод неопределённых коэффициентов).

После долгих обсуждений с Лейбницем Иоганн Бернулли дал в 1718 г. следующее определение: «Функцией переменной величины называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных.»

Иоганн Бернулли рассматривал интегрирование просто как обратную к дифференцированию операцию. Такой подход позволил ему добиться больших успехов в решении дифференциальных уравнений. Иоганн Бернулли вывел теоремы сложения для тригонометрических и гиперболических функций с помощью дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют.

В 1713 г. Иоганн Бернулли был вовлечён в спор между Ньютоном и Лейбницем. Он решительно поддержал Лейбница, приводя в качестве агрумента решение методами Лейбница некоторых задач, не поддающихся методам Ньютона.

Литература

[1] Архимед *Сочинения*, М.: ГИФМЛ, 1962.

[2] Березкина Э.И. *Математика Древнего Китая*, М.: Наука, 1980.

[3] Бурбаки Н. *Очерки по истории математики*, М.: ИЛ, 1963.

[4] Быковский В.А. *По следам далекого прошлого.* Дальневост. матем. журн., 2010, Т. 10, №1, с. 3-8.

[5] Вайман А. А. *Длина окружности и площадь круга в древнеегипетской математике.* В кн.: Древний Египет. Сб. статей. М.: Изд. Вост. литературы, 1960. С. 97–102.

[6] Вайман А. А. *Шумеро-вавилонская математика.* М.: Изд. Вост. литературы, 1961.

[7] ван дер Варден Б.Л. *Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции*, М.: ГИФМЛ, 1959.

[8] Вилейнтнер Г. *История математики от Декарта до середины XIX столетия*, М.: ГИФМЛ, 1960.

[9] *История математики с древнейших времен до начала XIX века*, в трёх томах. Под редакцией А.П.Юшкевича.

Том первый. *С древнейших времен до начала Нового времени*, М.: Наука, 1970.

Том второй. *Математика XVII столетия*, М.: Наука, 1970.

Том третий. *Математика XVIII столетия*, М.: Наука, 1972.

[10] Лейбниц Г.В. *Избранные отрывки из математических сочинений*, Успехи математических наук, 1948. Т. 3. Вып. 83, с. 165–204.

[11] Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*, М.: Наука, 1989.

[12] Ньютон И. *Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе*, Издательство АН СССР, 1948.

[13] Ньютон И. *Математические работы*, М.-Л.: Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937.

[14] Прасолов В. В. *Геометрические задачи древнего мира*, М.: Фазис, 1997.

[15] Прокл *Комментарий к Первой книге «Начал» Евклида. Введение*, М.: Греко-латинский кабинет, 1994.

[16] Раик А. Е. *Очерки по истории математики в древности*, Саранск: Мордов. кн. изд., 1967.

[17] Цейтен Г.Г. *История математики в древности и в Средние века*, М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[18] Цейтен Г.Г. *История математики в XVI и XVII веках*, М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[19] Юшкевич А.П. *История математики в Средние века*, М.: ГИФМЛ, 1961.

[20] Ямвлих *Жизнь Пифагора*, М.: Алетейа, 1998.

[21] Bruins E. M. Рецензия на кн.: Gillings R. J., *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1972.
Janus, 1972, Vol. 59, No. 1-2-3, p. 239-248.

[22] Christianson G.E. *Isaac Newton*, Oxford Univ. Press, 2005.

[23] Gerdes P. *Three alternate Methods of Obtaining the Ancient Egyptian Formula for the Area of the Circle.* Historia Math., 1985, Vol. 12, No. 3, p. 261–268.

[24] Heath Th. *A History of Greek Mathematics, Volume 1 (From Thales to Euclid)*, Oxford: Clarendon Press, 1921.

[25] Heath Th. *A History of Greek Mathematics, Volume 2 (From Aristarchus to Diophantus)*, Oxford: Clarendon Press, 1921.

[26] Kline M. *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York: Oxford Univ. Press, 1972.

[27] Kliner I. *A History of Abstract Algebra*, Boston: Birkhauser, 2007.

[28] *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, Editor I. Grattan-Guinnes, Amsterdam: Elsevier, 2005.

[29] Robins G., Shute C. D. *Mathematical Bases of Ancient Egyptian Architecture and Graphic Art*, Hist. Math., Vol. 12, No. 2, p. 107–122.

[30] Seidenberg A. *The Ritual Origin of Geometry*, Archive Hist. Ex. Sci., 1962, Vol. 1, No. 5, p. 488–527.

[31] Seidenberg A. *On the Area of a Semi-Circle*, Archive Hist. Ex. Sci., 1972, Vol. 9, No. 3, p. 171–211.

[32] Seidenberg A. *On the Volume of a Sphere*, Archive Hist. Ex. Sci., 1988, Vol. 39, No. 2, p. 97–119.

[33] Stedall Jacqueline, *From Cardano's Great Art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algebra*, European Math. Soc., 2011.

[34] Weil A. *Number Theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*, Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1984.

Предметный указатель