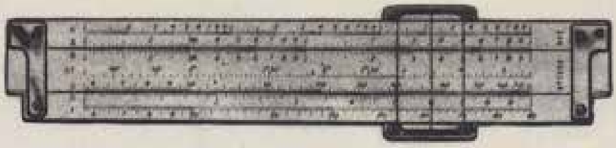
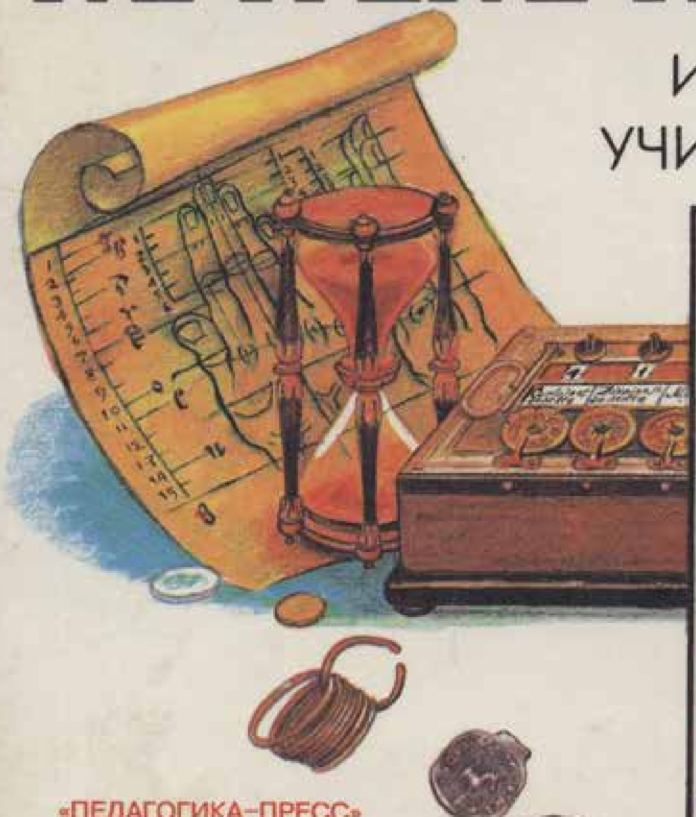
Александр Свечников

ПУТЕШЕСТВИЕ В ИСТОРИЮ



МАТЕМАТИКИ,

ИЛИ КАК ЛЮДИ УЧИЛИСЬ СЧИТАТЬ



«ПЕДАГОГИКА-ПРЕСС»

Кто хочет ограничиться настоящим без знания прошлого, тот никогда его не поймет.

