

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Л. Чечулин

**История
математики и её методологии
(структуры и ограничения)**

МОНОГРАФИЯ



Пермь 2015

УДК 51; 16
ББК 22.1
Ч 57

Чечулин В. Л.

История математики и её методологии (структуры и ограниче-
Ч 57 ния): монография / В. Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. –
Пермь, 2015. – 154 с.

ISBN 978-5-7944-2654-0

В монографии на основании онтологической структуры (сознание, время, материя) и общегносеологических закономерностей отражения действительности в сознании человека (шестиуровневая структура отражения) описывается периодизация истории математики (по линии число–уравнение–функция–оператор...); периодизация развития представлений о причинности; периодизация развития естественных наук (физики, механики, химии), как области приложения математики; дополнительно описаны ступени развития экономики, ступени развития научной методологии.

Выделены периоды однородного развития наук и переходы на качественно новый уровень абстракции научного знания. Отмечено, что высший уровень развития непредикативный (самоссылочный) не сводим к абстракциям низших уровней.

Показана содержательная взаимосвязь в развитии наук в пределах одного периода. Указано, что последовательность изучения математических и иных научных понятий в системе образования повторяет те же уровни абстракции, что и в истории науки. В истории экономики при описании подпериодов её развития обоснована конечность современных технологических укладов (пятый, современный — предельный).

На широком фактическом материале показано, что развитие науки следует общим закономерностям отражения действительности в сознании человека и соответствует ступеням постижения истины; обосновывается необходимость онтологической полноты научных теорий. Подчёркивается, что развитие науки и культуры имеет конечной целью (высшей, шестой ступенью) обеспечение возможностей реализации свобод человека в виде общезначимой десятичастной системы ценностей, реализуемой при смене поколений и воспроизводстве структуры государства и общества.

Указаны ограничения математики и формально-аксиоматической методологии.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, учителей, аспирантов и студентов высших учебных заведений.

(154 с., 19 табл., 10 рис., библиография 241 наименов.)

УДК 51; 16
ББК 22.1

Печатается по решению редакционно-издательского совета Пермского
государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: канд. филос. наук, доцент кафедры философии Пермской ГСХА *К. В. Патырбаева*; канд. физ.-мат. наук, декан математического факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета *И. Н. Власова*; канд. физ.-мат. наук, декан экономического факультета Кемеровского государственного сельскохозяйственного университета *А. С. Ащеулова*.

ISBN 978-5-7944-2654-0

© Чечулин В. Л., 2015

Chechulin V. L. History of mathematics and its methodology (structures and restrictions): monograph; Perm State University (Russia). Perm, 2015. – 154 pages.

ISBN 978-5-7944-2654-0

In the monograph on the foundations of ontologic structure (consciousness, time, a matter) and all-gnoseological regularities of reflection of reality in consciousness of the person (six-level structure of reflection) the periodization of history of mathematics is described (on the line the number-equation-function-operator ...); periodization of development of ideas of causality; periodization of development of natural sciences (physics, mechanics, chemistry), as areas of the appendix of mathematics; steps of development of economy, a step of development of scientific methodology were in addition described.

The periods of uniform development of sciences and transitions to qualitatively new level of abstraction of scientific knowledge were allocated. It was noted that non-predicative (self-reference) we don't reduce the highest level of development to abstractions of the lowest levels.

The substantial interrelation in development of sciences within one period was shown. It was specified that the sequence of studying of mathematical and other scientific concepts of an education system repeats the same levels of abstraction, as in the history of science. In the history of economy at the description of subperiods of its development the extremity of modern technological ways was proved (the fifth, modern — limit).

On wide actual material it was shown that development of science follows the general regularities of reflection of reality in consciousness of the person and corresponds to steps of comprehension of truth; need of ontologic completeness of scientific theories locates. It was emphasized that development of science and culture has an ultimate goal (the highest, sixth step) providing opportunities of realization of freedoms of the person in the form of the valid ten-private system of values realized at alternation of generations and reproduction of structure of the state and society.

Restrictions of mathematics and formal axiomatic methodology was specified.

The book is intended for researchers, lecturers, teachers, students and postgraduates. (154 p., 19 tab., 10 fig., bibliography 241 nom.)

Published by the decision of the Editorial Board of the Perm State University (Russia)

Reviewers: candidate of philosophical sciences, associate professor of philosophy Perm-skaya selskokhozyaysvennaya akademiya *K. V. Patyrbayeva*; candidate of physical and mathematical sciences, dean of mathematical faculty of Permsky state humanitarian and pedagogical university *I. N. Vlasova*; candidate of physical and mathematical sciences, dean of economics department Kemerovo State selskokhozyaysvenny university *A. S.A shcheulova*.

ISBN 978-5-7944-2654-0

© Chechulin V. L., 2015

Ключевые слова: отражение действительности в сознании человека; онтологическая структура действительности; гносеологическая структура отражения; уровни абстракции; уровни обобщения; система потребностей (ценностей); философия истории науки; история математики; история механики; история физики; история химии; история научной методологии; история развития экономики; конечность технологических укладов; периодизация истории науки; непредикативные (самоссылочные) структуры; классификация наук; онтологическая полнота научных теорий; структура научно-производственного цикла; ограничения математики.

Keywords: reflection of reality in the human mind; ontological structure of reality; epistemological structure of reflection; abstraction levels; levels of generalization; the system needs (values); the philosophy of history of science; history of mathematics; the history of mechanics, the history of physics; history of chemistry; the history of scientific methodology; the history of economic development; technological structures limb; periodization of the history of science; non-predicative (selfreference) structure; classification of the sciences; ontological completeness of scientific theories; the structure of research and production cycle; restrictions of mathematics.

Оглавление

Оглавление	4
Предисловие	6
Часть 1. Методологические основания	8
Глава 1. Онтологические и гносеологические основания	8
§1. Онтологические основания описания действительности	8
§2. Гносеологические основания описания действительности	9
§3. Пример иерархии уровней абстракции	10
Часть 2. История и периоды развития математики	12
Глава 2. Общая периодизация истории математики	12
§4. Гносеологические основания иерархии понятий	12
§5. Последовательность появления основных понятий	13
§6. Ступени последующего развития понятия функции	22
Глава 3. Периоды развития логики	24
§7. Этапы развития логики	24
§8. Дополнение: Иерархия логических структур	26
Глава 4. Периоды развития представлений о бесконечности	29
§9. Изменение представлений о бесконечности	29
Глава 5. Периоды развития понятия о числе и мере	33
§10. Периоды развития понятия о числе	33
§11. Периоды развития понятия о мере	43
Глава 6. Периодизация истории понятия предела	47
§12. Особенности периодизации понятия о пределе	47
§13. Периоды развития понятия о пределе	48
§14. Дополнение. Об онтологическом сопоставлении теорий	54
Глава 7. Уровни абстракции в математическом образовании	56
§15. Иерархия понятий в образовательном процессе	56
§16. Курс информатики и закономерности познания	56
Часть 3. История и периоды развития естественных наук	60
Глава 8. Изменение представлений о причинности	60
§17. Гносеологические уровни и развитие понимания причинности	60
§18. Этапы развития понимания причинности	61
§19. Иерархия понимания причинности	65
Глава 9. Периодизация истории физики	66
§20. Гносеологическая структура и развитие физических понятий	66
§21. Периоды развития физических представлений	67
§22. О самоописательности ("наблюдатель" как информация)	74
§23. Схема периодов развития понятий физики и в образовании	75
Глава 10. Схема периодов развития механики	78
§24. Онтологические основания	78
§25. Гносеологические основания	78
§26. Периоды развития механики	79
§27. Основания механики и трёхмерность пространства	87
§28. Усвоение механических понятий с возрастом	88
Глава 11. Периодизация истории химии	89
§29. Общегносеологическая структура и развитие химии	89

§30. Периоды развития химии.....	91
§31. Схема периодов развития представлений о химии	94
Часть 4. Подпериоды 5-го периода развития математики	96
Глава 12. Периодизация истории методов оптимизации	96
§32. Схема подпериодов истории методов оптимизации	96
§33. Ограничения методов оптимизации	98
Глава 13. Подпериоды развития теории вероятностей.....	100
§34. Схема подпериодов развития теории вероятностей.....	100
Глава 14. Подпериоды усложнения формальных систем.....	102
§35. Схема усложнения формальных систем.....	102
Часть 5. Дополнения	103
Глава 15. Периоды и структура развития экономики.....	103
§36. Бывшая периодизация истории экономики.....	103
§37. Вертикальная структура экономических субъектов	104
§38. Периодизация истории экономики (вложенные структуры).....	105
§39. Конечность технологических укладов.....	106
Часть 1. (Окончание).....	108
Глава 16. История методологии науки	108
§40. Схема изменения представлений о научном методе.....	108
§41. Онтологическая полнота теорий	111
Глава 17. Классификация наук.....	116
§42. Онтологическая схема классификации наук.....	116
§43. Классификация естественных наук по предметной области.....	118
§44. Место науки в системе потребностей (ценностей).....	118
§45. Место математики в онтологии и её инструментальность	118
§46. Ограничения математики.....	123
Глава 18. Обобщающие таблицы	125
§47. Одинаковость исторического развития	125
§48. Сопоставление с наличными структурами.....	132
Заключение	134
Послесловие	135
Список литературы.....	137
Обозначения	151
Указатель имён.....	152
Предметный указатель	153

Предисловие

Книга представляет собой расширенное в области истории и методологии математики переиздание части книги автора "История математики, науки и культуры" (2013) [214], исправлены замеченные неточности и опечатки.

При написании книги учтён опыт чтения автором лекций по предмету "История и методология прикладной математики" студентам направления "Прикладная математика и информатика".

Главы, относящиеся к истории иных, чем математика, наук в этом издании представлены только в виде обобщающих таблиц (полный текст — в упомянутом выше издании).

В книге описана периодизация истории математики и её методологии с выявлением основных гносеологических структур, а также ограничения математики, проявляющиеся в её приложениях.

Автор выражает благодарность за содействие в появлении книги О. Л. Чечулину; автор также благодарит за предварительный просмотр материалов и рукописи отдельных частей книги Л. П. Чечулина; автор благодарит и Б. Г. Стафейчука за обсуждение особенностей развития теории автоматического управления; отдельная благодарность советской средней школе¹; также АН СССР, в достаточной полноте издавшей за время существования советской власти работы классиков науки на русском языке; кроме того, автор выражает благодарность С. В. Русакову и А. Б. Бячкову за предоставление возможности чтения курса "История и методология прикладной математики" в 2014/2015 учебном году.

Главы, относящиеся к истории математики, написаны так, что допускают независимое друг от друга прочтение.

Главы по истории естественных наук (механики, физики, химии) оставлены как область приложения математического знания в материальной практике.

Поскольку общая структура отражения действительности в сознании человека созерцаема непосредственно, т. е. не выводима предикативно из множества внешних эмпирических фактов, упомянутых в книге, и тем более не является обобщением множества этих фактов, но, с другой стороны, эти эмпирические факты являются конкретизирующим выражением проявлений этой внутренней структуры отражения. Читателю рекомендуется, кроме внутреннего созерцания (самопознания и

¹ Давшей достаточно полные базовые знания по предметам: русский язык, литература, история, обществознание, математика, физика, астрономия, химия, биология, география (в т. ч. экономическая география), черчение, музыка, изобразительное искусство, иностранный язык.

отражения действительности), прочесть книгу дважды, дабы сопоставить факты, соответствующие уровням отражения, со структурой отражений действительности в сознании человека (которая схематично описана в первой части книги).

Ещё раз подчёркивается, что важно не последовательное изложение отдельных линий истории, а затем их синтез посредством единой схемы структуры сознания (отражения) ввиду того, что означенная структура уровней отражения действительности не содержится в историческом развитии, а находится "над" ним, но важен, наоборот, анализ последовательных линий истории науки на основе единой схемы отражения (уровней обобщения), не следующей из обобщения исторических фактов, а созерцаемой непосредственно, позволяющей эти исторические факты упорядочить единым образом для множества наук (математики, физики, механики, химии, медицины и т. п.). С другой стороны, эта структура отражения не может быть оторвана от её конкретного содержания, ибо реализуема всегда на конкретном содержании, поэтому не может быть рассматриваема отдельно, оторванно от конкретного содержания.

Часть 1. Методологические основания

Глава 1. Онтологические и гносеологические основания

В этой главе описаны методологические основания анализа исторического развития математики и других наук, связанные с особенностями познания действительности, содержащей как самого человека, так и само описание действительности.

§1. Онтологические основания описания действительности

Онтологические основания описания действительности достаточно очевидны (см. рис. 1) и связаны с онтологией действительности, содержащей следующие качественно различные уровни: а) сознание, б) время, в) материю.² При этом постижение истины идёт от непосредственного созерцания (в сознании), к логическим рассуждениям (во времени), и к практике (материально реализуемой) (см. [117]).



Рис. 1. Онтологическая иерархия

Описание же действительности (см. рис. 1), во всей её полноте, описывает не только внешнюю по отношению к человеку действительность, но и самого человека (находящегося в действительности), и само описание действительности, находящееся в сознании человека; т. е. описание действительности является отчасти самоописательным (наука описывает в том числе и свою внутреннюю структуру).³

Процесс отражения действительности в сознании начинается с отражения внешнего мира (материальных закономерностей), затем отражения свойств самого субъекта (его проявлений во времени), и затем

² Здесь говорится о имеющихся и вне сознания человека материи и времени. В некоторых физических моделях пространство-время рассматривается как единая совокупность, но это только в модели, находящейся внутри сознания человека, а не в физической реальности. Физическая реальность и описывающие её модели — это разные вещи (одно дело падающее яблоко, а другое — запись закона, обобщающего это свойство падающих тел). Более того, физическое пространство, не наполненное материей, не существует, не наблюдаемо, а материя оформлена в пространственной форме.

³ Применительно к частным наукам онтологические основания их построения описывались в [178], [207] (математика), [191], [204] (экономика), [198] (промышленные информационные системы).

свойств описания, связанных с самоописательными свойствами самого субъекта. Подробное развёртывание этой схемы отражения даёт гносеологическую структуру отражения действительности в сознании человека. Схематично эта структура изображена на рис. 2.

При отражении окружающей действительности инструмент её описания (в том числе математический) необходимо наследует структурные особенности самого сознания⁴. То есть при отражении окружающего мира в сознании результат отражения учитывает структурные особенности человеческого сознания.

С другой стороны, деятельность человека конструируется (упорядочивается) по образу, находящемуся внутри человеческого сознания, и поэтому тоже отражает во вне структурные особенности сознания человека. Имеется онтологически обусловленная иерархия видов деятельности:

- i. — материально-вещественная деятельность,
- ii. — процессная деятельность,
- iii. — социально-структурная деятельность —

эти виды деятельности соответствуют разным уровням деятельности⁵ на разных уровнях вертикальной структуры экономических субъектов.

§2. Гносеологические основания описания действительности

Гносеологические основания описания действительности связаны со структурой отражений действительности в сознании человека; схематичное изображение этой структуры приведено на рис. 2. Отражение действительности в сознании требует удвоения образа действительности. Как было показано в [207, с. 96], процесс отражения действительности, требующий удвоения образа действительности, — неалгоритмируем, что ещё раз показывает необходимость неотделимого и неотъемлемого присутствия самого человека для познания действительности.

Гносеологическая структура отражения: а) созерцаема непосредственно в её проявлениях (см. §3) или б) формально в виде схемы (рис. 2) получаема из онтологической структуры (рис. 1). Для изображения процесса отражения требуется удвоить образ действительности в сознании человека. Тогда сознание отражает действительность в сознание субъекта (первая верхняя стрелка) и само сознание, взаимодействующее с действительностью, — в описание действительности (вторая сверху стрелка), — это конкретизация онтологической схемы (рис. 1).

⁴ Как это связано с иерархией математических понятий рассмотрено отдельно в [183], [184], [178].

⁵ В терминологии классической советской философии эти виды деятельности соответствуют типам труда: i. — простой труд, ii. — абстрактный труд, iii. — всеобщий труд.

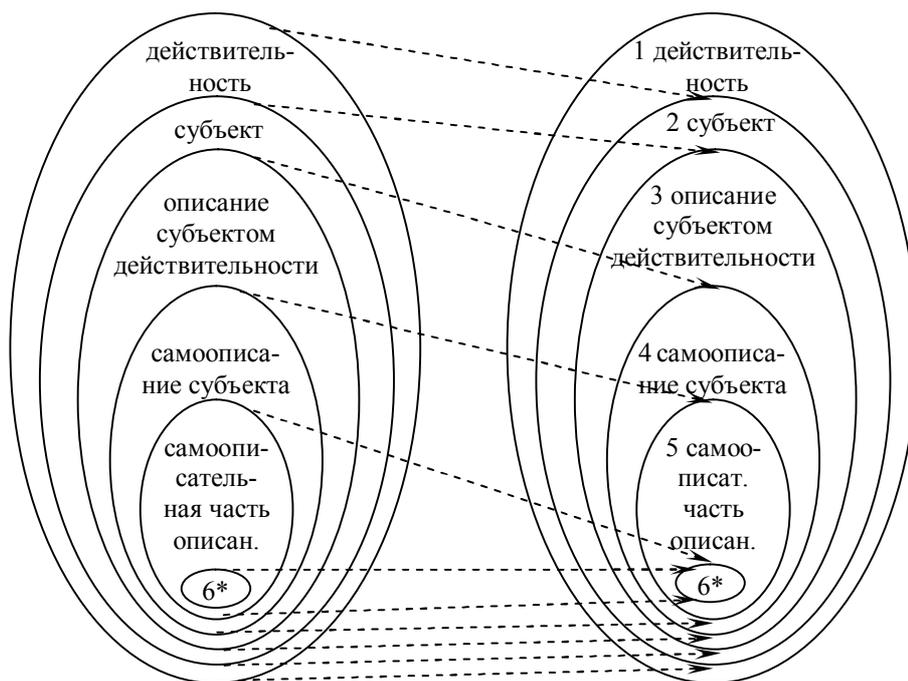


Рис. 2. Схема отражения мира в самосознании.

* Самоописание субъекта в самоописательной части описания

Тем самым в образе действительности имеется субъект и описание действительности субъектом. Обозначения субъекта и описания действительности, имеющиеся в правой части схемы, переносятся в левую ввиду тождественности правой и левой частей, затем получается, что действительность, отражаемая субъектом (правая часть рисунка) отражает и действительность с имеющимся в ней субъектом и описанием действительности (левая часть), откуда возникает самоописание субъекта и самоописательная часть описания действительности (вторые две стрелки, 3-4-я сверху). Полученные правые части копируются в левую, и процесс построения отражения продолжается, получая отражающееся само в себя самоописание субъекта в самоописательной части описания (5–6 стрелки сверху). Действительный процесс отражения от формальной схемы отличается тем, что переход от уровня отражения к следующему происходит последовательно, от уровня к уровню. (Проверяется это непосредственным созерцанием такой структуры в самом сознании человека). С каждым уровнем отражения связан определённый уровень абстракции (обобщения),— это показано на конкретном примере в §3.

§3. Пример иерархии уровней абстракции

Поскольку уровни абстракции имеют конкретное содержание, то забегая вперёд, приведён пример уровней абстракции в истории матема-

тики.

1. Первый уровень абстракции — это обобщение сходных чувственных восприятий в наименование (предметов и их свойств). Свойство одинакового количества предметов в некоторых "кучках" именовалось конкретным числом (два — это, например "глаза", пять — "рука"⁶ и т. п., для маленьких детей (ок. 2 лет) их возраст — это определённое количество отогнутых пальцев, как научили их взрослые, — это тоже конкретное число).

2. Второй уровень абстракции — это обобщение множества абстракций первого уровня. Пример: понятие числа вообще, как множества единиц (Евклид), и арифметических операций над числами.

3. Третий уровень абстракции — это обобщение множества абстракций второго уровня. Пример: с появлением понятия переменной обобщение множества чисел и операций над ними даёт понятие уравнения.

4. Четвёртый уровень абстракции — это обобщение множества абстракций третьего уровня. Пример: обобщение множества решений уравнения, зависящего от параметра, даёт понятие функции (зависимости решения от параметра).

5. Пятый уровень абстракции — это обобщение абстракций четвёртого уровня. Пример: обобщение понятия функции в понятие функционала (оператора), как действующего на множество функций (функциональное пространство); также обобщение понятия функции, в виде обобщённого понятия функции, как отображения вообще (из множества в множество) даёт понятие формальной (аксиоматической) системы.

6. Шестой уровень абстракции — это обобщение абстракций пятого уровня. Пример: парадоксы и ограничения предикативных формальных (аксиоматических) систем, действующие на всё множество этих предикативных систем, обобщаются понятием непредикативности (самоприменимости), которое лежит вне них и позволяет разрешить эти парадоксы.

При рассмотрении истории науки вся эта шестиуровневая структура обобщения необходимо мыслится целиком и определяет место того или иного научного достижения в этой структуре. Для наук, иных чем математика, структура уровней обобщения такова же, как указано, только понятия соответствуют предметной области определённой науки. Далее методологические особенности разъясняются для исторических линий развития науки в начале соответствующих наукам глав.

⁶ Например, русское слово "пять" (5) родственно слову "пясть" ("кисть руки", содержащая пять пальцев), см. [147, т. 3, с. 423–424, 426].

Часть 2. История и периоды развития математики

Глава 2. Общая периодизация истории математики

В этой главе указаны гносеологические основания иерархии математических понятий. Последовательность 6 уровней математических понятий прослежена в истории математики, в процессе образования, в неперекладивной теории множеств, а также в логике,— гносеологические основания 6 уровней обобщённости понятий во всех этих случаях одинаковы.

§4. Гносеологические основания иерархии понятий

При обобщённом взгляде на историю математики, от древности до современности, замечаем последовательное поэтапное усложнение математических понятий, аналогичное таковому же их усложнению, происходящему при взрослении человека и изучении им математики от счёта на пальчиках до современного её (математики) состояния (см. §3). Вообще говоря, такое усложнение понятий наблюдается не только в истории математики, но и в истории других наук в связи с тем, что основания усложнения понятийной системы связаны с наличием определённых этапов, уровней самоосознания личности. С гносеолого-психологической стороны эта структура уровней самоосознания, обобщения подробно описана в работах [164], [173]. Ниже рассматривается историко-математический аспект общеисторического структурного усложнения научного знания при обобщённом взгляде на развитие науки, свойственном, скорее, не собственно математическому подходу к истории математики, но более философско-математическому взгляду.

Формирование системы понятий неотъемлемо связано с наличием определённой структуры отражения действительности в сознании, причём действительности, содержащей как сам отражающий субъект, так и само отражаемое описание действительности (см. рис. 1). Всего в процесс отражения выделяемы 6 последовательных стадий, которые совпадают с уровнями обобщения понятий (что в свою очередь соответствует определённым уровням самоосознания — психологическим возрастам личности)⁷. Не акцентируя внимания на деструктивных последствиях кризисов развития, ограничиваясь рассмотрением только нормативного развития, можно сказать, что самоосознание человека проходит 6 последовательных уровней обобщения, на эти же достигнутые в самоосоз-

⁷ Исторически эти этапы совпадают с периодами смены ведущих общественно-экономических формаций (вбирающих в себя соподчинённые и модернизованные предыдущие уровни организации).

нании уровни обобщения накладывається и понятийный аппарат описания внешнего мира.

Причём в формировании этой структуры уровней обобщения выделяются три последовательные стадии:

а) формирование нейрофизиологических когнитивных структур, обеспечивающее в дальнейшем физиологическую возможность познания и себя, и окружающего мира с формированием 6-уровневой нейронной структуры (см. [27]);

б) последовательное образование структур самоосознания с наличием также 6-ти уровней отражения действительности;

в) преобразование окружающего мира, направленное на упорядочение его явлений и процессов на пользу и обеспечение не ограничиваемого во времени продолжения существования человека,— появление и усложнение техники, устройств обработки информации, научного понятийного аппарата, описывающего и окружающий мир, также содержащего 6 уровней обобщённости, сложности, понятий. (Примеры 6-уровневых систем обработки информации см. в [172], [239]).

§5. Последовательность появления основных понятий

Основные периоды развития математики таковы:

1⁸. Первое понятие, появившееся в истории математики,— понятие конкретного числа на первом уровне, соответствующем обобщению совокупностей чувственно-воспринимаемых образов, когда обобщаемые образы предметов обладают свойством численности (как то: "глаза" — их обычно два, "рука" — имеет обычно пять пальцев и т. п.), и это побочное по отношению к именованию предметов свойство (численности) используется в дальнейшем для счёта других предметов.

Примеры конкретных чисел описаны в [63]: "Первым шагом к возникновению счёта было установление, как мы сейчас говорим, "взаимно однозначного соответствия" между считаемыми предметами и некоторым другим <естественным> множеством. <...> Пережиток этой системы мы встречаем в древней индийской словесной системе счисления, где единица называлась Луной..., два — близнецами, пять — чувствами... и т. д." [63, с. 9]. Это этап счёта при помощи "конкретных" чисел. Представления об арифметических операциях как таковых в древности не было, употреблялся конкретный пересчёт сложенных кучек предметов для вычисления суммы и т. п.

Записи чисел, как и отвлечённого понятия об арифметической операции, на этой стадии ещё не существует, все действия выполняются непосредственным пересчётом предметов, сложенных в кучу или рас-

⁸ Здесь и далее номер обозначает номер периода развития науки.

пределённых по кучкам. Следы таких пересчётов в виде арифметики пересчётов имеются и в древнеегипетской математике.

Древнеегипетская математика также не знала абстрактного определения понятия числа и арифметической операции, она оперировала теми же конкретными пересчётами: "...все действия в египетской математике по существу сводятся к сложению" [106, с. 84].⁹

2. С появлением письменности понятие конкретного числа облекается в более абстрактную форму, появляется уже отвлечённое определение понятия числа; так, у пифагорейцев (VII в. до н. э.) число представлялось состоящим из отдельных единиц (как совокупность сложенных палочек, камешков, и подобных внешних по отношению к человеку предметов для счёта).

Такое же определение числа встречается и у Евклида (II в. до н. э.) ("Начала", кн. 7, Определения):

"1. Единица есть <то>, через что каждое из существующих считается единым.

2. Число же — множество, составленное из единиц" [56, т. 2, с.9-10].

У Евклида имеется и абстрактное определение понятия арифметической операции (сложения, умножения и т. п.) ("Начала"):

"Говорят, что число умножает число, когда столько в нём единиц, сколько раз составляется умножаемое и что-то возникает" [56, т. 2, с. 10]; а также указано на свойства этих операций (дистрибутивность, коммутативность) (там же, кн. 7): "Если два числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающие будут равны между собой. Пусть будет два числа А, В, и пусть А, умножая В, производит С; В же, умножая А, производит D; я утверждаю, что С равно D <далее следует доказательство этого утверждения>" [56, т. 2, с. 23–24].

Таким образом, на второй стадии развития математики появляется абстрактное понятие числа (обобщающее до степени произвольности операций с числом множество конкретных чисел¹⁰) и абстрактное опре-

⁹ Пример умножения 43 на 5 по-древнеегипетски:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 43 \\ 2 \quad 86 \\ 4 \quad 172 \\ \hline 5 \quad 215 \end{array}$$

Выписываются в столбец удвоения числа 43, затем — сумма удвоений (подчёркнуты), равных в левом столбце множителю 5, даёт результат умножения [106].

¹⁰ У Архимеда (III в. до н. э.) имеется работа "Об исчислении песчинок" [11], в которой он пытается построить наиболее возможное в доступной ему системе записи чисел число и показать, что его достаточно для исчисления всех песчинок в мире.

деление арифметической операции (обобщающее до степени произвольности множество конкретных пересчётов чисел).

Хотя в древности и в античности и решали задачи, сводящиеся к уравнениям (в том числе и частные случаи квадратных уравнений), но абстрактного определения понятия уравнения (вида "уравнение — это...") в эти периоды (1, 2) ещё не существовало.

3. Следом (в 3-м периоде развития) возникло понятие переменной, неизвестной величины, появившееся как обобщение множества однотипных задач на нахождение некоторого численного решения и связанное с ним понятие уравнения.

У Диофанта (II в. н. э.) определение уравнения таково [53, с. 37-38] (Арифметика, кн. 1): "(I) Все числа, как ты знаешь, состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжают, увеличиваясь до бесконечности. Так вот среди них находятся:

квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа самого на себя; это же число называется стороной квадрата; затем кубы, получающиеся от умножения квадратов на их сторону; далее квадрато-квадраты <...>; далее квадрато-кубы <...>; далее кубо-кубы <...>.

Из них при помощи сложения, вычитания, умножения или нахождения отношения между собой или каждого с собственной стороной составляются многочисленные арифметические задачи; решение же их получается, если ты пойдёшь путём, который будет указан дальше.

(II) <... Далее вводятся обозначения для степеней и обозначение неизвестной величины>. Не получившее никакого из этих названий <степеней>, но состоящее из неопределённого количества единиц, называется числом ($\alpha\rho\theta\mu\omicron\varsigma$) и его знаком будет ζ ."

У Диофанта уравнение — это некоторая сумма различных степеней неизвестной.

С упадком Римской империи наука преемственно развивалась в арабских странах. У Омара Хайяма (X в.) и у ал-Каши (XV в. н. э.) определение уравнения (при большей сложности решаемых уравнений) практически совпадает с таковым же определением у Диофанта ("Трактат о доказательствах задач алгебры и алмукабалы") [154, с. 70-71]:

"Я утверждаю, что искусство алгебры и алмукабалы есть научное искусство, предмет которого составляют абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесённые к какой-нибудь известной вещи, по которой их можно определить. Эта вещь есть количество или отношение, не связанное ни с чем другим. В это ты должен глубоко вникнуть. Цель этого искусства состоит в нахождении

соотношений, связывающих его предмет с указанными данными. Совершенство этого искусства состоит в знании методов изучения, посредством которых можно постигнуть способ определения упомянутых неизвестных как числовых, так и геометрических".

Если у Диофанта понятие неизвестной вводится после определения числа (из единиц) и уравнения, то у ал-Каши первым понятием становится неизвестная ("Ключ арифметики", Введение): "Арифметика — это наука о правилах нахождения числовых неизвестных величин с помощью соответствующих им известных. Предмет арифметики есть число, т. е. то, что происходит при счёте и охватывает как единицу, так и то, что состоит из единиц" [69, с. 13]. ("Ключ арифметики", кн. 5): "Наука алгебры и алмукабалы — это наука о правилах, по которым узнают многие числовые неизвестные по соответствующим им известным. Эти известные бывают известны или сами по себе, как числа, или условию, как корень чего-то, основание чего-то, отношение чего-то к чему-то и другое из понятий арифметики и геометрии, что видно из того, что говорит спрашивающий.

Неизвестное следует называть вещью, динаром, дирхемом, долей, частью и так далее. Обычно в большинстве случаев мы называем неизвестное вещью, если же <не>известное, называемое вещью, умножается на себя, произведение называется квадратом и вещь здесь является корнем; на квадрат — куб, на куб — квадрато-квадрат, и так далее, как мы <ал-Каши> говорили в пятой главе первой книги. Эти степени являются степенями неизвестного и являются неизвестными родами, потому что их основание есть неизвестная вещь.

Если спрашивают: неизвестная принята за вещь, а квадрат, построенный на неизвестной, за квадрат и с ним сделано то, что ясно того, что говорит спрашивающий, тогда с помощью того, что требуется арифметикой для определения этой величины, это приводится к условию, называемому уравнением" [69, с. 179–180].

("Ключ арифметики", кн. 5): "Если действие приводит к уравнению, то необходимо один род или больше равны одному роду или больше. Так как роды бесконечны, задачи тоже бесконечны, бесконечны и виды задач, а в каждом виде тоже бесконечное количество задач, как например, один род равен другому или двум родам, или трём, или четырём и так до бесконечности, или два рода, или три, или четыре и так до бесконечности равны двум родам или трём родам, или четырём и так до бесконечности" [69, с. 191].

Операции с упорядоченными табличными величинами близко подводят к понятию функции, но её абстрактного определения на этом

этапе развития науки ещё не существует¹¹.

4. Понятие о функции возникло первоначально при изучении свойств внешних по отношению к человеку явлений, изучения свойств движения материальных тел. Так, уже у Галилея (XVI в.) имеется предварительное понятие о функциональной зависимости, привязанное, однако, к изучаемому им фрагменту физической реальности: "При наличии же такого влечения <притяжения> тело необходимо движется с непрерывным ускорением, начиная с самого медленного движения, оно достигнет некоторой степени скорости не раньше, чем пройдя все степени меньших скоростей..." [34, с. 117]. "Прежде всего следует принять во внимание, что движение падающих тел является не равномерным, а, после выхода тел из состояния покоя, непрерывно ускоряющимся — явление, известное всем наблюдателям. <...> Пространства, пройденные движущимся телом, вышедшим из состояния покоя, находятся друг к другу в отношении времён, в течение которых пройдены эти пространства, или, иначе говоря, что пройденные пространства относятся друг к другу как квадраты времени" [34, с. 117].

Функциональная зависимость пути падающего тела от времени сформулирована при наличии неявного предположения о двух взаимосвязанно изменяющихся величинах (меры пути и меры времени)¹², также в [35, с. 249 (Теорема 2)].

Понятие же функции обобщает множество решений уравнения при введении в уравнение изменяемого параметра (переменной, аргумента функции).

У Декарта (XVII в.) и Ферма (XVII в.) определение функции (как взаимозависимости двух величин) уже абстрактно: (Декарт. Геометрия, кн. 1):

"Итак, желая решить какую-нибудь задачу, следует сперва её рассматривать как уже решённую и дать названия всем линиям, которые представляются необходимыми для её построения, притом неизвестным так же, как и известным. Затем, не проводя никакого различия между

¹¹ См. работу Махмуда ибн Мухаммеда Мариам Челеби (ум. в 1525 г.) "Правила действия и исправления таблиц" с изложением интерполяционных приёмов при обработке табличных значений [155].

В западноевропейской научной школе попытка Орема (XIV в.) описать изменения свойств вещей в трактате "О конфигурации качеств" [112] заканчивается описанием лишь качественно наглядных, геометрических изменений, без их привязки к реальности и количественному измерению интенсивности свойств,— не содержит абстрактного, пригодного к решению практических задач определения функции.

¹² "Синтез кинематической и математической мысли имел во всём этом решающее значение" [235, с. 182].

этими известными и неизвестными линиями, нужно обозреть трудность, следуя тому порядку, который показывает наиболее естественным образом, как они взаимно зависят друг от друга, до тех пор, пока не будет найдено средство выразить одну и ту же величину двояким образом: это то, что называется уравнением, ибо члены, полученные одним из этих двух способов, равны членам, полученным другим" [49, с. 14].

В этом определении функции истолковывается параметризация уравнения, как связывающего две изменяющиеся величины.

У Ферма определение аналогично ("Введение в изучение плоских и телесных мест"): "Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию. Существует только одна-единственная и простая прямая линия; наоборот, кривых бесконечно много: круг, парабола, гипербола, эллипс и т. д. <...> Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин" [148, с. 137-138].

На этом же этапе возникают понятия об операциях над функциями: дифференцирование, интегрирование, в работах Декарта и Ферма, ("Из письма Декарта Дебону 20 февраля 1639 г." [49, с. 192–193]:

"...Вы определяете пространство, заключённое линией, которая ещё не дана. Я <Декарт> не думаю, что можно было бы найти общим образом правило, обратное моему правилу для касательных, или же тому правилу, которым пользуется господин де-Ферма, хотя в некоторых случаях его легче применить, чем моё. Но отсюда можно вывести a posteriori теоремы, распространяющиеся на все кривые, заданные уравнением, в котором одна из величин x или y не превосходит двух измерений, хотя бы другая имела их тысячу. И в поисках вашей второй кривой я <Декарт> нашёл их почти все, но так как я <Декарт> записал их лишь в черновых набросках, которые не сохранил, то послать их Вам не могу. Впрочем, имеется другой способ, более общий и a priori..."

Упоминаются у Декарта работы Ферма ("Метод отыскания наибольших и наименьших значений") [149, с. 154]: "Всё учение о нахождении наибольших и наименьших значений основывается на том, что принимают две буквенные неизвестные (position at notis) и применяют следующее единственное правило... <далее описано нахождение экстремума функции>".

Ферма ("О касательных к кривым линиям"): "Отыскание касательных в данных точках каких-либо кривых мы приводим к вышеизложенному методу" [150, с. 155]. "Этот метод никогда не изменяет. Напротив, он может быть распространён на многочисленные прекрасные

вопросы. Действительно, с его помощью мы определили центры тяжести фигур, ограниченных кривыми линиями и прямыми, и центры тяжести тел и многое другое, о чём я <Ферма>, может быть, расскажу, если у меня будет досуг. <...> Что касается квадратуры площадей, заключённых кривыми и прямыми линиями, а также отношения порождаемых ими тел к конусам с теми же высотой и основанием, то это я <Ферма> уже подробно обсуждал с господином де-Робервалем" [150, с. 157].

У Ньютона (1643–1727) нахождение производной от функции сводилось к решению некоторого уравнения с функциями при отбрасывании бесконечно малых величин [136]¹³. Впоследствии аппарат дифференциального и интегрального исчисления совершенствуется, появляется понятие дифференциального уравнения, решением которого (при его интегрировании) является некоторая функция. Такой математический аппарат позволяет решать широкий класс прикладных задач механики (см. пример в [83]), однако абстрактно свойства решений дифференциальных уравнений (при их параметризации) на 4-м этапе ещё не исследуются, — эти исследования начинаются на следующем этапе, при появлении понятия пространства решений, обобщающего некоторое параметризованное множество дифференциальных уравнений и их решений (см. §6).

Понятия функции и операции над функциями относятся к одному уровню обобщения, так же как абстрактное понятие о числе (как множестве единиц) и первоначальное понятие арифметической операции на 2-м этапе развития математики.

¹³ Ньютон ("Метода флюксий", 1736 г.): "Переменные, являющиеся флюэнтами, обозначены через v, x, y, z , а скорости, с которыми каждая флюэнта увеличивается в силу порождающего движения (которые я <Ньютон> могу назвать флюксиями или попросту скоростями или быстростями), я <Ньютон> буду изображать теми же буквами с точкой, а именно v^*, x^*, y^*, z^* ." Бесконечно малые у Ньютона именуется «моментами флюксий» и обозначаются через v^*o, x^*o, y^*o, z^*o , где o — «бесконечно малое количество». Ньютон продолжает: "Итак, пусть дано уравнение $x^3 - ax^2 + axu - y = 0$, подставим $x+x^*o$ вместо x , $y+y^*o$ вместо y , тогда мы получим $x^3 + 3x^2x^*o + 3xx^*ox^*o + x^{*3}o^3 - ax^2 - 2axx^*o - ax^*ox^*o + axu + aux^*o + ax^*ou^*o + aux^*o - y^3 - 3y^2y^*o - 3yy^*ou^*o - y^{*3}o^3 = 0$.

Но согласно допущению $x^3 - ax^2 + axu - y^3 = 0$, и, после исключения этого уравнения и деления остающихся членов на o , у нас <Ньютона> останется $3x^2x^* - 2axx^* + aux^* + aux^* - 3y^2y^* + 3xx^*o - ax^*x^*o + ax^*y^*o - 3yy^*y^*o + x^{*3}oo - y^{*3}oo = 0$.

Но поскольку нуль мы <Ньютон> считаем бесконечно малым < o стремится к 0 >, так что он может представлять моменты количеств, то члены, которые умножены на него, суть ничто по сравнению с остальными; поэтому я <Ньютон> отбрасываю их, и у нас <Ньютона> остается $3x^2x^* - 2axx^* + aux^* + aux^* - 3y^2y^* = 0$ " (цит. по [136, с. 149]). Откуда при знании отношения между y и x определяемо соотношение между y^* и x^* (производная).

На этом этапе определение функции привязано к изменению значений переменных, по аналогии с первоначальным изменением переменной как изменение её координаты при движении во времени.¹⁴

Абстрактное определение функции как отображения (одного множества на другое, без использования связанного с представлением о времени понятия изменения переменной величины) наблюдается на следующем этапе; такое определение функции есть уже в работах Лобачевского (1-я пол. XIX в.) [88] и других математиков этого же века.

5. Совместно с появлением абстрактного определения функции возникает и определение абстрактной последовательности операций — алгоритма. Одной из первых формальное понятие об алгоритме и об исполнителе алгоритма сформулировала А. Лавлейс¹⁵ (1-я пол. XIX в.). "По определению Лавлейс, аналитическая машина представляет собой воплощение науки об операциях и сконструирована специально для выполнения действий над абстрактными числами как объектами этих операций" [6, с. 199].

Определение Лавлейс использует абстрактное представление об отображении-операции; она писала ("Примечания переводчика"): "Под словом операция мы понимаем любой процесс, который изменяет отношение двух или более вещей, какого рода эти отношения ни были бы. Это наиболее общее определение, охватывающее все предметы во вселенной..." [6, с. 199].

Это представление аналогично далее используемому определению бинарной (n-арной) операции, или определению вывода в формальной системе.

Исследования оснований геометрии, возобновлённые при анализе

¹⁴ Например, у Эйлера (сер. XVIII в.) определение функции строится так ("Введение в анализ бесконечно малых", 1748 г.): "1. *Постоянное количество есть количество определённое, сохраняющее одно и то же значение.* Такими количествами являются всякого рода числа, ... если нужно постоянные количества этого рода обозначать знаками, то для этого употребляются начальные буквы алфавита a, b, c и т. д. ... 2. *Переменное количество есть количество неопределённое или всеобщее, которое содержит в себе всевозможные определённые значения...* Такие переменные количества обозначаются обычно последними буквами алфавита z, y, x и т. д. 3. *Переменное количество становится определённым, когда ему даётся какое-либо определённое значение...* 4. *Функция переменного количества есть аналитическое $\langle ! \rangle$ выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств...* Так, $a + 3z$; $az - 4z^2$... , и т. д. будут функциями z" [231, с. 29–30].

Здесь у Эйлера, в отличие от понимания функции в XIX веке, ещё только аналитическое представление о функции (в виде формулы).

¹⁵ Дочь поэта Байрона.

систем аксиом, подтолкнули к формулировке понятия системы аксиом, а затем и формальной системы. Дискретная математика развивалась на этом этапе большей частью в рамках аксиоматизации и получении следствий из аксиом. Теоремы о свойствах формальных систем, носящих ограничительный характер, появились позже — это теоремы Гёделя о неполноте (1930-е гг.), теорема Тарского о неопределимости понятия истины средствами формальной системы (1950-е гг.). Однако эти ограничения касались в основном предикативных формальных систем¹⁶.