Г. В. Лейбниц

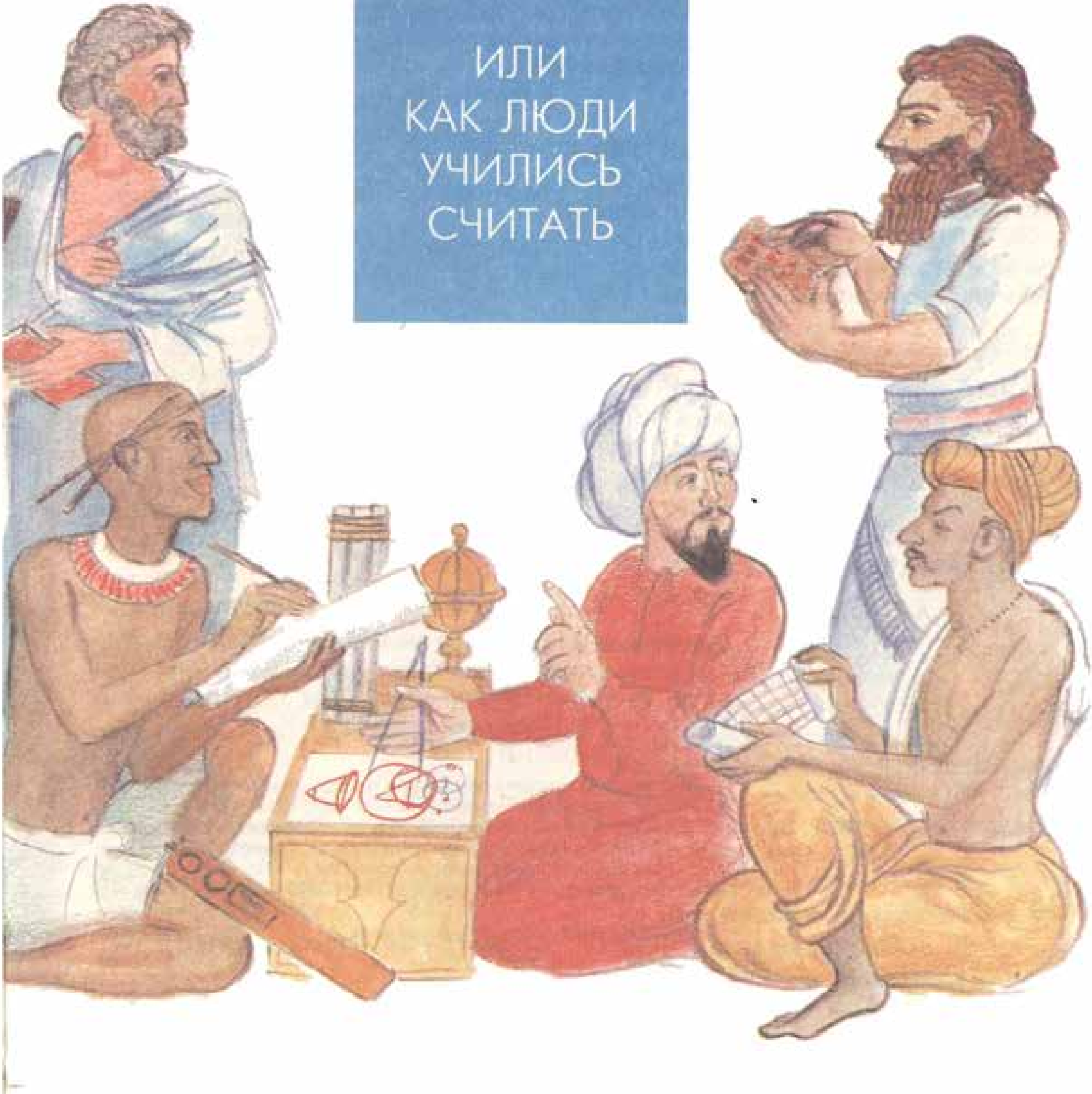
Александр Свечников

ПУТЕШЕСТВИЕ В

Москва
Издательство
«Педагогика-Пресс»
1995

ИСТОРИЮ МАТЕМАТИКИ,

ИЛИ
КАК ЛЮДИ
УЧИЛИСЬ
СЧИТАТЬ



ББК 74.262
С 24

Рекомендовано Министерством образования РФ в качестве пособия для дополнительного образования в общеобразовательных учреждениях

Художник *С. Г. Михайлов*

Свечников А. А.

С 24 Путешествие в историю математики, или Как люди учились считать: Книга для тех, кто учит и учится. — М.: Педагогика-Пресс, 1995. — 168 с.: ил.

ISBN 5-7155-0681-6

Автор рассказывает об истории наиболее важных открытий в области элементарной математики — от зарождения счета в глубокой древности до изобретения ЭВМ и АСУ. Занимательность изложения, разнообразные задания, учитывающие интересы и возможности школьников, позволяют использовать материал книги не только на уроках, но и на занятиях математических кружков и в семье.

Для учащихся, учителей, родителей.

ББК 74.262

С $\frac{4306000000—018}{005(03)—95}$ Без объявл.

ISBN 5-7155-0681-6

Содержание

К читателю

С первых лет жизни и до глубокой старости человек постоянно обращается к числам, фигурам, правилам, сложившимся в математике. Просыпаясь, он обычно вспоминает, какой нынче день, в котором часу ему нужно отправиться в школу или на работу и когда он возвратится домой. Вечером ему требуется знать, когда будут передавать по радио или телевизору нужную информацию. Днем ему неоднократно приходится подсчитывать, сколько что стоит, сколько надо уплатить или получить, а прежде чем приготовить обед, придется отмерить, сколько взять крупы, масла, муки и пр. Измеряют ложками, стаканами, литрами, граммами, сантиметрами, часами, минутами и т. д.

Словом, каждому из нас ежедневно приходится обращаться к математике, ее правилам, которые мы изучили или еще изучаем. Пользоваться основами математики стало для нас настолько обычным и естественным, что мы забываем: когда-то люди, наши предки, ничего этого не знали и, видимо, с большим трудом и продолжительное время открывали начала математики. Рассказу о том, как люди разных стран искали и открыли математику, и посвящена предлагаемая вашему вниманию книга.

Математика возникла из практики и развивалась, решая насущные задачи и проблемы, встающие перед человеком и обществом. Наши предки обучались математике многие века. Их учителем была сама жизнь. Им самим приходилось открывать числа, называть их, придумывать цифры и изобретать действия. Прочитайте эту книгу, и вы узнаете, сколько труда и мысли потребовалось людям, чтобы научиться считать и создать лишь азы математики.

Вы узнаете о том, чего нет в учебниках: как зачастую неизвестные, но гениальные наши предки создавали основные разделы и понятия из начальной математики.

Их открытия подхватывались другими людьми: находки развивали, шлифовали, совершенствовали, и они распространялись по всему миру. И бывало, что открытие, сделанное анонимным автором, позже получало имя совсем другого человека.

Если до сих пор разные народы говорят на разных языках и пользуются разными алфавитами, то язык математики не знает национальности: он принадлежит всему человечеству. Это подтверждает гениальность творцов математики и совершенство их изобретений. Это говорит о единстве интересов всех народов мира.

Но прежде чем прийти к единству, каждый народ открывал математику на свой лад. Об этом вы также прочитаете в этой книге. Вы узнаете, как наши пращуры изобрели счет, как совершенствовались, уточнялись и расширялись представления о числах, какими цифрами пользовались раньше, какие системы счета были разработаны у разных народов, как эти системы улучшались и какие следы их сохранились до наших дней, как были введены единицы измерения длины, массы, времени, денежных расчетов и как первоначальные единицы видоизменялись и уточнялись.

Думаем, что любознательных читателей заинтересуют и рассказы о числах натуральных и рациональных, об открытии и совершенствовании нуля, определении свойств некоторых числовых рядов. Есть в нашей книге и страницы о жизни знаменитых математиков, изобретении счетно-решающих приспособлений: от специальных таблиц и номограмм до электронно-вычислительных машин.

Создавая эту книгу, автор рассчитывал и на то, что родители школьников и их учителя не обойдут ее своим вниманием, а, ознакомившись с ней, помогут детям более глубоко вникнуть в историю начальной математики. Особенно важно, чтобы читатель при знакомстве с историей начальной математики понял: математика не застывшая на века наука, достигшая своего апогея, она постоянно совершенствуется и, проникая во многие разделы других наук, значительно способствует их развитию.

Весьма важно также уяснить приведенную в эпиграфе мысль, высказанную знаменитым немецким *математиком Г. Лейбницем о том, что без знания прошлого не понять настоящего. Только в результате всестороннего сопоставления достижений в прошлом с требованиями настоящего и глубокого осмысления открытого лучшие умы человечества находили наиболее совершенные способы решения той или иной проблемы. Причем нередко одно и то же открытие происходило в разных точках земного шара, довольно часто оно повторялось несколько раз, совершенствовалось, а позже распространялось и становилось достоянием всех народов. Математика невольно связывает единой нитью народы мира. Она заставляет их сотрудничать и общаться между собой.*

Автор не претендовал на подробное систематическое изложение истории математики (арифметики, алгебры, геометрии), так как знал, что для школьников IV—VI классов такая книга будет не по силам. По этой причине некоторые вопросы пришлось изложить упрощенно, а другие совсем обойти. Автор сознательно, чтобы не перегружать детскую память, старался не упоминать чрезмерно большого числа дат и имен многих математиков, но ограничился рассказами лишь о некоторых ученых и наиболее выдающихся открытиях.

Надеемся, наша книга пробудит у детей интерес и к истории, и к математике, расширит их кругозор, повысит эрудицию. И еще хотелось бы, чтобы юные читатели поняли главное. Мир полон тайн и загадок. Но разгадать их могут только пытливые и любознательные. Открытия ждут вас. Будьте настойчивы.

А. Свечников

А математику уж затем учить следует, что она ум в порядок приводит.

М. В. Ломоносов

Рука человека — первый счетный прибор. Сцена охоты. Рисунок первобытного художника обнаружен на скале в Испании.

1. Как люди учились считать

Сотни тысяч лет до нашего времени люди жили большими семьями — родами, в которых были дети, матери, отцы, деды, внуки и правнуки. Руководил жизнью такой большой семьи наиболее опытный человек — родоначальник, а иногда кто-либо их старших детей. В то время люди обитали в теплых странах и, как правило, не вели оседлый образ жизни. Они довольно часто переходили с одной стоянки на другую в поисках пищи — съедобных плодов, корней и листьев растений. Первобытные

люди не брезговали даже улитками, жуками, червями и т. п.

Большую роль в развитии первобытного общества сыграло знакомство людей с огнем. Возможно, впервые они воспользовались им после случайного пожара, возникшего от разряда молнии. И только по прошествии многих лет наши пращуры научились добывать огонь сами — при помощи трения друг о друга двух сухих кусков дерева.

Долгое время человек не знал металла, а орудия труда (нож, молоток, топор, наконечник для копья) делал из камня.

Одежду первобытных людей в теплых краях обычно составляла только набедренная повязка из листьев или коры деревьев, а в более позднее историческое время из шкуры какого-либо зверя. Для жилья люди использовали пещеры или строили хижины из ветвей деревьев. Жизнь первобытного человека была наполнена заботами о том, как добыть пищу и укрыться от непогоды. Но, внимательно наблюдая за окружающим миром, он постепенно изменял условия жизни.

Прежде всего люди научились приручать животных и выращивать хлеб. Они стали изготовлять орудия для охоты, различные емкости для зерна — корзины из прутьев и коры деревьев, кувшины из глины и многое другое, необходимое в повседневной жизни. До наших дней дошли гончарные изделия, рисунки, выполненные на камнях и скалах. Чаще всего первобытные художники изображали на них бытовые сценки и охоту на животных.

Давно, очень давно это было. Человек сидел у водопоя, спрятавшись в кустах, и ждал зверя. К воде подошел олень с большими ветвистыми рогами. Охотник загнул на руке палец. Затем к водопою вышел безрогий олень. Охотник загнул еще один палец. Всю ночь просидел в засаде охотник, но больше ни одного зверя не увидел. Утром он рассказывал старшему соплеменнику о своих наблюдениях:

— Сижу, смотрю, вышел к водопою рогатый олень (охотник для подтверждения положил на ладонь угловатый камешек), а затем вышел безрогий олень (положил рядом с первым овальный камешек). Больше зверей не было до утра.

— Так к водопою сначала подошел один олень, а затем еще один? — переспросил родич и поднял два пальца.

— Да, — ответил охотник.

К следующей ночи старший собрал большую группу мужчин с копьями. Он тщательно продумал, куда посадить одного охотника, куда — двух, а куда и трех. Все были размещены у водопоя так, чтобы подошедший олень попал в окружение. Охота была удачной.