Рядом с этими ограничениями стоят теоремы об алгоритмической неразрешимости некоторых проблем, например теорема о неразрешимости проблемы тождества слов в полугруппах с двумя и более образующими соотношениями (Мальцев, 1940-е гг.; Адян, 1960-е гг.), интерпретируемая как невозможность построить для управления некоторой системой по начальным и граничным условиям конечный автомат¹⁷.

В теории категорий (1950-е гг.), которую прочили на роль новых (вместо теории множеств) оснований математики, также действовали ограничения предикативности (несамоссылочности) — невозможно было построить категорию всех категорий.

Оттачивание тонкостей предикативного формализма, с одной стороны, дало теорию вычислимых функций (лямбда-исчисление, которое стало основой семантики языков программирования высокого уровня и получило широкие приложения); с другой стороны, несколько отвлекло некоторые разделы математики от реальности, погружая их в область дополнительных гипотез и искусственных предположений.

6. Однако непредикативность, самоприменимость, деятельности человека вынуждала искать формализованное выражение этого свойства действительности. Ещё в начале XX в. А. Пуанкаре в "Геттингенских лекциях" (доклад 5-й "О трансфинитных числах") отмечал, что "Цермело высказал возражение против отказа от непредикативных определений, ссылаясь на то, что в таком случае пришлось бы отказаться от большей части математики, например, от доказательства существования корня алгебраического уравнения. <...> Я <Пуанкаре> могу говорить на эту тему ещё несколько часов, но не в силах решить проблему" [121, с. 192–193] (см. тж. [186]).

Одной из первых формализаций непредикативных структур было введение русским математиком Д. Миримановым самопринадлежащих множеств (в 1-й четв. XX в.); впоследствии эта теория, получившая приложения для описания и непредикативных явлений реальности, раз-

¹⁶ О различии предикативных и непредикативных формальных систем см. [169].

¹⁷ Конечный автомат вкладывается в некоторую полугруппу.

вита в работах советско-российской математической школы, типичные области приложения этих результатов — математическая экономика (содержащая и самого управляющего субъекта) и теория управления. Ограничительные результаты предыдущего уровня (теоремы Гёделя и проч.) при использовании в доказательствах непредикативных рассуждений получаются гораздо более коротким путём.

Шестой уровень в гносеологической схеме отражения соответствует непредикативным конструкциям.

Таким образом, наиболее общая схема этапов появления новых, не сводимых к предыдущим математических понятий, прослежена, см. табл. 1; некоторые ответвления от этой схемы описаны ниже.

Таблица 1. Этапы появления математических понятий

№ уровня	Новообразованный в истории объект математических представлений	Исторический период
1	"Конкретное число", пересчёт	Древность
2	Число как "куча" единиц, арифметическая операция, потенциальная бесконечность	Античность, с VII в. до н. э.
3	Уравнение, неизвестная (переменная) величина, актуальная бесконечность	Средние века, с I в. н. э.
4	Функция, операции над функциями (интегрирование, дифференцирование), дифуравнения, отношение уровней бесконечности	Новое время, с XVI в. н. э.
5	Алгоритм, формальная система, функциональное пространство, функционал, абстракция ряда "алефов", недостижимые кардиналы, оператор, вероятностные меры	Новейшее время с нач. XIX в.
6	Непредикативные конструкции, множество всех множеств (кон. XX в.)	С кон. XX в.

§6. Ступени последующего развития понятия функции

5ф¹⁸. Как уже было сказано, на 5-м этапе появилось обобщённое понятие функции как отображения. Совместно с этим при исследовании свойств решений дифференциальных уравнений, как обобщение свойств этих уравнений, доказана теорема Коши О. (1789–1857) о существовании и единственности решения дифференциального уравнения

¹⁸ Номер с буквой "ф" обозначает период развития понятия функции.

(1830-е гг.), распространённая также и на системы дифференциальных уравнений [100, с. 84–88].

Дальнейшее изучение дифференциальных уравнений привело к изучению свойств пространств их решений: Брио Ш. и Буке Т. (в сер. XIX в.) отмечали, что "случаи, когда дифференциальное уравнение можно проинтегрировать, чрезвычайно редки, и их следует рассматривать как исключения; но можно рассматривать дифференциальное уравнение, как определяющее функцию и изучать свойства функции по этому уравнению" [100, с. 150].

Чуть позже, к концу XIX в., появилось понятие функционала (сопоставления функции некоторого числа), впоследствии приведшее к понятию нормы (в т. ч., позже, нормы оператора); тогда же возникло понятие функционального пространства.

6ф. Обобщение свойств преобразований функциональных пространств (отображений из одного функционального пространства в другое) дало понятие оператора. Понятие нормы оператора связано с понятием вероятностной меры¹⁹.

Невозможно дать определение вероятностной мере посредством какого-либо алгоритма, что именно принимается за то или иное событие, которому соответствует эта мера, определяется самим субъектом. Таким образом, в теории вероятностей и её приложениях неотъемлемо присутствуют непредикативные рассуждения.

Развитие математических понятий в линии число-уравнение-функция-оператор также достигает своего завершения.

¹⁹ В простой интерпретации этого на примере интегрального определения вероятностной меры эта связь такова. Пусть некоторая неотрицательная функция на интервале соответствует единице сигма-алгебры событий (её интеграл на этом интервале нормируется к единице, отнесённый сам к себе), остальные функции, соответствующие событиям, также неотрицательны, но во всякой точке меньше или равны первой, мажорирующей их функции; тогда мера вероятности события равна отношению интеграла функции, соответствующей событию к интегралу на этом же интервале мажорирующей функции, т. е. вероятность равна отношению норм этих функций. (В случае операторов и их норм рассуждения аналогичны, но гораздо более громоздки. В соотнесении мажорирующего отображения с единицей вероятностной меры легко усматривается непредикативность конструкции, нормируемой к единице относительно себя самой).

Глава 3. Периоды развития логики

В этой главе приведены периоды и новообразования основных логических структур в истории логики.

§7. Этапы развития логики

Логика в своём развитии проходит те же этапы, что и математика. Исторические сведения о развитии структуры логических понятий таковы, что в истории осознания логических понятий и операций по мере усложнения структуры научных понятий и развития представлений о логических понятиях и операциях, выделяются 6 стадий [196].

1л.²⁰ Первоначальное формирование понятий о чувственно-воспринимаемых образах, возникновение письменности (1 тыс. л. до н. э.) [20, т. 19, ст. "Письмо", с. 571–577].

2л. По обобщении понятий об отдельных предметах и образах наблюдается возникновение осознанного представления об элементах языка, формирование логики объёмов понятий (работы Аристотеля в этом плане первоначальны) (IV в. до н. э.).

В работе "О софистических опровержениях" Аристотель писал (Гл. 34, 183b34-36): "Что же касается настоящего учения, то дело обстоит не так, что частью оно уже было заранее разработано, а частью нет: в наличии не было ровно ничего". (Гл. 34, 184a9-184b3): "Что же касается учения об умозаклучениях, то мы <Аристотель> не нашли ничего такого, что было бы сказано до нас, а должны были сами создать его с большой затратой времени и сил" [9, т. 2].

3л. Возникновение логики суждений, осознание грамматических категорий. Если на предваряющей стадии основополагающим элементом рассуждения было отдельное понятие-слово, то на этом, 3-м этапе, анализу подвергается словосочетание или грамматическая категория (склонение, спряжение) как отношение, связующее отдельные слова или понятия (в логике — высказывание — силлогизм). Первоначальны в этом плане грамматические учения (III в. н. э.) неоплатоников [140]. В дальнейшем при развитии символизма, символьного обозначения (первоначальное обозначение понятия буквой у Диофанта (II в. н. э.)) и при возникновении формального понятия о подстановке понятий на место переменных в логическом выражении, формируется схоластическая логика — силлогистика, абстрактно оперирующая понятиями (до XV в.): "Большое занимает место в школе Пселла (IX в.) изучение подстановки

²⁰ Номер с буквой "л" обозначает период развития логики.

одних логических терминов на место других терминов, которая, по-видимому, вряд ли была возможна без ясного различия логических постоянных и логических переменных..." [137, с. 114].

На этом же этапе появляется и модальная логика. В трактате Ибн-Сины "Указания и наставления" в разделе "О содержании суждений и их модальности" (при введении третьего промежуточного значения в двузначную логику — модальность "возможности") рассматриваются модальные суждения, например: "Каждое С необходимо есть В"... "Возможно <E> есть <F>" и т. п. [61, с. 223–228].

4л. Примерно с XVI в., при обобщении формально-логических рассуждений и отвлечении от них, появляется стадия оперирования абстрактно-определимыми понятиями (например, сила, скорость и т. п.) и осознанное применение гипотетических рассуждений (Ф. Бэкон, Г. Галилей, XVI в.). Абстрактное определение понятия обобщает множество силлогизмов, включающихся в определение термина. Расширяются представления о модальной логике (Г. Гегель). Имеются первоначальные представления о многозначной логике (Г. В. Лейбниц)²¹. Фактически операции над частотами (вероятностями) в этот период были операциями в некоторой многозначной логике, где достоверности (модальности) изменялись от 0 до 1.²²

5л. Осознанное определение понятия об алгоритме возникает в перв. пол. XIX в.²³, с разницей от гипотетического мышления предыдущей стадии (не осознающего конечной цели построения гипотез и открытия законов), осознающего конечную цель логического построения, взаимосвязь множества отдельных законов, гипотез. С возникновением понятия об алгоритме связано появление отвлечённого понятия о формальной (аксиоматической) системе, теории. На этом же этапе осознаётся ограниченность формальных теорий, следующая из теорем Гёделя.

6л. При обобщении множества теорий в практике применения теоретического знания, осознании взаимосвязи физических, биологических и

²¹ "У Лейбница... была уже вероятностная логика (<в его работе> "Об оценке недостоверного"). В этой логике имелись: непрерывная шкала вероятностей, принцип индифферентности ("равно принимать в расчет равноценные гипотезы"...), определение вероятности как меры знания, а также начатки учения об операциях над вероятностями" [137, с. 227].

²² Это был этап "конкретных" вероятностей (4-й); впоследствии на 5-м этапе теория вероятностей была аксиоматизирована (А. Н. Колмогоров). Очерк истории теории вероятностей до её аксиоматизации см. в [96].

²³ Об определении алгоритма А. Лавлейс говорилось ранее, стр. 20.

социальных процессов, требующих анализа ценности и значимости конечных целей (отчасти процессы глобализации и экологизации) и окончательном оформлении вероятностного мышления (с сер. XX в.),— эта стадия развития логики научного знания наблюдается в современности (нач. XXI в.).

На этой стадии появляются непредикативные конструкции.

Таблица 2. Этапы появления логических понятий

№ уровня	Новообразованный в истории объект математических представлений	Исторический период
1	Письменность, именование предметов	Древность
2	Логика объёмов понятий	Античность, с VII в. до н. э.
3	Логика суждений, подстановки терминов, логические переменные	Средние века, с III в. н. э.
4	Формально-логические определения понятий	Новое время, с XVI в. н. э.
5	Алгоритм, формальная система	Новейшее время с нач. XIX в.
6	Непредикативные конструкции, множество всех множеств (кон. XX в.)	С кон. XX в.

§8. Дополнение: Иерархия логических структур

При рассмотрении исторической (возрастной) иерархии математических понятий уместно рассмотреть и иерархию наличных логических структур. Сводимость логических конструкций 5-го уровня и менее к низшим такова.

В работе [10] рассмотрено вложение λ -исчисления в модальную логику. Модальная логика вложима в трёхзначную логику. Пусть имеется трёхзначная логика L_3 с алфавитом $(0, 1, 2)$, заданная таблицами логических функций (см. табл. 3)²⁴. Тогда строится соответствие между L_3 и модальной логикой L_m следующим образом, 0 — 0, 1 — "возможно а", 2 — "необходимо а". И модальная логика вкладывается тем самым в трёхзначную логику L_3 .

В свою очередь многозначные логики вложимы в декартово произведение двухзначных логик. Так, трёхзначная логика L_3 вложима в декартово произведение трёх двухзначных логик:

²⁴ Такая логика используется при моделировании сигналов в цифровых схемах [70, с. 206–207] $L_3(0, *, 1)$, "0" и "1" — это логические 0 и 1, а "*" — состояние неопределённости между 0 и 1 (фронт изменения электрического сигнала в логической электронной схеме).

$$L_3(0, 1, 2) \subseteq L_2(0, 1) \times L_2(1, 2) \times L_2(0, 2).$$

Таблица 3. Таблицы для L_3 .
(а или b, а и b, не а)

или	0	1	2	и	0	1	2	не	
0	0	1	2	0	0	0	0	0	2
1	1	1	2	1	0	1	1	1	1
2	2	2	2	2	0	1	2	2	0

Двузначная же логика, кроме глобальной её модели посредством множества всех множеств, реализуема и на локальных моделях — на какой-либо непустой несамопринадлежащей области (см. пример на рис. 3). Это логика объёмов понятий (2-го уровня обобщённости), которая впервые описана Аристотелем.

Рассуждения логики объёмов понятий сводятся к рассуждению об именовании предметов. Пусть А — имя одной совокупности предметов, В — наименование второй совокупности, тогда для выяснения, обладают ли некоторые предметы одновременно свойствами А и В, требуется перебрать совокупности этих предметов, дабы выяснить, что пересечение несамопринадлежащих множеств А и В не пусто (см. рис. 3).

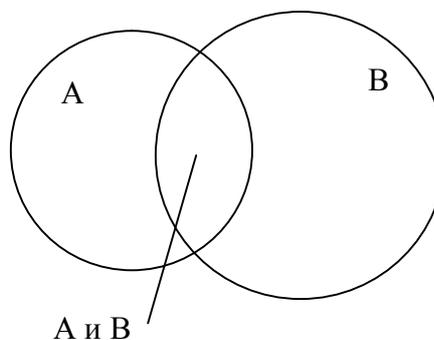


Рис. 3. Пример логики объёмов понятий на несамопринадлежащих множествах

В итоге имеется такая иерархия логик:

1. Именованье объектов.
2. Логика объёмов понятий.
3. Многозначная логика.
4. Модальная логика.
5. Лямбда-исчисление и алгоритмы.
6. Непредикативные конструкции.

Причём непредикативные конструкции невыразимы в логиках более низших (1–5) уровней. С другой стороны, лямбда-исчисление выразимо в терминах непредикативной теории множеств с самопринадлежностью, см. [207, с. 99 и след.], [206].

Формально при кодировании информации в ЭВМ в них выполняются фактически операции нижнего, 1-го, уровня логики. К этим операциям сводятся более сложные — логика объёмов понятий (сравнение совокупностей), многозначная, а затем и модальная логики, а также

λ -исчисление. Реализация же операций с собственно самопринадлежащими объектами неформализуема в ЭВМ.

Наличная иерархия логических структур также 6-уровневая ввиду того, что обусловлена общими гносеологическими закономерностями отражения действительности в сознании человека.

Этапы развития уровней обобщения, абстрактности, понятий, как в истории, так и при возрастном их формировании, аналогичны. Эта же структурная закономерность прослежена в наличной иерархии логических понятий (логик) и в самоописательной теории множеств [207]. Таким образом, гносеологические основания 6-ти уровневой отражения действительности имеют широкие проявления в процессе формирования иерархии абстрактных понятий и определяют количество (6) уровней обобщённости понятий.

В общем смысле в этом параграфе показано, что непредикативные (самоссылочные) структуры невыразимы в терминах предикативных структур, т. е. не появляются механически из них (реализуемых в материально-вещественном онтологическом уровне в ЭВМ), а располагаются на отдельном онтологическом уровне — среднем (ниже высшего онтологического уровня — сознания, и выше материально-вещественного уровня).

Глава 4. Периоды развития представлений о бесконечности

§9. Изменение представлений о бесконечности

Структуры, описанные в теории множеств с самопринадлежностью [163], описывают уже имевшиеся ранее представления о бесконечном (о числах), упорядоченные по историческим периодам усложнения научного знания. Совместно с рассмотрением исторических изменений представлений о бесконечности, приведено и усложнение этих бесконечных структур.

16.²⁵ Первичные единичные объекты чем-то схожи с "атомами", неделимыми объектами чувственного восприятия, описанными Демокритом (460–370 до н. э.) (см. [87, с. 468]). Атомы Демокрита — это объекты чувственного восприятия, обобщённые первичные образы восприятия, или, как указывал А. Ф. Лосев, "видики" [87]. Поэтому, по Демокриту, может быть "атом размером весь мир" [97], — образ восприятия всего мира. Парадокс "кучи" (неопределённо многого количества) остаётся ещё в области конечного.

26. Простые несамопринадлежащие множества мыслятся несколько позже. Евклидом (III в. до н. э.) число мыслится, как составленное из единиц²⁶ (без указания на их упорядоченность, как в нитях самопринадлежащих объектов), т. е. как простое, конечное, несамопринадлежащее множество. То же представление повторяется и позже (Прокл, *Inst. th.*): "§6. Всякое множество возникает или из объединённостей ($\epsilon\xi\ \eta\nu\omega\mu\epsilon\nu\omega\nu$), или из единичностей ($\epsilon\xi\ \epsilon\nu\alpha\delta\omega\nu$). Ясно ведь, что, во-первых, никакой [элемент] многого не есть [тем самым] просто само множество, и, наоборот, во-вторых, множество не есть каждый из его элементов" [120, с. 460] — такие множества не едино-многие.

36. Представления о едино-многом (но не в форме множеств) имелось уже у того же Прокла (410–485) ("Едино и многое в их органическом сращении", заголовок переводчика — А. Ф. Лосева) [120, с. 484]:

"§67. Каждая цельность или предшествует частям <единое>, или состоит из частей <многое>, или содержится в части <едино-многое>. ... §68. Всякое целое, содержащееся в части, есть часть целого, состоящего из частей <едино-многое>."

²⁵ Номер с буквой "б" обозначает период развития представлений о бесконечности.

²⁶ "1. *Единица* есть <то>, через что каждое из существующих считается единым.

2. *Число* же — множество, составленное из единиц" [56, т. 2, с. 9-10] ("Начала", кн. 7, Определения).

Бесконечность, однако, в математическом (да и философском) мышлении Средневековья представлялась (в упорядоченном виде) потенциальной (с актуально бесконечными последовательностями и бесконечными рядами не оперировали, в философском плане в этот период мыслился только предел бесконечного ряда причин).

46. На четвёртой стадии исторического развития науки (представлений о числе и бесконечности) возникает абстракция актуальной бесконечности; так, например, Фонтенель (1657–1757) в работе "Элементы бесконечного" употреблял операции с бесконечными величинами (был критикован Маклореном (1698–1746), "Трактат о флюксиях")²⁷: $\infty/n : \infty = 1/n$, и т. п., прогрессии $1, 2\infty, 3\infty, \dots \infty^2$, и т. п.

У Эйлера же (1707–1783) операции с числами "за бесконечностью" совершенно осмысленны и в отличие от предыдущего этапа (3) уровни бесконечного чётко отличимы ("Дифференциальное исчисление", §89–97): "их <бесконечно малые> нужно непременно отличать друг от друга, если наше внимание обращено на то их соотношение, которое выражается геометрическим соотношением..., так как a/dx есть бесконечное количество A , то, очевидно, количество A/dx будет количеством, в бесконечное число раз большим, чем a/dx ... Итак, <есть> бесконечно много ступеней бесконечных количеств, из которых каждая бесконечно больше предыдущей" [230, с. 93–95].

И при описании "дифференцирования непредставимых функций" Эйлер употреблял последователи для бесконечных величин (последователей) (§370, 376 и сл.): "количества $S^{|\infty|}, S^{|\infty+1|}, S^{|\infty+2|}$ и т. д. будут составлять арифметическую прогрессию..."²⁸ [230, с. 512, 518 и сл.].

На 4-м уровне операции с бесконечными величинами используют представления о простых бесконечных последователях (PN -, PN^{PN} -последователях).

56. Кантор (1845–1918) мыслил бесконечные структуры аналогично недостижимым объектам, не предполагая ограниченности ряда "алефов" (письмо Дедекинду из Галле от 28 июля 1899 г.) [68, с. 367]:

"Система \aleph всех алефов

$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_{\omega_0}, \aleph_{\omega_0+1}, \dots, \aleph_{\omega_1}, \dots$

при их расположении по величине ... образует бесконечную последовательность".

Недостижимые кардиналы, появившиеся в описании множеств

²⁷ Коренцова М. М. Концепция бесконечного в "Трактате о флюксиях" Маклорена (Маклорен и Фонтенель) [17, с. 71–73].

²⁸ Индексы — $PN(\emptyset), P(PN(\emptyset)), \dots$

немного позже (см. [24, с. 234–235], [80]), аналогичны недостижимым последователям²⁹ вида $PO(\emptyset)$ [178].

6б. Самоподобные структуры, описывающие в теории с самопринадлежностью пространственные структуры, не имеют аналогов в историко-математических представлениях.

Бесконечные структуры в теории множеств с самопринадлежностью, заключённые внутри неизмеримого и неупорядочиваемого бесконечного множества всех множеств M вбирают в себя описанные ранее (пп. 1–6) представления о бесконечных структурах (см. [178]).

Процесс исторического усложнения представлений о бесконечных (упорядоченных) объектах совпадает с усложняющейся последовательностью структур теории множеств с самопринадлежностью, таким образом, в теории множеств с самопринадлежностью, описывающей и более ранние, более простые представления о бесконечных упорядоченных структурах, имеется элемент самоописательности своего исторического становления,— одна из составляющих теоретического критерия истинности. Вышеозначенное обобщено в табл. 4.

Самоописательность ещё раз подчёркивает непредикативность конструкций с самопринадлежностью.

Структура прослеженных этапов такова, что на каждой новой исторической стадии наблюдается обобщение некоторого множества элементов предваряющей стадии, отвлечение от них и появление новой структуры, исторического новообразования, см. табл. 1.

О связи развития логики в истории с возрастным развитием логических знаний см. далее и в [162].

²⁹ При этом очевидно, что поскольку "обобщённая континуум гипотеза [24, с. 235] влечёт, что всякое недостижимое кардинальное число является сильно недостижимым", она не верна, т. к. в теории с самопринадлежностью имеется бесконечный ряд (доминантных) недостижимых последователей, структурно-изоморфных один другому.

Таблица 4. Соответствие структур множества всех множеств M и исторически усложнявшихся представлений [178]

№ уровня	Объект теории с самопринадлежностью	Объект исторических представлений	Исторический период
1	Единичный объект	Конкретное число	Древность
2	Несамопринадлежащее множество	Число как "куча" единиц ³⁰	Античность, с III в. до н. э.
3	Самопринадлежащий последователь	Едино-многие объекты ³¹	Средние века, со II в. н. э.
4	Бесконечные последователи: N , $P(N)$, $PN(\emptyset)$ и т. д.	Абстракция актуальной бесконечности	Новое время, с XV в. н. э.
5a	Недостижимые последователи $PO(\emptyset)$ и т. п.	Абстракция ряда "алефов", недостижимые кардиналы ... ³²	Новейшее время, с XIX в.
5б	Самоподобные объекты с XX в.		
6	Собственно множество всех множеств, M	Собственно множество всех множеств, M , самопринадлежащее	С кон. XX в.

³⁰ Из историко-философских сравнений — логика (отношение несамопринадлежащих классов) Аристотеля.

³¹ Из философских категорий — представление о ряде последовательных причин в средневековой философии.

³² Фрактальные объекты — отдалённый и лишь внешне похожий аналог, нестандартный анализ (А. Робинсон), в котором предполагается, что (на прямой) окрестность каждой точки подобна по устройству всей числовой прямой, отчасти схож с описанным самоподобием объектов.

Глава 5. Периоды развития понятия о числе и мере

В этой главе описаны, в соответствии с гносеологической периодизацией истории науки в целом и математики в частности, периоды развития представлений о числе, с указанием новообразований каждого периода; указано, что окончательное представление о числе, как о выражении порядка следования друг за другом, появляется на последнем, шестом, уровне развития,— при непредикативном определении числа в теории множеств с самопринадлежностью.

§10. Периоды развития понятия о числе

Периодизация истории понятия числа в математике соответствует общей гносеологической (6-уровневой) периодизации истории науки вообще и математики в частности. Периоды выделены соответственно последовательности усложнения уровней обобщения (абстракции) понятий, см. подробнее [214]; внутри последовательности этих периодов выделено усложнение представлений о числе.

Основные периоды развития понятия о числе в истории математики таковы (изложено по [219]).

1.³³ (Конкретное число)

Первое понятие, появившееся в истории математики,— понятие конкретного числа на первом уровне, соответствующем обобщению совокупностей чувственно-воспринимаемых образов, когда обобщаемые образы предметов обладают свойством численности (как то: "глаза" — их обычно два, "рука" — имеет обычно пять пальцев и т. п.), и это побочное по отношению к именованию предметов свойство (численности) используется в дальнейшем для счёта других предметов.

Примеры конкретных чисел описаны в [63, т. 1]: "Первым шагом к возникновению счёта было установление, как мы сейчас говорим, "взаимно однозначного соответствия" между считаемыми предметами и некоторым другим <естественным> множеством. <...> Пережиток этой системы мы встречаем в древней индийской словесной системе счисления, где единица называлась Луной..., два — близнецами, пять — чувствами... и т. д." [63, т. 1 с. 9]. Это этап счёта при помощи "конкретных" чисел. Представления об арифметических операциях как таковых в древности не было, употреблялся конкретный пересчёт сложенных кучками предметов для вычисления суммы.

Записи чисел, как и отвлечённого понятия об арифметической операции, на этой стадии ещё не существует, все действия выполняются непосредственным пересчётом предметов, сложенных в кучу или распределённых по кучкам. Следы этих древних представлений в виде

³³ Здесь и далее номер обозначает номер периода развития понятия о числе.

арифметики пересчётов имеются и в древней математике.

Древнеегипетская математика также не знала абстрактного определения понятия числа и арифметической операции, она оперировала теми же конкретными пересчётами: "...все действия в египетской математике по существу сводятся к сложению" [106, с. 84].³⁴

В древневавилонской математике не было абстрактных понятий о числе. "Известно <...> древневавилонское приближенное значение $\sqrt{2}$, а именно $1;25 <1+25/60 = 1,42>$ " [106, с. 50], другие, более точные приближения, имели точность до 0,0000017, [106, с. 49].

Вычисления были весьма конкретными, ввиду отсутствия абстрактного понятия о числе, вопросом о несоизмеримости диагонали квадрата его стороне ещё не задавались, оперировали только рациональными числами и рациональными (дробными) приближениями корней.

2. (Число как множество единиц, рациональное число)

С появлением письменности понятие конкретного числа облекается в более абстрактную форму, появляется уже отвлечённое определение понятия числа. Так, у пифагорейцев (VII в. до н. э.) число представлялось состоящим из отдельных единиц (как совокупность сложенных палочек, камешков, и подобных внешних по отношению к человеку предметов для счёта) [63, т. 1, с. 68, 72].

Такое же определение числа встречается и у Евклида (II в. до н. э.) ("Начала", кн. 7, Определения):

"1. Единица есть <то>, через что каждое из существующих считается единым.

2. Число же — множество, составленное из единиц" [56, т. 2, с. 9-10].

У Евклида имеется и абстрактное определение понятия арифметической операции (сложения, вычитания, умножения, деления): "Говорят, что число умножает число, когда столько в нём единиц, сколько раз составляется умножаемое и что-то возникает" [56, т. 2, с. 10]; а также указано на свойства этих операций (дистрибутивность, коммутативность) (там же, кн. 7): "Если два числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающие будут равны между собой. Пусть будет два числа А, В, и пусть А, умножая В, производит С; В же, умно-

³⁴ Пример умножения 43 на 5 по-древнеегипетски:

$$\begin{array}{r} \underline{1} \quad \underline{43} \\ 2 \quad 86 \\ \underline{4} \quad \underline{172} \\ 5 \quad 215 \end{array}$$

Выписываются в столбец удвоения числа 43, затем — сумма удвоений (подчёркнуты), равных сумме в левом столбце множителю 5, даёт результат умножения [106].

жая А, производит D; я утверждаю, что С равно D <далее следует доказательство этого утверждения>" [56, т. 2, с. 23-24].

Таким образом, на второй стадии развития математики появляется абстрактное понятие числа (обобщающее до степени произвольности операций с числом множество конкретных чисел³⁵) и абстрактное определение арифметической операции (обобщающее до степени произвольности множество конкретных пересчётов чисел).

Хотя в древности и в античности и решали задачи, сводящиеся к уравнениям (в том числе и частные случаи квадратных уравнений), но абстрактного определения понятия уравнения (вида "уравнение — это...") в эти периоды (1, 2) ещё не существовало.

В античности оперировали в основном с рациональными числами, возникающие иррациональности вызывали преткновение, — в частности невыразимость рациональным числом диагонали квадрата с единичной стороной [63, т. 1, с. 73]. Аристотель писал в сочинении по логике ("Первая аналитика", кн. 1, гл. 23, 41a25-30): "... несоизмеримость диагонали [со стороной квадрата] доказывают тем, что если признать их соизмеримость, то нечётное окажется равным чётному" [9, т. 2, с. 168]; см. также гл. 31, 46b25-40, [9, т. 2, с. 184]. Поэтому представления о числах раздваивались собственно на числа (рациональные) и геометрические величины, операции над которыми были аналогичны операциям над числами (так произведение отрезков давало площадь прямоугольника, как это и написано у Евклида).

Рассуждения о соизмеримых и несоизмеримых величинах изложены Евклидом (Начала, кн. 10, Определения): "1. Соизмеримыми величинами называются измеряемые одной и той же мерой, несоизмеримыми же — для которых никакая общая мера не может быть образована" [56, т. 2, с. 101].³⁶

(Начала, кн. 10): Предложение 6. Если две величины имеют между собой отношение как число <натуральное> к числу <натуральному³⁷>, то эти величины будут соизмеримыми" [56, т. 2, с. 107]. "Предложение 7. Несоизмеримые величины не имеют между собой отношения как число <натуральное> к числу <натуральному>" [56, т. 2, с. 109].

³⁵ У Архимеда (III в. до н. э.) имеется работа "Об исчислении песчинок" [11], в которой он пытается построить наиболее возможное в доступной ему системе записи чисел число и показать, что его достаточно для исчисления всех песчинок в мире.

³⁶ Евклид указывает только один вид иррациональностей (в следствии из предложения 9 кн. 10 "Начал"), вида \sqrt{n} (где n — рациональное число), которые в квадрате дают рациональное число: $(\sqrt{n})^2 = n$ [56, т. 2, с. 111]. Иррациональности "бóльшей" глубины, вида $\sqrt{\sqrt{n}}$ и т. д., Евклидом не рассмотрены.

³⁷ Натуральное — число, состоящее из единиц.

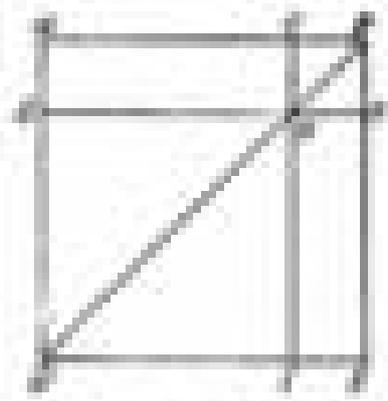


Рис. 4а. Рисунок
к предложению 4 кн. 2
Начал

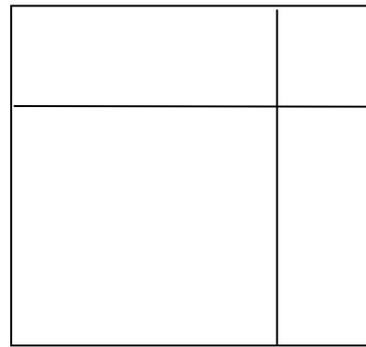


Рис. 4б. Современный
рисунок квадрата и запись
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

В книгах Евклида описана и так называемая геометрическая алгебра (Начала, кн. 2.): "Предложение 4 <см. рис. 4а>. Если прямая линия как-либо рассечена, то квадрат на всей [прямой] равен квадратам на отрезках вместе с дважды [взятым] прямоугольником, заключённым между отрезками" [56, т. 1, с. 64]. В современной записи это выражение приведено на рис. 4б.

Дальнейшее развитие понятия числа как актуальной бесконечности и иррациональности наблюдалось на следующем, третьем, периоде развития математики.

3. (Число и как иррациональность)

В начале н. э. Диофант (I–II в. н. э.) рассматривал натуральный ряд уже как актуально бесконечную величину ("Арифметика", Книга I): "(I) Все числа как ты <Дионисий> знаешь, состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжают, увеличиваясь до бесконечности" [53, с. 37].³⁸

Диофантовы уравнения сводились к целочисленным решениям, позднее в этом периоде рассматриваемы и уравнения с иррациональными решениями. Омар Хайям писал: "Один из поучительных вопросов, необходимый в разделе философии, называемом математикой, это искусство алгебры и алмукабалы, имеющее своей целью определение неизвестных как числовых, так и измеримых" [154, с. 69].

При этом измеримые величины понимались уже как геометриче-

³⁸ Диофант также определял и величины, получающиеся возведением в степень некоторой неизвестной величины: "(III) Подобно тому как для чисел одноимённые части получают названия, схожие с этими числами, например, для трёх будет треть, для четырёх — четверть, так и теперь для вышеназванных чисел подобоименные части получают названия, соответствующие этим числам: для числа [x] — арифметическая [1/x], для квадрата [x²] — квадратичная [1/x²]... [53, с. 38].

ски соизмеримые отрезки: "Я <Хайям> утверждаю, что искусство алгебры и алмукабалы есть научное искусство, предмет которого составляет абсолютное число <натуральные числа> и измеримые <геометрические> величины, являющиеся неизвестными, но *отнесённые к какой-нибудь известной вещи*, по которой их можно определить" [154, с. 69-70]. Это отношение (в отличие от представлений Евклида) уже не обязательно рационально.³⁹

Сам Хайям объяснял различие между пониманием числа древними (Евклидом) и современным ему пониманием: "Изучение числа отличается от изучения геометрии; это две науки, только одна из которых применяется в другой. Геометрия в некоторых своих доказательствах нуждается в числах, как это имеет место в X книге <Евклида> и при измерении величин, т. е. когда узнают отношение двух величин с числовой точки зрения, как мы <Хайям> это разъяснили во введении к этой книге <кн. 3 трактата "Комментарии к трудностям... Евклида">, где мы <Хайям> говорили о том, что некоторая величина принимается за единицу и ею измеряют другие величины того же рода, т. е. узнают их количество по отношению к этой единице"⁴⁰ [154, с. 144].

Впоследствии в арабской математике были открыты соотношения вида $n\sqrt{a} \cdot m\sqrt{b} = mn\sqrt{a^m \cdot b^n} = mn\sqrt{a^m \cdot b^n}$ [63, т. 1, с. 216]⁴¹.

Отрицательные числа

Отрицательные числа употреблялись ещё в древнем Китае в трактате "Математика в девяти книгах" (II в. до н. э.) и истолковывались как "недостаток" [63, т. 1, с. 167–168].

Также отрицательные числа встречаются у Диофанта ("Арифметика", кн. I): "(IX) Недостаток, умноженный на недостаток, даёт наличие; недостаток же, умноженный на наличие, даёт недостаток, знак же для недостатка — ψ (пси) укороченное и опрокинутое вниз: ∟ "

³⁹ Современные комментаторы (А. П. Юшкевич и др.) отмечали, что "Хайям называет "измеримой величиной" или просто "величиной" непрерывную геометрическую величину, т. е. линию, поверхность и тело, в отличие от дискретного количества — натурального числа. Это различие непрерывных и дискретных величин восходит к древним грекам" [154, с. 240].

⁴⁰ "Если, говоря об умножении отношений, говорят: отношение трёх к пяти есть три пятых единицы, то при этом предполагают единичную величину, т. е. некоторую величину, которую называют единицей и с которой связывают все остальные величины. Для всякой измеримой <геометрической> величины необходимо должно быть нечто, принятое за единицу; так происходит, когда вторая вещь связывается с первой при помощи числа" [154, с. 141].

⁴¹ Преобразования иррациональностей были известны и в индийской математике конца I тысячелетия н. э. [63, т. 1, с. 190].

[53, с. 40].

В Индии "математики, начиная с Брахмагупты (VII в. н. э.), систематически пользовались отрицательными числами и трактовали положительное число как имущество, а отрицательное — как долг" [63, т. 1, с. 315].

С XIII в. отрицательные числа появляются в Европе (Леонардо Пизанский <Фиббоначчи>). "Одной из важнейших особенностей европейской математики <эпохи Возрождения> было систематическое пользование отрицательными числами" [63, т. 1, с. 315].

4. (Соединение числа и геометрической величины)

Близкое к современному метрическое понятие о числе ввёл Рене Декарт (XVII в.). Он писал в книге "Геометрия": "Подобно тому, как вся арифметика состоит только в четырёх или пяти действиях, именно в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней, которое можно считать своего рода делением, подобно этому в геометрии,

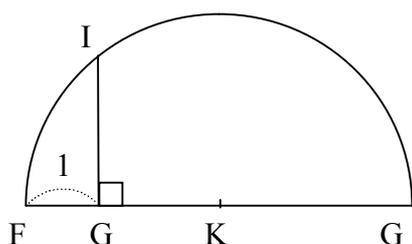


Рис. 5. Извлечение квадратного корня

чтобы подготовить искомые линии к определению, нужно только прибавить к этим линиям или отнять от них другие; или же нужно, имея линию, которую я <Декарт>, дабы удобнее установить более тесную связь с числами, назову единицей, и которая обыкновенно может быть выбрана произвольно..." [49, с. 11].

Декартов пример применения геометрического понятия о числе таков.

"Извлечение квадратного корня. Или, если нужно извлечь квадратный корень из GH , то я <Декарт> прибавляю (рис. 5) к GH , по продолжению, прямую FG , являющуюся единицей < $FH=1$ >, и разделив FH в точке K на две равные части, описываю из центра K окружность FH ; если затем провести от точки G к точке I прямую, перпендикулярную к FH , то GI будет искомым корнем" [49, с. 12].

В дальнейшем геометрическое понятие о числе получило развитие у Ньютона ("Всеобщая арифметика"): "Под числом мы <Ньютон> понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами <Ньютоном> за единицу. Число бывает трёх видов: целое, дробное и иррациональное (*surdus*). Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей" [109, с. 8]. "... Число 57104,2083 обозначает пятьдесят семь тысяч сто четыре единицы с двумя десятками восьмью тысячными и тремя десятитысячными" [109, с. 8–9]. "Знаки иррациональных чисел

и дробных чисел приведены далее" [109, с. 9]. "Величины бывают либо положительные, или же больше чем ничто, либо отрицательные, или же меньше чем ничто" [109, с. 9]. "Для обозначения корня какой-либо величины мы <Ньютон> ставим перед ней в случае квадратного корня знак $\sqrt{\quad}$, в случае кубического корня $\sqrt[3]{\quad}$, в случае корня четвёртой степени $\sqrt[4]{\quad}$: и т. д." [109, с. 15].

Геометрическое представление о числе объединило рациональные и иррациональные числа, как разновидности выражения геометрической меры, — длины отрезка.

Мнимые числа

Как закономерный итог использования иррациональных чисел (в т. ч. квадратных корней) появляются мнимые числа. "В XVI в. в связи с решением кубических и квадратных уравнений были введены выражения вида $a + b\sqrt{-1}$ Проблему арифметических свойств мнимых чисел подробно исследовали в конце XVIII в. Даламбер и Эйлер" [63, т. 2, с. 37–38].

5 (Числа действительные, в том числе трансцендентные)

Поскольку понятие действительного числа излагается подробно в вузовском курсе математического анализа (высшей математики), то подробно это понятие здесь не описано⁴².

Способы построения теории действительных чисел вкратце таковы:

1. Дедекиндовы сечения (Ю. Дедекинд, XIX в.).
2. Фундаментальные последовательности рациональных чисел (Г. Кантор и др. XIX в.).
3. Аксиоматическое задание (поле чисел с операциями сложения, умножения и обратными им, без деления на 0)⁴³.
4. Бесконечные десятичные дроби [22, с. 54] (XX в.).

Понятие действительного числа в виде бесконечных десятичных дробей используется далее (на 6-м уровне абстракции) для доказательства теоремы о счётности десятичных обозначений чисел в теории множеств с самопринадлежностью (см. подробно [207]).

Кватернионы и гиперкомплексные числа

Продолжения расширения понятия мнимых чисел таковы. Ква-

⁴² Ближайшей предысторией понятия действительного числа явилось описание Больцано в 1817 г. непрерывности, ныне задаваемой в классическом анализе, например, аксиомой Хаусдорфа.

⁴³ Недостаток формально-аксиоматического подхода — отрыв от действительности, см. тж. [22, с. 54].

тернионы вида $q=1+ai+bj+ck$, где i, j, k — мнимые единицы $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$, $ij=k$, $ji=-k$ и т. п., введены в 1843 г. Гамильтоном. Кватернионы расширяют понятие комплексного числа до 4-мерного вектора. Следующие расширения комплексных чисел — это октавы (8-мерные) и седенионы (16-мерные). Имеется следующая иерархия чисел: вещественные (действительные) числа (\mathbf{R}), комплексные (\mathbf{C}), кватернионы (\mathbf{H}), октавы (\mathbf{O}), седенионы (\mathbf{S}), $\mathbf{R} \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{O} \subset \mathbf{S}$.

Трансцендентные числа

Хотя числа π и e использовались в математике и ранее, их трансцендентность, то есть невыразимость в виде корней некоторого алгебраического уравнения с алгебраическими коэффициентами, была доказана только в XIX в. Образуется следующая иерархия множеств чисел: натуральные числа (\mathbf{N}), целые числа (\mathbf{Z}), рациональные числа (\mathbf{Q}), алгебраические⁴⁴ (\mathbf{A}), действительные (\mathbf{R}) и комплекснозначные (\mathbf{C}); $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{C}$. Трансцендентные числа — это числа из \mathbf{R} или \mathbf{C} , не являющиеся алгебраическими ($\notin \mathbf{A}$).

Трансцендентность числа e доказал в 1873 г. Ш. Эрмит, трансцендентность числа π — К. Линдеман в 1882 г.

6. (Непредикативное, самоссылочное, определение числа)

Преыдущие определения числа как порядкового типа предполагали неявное задание порядка следования чисел друг за другом:

а) "число как множество единиц" (2-й уровень, Евклид и др.) не содержало в себе понятия порядка, по которому эти единицы друг за другом следовали, — порядок предполагался неявно заданным;

б) "метрическое понятие числа" (4-й уровень, Декарт и др.), отношение отрезка к отрезку заданной (единичной) длины также не содержало в себе понятия порядка следования, по которому отрезки единичной длины откладывались друг за другом при измерении заданного отрезка, — этот порядок следования друг за другом предполагался неявно заданным.