Этот случай показывает, что уже на заре развития человеческого общества люди замечали, что различные группы предметов — звери, охотники, камни —

могут иметь одно и то же число: два пальца, два зверя, два камня и т. д. В наши дни об этом знает любой первоклассник. Если разложить напротив друг друга, например, кружки и палочки, нетрудно убедиться, что кружков окажется столько же, сколько палочек. **Этим мы устанавливаем взаимно-однозначное соответствие.** Так и первобытные люди, сопоставляя одну группу (множество) предметов с другой (другим множеством), видели сходство и различие обеих групп (множеств).

В то далекое время понимание того, что одна группа (множество) может быть похожа на другую (множество), стало для человека громадным продвижением в его развитии. Это было величайшим открытием. Оно помогло людям научиться видеть взаимно-однозначное соответствие предметов двух множеств, а затем и считать эти предметы.

Постепенное совершенствование жизненного уклада первобытных людей способствовало возникновению у них потребности считать, но прошли десятки столетий, прежде чем люди приобрели это умение.

Вначале человек научился выделять единичные предметы. Например, из стаи волков, стада оленей он выделял одного вожака, из выводка птенцов — одного птенца и т. д. Научившись выделять один предмет из множества других, говорили: «один», а если их было больше — «много». Даже для названия числа «один» часто пользовались словом, которым обозначался единичный предмет, например: «луна», «солнце». Такое совпадение названия предмета и числа сохранилось в языке некоторых народов до наших дней.

Частые наблюдения множеств, состоящих из пары предметов (глаза, уши, крылья, руки), привели человека к представлению о

числе два. До сих пор слово «два» на некоторых языках звучит так же, как «глаза» или «крылья».

В некоторых племенах Австралии долгое время пользовались только числами «один» и «два», а все другие называли, повторяя эти числа или говоря «много».

В одном из австралийских племен считали иначе. Один называли «мал», два — «булан», три — «гулиба», т. е. названия имели только три первых числа, а другие числа, например 4, называли «булан-булан» и т. д. Эти исторические факты показывают, как люди учились считать. Так как в далекие времена общение между разными народами было затруднено, то способы счета и названия чисел в разных местах одной страны были неодинаковы.

В нашей стране у некоторых народов Севера тоже существовал счет на пальцах рук и ног. Вот как рассказал о подсчете оленей писатель Т. Семушкин в повести «Алитет уходит в горы»:

«...часа через два пришел наш «подсчетчик». Он назвал число 128. Старик хозяин крайне удивился такому большому числу оленей.

— Наверное, ты ошибся. Так много оленей никогда у нас не было.

Старик решил проверить... Для этого он разулся и через три часа сообщил, что подсчет произведен правильно (он помнил каждого оленя). Для подсчета не хватило своей семьи из пяти человек, и пришлось пригласить еще двух человек из соседней яранги...»

Десять пальцев оказали человеку неоценимую помощь. Они помогли научиться считать и выполнять простейшие действия с числами.

Упражнения и задачи

1. Запишите кратчайшим способом числа 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, применяя только 1, 2, 3. (Пример: 5 — это 3 и 2; 7 — это 3, 3 и 1, или 3, 2 и 2.)

2. Коля и Витя собрали для коллекции 16 монет.

Коля собрал пятачки, а Витя — трехкопеечные монеты. Число копеек у Коли равно числу копеек у Вити. Сколько пятачков собрал Коля?

3. Дети катались на двухколесных и трехколесных велосипедах. Сколько было велосипедов, если колес было 7?

4. Ученик, выигравший по лотерейному билету транзистор, на вопрос, какой номер билета оказался счастливым, ответил: первые три цифры этого номера составляют число, в 7 раз большее, чем число, составленное последними двумя цифрами, а разность между этими числами 174. С каким номером оказался билет выигрышным?

5. Запишите пятью тройками число 100.

2. От зарубок через символы к цифрам

Однажды во время сильной бури затонул корабль. Спасся лишь один матрос. Он хорошо плавал и сумел выбраться на остров. Обследовав его, матрос убедился, что на эту землю до него не ступала нога человека. Жизнь спасшегося моряка на необитаемом острове описал английский писатель Даниель Дефо в книге «Робинзон Крузо» (1719).

Робинзон знал, что ему придется жить как первобытному человеку, и решил вести своеобразный календарь. Для этого он на врытом в землю столбе каждый день делал короткую зарубку, а через каждые 30 дней делал зарубку длиннее. Так Робинзон считал дни и месяцы, проведенные им на острове. Однако этот способ записи чисел открыл не Робинзон, его изобрели первобытные люди за много тысячелетий до Робинзона. Наши далекие предки отмечали числа зарубками на палках и костях, узлами на веревках и ремнях и т. д.

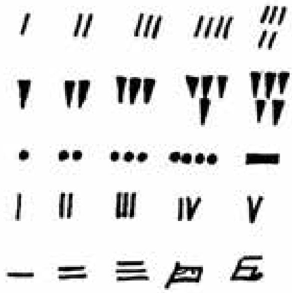
Вот что рассказал о записи чисел с помощью узлов на ремне древнегреческий писатель Геро-

дот. Во время военного похода персидский царь Дарий оставил для охраны переправы через реку Дунай отряд воинов. Он отдал им кожаный пояс со множеством узлов и приказал с первого дня своего похода на скифов каждый день развязывать на нем по одному узлу. Когда минует число дней, означенное узлами, воины должны вернуться на родину.