б) аксиоматическое задание натуральных чисел через свойство "следование за" также предполагало разделение понятий числа и отношения "следовать за" [240], [241]⁴⁵.

⁴⁴ Алгебраическое число — это корень многочлена с рациональными коэффициентами и/или с коэффициентами, которые являются такими корнями (вложимость эта продолжается бесконечно, но множество алгебраических чисел замкнуто).

⁴⁵ Имелись и более сложные конструкции. У Бурбаки [24, с. 198] натуральные числа вводятся искусственно через понятие бесконечных кардиналов и операцию сложения, "число a конечно, если $a+1 \neq a$ ", — т. е. от сложного к простому.

см. след. стр. —>

Натуральные числа в теории множеств с самопринадлежностью задаются как самопринадлежащие множества: единица состоит из себя самой (и формально ещё из ничто, — \emptyset), двойка из себя самой и единицы, тройка из себя самой, двойки и единицы и т. п., — порядок следования чисел друг за другом указан в них самих отношением принадлежности [178]⁴⁶:

$$\begin{aligned} 1 \in 1, \emptyset \in 1, & & 1 = \{1\}, \emptyset \in 1, \\ 1 \in 2, 2 \in 2, \emptyset \in 2, & & 2 = \{1, 2\}, \emptyset \in 2, \\ 1 \in 3, 2 \in 3, 3 \in 3, \emptyset \in 3, \dots & & 3 = \{1, 2, 3\}, \emptyset \in 3, \text{ и т. д.}^{47} \end{aligned}$$

В теории множеств с самопринадлежностью действительные числа рассматриваются как бесконечные десятичные дроби, доказывається

Попыткой обоснования понятия о числе было построение чисел в теории множеств (без самопринадлежности). Построение чисел в теории множеств ZFC (Цермело-Френкеля + континуум гипотеза) таково: задаётся несамопринадлежащее множество $\emptyset = \{x \mid x \notin x\}$, множество подмножеств $P(y) = \{x \mid x \subseteq y\}$, тогда, по Шенфилду, \emptyset это 0, $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ это 1, $P(P(\emptyset)) = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ это 2, $P(P(P(\emptyset))) = \{\{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}\}$ — это 3, и т. д. [228, с. 16–19]. "Настоящий универсум теории множеств строится только из пустого множества" [67, с. 53]. При этом непротиворечивость теории множеств, использующей только несамопринадлежащие множества, — не доказана.

Однако, как указывалось ранее в [156], [178], [207], пустое множество — самопринадлежащее, $\emptyset \in \emptyset$, и его множество подмножеств совпадает с ним самим $\text{Exp}(\emptyset) = \emptyset$. При этом теория множеств с самопринадлежностью непротиворечива [207], а указанный выше [67, с. 53] универсум теории множеств без самопринадлежности является фикцией, равен пустому множеству.

⁴⁶ Непредикативное постулирование существования множества всех множеств M , обладающего свойствами $M = \text{Exp}(M)$, $M \in M$ [156], [178], некоторым образом «потенциально» в отношении находящихся в нём множеств. То есть с существованием M структура всех принадлежащих ему множеств не задана и подлежит отдельному конструктивному выяснению, при уже доказанной непротиворечивости теории [156]. Стандартным способом выделения из M множеств является схема свёртывания [156]. Натуральные числа задаются как простые последователи к 1

($1 = \{1\}$, $2 = \{1, 2\}$, $3 = \{1, 2, 3\}$ и т. д. [178]):

$$\begin{aligned} P(A) &= \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in A \text{ либо } P(A) \in [x])\} \\ 2 = P(1) &= \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in 1 \text{ либо } P(1) \in [x])\} \\ 3 = P(2) &= \{[x] \in M \mid ([x] \in \emptyset) \text{ или } ([x] \in 2 \text{ либо } P(2) \in [x])\}. \end{aligned}$$

При этом определение натурального числа (последователя) является непредикативным ($P(A)$ имеется в левой и в правой части равенства).

Пытаться предикативно строить порядковые множества из подмножеств пустого множества: \emptyset , $\text{Exp}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\text{Exp}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ и т. д., — в данном случае не имеет смысла, поскольку $\text{Exp}(\emptyset) = \emptyset$.

⁴⁷ Простая наглядная аналогия таких представлений о числе — русская матрёшка: единица — это самая маленькая матрёшечка, её объемлет следующая бóльшая (двойка), а её — ещё бóльшая (тройка) и т. д.

счётность⁴⁸ десятичных обозначений чисел (при несчётности точек на прямой), [178].

При этом для пользования десятичными числами в прикладном смысле необходимо введение понятия меры, подлежащее рассмотрению в отдельной работе.

Периоды развития математики 1–5, с предикативным определением понятия числа, являются предысторией представлений о числе, которые в непротиворечивом виде появляются только на завершающей (6-й) стадии развития,— на этой стадии представления о порядке следования друг за другом и порядке счёта соединены в самоссылочном определении натурального числа, как самопринадлежащего множества.

Таблица 5. Этапы развития представлений о числе

№ периода	Новообразованные в истории понятия о числе математические представления	Исторический период
1	"Конкретное число", пересчёт	Древность
2	Число как "куча" единиц, арифметическая операция, рациональные числа (потенциальная бесконечность, несоизмеримость)	Античность, с VII в. до н. э.
3	Арифметическое понятие о числе: иррациональность (радикал), отрицательные числа. Геометрическое понятие: единичный отрезок и отношение к нему (актуальная бесконечность)	Средние века, с I в. н. э.
4	Соединение геометрического и арифметического понятия числа; мнимозначные числа ($\sqrt{-1}$)	Новое время, с XVI в. н. э.
5	Число (действительное) как бесконечная последовательность знаков; трансцендентные числа; поля чисел	Новейшее время, с нач. XIX в.
6	Непредикативные конструкции, непредикативное (самоссылочное) определение понятия числа (необходимость теории меры)	С кон. XX в.

⁴⁸ Диагональный метод Кантора указывает лишь на то, что все десятичные обозначения чисел не могут быть сразу выписаны в линейно упорядоченный список, что в результате попытки построить такой список появятся числа, которые находятся между уже выписанными,— это наблюдаемо вследствие древовидной структуры десятичных обозначений, которая от слоя к слою (от разряда к разряду "вглубь" числа) всё более "уплотняется".

§11. Периоды развития понятия о мере

Предыстория представлений о понятии меры связана с решением в числах геометрических задач.

Схема изменения представлений о мере следующая.

1.⁴⁹ В древности для расчётов, в том числе архитектурных, пользовались приближениями. "Известно другое древневавилонское приближенное значение $\sqrt{2}$, а именно $1;25 < 1+25/60 = 1,42 >$ " [106, с. 50], другие, более точные приближения, имели точность до 0,0000017 [106, с. 49].

Вычисления были весьма конкретными, ввиду отсутствия абстрактного понятия о числе, вопросом о несоизмеримости диагонали квадрата его стороне ещё не задавались, оперировали только рациональными числами и рациональными (дробными) приближениями корней.

2. В античности возникают представления о невыразимости диагонали квадрата с целыми сторонами рациональным числом, см. стр. 35. Наличие такой несоизмеримости не мешало пользоваться на практике приближениями иррациональных величин.

3. В средние века возникают геометрические сопоставления иррациональностей числам (Омар Хайям, см. стр. 37, метрическое число). Более подробно связь чисел и геометрических величин описана у ал-Каши.

Ал-Каши писал ("Ключ к арифметике", кн. 4, введение):

"Измерение — получение величины, указывающей, сколько содержится в измеряемом равных измеряющему или его частям или и того и другого. Мера — для линии — данная линия, например локоть, сустав камыша, стежок, ступня или палец и так далее, для поверхности — квадрат данной линии, для тела — её куб" [69, с. 135].⁵⁰

⁴⁹ Номер соответствует номеру исторического периода.

⁵⁰ Ал-Каши ("Ключ к арифметике", введение): "Объяснение предмета арифметики. [Это] наука о правилах нахождения числовых неизвестных с помощью соответствующих им известных. Предмет арифметики есть число.

Число это то, что происходит при счёте единиц. Числа состоят из единиц и следуют за единицей... число может быть также количеством, отнесённым к другому количеству, тогда оно называется дробным..." [69, с. 18].

<Там же, кн. 1. гл. 5>:

"Если число умножается на само себя, затем на произведение, затем на второе произведение, затем на третье произведение и так далее до бесконечности, то первое число называется основанием по отношению к каждому из этих произведений, или корнем по отношению ко второму произведению, а сами произведения носят общее название степеней" [69, с. 41].

см. след. стр. —>

<Там же, второй раздел "Об измерении треугольников вообще">: "Способ их измерения таков: умножаем их высоту на половину их основания, т. е. измеряем высоту и основание вместе с локтем или другой мерой, и умножаем одно из полученных [чисел] на половину другого" [69, с. 138].

<Там же, третий раздел "Об измерении равносторонних треугольников">: "Для измерения равносторонних треугольников имеются другие способы, помимо тех, о которых мы <ал-Каши> говорили. Первый, возьмём квадрато-квадрат [половины] одной из сторон, умножим его на три и возьмём корень из произведения; то, что получится и есть площадь" [69, с. 145].

В современной записи: $S = \sqrt{3} \cdot (a/2)^2 = 1/4 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$, где a — длина стороны равностороннего треугольника. Как видно из этого примера, имеется достаточно свободное оперирование иррациональностями при определении площади треугольника (число и геометрическая мера соединены в одно понятие).⁵¹

У ал-Каши (как и вообще в этом периоде) нет представлений о непрерывном соответствии геометрических отношений числовым (нет понятия функции и буквенных обозначений переменных величин). Числовыми отношениями пользуются в прикладном приближённом смысле, довольствуясь хорошей точностью. О приближении числа π он писал⁵²: "Как мы <ал-Каши> показали в третьем разделе, величина одной

"Основание есть первая степень, квадрат — вторая, куб — третья, и так далее до бесконечности" [69, с. 42].

"Знай, что степень у которой имеется основание, порождающее эту степень <т. е. рациональное число>, называется рациональной, если же у степени нет основания, её называю иррациональной..." "Способ нахождения корня таков..." [69, с. 42].

⁵¹ См. <там же, вторая глава "Об измерении четырёхугольников...", второй раздел "об измерении квадрата...">

"Определение расстояний друг через друга. Возьмём корень из суммы квадратов двух смежных сторон <прямоугольника>. Это будет диагональ. Поэтому квадрат диагонали квадрата равен двум квадратам его сторон. Если мы умножим стороны квадрата на 1 24 51 10 7 46 квинт <шестидесятеричная запись числа>, получится его диагональ" [69, с. 148].

В современной записи $\sqrt{2} \approx 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 + 7/60^4 + 46/60^5 = 1,4142135622$ (точное значение $\sqrt{2} = 1,4142135624\dots$).

У ал-Каши приближённое оперирование иррациональностями для практики.
⁵² <Там же, четвёртая глава "Об измерении круга...", второй раздел "Об измерении круга...">: "Прежде чем начать об измерении, предположим этому разделу следующее: знай, что окружность больше диаметра в три раза с дробью, которая меньше одной седьмой. Люди для упрощения принимают эту дробь за одну седьмую. Архимед говорит, что эта дробь меньше одной седьмой и больше десяти семьдесят первых. То, что мы <ал-Каши> получили в "Трактате об окружности", после отбрасы-

см. след. стр. —>

октавы <единицы восьмого разряда в шестидесятеричной системе счисления> окружности круга, диаметр которого равен шестистам тысячам диаметров Земли, меньше четырёх пятых толщины конского волоса, равного одной шестой ширины среднего ячменного зерна... Поэтому разность между этим <приближённым значением 2π > и тем, что есть в действительности, не превосходит одной пятой толщины конского волоса, т. е. одной шестой ширины среднего ячменного зерна. Это и есть то, что мы <ал-Каши> хотели доказать" [69, с. 349–350]. То есть это число пригодно для астрономических вычислений.

4. На следующем периоде произошло ещё более "тесное" соединение геометрического и арифметического понятия числа.

Декарт Рене (XVII в.) писал в книге "Геометрия": "Подобно тому, как вся арифметика состоит только в четырёх или пяти действиях, именно в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней, которое можно считать своего рода делением, подобно этому в геометрии, чтобы подготовить искомые линии к определению, нужно только прибавить к этим линиям или отнять от них другие; или же нужно, имея линию, которую я <Декарт>, дабы удобнее установить более тесную связь с числами, назову единицей, и которая обыкновенно может быть выбрана произвольно..." [49, с. 11].

В дальнейшем геометрическое понятие о числе получило развитие у И. Ньютона ("Всеобщая арифметика"): "Под числом мы <Ньютон> понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами <Ньютоном> за единицу. Число бывает трёх видов: целое, дробное и иррациональное (*surdus*). Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей" [109, с. 8].

вания кварт и того, что после них, в том случае, когда диаметр является единицей, таково: 3 8 29 44 терций. Это намного точнее исчисления Архимеда, как мы <ал-Каши> доказали в указанном трактате, и ближе к истине, но всей истины не знает никто, кроме Аллаха" [69, с. 148].

В шестидесятеричной записи $\pi \approx 3 + 8/60 + 29/60^2 + 44/60^3 = 3,14159259$ (точное значение $\pi = 3,14159265\dots$) [69, с. 161].

В "Трактате об окружности" ал-Каши более точно вычислил число π :

$2\pi \approx 6,2831853071795865$ [69, с. 360], современное значение

$2\pi = 6,28318530717958647\dots$

При этом вычислении круг приближался многоугольниками: "Трактат об окружности", шестой раздел "Об определении периметров вписанного в круг и описанного около него многоугольников, которые подобны друг другу и число сторон каждого их которых есть 805 306 368 <в десятичной системе>" [69, с. 347].

Принятие за единицу некоторого отрезка в системе координат,— наглядное (без введения понятия эталона и описания процесса измерения),— составляло содержание представлений о мере в 4-м периоде развития математики.

5. В XIX веке стали иметь дело не только с непрерывными отрезками, но и с "пористыми" множествами отрезков (например множество Кантора),— для них определение меры вводилось как минимальное покрытие отрезками (интервалами), сумма которых и давала определение меры множества на прямой (для объёмов и n-мерных областей рассуждения были аналогичны),— это внешняя мера множества. Внутренняя мера,— если интервалы брались внутри множества. Равенство внешней и внутренней мере давало измеримое множество.

Измеримая функция переводила измеримое множество в измеримое множество [105], [130, т. 5]. Интеграл по мере функции — это интеграл Лебега $I = \int_a^b f(x) d\mu(x)$, где $\mu(x)$ — функция меры, по которой производится интегрирование [73]. В простейшем случае $\mu(x)=x$ и получается интеграл, определённый на предыдущем историческом периоде: $I = \int_a^b f(x) dx$.

При этом понятие длины отрезка (интервала) вводилось "наивно", хотя и аксиоматически,— без введения понятия эталона меры (и его свойств) и описания процесса измерения. Конкретизация этих непредикативных понятий — содержание следующего этапа развития представлений о мере.

6. На этом непредикативном этапе развития описаны непредикативные (самоприменимые) свойства меры. Эталон меры является измеримым самим собой, но процесс измерения остаётся несамоприменимым (невозможно измерить сам процесс измерения⁵³).

При этом построение меры на числовой прямой выглядит так: задано направление прямой (недостижимые последователи $PN(\cdot)$ задают ориентацию прямой), на прямой посредством десятичных обозначений построена шкала десятичных обозначений чисел; десятичным числам (единичным отрезкам) сопоставляется определённая мера, связанная с внешним (не абстрактно математическим) миром (см. [207], [223]).

⁵³ В действительности возникают ещё более самоприменимые (нежели "одноэтажная" самоизмеримость эталона меры) структуры, например экономические процессы подлежат контролю, но и сам процесс контроля необходимо контролировать контролирующим процессом следующего урона и т. д. в "дурную" бесконечность; с другой, жизненной, стороны, внутренний контроль — совесть — является наилучшим (это самоприменимое свойство человека).

Глава 6. Периодизация истории понятия предела

В этой главе на основании общенаучной гносеологической закономерности описана схема шести периодов развития понятия предела,— от предыстории к развитию инфинитезимальных методов и современного понятия конструкций предела; указано, что границы периодов (переходы на следующие периоды) совпадают с таковыми для других отраслей математики; указано на связь понимания причинности и изменения понятия предела. Развитие понятия предела сопоставлено с периодами его изучения в системе образования, изложено по [217].

§12. Особенности периодизации понятия о пределе

Гносеологические основания отражения действительности в сознании человека описаны ранее в [179], [175], также ранее описывалось проявление этой шестиуровневой структуры отражения в истории отдельных наук: физики [202], химии [194], математики [184], [184] и др. [177], а также в развитии понимания причинности [192]. Онтологическая схема действительности: а) сознание, б) время (и информация как упорядоченное время), в) материально-вещественная часть действительности,— делит науки на: а) изучающие собственно человека (такие как: философия, психология, литературоведение и др.), б) изучающие логические и информационные структуры (математика)⁵⁴, в) изучающие материально-вещественную часть действительности (естественные науки: физика, химия, биология, механика и др.).

Онтологическая иерархия постижения истины [117] (соответствующая онтологической схеме действительности): iii) непосредственное созерцание, ii) абстрактно-логические рассуждения, i) практика (в т. ч. материально-вещественная),— наличествует и в развитии науки, см. [214].

Развитие указанных видов наук связано с развитием понятия причинности [192], [214]. Ниже, на основании исторического развития понимания причинности, описано развитие понятия предела (с предысторией). Особенности периодизации развития понятия предела таковы, что периоды соответствуют историческим периодам общенаучного развития.

В гносеологическом плане упомянутая последовательность усложнения понимания причинности такова (описана более подробно в [192], [214]):

⁵⁴ Экономика, как наука о сознательных социальных процессах, упорядоченных во времени и связанных с материальным производством, стоит особняком вне этой онтологической иерархии.

- 1⁵⁵) предпричинность (синкретизм);
- 2) ближайшая причина;
- 3) ряд (круг) причин (иногда сводимый к первопричине);
- 4) произвольная причинность (внешняя причинность природных явлений (закономерность) и отличная от неё внутренняя произвольная причинность человека);
- 5) социальная (массовая) причинность (обусловленность человека социальной средой, социальным положением; в описаниях явлений материального мира — статистическая причинность);
- б) свобода.

Далее, в соответствии с уровнями развития причинности, рассмотрено развитие понятия предела, включая предысторию и историю этого понятия.

§13. Периоды развития понятия о пределе

В соответствии с гносеологическими основаниями и развитием представлений о причинности, представлена схема периодов (уровней) развития понятия предела.

1.⁵⁶ (Древность, до V в. до н. э.). В предыстории (первый уровень развития, абстракции), на уровне синкретического мышления (уровня предпонятий), не выделялось каких-либо структурных понятий о пределе последовательности. Дальнейшее развитие понятия о пределе связано с переходом на следующий уровень отражения, следующий уровень осознания причинности.

2. (V – I вв. до н. э.). Известные апории Зенона (V в. до н. э.) были связаны с невозможностью представить на данном уровне абстракции (2-м) актуальную бесконечность, — бесконечность мыслилась только потенциальной, — в виде возрастающего ряда конечных величин. Примеры таковы [63, т. 1, с. 90] "дихотомия": "Движущееся тело никогда не достигнет конца пути, потому что оно должно дойти до середины, затем до середины остатка и т. д." Поскольку мыслилась возможной только конечная величина "шагов" тела (нет понятия актуальной бесконечности), то за конечное число шагов оно не достигает конца пути.⁵⁷

⁵⁵ Номера соответствуют уровням абстракции, периодам исторического развития.

⁵⁶ Цифра соответствует номеру периода развития.

⁵⁷ Аналогичны этой и другие апории Зенона. "Ахиллес и черепаха" [63, т. 1, с. 90]: "Ахиллес никогда не догонит черепаху, если в начале движения черепаха находилась на некотором расстоянии от него." Пусть начальное расстояние есть (а) и Ахиллес бежит в несколько (к) раз быстрее черепахи, когда Ахиллес пройдёт бывшее между ними расстояние, черепаха отползёт на a/k , когда Ахиллес пробежит и это расстояние, то черепаха отползёт на a/k^2 и т. д., между ними ненулевое расстоя-

см. след. стр. —>

То же самое в рассуждениях Аристотеля о бесконечности (неограниченности) ("Физика", кн. 3, гл. 7): "Наше <Аристотеля> рассуждение, отрицающее актуальность бесконечного⁵⁸ в отношении увеличения, как не проходимо до конца, не отнимает у математиков их исследования; ведь они теперь <IV в. до н. э.> не нуждаются в таком бесконечном и не пользуются им: [математикам] надо только, чтобы ограниченная линия была такой величины, как им желательно, а в том же отношении, в каком делится самая большая величина, можно разделить какую угодно малую" [9, т. 3, с. 121].

Бесконечное у Аристотеля — $\acute{\alpha}\lambda\epsilon\iota\rho\omicron$, приставка $\acute{\alpha}$ означает отрицание, $\lambda\epsilon\iota\rho\omicron$ — опыт, отсюда $\epsilon\mu\text{-}\lambda\epsilon\iota\rho\text{-}\acute{\iota}\alpha$ (эмпирия, опыт). Поэтому более правильный перевод $\acute{\alpha}\lambda\epsilon\iota\rho\omicron$ — неограниченный (невоспринимаемый опытом).

Действительно, математики в тот период развития науки пользовались конечными последовательностями. Например, "в основе "метода исчерпывания" Евдокса лежала следующая основная лемма: если даны две величины a и b , $a > b$, то, вычитая из величины a больше её половины, из полученного остатка больше его половины и т. д., получится через конечное число шагов остаток $a_n < b$ " [63, т. 1, с. 101].⁵⁹

Конечные последовательности имелись и у Архимеда при описании им квадратуры параболы. Архимед доказательство проводил для конкретных величин, и не употреблял никаких общих понятий. "Общая схема рассуждения ещё не была сформулирована, она повторялась заново для рассматриваемых конкретных величин" [63, т. 1, с. 101].

Переход к следующему уровню развития понятия предела связан с появлением представлений о бесконечных последовательностях (бесконечном ряде причин и следствий).

3. (I – XV вв.). На 3-м уровне развития указанные конечные рассуждения 2-го уровня становятся актуально бесконечными (в соответствии с изменением представлений о бесконечности и причинности, см. [214], [184]).

Например, при вычислении числа π использовались суммы с бес-

ние, но при этом во внимание принимается, как в "дихотомии", только конечное число шагов последовательности.

⁵⁸ Невозможность бесконечного (неограниченного) тела, невозможность бесконечного (неограниченного) чувственно-воспринимаемого, — см. "Физику" Аристотеля.

⁵⁹ "Отличие приведённого рассуждения от современного <XX в.> состоит в том, что <эта теорема> доказывается для любых последовательностей, имеющих предел, древние же не выделяли ни понятия последовательности, ни монотонно меняющейся величины, ни понятия предела" [63, т. 1, с. 102].

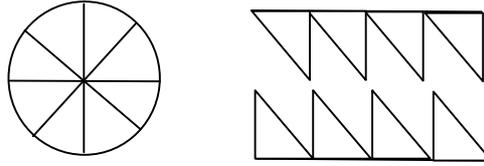


Рис. 6. Круг и схема его развёртки, для вычисления площади, через длину окружности [63, т. 1, с. 198]

конечным числом слагаемых (числовые ряды)⁶⁰.

Кроме того, бесконечные числовые ряды встречались и при операциях с прогрессиями и т. н. "треугольными" и "квадратными" числами, — вычислении суммы числовых рядов, полученных перемножением заданных исходных числовых рядов ("большое число правил суммирования <числовых рядов> приведено в работах Чжу Ши-Цзе (XIII в.), к ним относятся, например, ряды, возникающие при перемножении натуральных, треугольных и квадратных чисел с членами возрастающей или убывающей арифметической прогрессии" [236, с. 99].

Суммированием рядов занимались и индийские математики.⁶¹ "Начиная с Арибхатты I-го суммирование арифметических рядов постоянно интересовало индийских математиков. Была выработана специальная терминология и вычислены суммы многих рядов" [236, с. 149]. "В конце XIV в. индийские математики владели бесконечной убывающей геометрической прогрессией" [236, с. 151].

Этот (3-й) этап развития завершает предысторию понятия предела.⁶² Появление понятия предела в современном виде связано с появлени-

⁶⁰ При замене окружности вписанным многоугольником и вычислении площади этого многоугольника, при всё уменьшающейся длине его сторон, китайский математик Лю Хуэй указывал: "Чем меньше делить, тем меньше будет недостаток. Если делить всё дальше и дальше до тех пор, пока деление станет невозможным, то будет совпадение с окружностью и недостатка не будет" [236, с. 72].

⁶¹ Например, переход от вычисления длины окружности к вычислению площади круга выражался без формализации и подробного описания, указанием на рисунок, вида "смотри", см. рис. 6. В современной записи длина прямоугольника (правая часть рис. 6, в оригинале круг делился на 12 равных секторов [63, т. 1, с. 198]), полученного из совмещения фигур, равна половине длины окружности ($l/2$), высота — радиусу (r), его площадь — $r \cdot l/2$, с учётом того, что прямоугольник равновелик по площади кругу, площадь круга равна $r \cdot l/2 = r \cdot r \cdot \pi/2$.

(Для полноты изложения следовало бы упоминать предельный переход от круга к равновеликому ему прямоугольнику, но упоминаний об этом в математических работах того времени не встречалось).

⁶² Говоря об алгоритме нахождения наибольшего общего делителя у Евклида, отмечается, что "сами древние не выделили понятия непрерывной дроби, это произошло лишь в Новое время <с 4-го периода развития науки>" [63, т. 1, с. 76].

нием представлений о функции.

4. (XVI–XVIII вв.). Предельный переход в том виде, в котором он используется в настоящее время (XXI в.), появился с появлением понятия функции и произвольной причинности. Произвольно задаётся приращение аргумента функции Δx и получается приращение функции Δy , которые, например, в задачах на касательную, затем соотносятся между собой: $\Delta y/\Delta x$.

У Ферма П. (XVI в.) это описано следующим образом (в современной записи): значение производной функции в точке A находится так:

$$f'(A) = \frac{f(A + E) - f(A)}{E} \text{ при } E \rightarrow 0 \quad .^{63}$$

В дальнейшем представление о пределе было развито в работах Ньютона и других математиков XVII–XVIII вв. [136, с. 149 и след.].

Л. Эйлер в работе "Дифференциальное исчисление" рассуждал аналогично: "118. Так как буква ω до сих пор означала у нас <Эйлера> приращение или разность, на которую мыслится возрастающим переменное количество x , то теперь ω будет дифференциалом x и потому согласно принятому способу обозначения будет $\omega = dx$; следовательно, dx будет бесконечно малой разностью, на которую мыслится возрастающим x . Подобным образом дифференциал y будет обозначаться dy , и если y есть какая-либо функция x , то дифференциал dy будет обозначать приращение, которое принимает функция y , когда x переходит в $x + dx$ ".

⁶³ "Допустим, что A представляет собой какую-либо неизвестную в вопросе величину <переменную> (поверхность либо тело, или же длину в соответствии с предложенным), и выразим максимум или минимум через члены, содержащие A в каких-либо степенях. Затем возьмём первоначальной неизвестной значение $A+E$ и снова выразим максимум или минимум через члены, содержащие A и E в каких-либо степенях. Затем оба выражения для наибольшего и наименьшего приравняем, как говорит Диофант, друг другу и отбросим общие члены (после чего в каждом на обеих сторонах будет стоять либо E , либо какая-нибудь его степень). Затем разделим все члены на E или же на высшую её степень так, чтобы (по крайней мере) один из членов на какой-либо стороне был совершенно свободен от E . Затем на обеих сторонах отбросим члены, содержащие E или её степени, а то, что останется положи равным друг другу или же, если на одной из сторон ничего не останется, то — что сводится к тому же — положим отрицательные члены равными положительным. Решение последнего уравнения даст A ; когда же последнее известно, то максимум или минимум получится из основания ранее проделанного решения" [149, с. 154–155]. Здесь у Ферма описано нахождение аргумента A , при котором имеется нуль производной, соответствующий экстремуму в A :

$$f'(A) = \frac{f(A + E) - f(A)}{E} = 0 \text{ при } E \rightarrow 0 \quad .$$

[230, с. 104]⁶⁴.

Это функциональное представление о пределе совершенствуется на следующем уровне развития.

5. (XIX–XX вв.). На 5-м уровне развития (переходе к осознанию массовой причинности⁶⁵) появляются представления о формальной теории (аксиоматической), как совокупности всех выводов из аксиом,— т. е. такая теория — это результат предельного перехода от выводов из аксиом при любой длине выводов, стремящейся к бесконечности.⁶⁶

Для предикативных формальных систем имеются непреодолимые ограничения в виде теорем Гёделя (невозможность доказать непротиворечивость предикативной формальной системы средствами самой этой системы), см. рис. 7а.

⁶⁴ Далее у Эйлера рассматриваются дифференциалы разных функций, как результат отбрасывания бесконечно малых больших порядков по сравнению с первым:

"152. ... Следовательно, если мы <Эйлер> положим $y=x^n$, то будет

$$y^1 = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + (n(n-1)/1 \cdot 2) \cdot x^{n-2}dx^2 + \text{и т. д.},$$

и, следовательно, $dy=(y^1 - y) = nx^{n-1}dx + (n(n-1)/1 \cdot 2) \cdot x^{n-2}dx^2 + \text{и т. д.}$

В этом выражении второй и следующие члены исчезают <предельный переход> по сравнению с первым, следовательно, дифференциал от x^n будет $nx^{n-1}dx$, т. е. $dx^n = nx^{n-1}dx$ " [230, с. 115].

⁶⁵ На 5-м уровне появляются следующие понятия:

а) Формальная система, совокупность выводов из аксиом,— теория,— как предел всех (предикативных) выводов из аксиом. Оказалось, что при таком рассмотрении рассуждениями, находящимися "внутри" такой предикативной теории ("до предела"), невозможно ничего не сказать о самой теории (что выражено в теоремах Гёделя).

б) Принцип сжимающих отображений и теоремы о неподвижных точках.

в) Сходимость по вероятности, где вероятность – (случайная величина) – аналог массовой причинности.

⁶⁶ Лобачевский Н. И. писал о неевклидовой геометрии (1835) ("Воображаемая геометрия"): "Изложив новую теорию о параллельных, я <Лобачевский> утверждал, что сумму углов прямолинейного треугольника, независимо от измерений на самом деле, можно допускать менее половины окружности, и на таком предположении основать другую геометрию, которую я <Лобачевский> назвал воображаемой, и которая если не существует в природе, по крайней мере должна быть принята в Аналитике... Воображаемая Геометрия, как новая отрасль Математики, обнята была во всей обширности, чтобы не оставить более сомнения в справедливости и достаточных её началах. ... намерен я <Лобачевский> показать, что главные уравнения, которые нашёл я <Лобачевский> для зависимости сторон и углов треугольника в воображаемой Геометрии, могут быть приняты с пользой в Аналитике и никогда не приведут к заключениям ложным, в каком бы то ни было отношении" [88, т. 3, с. 16–17].

Тем самым видно, что у Лобачевского имелось представление о теории, как совокупности выводов из аксиом, с наивной верой в неложность такой воображаемой теории.

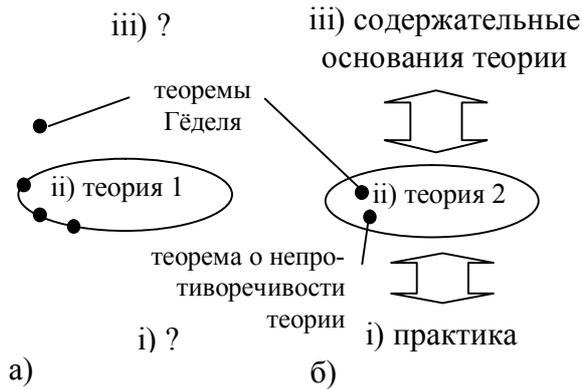


Рис. 7. Онтологическое сопоставление а) аксиоматической предикативной теории и б) непредикативной теории (на примере теории множеств);
i, ii, iii — онтологические уровни (см. в тексте)

При этом для предикативных теорий имеются два направления условного (ввиду недоказуемости их непротиворечивости) и мнимого развития:

а) в приложении к практике (этот подход страдает ограничениями и далеко не всегда верен, см. об ограничениях экономико-математического моделирования в [204, с. 11], ибо практика не всегда верна в нравственном смысле — электростанция и игорный дом хотя и приносят прибыль, но электростанция высвобождает общественно необходимое время, а игорный дом — поглощает).

б) формальный, — теория в самой себе в отрыве от практики ("копание" внутри теории, не выходя за рамки ограничений теорем Гёделя, в отрыве от практики, и без задумывания об основаниях теории).

Эти пути развития, а особенно формальный путь развития, приводят к кризису развития, см. [212] и §14.

Следующий уровень соответствует самопричинности (непредикативным, самоссылочным конструкциям).

6. (С кон. XX в.). На 6-м уровне появляются непредикативные (самоссылочные) конструкции. Появляется понятие о бесконечности, которая не может быть достигнута предыдущими величинами при их увеличении, — это недостижимые последователи типа \aleph_0 [207]⁶⁷. Мощность множества всех множеств M (самопринадлежащего) также не является пределом меньших возрастающих мощностей [207, с. 55, 72].

Эти понятия уже выходят за рамки понятия предела, являются "сверхпредельными".

⁶⁷ См. также о недостижимых кардиналах в [24, с. 233, 235].

Во множестве всех множеств, при каноническом его отображении на себя все самопринадлежащие множества являются неподвижными точками этого отображения.

"Беспредельная" величина мощности множества всех множеств не является пределом мощностей последователей типа \aleph_0 [189], [207, с. 55].

§14. Дополнение. Об онтологическом сопоставлении теорий

О кризисе формального пути развития науки писали не только математики [71], [72], но и практики науки.

Отмечалось "кризисное состояние теории управления..." [74, с. 3], причины которого "закключаются не только и не столько в усложнении управляемых объектов и ужесточении предъявляемых требований, сколько в кризисе самой теории управления... [74, с. 7–8]— "<к нач. 1980-х гг.> дифференциация научных потребностей, отрыв от практических потребностей приобрели господствующее положение в теории автоматических и автоматизированных систем" [74, с. 8]; "<в 1990-е гг.> происходит рост числа ветвей теории управления, дифференциация без интеграции, теория без практики" [74, с. 8] (см. также [127]).

Выход из теории в практику (без самоприменимости), без содержательных оснований, не допустим в области систем, содержащих самого человека.⁶⁸

Конструктивная практика для человека — самоприменима — не-предикативна,— вне (над) формальными (аксиоматическими) теориями в ценностной области⁶⁹.

Теории имеют содержательные основания в созерцательной (не-предикативной) области, соответствующей онтологическому уровню сознания (непосредственного созерцания, см. рис. 7б); затем эти содержательные основания (в соответствии с последовательностью постижения истины) формализуются, показывается непротиворечивость теории средствами самой теории (см. пример в [207, с. 14]),— затем эти содержательные основания и непротиворечивое их формальное изложение применимы на практике для упорядочения явлений действительности.

(Формальные теории сами по себе бесплодны для практики).

⁶⁸ В конце XX в. в [71] описывался кризис оснований математики, предлагавшийся в [72] выход сводился к приложению математики на практике и экспериментальной проверке теорий,— это отчасти применимо к системам, не содержащим человека (в физике, химии и т. п.), но совершенно ошибочно для систем, содержащих человека,— подробнее см. в книгах [214, с. 137–138], [215, с. 11–14].

⁶⁹ О 10-частной системе ценностей см. [191, с. 9], [204, с. 7–8].

Таблица 6. Периоды развития понятия предела

№ ур-ня	Содержание периода развития	Исторический период
1	Синкретизм, отсутствие структурных представлений о пределе, наглядность	Древность
2	Конечный ряд рассуждений, отсутствие единой схемы при исчерпывании	Античность, с IV в. до н. э.
3	Бесконечный ряд при исчерпывании, суммирование бесконечных числовых рядов	Средние века, с первых веков н. э.
4	Появление понятия предела (Ферма), бесконечные функциональные ряды и их суммы	Новое время, с кон. XVI в. н. э.
5	Предикативная формальная (аксиоматическая) система как предел выводов из аксиом	Новейшее время, с нач. XIX в.
6	Непредикативные, недостижимые ("сверх-предельные") конструкции, онтологическая полнота теорий	С кон. XX в.

Рассмотренная периодизация развития *понятия предела* соответствует периодизации общенаучного развития и периодам в истории математики. Содержание периодов предыстории и истории развития *понятия предела* сведено в табл. 6.

При изучении понятия предела в системе образования понятия усложняются в той же гносеологической 6-уровневой последовательности.

Глава 7. Уровни абстракции в математическом образовании

В этой главе описана иерархия математических понятий в образовательном процессе (достигаемая с возрастом человека). Эта иерархия связана с теми же структурными свойствами отражения действительности в сознании человека, которые рассматривались в истории науки и подробно описаны в 1-й части этой книги.

§15. Иерархия понятий в образовательном процессе

Наличие такой же, как в истории, иерархии математических понятий и в образовательном процессе, очевидно (ввиду единой структуры отражения действительности в сознании человека) [185].

Ребёнок в раннем детстве (1–3 года) начинает оперировать конкретными числами (распространённый пример такой операции — показывание им на пальчиках сколько ему лет).

Далее в дошкольном возрасте (3–6 лет) появляется представление о числе как наборе единиц, овладение навыками счёта и первоначальные представления об арифметических операциях.

В следующем психологическом возрасте (7–11 лет) появляются представления об уравнениях и неизвестной величине.

В четвёртом психологическом возрасте (12–16 лет) доступны представления о функциональных зависимостях.

Сознательное конструирование алгоритмов (не сводящихся к функциональным структурам) доступно со следующего психологического возраста (юности, примерно с 17 лет). В этом же возрасте — овладение понятием формальной системы, оператора и т. п.

Непредикативные конструкции доступны пониманию с завершающего психологического возраста (на старших курсах высшей школы, примерно с 21 года).

Поскольку вышесказанное очевидно, то рассмотрена иерархия понятий в курсе информатики.

§16. Курс информатики и закономерности познания

Построение курса преподавания дисциплины успешно тогда, когда оно наиболее соответствует основным и глубинным объективным закономерностям процесса познания. Изучение курса информатики является частью общего познания человеком действительности, и поэтому в нём проявляются те же закономерности, что и в общем процессе познания. Познанию свойственно отражение действительности в сознании человека, но при этом, в целокупности, действительность содержит и самого человека с его сознанием, и образ отражённой действительности, который отражается соответственно сам в себя; на схеме, конкретизирующей отражение, выявляется 6 последовательных уровней отражения

[157], [180].

Достижимым уровням отражения соответствуют определённые уровни обобщённости (абстрактности) понятий. Понятия первого уровня — обобщения массы чувственно-воспринимаемых образов в именовании предметов, на 2-м уровне возникают представления о собственном "я" человека, отвлечённые уже от чувственно-воспринимаемого и т. д. [159], при этом развитие самопознания опережает развитие логических построений и даёт основу для развития формально-абстрактного мышления. Кризис развития, при переходе с одного уровня обобщения на следующий [32], [31], разрешается позитивно, при центрировании процесса познания на самом человеке (на его самопознании). Деструктивному отклонению развития, приводящему в дальнейшем к отклоняющемуся, асоциальному, поведению, свойственна мало контролируемая фиксация внимания на чём-то внешнем по отношению к самому человеку. Таким образом, процесс познания, в усложнении системы абстрактных представлений, определяется в основном развитием самопознания, и ограничен уровнями самопознания, соответствующими определённым психологическим возрастам. Далее эта общая последовательность уровней познания (обобщения) конкретизирована на предметной области изучения информатики.

Уровни логико-информационных представлений

По мере усложнения структуры научных понятий в истории развития представлений о логических понятиях и операциях, выделяются 6 последовательных стадий, соответствующих последовательному достижению уровней обобщения. Стадии исторического развития этих представлений по содержанию совпадают с развитием при взрослении человека [162]. Последовательность уровней, соответствующих психологическим возрастам и историческим стадиям развития, такова:

1. Именованное предметов.
2. Логика объёмов понятий.
3. Понятие логической переменной, операции классификации и серии [115].
4. Гипотетико-дедуктивные рассуждения [115], [227].
5. Представления о формальных системах, алгоритмах.
6. Непредикативные (ценностные) рассуждения.

Первым двум стадиям развития свойственно формирование логики как таковой (логики объёмов понятий), вторым двум стадиям, средним возрастам, — формирование способности упорядочения процессов во времени, третьи две стадии, старшие возрасты, связаны с процессами социализации личности.

Естественно, что на каждом уровне, на каждом психологическом возрасте может быть усвоено только определённое содержание преподаваемого предмета, соответствующее достигнутому уровню обобщённости представлений ребёнка. Границы усваиваемости содержания определённого уровня абстракции достаточно жёстки и не могут быть изменены по желанию преподавателя [162] ввиду того, что структура уровней обобщения физиологически есть структура нейронных связей мозга [129].

Поуровневое содержание курса информатики

Соответственно достаточно жёстко заданной последовательности уровней обобщённости логических понятий выстраивается и содержание курса информатики [195].

На втором психологическом возрасте дошкольникам доступны простые рассуждения в логике объёмов понятий, формирующиеся при овладении речью и навыками вещественно-предметной деятельности.

С младшего школьного возраста (3-го психологического возраста), доступны такие логические операции, как "классификации и сериации" (Ж. Пиаже [115]), сводящиеся к упорядочению объектов, что выражается в наполнении содержания курса информатики на этом этапе её изучения, понятийным аппаратом и соответствующей деятельностью в виде анализа упорядоченных списков, выполнения классификаций, работы с информацией в каталогизированном и табличном⁷⁰ виде. К окончанию начального образования имеются элементарные навыки работы с источниками информации (как в печатном виде в виде книг, так и в электронном), что важно для дальнейших уровней образования, требующих и некоторой доли самостоятельного поиска информации.

В среднем школьном возрасте (4-й психологический возраст) доступны представления об условных и упорядоченных во времени конструкциях, что позволяет овладевать (на уровне пользователя) широко распространёнными программными продуктами (графическими редакторами, текстовыми, табличными процессорами, интернет-браузерами и т. п.). Таким образом, к окончанию неполного среднего образования имеются навыки создания электронных документов, что важно для дальнейшей профессиональной деятельности и продолжения образования.

В старшем школьном возрасте (начало 5-го психологического возраста) доступно абстрактное представление об алгоритме как о спо-

⁷⁰ Навык работы с таблицами, сформированный на этом этапе, является основанием для усвоения на следующем этапе более абстрактного понятия функции в курсе математики.