Запись чисел зарубками на палках, черточками или точками на коре и листьях растений была распространена у многих народов. В России сохранилось выражение: «Заруби себе на носу». Оно говорит о том, что для запо-

Робинзон отмечает еще один день, прожитый на острове.

Индеец Южной Америки держит в руках веревочный прибор для узлового счета.



Первые пять цифр древних народов (египетские, вавилонские, майя, римские, китайские).

минания чего-либо важного следует сделать зарубку. Слово «нос» в данном случае произведено от слова «носить». В старые времена многие люди носили при себе для зарубок небольшие палочки. Называли их «нос», а чтобы запомнить нужное число, делали на «носу» соответствующее число зарубок — меток.

Интересно, что разные народы, жившие в отдаленных друг от друга странах и в разные времена, изобретали для записи чисел собственные, но все же чем-то сходные с другими способы записи чисел. Например, в Египте первые числа изображали вертикальными черточками, а в Китае — горизонтальными, в Америке — точками, а в Вавилоне — клинышками на глиняных пластинках. Такие записи позволяли без особого труда прибавлять к записанному числу единицу простым приписыванием нового знака, и уже, например, вместо двух точек или черточек оказывалось три. Так же легко было и вычесть единицу, зачеркнув лишний значок.

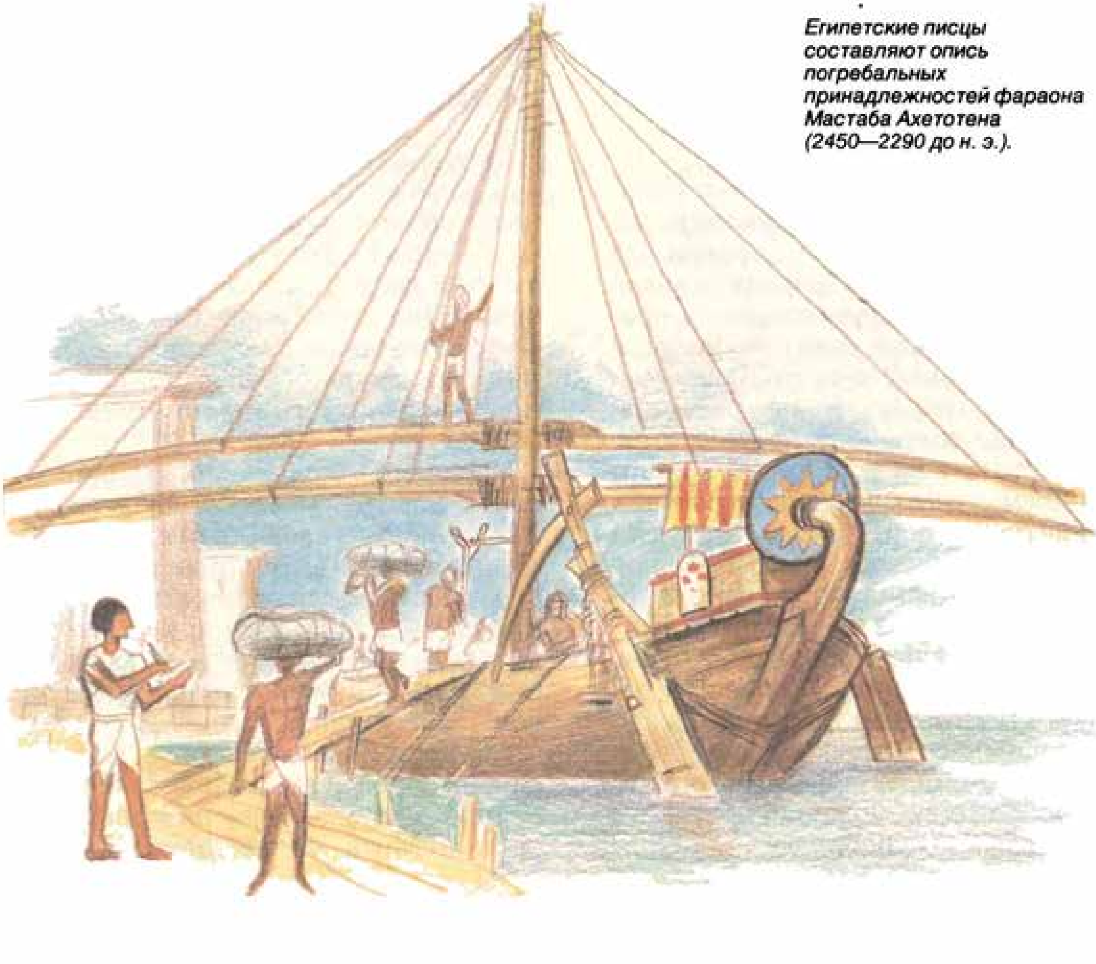
3. За сорок веков до нашего летосчисления

Есть на нашей планете жаркая Африка. По ее территории с юга на север протекает река Нил, длина которой более 6 тысяч километров. Воды Нила вливаются в Средиземное море. По берегам реки расположена долина. Там круглый год тепло, и не надо заботиться об одежде и теплом жилище. Плодородная почва позволяет выращивать по 2—3 урожая в год. Вот почему с незапамятных времен люди стали заселять долину реки Нил.