собе достижения некоторой конечной заданной цели⁷¹. Содержание курса на этом этапе (в средней школе) — это усвоение понятия алгоритма и начала алгоритмизации и программирования. Этот этап продолжается в высшей школе при выборе соответствующей специализации.

На заключительном этапе (6-й психологический возраст) содержание деятельности — приложение полученных навыков к решению прикладных задач, обеспечивающих воспроизводство системы ценностей (воспроизводство структуры общества). Ценностные рассуждения и деяния непредикативны, т. е. сам субъект — неотъемлемая часть этих рассуждений.

Таким образом, видно, в сравнении с историческим развитием логических представлений, что формирование иерархии математических понятий в истории и при взрослении связано с одной и той же гносеологической шестиуровневой закономерностью отражения действительности в сознании.

⁷¹ Преподавание основ алгоритмизации и программирования раньше начала 5-го психологического возраста необоснованно, ибо дети ранее этого возраста ещё не готовы к усвоению столь абстрактных конструкций, но могут оперировать с программами как пользователи.

Часть 3. История и периоды развития естественных наук

Глава 8. Изменение представлений о причинности

В этой главе описано изменение представлений о причинности, проходящих уровни абстракции, соответствующие уровням отражения действительности в сознании человека. С использованием представлений о причинности прослежены периоды развития естественных наук, в которых прикладывается математика. Представления о причинности использованы в следующей части при анализе развития математики внутри 5-го исторического периода (постепенного перехода с 5-го на 6-й период).

§17. Гносеологические уровни и развитие понимания причинности

История представлений человека о себе самом и об окружающем мире связана с историей изменения понимания причинности. Развитие понятия причинности в истории науки соответствует последовательности достижения определенных уровней отражения действительности в сознании человека. Линия развития "предпричинность — ближайшая причина — последовательность (круг причин) — произвольная причинность — массовая (социальная) причинность — самопричинность" иллюстрируется типичными примерами в соответствующих исторических периодах науки; историческое развитие причинности содержательно (поуровнево) совпадает с развитием представлений о причинности при взрослении человека (по психологическим возрастам).

Методологической особенностью историко-философского исследования является необходимость невнесения в исследуемый материал собственных представлений, т. е. достигнутый в определенный исторический период уровень развития науки требуется интерпретировать в пределах сложности, уровня абстракции, свойственного именно этому уровню; не привнося конструкций с более абстрактных уровней. При таком методологическом подходе к исследованию легко видеть относительное развитие представлений в течении истории, а также выявлять однородные периоды и свойственные началу новых периодов новообразования. Ключевым аспектом для понимания последовательности этапов развития естественных наук (химии, физики и т. д.) является выявление последовательности этапов развития понимания причинности. Это отлично от исторического описания развития таких наук, как: математика [184], языкознание⁷², оперирующих сразу абстрактными кате-

⁷² Философия истории литературы отличается тем, что художественное литературное описание действительности напрямую связано с уровнем самоосознания человека [164]. Таким образом, онтологически, имеются 3 особенных, но связанных между собой, исторических линии развития науки и культуры: а) литература и фило-

см. след. стр. —>

горяими, безотносительно выявления причинно-следственных связей, хотя влияние того или иного понимания причинности в различные периоды развития на содержание математических или лингвистических теорий несомненно заметно.

Ниже описана историческая последовательность этапов развития причинности с иллюстративными примерами, соответствующими определенным периодам [192].

Методологическим основанием для выделения последовательности этапов развития представлений о причинности в истории науки является гносеологическая схема отражения действительности в сознании человека. Каждый уровень отражения есть и определенный уровень абстракции понятий и представления, например, первый уровень – именование материальных предметов внешнего мира, в котором имя есть обобщение множества единичных чувственных восприятий того или иного предмета или группы предметов. Так, слово “камень” обозначает множество чувственных восприятий одного и того же камня в разные моменты времени (при первоначальном обучении ребенка языку) или множество восприятий сходных предметов — камней. Далее название определенного цвета также обозначает множество сходных чувственных восприятий и упомянутые понятия, как то: имя предмета или наименование цвета являются понятиями первого уровня абстракции, а вот понятие вообще “цвет” является обобщением восприятия отдельных цветов и могло бы относиться ко второму уровню абстракции, но второй уровень абстракции по схеме отражения действительности и по логике развития представлений связан с наличием тех или иных качеств субъекта, связанных с понятием. Более подробно иерархия абстракций рассмотрена в [173], [177]. Развитие понятия причинности описывается как последовательность перехода от одного уровня абстракции к следующему, обобщающему на достигнутом уровне в новом качестве множество представлений предыдущего уровня.

§18. Этапы развития понимания причинности

Последовательность шести этапов развития понимания причинности такова.

1⁷³. В древности, в доантичный период, не имеется явных представлений о причинности, т. е. в философских трактатах того времени нет яв-

софия, связанные с непосредственным созерцанием и самоосознанием человека, б) математика и языкознание, оперирующие абстрактно-логическими категориями, в) физика, химия и т. п. науки, описывающие материально-вещественные процессы действительности.

⁷³ Номер соответствует уровню развития.

ного определения причины и следствия, явления описываются в их внешне видимом неразрывном единстве (такие представления в психологии называются синкретизмом, свойственным первому психологическому возрасту). Мифологический взгляд на мир также не имеет явных представлений о причинно-следственных связях. В эпической литературе причинно-следственные связи сюжета также не выделяются.

2. Начиная примерно с пятого века до нашей эры, в культурах различных стран уже появляются представления о причинно-следственных связях, причём на этом этапе речь идет только о ближайшей причине, т. е. глубина прослеживания причинно-следственных связей равняется одному шагу. Показательны в этом смысле работы Аристотеля, где он подробно рассматривает соотношение причины и следствия, рассматривая только ближайшую причину⁷⁴. Такое представление о причинности (ближайшей причине) господствовало в философских сочинениях до первых веков нашей эры.⁷⁵

3. Уже у неоплатоников (Плотин, Прокл и др., нач. н. э.) имеются представления о бесконечном ряде причин, имеющем своим началом первопричину [120, с. 494, §97]⁷⁶. У Боэция в трактате “Каким образом субстанции могут быть благими в силу того, что они существуют, не будучи благами субстанциальными” имеются аналогичные рассуждения, говорящие о том, что бытие вещей проистекает из первого бытия (блага),

⁷⁴ Аристотель "Физика", кн. 2, гл. 3, 194b16-195a5: "Установив всё это, мы должны рассмотреть причины — каковы они и сколько их по числу. Так как наше исследование предпринято ради знания, а знаем мы <Аристотель>, по нашему убеждению, каждую [вещь] только тогда, когда понимаем, "почему [она]", (а это значит понять первую <ближайшую> причину),... зная их начала мы могли попытаться свести к ним каждую исследуемую вещь. В одном значении причиной называется то, "из чего",... например медь — причина этой статуи... В другом значении [причиной будут] форма и образец... (например, для октавы отношение двух к единице и вообще число)... Далее [причиной называется то], откуда первое начало изменения или покоя; например давший совет есть причина, для ребенка причина — отец... Наконец, [причина] как цель, т. е. "ради чего"; например причина прогулки — здоровье, почему он гуляет? Мы скажем: "чтобы быть здоровым" — и, сказав так, полагаем, что указали причину... Итак, [слово] "причина" употребляется приблизительно в стольких значениях" [9, т. 3, с. 87–88].

⁷⁵ Замечания о "перводвигателе" являются позднейшей средневековой вставкой в текст Аристотеля, см. [9, т. 3, с. 7].

⁷⁶ Секст Эмпирик (II в н. э.) упоминал бесконечный ряд причин ("Пирроновы положения, кн. 3, 24): "Кроме того, если мы <Секст> спрашиваем о существовании причины, то будет непременно необходимо, чтобы он и для причины того, что есть какая-нибудь причина, дал причину, а для неё другую, и так до бесконечности" [128, т. 2, с. 322].

как из первопричины, к которой они причастны [21]. Далее развитие этих взглядов на причинность происходит в арабских странах, унаследовавших и сохранивших философскую традицию Римской империи. Например, в сочинениях Ибн-Сины также упоминается ряд причин, восходящих к первопричине [60]⁷⁷. Аналогичны этому взгляды Омара Хайама (XII в.) [111]. И далее, когда арабская традиция была открыта средневековой Европой, эти же взгляды имелись и у средневековых европейских философов,— например, Николай Кузанский (XV в.) [75]⁷⁸ в своих философских сочинениях также высказывал аналогичные представления о бесконечном ряде причин, восходящем к первопричине.

4. Примерно с XVI в. возникает представление о произвольной причинности, т. е. о том, что причиной наблюдаемых явлений может быть и воля человека. Такие представления являются основой для развития экспериментальной науки. Эксперименты Г. Галилея [34], [35] и других естествоиспытателей основаны на таком понимании причинности, что человек произвольно повторяет начальные условия опыта и наблюдает закономерности, следующие из этих начальных условий, т. е. как бы параллельно существует внешняя по отношению к человеку причинность явлений (естественный ход событий), и внутренняя по отношению к человеку причинность, позволяющая произвольно ставить эксперименты, формулировать законы окружающего мира и использовать их в своей произвольной деятельности.

⁷⁷ В трактате Ибн-Сины "Даниш-Намэ" ("Книга знания") имеются следующие представления о цепи причин: "Действующие причины чего-либо, в одном [случае] бывают причиной, а в другом — причиной причины; они имеют предшествующие и последующие по своей природе и не могут быть бесконечными. ... Всюду, где имеется такой порядок, имеется некая первая причина" [60, с. 170]. "Необходимо-сущее едино в действительности, о чём мы уже говорили, а все другие вещи являются, так сказать, не необходимо-сущими, то есть возможно-сущими, и все они имеют причину, а причины не являются бесконечными. Стало быть, либо они восходят к первопричине и она есть необходимо-сущее, либо возвращаются к себе самим, как например, А есть причина Б, а Б в свою очередь причина В, которая служит причиной Г, тогда как Г является причиной А. Таким образом, всё это в целом образует единую систему следствий, которая должна иметь причину извне, как уже было доказано... Стало быть, каждое следствие восходит к необходимо-сущему, а необходимо-сущее является единым, таким образом, все следствия и всё возможно-сущее одинаково восходят к единому необходимо-сущему" [60, с. 183].

⁷⁸ Кузанский останавливается в бесконечном ряду причин на особенной первопричине ("Охота за мудростью", 16): "Предел, где успокаиваются все мои <Кузанский> предположения в охоте за мудростью,— в единстве творящей причины всего, всеобщей возможности стать; в знании, что она предшествует всякой возможности стать как её предел" [75, т. 2, с. 354].

5. Если предыдущему этапу развития причинности было свойственно то, что естественно-научные закономерности описывались некоторыми функциями (были в достаточной мере детерминированы), то следующий этап в развитии представления о причинности начинается с представлений о недетерминированных массовых событиях. Причем представление о таких массовых событиях имелись не только в естественных науках (статистической механике и др.), но и в науках, описывающих человека и общество, а также в литературе. Описание таких представлений в истории литературы изложено отдельно в [164]. Кратко же общее место гуманитарных наук, использующих это понимание причинности резюмируется словами поэта: “И вот общественное мнение! / Пружина чести, наш кумир! / И вот на чем вертится мир!” (А. С. Пушкин, "Евгений Онегин", гл. 6, строфа 11)⁷⁹.

Развитие этих представлений (о движущей силе общественного мнения) в гуманитарных науках привело к тому, что состояние сознания отдельного человека пытались представить как результат влияния на него со стороны общества (отрицательные результаты экспериментов Шибутани в 60-е гг. XX в., по определению детерминированности сознания отдельного человека общественным сознанием, показали недостатки такого взгляда на причинность [229]).

В естественных науках развитие такого взгляда на причинность дало свои плоды, но имело и ограничения, следующие из ограничений математических методов описания материальной действительности; так, например, имеются строгие утверждения, показывающие необходимость эксперимента (т. е. необходимость присутствия самого человека) для описания химических закономерностей. В математической же науке была показана неразрешимость ряда массовых проблем, а также неалгоритмируемость процесса познания, также требующего непосредственного присутствия человека [176], [182].

6. Следующий уровень развития понятия о причинности, соответствующий гносеологической схеме отражения, содержит представление о самопричинности, не сводимой ни в одном из предыдущих видов причинности. Низлежащие типы причинности имели предикативный характер, в них причина и следствие были отделены друг от друга, даже при произвольной причинности человек манипулировал чем-то внешним по отношению к нему. В непредикативной же самопричинности причина и следствие имеют общую часть. В естественных науках, в частности в физике, это выражается в так называемых самосогласованных теориях,

⁷⁹ Ср. Грибоедов А. С. "Горе от ума", действ. 4, явл. 10, монолог Чацкого: "...И вот общественное мнение! / И вот та родина...".

имеющих логический круг самообоснования. В гуманитарных науках пример самопричинности — это высвобождение общественно необходимого времени в экономике, связанное с надвременной 10-частной системой ценностей (потребностей человека) [191].

§19. Иерархия понимания причинности

Развитие понятия причинности в истории описано в соответствии с методологическими основаниями, вытекающими из гносеологической схемы отражения действительности в сознании (см. рис. 2). Развитие представлений о причинности по мере взросления человека проходит те же самые стадии в связи с тем, что обусловлено той же самой гносеологической структурой отражения действительности в сознании [171]. В наличном сознании человека имеется таковая же гносеологическая иерархия понимания причинности.

Схема периодов развития представлений о причинности приведена в табл. 7.

Таблица 7. Этапы развития представлений о причинности

№ ур-ня	Новообразования в представлении о причинности	Исторический период
1	Допричинность (синкретизм)	Древность
2	Первая, ближайшая причина	Античность, с VII в. до н. э.
3	Бесконечный ряд (круг) причин	Средние века, с I в. н. э.
4	Произвольная (от человека) во времени причинность. Причины естественные (природные) и произвольные (причинная база функционального эксперимента)	Новое время, с XVI в. н. э.
5	Неопределённо большие совокупности причин ("массовая", социальная причинность)	Новейшее время с нач. XIX в.
6	Самопричинность ⁸⁰	С кон. XX в.

В онтологическом плане имеются в общем три типа причинности:

- 1) естественная причинность (материального мира),
- 2) произвольная причинность во времени,
- 3) надвременная, непредикативная причинность (самоприменимая).

⁸⁰ В онтологическом плане такая самопричинность — это третий (высший) тип причинности: 1) естественная причинность (материального мира), 2) произвольная причинность во времени, 3) надвременная, непредикативная причинность.

Глава 9. Периодизация истории физики

В этой главе на основании общегносеологических закономерностей описана 6-уровневая последовательность усложнения физических представлений. Показано, что на высших уровнях развитие физики связано с развитием математического аппарата описания физических явлений. Периоды, выделенные в развитии физики, совпадают в целом с периодами развития иных наук (математики, химии и т. п.). В связи с тем, что общегносеологическая закономерность усложнения уровня абстракции понятий наблюдается и в развитии отдельного человека, указано, что изучение физики в системе образования (по стадиям усложнения понятий) повторяет историческое развитие физики.

§20. Гносеологическая структура и развитие физических понятий

При выделении общегносеологической закономерности усложнения понятий (достижения определённых уровней абстракции, обобщённости представлений о мире), обусловленной определённой 6-уровневой структурой отражения действительности в сознании [179], [159], [180], ранее было описано развитие некоторых иных наук (математики, химии) с выделением периодов развития, соответствующих достижению и развитию представлений на определённом уровне отражения (абстракции) [183], [184] [194]; также было описано развитие понимания причинности в истории науки [192]. Закономерности упомянутого развития едины и обусловлены структурой отражения действительности; описание развития физических представлений, следующее далее, использует те же общегносеологические основания [175], [179], [177].

Основанием для гносеологической структуры отражения действительности являются онтологические представления, см. рис. 1; тогда легко видеть, что посредством отражения действительности на первых ступенях описывается материально-вещественный мир, на средних ступенях — процессные явления, включающие в описание время, на верхних ступенях — рефлексивные конструкции, включающие в описание действительности и самого описывающего её человека⁸¹. Тогда предварительно видно, что в античности открыты законы рычага (закон Архимеда и т. п.) — законы механические, не требующие для их описания представлений о времени. В средние века и в новое время описываются закономерности, учитывающие время, с XIX в. — закономерности и теории, обобщающие множество явлений, протекающих во времени, и уже отвлекающиеся от времени, — к более общим абстракциям (закон сохранения энергии и т. п.). Ниже эта последовательность открытий и

⁸¹ Эта последовательность ступеней в обратной последовательности соответствует этапам постижения истины [117].

новообразований прослежена более подробно, по уровням абстракции.

§21. Периоды развития физических представлений

Периоды развития физических представлений соответствуют уровням обобщения (абстракции) понятий, соответствующим определённым уровням отражения действительности в сознании (см. рис. 2). Далее эти периоды развития проиллюстрированы по письменным источникам некоторыми характерными для них примерами мышления в предметной области физических представлений⁸².

1⁸³. (Древность). Конкретные (а не абстрактные) представления о предметном мире наблюдаемы в древности. Первая стадия обобщения (первый уровень отражения, абстракции) — это обобщение множества чувственных восприятий, выражающееся наименованием окружающих предметов. "Данные археологии и этнографии подтверждают, что мышление людей на ранних стадиях развития было очень конкретным... У лапландцев есть 20 названий для льда, 11 — для холода, 41 — для снега, 26 — для заморозков и оттепели... Но вместе с такой исключительной наблюдательностью к окружающему <миру> бросается в глаза скудость абстрактных обобщающих терминов. Так, пользуясь особыми обозначениями для разновидностей попугаев, южноамериканские бакири не имеют общего наименования попугая. То же относится и к пальмам. Отсутствуют также общие, родовые понятия: «животное», «минерал» и т. п." [58, с. 12]. Таково же по содержанию представление о конкретных числах в математике [63, т. 1], названиях веществ в химии [194]; при этом представления о причинности отсутствуют, явления наблюдаются неотрывно одно от другого, синкретически, говоря термином возрастной психологии [31], [114], описывающей этот уровень абстракции (1-й психологический возраст). Как выражение этого уровня развития возникает представление о неделимых объектах восприятия (неделимых чувственно-воспринимаемых образах)⁸⁴.

⁸² Иные истории физики [113], [134], [138], [13] и др. фактографически перечисляли достижения физической науки, не пытаясь выделить однородные периоды её развития.

⁸³ Номер соответствует периоду развития физики.

⁸⁴ "Атомы" у Демокрита — это лишь чувственные образы, — "видики", по словам А. Ф. Лосева: "обычное наименование атомов у Демокрита как раз и есть "фигуры" (shemata), или "видики" (eidola). <...> Это маленькие, далее уже неделимые "видики", статуэтки, картинки, портретики бытия" [87, с. 499–500]. (Демокрит указывал, что "может быть атом размером с весь мир" [97], Аэций I, 12, 6: "Демокрит утверждает, ... что может существовать и атом, величиной равный всему нашему миру." [5, с. 119]). Атомы здесь — это образы восприятия, а не материально-вещественные объекты.

2. (С IV в до н. э.). На следующем уровне развития наблюдается осознание отличия чувственного восприятия от мышления (Аристотель "О душе"). И познание в физической области сводится к познанию ближайшей причины (см. п. 2 описания развития представлений о причинности).

Аристотель (IV в. до н. э.) так пишет о познании ("Физика", Кн. 1, гл. 1, 184a10-25): "Так как знание и научное познание возникает при всех исследованиях, которые простираются на начала, причины и элементы, путём их уяснения (ведь мы <Аристотель> тогда уверены, что знаем ту или иную вещь, когда уясняем её первые причины, первые начала и разлагаем её вплоть до элементов), то ясно, что и в науке о природе надо попытаться определить прежде всего то, что относится к началам... Поэтому надо идти от вещей [воспринимаемых] в общем, к их составным частям: ведь целое скорее уясняется чувством, а общее есть нечто целое, так как общее охватывает многое наподобие частей" [9, т. 3, с. 61].

Такое познание первой (ближайшей причины) далеко не доходит до экспериментальной науки, появляющейся на 4-м уровне развития.⁸⁵

Как указывали иные историки науки (Н. А. Любимов): "под опытным познанием, в котором по Аристотелю начало всего нашего знания, философ <Аристотель> понимает ежедневное, обыкновенное чувственное наблюдение окружающих вещей, дополняемое, впрочем, по отношению к естественным предметам любознательным их собиранием и рассмотрением" [94, т. 1, с. 18-19].

Этот опыт позволяет делать некоторые наблюдения над свойствами тел, например, объяснять испарение воды тем, что она состоит из мельчайших частиц (Тит Лукреций Кар, I в. до н. э.)⁸⁶.

⁸⁵ "... Есть целая пропасть между древним естествознанием и естествознанием нашего времени. Стоит прочесть несколько страниц какого-либо древнего произведения, трактующего о явлениях природы,— особенно Аристотеля, главного представителя древнего знания, истолкованием сочинений которого жила средневековая наука,— чтобы убедиться, что эти произведения плод совсем иного научного приёма, иного мировоззрения, чем трактаты нового времени <4-го уровня развития>. В многочисленных сочинениях, излагающих историю древней философии и науки, есть много отдельных указаний на различие и в началах и в характере исследований древних учёных, сравнительно с учёными нового времени. Но сжатого и точного ответа на вопрос, в чём существенное различие древней науки от науки нового времени, трактаты эти не дают.... Усмотрению коренного различия мешает ещё то, что историки философии мало сведущи в естествознании" [94, т. 1 с. 15–16].

⁸⁶ Тит Лукреций Кар в поэме "О природе вещей" (кн. I, ст. 304-328) обосновывает то, что тела состоят из мельчайших частиц, ближайшей причиной; вот фрагмент этих рассуждений [91]:

"И, наконец, на морском берегу, разбивающем волны,

см. след. стр. —>

В этот же период происходит открытие простейших механических законов [55], описанных в трактатах Архимеда (III в. до н. э.) [12] "О равновесии плоских фигур" (закон рычага), "О плавающих телах" (закон Архимеда). Эти законы являются чисто механическими, не содержат в своём описании понятия времени.

Работы Архимеда описывали механические закономерности. В его трактате "О равновесии..." рассмотрены свойства рычага, в трактате о плавающих телах описывается то, что сейчас называется законом Архимеда, при этом методологически те и другие закономерности этого периода связаны с описанием ближайшей причины (равновесие описывается как равная нагруженность рычагов весов; плавание тел, как свойство отношения их объёма к их весу); законов, описывающих изменение свойств во времени, в этот период ещё не было открыто.

Понятие времени при описании свойств равновесия рычага появляется в физике на следующем уровне развития.

3. (С первых веков н. э.). Открытые ранее, на предыдущем этапе развития, механические законы в следующем периоде развития истолковывались с применением представлений о времени.

Трактат III в. "Механические проблемы"⁸⁷ в описании приложения принципа рычага отличается от античной науки предыдущего периода развития физики [58, с. 54-62], [57],— в нём равновесие рассмат-

Платье сыреет всегда, а на солнце вися, оно сохнет;
Видеть, однако, нельзя, как влага на нём оседает,
Да и не видно того, как она исчезает от зноя.
Значит, дробится вода на такие мельчайшие части,
Что недоступны они совершенно для нашего глаза.
Так и кольцо изнутри, что долгое время на пальце
Носится, из году в год становится тоньше и тоньше;
Капля за каплей долбит, упавая, скалу; искривлённый
Плуга железный сошник незаметно стирается в почве;
И мостовую дорог, мощённую камнями, видим
Стёртой ногами толпы; и правые руки у статуй
Бронзовых возле ворот городских постепенно худеют
От припадания к ним проходящего мимо народа.
Нам очевидно, что вещь от стирания становится меньше,
Но отделение тел, из неё каждый миг уходящих,
Нашим глазам усмотреть запретила природа ревниво.

...

Также в вещах, что хиреть начинают от старости дряхлой,
Как и в приморских камнях, изъеденных едкою солью,
Ты не усмотришь того, что из них каждый миг убывает.
Так при посредстве невидимых тел управляет природа."

⁸⁷ Авторство этого трактата не установлено, см. [103].

ривается при воображаемом движении неравноплечного рычага (появляется параметр времени в рассуждениях, 3-й уровень абстракции). Также в трудах Герона Александрийского (нач. н. э.) при рассмотрении равновесия используется понятие скорости [55, с. 59], [13, с. 101–102],— рассуждения о скорости не были свойственны всей античной науке.

Далее физические представления используют понятие времени в астрономических наблюдениях, развивавшихся на арабском Востоке [63]. Понятие времени с этого периода уже неотъемлемо имеется в физических представлениях, и в течение периода, в связи с описанием движения, конкретизируется [59]. В этом периоде в описании физических явлений имеется ряд последовательных причин, а также повторяющиеся явления (астрономические наблюдения). Произвольный эксперимент появляется на следующей, 4-й стадии развития (см. описание развития причинности выше и в [192]).

4. (С XVI в.). Опытная физическая наука возникает с появлением понятия о произвольной причинности,— о том, что человеческая воля произвольно может создавать аналоги природных явлений,— в простейшем случае падения, движения тел и т. п.

Г. Галилей (нач. XVI в.) в трактате "Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки", писал ("День третий"): "Мы <Галилей> создаём совершенно новую науку о предмете чрезвычайно старом. В природе нет ничего древнее движения и о нём философы написали немало томов и немалых. Однако я <Галилей> излагаю многие присущие ему и достойные изучения свойства, которые до сих пор не были замечены, либо не были доказаны" [35, с. 233]. Далее Галилей рассматривал равномерно ускоренное движение и фактически вывел законы движения: зависимости пройденного пути и скорости свободно падающего тела от времени и др. Его выводы подкреплялись описанием проводимых им экспериментов: скатывания шара с наклонной плоскости и т. п. Описанные им законы движения (в т. ч. равноускоренного) обобщали некоторые множества проведённых экспериментов. Этот принцип эксперимента и развивался в течение 4-го этапа развития физики.

И. Ньютон (XVII в.), как и Галилей, описывая законы движения, в предисловии к "Математическим началам...", писал: "Вся трудность физики, как будет видно, состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления. Для этой цели предназначены общие предложения <законы Ньютона>..." [108, с. 3].

Закон выводился и подтверждался множеством опытов: "Лучшая

и вернейшая метода изучения природы, пишет Ньютон в своём ответе Пардису (Phil. Trans., 1672 г.), по поводу опытов с призмой,— состоит, полагаю, в том, чтобы прежде всего тщательно исследовать свойства вещей, узнавая эти свойства помощью опытов, а потом весьма осторожно переходить к гипотезам для их объяснения, ибо гипотезы пригодны только для объяснения свойств вещей, но не ими должны указываться эти свойства, разве только в смысле побуждения к опытам. Ибо если бы гипотетическую возможность стали признавать за истину и действительность, то я не нахожу, какая достоверность могла бы быть достигнута в науке" [94, т. 3, с. 342].⁸⁸

Ньютоново 4-е правило умозаключений в физике таково: "В экспериментальной философии положения, выведенные путём индукции из явлений, должны быть, несмотря на противопологаемые гипотезы, почитаемы за вполне верные, или чрезвычайно близкие к таковым, пока новые явления или ещё более подтвердят их, или покажут, что они подлежат исключениям. Так должно быть, дабы доказательства, добытые путём индукции, не отвергались на основании гипотез" [94, т. 3, с. 341], см. тж. [108, с. 504].⁸⁹

Таким образом, физика на этом этапе развития открывала законы, выражающиеся в виде функциональных зависимостей и проверяемые множеством опытов, подтверждающих согласие наблюдаемых явлений с их теоретическим (функциональным) описанием.⁹⁰ Однако на этом

⁸⁸ "Свойства тела, говорит он <Ньютон>, познаются только помощью опыта, и мы должны признавать только те из них, кои находятся в постоянном согласии с опытами и не могут быть ни увеличены, ни отняты. Надлежит, очевидно, не составлять снов, противных течению опытов, и не удаляться от аналогии природы, ибо природа обычно проста и согласна с собою" [94, т. 3, с. 339] см. тж. [108, с. 503].

⁸⁹ Аналогичные приёмы мышления использовались и Коперником (XVI в.) [28, с. 270].

⁹⁰ В этот 4-й период развития физики были открыты такие законы:

Принцип относительности (Г. Галилей, XVII в.),
Закон упругой деформации (Р. Гук, XVII в.),
Всемирного тяготения закон (И. Ньютон, XVII в.),
Закон сохранения импульса (Р. Декарт, XVII в.),
Законы Ньютона,
Закон Авогадро (А. Авогадро, 1811),
Закон Бойля-Мариотта (Р. Бойль, Э. Мариотт, XVII в.),
Закон Гей-Люссака (Ж.-Л. Гей-Люссак, 1-я пол. XIX в.),
Закон Дальтона (Дж. Дальтон, кон. XVIII в.),
Закон Паскаля (Б. Паскаль, XVII в.),
Закон Шарля (Ж. А. С. Шарль, кон. XVIII в.),
1-й и 2-й законы термодинамики (С. Карно, 1-я треть XIX в.),
Закон Ампера (А.-М. Ампер, 1-я треть XIX в.),
Закон Кулона (Ш. О. Кулон, кон. XVIII в.),

см. след. стр. —>

этапе законы ещё не объединяются обобщающей их теорией,— теории появляются на следующем этапе развития.

5. (С середины XIX в.). Наиболее показательный пример построения теории, обобщившей ряд законов,— это пример теории электромагнетизма, обобщившей ряд законов, открытых на предыдущем этапе. Аналогично законам механики, открытым в XVI–XVIII вв. (закон Гука, Законы Ньютона и т. п.), М. Фарадеем был экспериментально открыт и описан ряд законов, относящихся к электромагнетизму (закон электромагнитной индукции и т. п.) [146], [145]. Каждый из этих законов (электромагнетизма) был в отдельности хорошо исследован и описан. Далее следовало новообразование в виде теории электромагнетизма, обобщающей это множество известных законов, посредством более общего математического аппарата, использованного Дж. Максвеллом.

Максвелл (2-я пол. XIX в.) в трактате «О фарадеевых силовых линиях» писал о физической теории электромагнетизма: "Современная теория электричества и магнетизма, охватывающая все относящиеся сюда явления, не только должна уяснить связь между покоящимся электричеством и электричеством текущим, но также между притяжением и индуктивными действиями в обоих состояниях. Такая теория должна полностью удовлетворять законам, математическое выражение которых уже известно <! переход на 5-й уровень обобщения — от законов к теории>, и, кроме того, давать средства для теоретического вычисления случаев, когда известные формулы неприменимы" [98, с. 11]⁹¹.

В трактате "Динамическая теория электромагнитного поля" Максвелл писал следующее: "Чтобы ввести эти результаты в сферу символического исчисления, я <Максвелл> выражаю их в форме общих уравнений электромагнитного поля" [98, с. 261].

Объединяющим для законов теории принципом явился принцип сохранения, в работах Максвелла — принцип сохранения энергии

Закон Ома (Г. С. Ом, 1-я пол. XIX в.),
Законы Фарадея (М. Фарадей, 1-я пол. XIX в.),
Закон электромагнитной индукции (Фарадей) и т. д.

Общая картина такова, что приближённо первыми были открыты законы, касающиеся движения, затем — законы, относящиеся к свойствам газов, далее — относящиеся к электромагнитным явлениям.

⁹¹ "Из моего <Максвелл> изложения, надеюсь, будет ясно видно, что я <Максвелл> не задаюсь целью установить какую-нибудь физическую теорию в той области науки, в которой я не произвёл почти ни одного опыта, а имею намерение только показать, каким образом непосредственно применением идей и методов Фарадея лучше всего могут быть выяснены взаимные отношения различных классов открытых явлений" [98, с. 15].

("Трактат об электричестве", т. 2, гл. 23, §856): "... если принять принцип сохранения энергии, то явления индукции, открытые Фарадеем, следуют с необходимостью" [99, т. 2 с. 375]⁹². (Принцип сохранения энергии — это общий принцип для множества законов, открытых на 4-м уровне обобщения).

Аналогично теории электромагнетизма, обобщающей законы одной предметной области, были построены и другие теории, в иных предметных областях, разросшиеся до целых разделов физической науки, например: молекулярно-кинетическая теория газов, теория относительности, статистическая физика, квантовая физика, физика твёрдого тела, физика полупроводников, ядерная физика и т. д.⁹³ Результаты этих теорий получили практическое применение.

Наряду с принципами сохранения⁹⁴ (заряда, чётности и т. п.) рассматривались и принципы несохранения, нарушения симметрии [110]; появились понятия самосогласованных констант, самосогласованного поля, самосогласованных теорий (см. например [76])...

Однако переход на следующий уровень развития науки, на высший уровень отражения действительности в сознании, связан уже с тем, что развитие науки подчинено воспроизводству непредикативной (самоссылочной) системы ценностей,— с обеспечением продолжения существования человечества в неограниченно продолжающемся времени.⁹⁵

6. (С кон. XX в.). Поскольку физика как основа технологий направлена на удовлетворение потребностей человека, то определяющим в её развитии является непредикативная система ценностей [191], выражающаяся в системе потребностей человека. В этом смысле развитие физи-

⁹² Несовместимые с принципом сохранения энергии формулы были отброшены Максвеллом [99, т. 2 с. 375].

⁹³ Метод, который применялся при построении этих теорий — предикативно-аксиоматический; как писал А. Эйнштейн (1921 г.): "Математика является тем, что даёт точным наукам известную меру уверенности; без математики они не могли бы её достичь... Полной ясности в этом вопросе, как мне <Эйнштейну> кажется, можно достичь лишь с помощью того направления в математике, которое называется "аксиоматика" [232, с. 83]. Ограничения аксиоматического метода, выраженные в теоремах Гёделя, связанные с нереализуемостью в предикативных формальных системах непредикативных (самоссылочных) конструкций, ограничивают и физические теории, см. [178].

⁹⁴ Был открыт принцип сохранения в замкнутой системе (без внешних воздействий) суммы мер информации и энтропии, известный как теорема Алесковского, $I + S = 1$ [3].

⁹⁵ В прикладном плане использование солнечной энергии для сохранения биосферного равновесия уже практически достижимо [160].

организм	орган	ткань	клетка	1-й период
клетка	органоид	макромолекула	молекула	2-й период
молекула	функциональная группа	атом	нуклон	3-й период
нуклон	кварк	суперструны?	?	4-й период
электромагнитное?	слабое?	сильное?	гравитационное?	5-й период
гравитационное взаимодействие?				?-й период
<i>целое</i>	<i>особенное</i>	<i>однородное</i>	<i>единичное</i>	
<i>(целое предыдущего периода)</i>				

Рис. 8. Схема периодичности в усложнении последовательных, иерархических материальных структур, [174]

ки подчиняется потребностям сохранения существования человечества в неограниченно продолжающемся времени.

Таким образом, на этом этапе развития физика достигает наивысшего (6-го) непредикативного уровня, хотя все закономерности и теории предыдущих уровней продолжают уточняться и совершенствоваться в их описании. Развитие физики запаздывает по отношению к самосознанию и математике, этот этап в настоящее время является открытым для продолжения развития.

Одним из примеров непредикативных конструкций в физике является представление о нелокальности массы, а именно о том, что имеется одна-единственная масса, распределённая с плотностью гравитационного потенциала, масса, гравитационно взаимодействующая сама с собой и структурированная иными взаимодействиями, см. рис. 8 (подробнее в [205]).

§22. О самоописательности ("наблюдатель" как информация)

Высший уровень отражения действительности в сознании человека (см. рис. 2) связан с наличием "самоописательности субъекта в самоописательной части описания действительности",— действительно, в современных физических описаниях действительности имеется некоторая самоописательность, которая онтологически выражается (см. п. 2): а) в самоописательности материальной составляющей субъекта, б) в самоописательности некоторых информационных структур, в) непредикативные же конструкции, относящиеся к личности самого человека,—неформализуемы.

Более подробно эти пункты а)–в) таковы:

а) Самоописательность материальной составляющей субъекта наблюдается при описании периодичности в строении материи [175], [174], см. рис. 8,— строение человеческого организма вписывается в общую периодичность материальных структур.

б) Самоописательность информационных структур (среднего онтологического звена, в отличии от нижнего звена — материи, и верхне-

го — сознания) выражена в постулировании наблюдателя в физических теориях [181]. Классическая физика описывала внешний материальный мир. С усложнением физических теорий к XX в. описываемыми в терминах физических теорий стали и некоторые информационные процессы. В физических теориях с конца XIX в., кроме материальной действительности, постулируется наличие наблюдателя. Но наблюдатель — это, естественно, не живой человек, непосредственно присутствующий в точке наблюдения, а только лишь известная некоторым образом информация о физической системе. Наличие такой информации об описываемой системе является необходимым для её описания. То есть наблюдатель, постулируемый в физических теориях, выступает лишь как наличие информации о состоянии физической системы, но не как живой человек.

в) Сознание (самоосознание) человека, обладающего свободой, очевидно, неформализуемо в терминах научных теорий.⁹⁶

§23. Схема периодов развития понятий физики и в образовании

Исторические периоды развития физики сведены в табл. 8, где указано основное содержание этих периодов. Периодизация развития физических представлений примерно совпадает с периодизацией развития математических понятий [183] и периодизацией развития химии [194].

⁹⁶ При описании действительности человек строит образ этой действительности в своём сознании, при этом описываемая действительность включает в себя как самого человека, так и описание, находящееся в его сознании (см. рис. 2, подробно структуры процесса отражения действительности в сознании описаны отдельно [216]); однако при этом восприятие самого себя дано человеку и непосредственно, т. е. изнутри сознания; таким образом, описание действительности содержит самоописательную часть (непосредственно созерцаемую), описывающую самого человека. Очевидно, что физические теории, описывающие внешний мир, не обладают такой мерой самоописательности, потому выяснение границ корректности физического описания действительности (в которой находится и сам описывающий её субъект) подлежит уточнению.

Представим мысленный эксперимент. Предположим, что получена полная физическая теория, описывающая всю Вселенную, говоря простым языком, "уравнение всего". Тогда из этого уравнения, описывающего и возникновение Вселенной, должно следовать и описание возникновения человека, в том числе и самих авторов этой теории. То есть из рукописных формул должно следовать появление нерукотворённого разума человека. Это противоречие показывает ограниченность физических теорий в описании реальности.

И физические теории, очевидно, описывают материальную составляющую реальности, и отчасти информационную (в виде постулируемого наблюдателя), не описывая, однако, сознание человека, собственно живого свободного человека.

Развитие физики следует общегносеологическим закономерностям последовательного усложнения понятий, достижению следующих уровней абстракции и обобщения, обусловленных структурой отражения действительности в сознании человека.

Содержательно этапы исторического развития научного знания совпадают с возрастными этапами формирования соответствующих понятий (ввиду единства гносеологических оснований схемы отражений действительности в сознании человека [165]), поэтому показанная в табл. 8 схема периодов развития физики в истории соответствует развитию и усвоению физических представлений в системе образования. 4-й этап соответствует появлению гипотетических рассуждений [227], необходимых для экспериментального мышления, и появлению представлений о произвольной причинности и правилосообразности — 4-му психологическому возрасту (12–17 лет), что соответствует обоснованному началу изучения физики в средней школе (с 7 класса, не ранее, чем с началом этого 4-го возраста⁹⁷, но и не позднее). Последовательность изучения физики от законов (4-й уровень) — к теориям (5-й) — к описанию их оснований и к приложениям в технологиях (6-й) — содержательно совпадает с историей развития физического знания⁹⁸.

Таким образом, периоды развития физики содержательно определены и соответствуют аналогичным периодам исторического развития иных наук⁹⁹.

⁹⁷ С четвёртого психологического возраста дети овладевают гипотетико-дедуктивным мышлением, необходимым для понимания экспериментов [227].

⁹⁸ Отличие заключается в том, что достижения высших уровней (закон сохранения энергии и т. п.), обладающие свойством экономного описания действительности (минимум объема и максимум содержания, "максимум плотности информации", вносящий порядок в последующее обучение), в образовании предлагаются сразу как известные абстракции, а конкретные закономерности и т. п. формируются на их основании от простого — к сложному.

⁹⁹ В системе образования также имеется необходимый содержательный параллелизм изучения других наук.

Таблица 8. Периоды развития физики

№ ур-ня	Содержание периода развития	Исторический период
1	"Конкретные" названия предметов, первоначальные навыки механики	Древность
2	Ближайшая причина и механические законы (рычаг, закон Архимеда и т. п.)	Античность, с IV в. до н. э.
3	Появление понятия времени в законах, последовательность причин, распределённые во времени наблюдения за движением небесных тел	Средние века, с первых вв н. э.
4	Количественно-функциональные закономерности, появление определений понятий (силы, веса, количества движения и т. п.), открытие законов	Новое время, с кон. XVI в.
5	Физические теории, обобщающие множества физических законов,— теория электромагнетизма, молекулярно-кинетическая теория и т. п.	Новейшее время, с сер. XIX в.
6	Описание основ физической науки, широкая непредикативная (самоссылочная) практика применения физики для удовлетворения потребностей человека	С кон. XX в.

Глава 10. Схема периодов развития механики

На основании общенаучной гносеологической закономерности описана схема шести периодов развития механики; указано, что границы периодов (переходы на следующие периоды) совпадают с таковыми для других наук; указано на связь понимания причинности и изменения сложности механизмов. Развитие механики сопоставлено с пониманием механических закономерностей в возрастном развитии человека.

§24. Онтологические основания

Гносеологические основания отражения действительности в сознании человека описаны ранее в [179], [175], также ранее описывалось проявление этой шестиуровневой структуры отражения в истории отдельных наук: физики [202], химии [194], математики [183], [184], понимании причинности [192] и др. [177]. Онтологическая схема действительности: а) сознание, б) время (и информация как упорядоченное время), в) материально-вещественная часть действительности,— делит науки на: а) изучающие собственно человека (такие, как философия, психология, литературоведение и др.), б) изучающие логические и информационные структуры (математика)¹⁰⁰, в) изучающие материально-вещественную часть действительности (естественные науки: физика, химия, биология, механика и др.).

Таким образом, в механике, относящейся к естественным наукам, проявляются те же закономерности отражения действительности в сознании человека.

§25. Гносеологические основания

В гносеологическом плане упомянутая последовательность усложнения понимания причинности такова (описана более подробно в [192], номера соответствуют уровням абстракции, отражения, периодам развития):

- 1) предпричинность (синкретизм);
- 2) ближайшая причина;
- 3) ряд (круг) причин (иногда сводимый к первопричине);
- 4) произвольная причинность (внешняя причинность природных явлений (закономерность) и отличная от неё внутренняя произвольная причинность человека);
- 5) социальная (массовая) причинность (обусловленность человека социальной средой, социальным положением; в описаниях явлений материального мира — статистическая причинность);
- б) свобода.