С течением времени народы, населявшие эту долину, образовали государство Египет. Это произошло около 40 веков назад, или около четырех тысячелетий до нашего летосчисления. Власть в Египте постепенно взяли в свои руки наиболее богатые люди во главе с фараоном. Многие из простых людей Египта, которые обеспечивали страну хлебом и всем необходимым, были превращены в рабов. Трудом рабов были построены знаменитые египетские пирамиды. В них хоронили фараонов и замуровывали предметы, которыми умершие пользовались при жизни, в том числе и свитки папирусов. Папирус (тонкая, длинная, узкая полоска, сделанная из листьев тростника) заменял в то время бумагу. На нем грамотные египтяне особыми знаками — *иероглифами* записывали наиболее важные события, происходившие в государстве, а также передавали знания следующим поколениям.

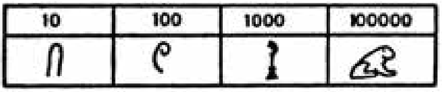
Папирусы, пролежав в хранилищах пирамид около 40 веков, сохранились до наших дней.

Расшифровав египетские папирусы, ученые узнали, как жили древние египтяне. За 2000 лет до н. э. народы Египта достигли довольно высокой культуры и заложили основы многих разделов науки, в том числе и математики.



Египетские писцы составляют опись погребальных принадлежностей фараона Мастаба Ахетотена (2450—2290 до н. э.).

1	2	3	4	5
I	II	III	IIII	III II



Изображения цифр древними египтянами.

Снимок части папируса. В четвертой колонке написаны числа египетскими цифрами.

Некоторые из прочитанных папирусов представляют руководства по математике того времени. Из них видно, что в цифрах египтян отразилась окружающая их природа. Вначале египтяне изображали единицу в виде палки или посоха, цифру десять рисовали как две соединенные вместе руки, сто — в виде свернутого листа пальмы, тысячу изображали как цветок лотоса, а рисунок лягушки означал число 10 000. Такое большое число изображали в виде лягушки, может быть, потому, что после разлива Нила их очень много появлялось на берегах реки. Постепенно рисунки цифр упрощались и приобретали современный вид, и лишь при богатом воображении можно представить их древние прообразы.

4. Двуречье — колыбель человечества. Глиняные книги

В Передней Азии находится широкая долина. По ней с севера на юг несут свои воды две крупные реки — Тигр и Евфрат, которые и дали этой долине название — Двуречье. Многие тысячелетия Тигр и Евфрат во время разливов оставляли по своим берегам ил, сделавший долину сказочно плодородной.

Изобилие солнечного тепла, света, влаги, почва, обогащенная питательными веществами, наличие природных строительных материалов создали отличные условия для жизни в этом крае. Двуречье уже в глубокой древности стало наиболее удобным местом обитания людей.

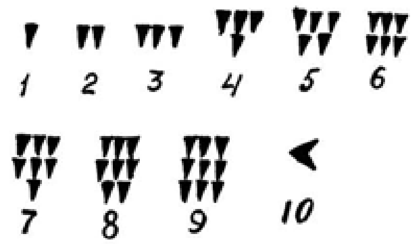
Народы, поселившиеся в Двуречье, раньше других научились обрабатывать землю, разводить скот, строить жилье, делать из глины посуду и кирпич, ткать и ковать. Южную часть Двуречья заселили *шумеры,* а северную — *аккадяне.*

В IV тысячелетии до н. э. у шумеров сложилось рабовладельческое государство. Шумеры говорили на своем языке и раньше других народов открыли способ записывать слова на глине. Для этого грамотный шумер готовил мягкие глиняные пластинки и особой палочкой выдавливал на них клинышки. Затем пластинки сушили, прокаливали на солнце, и они становились такими прочными, что многие сохранились до наших дней. Свыше 60 тысяч клинописных табличек найдено при раскопках города Ур на реке Евфрат. Расшифровав эти глиняные книги, ученые узнали, как жили народы Двуречья.

5. Шекель, мина, талант

В III тысячелетии до н. э. в Двуречье шумеры и аккадяне образовали могущественное государство, которое впоследствии назвали Вавилон. Главный город его имел то же название.

Шумеры и аккадяне имели собственные денежные единицы. У



Счетная пластинка шумеров.

аккадян единицей расчета был шекель (или сикля), который составлял примерно 8,5 г серебра, а у шумеров — более крупная единица (мина). После объединения этих народов в государство сохранились обе денежные единицы. При расчетах мину стали ценить в 60 раз дороже шекеля.

Два писца составляют опись военных трофеев ассирийского царя. Рисунок утраченной настенной росписи неоассирийского периода.

В Вавилоне быстро развивались хозяйство и торговля. Для облегчения расчетов потребовалось установить еще более крупную денежную единицу — талант (иначе — билта), который, подобно мине, содержал 60 более мелких единиц (талант = 6 минам, мина = 60 шекелям).

Некоторые ученые предполагают, что соотношение таланта, шекеля и мины сказалось на развитии вавилонской системы счисления и нумерации. Она зародилась у шумеров в IV тысячелетии до н. э.

В вавилонской системе счисления первые пять чисел имели особые названия, и записывали их палочками на глиняных плитках в виде клинышков — 1 —  , 2 —  , 3 —  и т. д. Числа больше 5 собственных названий не имели. 6 называли «пять и один», 7 — «пять и два», 8 — «пять и три», 9 — «пять и четыре» и обозначали соответствующим числом клиньев. Число 10 называли особым словом (термином) и выдавливали в виде широкого лежащего клина  . Некоторые другие числа также имели специальные названия.

Все числа изображали сочетанием двух знаков — узким клином, обращенным вершиной острого угла вниз, и лежащим широким клином. Этих знаков было достаточно для записи небольших чисел.

Существование особых названий для чисел 1, 2, 3, 4, 10, 20 говорит о том, что эта числовая система возникла из счета на пальцах. При записи чисел от 1 до 59 вавилоняне десятичной системой не пользовались. При чтении записанных чисел им приходилось применять сложение, например:

 — это 20+1, т. е. 21.

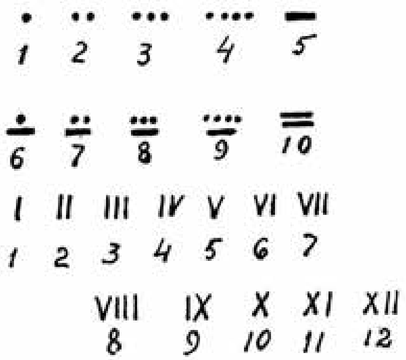
С развитием земледелия и мореплавания в Вавилоне возникла потребность в календаре. Для его составления вавилонские мудрецы должны были продолжительное время наблюдать за движением небесных светил, делать вычисления с большими числами, что способствовало развитию и совершенствованию системы счисления. Вначале она не имела нуля, поэтому запись  можно было прочитать как 60+20+3, т. е. 83, или: 60•60+20+3=3623. Значительно позже (V в. до н. э.) в вавилонских записях появился знак  , который выполнял роль нуля. Применяя его, число 3623 записывали так:  . Первый клин обозначал 3600, за ним был знак, который указывал, что пропущен один разряд.

Влияние вавилонского шестидесятеричного счисления сохранилось до наших дней. Это от вавилонян пришло к нам деление одного часа на 60 минут, одной минуты на 60 секунд. По правилам вавилонских мудрецов мы и теперь делим окружность на 360 градусов.

Вот как долго хранятся в памяти человечества остатки вавилонского счисления!

6. Цифры у разных народов

В Центральной Америке живет племя индейцев *майя.* В древности оно заселяло полуостров Юкатан. В то время люди этого племени занимались подсечно-огневым земледелием, охотой, рыбной ловлей. В начале I тысячелетия у них появились города с каменными сооружениями. Наиболее сведущие люди племени уже тогда знали письменность и были знакомы с началами математики. Они придумали специальные знаки для записи чисел. Эти

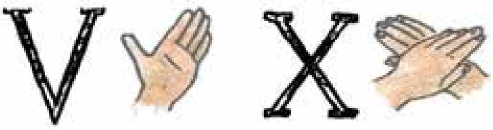


Постепенное видоизменение цифр с течением времени.

знаки, выполняющие роль цифр, были удобны для чтения, но для их записи требовалось довольно много времени.

Древние римляне изобрели свой способ обозначения чисел. Они записывали числа черточками, и времени для этого требовалось меньше. Это обозначение чисел иногда используется и в наше время, например, на циферблатах часов, для указания веков и пр.

Ученые предполагают, что римская пятерка — это упрощенное изображение руки с пятью растопыренными пальцами, а десять — это две сложенные вместе пятерни.



Предполагаемое происхождение римских цифр «пять» (V) и «десять» (X).

Древнейшие дошедшие до нас на плитах и осколках камней цифровые греческие знаки представляют собой черточки и кружки. Так, число 123 записывалось: ○=III. Кружок означал 100, горизонтальная черта — 10 и вертикальная палочка — 1.

Числа до 10 в то время (XVII—XII вв. до н. э.) обозначали набором вертикальных черточек. Затем (VII—V вв. до н. э.) в Греции стали употреблять так называемые *геродиановы знаки* — начальные буквы названий чисел: Π — пять (по-гречески «пенте»), Δ — десять (дека), Η — сто (гектон), Χ — тысяча (хилиой), Μ —

10 тысяч (мириой). Числа до 5 обозначали черточками. Позже (около пятисотого года до н. э.) в Греции изобрели алфавитную нумерацию. Если геродиановы знаки представляли первые буквы названий чисел, то в алфавитной нумерации первые девять букв алфавита с черточкой над буквой обозначали по порядку десять первых цифр (α, β, γ...), а буквы, расположенные в алфавите ниже, обозначали полные десятки и сотни. Алфавитная нумерация, но в более совершенном виде, перешла от греков к славянам.