¹⁰⁰ Экономика, как наука о сознательных социальных процессах, упорядоченных во времени и связанных с материальным производством, стоит особняком при этой онтологической иерархии.

При этом сложность конструируемых человеком машин и механизмов, как образующих механические причинно-следственные связи очевидно не превышает уровень понимания причинности.

В онтологическом плане, сопоставимо с историей физики, на первых двух уровнях имеется описание чисто механических закономерностей; описание кинематических закономерностей свойственно уровням 3–4 и выше; на уровнях 5–6 более сложные, уже отвлечённые от понятия времени представления (такие, как энергия и проч.).

§26. Периоды развития механики

История механики¹⁰¹ неотделима от истории машин и механизмов¹⁰². Ниже, в соответствии с гносеологическими основаниями и развитием представлений о причинности, представлена схема периодов (уровней) развития механики в истории¹⁰³.

1. Одним из древних механизмов был рычаг. Рычагом (весами) пользовались на Древнем Востоке и в Древнем Египте: "Однако ни древнеегипетские, ни клинописные тексты <Древнего Востока> не содержат описания и правил действия "простых машин"...¹⁰⁴ Элементы собственно теории "простых машин" ... появляются только в античной науке" [82, с. 101].

2. В античности известны следующие "простые машины": рычаг, клин, блок, ворот, винт [82, с. 102], [234]. При этом действие этих "простых машин" объяснялось через ближайшую причину. Машины эти рассматривались каждая в отдельности, рассмотрение же комбинаций простых машин начинается со следующего периода.

Объяснение равновесия рычага Архимедом таково: "неравные тяжести на равных длинах <рычага> не уравновешиваются, но перевешивает большая..., неравные тяжести будут уравновешиваться на неравных длинах, причём большая тяжесть на меньшей длине", далее подробно рассматриваются условия равновесия и нахождение центра тяжести [11, с. 273 и след.].

¹⁰¹ Первоначальное значение греческого слова μηχανή означало машина как искусное изобретение [125, с. 82], этимологический же смысл слова μηχανή — вымысел, орудие, вообще средство [26, стлб. 815-816].

¹⁰² Относящееся к открытию механических законов физики было описано отдельно, см. [202], поэтому здесь не приводится.

¹⁰³ Бывшие исследования по истории механики [64], [65], [46], [44], [43], [101], [104], [124], [19], [23], описывая массу фактов по истории механики, не уделяли внимания их систематизации и выделению периодов и ступеней развития механики.

¹⁰⁴ Аналогично тому как конкретные числа и древний счёт на 1-м уровне развития математики не содержат определения понятия числа.

3. С началом н. э. рассматриваются более сложные механизмы — комбинации простых машин.

Витрувий (нач. н. э.) в трактате "Об архитектуре" "не даёт описания самих "простых машин" каждой в отдельности, а рассматривает их комбинации" [82, с. 103]. Для рассмотрения комбинации "простых машин", соединённых последовательно, требуется мыслить не только ближайшую причину, но и ряд последовательных причин и следствий.

Также в трактате Герона Александрийского (I в н. э.) рассматриваются комбинации простых машин. Герон последовательно перечисляет все пять "простых машин". "Существует,— говорит он,— всего пять потенций, при помощи которых заданный груз передвигается силой: ворот, рычаг, полиспаст, клин, винт" [82, с. 104] (см. также [126]).

Герона прежде всего интересует "причина, действующая в каждом употребляемом движении", т. е. "причина, по которой каждая из этих машин поднимает большие тяжести при помощи малой силы". Таким образом, его интересует общий принцип работы всех описанных "простых машин". Этот общий принцип он <Герон>, как и Псевдо-Аристотель, видит в круге" [82, с. 104] (ссылаясь на Архимедово сочинение "О равновесии").

Герон "объясняет принципы действия всех пяти "простых машин", разбив их на две группы: 1. рычаг, ворот, блок, 2. клин, винт. Действие первых трёх он описывает чётко <по правилу рычага, иллюстрируемого кругом>. Что же касается клина и винта, который он определяет как "обвитый кругом клин, приводимый в движение не ударом, а с помощью рычага", то причины их действия Герону не вполне ясны. Он ограничивается замечанием, что действие клина зависит от угла и удара¹⁰⁵ [82, с. 105].

Сам Герон так формулирует основной закон работы "простой машины": "Если при пользовании машиной требуется увеличение силы, то в результате происходит замедление, ибо чем менее движущая сила по отношению к движимой тяжести, тем больше потребуется и времени; таким образом сила к силе и время ко времени находятся в том же самом обратном отношении" (понятия скорости в античной механике ещё не было). Исходя из этого принципа, Герон объясняет действие уже не <только> "простых машин", а их комбинаций, к описанию которых он переходит далее [82, с. 105].

Он рассматривает два типа таких комбинаций: 1) комбинации однородных "простых машин" — сочетания по несколько блоков, воротов, рычагов; 2) комбинации неоднородных "простых машин" — сочетания

¹⁰⁵ У Псевдо-Аристотеля имеется объяснение работы клина [82, с. 102], значит, Псевдо-Аристотель более поздний автор, нежели Герон.

ворот–винт, блок–рычаг–ворот–винт. Сопровождая описание этих комбинаций числовыми примерами, он на каждом из них демонстрирует "золотое правило механики" [82, с. 107].

В более поздней арабской механической науке также сначала рассматривались "простые машины", а затем их комбинации. В трактате Ибн-Сины "Даниш-Наме" ("Мерило разума") в главах о механике сначала описываются "простые машины", а затем — их комбинации [82, с. 109].

"Вторая часть трактата содержит описание комбинаций "простых машин". Как и Герон, Ибн-Сина классифицирует эти комбинации, распределяя их по группам по принципу однородности и неоднородности составляющих их "простых машин". Но если Герон рассматривает только некоторые из таких комбинаций, то Ибн-Сина последовательно перебирает все возможные варианты... <В заключении> следует описание механизма, представляющего комбинацию всех простых машин, естественно, кроме клина" [82, с. 109].

Аналогичны этому и трактаты иных арабских авторов по механике, например трактат ал-Хозини "Книга весов мудрости" (XII в.) [82, с. 110].

Как указывалось выше, с 3-го уровня начинается объяснение, использующее абстракцию времени (движения). В трудах учёных средневековья наблюдается кинематический подход к объяснению равновесия. Например, арабский учёный VIII в. Табит Бен Гур в трактате "Книга Карастун" ("О безмене") описал кинематическое понимание равновесия. "Табит логически обосновывает правило рычага 1-го рода, полагая в основу рассуждения принцип равенства "силы движения" обоих грузов (при равновесии грузы обладают на концах рычага одинаковой "силой движения" [142, с. 22].

Аналогично этому сочинение Иоанна Неморария (XIII в.) "Элементы доказательства, касающиеся тяжестей". В начале трактата даётся определение "тяжести сообразно положению" некоторого груза в той или иной простой машине, "тяжесть сообразно положению" — величина пропорциональная при заданном грузе естественному перемещению его (т. е. по вертикали). Следовательно, это нечто близкое к понятию Табита "силы движения" или к современному понятию работы силы тяжести груза на возможном перемещении точки. "Если плечи весов будут пропорциональны подвешенным грузам так, чтобы на более коротком висел более тяжёлый, то они будут равно тяжелы по положению" (из трактата Неморария)¹⁰⁶ [142, с. 23–24].

¹⁰⁶ Гуковский М. А. Механика Леонардо да Винчи. Изд-во АН СССР. М.-Л., 1947. С. 120, цит. по [142, с. 24].

Однако наука того времени не содержала определений отвлечённых понятий, например Буридан (XIV в.) писал: "В то время, как двигатель движет движимое, он запечатлевает в нём некоторый импетус, некую силу, способную двигать это движимое в том направлении, в котором двигатель двигал движимое..." [104, с. 33]. Понятие "импетуса" у Буридана — это ещё не определение в научном смысле слова. Как и в других науках, определения отвлечённых понятий в механике появляются с 4-го уровня развития.

4. "Попытки явного определения понятия скорости¹⁰⁷ начинаются сравнительно поздно — лишь в XVII в. До этого в механике определяли, как правило, не саму скорость, а только понятия, связанные с ней..." [79, с. 31] (см. также [43, с. 59]).

В этот же период появляются определения и других понятий. "Впервые термин "работа силы" появился в сочинениях французского инженера-гидромеханика Соломона де Ко (1576–1630), одного из первых изобретателей паровой машины. Под этим термином Соломон де Ко понимал произведение силы на перемещение точки вдоль силы" [142, с. 27].

Наличие таких общих представлений (определений понятий силы, веса и т. п.) позволило чётко формулировать общий принцип действия простых машин. Р. Декарт в трактате "Объяснение машин, при помощи которых можно малой силой поднимать весьма тяжёлые грузы" (в основу трактата положен тот же принцип, как и у Галилея¹⁰⁸) формулировал этот принцип следующим образом: "Изобретение всех этих машин основано на одном-единственном принципе, заключающемся в том, что та же самая сила, которая может поднять некоторый груз, например, сто фунтов, на высоту двух футов, может также поднять груз в двести фунтов на высоту одного фута или груз 400 фунтов — на высоту полфута и т. д." [142, с. 27].

Что же касается причинности, то появление представлений о произвольной причинности, — о двух линиях причинности: а) причинности

¹⁰⁷ Как и других физических понятий (авт.).

¹⁰⁸ Галилей писал: "То, что выигрывается в лёгкости, теряется в пространстве, во времени, в медленности, и это будет так во всех машинах и приспособлениях, которые были созданы или которые могут быть придуманы" [142, с. 26].

"Понимание механики как науки о простых машинах, комбинациях этих машин и их практическим приложениям свойственно ещё даже Галилею... Только в XVII в. появляется представление о том, что именно движение составляет истинный предмет механики, и лишь в XIX–XX вв. под механикой начинают понимать науку обо всех видах механического движения, а статику, как и теорию машин и механизмов, считать разделами этой науки" [125].

природных явлений и б) причинности, вызываемой волей человека,— не только позволило открыть и описать в виде функциональных зависимостей ряд законов природы¹⁰⁹, но и конструировать механизмы, воплощающие осознание этого вида причинности. В XVII в. были сконструированы механические часы (после завода использующие автономную причинность для обеспечения равномерного во времени движения стрелок часов, применяемого для отсчёта времени). Подробное описание конструкции маятниковых¹¹⁰ часов имеется, например, у Х. Гюйгенса [48].

В этот же период развивалась динамика как раздел, описывающий движения машин, механизмов, механических систем, использующая имевшийся на том уровне развития аппарат дифференциального и интегрального исчисления. Однако общего представления о понятиях отвлечённых от скорости движения, перемещения (и от тому подобных понятий, привязанных к онтологическому уровню времени) в тот период ещё не было (не было понятия энергии¹¹¹).

5. На пятом уровне развития механики, с нач. XIX в., появляется представление об энергии (как понятию, отвлечённом от перемещения, силы и времени). Наличие такого представления позволяет сформулировать

¹⁰⁹ Например, закон сложения и разложения сил (П. Вариньон), теорема о моменте равнодействующей (Вариньон), закон пары сил (Л. Пуансо) [20, т. 16, ст. "Механика", стлб. 545] (О др. законах, связанных с физикой, см. [202]).

¹¹⁰ Свойства маятника (постоянство периода колебаний) описаны Г. Галилеем.

¹¹¹ Энергия у Вариньона — это импульс (произведение силы на виртуальную скорость) в статике в принципе виртуальных скоростей [25]. Это не энергия в современном смысле слова.

Также на 4-м уровне нет ещё отвлечённой формулировки принципов сохранения, они ещё очень конкретны и не используют понятия энергии. Ломоносов писал: "Так сколько материи прибавляется какому-либо телу, столько же теряется у другого; сколько часов я затрачиваю на сон, столько же отнимаю от бодрствования и т. п. Так как это всеобщий закон природы, то он распространяется и на правила движения: тело, которое своим толчком возбуждает другое к движению, столько же теряет от своего движения, сколько сообщает другому им двинутому." М. В. Ломоносов, письмо к Л. Эйлеру от 5 июля 1748 г. ПСС. Т. 2. М.–Л. 1951. С. 182–185.

Даже ещё К. Якоби (XIX в.) говорит не о сохранении энергии, а о "сохранении живых сил" [237, с. 19]. И. Бернулли (XVIII в.) писал об этих силах: ""Живая сила" есть та сила, которая пребывает в равномерно движущемся теле. Наоборот, "мёртвая сила" — та, которую получает тело без движения, если оно побуждается к движению, или же, которая побуждает двигаться быстрее или медленнее, если тело уже находится в движении" [16, с. 72]. А также: "Живые силы тел пропорциональны произведению их масс и квадратов их скоростей..." [16, с. 111].

закон сохранения энергии¹¹² (и другие законы сохранения — сохранения импульса, сохранения момента импульса, сохранения заряда и т. п.). Кроме того, на 5-м уровне развития механики используется и математический аппарат, соответствующий 5-му уровню развития математики, в частности, появившееся в XIX в. понятие функционала (более абстрактное нежели понятие функции).

"Гамильтон свёл задачу об интегрировании уравнений движения системы свободных материальных точек к определению одной функции <функционала> V , которую он называл характеристической" [4, с. 10].

" V — функционал действия $V = \int_0^t 2T dt$. Функция V равна интегралу и носит название действия при движении системы от начального до конечного положения" [4, с. 9]. Подынтегральная функция T такова: " $T = 1/2 \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$, причём $2T$ означает полную живую силу системы (x' , y' , z' ... представляют собой прямоугольные компоненты скорости точки m или первые производные её координат по времени)" [36, с. 218], "... динамическая задача, относящаяся к движениям (как бы многочисленны они ни были) любой системы притягивающихся или отталкивающихся точек (даже если мы <Гамильтон> предполагаем, что эти точки ограничены какими-либо условиями связи, совместимыми с законом живой силы¹¹³), сводится к изучению одной центральной функции, форма которой определяет и характеризует свойства движущейся системы..." [36, с. 216].

В этот же период был сформулирован принцип наименьшего действия. Якоби в лекциях по аналитической механике подчёркивал, что принцип наименьшего действия был корректно сформулирован только в XIX в. [238, с. 226 и след.].

На 5-м уровне обобщения (абстракции) формулируются теории, обобщающие множество отдельных закономерностей, эти теории излагаются обычно в аксиоматическом виде, таково, например, изложение механики Г. Герцем (1857-1894) (см. [39, с. 61]). В трактате "Принципы механики, изложенные в новой связи" Герц писал: "Задача, к решению которой стремится предлагаемое исследование, состоит в том, чтобы восполнить имеющиеся здесь пробелы и указать совершенно опреде-

¹¹² По теореме Нётер закон сохранения энергии связан с наблюдаемой однородностью течения времени, закон сохранения импульса — с однородностью пространства и т. п.

¹¹³ "Кориолис предложил называть живой силой не $m\upsilon^2$, а $1/2 m\upsilon^2$, что и укоренилось, так как именно эта величина сопоставляется с работой в уравнении живых сил. Сам же закон живых сил ... <стал называться> "законом или принципом передачи работы", в соответствии с его многочисленными применениями в динамике машин" [116, с. 155].

лѐнную формулировку законов механики, которая была бы совместима с уровнем современных знаний..." [39. с. 9]. "Является ли формулировка законов механики, которую я <Герц> даю в качестве решения поставленной задачи, единственно возможной, или существуют и другие возможные формулировки, этот вопрос остаѐтся открытым. Однако тот факт, что данная формулировка во всех отношениях возможна, я <Герц> доказываю тем, что вывожу на её основе всё содержание обычной механики, поскольку последняя ограничивается действительными силами и связями природы, а не рассматривается просто как математика упражнений"¹¹⁴ [39. с. 9]. (Это сопоставимо с построением электродинамики Максвеллом, который писал, что из общих принципов выводятся известные законы электродинамики, см. [202]).

Кроме того, если на 4-м уровне изучалась кинематика и динамика систем, чьи параметры во времени неизменны, то на 5-м уровне абстракции изучаются системы с переменными параметрами¹¹⁵ (в гносеологическом плане это сопоставимо с тем, что в языкознании в этот же период изучаются не отдельные языки, с фиксированными параметрами, а уже их историческое изменение, и там и там на 5-м уровне изучаются изменяющиеся системы).

Начинает изучаться динамика тела переменной массы (И. В. Мещерский, К. Э. Циолковский) [143], [29, с. 269], [45, с. 148],— эти достижения легли в основу создания аппаратов для космических полѐтов.

В плане описания явлений массовой причинности появляется статистическая механика.

В производстве появляются сложные механизмы, работающие по

¹¹⁴ Герц отмечал, что "задача, поставленная в настоящем <его> исследовании, уже рассмотрена в скрытом виде и нашла одно из возможных решений в работе Гельмгольца о принципе наименьшего действия и в связанной с ней работе о циклических системах. В первой работе формулируется и доказывается тезис, что механика может охватить все процессы в природе и в том случае, когда в качестве всеобщих рассматриваются не Ньютоновы основания механики, а за исходные принимают особые предпосылки, лежащие в основе принципа Гамильтона" [39. с. 10–11].

Герц устранил "искусственное разделение механики точки и механики системы, позволяя рассматривать любое движение как движение системы" [39. с. 344].

¹¹⁵ "Во второй половине XIX века было изобретено и исследовано множество шарнирных механизмов. Благодаря простоте устройства своих частей и плавности движения они использовались в практике гораздо чаще чем другие механизмы. Появилась общая литература по кинематике и синтезу шарнирно-рычажных механизмов. Требовалось систематизировать и обобщить полученные знания. Этот процесс шѐл одновременно в двух направлениях: создание общей теории шарнирных механизмов (П. Л. Чебышев, Л. Бурместер, В. Бооль, Н. Б. Делоне); обобщение кинематики неизменяемых систем и переход к изменяемым (Л. Бурместер, П. О. Сомов, Д. Л. Зейлигер)" [84, с. 122–123].

заданным алгоритмам,— полуавтоматические и автоматические линии (например, автоматы по производству гвоздей и т. п.).

Вообще теории 5-го уровня обладали свойством прогнозирования поведения сложных механических систем, что позволило исследовать свойства трёхмерности пространства (см. след. параграф).

6. Непредикативность, не реализуемая в материально-вещественном мире отдельно от человека, в механике проявляется в связи с её приложениями к удовлетворению потребностей человека,— посредством одних механизмов и машин производятся другие механизмы и машины, необходимые и полезные человеку (как простые — лопата, использующая свойство рычага при копке, так и сложные — автомобили и т. п.); естественно, что среди этого производства машин имеется некоторое самоприменимое ядро — сложные обрабатывающие станки, производимые посредством таких же станков¹¹⁶.

Схема периодов развития механики приведена в табл. 9.

Таблица 9. Периоды развития механики

№ ур.	Содержание периода развития	Историч. период
1	"Конкретные" названия предметов, "простые машины" (рычаг, блок, полиспаг, винт, клин)	Древность
2	"Ближайшая" причина и объяснение действия "простых машин" (рычаг и т. п.)	С IV в. до н. э.
3	Комбинации простых машин, как последовательность причинно-следственных связей. Появление понятия времени в законах,— кинематическое объяснение равновесия	С перв. веков н. э.
4	Количественно-функциональные закономерности, появление определений понятий (силы, веса, количества движения и т. п.), открытие законов, механизмы с автономной причинностью (маятниковые часы)	С кон. XVI в. н. э.
5	Общие принципы, отвлечённые от времени (принцип Гамильтона и т. п.), аксиоматический способ изложения теории; описание массовой причинности в статистической механике, описание систем с переменными параметрами. Автоматич. механич. линии на производстве (XX в.)	С нач. XIX в.
6	Описание основ механики, широкая непредикативная (самоссылочная) практика применения механики и машин для удовлетворения потребностей человека	С кон. XX в.

¹¹⁶ О самоприменимости в экономике см. подробнее в [191, с. 63].

§27. Основания механики и трёхмерность пространства

5. В начале XX в. (на 5-м уровне развития), как и в других отраслях науки, в механике появляются рассуждения об её основаниях, в частности об основаниях трёхмерности пространства¹¹⁷. Параллельно с основаниями математики шли рассуждения и об основаниях физики, в частности об обоснованиях размерности физического пространства¹¹⁸.

П. Эренфест рассмотрел ""физику" <механику движения> в n -мерном евклидовом пространстве E^n Как показал Эренфест:

а) только в пространстве E^3 <трёхмерном> возможны как устойчивое финитное (причём всегда с замкнутыми траекториями), так и инфинитное движения;

б) в пространстве E^2 возможно только финитное движение, а замкнуты лишь круговые орбиты;

в) в пространстве E^n с $n > 3$ финитное движение соответствует лишь круговым траекториям и всегда неустойчиво, т. е. сколь угодно малое возмущение приводит либо к падению на центр, либо к удалению на бесконечность" [42, с. 246].

"Результаты Эренфестовского анализа <модели> n -мерного "атома" позволяют сделать вывод, что трёхмерность пространства в атомных явлениях вполне обоснована, поскольку отличие от трёхмерности привело бы, как показал Эренфест, к радикальному отличию спектра <атома> от наблюдаемого" [42, с. 246].

6. Из непредикативной теории множеств с самопринадлежностью, описывающей и многомерные упорядоченные структуры (пространства), результат, указанный Эренфестом, следует из соображений, связанных со свойствами многомерных упорядоченных структур; в [197], [207, с. 91 (теорема 35)] доказана теорема (о вращении): вращение возможно не более чем в 3-х мерных пространствах.¹¹⁹ Таким образом, непредикативные теории 6-го уровня, следующие из содержательных со-

¹¹⁷ Рассуждения об основаниях физики (потребовавшие введения понятия "наблюдателя", как известной информации об объекте) описаны в §22 на стр. 75. Рассуждения об основаниях математики, которые привели к осознанию ограниченности аксиоматического метода построения теорий, также появились примерно в это же время (см. стр. 25).

¹¹⁸ "Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения?" статья П. Эренфеста с таким названием появилась в 1917 г. Erenfest P. In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?— Proc. Amsterdam. Acad., 1917. Vol. 20. P. 200–209 [42, с. 245].

¹¹⁹ Из этой теоремы (о невозможности вращения в 4-х и более мерных пространствах) следует невозможность путешествий во времени, см. подробнее в [197], [207, с. 91 (теорема 35)].

зерцательных отображений, совпадают с реальностью.

§28. Усвоение механических понятий с возрастом

Знакомство с механическими понятиями начинается с раннего возраста. Если в первом психологическом возрасте (1–3 года) сталкиваться с простыми механизмами человеку приходится разве что в игрушках, то со следующего, второго (3–6 лет), возраста овладение такими механизмами бывает уже более сознательным. Например: лопата (при копке используется свойство рычага), ножницы (тоже рычаг), качели для двоих (в виде рычажных весов), качели (маятник), открывалка для банок (рычаг), мясорубка (винт), шуруп (винт и клин), болт (винт), гаечный ключ (рычаг) и т. п., (игрушки — лук (упругий рычаг), игрушечные подъёмные краны (ворот) и т. п.). Более сложные механизмы, например велосипед, доступны самостоятельному обслуживанию и настройке ребёнком со следующего, 3-го возраста (7–12 лет) (также простые инструменты: ручная дрель, тиски (винт) и т. п.). С начала 4-го возраста (12–17 лет) начинается обучение физике в школе, рассматривающей первоначально механические понятия и определения терминов (силы, скорости и т. п.), в истории появляющихся также на 4-м уровне абстракции. В старших классах школы (с 5-го психологического возраста, с 17 л.) изучаются законы сохранения и связанные с ними понятия. Более подробное изучение законов механики в системе образования происходит в послешкольном профильном профессиональном, в том числе высшем образовании.

Закономерности исторического развития механики (переход от уровня к уровню и содержание периодов развития) соответствуют, как и для других наук, общегносеологическим закономерностям отражения действительности в сознании человека; причём историческое усложнение представления о механике и механизмах совпадает по содержанию периодов развития с усложнением механических представлений с возрастом человека (в системе образования), — такое совпадение обусловлено единством указанной закономерности отражения действительности в сознании человека.

Глава 11. Периодизация истории химии

В этой главе описана периодизация истории химии, основывающаяся на общегносеологической закономерности исторического развития научного знания. Указано, что в 6-уровневой последовательности достижения следующего уровня развития первоначально имеется достижение следующего уровня самоосознания, затем уровня, оперирующего абстрактными структурами (в т. ч. математическими), а затем уже новый уровень достигается в сфере изучения материальных объектов (химии). Историческая периодизация развития химии содержательно совпадает с основными этапами изучения химии в средней и высшей школе, от количественных законов — к теориям, а затем — к приложениям химии.

§29. Общегносеологическая структура и развитие химии

Периоды в развитии химии связаны с общегносеологической иерархией уровней отражения действительности (6-уровневой структурой отражения действительности в сознании [179], [177],— последовательностью достижения определённых уровней обобщения, абстракции понятий). Достижение определённых уровней отражения действительности, обнаруживаемое в материальных письменных памятниках культуры, связано в первую очередь с достижением определённых уровней самоосознания человека¹²⁰ (что более подробно рассмотрено в [159], [164]), затем появляются новообразования в аппарате описания действительности (логико-математические и т. п.)¹²¹, см. [183], [184]; и затем уже осознающий себя на достигнутом уровне самоосознания человек, применяя соответствующий достигнутому уровню аппарат абстрактного описания действительности, достигает нового этапа (уровня) и в экспериментальных исследованиях (в т. ч. в химии),— в упорядочении явлений внешнего материального мира.

Таким образом, в истории науки выполняется известная [117] последовательность ступеней истины:

- а) непосредственное созерцание (в самоосознании);
- б) абстрактное мышление (математико-логические конструкции);
- в) практика (экспериментальная наука и технологии).

Развитие самоосознания в историческом плане подробно рассмотрено отдельно, см. [159], [164], [177]. В плане описания периодизации развития химии остаётся ограничиться предварительным описанием общегносеологической структуры знания и схемой развития представлений о причинности.

¹²⁰ Об уровнях самоосознания см. также [173], [180].

¹²¹ В представлении о причинности [192].

Соответственно последовательности этапов постижения истины 1-я ступень — непосредственное созерцание — не поддаётся внешнему по отношению к человеку формальному описанию, поэтому остаётся ограничиться описанием последующих этапов её постижения.

Сознание описывает окружающий мир, содержащий как самого человека, так и описание самого этого описания, находящегося в сознании человека,— схема отражения действительности в сознании человека показана на рис. 2 (стр. 9), см. также [179], [216].

Подробно структура сознания, связанная с такой 6-уровневой иерархией отражения действительности, описана отдельно [179]. Уровни отражения соответствуют уровням обобщённости (абстрактности) понятий, причём 1-й уровень — это обобщение чувственно-воспринимаемых образов, выраженный в наименовании объектов. Иерархия логико-математических конструкций, появляющаяся в истории науки, описана отдельно в [183], [184]; и кратко в основной линии развития такова:

- 1) число,
- 2) арифметическая операция,
- 3) уравнение, неизвестная величина,
- 4) функция (операции над функциями, интегрирование, дифференцирование),
- 5) формальная система (логический вывод как обобщённое понятие функции),
- 6) непредикативные (самоссылочные) конструкции, не сводимые к понятиям предыдущих уровней.

Соответствующая схеме отражения действительности в сознании человека последовательность развития представлений о причинности такова (описана более подробно в [192]):

- 1) предпричинность (синкретизм);
- 2) ближайшая причина;
- 3) ряд (круг) причин (иногда сводимый к первопричине);
- 4) произвольная причинность (внешняя причинность природных явлений (закономерность) и отличная от неё внутренняя произвольная причинность человека);
- 5) социальная (массовая) причинность (обусловленность человека социальной средой, социальным положением; в описаниях явлений материального мира — статистическая причинность);
- 6) свобода.

Начало развития экспериментальной науки (с XVI в.) соответствует достижению 4-го уровня — уровня осознания произвольной причинности — произвольного моделирования внешних по отношению к человеку природных явлений — сознательной постановки человеком экспериментов и выражении обнаруженных результатов в правилосооб-

разной (функциональной) форме, соответствующей этому же (4-му) уровню обобщения. Однако развитие химических представлений наблюдалось и до этого (4-го) этапа на этапах предварительного развития химического знания.

§30. Периоды развития химии

В истории химии выделяются однородные периоды её развития, — развитие химических знаний в пределах одного периода находится в пределах качественного (гносеологического) подобия появляющихся новых научных достижений (одного достигнутого уровня обобщения), переход же на следующий уровень (к следующему периоду развития) связан с получением качественно новых, более абстрактных, обобщённых, результатов, чем на предыдущем периоде¹²².

1¹²³. (Древность). В древности первоначальные химические представления выражены в конкретном¹²⁴ наименовании известных в то время веществ. Отдельные практические навыки химической технологии не имели не то что систематического, но даже причинно-следственного описания (выражаясь в простой последовательности действий), и передавались более по наитию¹²⁵.

2. (С IV в до н. э.). Этап, соответствующий представлениям на уровне осознания ближайшей причины. Систематизация знаний. Появление обоснованных умозрительных представлений о том, что вещество состоит из мельчайших частиц (Тит Лукреций Кар, I в. до н. э.). Ограниченность в объяснении химических явлений ближайшей причиной¹²⁶.

3. (С первых веков н. э.). Поиски первопричины — первовещества, из

¹²² Подробно об отдельных периодах развития химии см. в [1], [7], [8], [30], [33], [50], [51], [54], [77], [78], [102], [122], [123], [131], [132], [133], [135], [151].

¹²³ Здесь и далее — номер периода развития химии.

¹²⁴ Ср. понятие "конкретного числа" в истории математики [183], [184].

¹²⁵ "Атомы" у Демокрита — это лишь чувственные образы, — "видики", по словам А. Ф. Лосева: "обычное наименование атомов у Демокрита как раз и есть "фигуры" (shemata), или "видики" (eidola). <...> Это маленькие, далее уже неделимые "видики", статуэтки, картинки, портретики бытия" [87, с. 499–500]. (Демокрит указывал, что "может быть атом размером с весь мир" [97]), — а не молекулы...

¹²⁶ Тит Лукреций Кар в поэме "О природе вещей" (кн. I, ст. 304–328) обосновывает то, что тела состоят из мельчайших частиц — ближайшей причиной (см. примеч. на стр. 68); вот фрагмент этих рассуждений [91], [92]:

"Также в вещах, что хиреть начинают от старости дряхлой,
Как и в приморских камнях, изъеденных едкою солью,
Ты не усмотришь того, что из них каждый миг убывает.
Так при посредстве невидимых тел управляет природа."

которого состоят остальные вещества¹²⁷ (т. н. "философского камня") и вместе с этим открытие круговых превращений веществ в циклах реакций¹²⁸. Это (сохранение веществ в циклах превращений) позволило на следующем этапе сделать вывод о постоянстве состава веществ (о неизменности химических элементов).

4. (С XVI в.). На этом (четвёртом) периоде осознан принцип постоянства элементов¹²⁹ при их химических превращениях и реакциях. Открытие первых химических законов, носящих количественный (функциональный, правилосообразный) характер. Появление качественного анализа.¹³⁰ В весь этот период, до середины XIX в., развитие химии заключалось в открытии всё новых и новых количественных закономерностей и законов химии.¹³¹

5. (С середины XIX в.). На этом этапе количественные законы обобщаются в теорию химического строения (А. М. Бутлеров) и в периодическую систему элементов (Д. И. Менделеев). Теории на новом этапе обобщают и объясняют совокупности ранее открытых законов и закономерностей. Возникают теории, соответствующие различным отраслям химии: теория электролитической диссоциации (С. Аррениус), химическая термодинамика, химическая кинетика, теория валентности и т. п., химические теории (основывающиеся на математическом аппарате¹³²).

¹²⁷ Многие алхимики считали ртуть первопричиной остальных элементов [131, с. 17].

¹²⁸ Так, например, у И. Юнгиуса (нач. XVII в.) есть описание известного ранее цикла превращений свинца $Pb \rightarrow 2PbCO_3 \cdot Pb(OH)_2 \rightarrow PbO \rightarrow Pb$. "Если несколько реакций протекают последовательно так, что из образующихся веществ удаётся посредством редукции получить исходное тело, то последнее в ходе всех этих превращений должно оставаться неизменным" (Jungii J., *Doxoscoripiae physicae minores...*, 1662), цит по [135, с. 24].

¹²⁹ Термин "химический элемент" введён позже Р. Бойлем в 1641 г. [135].

¹³⁰ См. [18, с. 17].

¹³¹ Некоторые химические законы, открытые в этот период ([66], см. тж. [50], [18]):
Закон эквивалентов (И. В. Рихтер, 1791—1798),
Закон постоянства состава (Ж. Л. Пруст, 1799—1806),
Закон кратных отношений (Дж. Дальтон, 1803),
Закон объёмных отношений, или закон соединения газов (Ж. Л. Гей-Люссак, 1808),
Закон Авогадро (А. Авогадро, 1811),
Закон удельных теплоёмкостей (П. Л. Дюлонг и А. Т. Пти, 1819),
Закон изоморфизма (Э. Мичерлих, 1819),
Законы электролиза (М. Фарадей, 1830-е гг.),
Закон постоянства количества теплоты (Г. Гесс, 1840).

¹³² Среди примеров таких теорий — принцип соответствия в физико-химическом анализе (Н. С. Курнаков, 20-е гг. XX в. [81]), сопоставляющий состоянию многокомпонентной системы геометрический образ; дальнейшее развитие этого принципа в плане математизации позволило выявить общие свойства таких образов, не зави-

см. след. стр. —>

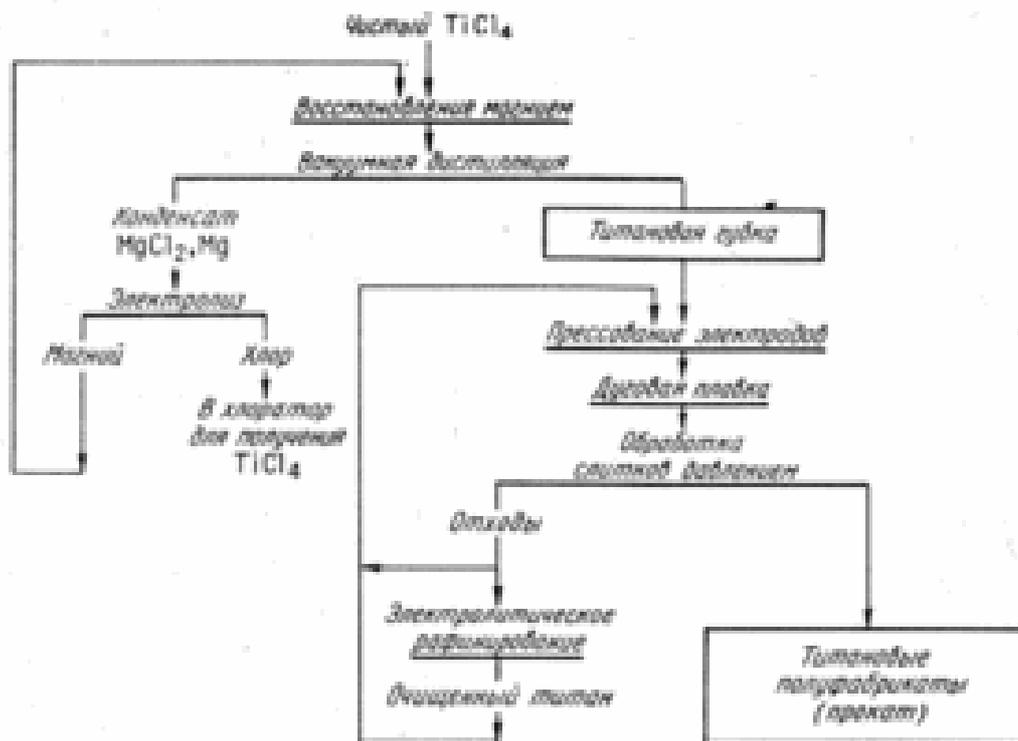


Рис. 9. Принципиальная схема производства титановой губки и её переработки в металл [14, с. 4] — фрагмент схемы производства титана (в технологической схеме имеется цикл по магнию)

Эти теории представляют собой конструкции гораздо более сложные, чем отдельные законы,— теории связывают собой законы воедино и позволяют из некоторых основных положений (с привлечением экспериментальных данных) с достаточной для практики точностью вывести законообразные следствия.

Теоретические знания, описывающие химические превращения веществ, явились основой для создания широких классов химических технологий, используемых для производства, удовлетворяющего практические потребности человека [8], [78].

Многостадийное химическое производство описывается алгоритмической (формальной, технологической) схемой со многими входными продуктами и многими выходными готовыми (и побочными) продуктами, см. например рис. 9 (тж. [95, с. 35]). Стремление к достижению безотходности производства (а также утилизации отработавших вещей) приводит к образованию непредикативных (самоссылочных) схем производства, соответствующих 6-му уровню абстракции¹³³.

сящие от состава систем (для широкого класса водно-солевых систем [190]).

¹³³ О непредикативных конструкциях см. [178].

6. (С кон. XX в.). Поскольку химические технологии направлены на удовлетворение потребностей человека, то определяющим в их развитии является непредикативная система ценностей [191], выражающаяся в системе потребностей человека. В этом смысле развитие химии подчиняется потребностям сохранения существования человечества в неограниченно продолжающемся времени.

Методы управления химическими процессами основаны на математических результатах, использующих непредикативные конструкции (см. напр. [178], [188]).

Таким образом, на этом этапе развития химия достигает наивысшего (6-го) непредикативного уровня, хотя все закономерности и теории предыдущих уровней продолжают уточняться и совершенствоваться в их описании¹³⁴.

§31. Схема периодов развития представлений о химии

Основные периоды развития химии связаны с общегносеологической последовательностью развития научных представлений, периоды развития химии примерно совпадают с периодами развития математики, с периодами развития самоосознания в истории. Периодизация и содержание периодов развития химии приведены в табл. 10.

Поскольку содержательно этапы исторического развития научного знания совпадают с возрастными этапами формирования соответствующих понятий (ввиду единства гносеологических оснований схемы отражений действительности в сознании человека [165]), то показанная в табл. 10 схема периодов развития химии в истории соответствует развитию и усвоению химических представлений в системе образования). 4-й этап соответствует появлению представлений о произвольной причинности и правилосообразности — 4-му психологическому возрасту (12–17 лет), что соответствует обоснованному началу изучения химии в средней школе (с 8 класса, не ранее, чем с началом этого 4-го возраста, но и не позднее). Последовательность изучения химии от законов (4-й уровень) — к теориям (5-й) — к описанию их оснований и к приложениям в технологиях (6-й) — содержательно совпадает с историей развития химического знания¹³⁵.

¹³⁴ Вообще процесс познания неалгоритмизуем, не сводим к алгоритмическим конструкциям 5-го уровня абстракции [182].

¹³⁵ Отличие заключается в том, что достижения высших уровней (периодический закон и т. п.), обладающие свойством экономного описания действительности (минимум объема и максимум содержания, — "максимум плотности информации", вносящие порядок в последующее обучение) в образовании предлагаются сразу как известные абстракции, а конкретные закономерности и т. п. формируются на их основе от простого к сложному.

Таблица 10. Периоды развития химии

№ ур-ня	Содержание периода развития	Исторический период
1	"Конкретные" названия веществ, первоначальные навыки химической технологии	Древность
2	Причинное объяснение химических явлений (через ближайшую причину)	Античность, с IV в. до н. э.
3	Последовательности химических превращений ("рецептуры"), циклы реакций	Средние века, с первых веков н. э.
4	Постоянство элементов в их химических превращениях (реакциях), законы, количественно-функциональные закономерности	Новое время, с кон. XVI в. н. э.
5	Химические теории, обобщающие множества химических законов, — теория строения вещества, периодическая система Менделеева и т. п., развитие химической технологии	Новейшее время, с сер. XIX в.
6	Описание основ химической науки, широкая непредикативная (самоссылочная) практика применения химической технологии для удовлетворения потребностей человека	С кон. XX в.

Таким образом, периоды развития химии содержательно определены и соответствуют аналогичным периодам исторического развития иных наук¹³⁶.

¹³⁶ В системе образования также имеется необходимый содержательный параллелизм изучения других наук.

Часть 4. Подпериоды 5-го периода развития математики

В этой части в соответствии с гносеологической структурой типов причинности схематично описаны подпериоды (5-го периода развития) представлений о методах оптимизации, теории вероятности, формальных систем.

Глава 12. Периодизация истории методов оптимизации

§32. Схема подпериодов истории методов оптимизации

Усложнение типологии методов оптимизации (алгоритмов оптимизации) соответствует усложнению понимания причинности (— подуровни 5-го уровня абстракции, аналогичные подпериодам развития экономики, технологических укладов, см. §38, §39).

Подпериоды развития методов оптимизации указаны ниже.

5.1. (Синкретизм). На этом подуровне — непосредственное отыскание оптимума. Теорема Ферма — оптимум (экстремум) функции при её производной равной нулю. У П. Ферма (XVI в.) это описано следующим образом (в современной записи): значение производной функции в точке A находится так:

$$f'(A) = \frac{f(A + E) - f(A)}{E} \text{ при } E \rightarrow 0 \text{ (см. примеч. на стр. 51 и [2, с. 44]).}$$

То есть при решении задачи не требуется выполнять дополнительных логических шагов, решая смежные задачи.

5.2. (Ближайшая причина). В классической задаче вариационного исчисления — минимизации функционала следующего вида:

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, x') dt \rightarrow \text{extr}, \text{ где } x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1,$$

по функции $x(\cdot)$ (эта функция непрерывно дифференцируема),— т. е. при нахождении такой функции, которая доставляет минимум функционалу $I(x(\cdot))$,— функция $x(\cdot)$ находится из уравнения Эйлера, которое таково:

$$-\frac{d}{dt} L_{x'}(t, x^*(t), x'^*(t)) + L_x(t, x^*(t), x'^*(t)) = 0, \text{ где его решение } x^*(t) \text{ — стационарная точка вариационной задачи, — экстремаль [2, с. 59].}$$

То есть при решении исходной вариационной задачи¹³⁷ необходимо сделать один причинно-следственный шаг,— перейти к уравнению Эйлера.

¹³⁷ Аналогично причинно-следственный шаг делается при отыскании оптимума методом множителей Лагранжа, предложенным Ж. Лагранжем в 1788 г. (см. Лагранж Ж. Аналитическая механика. М.–Л.: Гостехиздат, 1950) [2, с. 47].

5.3. (Последовательный ряд причин, бесконечный). В многомерных задачах оптимизации, при отыскании оптимума многомерной функции методом последовательных приближений (вычислительными методами) известны следующие распространённые методы отыскания минимума (экстремума) функции многих переменных:

- а) метод покоординатного спуска,
- б) метод градиентного спуска.

Отыскание экстремума выполняется при последовательных приближениях к искомой величине, см. [141], [15, с. 290].

Аналогичны этим методам (последовательный ряд приближений к решению) и многие итерационные методы, например, метод Зейделя и др.

Симплекс-метод линейного программирования (перебор вершин с нахождением экстремума целевой функции задачи линейного программирования) также аналогичен рассмотренному пониманию причинности,— необходимостью последовательного ряда решений некоторой подзадачи, ряда, приводящего к оптимуму.

К этому же (третьему) подуровню относятся и так называемые сценарные прогнозы¹³⁸, применяемые, например, в экономике и демографии (см. [213]).

5.4. (Внешняя и внутренняя причинность). При управлении системами в текущем времени имеется задаваемое произвольно значение параметра, к которому система автоматизированного управления приближает регулируемый параметр объекта,— например заданная температура в промышленной печи (уставка), её поддерживает регулятор, посредством измерения действительной температуры и включения/отключения нагревателей; при этом разность между уставкой параметра и измеренным значением параметра динамически (во времени) минимизируется.¹³⁹

5.5. (Массовая причинность). В экономико-математических моделях рассматривается баланс между множеством экономических субъектов. Например, в модели межотраслевого баланса В. Леонтьева сбалансированность (оптимальная) — между отраслями, достигается сознательным планированием (сознательным, соответственно системе ценностей, потребностей, согласованием планов потребления и выпуска,— сродни этому экономика СССР) [233], [86].

¹³⁸ В сценарных прогнозах, в отличие от первых двух подуровней (5.1 и 5.2), наличествует параметр времени, что сопоставимо с возникновением параметра времени на втором гносеологическом уровне, например в истории механики.

¹³⁹ Подробнее см. например [119], [90].

В моделях рыночной, а не плановой, экономики оптимум понимается как максимизация потребления в денежном выражении (что в конечном итоге выгодно банкам, ссужающим деньги для потребления-производства под процент),— о ценностных соответствиях там речи не идёт. Такая оптимальность — это оптимальность по Парето, по Нэшу и т. п. [233],— чисто теоретическая,— вычислить этот оптимум для сознательного управления практически невозможно.

6. (Самопричинность). В вышеприведённых случаях оптимизации оптимум решения получался из внешних по отношению к нему условий,— содержательная задача с критерием оптимизации влекла вычисление оптимума, формально следующего из имеющихся условий.

При самопричинности оптимум уже задан содержательно, а не находится из формальных условий, и способы его достижения не всегда формализуемы. Так в экономике баланс свобод пользования результатами труда и свобод трудиться влечёт условия безынфляционного равновесия экономики; при этом достижение этого оптимального равновесия содержательная (жизненная), а не формальная задача. Экономическому равновесию соответствует алгебра событий с единственным событием — высвобождением общественно необходимого времени, возведение в степень этого события даёт его отрицание,— затраты общественно необходимого времени (см. подробнее [191, с. 73–74], [224], [222], [221]).

Таким образом, при таком понимании оптимизации (с непредикативной самопричинностью) сохраняется онтологическая полнота, см. §41.

Схема подпериодов развития методов оптимизации приведена в табл. 11.

§33. Ограничения методов оптимизации

Ограничения методов оптимизации связаны с необходимостью онтологической полноты рассуждений (§41).

Для уровней 5.1–5.5 оптимум ищется исходя из формальной математической задачи (которая сама по себе онтологически не полна).

Для уровня же 6 — оптимум находится вне математики,— над ней в сознательной сфере (iii), а математика — это лишь инструмент его достижения.

Таблица 11. Подпериоды развития методов оптимизации

№ ур-ня	Тип причинности	Содержание периода развития	Историч. период
1	Синкретизм (5.1)	Метод отыскания экстремума по нулю производной (Ферма),— непосредственное определение без смежных задач и без подзадач (без причинных шагов)	XVII в.
2	Ближайшая причина (5.2)	Вариационное исчисление, переход от вариационного уравнения по функции к дифуравнению Эйлера (один причинный шаг в решении задачи)	Кон. XVIII в.
3	Ряд последовательных причин (5.3)	Методы последовательных приближений к решению задачи (метод градиентного спуска, метод сечений и т. п.),— ряд причинно-следственных шагов	Сер. XIX в.
4	Естественная (внешняя) причинность и произвольная (внутренняя) (5.4)	Теория автоматического управления, поддержание заданного параметра (уставки) при внешних воздействиях: уставка — произвольная причинность, внешние воздействия — внешняя причинность; минимизируется рассогласование между уставкой параметра и его автоматически поддерживаемым значением	Нач. XX в.
5	Массовая причинность (5.5)	Оптимальность в массовых задачах (балансовое равновесие Леонтьева; равновесие по Парето и т. п.)	1-я пол. XX в.
6	Самопричинность (6)	Оптимум находится вне математики,— над ней в сознательной сфере (iii), а математика — это лишь инструмент его достижения	XXI в.

Глава 13. Подпериоды развития теории вероятностей

§34. Схема подпериодов развития теории вероятностей

Схема подпериодов развития основных понятий теории вероятностей описана ниже.

5.1. Предыстория теории вероятностей простирается от древности до XVII в.,— в этот подпериод при признании наличия случайных событий не делали количественной оценки меры их возможного наступления.

5.2. Количественная мера наступления событий была связана с азартными играми (бросанием шестигранной игральной кости — игрального кубика). Описана "арифметика" событий,— сумма несовместных событий, произведение и т. п.

5.3. Далее появляются представления о сходимости частот событий к предельным значениям (вероятностям). Я. Бернулли сформулировал (1713) слабый закон больших чисел о сходимости при большом числе наблюдений частот наблюдаемых событий к вероятностям.

5.4. На четвёртом подпериоде появляются функциональные описания случайных величин в виде функций плотности вероятности (функций распределения). Формулу плотности вероятности нормального распределения вывел К. Ф. Гаусс в кон. XIX в.

5.5. С начала XX века появляются попытки аксиоматизации теории вероятностей (Г. Больман, 1908 г. и др.), признана была аксиоматика А. Н. Колмогорова (1933).

Ограничения аксиоматического подхода в теории вероятностей связаны с тем, что при теоретическом построении оценок параметров выборки измерений необходимо знать исходную функцию распределения этих наблюдений, что практически невозможно.

Поэтому особую значимость имеют методы статистического оценивания, свободные от распределений, основанные, например, на неравенстве Чебышева (см. [225], [226]).

6. На подуровнях **5.1–5.5** события неявно подразумевались несомоприменимыми, для них допускались только сложения и умножения вероятностей. При описании самоприменимых (непредикативных) процессов в экономике используются самопричинные события, см. стр. 98, [191, с. 73–74], [224], [222], [221]. Алгебра самопричинных событий не сводима к алгебре несомопричинных событий.

Схема периодов развития понятий теории вероятностей приведена в табл. 12.¹⁴⁰

Таблица 12. Подпериоды развития теории вероятностей

№ ур-ня	Тип причинности	Содержание периода развития	Историч. период
1	Синкретизм (5.1)	Признание случайности, нет количественной меры оценки возможности наступления события	До XVII в.
2	Ближайшая причина (5.2)	"Арифметика" элементарных событий,— суммы произведения вероятностей	Нач. XVIII в.
3	Ряд последовательных причин (5.3)	Закон больших чисел — о сходимости при большом числе наблюдений частот наблюдаемых событий к вероятностям	XVIII в.
4	Естественная (внешняя) причинность и произвольная (внутренняя) (5.4)	Функциональные описания случайных величин в виде функций плотности вероятности	Нач. XIX в.
5	Массовая причинность (5.5)	Аксиоматизации теории вероятностей, развитие математической статистики	1-я пол. XX в.
6	Самопричинность (6)	Самопричинные события	XXI в.

¹⁴⁰ Подробное описание частных периодов развития теории вероятностей до середины XX в. см. в [96].

Вообще вероятность — это мера части случающегося из того, что может быть в целом.

Глава 14. Подпериоды усложнения формальных систем

§35. Схема усложнения формальных систем

Схема усложнения формальных систем, как и схема усложнения методов поиска оптимума, следует уровням развития причинности (внутри одного, 5-го, уровня обобщения).

Подпериоды развития представлений о логическом выводе ниже-следующие.

- 5.1.** Содержательный вывод без формализации правил вывода (и у древних, Евклид), аксиоматизация, до нач. XIX в.
- 5.2.** Система аксиом, свойства аксиоматик, замена аксиом на отрицания (основания геометрии, К. Ф. Гаусс).
- 5.3.** Цепи выводов из различных аксиоматических систем (Н. И. Лобачевский).
- 5.4.** Формализация набора аксиом арифметики (Дж. Пеано), описание правил вывода.
- 5.5.** Намерения полной формализации математики (Д. Гильберт). Отказ от смысла в формализме. Намерения "автоматического" доказательства теорем (Гёделев тупик отказа от смысла).
- 6.** Непредикативные теории, онтологически полные, см. §41 (с кон. XX в.).

Часть 5. Дополнения

Глава 15. Периоды и структура развития экономики

В этой главе кратко очерчена схема развития экономики как науки, к которой, отчасти, приложима математика.

§36. Бывшая периодизация истории экономики

Периодизация истории экономики была описана в советской философской школе (сер. XX в.), при этом в качестве периодов развития выделялись общественно-экономические формации [62, с. 57-77]:

1. первобытно-общинный строй,
2. рабовладельческая общественно-экономическая формация,
3. феодальная общественно-экономическая формация,
4. капиталистическая общественно-экономическая формация,
- 5а, 5б. коммунистическая общественно-экономическая формация.

При этом коммунистическая общественно-экономическая формация понималась как единая, имеющая две фазы развития (низшую 5а — социализм и высшую — 5б собственно коммунизм [62, с. 66-77]).

Эта схема периодизации истории, как видно ныне (из рассмотренного в предыдущих главах материала), хоть сколько-то приблизительно верно вычленяла периоды развития человечества, однако это вычленение касалось только экономики (способа производства) и совершенно не касалось развития наук, математики и культуры¹⁴¹.

При современном же взгляде на развитие внешние отношения людей возникают как результат их внутреннего мышления (самоосознания), поэтому периодизация науки, математики и культуры (в том числе экономики) связана с определёнными структурами сознания. В описании действительности (см. онтологическую схему рис. 1, стр. 8) сознание является "посредником" между внешним миром и его описанием, поэтому описание мира и деятельность человека, использующего это описание, наследует внутренние структуры сознания (структуры отражения действительности в сознании, связанные с самоосознанием человека).

С другой стороны, если в определённый период (на определённой формации) имелась структурная организация производства, то, при движении к более высшей формации, эта структура наследуется и

¹⁴¹ В той же мере это относится к философии истории Гегеля (4-й уровень), который выделял 4 периода мировой истории в труде "Философия истории" [38], краткая схема этой периодизации истории есть и в его "Философии права" (§§341–360, особенно §354 и след.), в которой им выделяются 4 последовательных этапа истории: "четыре всемирно-исторических царства: 1) восточное, 2) греческое, 3) римское, 4) германское" [37, с. 374],— эти царства выделены им безотносительно развития науки,— развития, имеющего свои закономерности.

включается в высшую в преобразованном и подчинённом высшей структуре виде,— так возникает современная вертикальная 6-уровневая структура экономических субъектов (предприятий).

§37. Вертикальная структура экономических субъектов

Вертикальная 6-уровневая структура экономических субъектов была описана подробно ранее в [167], [168], [203], а также в связи с её связанностью с информационной структурой управления производством, структурой научно-производственного цикла и структурой системы образования — в [198]. Вертикальные социальные и информационные уровни организации экономических субъектов (на примере предприятий¹⁴²) таковы, как указано в табл. 13.

Таблица 13. Вертикальные уровни экономических субъектов [198]

№ уровня	Социальные уровни	Информационные уровни
1	Рабочие	Приборы, средства измерения, управления
2	Бригадиры, мл. мастера	Контроллеры, контура управления
3	Старшие мастера, нач. отд. производств. участков цеха	Базы данных, автоматизированные рабочие места технологов (АРМ)
4	Начальники цехов	Системы оптимизации технологических процессов
5	Начальники отделов	Системы учёта и планирования
6	Директорат	Системы прогнозирования и разработки целей плана

Эта структура представляет собой объединённые в соподчинении и преобразованные структуры низших уровней развития¹⁴³, причём 5-й и 6-й уровни качественно различаются по типу выполняемых задач (типу деятельности), см. подробнее [198, с. 18]; такая вертикальная структура сложилась в экономике СССР к середине XX в. в промышленности и к 80-м гг. XX в. — в сельском хозяйстве.

Соподчинённые высшим уровням низшие уровни экономической структуры становились таковыми не мгновенно, а в результате постепенных преобразований. Так, при переходе от 3-го уровня развития к 4-

¹⁴² Для других типов экономических субъектов см. в [203].

¹⁴³ При отдельных наблюдаемых случаях разрушения этой вертикальной структуры для отдельных экономических субъектов (при бывшем разрушении экономики России в 90-е гг.), они распались на структуры, соответствующие низшим формациям [168].

му необходимо не просто надстроить верхний (образно говоря: "надстроить верхний этаж"), но и преобразовать систему отношений, начиная с нижнего уровня (образно говоря: "поднять на верхний этаж строительный материал"); поэтому период развития экономики делится на определённые подпериоды.

§38. Периодизация истории экономики (вложенные структуры)

В периодизации истории экономики рассматриваются переходы от низших ступеней к высшим в качестве периодов, внутри которых происходит однородное в пределах периода развитие. Внутри периода столько подступеней, каков уровень самого этого периода. Поскольку подробная история экономики — это предмет отдельного описания, то здесь остаётся довольствоваться краткой схемой:

1–2. Переход от общинного строя к рабовладению включает два подпериода:

- 2.1.** Рабы — это пленники.
- 2.2.** Обращение в рабство, в том числе за долги.

2–3. Переход от рабовладения к феодализму включает три подпериода:

- 3.1.** Бывшие рабы — это крепостные крестьяне (илоты).
- 3.2.** Формирование промежуточного между крепостными и феодалами сословия (ремесленники и проч.).
- 3.2.** Завершение формирования феодальной иерархии, цеховая система.

3–4. Переход от феодализма к капитализму включает 4 подпериода:

- 4.1.** Деньги — это средство обмена.
- 4.2.** Деньги — это средство накопления.
- 4.3.** Деньги — это средство наложения обязательств.
- 4.3.** Деньги — это средство перераспределения обязательств (кредитование, акции, биржи и т. п., замена податей на налоги).

4–5. Переход от капитализма к социальному обществу содержит 5 подпериодов, связанных с освоением производства и использования энергии:

- 5.1.** Механическая энергия (природная или от сжигания топлив в тепловых машинах).
- 5.2.** Локальное производство энергии (двигатели, транспорт).
- 5.3.** Промышленное производство электрической энергии и передача её на расстояние для использования.
- 5.4.** Повседневное использование электроэнергии в быту (освещение, приготовление пищи, холодильники и т. п.).
- 5.5.** Массовое использование электрических систем связи (радио, телефон, телевидение, Интернет и т. п.).

То, каково социальное общество, зависит уже не от техники, а от свойств самого человека¹⁴⁴.

6. Шестой уровень, как это было сказано в описании системы права,— это неформализуемая свобода.

Схема периодов развития экономики представлена в табл. 14. Периоды экономического развития примерно совпадают с периодами развития науки и культуры.

Как видно из истории экономики капитал (деньги) является лишь подчинённым по отношению к общезначимым целям экономики государства (более подробно это обсуждалось в [191], [204]).

Таблица 14. Периоды развития экономики

№ ур-ня	Содержание периода развития	Исторический период
1	Общинный строй	Древность
2	Рабовладение	Античность, с VII в. до н. э.
3	Феодализм	Средние века, с первых вв. н. э.
4	Капитализм	Новое время, с кон. XVI в.
5	Социальное общество	Новейшее время, с нач. XIX в.
6	Общество, реализующее подлинные свободы ¹⁴⁵ человека	Современность (?)

§39. Конечность технологических укладов

Указанные в предыдущем параграфе подпериоды 5-го периода развития экономики содержательно соответствуют т. н. "технологическим укладам"¹⁴⁶, из чего следует, что количество технологических укладов конечно и равно пяти, при этом современный технологический уклад (пятый, с вычислительной и информационной техникой) является предельным. Для сведения технологические уклады и подпериоды развития экономики приведены в табл. 15 [211].

Применение микропроцессорных систем и современных физических, химических (и т. п.) теорий в производстве не является новым технологическим укладом, а лишь новой предметной областью приложения компьютерных, аппаратных и программных средств.

¹⁴⁴ Эти свойства человека, связанные со свободным воспроизводством следующих поколений, обсуждались отчасти в [187], [200], [201].

¹⁴⁵ При этом "свобода" понимается в смысле этимологии "сво-Бо(г)-да", а не в смысле "liberty" ("исполнение желаний", однокоренное libido — "похоть") и не в смысле "freedom" ("делание желаемого"), подробнее см. [199], [161].

¹⁴⁶ О технологических укладах, см. напр. в [41].

Таблица 15. Подуровни развития экономики и технологические уклады

Технологические уклады, по [41, с. 7–8]	Подпериоды развития экономики
1. (1770–1830 гг.) Текстильные машины	5.1. Механическая энергия (природная или от сжигания топлив в тепловых машинах)
2. (1830–1880 гг.) Паровой двигатель, станки	5.2. Локальное производство энергии (двигатели, транспорт)
3. (1880–1930 гг.) Электродвигатель, сталь	5.3. Промышленное производство электрической энергии и передача её на расстояние для использования
4. (1930–1970 гг.) Двигатели внутреннего сгорания, нефтехимия, <бытовая техника>	5.4. Повседневное использование электроэнергии в быту (освещение, готовка, холодильники и т. п.)
5. (с 1970 гг.) Микропроцессорные компоненты	5.5. Массовое использование электрических систем связи (радио, телефон, телевидение, Интернет...)

Часть 1. (Окончание)

Глава 16. История методологии науки

В этой главе описана краткая схема изменения представлений о научном методе. Сложность описания методологии науки определённого периода заключается в том, чтобы не привносить с более развитого уровня современности в исследуемые периоды ничего дополнительно, но понимать логику научного изложения исходя из представлений того, описываемого, уровня (но не выше)¹⁴⁷.

§40. Схема изменения представлений о научном методе

Кратко очерченные периоды изменения представлений о науке и методе таковы.

1. (До V в. до н. э.). На первом уровне развития науки важным является непосредственное наблюдение и описание наблюдаемых явлений (правильное именование предметов и явлений); передача уловленного, усвоенного с опытом (без теоретизирования).

2. (С V в. до н. э.). На этом этапе наблюдаемые явления объясняются через ближайшую причину, что позволяет умозрительно "открыть" малость частиц вещества (Тит Лукреций Кар, см. с. 68) и некоторые простые механические законы, законы Аристотелевой логики (законы силлогизма, позволяющие обнаружить правильность или неправильность наименований)¹⁴⁸.

Евклидовы определения: "точка не имеет частей", "линия — длина без ширины" и т. п. [56, т. 1], — это наименования наглядно наблюдае-

¹⁴⁷ Если этого не делать, то тогда получится привнесение современных представлений в прошлое, — неспособность выявить ступени и последовательность развития науки, определяющую её современную структуру и связанную со структурой системы образования.

¹⁴⁸ Аристотель писал о науке логики ("Софистические опровержения", гл. 34): "Итак, мы <Аристотель> замыслили найти некоторое средство строить умозаклучения относительно предложенных для обсуждения проблем на основе наиболее правдоподобных [предпосылок]" [9, т. 2, с. 591]. (Там же, гл. 1): "В самом деле, так как нельзя при рассуждениях приносить самые вещи, а вместо вещей мы пользуемся их знаками именами, тот мы <Аристотель> полагаем, что то, что происходит с именами, происходит и с вещами, как это происходит со счётными камешками для тех, кто ведёт счёт, но соответствия здесь нет, ибо число имён и слов ограничено, а количество вещей неограниченно. Поэтому одно и то же слово неизбежно обозначает многое... Дело же знающего — каждый раз, сопоставляя одно с другим, говорить правду относительно того, что он знает, и уметь уличить лжеца" [9, т. 2, с. 536]. (Там же, гл. 34): "Что касается настоящего учения, то дело обстояло не так, что частью оно было заранее разработано, а частью нет: в наличии не было ровно ничего... Что же касается учения об умозаклучении, то мы не нашли ничего такого, что было бы создано до нас, а должны были сами создать его с большой затратой времени и сил" [9, т. 2, с. 593].

мых свойств чертежей. Таковы же и аксиомы у Евклида: "равные одному суть и взаимно равны", "если к равным приложены равные, то и полученные равны" [56, т. 1],— это описание наглядных действий¹⁴⁹. Дальнейшие рассуждения Евклида — это описание построений линейкой и циркулем (эти его построения не выходят за второй уровень абстракции).

3. (С нач. н. э.). На третьем этапе объяснение включает в себе уже цепь логических выводов; описывая методологию, аль-Фараби (870–950 гг. н. э.) упоминает только цепь выводов, без эксперимента ("Большая книга о музыке"): "Чтобы стать хорошим теоретиком в какой-либо науке, необходимы три условия: во-первых, хорошо знать все её начала [принципы]. Во-вторых, умело делать необходимые выводы из этих начал и данных, относящихся к науке. В-третьих, умело отвечать на ошибочные высказывания в данной науке, анализировать мнения, высказанные другими авторами, чтобы отличить истину от лжи и исправить их ошибки" [144, с. 74]. Здесь упоминается только сопоставление цепей логических выводов из посылок (— это более сложно, чем отдельные умозаключения 2-го уровня, но не содержит ещё представлений об эксперименте)¹⁵⁰.

4. (С XVI в.). На 4-м уровне появляются гипотетико-дедуктивные рассуждения и эксперимент как таковой, т. е. сопоставление функционально (причинно-следственно) описанного закона и наблюдения природного явления (сопоставление двух причинностей: 1. внутренней, моделирующей закон, и 2. внешней причинности явлений природы). Таково описание экспериментов у Леонардо да Винчи¹⁵¹ (ок. 1500 г.) и Гали-

¹⁴⁹ Без введения понятий порядка меры и т. п., каковые есть в современной математике.

¹⁵⁰ То же самое наблюдалось и у Ибн-Сины: "... содержание силлогизма — это его посылки. Чем они вернее, тем вернее силлогизм. Силлогизмы все по форме одинаковы, но все их посылки истинны. В общем посылки любого силлогизма могут быть двух родов. Или это посылки, истинность или сомнительность которых установлены... при помощи силлогизма или доказательства... Или это посылки, которые приняты, исходя из убеждения, что они верны сами по себе. Если посылки силлогизма бывают такими, о которых мы сказали раньше, то их обязательно проверяют другими посылками... И таким путём доходят до таких посылок, которые не выводятся из других и являются действительно основоположениями. Если они истинны и достоверны, то и силлогизмы, составленные на их основе, истинны и достоверны. Если же они ложны, то составленные посредством их [силлогизмы] также ложны" [52, с. 116], [61, с. 90].

¹⁵¹ Леонардо да Винчи: "Опыт — переводчик между искусной природой и человеческим родом — учит нас тому, что эта природа производит среди смертных и принуждённая необходимостью, не может действовать иначе, чем ей велит поступать разум её рулевой... Опыт никогда не ошибается, но ошибаются только наши суждения,

см. след. стр. —>

лея¹⁵².

5. (С нач. XIX в.) На 5-м уровне, при появлении теорий, теоретические положения позволяют логико-дедуктивно (аксиоматически) выводить законы, которые затем опытно подтверждаются¹⁵³. (Аксиоматический метод как таковой возник тогда, когда совокупность аксиом и следующую из них теорию стали рассматривать как один целый объект для изучения,— в нач. XIX в.). Аксиоматический метод весьма распространяется в науке, несмотря на его ограничения, следующие из теорем Гёделя (эти ограничения преодолеваются возможностью экспериментальной проверки).¹⁵⁴ Но так допустимо для наук, описывающих неживую природу (естественных наук).

Для систем, пытающихся описать человека, предикативный аксиоматический метод оказывается неприменим (например, теория игр применима к описанию неживых систем, но некорректна в экономике [215, с. 12-14]).

6. (С кон. XX в.). На этом уровне наблюдаются, с одной стороны, наличие в описываемом наукой мире самого человека, с другой — ограничение предикативной аксиоматики,— предпосылки появления теорий, имеющих непредикативные (самоссылочные основания)¹⁵⁵. Примеры

ожидая таких результатов, которые не вызываются нашими экспериментами" [85], см. тж. [47].

¹⁵² Галилей писал ("Беседы и математические доказательства...", день третий): "Мы <Галилей> создаём совершенно новую науку о предмете чрезвычайно старом. В природе нет ничего древнее движения, и о нём философы написали томов немало и немалых. Однако я <Галилей> излагаю многие присущие ему и достойные изучения свойства, которые до сих пор не были замечены, либо не были доказаны..., говорят, что движение падающего тяжёлого тела ускоряется. Однако в каком отношении происходит ускорение, до сих пор <прежде Галилея> не было указано... Было замечено также, что бросаемые тела или снаряды описывают некоторую кривую линию; но того, что линия эта является параболой, никто <прежде Галилея> не указал. Справедливость этих положений, а равно и многих других, будет мною <Галилеем> в дальнейшем доказана; тем открывается путь к весьма обширной и важной науке, элементами которой будут эти наши <Галилей> труды; в её глубокие тайны проникнут более пронизательные, чем тот, умы тех, кто пойдёт дальше" [35, т. 2, с. 233]. Теоретические выкладки Галилей подтверждал экспериментами: катанием тел с наклонной плоскости, сбрасыванием шаров с Пизанской башни.

¹⁵³ См. замечания Максвелла о теории электромагнетизма на стр. 72.

¹⁵⁴ См. замечание об аксиоматическом методе на стр. 73 (примечание внизу страницы).

¹⁵⁵ Наука первых двух уровней ввела отношение порядка и счёт, на средних (3–4) уровнях появилось геометризованное понятие изменения величин (функциональное описание), на завершающих стадиях науки (5–6) — понятие меры, в прикладной области экономики эти меры оказываются самоприменимыми [191, с. 63–64].

таких теорий описаны в [178], [191], [204], [207], таково же (непредикативно) описание периодов истории науки, использующее представление о структуре отражения действительности в сознании человека, изложенное в этой книге.

Схема периодов развития методологии науки приведена в табл. 16.

Таблица 16. Периоды развития методологии науки

№ ур-ня	Содержание периода развития	Исторический период
1	Наблюдение, именованье, непосредственный опыт	Древность
2	Объяснение наблюдаемого через ближайшую причину	Античность, с V в. до н. э.
3	Объяснение наблюдаемого через начальные принципы и цепь выводов (без эксперимента)	Средние века, с первых в. н. э.
4	Постановка эксперимента, функциональное (причинно-следственное) объяснение явлений	Новое время, с кон. XVI в.
5	Теории, из которых выводятся законы (предсказательность теорий для наблюдаемых явлений), аксиоматизация. Ограничения аксиоматического (предикативного) метода (XX в.)	Новейшее время, с нач. XIX в.
6	Необходимость учёта неотделимого присутствия человека в сложных теориях, непредикативность	С кон. XX в.

Современные представления о критериях истинности научного знания включают представления о самоописательности теорий (5-й уровень отражения), их самоприменимости (непредикативности) для человека (6-й уровень отражения), — самоприменимости, сохраняющей 10-частную (всеобщую) систему ценностей. О критериях истины на примере экономических теорий говорилось отдельно (см. [204, с. 12–13], [208]) в том смысле, что теория истинна на всех трёх онтологических уровнях, начиная с верхнего — сознания, на основании 1-го через 2-й (логическое непротиворечивое изложение, — симметричную правилосообразность), и на нижнем уровне практики вносит порядок и в материальную деятельность; такая структура истинности теорий соответствует их онтологической полноте.

§41. Онтологическая полнота теорий

Онтологические основания науки были упомянуты ранее в [208], [191], [178] в связи с описанием трёхчастной онтологической структуры действительности: а) сознание, б) время, в) материя, — и трёхступенчатой последовательностью постижения истины [117]: а) непосредственное созерцание, б) абстрактно-логические рассуждения, в) материально-вещественная практика. Основания теории множеств (и всей математики) являются надлогическими, это было показано при обосновании допустимости самопринадлежности в [178], [207]; таковы же "надлогические"

основания экономики (экономико-математического моделирования). Вообще же логические рассуждения, используемые для упорядочения явлений действительности, получают смысл не из самих себя, не из материально-вещественной сферы действительности, а смысл их (ценностное его содержание) доступен сознанию человека. Таким образом, смысл находится в надлогической области. Ниже эти свойства логических (теоретических) рассуждений несколько конкретизированы, изложено по [220].

Непредикативность логического вывода

Источник ценностного содержания смысла логических (теоретических) рассуждений интуитивно представляется единым; с формально-математической стороны это выражается доказанной ранее теоремой о свойстве гносеологического отражения действительности [191, с. 18-19], указывающей на единство высшего (ценностного) уровня отражения действительности для множества субъектов (дабы не повторять здесь известные уже рассуждения см. [191], [204]).

Таким образом, имеется следующая картина: для формально-логических рассуждений (теоретических) имеется надлогический смысл (который един над множеством этих суждений). То есть имеется два слоя: формально-логический и находящийся над ним смысловой. Тогда при изображении логического следования одного выражения из другого (и истинности обоих) на формально-логическом слое, на слое, находящемся выше, — смысловом — эти выражения имеют общую часть (причастны истине), — это при взгляде с формально-логического слоя. При взгляде же с верхнего — смыслового слоя — формально-логические рассуждения лишь развёртывают истину и смысл (надвременные категории) в некоторых, упорядоченных во времени (логическим выводом) цепочках взаимосвязанных формально-логических рассуждений. И если эти формально-логические цепочки корректны (непротиворечивы), то они вмещают смысл с верхнего уровня и тем самым позволяют упорядочить явления материального мира.

Логический вывод при этом непредикативен (самоссылочен) (в смысловом содержании, — имеется общая часть смысла в выводимом и в том, из чего выводится). Свойства некоторых непредикативных теоретико-множественных конструкций рассматривались в [178], [207], поэтому здесь не повторяются. Для непредикативной теории множеств доказана её непротиворечивость [178], [207].

Ограничения предикативного вывода

Логический вывод, основанный на смысловых основаниях, — непредикативен. Допустимость такого вывода показана в описании теории множеств с самопринадлежностью и её многообразных приложений [207].

Если же ограничиться только предикативным логическим выво-

дом (в котором нет общей части в выводимом и в том, из чего выводится)¹⁵⁶, то при рассмотрении такого вывода отказываются от надлогического (смыслового уровня), который, как сказано выше, непредикативен (самоссылочен); при этом от математики отстаётся только формально-логическая ("бессмысленная" часть), которая может быть и описывает материальный мир, но не применима для адекватного описания человека (включающего в себя и смысловой, сознательный уровень действительности).

При этом (при отсечении верхнего онтологического уровня действительности — ценностно-смыслового), математические теории не имеют опоры в обосновании аксиоматики, т. к. аксиоматическая система сохраняет свои формальные (не относящиеся к другим уровням действительности, кроме её формально-логического уровня) свойства и при отрицании одной (или нескольких) её аксиом. Если аксиоматика описывает материальный мир (как например, аксиоматика геометрии), то выбор аксиом (а не их отрицаний) ограничивается совпадением теории с материальной действительностью. Но если предикативная аксиоматическая теория претендует на описание систем, содержащих человека, то здесь она бесполезна и может быть даже разрушительна (ввиду игнорирования ценностно-смысловых оснований).

В [204, с. 11, прим. 6] была кратко упомянута неполнота онтологических уровней теории игр. Подробнее рассуждения таковы. Теория игр является предикативной теорией, она применима к описанию неживых объектов материального мира (так, например, Л. С. Понтрягин, посредством теории игр решил задачу оптимального преследования для произвольно уклоняющейся цели (см. [118] и его другие аналогичные работы),— решение этой задачи применимо в противоракетной обороне. Но при попытках применения теории игр к содержащим человека системам (в экономике) игнорируется смысл жизни человека,— на это игнорирование указывали сами основоположники теории игр. Так, Дж. Нейман писал: "2.1.1. ... Мы <Нейман> хотим сосредоточиться на одной задаче, которая не является задачей измерения полезности и предпочтений, и поэтому мы <Нейман> будем пытаться в разумных пределах максимально упростить все другие характеристики. С этой целью мы <Нейман> предположим, что целью всех участников экономической системы — как потребителей, так и предпринимателей — являются деньги или, что эквивалентно, некоторый единый монетарный товар. Последний предполагается неограниченно делимым и заменимым, свободно передаваемым и тождественным (даже в количественном смысле) с любым "удовлетворением" или "полезностью", которых же-

¹⁵⁶ Такой подход свойственен Западной логической школе (за немногими исключениями, например, Г. Фреге и др.).

лает каждый участник" [107, с. 34]. Далее Нейман для этого денежного предположения (основанием в онтологическом смысле не являющегося) строил аксиомы [107]. Как видно из написанного Нейманом, единство системы ценностей (см. [191, с. 20, теорема 1]) игнорируется им, как и игнорируется им государство, стоящее над предпринимателями и организующее (ограничивающее) их. Деньги же, к максимуму которых стремится Нейман, не несут в себе смысла¹⁵⁷, более того, Нейман полагал, что его теория окажет влияние на человека¹⁵⁸, т. е. не теория описывает человека (и даёт ему тем самым осознание ценностей), а человек, по Нейману, приспосабливается к теории — разрушительные последствия для человеческого сознания при такой абсолютизации денег видны в западной экономике.

Таким образом, попытки применить теорию игр к описанию систем, содержащих живого человека (обладающего полнотой трёх онтологических уровней), бесполезны.

Особенность непредикативной теории

Особенность непредикативной теории видна на примере теории множеств с самопринадлежностью. Допустимость самопринадлежности обоснована из надлогических соображений. Если в теории множеств отрицать допустимость самопринадлежности, рассматривать только несамопринадлежащие множества и только предикативные определения, то получится теория множеств без самопринадлежности, на которую действуют теоремы Гёделя и непротиворечивость которой недоказуема; — такая теория (с недоказуемой непротиворечивостью) не приемлема для дальнейшего построения математики. Таким образом, отрицание основоположения теории (в отличие от формальной аксиоматики, см. выше) не приводит к сохранению непротиворечивости теории, — т. е. это осно-

¹⁵⁷ "3.7.3 ...Из наших рассмотрений не вытекает никаких результатов, касающихся сравнения полезностей, которые принадлежат различным индивидуумам" [107, с. 55].

¹⁵⁸ "3.3.5 ...Если с помощью теории <теории игр Неймана>, использующей этот аппарат, будет достигнуто более полное понимание экономического поведения, то это сможет оказать влияние и на материальную жизнь индивидуума" [107, с. 55].

Здесь, в связи с абсолютизацией денег как цели, напрашивается такое сравнение экономического "человека", но даже уже не человека, а экономического агента, ищущего только денежной выгоды (Триодь постная, служба Великой среды): "дыша же благодать ... ученик неблагодарный <Иуда> сию <благодать, т. е. смысл> отлагает и смрадом одевается, сребролюбием продавая..." "О слепотнаго сребролюбия нечестиве, отнюдуже забвение получил еси, яко души никакоже равностоянен мир..., <но душа ценнее вещественного мира>" [139]. Таким образом, в теории игр отказались от смысла ради абсолютизации выгоды (денежного дохода).

В онтологическом плане слово *sense* («смысл») в западноевропейских (английском) языках этимологически означает «ощущение», т. е. только чувственно-воспринимаемое.

воположение является неотрицаемым как по смыслу, так и с формально-логической стороны.

С другой стороны, если в теории множеств отрицать допустимость несамопринадлежности, то получаемый "универсум" множеств ограничится некоторым единственным конечным натуральным числом вида $n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ¹⁵⁹, что не соответствует необходимости абстракции бесконечности для построения теории меры [210] (более того, не упорядоченные внутри себя отношением принадлежности множества не могут быть "помещены" в этот "универсум"), что показывает недопустимость отрицания и этого основоположения теории множеств.

Таким образом, в теории множеств необходимы как самопринадлежащие, так и несамопринадлежащие множества.

Для современных экономических теорий попытки отрицания их основоположений ведут к отрицанию присутствия в экономике человека (отрицанию смысла его жизни и смены поколений). Подробное описание основоположений экономики см. в [191], [204], [215].

То, что отрицание основоположений теории рушит всю теорию¹⁶⁰, отличает современный способ построения теорий от формально-аксиоматического.

Онтологическая полнота теорий

Основоположения (теоретического, формально-логического, математического) описания действительности лежат в сфере смысловой, надлогической. Основания теорий, учитывающих эти смысловые основоположения, таковы, что не могут быть отрицаемы (изменяемы), без того, чтобы теория разрушилась (перестала соответствовать трёхуровневой онтологической полноте действительности). Таким образом, в методологическом плане, при смыслополагающих основаниях теории, её логическое развёртывание непредикативно (самоссылочно) и непротиворечиво, что и позволяет использовать его для упорядочения явлений окружающего мира (на практике).

¹⁵⁹ Множество \mathbb{N} всех самопринадлежащих натуральных чисел — несамопринадлежаще, поэтому не вкладывается в этот усечённый чисто самопринадлежащий "универсум". Единственность числа n в этом "универсуме" следует из того, что если у объекта из $n-1$ (внутренности n , $V(n)$) имеются два различных последователя $P_1(n-1)$ и $P_2(n-1)$, $P_1(n-1) \neq P_2(n-1)$, то они образуют несамопринадлежащее множество, которое не вкладывается в этот "универсум", т. о. в нём допустима только нить (см. [178, с. 24]) объектов.

¹⁶⁰ Отчасти это напоминает антропный принцип в физике, — в теории, описывающей физический мир, физические константы таковы, чтобы описание мира соответствовало действительности, в которой ныне живёт человек; малейшее отклонение основных физических постоянных от их экспериментально определённых величин влечёт модель мира, в котором жизнь человека невозможна.

Глава 17. Классификация наук

§42. Онтологическая схема классификации наук

Соответственно онтологической схеме (см. §1) и стадий постижения истины, имеются:

- а) сознание (непосредственно созерцающее, в т. ч. само себя),
- б) время (и выполняемые в нём абстрактно-логические рассуждения, информация),
- в) материя (материально-вещественная практика).

При этом науки по предметной области подразделяемы соответственно онтологической структуры на:

- а) изучающие самого человека и системы, неотделимо включающие в себя самого человека,
- б) изучающие логические построения,
- в) изучающие материальный мир.

При этом целеполагание таково: цели науки (служащей удовлетворению системы ценностей, потребностей человека,— воспроизводству общества в целом при смене поколений) задаются сознательно; их логическое оформление выполнимо в непротиворечивых системах (в системах, преодолевающих противоречие); и затем посредством этого знания упорядочиваемы явления материальной действительности, необходимые для удовлетворения указанной 10-частной системы ценностей (табл. 18).

Тогда снизу вверх классификация наук примерно такова:

- в) естественные науки, изучающие материальный мир: физика, химия, механика, биология, медицина и т. п.,
- б) науки, описывающие логические рассуждения: математика и т. п.,
- а) гуманитарные науки: психология и т. п.

При этом некоторые науки шире, чем эти отдельные подразделения: основания права находятся в ценностной (сознательной области), но процессно оно реализуется в области применения закона (в логической области), которая имеет вертикальную (гносеологическую) 6-уровневую структуру.

В экономике целеполагание (система потребностей) находится в сознательной сфере, однако реализуется в процессе экономической деятельности в экономических субъектах, имеющих вертикальную (гносеологически обусловленную) 6-уровневую структуру, в процессе организации материальных потоков земледелия, производства, информации (потребляемых в ходе жизнедеятельности и воспроизводства общества при смене поколений).

Об онтологической полноте теорий сказано отдельно.

Ниже более подробно рассмотрена классификация естественных наук по предметной области, см. табл. 17.

Таблица 17. Классификация естественных наук по предметной области ("двумерная")

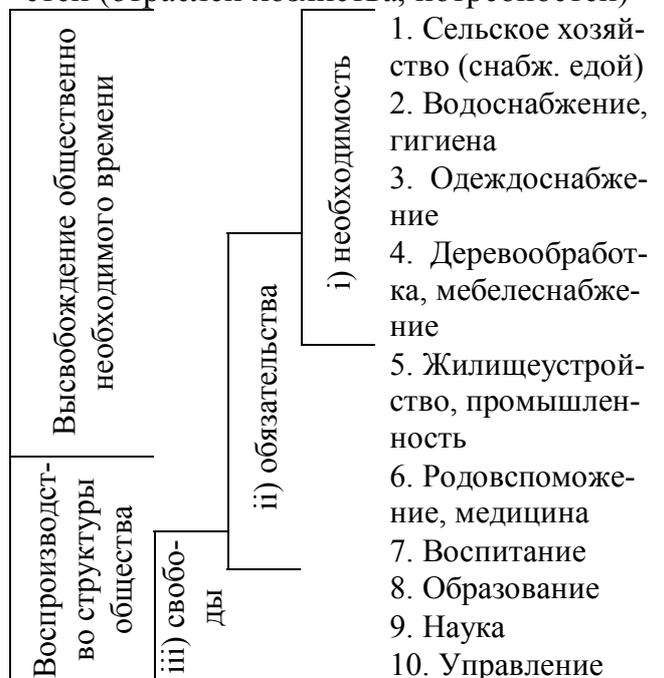
№ периода	Уровни структуры материи	Гравитац. взаимодействие	Гравитац. взаимодействие	Слабое взаимодействие	Сильное взаимодействие	Эл.-маг. взаимодействие	?	Кварки	Нуклоны	Атомы	Функц. группы	Молекулы	Макромолекулы	Органоиды	Клетки	Ткани	Органы
5	Гравитационное взаимодействие	Физика															
5	Слабое взаимодействие																
5	Сильное взаимодействие																
4, 5	Электромагнитное взаимодействие																
4	...?																
4	Кварки	Физическая химия						Химия									
3, 4	Нуклоны																
3	Атомы																
3	Функциональные группы	Биофизика						Биохимия		Цитология Биология и др.							
2, 3	Молекулы																
2	Макромолекулы	Биофизика						Биохимия		Цитология Биология и др. Физиология							
2	Органоиды																
1, 2	Клетки																
1	Ткани																
1	Органы	Физика						Химия		Биология							
1	Организм																
"Линейная классификация"		Физика						Химия		Биология							

§43. Классификация естественных наук по предметной области

Естественные науки, ввиду выделенной структуры уровней устройства материи, см. рис. 8 в §22, подразделяемы по предметной области, которую они изучают, — такая "линейная" классификация приведена в табл. 17 в нижних строках.

Естественно, что науки изучают и взаимодействие определённых уровней материи с более низкими уровнями. Так, например, биохимия изучает химические процессы в живом организме; биофизика — физические процессы (перенос энергии, передачу нервных импульсов) в организме и т. п. Такая "двумерная" классификация наук приведена в табл. 17. Возможна, конечно, и "трёхмерная" классификация, но для прикладных целей пригодна и эта ограниченная ("плоская") схема.

Таблица 18. Структура системы ценностей (отраслей хозяйства, потребностей)



§44. Место науки в системе потребностей (ценностей)

Десятичастная структура потребностей человека была описана ранее (см. [191], [204]). Наука как отрасль народного хозяйства, относящаяся к сфере реализации свобод личности, занимает в этой 10-частной структуре определённое место, см. табл. 18 [158]. Для науки требуется работа всех предыдущих отраслей (1–8), с другой стороны, наука обслуживает деятельность по управлению государством и обществом, реализуя конструктивные цели, направленные на производство страны (поколений) в неограниченно продолжающемся времени.

§45. Место математики в онтологии и её инструментальность

В этом параграфе описаны онтологические ограничения оснований и приложений математики; указано, что математика носит лишь инструментальный характер логических рассуждений, направляющий в материальную практику сознательное (надлогическое) целеполагание.

Место математики в онтологической структуре

При использовании трёхчастной онтологической структуры ранее была рассмотрена гносеологическая структура истории математики и

иерархии математических структур [214]; однако эти рассуждения не выходили за пределы самой математики, поэтому необходимо подлежат рассмотрению содержательные ограничения математики, связанные с выходом за пределы собственно логико-математического онтологического уровня. Как указывалось ещё в середине XX века (В. М. Подосетник), стадии постижения истины таковы: 1) непосредственное созерцание (в сознании), 2) логические рассуждения (информация, во времени), 3) практическая деятельность (во внешнем материальном мире) [117]. Из этой онтологической структуры постижения истины очевидно видны содержательные ограничения математики — она является логическим инструментом (средний, 2-й, онтологический уровень), предназначенным для упорядочения явлений материальной действительности; также очевидно, что целеполагание мысли рассуждений и деятельности находится в сознании (нравственно рассуждающем) — над логикой и математикой. Таким образом, остаётся уяснить: как такие содержательные ограничения математики увязаны с её внутренними формально-логическими ограничениями (ограничительными теоремами).

Как уже говорилось ранее, при рассмотрении содержательных ограничений математики в [207, с. 7–8], математика имеет надматематические основания в высшей (созерцательной) онтологической области,— онтологическая структура действительности имеет вид:

- iii. Сознание (\downarrow между сознанием и логическими рассуждениями во времени — естественный язык),
- ii. Время (\downarrow между логическими рассуждениями во времени (математикой) и материей — информация).
- i. Материя.

В этой структуре уровни не сводимы один к другому, а математика рассматривается как искусственный язык, описывающий не только собственно формально-логические понятия, но и процессы и явления материального мира. Цель математики — внесение сознательного (целеположенного в сознании) порядка в описание процессов материальной действительности и в сами эти процессы,— придание им заданного сознательно порядка. В связи с этим имеются, в отличие от содержательных ограничений математики, два типа ограничений: а) формально-логические (обусловленные самой логикой математических рассуждений) и б) прикладные (обусловленные инструментальным характером математики, как "проводницы" целеполагания в материальные процессы),— ниже описаны и те и другие ограничения.

Формально-логические ограничения математики

Формально-логические ограничения математики были впервые осознаны в связи с попыткой выполнения так называемой "программы

Д. Гильберта"¹⁶¹, которая была сформулирована в нач. XX в. (более подробно о ней см. [153, с. 363–364]). Программа Гильберта по полной формализации математики состояла в намерениях построения непротиворечивой, полной, разрешимой и категоричной логистической системы, класс доказуемых предложений которой совпадал бы с классом интуитивно истинных математических утверждений. Однако в 30-е гг. XX в. появились ограничительные теоремы, показавшие невозможность такой формализации математики (К. Гёдель и др.). Эти ограничительные теоремы, действующие при попытке выполнить программу Гильберта, сформулированы, например в [153].

Теорема 1 (Гёделя, о неполноте): Каждая логистическая система, настолько богатая, чтобы одержать формализацию рекурсивной арифметики, либо ω -противоречива, либо содержит некоторую неразрешимую, хотя и истинную формулу. \square

Здесь неразрешимая формула логистической системы – это такая формула, что в данной системе ее нельзя ни доказать, ни опровергнуть (хотя с помощью дополнительных средств, выходящих за рамки этой системы, можно показать ее истинность); иными словами, любая данная ω -непротиворечивая система указанного типа (синтаксически и семантически) неполна и даже непополнима [153, с. 364].

Аналогична по содержательному смыслу этой теореме, теорема Тарского.

Теорема 2 (Тарского, об истинности): Понятие истинности (множество всех истинных предложений, множество истинности) непротиворечивой формализованной системы, охватывающей рекурсивную арифметику, неопределимы в этой системе [153, с. 367]. \square

Теорема Чёрча-Россера тоже аналогична теореме Гёделя и накладывает запрет на "автоматическое" доказательство теорем.

Теорема 3 (Чёрча-Россера, о неразрешимости): Элементарная арифметика существенно неразрешима [153, с. 372]. \square

Теорема 4 (Следствие из теоремы Гёделя, теорема Гёделя о непротиворечивости): Никакое предложение, которое можно точным образом интерпретировать как выражающее непротиворечивость какой-либо непротиворечивой логистической системы, содержащей арифметику, не может быть доказано в этой системе [153, с. 370]. \square

¹⁶¹ Программа Гильберта — неудавшаяся попытка "обоснования математики из неё самой", — была фактически свёрнута после обнаружения теорем Гёделя. Сам Гильберт, однако, не смирился с результатами Гёделя; в 1934 г. он писал: "возникшее на определённое время мнение, что из результатов Гёделя следует неосуществимость моей <Гильберта> теории доказательств является <по мнению Гильберта> заблуждением" [40, с. 19].

Для дальнейших рассуждений необходимо понятие предикативной формальной системы (теории). В формальной записи предикативная теория T — это такая теория, в которой имеется набор аксиом (схем аксиом) A_i и выводимые утверждения B_j :

$$(A_{i_1}, \dots, A_{i_n}, B_{j_1}, \dots, B_{j_m}) \models B_{j_0}, \quad (1)$$

причём при определённых правилах вывода общее свойство этих правил вывода по условию предикативности системы таково, что выводимое утверждение не содержится в том наборе утверждений, из которых оно выводится, не содержится в цепи вывода от аксиом до себя самого, т. е. в формуле (1),

$$B_{j_0} \notin \{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}, B_{j_1}, \dots, B_{j_m}\}, \quad (2)$$

и утверждения, из которых выводимо B_{j_0} , невыводимы из него (т. е. по условию предикативности — отсутствие круга в выводе), недополучаемы с участием B_{j_0} ,

$$D_0 = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}, B_{j_1}, \dots, B_{j_m}\}, \forall D_k \in D_0, B_{j_0} \not\models D_k. \quad (3)$$

Более подробно см. [207, с. 37–38].

Теоремы 1 и 4 переформулированы в семантике самопринадлежности [207]. Теорема Гёделя о неполноте имеет следующий вид:

Теорема 5 (Гёделя, о неполноте): Предикативная теория неполна. \square

Теорема Гёделя о непротиворечивости имеет следующий вид:

Теорема 6 (Гёделя, о непротиворечивости): В предикативной системе недоказуема её непротиворечивость. \square

Доказательства обеих теорем Гёделя в исходном виде довольно громоздки, так как они опираются на классическую теорию множеств, которая не оперирует понятием самопринадлежности и самопринадлежащими множествами. В теории множеств с самопринадлежностью [207, с. 38–39] доказательства значительно упрощаются.¹⁶²

¹⁶² Доказательство теоремы Гёделя о непротиворечивости (теоремы 6):

Пусть C — высказывание о непротиворечивости теории, т. е. в C утверждается, что все утверждения теории T таковы, что в этой теории не выводимы и их отрицания. И пусть T непротиворечива, т. е. высказывание C выполнимо на всех высказываниях этой теории¹⁶², т. е. семантически C выводимо из множества всех высказываний теории, в том числе и из себя самого (т. к. отрицает собственное отрицание при наличии непротиворечивости):

$$\{A_i, \dots, B_j, \dots, C\} \models C, \quad (4)$$

что противоречит условиям предикативности системы T . Следовательно, теорема о том, что в предикативной системе недоказуема её непротиворечивость, доказана. \square

Аналогично рассуждаем, доказывая теорему Гёделя о неполноте (теорему 5):

Пусть F — высказывание о полноте системы, т. е. F утверждает, что в системе T выводимы все утверждения, в том числе и само F , но тогда F , если оно верно, семантически (самоссылочно) сказывается о себе самом:

$$\{A_i, \dots, B_j, \dots, F\} \models F, \quad (5)$$

см. след. стр. \longrightarrow

В [89] показано, что ограничения теоремы Гёделя о непротиворечивости (теорема 6) преодолены для непредикативных теорий,— для непредикативной теории множеств с самопринадлежностью доказана её непротиворечивость. В [218] показано, что ограничения теоремы Гёделя о неполноте (теоремы 5) непреодолимы и для непредикативных теорий в формально-алгоритмическом (предикативном) смысле; однако теория множеств с самопринадлежностью, ввиду наличия множества всех множеств, уже тем самым полна в непредикативном смысле (см. [207]).

Теорема Тарского об истинности (теорема 2) также действует ввиду содержательных ограничений математики. Теорема содержательно означает следующее: истина существует в сознании, которое, в свою очередь, неформализуемо. Формализация некоторой теории означает, что мы отказываемся от рассмотрения смысла (истинности или ложности) утверждений этой теории, что и показано в данной теореме.

Теорема Чёрча-Россера, о неразрешимости (теорема 3) действует ввиду онтологических ограничений математики. Непредикативные (самоссылочные) теории неразрешимы (в них невозможно построить алгоритм, распознающий, создающий автоматически, теоремы теории). Так как элементарная арифметика вложима в теорию множеств с самопринадлежностью, то эта теория (теория множеств), как более объёмная, также неразрешима, так как расширение теории не добавляет и не изменяет её разрешимости.

Неразрешимость в данном случае содержательно эквивалентна неполноте, то есть для некоторого объекта (высказывания, правила) А невозможно построить алгоритм, определяющий, принадлежит ли он некоторой теории Т, т. е. выводим ли он из аксиом теории Т (получаем ли в теории Т).

Если бы теория была полной, она бы содержала бесконечную последовательность (бесконечную решётку) теорем, выводимых из аксиом, а построить алгоритм для обработки бесконечной последовательности теорем для определения разрешимости этой теории невозможно, т. к. никакой алгоритм не может обрабатывать бесконечный массив данных.

Однако, как сказано выше, для теории множеств с самопринадлежностью имеется непредикативная полнота, множеству всех множеств М соответствует множество всех высказываний о множествах в схемах свёртывания (их выделения из М), задающих не пустые множества, т. е. все высказывания теории о множествах предзаданы (тем самым теория непредикативно полна), но может быть ещё пока неизвестны.

что противоречит условиям допущения чисто предикативности теории Т. Таким образом доказана теорема Гёделя о неполноте. □ [207].

Рассмотренные формально-логические ограничения следуют из ограниченности самого логического онтологического уровня, в итоге они дополняют и конкретизируют содержательные ограничения математики, указанные в п. 1. Содержательные и формально-логические ограничения математики дополняют друг друга¹⁶³.

Ограничения приложений математики на примере методов оптимизации

Наиболее яркий пример ограничений математики в её приложениях — это приложение математики в экономике, — в этой области приложения имеются и содержательные ограничения (экономика содержит и самого сознательного человека, и подлежит сознательному регулированию и управлению), и ограничения собственно математических методов. Ниже описаны ограничения методов оптимизации.

В [7] была описана структура типов осознания причинности, имеющая 6 уровней. Усложнению осознания и материального воплощения причинных связей соответствуют, например, технологические уклады (см. [10]) — это в материальном выражении, а на уровне логическом (среднем онтологическом уровне) типам причинности соответствуют, например, способы решения оптимизационных задач, приведённые в табл. 11.

При этом очевидно, что для уровней 1–5 оптимум ищется исходя из математической задачи, — по формальному (а не содержательному) критерию: для уровня 6 — оптимум находится вне математики, — над ней — в сознательной сфере (iii), а математика — это лишь инструмент его достижения. О подмене в экономико-математическом моделировании содержательных представлений формальными сказано отдельно в [215, главы 1, 9], [216, глава 15].

Очевидно и в этом случае (аналогично формально-логическим ограничениям), ограничения приложений математики дополняют и конкретизируют её содержательные ограничения, связанные с местом математики в онтологической структуре действительности.

§46. Ограничения математики

Содержательные ограничения математики очевидно видны из этой онтологической структуры постижения истины: математика является логическим инструментом, предназначенным для упорядочения явлений материальной действительности, — целеполагание мысли, рассуж-

¹⁶³ Рядом с этими ограничениями и интерпретация теоремы Нагорного (о неприводимости) как невозможности алгоритмизации процесса отражения действительности в сознании человека (невозможности создания искусственного сознания), см. [207, с. 95–96].

дений и деятельности находится в сознании (нравственно рассуждающим) — над логикой и математикой. Такие содержательные ограничения математики конкретизируются: а) в виде её внутренних формально-логических ограничений (ограничительных теорем) и б) в виде инструментального характера математики в её приложениях, где истина оптимума определяется прежде всего правильным целеполаганием постановки задачи (формальные решения неверно поставленных задач — бесполезны и разрушительны¹⁶⁴).

В плане приложения математики в вычислительных устройствах (компьютерах) основные ограничения таковы.¹⁶⁵

Отражение действительности в сознании человека (включая самосознание) — неалгоритмизуемо (см. теорему Нагорного [182], [207, с. 96]), т. е. не реализуемо компьютером, — говоря попросту: думающие и сознающие себя роботы — невозможны (см. также [176]).

Получение новых теорем математики также неалгоритмизуемо (в онтологически полной теории), т. е. требует содержательного (и созерцательного), а не формального мышления.

¹⁶⁴ См. [215, с. 13].

¹⁶⁵ В плане общенаучном, методологические ограничения математики и естественных (экспериментальных) наук следующие. Если сделано какое-либо открытие, то его применимость распространяема от момента его открытия — на будущее, распространение же на прошлое не является корректным ввиду невозможности экспериментальной проверки. Поэтому, например, если открыли, что Земля вращается вокруг Солнца (Н. Коперник, XVI в.), и это экспериментально впоследствии подтвердилось, то каково это вращение было до момента его открытия, если говорить совершенно честно, было неизвестным (распространение логических конструкций, 2-го онтологического уровня, на прошлое — это необоснованная гипотеза, как уже говорилось, ввиду невозможности его экспериментальной, опытной, проверки).

Глава 18. Обобщающие таблицы

В этой главе приведены обобщающие таблицы периодов развития понятий математики, других наук, культуры [214]. Таблицы для развития литературы и права в России отделены ввиду особой хронологии их развития, см. табл. 19. Историческая структура сопоставлена с наличной структурой системы образования и научно-производственного цикла.

§47. Одинаковость исторического развития

Как видно из обобщения периодов развития, содержание периодов внутри одного уровня однородно и соответствует этому уровню отражения (самоосознания).

В связи с онтологическими особенностями наук (онтологической разницей в их предметной области) наблюдается схожесть внутри групп наук. Для естественных наук (описывающих внешний материально-вещественный мир) общее в движении по уровням видно преимущественно в изменении представлений о причинности явлений.

Для математики, логики (языкознания, как изучающего грамматико-логическую форму языка) (наук, соответствующих второму онтологическому уровню) общее в движении по уровням видится преимущественно в достижении определённых уровней абстракции понятий.

Для гуманитарных наук и литературы (соответствующих онтологическому уровню сознания) общее в движении по уровням видится преимущественно в изменении содержания самоосознания человека.

Укрупнённые эпохи развития, соответствующие онтологически упорядоченным ступеням самоосознания, таковы:

i) Посредством письменности упорядочено обращение с вещами (инвентаризации и т. п.).

ii) Посредством переносных часов (изобретены в XVI в.) организовываемая синхронная деятельность во времени (в сфере материального производства, перемещения в пространстве¹⁶⁶).

iii) Посредством средств связи (Интернет и т. п.) упорядочиваемы социальные связи.

¹⁶⁶ Наличие хронометра позволяло определять координаты плывущего корабля по звёздам.

Таблица 19. Содержание периодов развития науки, математики, культуры

№ уровня	Представления о причинности	Развитие физики	Развитие механики	Развитие химии	Представления об источнике болезней
1	Допричинность (синкретизм)	"Конкретные" названия предметов, первоначальные навыки механики	"Конкретные" названия предметов, "простые машины" (рычаг, блок, полиспаст, винт, клин)	"Конкретные" названия веществ, первоначальные навыки химической технологии	Синкретическое (допричинное) представление об источниках "повальных" болезней и моров
2	Первая, ближайшая причина	Ближайшая причина и механические законы (рычаг, закон Архимеда и т. п.)	Ближайшая причина и объяснение действия "простых машин" (рычаг и т. п.)	Причинное объяснение химических явлений (через ближайшую причину)	Объяснение болезней ближайшей причиной. Догадка о невидимости частиц заразы, профилактика изоляцией больных
3	Бесконечный ряд (круг) причин	Появление понятия времени в законах, последовательность причин; наблюдения за движением небесных тел, распределённые во времени	Комбинации простых машин, как последовательность причинно-следственных связей. Появление понятия времени в законах	Последовательности химических превращений ("рецептуры"), циклы реакций	Выявление цепи причинно-следств. связей, передающих заражение (через предметы и проч.). Профилактика пресечением цепи связей, карантины
4	Произвольная (от человека) во времени причинность (— эксперимент)	Количественно-функциональные закономерности, появление определений понятий (силы, веса, количества движения и т. п.), открытие законов	Количественно-функциональные закономерности, появление определений понятий (силы, веса, и т. п.), открытие законов, механизмы с автономной причинностью (маятниковые часы)	Постоянство элементов в их химических превращениях (реакциях), количественно-функциональные закономерности	Выявление возбудителей болезней (сначала теоретическое, затем и практическое, посредством микроскопа). Поиск лекарств, убивающих возбудителей болезней
5	Неопределённо большие совокупн. причин ("массовая", социальная причинность)	Физические теории, обобщающие множества физических законов,— теория электромагнетизма, молекулярно-кинетич. теория и т. п.	Общие принципы, отвлечённые от времени (принцип Гамильтона...), аксиоматич. способ изложения теории, описание массовой причинности в статистической механике	Химические теории, обобщающие множества законов: теория строения вещества, периодическая система... развитие химической технологии	Массовая профилактическая вакцинация. Описание иммунной системы
6	Самопричинность	Описание основ физической науки, широкая непредикативная практика применения физики для удовлетворения потребностей человека	Описание основ механики, непредикативная практика применения механики и машин для удовлетворения потребностей человека	Описание основ химической науки, непредикативная практика применения химической технологии для удовлетворения потребностей человека	Представления о связи иммунитета и психическо-нравственного состояния человека

Таблица 19. (Продолжение)

№ ур.	Развитие математики	Понятие о бесконечности	Развитие языкознания	Развитие методологии науки	Развитие экономики*
1	"Конкретное число", пересчёт	Конкретное число	Именованное, появление письменности	Наблюдение, именованное	Общинный строй
2	Число как "куча" единиц, арифметическая операция, потенциальная бесконечность	Число как "куча" единиц, потенциальная бесконечность	Этимология, внутренняя структура слова; механическое сложение предложения (речи) из составных частей	Объяснение наблюдаемого через ближайшую причину	Рабовладение
3	Уравнение, неизвестная (переменная) величина, актуальная бесконечность	Едино-многие объекты, бесконечность как предел потенциальной бесконечности	Появление представления о частях речи, описание сложной структуры предложения (синтаксис конкретн. языка)	Объяснение наблюдаемого через начальные принципы и цепь выводов (без эксперимента)	Феодализм
4	Функция, операции над функциями (интегрирование, дифференцирование), дифференцирование, отношение уровней бесконечности	Абстракция актуальной бесконечности	Описание синтаксиса, грамматики, свойственных многим языкам	Постановка эксперимента, функциональное (причинно-следственное) объяснение явлений	Капитализм
5	Алгоритм, формальная система, функциональное пространство, функционал, оператор, вероятностные меры	Абстракция ряда "алефов", недостижимые кардиналы...	Сравнительно-историческое языкознание, структурализм. Семантический анализ (XX в.)	Теории, из которых выводятся законы (предсказательность теорий для наблюдаемых явлений), аксиоматизация. Ограничения аксиоматич. (предикативного) метода	Социальное общество
6	Непредикативные конструкции, множество всех множеств (кон. XX в.)	Множество всех множеств как наибольшая бесконечность	Осознание непредикативности языковых структур	Необходимость учёта неотделимого присутствия человека в сложных теориях	Общество, реализующее подлинные свободы ¹⁶⁷ человека

* У ступеней развития экономики чуть иные границы периодов, см. табл. 14.

¹⁶⁷ При этом "свобода" понимается в смысле этимологии "сво-Бо(г)-да" (поговорка: "Не живи как хочется, а живи как Б-г велит"), а не в смысле "liberty" ("исполнение желаний", однокоренное libido — "похоть") и не в смысле "freedom" ("делание желаемого"), см. [199], [161].

Таблица 19. (Продолжение)

№ ур.	Развитие логики	Развитие представлений о пределе	Развитие представлений о числе	Развитие представлений о мере	Историч. период	Логич. структ. в самой логике, §8
1	Письменность, именование предметов	Синкретизм, отсутствие структурных представлений о пределе, наглядность	"Конкретное число", пересчёт	Наглядность, отсутствие определений понятий	Древность	Именование объектов
2	Логика объёмов понятий	Конечный ряд рассуждений, отсутствие единой схемы при исчерпывании	Число как "куча" единиц, арифметическая операция, рациональные числа (потенциальная бесконечность, несоизмеримость)	Наглядность измерений. Площади простых фигур. Несоизмеримость диагонали квадрата	Античность, с VII в. до н. э.	Логика объёмов понятий
3	Логика суждений, подстановки терминов, логические переменные	Бесконечный ряд при исчерпывании, суммирование бесконечных числовых рядов	Арифметическое понятие о числе: иррациональность (радикал), отрицательные числа. Геометрическое понятие: единичный отрезок и отношение к нему (актуальная бесконечность)	Приближённые вычисления иррац. чисел. Определение меры площади простых фигур (треугольник и т. п.)	Ср. века, с I–II в. н. э.	Многозначная логика
4	Формально-логические определения понятий	Появление понятия предела (Ферма), бесконечные функциональные ряды и их суммы	Соединение геометрического и арифметического понятия числа; мнимозначные числа ($\sqrt{-1}$)	Единичный отрезок в системе координат (соед. геометрич. и арифметических чисел)	Нов. вр., с XVI в. н. э.	Модальная логика
5	Алгоритм, формальная система	Предикативная формальная (аксиоматическая) система как предел выводов из аксиом	Число (действительное) как бесконечная последовательность знаков; трансцендентные числа; поля чисел	Мера множества покрытием его мерой отрезков (интервалов)	Новейш. вр. с нач. XIX в.	Лямбда-исчисление и алгоритмы
6	Непредикативные конструкции, множество всех множеств	Непредикативные, недостижимые ("сверхпредельные") конструкции, онтологическая полнота теорий	Непредикативные конструкции, непредикативное (самоссылочное) определение понятия числа (необходимость теории меры)	Непредикативная теория меры. Самоизмеримость эталона меры	С кон. XX в.	Непредикативные конструкции

Таблица 19. (Продолжение)

№ уровня	Развитие представлений о детстве и душе	Развитие морально-этических представлений	Развитие системы права	Развитие мировой литературы	Развитие музыки
1	Допсихологические представления	Ориентация на обычай поведения. Регулятив — наказание (изгнание, смерть); дилемма: выживание—смерть	Необходимая оборона, поединок при судебной тяжбе. Отсутствие кодификации	Изображение только внешнего, чувственно-воспринимаемого (Эпос)	Доинструментальный период
2	Двухуровневое представление о душе (возрасте)	Появление абстрактного понятия о благе, дилемма: удовольствие—страдание	Уголовное право. Кодификация наказаний за тяжкие преступления	Изображение эмоциональной стороны личности (Античность)	Одноголосые мелодии (хоровое пение), бедный ритм, в теории музыки описывается соотношение высот звуков ("лад" только как соотношение высоты звуков)
3	Трёхуровневое представление о душе	Ориентация на нравственный авторитет (послушание—непослушание)	Гражданское право. Наследственное право. Нотариат	Последовательно во времени (линейно) развёртываемый сюжет, которому подчинены персонажи	Появление учения о ритме, кроме соотношен. высот звуков рассматр. одноголосый ритм мелодии. "Гласы" ("лады") как определённые мелодико-ритмические последовательности. Одноголосие или механический сдвиг второго голоса, повторяющего первый
4	Четыре психологических возраста	Правилосообразность поведения, договор о взаимных обязательствах (исполнение—неисполнение)	Административное право, упорядочение действий по процессу управления или действий внутри организации	Изображение активных волевых действий персонажей, порождающих ветви сюжета	Многоголосие, голоса мелодически и метро-ритмически разнятся между собой. Многоголосые произведения (фуга, токката и т. п.), построенные около одной темы
5	Пять психологических возрастов (межвозрастные кризисы)	Максимизация общественной пользы (дилемма: кооперация с общ. целями / сепаратизм, отщепенчество)	Конституционное право, социальное право. (Народнохозяйственный план как закон, СССР, XX в.)	Социальная обусловленность литературного героя (его мышления и т. п.)	Многотемность (политематизм) внутри одного (симфонического, оперы, балета) музыкального произведения. Всеобщее начальное музыкальное образование (XX в.)
6	Современная 6-уровневая структура	Свобода, семейные ценности, воспроизводство поколений	Реализация свобод над социальными обязательствами	Изображение сугубо внутренней, свободной от социальных обстоятельств (находящейся над ней и их меняющих) жизни литературного героя	(Период не описан)

Таблица 19. (Продолжение) (Сопоставление периодов развития русской культуры со сходными периодами мировой истории)

№ уровня	Развитие русской литературы	Развитие системы права в России*	Историч. период	№ уровня	Историч. период мировой истории	Стадии самоосознания
1	Изображение только внешнего, чувственно-воспринимаемого. Монументальный историзм. Эпос	Необходимая оборона, поединок при судебной тяжбе	X–XIII вв.	1	Древность	Я _{об}
2	Изображение эмоциональной стороны личности. Эмоционально-экспрессивный стиль	Уголовное право. Кодификация наказаний за тяжкие преступления	XIV–XV вв.	2	C V в. до н. э.	Я _{суб}
3	Второй монументализм (обобщающие своды произведений)	Процессуальное право. Княжеский суд. Наследственное право (как составляющая гражданского права)	XVI в.	3	C первых веков н. э.	(Я–Они) _{об}
4	Изображение активных волевых действий персонажей, изображение характера	Формирование судебной системы. Административное право. (Табель о рангах. Духовный регламент)	XVII–XVIII вв.	4	C кон. XVI в.	(Я–Они) _{суб}
5	Социальная обусловленность литературного героя (его мышления и т. п.)	Элементы конституционного права и социального государства. Народнохозяйственный план как закон, СССР, XX в.	C XIX в.	5	C нач. XIX в.	(Я–(Они+Я)) _{об}
6	Изображение сугубо внутренней, свободной от социальных обстоятельств (находящейся над ней и их меняющих) жизни литературного героя	Реализация свобод над социальными обязательствами	C кон. XX в.	6	C кон. XX в.	(Я–(Они+Я)) _{суб}

* У ступеней развития системы права в мировой истории и в России чуть иные временные границы.

Таблица 19. (Окончание) (Сопоставление периодов развития методов оптимизации, формальных систем и технологических укладов в 5-м историческом периоде)

№ ур.	Тип причинности	Содержание периода развития методов оптимизации	Истор. пер.	Усложнение формальных систем	Истор. пер.	Технологический уклад	Исторический период
5.1	Синкретизм	Метод отыскания экстремума по нулю производной (Ферма), — непосредственное определение без причинных шагов	XVII в.	Содержательный вывод без формализации правил вывода (и у древних, Евклид), аксиоматизация	до нач. XIX в.	5.1. Механическая энергия (природная или от сжигания топлив в тепловых машинах)	5.1. (1770–1830 гг.) Текстильные машины
5.2	Ближайшая причина	Вариационное исчисление, переход от вариационного уравнения по функции к дифуравнению Эйлера (один причинный шаг в решении задачи)	кон. XVII в.	Система аксиом, свойства аксиоматик, замена аксиом на отрицания. (Основания геометрии, Гаусс)	нач. XIX в.	5.2. Локальное производство энергии (двигатели, транспорт)	5.2. (1830–1880 гг.) Паровой двигатель, станки
5.3	Ряд последовательных причин	Методы последовательных приближений к решению задачи (метод градиентного спуска, метод сечений и т. п.), — ряд причинно-следственных шагов	сер. XIX в.	Цепи выводов из различных аксиоматических систем (Лобачевский)	сер. XIX в.	5.3. Промышленное производство электрической энергии и передача её на расстояние для использования	5.3. (1880–1930 гг.) Электродвигатель, сталь
5.4	Естественная (внешняя) причинность и произвольная (внутренняя)	Теория автоматического управления, поддержание заданного параметра (уставки) при внешних воздействиях: уставка — произвольная причинность, внешние воздействия — внешняя причинность*	нач. XX в.	Формализация правил вывода (Пеано)	кон. XIX в.	5.4. Повседневное использование электроэнергии в быту (освещение, плиты электрические, холодильники и т. п.)	4.4. (1930–1970 гг.) Двигатели внутреннего сгорания, нефтехимия, <бытовая техника>
5.5	Массовая причинность	Оптимальность в массовых задачах (балансовое равновесие Леонтьева; равновесие по Парето и т. п.)	1-я пол. XX в.	Намерения полной формализации математики (Гильберт). Отказ от смысла в формализме. "Автоматическое" доказательство теорем". (Гёделев тупик отказа от смысла)	нач. XX в.	5.5. Массовое использование электрических систем связи (радио, телефон, телевидение, Интернет...)	5.5. (с 1970 гг.) Микропроцессорные компоненты
6	Самопричинность	Оптимум находится вне математики, — над ней в сознательной сфере (iii), а математика — это лишь инструмент его достижения	XXI в.	Непредикативные формальные системы, онтологически полные	XXI в.	6. Аксиологическая (ценностная) полнота экономики	XXI в.

* 5.4. Минимизируется рассогласование между уставкой параметра и его автоматически поддерживаемым значением (тж. сценарные прогнозы во времени)

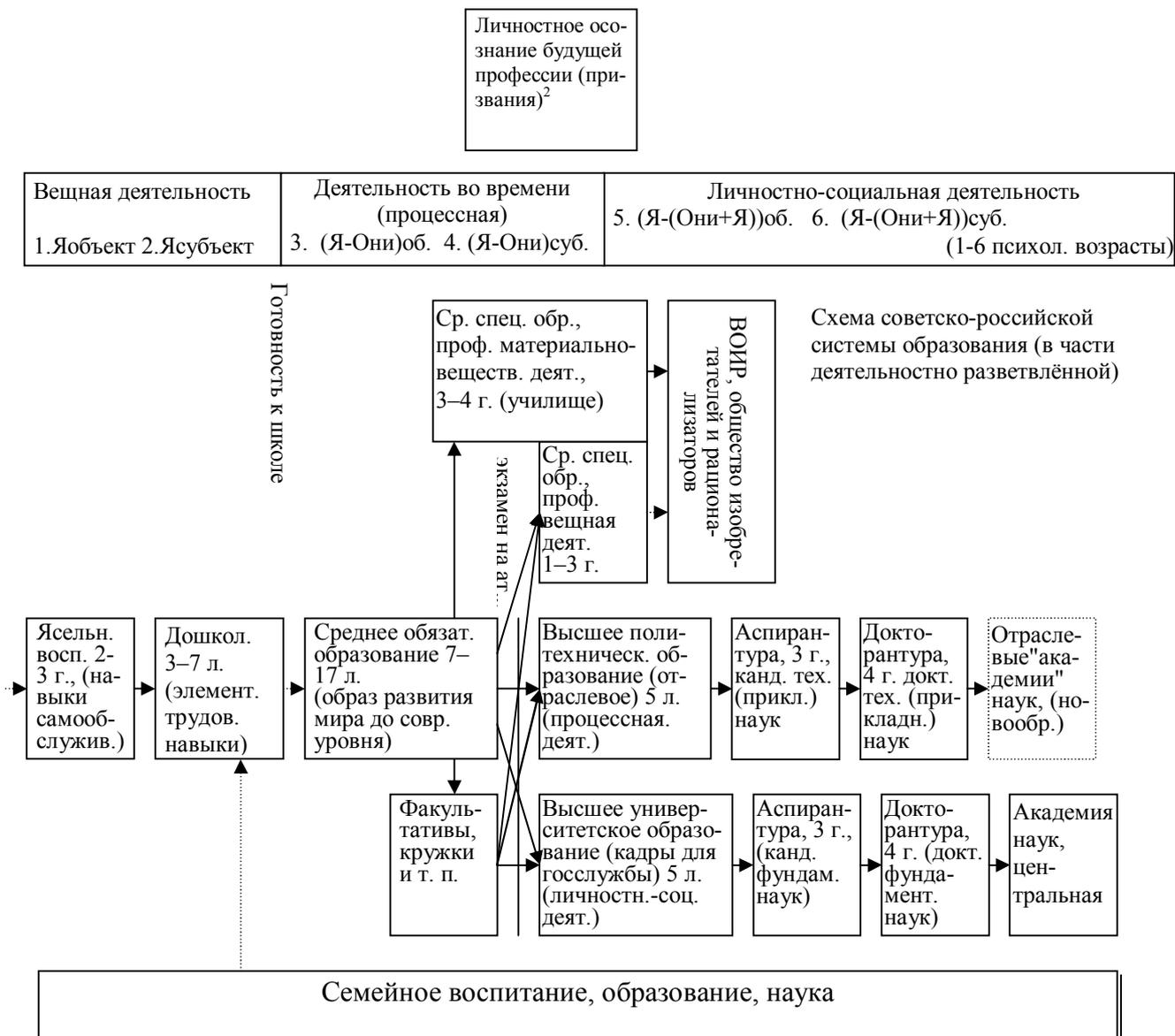


Рис. 10. Схема системы образования

§48. Сопоставление с наличными структурами

Структуры системы образования и научно-производственного цикла связаны с той же гносеологической структурой отражения действительности в сознании человека и для сопоставления с историческими структурами таковы.

Структура системы образования

При онтологическом выделении а) вещественного труда, б) труда организации производственного процесса во времени и в) труда организации структурных взаимодействий между разными экономическими субъектами итоговая система уровней в системе образования такова:

а) уровни вещной деятельности:

- 1) обучение на рабочем месте (учебно-производственные комбинаты);
- 2) училища;

б) уровни процессной деятельности:

- 3) техникумы (готовящие старших мастеров);
- 4) политехнические институты, политехнические вузы (готовящие ИТР);
 - в) уровни структурно-организационной деятельности:
- 5) экономические (и отраслевые) институты;
- 6) университеты (академии).

Поэтому-то в системе образования наличествует горизонталь выбора (в момент окончания 4-го психологического возраста, окончания средней школы, достижения правоспособности выбора профессии, при осознании меры способностей), соответствующая ориентации на ту или иную профессию и уровень в экономической системе, выбираемые по мере способностей [170], [166]. Схема структуры системы образования приведена на рис. 10, подробнее см. в [188], [193].¹⁶⁸

Структура научно-производственного цикла

При движении от высших уровней к низшим нововведения проходят те же 6 уровней при достижении конечной цели внедрения и использования в промышленном производстве. Движение по этим уровням соответствует в целом общим стадиям постижения истины: а) непосредственному созерцанию, б) абстрактному мышлению, в) практике [117]. Стадии научно-производственного цикла, начинающегося с высших стадий и продолжающегося к низшим, таковы:

6. Фундаментальные исследования (не допускающие планирования, ибо запланировать открытие невозможно).

5. Прикладные (отраслевые) исследования на основании фундаментальных достижений (отчасти планируемые).

(Уровни 5, 6 и низшие образуют i-й цикл — цикл научных исследований, подлежащих госбюджетному финансированию).

4. Опытные проектно-конструкторские работы (ОПКР, НИОКР) — проектные работы по созданию промышленных образцов.

3. Внедрение, исполнение проекта.

(Уровни 4, 3 и низшие образуют ii-й цикл — цикл проектно-внедренческих работ).

2. Пусконаладочные работы.

1. Эксплуатационные работы по обеспечению рабочего режима производства (собственно производственная деятельность).

(Уровни 2, 1 образуют iii-й цикл — цикл текущих ремонтов и производственной эксплуатации оборудования).

Основным образующим весь этот цикл является этап фундаментальных (не сводимых к исполнению плана) исследований, составляющий i-й этап в постижении истины — непосредственное созерцание; следующие этапы постижения истины (ii. абстрактное мышление и iii. практика) соответствуют следующим подциклам основного научно-производственного цикла. Стадии научно-производственного цикла соответствуют тем организационным уровням производственного предприятия, при взаимодействии с которыми они выполняются (кадровые соответствия по уровню образования — очевидны), подробнее см. в [188], см. также связь этой структуры с вертикальной структурой экономических субъектов в §37.

Связь с идеологическими структурами описана в [209], [216].

¹⁶⁸ С учётом недавних (нач. XXI в.) реформ высшего образования в РФ бакалавриат соответствует 5-му уровню (5-му психологическому возрасту), магистратура — достижению 6-го психологического возраста. Магистратура готовит исследователей, и следующие уровни послевузовского образования (аспирантура, докторантура) не имеют существенного гносеологического обоснования (поэтому излишни).

Заключение

Рассмотренная последовательность периодов образования понятий следующих уровней абстракции прослеживается как в истории гуманитарных наук, так и математики и естественных наук,— это связано с объединяющей их и структурой уровней абстракции (уровней отражения действительности в сознании человека). Таким образом, развитие наук по содержанию и последовательности периодов является единым по их гносеологическим основаниям (последовательности уровней отражения действительности в сознании). Прикладные вопросы, связанные с организацией преподавания, иерархией изучаемых в системе образования понятий, подлежат отдельному изложению¹⁶⁹.

Гносеологическая и онтологическая структуры понятий математики связаны с её ограничениями, которые вкратце таковы.

Отражение действительности в сознании человека (включая самосознание) — неалгоритмизуемо (см. теорему Нагорного [182], [207, с. 96]), т. е. не реализуемо компьютером,— говоря попросту: думающие и сознающие роботы — невозможны (см. также [176]).

Получение новых теорем математики — также неалгоритмизуемо (в онтологически полной теории), т. е. требует содержательного (и созерцательного), а не формального мышления.

Эта книга является первой такой работой,¹⁷⁰ прослеживающей единство развития (периодизации) и внутренней структуры научного знания, связанное со структурой самоосознания человека и отражения действительности в сознании человека. С другой стороны, эта книга завершает и обобщает множество работ, которые были когда-то передовыми,— т. е. является не только первой, но и, в некотором смысле, завершающей для науки ("первой завершающей").

¹⁶⁹ В плане организации научной работы со школьниками очевидно, что младшим школьникам доступен 3-й уровень (классификации и сериации), старшим — 4-й уровень гипотетико-дедуктивных рассуждений, соответствующий открытию и осознанию законов. Самым старшим школьникам (ок. 17 лет) доступно самое начало 5-го уровня.

¹⁷⁰ Так в своё время говорилось и Аристотелем (с. 24, 108), и Галилеем (с. 70, 110), и Фракасторо [152] ([214, с. 74), и другими учёными.

Послесловие

История написания этой книги достаточно давняя. Около 1976–77 г. (когда автору было около 6–7 лет) на даче, осенью, ближе к вечеру, после трудового дня на огороде играли со старшим братом (Чечулиным О. Л., уже начавшим изучать физику в школе), стреляя по мишеням из самодельного арбалета (сделанного из доски с пазом на торце) и лука. Брат легко попадал по мишеням, и, видя многократные промахи младшего (стрелы летели ниже мишени), спросил: "Ты как целишься?" — "Прямо" — "Ты что думаешь, что стрела прямо летит, а потом, когда сила у неё кончится, вниз падает?" — "Да". И после этого показывал, подбрасывая комки земли и камешки, что брошенное тело падает по параболе и что целиться из лука следует с превышением над целью. (Впоследствии, читая в 1990–1991 гг. работы Аристотеля, обнаружилось, что так же (по-детски) думал и Аристотель, что стрела летит, пока в ней есть сила, а потом падает вертикально вниз¹⁷¹).

Журнал "Наука и жизнь" печатал в то время (1980-е гг.) статьи о единстве будущей науки, которую предвкусывала наука того времени. В советской школе же (в нач. 1980-х гг., класс 5–6-й) рассказывалось, что великие учёные изучили данные всех наук и создали учение о правильном устройстве общества, в котором тогда жилось, — детскому уму и сердцу тайно возжелалось тогда того же ("вот бы так же все науки изучить"), — потом это желание позабылось и обнаружилось гораздо позже.

В ноябре 1991 г. была описана иерархия уровней самоосознания, к осени 1993 г. — история математики¹⁷², позже — следующих наук (физики, химии, языкознания, литературы, психологии, этики), классификация наук по предметной области. В 1998 г. материалы к книге и рукописи были утеряны.

К 2003 г. была описана гносеологическая структура отражения действительности в сознании человека, вертикальная структура экономических субъектов. В 2006 г. описана структура системы права. В 2009 — последовательность развития моральных представлений. Подпериоды развития экономики — в 2012 г. (на основании выделенных в 1995 г. подпериодов самоосознания). Последовательность развития представлений об источнике болезней — в 2013 г.

¹⁷¹ "По Аристотелю, траектория ядра или брошенного тела состоит из трёх частей: первая часть — прямолинейная наклонная, третья — прямолинейная вертикальная, а вторая — круговая, соединяющая первую с третьей. Эта точка зрения продержалась вплоть до 1546 г., когда появился труд Тарталья "Проблемы и различные изобретения" [93, с. 10], см. тж. Аристотель "Физика" [9, т. 3]. Тарталья указал на параболическую траекторию летящего тела.

¹⁷² Изучение истории математики привело к решению проблем теории множеств [178, с. 89].

К 2013 г. утерянные фрагменты материалов книги были восстановлены и оформлены в книгу [214], математические главы которой в данном издании дополнены к 2015 г.

Подробная история отдельных математических понятий (числа, предела, меры) и указания на ограничения математики дописаны в 2013–2015 гг.

Отзывы о содержании книги можно направлять автору на электронный адрес: chechulinvl@mail.ru

Список литературы

1. *Азимов А.* Краткая история химии / пер. с англ. М.: Мир, 1983.— 187 с.
2. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.— 430 с.
3. *Алесковский В. Б.* Путь разработки технологии, не вредящей природе // Журнал прикладной химии. 2002. Т. 75. №. 5. С. 706-713.
4. Аналитическая механика (XIX в.). Сретенский Л. Н. // История механики с конца XIX до середины XX века / ред. Григорьян А. Т. РАН. М. Наука, 1972. С. 7–45.
5. Антология мировой философии: Античность / Минск: Харвест. М.: Аст, 2001.— 960 с.
6. *Апокин И. А., Майстров Л. Е.* История вычислительной техники (От простейших счётных приспособлений до сложных релейных систем) // М.: Наука, 1990.— 264 с.
7. *Арбузов А. Е.* Краткий очерк развития учения о катализе / Избранные труды по истории химии. М.: Наука, 1975. С. 7–88.
8. *Аренс.* Успехи химии в XIX веке / пер. с нем. Цинбер С. Л. СПб, 1902.— 32 с.
9. *Аристотель.* Собрание сочинений. В 4 т. М.: Мысль, 1978–1984.
10. *Артёмов С. Н.* Погружение модального λ -исчисления в логику доказательств // Математическая логика и алгебра: труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2003. Т. 242. С. 44–58.
11. *Архимед.* Исчисление песчинок (Псаммит). М.–Л., 1932.
12. *Архимед.* Сочинения / Пер., вступ. ст. и коммент. И. Н. Веселовского. Пер. арабских текстов Б. А. Розенфельда. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры (Физматгиз), 1962.— 640 с.
13. *Ахутин А. В.* История принципов физического эксперимента (от античности до XVII в.). М.: Наука, 1976. – 292 с.
14. *Байбеков М. К., Попов В. Д., Чепрасов И. М.* Магниетермическое производство губчатого титана. М.: Metallургия, 1984.— 96 с.
15. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Лаборатория Базовых знаний, 2000.— 624 с.
16. *Бернулли И.* Рассуждение о законах передачи движения // И. Бернулли. Избранные сочинения по механике. М.–Л.: ГРТТЛ, 1937. С. 41–216.
17. Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты / ред. Барабашев А. Г. М.: Янус-К, 1997.— 400 с.
18. *Блох М. А.* Хронология важнейших событий в области химии. М.: Госхимиздат, 1940. — 754 с.
19. *Боголюбов А. Н.* Становление динамики машин // Исследования по истории механики. АН СССР. М.: Наука, 1983. С. 114–132.
20. Большая советская энциклопедия. В 30 т. М.: Сов. энцикл. 1970-1978.

21. *Бозций*. Каким образом субстанции могут быть благами... // "Утешение философией" и другие трактаты. М.: Наука, 1990. С. 161–166.
22. *Брудно А. Л.* Теория функций действительного переменного. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1971.— 120 с.
23. *Булейников Ф. Д., Минченков Е. Я.* Очерк развития классической механики. М.: Учпедгиз, 1961.— 224 с.
24. *Бурбаки Н.* Теория множеств / ред. пер. с фр. Успенский В. А. М.: Мир, 1965.— 458 с.
25. *Вариньон*. Отрывок из книги Вариньоны "Новая механика, или статика" // Бернулли И. Избранные сочинения по механике. М.–Л.: ГРТТЛ, 1937. С. 261–264.
26. *Вейсман А. Д.* Греческо-русский словарь / репринтное изд. 1899. М., 1991.— 1372 стлб.
27. *Величковский Б. М.* Когнитивная наука и современная психология // Психологический журнал. 2005. Т. 26. №5. С. 79–85.
28. *Веселовский И. Н., Белый Ю. А.* Николай Коперник. М.: Наука, 1974.— 456 с.
29. *Веселовский И. Н.* Очерки по истории теоретической механики. М.: Высшая школа, 1974.— 287 с.
30. Возникновение и развитие химии с древнейших времён до XVII века (Всеобщая история химии). АН СССР. М.: Наука, 1980.— 399 с.
31. *Выготский Л. С.* Вопросы детской психологии // Выготский Л. С. Психология развития ребёнка. М.: Изд-во «Смысл»; Изд-во «Эксмо», 2003. С. 51–99.
32. *Выготский Л. С.* История развития высших психических функций // Выготский Л. С. Психология развития человека. М.: Изд-во «Смысл»; Изд-во «Эксмо», 2003. С. 208–547.
33. *Гайденко П. П.* Эволюция понятия науки (Становление и развитие первых научных программ). АН СССР. М.: Наука, 1980.— 568 с.
34. *Галилей Г.* Диалог о двух главнейших системах мира // Галилей Г. Избр. труды. В 2 т. / пер. с лат. А. И. Долгов. М.: Наука, 1964. Т. 1. С. 97–586.
35. *Галилей Г.* Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки // Галилей Г. Избр. труды. В 2 т. / пер. с лат. А. И. Долгов. М.: Наука, 1964. Т. 2. С. 97–586.
36. *Гамильтон У. Р.* Об общем методе в динамике... // Гамильтон У. Р. Избранные труды. М.: Наука, 1994.— С. 215–286.
37. *Гегель Г. Ф.* Философия права / пер. с нем. М.: Мысль, 1990.— 524 с.
38. *Гегель Г. Ф.* Философия истории // Гегель Г. В. Ф. Сочинения. Т. 8. Философия истории. Пер. А. М. Водена. Комм. академия при ЦИК СССР. Институт философии. М.–Л.: Соцэкгиз, 1935.— 454 с.
39. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. АН СССР.

М., 1959.— 388 с.

40. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. М.: Наука. Том I. Логические исчисления и формализация арифметики. 1979.— 560 с.

41. *Глазьев С. Ю.* Новый технологический уклад в современной мировой экономике // *Международная экономика*. 2010. №5. С. 6–28.

42. *Горелик Г. Е.* Эренфест и проблема размерности физического пространства // *Исследования по истории механики*. АН СССР. М.: Наука, 1983. С. 245–260.

43. *Григорьян А. Т., Зубов В. П.* Очерки развития основных понятий механики. АН СССР. М., 1962.— 276 с.

44. *Григорьян А. Т.* Механика от античности до наших дней. М.: Наука, 1971.

45. *Григорьян А. Т.* Очерки истории механики в России. АН СССР. М., 1961.— 292 с.

46. *Григорьян А. Т., Рожанская М. М.* Механика и астрономия на средневековом востоке. АН СССР. М.: Наука, 1980.— 200 с.

47. *Гуковский М. А.* Механика Леонардо да Винчи. АН СССР. М., 1947.— 815 с.

48. *Гюйгенс Х.* Маятниковые часы // *Гюйгенс Х. Три мемуара по механике* / пер. К. К. Баумгарта. АН СССР. М., 1951. С. 7–210.

49. *Декарт Р.* Геометрия (с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта) / пер. А. П. Юшкевича. М.–Л. 1938.— 296 с.

50. *Джуа Микеле.* История химии / пер. с итал. Быкова Г. В., ред. Погдин С. А. М.: Мир, 1975.— 478 с.

51. *Дианова Г.* Язык алхимии. М.: Малп, 1995.— 156 с.

52. *Диноршев М. Д.* Рационалистическая тенденция гносеологии Ибн-Сины // *Рационалистическая традиция и современность: Ближний и Средний Восток*. АН СССР. М.: Наука, 1990. С. 114–132.

53. *Диофант Александрийский.* Арифметика и книга о многоугольных числах / пер. с древнегреч. И. Н. Веселовский, под. ред. И. Г. Башмаковой. М.: Наука, 1974.— 328 с.

54. *Добротин Р. Б.* Состав — структура — процесс (историко-методологический анализ). АН СССР. Л.: Наука, 1984.— 78 с.

55. *Дорфман Я. Г.* Всемирная история физики (с др. времён до кон. XVIII века). М.: Наука, 1974.— 352 с.

56. *Евклид.* Начала. В 3 т. / перевод и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовский, М.–Л., 1948–1950.

57. *Зубов В. П.* У истоков механики // *Григорьян А.Т., Зубов В.П.* Очерки развития основных понятий механики. М., 1962. С. 122–142.

58. *Зубов В. П.* Физические идеи древности // *Очерки развития основных физических идей*. Сб. научн. тр. АН СССР. М. 1959., С. 11–80.

59. *Зубов В. П.* Пространство и время у парижских номиналистов XIV в.

(К истории понятия относительного движения) // Из истории французской науки. М., 1960. С. 3–53.

60. *Ибн-Сина*. Даниш-намэ. Книга знания. Сталинабад, 1957.

61. *Ибн-Сина, Абу Али*. Избранные произведения. Т. 1. АН Тадж. АССР, Душанбе: Ирфон, 1980.— 420 с.

62. Исторический материализм / ред. Макаров А. Д. М.: Изд. ВПШ и АОЕ при ЦК КПСС, 1963.— 350 с.

63. История математики. В 3 т. АН СССР. М.: Наука, 1970–1972.

64. История механики с древнейших времен до конца XVIII в. АН СССР. М.: Наука, 1972.

65. История механики с конца XIX до середины XX века / ред. Григорьян А. Т. АН СССР. М.: Наука, 1972.

66. История химии. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/история_химии

67. *Йех Томас Дж.* Об аксиоме выбора // Справочная книга по математической логике. В 4 ч. Ред. Барвайс Дж. Пер. с англ. Ч. 2. Теория множеств. С. 35–63.

68. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / сер. "Памятники науки", пер. с нем., ред. Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П. М.: Изд-во АН СССР, 1985.

69. *ал-Каши, Джемшид Гиясэддин*. Ключ арифметики // ал-Каши. Ключ арифметики. Трактат об окружности / пер. с араб. Б. А. Розенфельд. М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956.— 568 с.

70. *Киносита К.* Логическое проектирование СБИС / пер. с яп. Д. А. Ковтуна, Л. В. Поспелова / К. Киносита, К. Асада, О. Карацу. М.: Мир, 1988.— 305 с.

71. *Клайн М.* Математика. Утрата определённости / пер. с англ. Данилов Ю. А. М.: Мир. 1984.— 434 с.

72. *Клайн М.* Математика. Поиск истины¹⁷³ / пер. с англ. Данилов Ю. А. М.: Мир. 1984.— 434 с.

73. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.— 624 с.

74. *Красовский А. А.* Науковедение и состояние теории процессов управления // Автоматика и телемеханика. 2000. №4. С. 3–19.

75. *Кузанский, Николай*. Сочинения в 2 т. / пер. с лат. Лосев А. Ф. Сер. "Философское наследие". АН СССР Ин-т философии. М.: Мысль, 1979–1980.— 488+472 с.

76. *Куземский А. Л.* Самосогласованная теория электронной корреляции в модели Хаббарда // Теоретическая и математическая физика. 1978. Т. 36. Авг. № 2. С. 206–223.

¹⁷³ Английское название Mathematics and the search for knowledge — буквальный перевод — "математика и поиски для знания".

77. Кузнецов В. И. Диалектика развития химии. АН СССР. М.: Наука, 1973.— 328 с.
78. Кузнецов В. И., Зайцева З. А. Химия и химическая технология, эволюция взаимосвязей. М.: Наука, 1984.— 255 с.
79. Кульвецас Л. Л. К истории определения понятия скорости // Исследования по истории механики. АН СССР. М.: Наука, 1983. С. 31–67.
80. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств / ред. пер. с англ. Кратко М. И., ред. пер. Тайманов А. Д. М.: Мир, 1970.— 416 с.
81. Курнаков Н. С. Избранные труды. В 3 т. АН СССР. М., 1960. Т. 1.— 595 с.
82. Левина И. С., Рожанская М. М. У истоков механики машин // Исследования по истории механики. АН СССР. М.: Наука, 1983. С. 101–114.
83. Левковский П. Е. Задача расчета устойчивости сводов в трудах механиков XVIII в. на примере работ Шарля Боссю // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 3. (29). С. 183–191.
84. Леднёва Л. Д. Становление кинематики изменяемых систем // Исследования по истории механики. АН СССР. М.: Наука, 1983. С. 132–145.
85. Леонардо да Винчи. Избранные произведения. Минск: Харвест. М.: Аст, 2000.— 704 с.
86. Леонтьев В. Экономические эссе / пер. с англ. М.: Политиздат, 1990.— 415 с.
87. Лосев А. Ф. История античной эстетики (ранняя классика). М.: Гиз. Высшая школа, 1963.— 584 с.
88. Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч. В 5 т. / гл. ред. В. Ф. Каган. М.–Л.: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1951.
89. Лопатин А. А., Чечулин В. Л. Об обращении теоремы Гёделя о непротиворечивости // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 25–27.
90. Лукас В. А. Теория автоматического управления. М.: Недра, 1990.— 416 с.
91. Лукреций Тит Кар. О природе вещей. В 2 т. М.–Л., 1946–1947. См. тж. URL: http://nsu.ru/classics/bibliotheca/lucretius.htm#Существование_атомов
92. Лукреций Тит Кар. О природе вещей / пер. с лат. Петровский Ф. А. М.: Изд-во АН СССР, 1958.— 260 с.
93. Льюэли М. История физики / пер. с итал. М.: Мир. 1970.— 464 с.
94. Любимов Н. А. История физики. В 3 т. 1892–1896.
95. Мазунин С. А., Чечулин В. Л. Высаливание как физико-химическая основа малоотходных способов получения фосфатов калия и аммония / монография, Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.— 114 с.

96. *Майстров Л. Е.* Теория вероятностей: исторический очерк. АН СССР. М.: Наука, 1967.— 320 с.
97. *Маковельский О.* Досократики. М., 1954.
98. *Максвелл Дж. К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / пер. Цейтлина З. А., под ред. Кудрявцева П. С. М.: ГИЗ ТТЛ, 1952.— 688 с.
99. *Максвелл Дж. К.* Трактат об электричестве. В 2 т. М.: Наука, 1989.
100. Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения... / под ред. А. Н. Колмогорова, П. А. Юшкевича. М.: Наука, 1987.— 318 с.
101. *Мах Э.* Механика. Историко-критический очерк её развития. Ижевск, Ижевск. респ. типогр., 2000.— 456 с.
102. *Менишуткин Б. Н.* Химия и пути её развития. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1937.— 352 с.
103. Механические проблемы (Аристотелев корпус) / предисл., пер., примечан. А. И. Щетников // *Σχολη*. Философское антиковедение и классическая традиция. Т. 6. Вып. 2. 2012, Новосибирск. С. 405–433.
104. *Моисеев Н. Д.* Очерки развития механики. М.: Изд-во МГУ, 1961.— 480 с.
105. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.— 480 с.
106. *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности / пер. с англ. Е. В. Гохман, ред. А. П. Юшкевич. М.: УРСС, 2003.— 240 с.
107. *Нейман фон Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука. 1970.— 708 с.
108. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / пер. и коммент. А. Н. Крылов. М.: Наука, 1989.
109. *Ньютон И.* Всеобщая арифметика / пер. Юшкевич А. П. М.: Изд-во АН СССР, 1948.— 444 с.
110. *Окунь Л. Б.* Физика элементарных частиц. М.: Наука, 1988.— 272 с.
111. *Омар Хайям.* Трактаты / пер. А. П. Юшкевича, статья и коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. М.: Изд. вост. лит., 1961.
112. *Орем Н.* О конфигурации качеств / пер. с лат. В. П. Зубов. М.: Эдиториал УРСС, 2000.— 136 с.
113. Очерки развития основных физических идей. Сб. научн. тр., АН СССР. М., 1959.
114. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М., 1994.
115. *Пиаже Ж.* Психология интеллекта. СПб.: Питер, 2003.— 192 с.
116. *Погребыльский И. Б.* От Лагранжа к Эйнштейну. Классическая механика XIX века. АН СССР. М.: Наука, 1966.— 328 с.
117. *Подосетник В. М.* К вопросу о ступенях процесса познания истины

- // Вопросы философии. 1954. №5. С. 77–81.
- 118 *Понтрягин Л. П.* Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112 (154). Вып. №3 (7). С. 307–330.
119. *Попов Е. П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1989.— 304 с.
120. *Прокл.* Первоосновы теологии // Лосев А. Ф. История античной эстетики. Высокая классика. М.: Искусство, 1974. С. 458–536.
121. *Пуанкаре А.* Гёттингенские лекции // Пуанкаре А. Последние работы. НИЦ Регул. и хаотич. динамика. Ижевск, 2001. С. 151–202.
122. *Рабинович В. Л.* Алхимия как феномен средневековой культуры. АН СССР. М.: Наука, 1979.— 392 с.
123. *Рабинович В. Л.* Образ мира в зеркале алхимии: от стихий и атомов древних до элементов Бойля. М.: Энергоиздат, 1981.— 152 с.
124. *Рожанская М. М.* Механика на средневековом Востоке. АН СССР. М.: Наука, 1976.— 324 с.
125. *Рожанская М. М., Куртик Г. Е.* Механика и наука средневекового Востока // Механика в истории мировой науки. РАН. М.: Наука, 1993. С. 81–150.
126. *Рожанская М. М.* «Механика» Герона // Некоторые проблемы истории античной науки. Сб. научн. раб. Л., 1989. С. 120–127.
127. *Ротач В. Я.* Теория автоматического управления: соответствуют ли ее основные положения действительности? // Промышленные АСУ и контроллеры. 2007. №3. С. 1–5.
128. *Секст Эмпирик.* Сочинения в 2 т. / ред. Лосев А. Ф. АН СССР. М.: Мысль, 1976.— 399+421 с.
- 129 *Семёнова О. А.* Формирование произвольной регуляции деятельности и её мозговых механизмов в онтогенезе // Физиология человека. 2007. Т. 33. №3. С. 115–127.
130. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. В 5 т. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958–1959.
131. *Соловьёв Ю. И.* История химии. Развитие химии с древнейших времён до конца XIX в. М.: Просвещение.— 368 с.
132. *Соловьёв Ю. И.* Эволюция основных теоретических проблем химии. АН СССР. М.: Наука, 1971.— 379 с.
133. *Соловьёв Ю. И., Трифонов Д. Н., Шамин А. Н.* История химии, развитие основных направлений современной химии. М.: Просвещение, 1984.— 335 с.
134. *Спасский Б. И.* История физики. В 2 ч. М.: Высшая школа, 1977.— 320+309 с.
135. Становление химии как науки (Всеобщая история химии) / ред. Соловьёв Ю. И. АН СССР. М.: Наука, 1983.—464 с.
136. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики / пер. с нем. М.,

- 1978.
137. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.— 508 с.
138. *Тредер Г. Ю.* Эволюция основных физических идей / пер. с нем. Мищенко Л. Г., ред. Иваненко Д. Л. Киев: Наук. думка, 1989.— 366 с.
139. Трїодъ постная. В 2 ч. Ч. 2. М.: Издание Московской патриархии, 1992.
140. *Тронский И. М.* Античные теории языка и стиля. М.–Л.: 1936.
141. Турчак Л. И. Основы численных методов. М: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 320 с.
142. *Тюлина И. А., Ракчеев Е. Н.* История механики. М.: Изд-во МГУ, 1962.— 228 с.
143. *Тюлина И. А.* Два подхода к построению модели тела переменной массы // Исследования по истории механики. АН СССР. М.: Наука, 1981. С. 233–257.
144. *аль-Фараби.* Трактаты о музыке и поэзии. АН СССР. Алма-Ата: Гылым, 1992.— 456 с.
145. *Фарадей М.* Экспериментальные исследования по электричеству. В 3 т. / пер. с англ. М.: Изд-во АН СССР, 1947–1959.
146. *Фарадей М.* Избранные работы по электричеству / пер. Цейтлин З. А. М.–Л.: ГОНТИ, 1939.— 304 с.
147. *Фасмер Макс.* Этимологический словарь русского языка. В 4 т. / пер. с нем. и доп. О. Н. Трубачёв. М.: Прогресс, 1987.
148. *Ферма П.* Введение в изучение плоских и телесных мест // Декарт Р. Геометрия. М.–Л., 1938.
149. *Ферма П.* Метод отыскания наибольших и наименьших значений // Декарт Р. Геометрия. М.–Л., 1938.
150. *Ферма П.* О касательных к кривым линиям // Декарт Р. Геометрия. М.–Л., 1938.
151. *Фигуровский Н. А.* Очерк общей истории химии. М.: Наука, 1969.— 456 с.
152. *Фракасторо Джироламо.* О контагии, контагиозных болезнях и лечении (в трёх книгах) / ред. Быков К. М. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
153. *Френкель А. А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. 1966.
154. *Хайям, Омар.* Трактаты / пер. Б. А. Розенфельд. М.: Изд. вост. лит., 1961.
155. *Челеби, Махмуд ибн Мухаммед Мариам.* Правила действия и исправления таблиц // Ал-Каши. Ключ арифметики. Трактат об окружности / пер. с арабск. Б. А. Розенфельд. М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956. С. 311–320.
156. *Чечулин В. Л.* О множествах с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика.

2005. Вып 2(2). С. 133–138.

157. Чечулин В. Л. О непредикативном определении понятия личности в психологии // Проблемы и перспективы развития Верхнекамского региона: матер. Региональн. конф. при БФ ПГУ, 2006. С. 108–112.

158. Чечулин В. Л. О месте науки в общественном сознании // Проблемы и перспективы развития Верхнекамского региона: матер. Региональн. конф. при БФ ПГУ, 2006. С. 224–225.

159. Чечулин В. Л. К описанию исторического формирования психосоциальной структуры самоосознания // Ментальность, общество, экономика: проблемы развития России. Матер. междунар. науч.-практ. конф. при ОрГТУ (Россия). Орёл, 2007. С. 198–202.

160. Чечулин В. Л. К обеспечению долгосрочного биосферного равновесия // Экологический вестник России. 2007. №4. С. 47–48.

161. Чечулин В. Л. К этимологии слова "свобода" в русском языке... // Мир человека и его измерения. Матер. конф. Березники, 2007. С. 189–197.

162. Чечулин В. Л., Загородских Н. В. О психолого-гносеологических ограничениях преподавания курса программирования // Рождественские чтения: матер. Всеросс. конф. Пермь, 2008. С. 102–104.

163. Чечулин В. Л. Об упорядоченных множествах с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. Вып. 4 (20). С. 37–45.

164. Чечулин В. Л. О развитии самопознания в истории литературы // Психология познания: актуальные проблемы: матер. Междунар. науч.-практ. конф. Пермь, 2008. С. 152–155.

165. Чечулин В. Л. Структурирование системы образования // Университет в системе непрерывного образования: матер. Междунар. науч.-метод. конф. при ПГУ. Пермь, 2008. С. 59–60.

166. Чечулин В. Л. Структурирование системы образования // Университет в системе непрерывного образования: матер. Междунар. науч.-методич. конф. Пермь, 2008. С. 59–60.

167. Чечулин В. Л. О психолого-гносеологических основаниях 6-уровневого структурирования агропромышленных систем // Экономика АПК Предуралья (ежегодн. науч.-практ. журн. ПГСХА), 2008. С. 135–136.

168. Чечулин В. Л. О некотором изменении структуры сельскохозяйственных экономических субъектов // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 29–33.

169. Чечулин В. Л. О приложениях семантики самопринадлежности // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 3 (29). С. 10–17.

170. Чечулин В. Л. К структурированию системы образования // Универси-

- тетское образование. Пермь. 2009. Вып. 6 (32). С. 68–72.
171. Чечулин В. Л. О последовательности уровней абстрактного мышления в её развитии // Актуальные проблемы психологии развития: субъект, личность, индивидуальность. Межвуз. сб. научн. трудов, ПермГУ, Пермь, 2009. С. 121–125.
172. Чечулин В. Л. О некоммутативности категорной диаграммы программного комплекса // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 7 (33). С. 110–113.
173. Чечулин В. Л. Связь моделей эмоциональных характеристик с общей теорией психологии личности // Гипотезы и алгоритмы математической теории исчисления эмоций / под общ. ред. О. Г. Пенского. Пермь, 2009. С. 143–146.
174. Чечулин В. Л. О периодичности в строении материи // Актуальные проблемы философии, социологии, политологии и психологии. Матер. 12-й междунар. аспирант. конф. при ПГУ. Пермь, 2009. С. 107–109.
175. Чечулин В. Л. Периодичность в строении материи и её отличие от иных структурных закономерностей // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 23–28.
176. Чечулин В. Л., Ясницкий Л. Н. Некоторые ограничения алгоритмически реализуемых нейронных сетей // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2010. №12. С. 3–6.
177. Чечулин В. Л. О гносеолого-психологических основаниях философии права // Философия права. 2010. №1. С. 101–106.
178. Чечулин В. Л. Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2010.— 100 с.
URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=15267103>
179. Чечулин В. Л. Теорема об одном свойстве гносеологического отражения // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 47–51.
180. Чечулин В. Л. Об основаниях системы кризисов развития личности и структурировании отклоняющегося поведения // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 98–96.
181. Чечулин В. Л., Сандакова О. В. Об ограниченности описания реальности в физических теориях // Философия физики. Матер. конф. при МГУ, 2010.
182. Чечулин В. Л. О кратком варианте доказательства теоремы Нагорного об условиях удвоения слов в конечном алфавите // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.:

сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С 145–146.

183. Чечулин В. Л. Иерархия 6-ти уровней основных математических понятий // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С 107–124.

184. Чечулин В. Л. О последовательности 6 исторических этапов появления основных математических понятий // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 2 (2). 2010. С. 115–124.

185. Чечулин В. Л. Математика: единство исторического и образовательного процессов // Актуальные проблемы механики, математики, информатики / Матер. Всеросс. конф. при ПГУ Пермь. 2010. С. 250.

186. Чечулин В. Л. О непредикативности в определении натуральных чисел // Актуальные проблемы механики, математики, информатики / Матер. Всеросс. конф. при ПГУ Пермь. 2010. С. 251.

187. Чечулин В. Л. О питании как физиологическом условии когнитивных процессов // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 61–65.

188. Чечулин В. Л. Применение метода пространства состояний в управлении качеством процесса хлорирования титаносодержащей шихты // Научно-технические ведомости СПбГПУ Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2010. №1. С. 177–184.

189. Чечулин В. Л. О мощности множества всех множеств в теории множеств с самопринадлежностью // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 4 (4). 2010. С. 18–19.

190. Чечулин В. Л., Мазунин С. А. О плоскостности координат точек моно- и неинвариантных равновесий в 4-х и более компонентных водно-солевых системах // Известия высших учебных заведений: Химия и химическая технология. 2010. Т. 53. №. 3. С. 152–154.

191. Чечулин В. Л. Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография. Перм. гос. ун-т. Пермь, 2011.— 112 с.

URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_modeli_ekonomiki.pdf

192. Чечулин В. Л. Развитие понятия причинности в истории науки // Актуальные проблемы российской философии. Сб. трудов Всеросс. конф. Пермь, 2011. С. 213–216.

193. Чечулин В. Л. Гносеологические основания вертикальной структуры системы образования // Национальный исследовательский университет в системе непрерывного образования: матер. Межд. науч.-метод. конф. при ПермГУ. Пермь. 2011. С. 111–112.

194. Чечулин В. Л. К философии истории химии // Вестник Пермского

университета. Серия: Философия. Психология. Социология. 2011. Вып. 4 (8). С. 38–43.

195. Чечулин В. Л., Русакова О. Л. О гносеологической структуре курса информатики // Философия образования. 2011. Т. 34. №1. С. 104–109.

196. Чечулин В. Л. Последовательность 6-ти этапов развития логики // Седьмые Смирновские чтения по логике: межд. конф. М. 2011.

URL: http://vfc.org.ru/rus/events/conferences/smirnov2011/members/http://vfc.org.ru/bitrix/tools/form_show_file.php?rid=605&hash=272e4e2648cd47d5dfa1e46e1b2a41ea&lang=ru&action=download

197. Чечулин В. Л. О вращении в многомерных пространствах // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 219–221.

198. Чечулин В. Л. Метод пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2011.— 114 с.

URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_mps.pdf

199. Чечулин В. Л. О различии этимологии слова «свобода» в русском и иных языках // Приволжский научный вестник. 2011. №1. С. 44–50.

URL: http://icnp.ru/sites/default/files/PNV/PNV_1.pdf

200. Чечулин В. Л. Потребление негэнтропии и успеваемость // Вестник Пермского университета. Серия: Философия. Психология. Социология. 2011. №1. С. 75–80.

201. Чечулин В. Л., Федосов А. Ю. Связь потребления негэнтропии (состава питания) и калорийности дневного рациона с рождаемостью по выборке стран за период с 1980 по 2010 год // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 309–317.

202. Чечулин В. Л. К периодизации истории физики // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2012. Вып. 4. С. 110–121.

203. Чечулин В. Л., Галанова Я. Ю. Вертикальная структура экономических субъектов // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 285–288.

204. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Русаков С. В. Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.— 112 с.

URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_legotkin_rusakov_me_ustojchivost.pdf

205. Чечулин В. Л. О нелокальности массы // Чечулин В. Л. Статьи в

журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 297–298.

206. Чечулин В. Л. О предикативности лямбда-исчисления // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. №4(12). С. 76–78.

207. Чечулин В. Л. Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография. Изд. 2-е, испр. и доп. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012. — 126 с.

URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_teoriya_mnozhestv2_2012.pdf

208. Чечулин В. Л. Об онтологических основаниях экономико-математического моделирования // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 251–256.

209. Чечулин В. Л. Психологический анализ иерархии целей государственной политики // Вестник Пермского университета. Серия: Политология. 2012. №3. С. 162–169.

210. Чечулин В. Л. О счётности последователей типа PN и основаниях теории меры // Вестник Пермского университета. Серия: Математика Механика. Информатика. 2013. Вып. 1. С. 37–15.

211. Чечулин В. Л., Ткаченко Е. Р. Конечность технологических укладов / Чечулин В. Л. Статьи в журнале "Университетские исследования" 2009–2014 гг.: сборник. Пермь, ПГНИУ, 2015.

212. Чечулин В. Л. Самопринадлежность: около аксиомы фундирования // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. №4. С. 14–18.

213. Чечулин В. Л., Смыслов В. И., Модели социально-экономической ситуации в России 1990–2010 годов и сценарные прогнозы до 2100 года: монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013. – 194 с. URL:

http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_Smyslov_modeli_2013.pdf

214. Чечулин В. Л. История математики, науки и культуры (структура, периоды, новообразования): монография / В. Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2013. — 166 с.

URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_2013_Istoriya_nauki.pdf

215. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Ахмаров В. Р. Модели безынфляционности экономики: произведённая инфляция и вывоз капитала: монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013. – 162 с.

URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_Modeli_Ekonomiki_3.pdf

216. Чечулин В. Л. Логико-семантические модели в психологии и их

приложение // монография; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014.–142 с.

URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_logiko-semanticheckie_modeli_v_psihologii_i_ih_prilozhenie-2.pdf

217. Чечулин В. Л. К периодизации истории понятия предела // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014. Вып. 1. С. 18–29.

218. Чечулин В. Л. Об обращении теоремы Гёделя о неполноте // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 29–31.

URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_works2015_2.pdf

219. Чечулин В. Л. К периодизации развития понятия о числе // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 6–17.

220. Чечулин В. Л. К обоснованию логического вывода // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 101–105.

221. Чечулин В. Л. К возведению вероятностей в степень // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014. Вып. 1. С. 79–81.

222. Чечулин В. Л. О сигма-алгебре событий в экономических моделях // Чечулин В. Л. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 52–53.

223. Чечулин В. Л. Структурный изоморфизм цепи n -деревьев и его приложение // Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / В. Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. С. 21–24.

224. Чечулин В. Л. Алгебра событий в экономических моделях // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. ПГУ, Пермь, 2010. Вып. 3. С. 119–120.

225. Чечулин В. Л. К обоснованию метода устойчивого оценивания посредством неравенства Чебышева // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 2. С. 29–32.

226. Чечулин В. Л., Грацилёв В. И. Способ устойчивого оценивания, использующий неравенство Чебышёва, и его приложение к анализу доходов в России // Вестник Пермского научного центра. 2015. №2. С. 24–39.

227. Чудинова Е. В. Работа с гипотезами детей в системе обучения Эльконина – Давыдова // Вопросы психологии. 1998. №5. С. 85–93.

228. Шенфилд Д. Р. Аксиомы теории множеств // Справочная книга по математической логике. В 4 ч. Ред. Барвайс Дж. Пер. с англ. Ч. 2. Теория множеств. С. 9–35.

229. *Шибутани Т.* Социальная психология. Ростов н/Д: Феникс, 2002.
230. *Эйлер, Леонард.* Дифференциальное исчисление / пер. с лат. Выготский М. Я. М.–Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит.-ры, 1949.— 580 с.
231. *Эйлер, Леонард.* Введение в анализ бесконечно малых. Т. 1 / пер. с лат. Пацановский Е. Л., ред. Лурье С. Я. М.–Л.: ОНТИ НКТП. Гл. ред. общетехнич. лит. и номографии, 1936.— 352 с.
232. *Эйнштейн А.* Геометрия и опыт // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. В 4 т. М.: Наука, 1966. Т. 2. С. 83–94.
233. Экономико-математический энциклопедический словарь / под ред. Данилова-Данильяна В. И. М.: Большая Российская энциклопедия, Инфра-М, 2003.— 688 с.
234. Эллинистическая техника / ред. Толстой И. И. АН СССР. М.–Л.: Наука, 1948.— 370 с.
235. *Юшкевич А. П.* О развитии понятия функции // Математика в её истории. М.: Янус, 1996. С. 176–199.
236. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. М.: Гиз. ф.-м. лит., 1961.— 448 с.
237. *Якоби К.* Лекции по динамике / пер. с нем. М.–Л. ГРОТЛ, 1936.— 272 с.
238. *Якоби К.* Лекции по аналитической механике (1847/48) / пер. с нем. М.–Ижевск, НИЦ РИХД, Ин-т комп. исследований, 2006.— 416 с.
239. *Chechulin V. L., Ardavichus V. G., Kolbasina O. V.* Informatization of the process of producing formalin // Russian Journal of Applied Chemistry, МАИК Nauka/Interperiodica. 2008. Vol. 81. N. 6. P. 1112–1116.
240. *Frege Gottlob.* The foundation of arithmetic. Oxford, 1980.— 120 p.
241. *Linnebo Oystein.* Predicative fragments of Frege arithmetic // Bull. Symbol. Log. 2004. V. 10. №2. P. 153–174.

Обозначения

Обозначения уровней самоосознания (психологических возрастов), употребляемые в тексте, подробно описаны в [214], [216]:

1. Я_{об}
2. Я_{суб}
3. (Я–Они)_{об}
4. (Я–Они)_{суб}
5. (Я–(Они+Я))_{об}
6. (Я–(Они+Я))_{суб}

<...> В угловых скобках в цитатах замечания автора.

□ — знак окончания доказательства теоремы.

Указатель имён

- ал-Каши, 16, 43
ал-Хозини, 81
аль-Фараби, 109
Аристотель, 24, 27, 49,
62, 68, 108, 135
Аррениус, 92
Архимед, 14, 35, 49, 69,
79
- Бернулли, 83, 100
Больман, 100
Бозций, 62
Брио, 23
Буке, 23
Буридан, 82
Бутлеров, 92
Бэкон Ф., 25
- Вариньон, 83
Витрувий, 80
- Галилей, 17, 25, 63, 70,
110
Гамильтон, 40, 84
Гаусс, 102
Гегель, 25
Гёдель, 21
Герон, 70, 80
Герц, 84
Гильберт, 102
Гюйгенс, 83
- Даламбер, 39
Дедекин, 39
Декарт, 17, 38, 82
Демокрит, 29, 67
Диофант, 15, 24, 36
- Евклид, 14, 29, 34, 109
- Зенон, 48
- Ибн-Сина, 25, 63, 81,
109
- Кантор, 30, 39
Колмогоров, 25, 100
Коши, 22
Кузанский Николай, 63
- Лавлейс, 20, 25
Лагранж, 96
Лейбниц, 25
Леонардо да Винчи,
109
Леонардо Пизанский,
38
Леонтьев, 97
Линдеман, 40
Лобачевский, 20, 52,
102
Ломоносов, 83
Лукреций Тит Кар, 68,
91
Лю Хуэй, 50
- Маклорен, 30
Максвелл, 72
Мальцев, 21
Менделеев, 92
Мириманов, 21
- Нейман, 113
Неморарий, 81
Ньютон, 19, 70
- Орем, 17
- Пеано, 102
- Пиаже, 58
Плотин, 62
Понтрягин, 113
Прокл, 29, 62
Пселл, 24
Пуанкаре, 21
- Робинсон А., 32
- Секст Эмпирик, 62
Соломон де Ко, 82
- Табит Бен Гур, 81
Тарский, 21
- Фарадей, 72
Ферма, 18, 51
Фиббоначчи, 38
Фонтенель, 30
- Хайям Омар, 15, 36, 63
- Цермело, 21
Циолковский, 85
- Челеби, 17
Чжу Ши-Цзе, 50
- Эйлер, 30, 39, 51
Эйнштейн, 73
Эренфест, 87
Эрмит, 40
- Юнгиус, 92
- Якоби, 83

Предметный указатель

- алгоритм, 20
- бесконечность
актуальная, 49
актуальная, 30
недостижимая, 30
потенциальная, 49
потенциальная, 30
- вероятность, 23
время, 70, 81
- гипотезы, 109
гносеология, 9
- дедукция, 109
- закон, 70, 92
- касательная, 19
круг причин, 92
- логика
двузначная, 26
многозначная, 25, 26
модальная, 25, 26
объёмов понятий, 24, 27
- логический вывод, 109
лямбда-исчисление, 26
- мышление, 68
- неизвестная, 15
непредикативность, 21, 53
- онтологическое
сопоставление теорий, 54
- онтология, 9
оператор, 23
- переменная, 15
полнота формальной системы, 121
- потребности
— 10-частная система, 118
- предел, 52
принцип наименьшего действия, 84
причина
бесконечный ряд, 63
ближайшая, 62, 91, 108
произвольная, 63
причинность, 61
социальная, 64
причинность, уровни понимания, 47
производная, 19
простая машина, 79
- самоописательность, 31, 74
самопринадлежность, 21
самопричинность, 65
самоссылочность, 21, 110
свобода, 106
система аксиом, 21
структура отражения, 9
- теорема
Гёделя, 121
Нагорного, 134
теория, 72, 92, 110
теория формальная, аксиоматическая, 52
технологический уклад, 106
трёхмерность пространства, 87
- уравнение, 15
дифференциальное, 23
уровни абстракции, 11
уровни абстракции в образовании, 56
- формальная система, 25
функционал, 23
- функция, 17
- число
конкретное, 13, 33
составлено из единиц, 14, 34
чувственно-воспринимаемое, 68
- эксперимент, 70

Научное издание

Чечулин Виктор Львович

**История математики и её методологии
(структуры и ограничения)**

МОНОГРАФИЯ

Редактор *Н. Е. Петрова*
Корректор *Е. Н. Пермякова*
Компьютерная вёрстка автора

Подписано в печать 25.12.2015. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 8,95. Тираж 100 экз. Заказ №102

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Отпечатано в ООО «Учебный центр "Информатика"»
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Предыдущие книги В. Л. Чечулина

1. Чечулин В. Л. Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография. Перм. гос. ун-т.– Пермь, 2010.– 100 с.
ISBN 978-5-7944-1468-4 URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_teoriya_mnozhestv.pdf
2. Чечулин В. Л. Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения / монография. Перм. гос. ун-т.– Пермь, 2011.– 112 с. ISBN 978-5-7944-1621-3
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_modeli_ekonomiki_2012.pdf
3. Чечулин В. Л. Метод пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2011.– 114 с. ISBN 978-5-7944-1774-6
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_metod_2012.pdf
4. Чечулин В. Л., Мазунин С. А., Моисеенков М. С. Плоскостность линий моновариантного равновесия в водно-солевых системах и её приложение / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. — Пермь, 2012.— 116 с. ISBN 978-5-7944-1922-1
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_mazunin_moiseenkov_ploskostnost_2012.pdf
5. Мазунин С. А., Чечулин В. Л. Высаливание как физико-химическая основа малоотходных способов получения фосфатов калия и аммония / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.— Пермь, 2012.— 114 с. ISBN 978-5-7944-1860-6
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Mazunin_Chechulin_vysalivanie_2012.pdf
6. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Русаков С. В. Модели безынфляционности и устойчивости экономики и их приложения / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2012.– 112 с. ISBN 978-5-7944-2012-8
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_legotkin_rusakov_modeli_2012.pdf
7. Чечулин В. Л. Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения) / монография. Изд. 2-е, испр. и доп. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2012.— 126 с. ISBN 978-5-7944-2061-6
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_teoriya_mnozhestv2_2012.pdf
8. Чечулин В. Л. История математики, науки и культуры (структура, периоды, новообразования) / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2013.— 166 с. ISBN 978-5-7944-2116-3
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_2013_Istoriya_nauki.pdf
9. Чечулин В. Л., Леготкин В. С., Ахмаров В. Р. Модели безынфляционности экономики: произведённая инфляция и вывоз капитала / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2013.– 162 с. ISBN 978-5-7944-2191-0
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_V_L_Modeli_Ekonomiki_3.pdf
10. Чечулин В. Л., Смыслов В. И. Модели социально-экономической ситуации в России 1990–2010 годов и сценарные прогнозы до 2100 года / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.– Пермь, 2013.– 194 с. ISBN 978-5-7944-2273-3
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Chechulin_Smyslov_modeli_2013.pdf
11. Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2014. Вып. 1.– 94 с. ISBN 978-5-7944-2381-5 ISBN 978-5-7944-2382-2 (вып. 1).
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_statji_2014_1.pdf
12. Чечулин В. Л. Логико-семантические модели в психологии и их приложение / монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т.- Пермь, 2014.- 142 с. ISBN 978 5-7944-2450-8 URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_logiko-semanticheskie_modeli_v_psihologii_i_ih_prilozhenie-2.pdf
13. Чечулин В. Л. Статьи разных лет: сборник / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. Вып. 2. – 110 с. ISBN 978-5-7944-2381-5 ISBN 978-5-7944-2541-3 (вып. 2)
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin_works2015_2.pdf
14. Статьи в журнале «Университетские исследования» 2009–2014 гг.: сборник [Электронный ресурс] / В. Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2015. ISBN 978-5-7944-2591-8
URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/chechulin-v-l-stati-v-zhurnale-ui_new.pdf