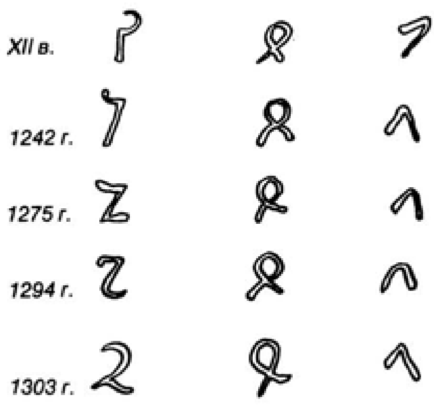
Современные, так называемые арабские, а вернее индийские, цифры были изобретены значительно позже. Они ведут свое начало от цифр, изобретенных в Индии. Там впервые были введены не только удобные цифры, но и способ их записи, принятый теперь во всем мире. Именно в Индии открыт десятичный, или десятеричный, позиционный счет и способ записи чисел, которыми теперь пользуются все.

У индийцев цифры, десятеричный способ счета и запись чисел позаимствовали арабы. В Европу эти цифры и систему записи чисел завезли из арабских стран итальянские купцы. Они сразу заметили, что запись чисел таким способом удобна и экономична по времени. В наше время общепризнано, что нет ни одного достижения в области математики, равного по своему значению этим изобретениям безвестных древнеиндийских математиков.

В книгах нашей страны индийские (арабские) цифры впервые появились в 1692 г. До этого у нас пользовались славянской нумерацией. В ней цифры обозначали буквами.

Следует заметить, что применение букв для обозначения цифр говорит о том, что письменность была изобретена раньше цифр.

Современный вид цифры приняли в результате постепенного и длительного совершенствования. На рисунке показано, как менялись очертания цифр 2, 4 и 7.



Эволюция цифр.

Упражнения и задачи

1. Число  записать римскими цифрами.
2. Сколько разных двузначных чисел можно записать тремя цифрами: 1, 2, 3?
3. Сколько трехзначных чисел можно записать тремя разными цифрами, чтобы знаки в записи не повторялись?
4. Попробуйте изобрести несколько новых простых знаков для цифр 5, 6, 7, 8, 9. Просто ли это сделать?
5. Запишите индекс своего почтового адреса установленными на почте символами.
6. В записи 2****7 заменить звездочки четырьмя цифрами так, чтобы сумма любых трех соседних чисел составляла 10.

7. Как записывают числа в нашей десятичной системе счисления

Для записи любого числа мы теперь пользуемся десятью знаками-цифрами, из которых девять называют значащими, а десятую — нулем.

Вспомним, как мы читаем число, записанное цифрами. Чтобы прочитать, например, число 3604, мы смотрим, на каком месте от конца стоит первая цифра, затем по порядку — вторая, третья и т. д. После этого в уме производим сложение. В записанном числе впереди стоит цифра 3. Она занимает четвертое от конца место — место тысяч. Следовательно, в числе 3 тысячи. Вторая цифра — 6 занимает место сотен, т. е. в числе 6 сотен. Десятки обозначены нулем, — значит, в этом числе десятков нет. Наконец, четвертая по порядку цифра указывает число единиц. В уме складываем: 3 тыс. +6 сот. + 4 ед., а всего три тысячи шестьсот четыре. Итак, все число мы представили в виде отдельных ступенек — тысячи, сотни, десятки, единицы, которые затем сложили. В математике такие ступеньки называют *разрядами*. Первый разряд — единицы. Десять единиц составляют единицу второго разряда — разряда десятков. Десять десятков образуют единицу следующего разряда — разряда тысяч. Дальше идут разряды десятков тысяч, сотен тысяч, миллионов и т. д.

В основе нашей системы счета лежит десяток, поэтому ее называют *десятичной* или *десятеричной*. Кроме того, значение цифры в записанном числе зависит от места, которое она занимает: единица на втором месте от правого края — это 10, а та же единица на третьем месте — уже 100. Вот почему эту систему называют *поместной* или *позиционной* десятичной системой. Отсутствие единиц какого-либо разряда в современной системе указывается нулем. При чтении числа мы не называем нуль, но учитываем его.

Поместная, или позиционная, система записи чисел впервые изобретена в Древнем Вавилоне. В Индии, зная позиционную систему, применили ее к десятичной. Возникла десятичная позиционная система, которая оказалась практически более удобной. Так зародилась современная десятичная позиционная система счисления.

Первое известное нам применение этой системы относится к 595 г. До наших дней сохранилась древняя плита, на которой число 346 записано в десятичной позиционной системе. Однако индийцы пользовались этой системой записи чисел значительно раньше, хотя более ранних примеров этой записи до нас не дошло.

Десятичная позиционная система счисления так проста и вместе с тем так мудра, что до сего времени ее считают величайшим изобретением в мире.

8. Открытие нуля

На первых этапах развития математики люди не ощущали надобности введения нуля. Для счета и действий с небольшими числами он не требовался. Самые древние числа шумеров, которые записывали в шестидесятеричной системе клинообразными знаками, нуля не имели. Например, число 83 они записывали знаками $\vee\ll\vee\vee\vee$, где $\vee$ — 60, $\ll$ — 20, $\vee$ — 1. Изменив лишь промежуток между первым клином и десяткой, это число читали как 3623, так как первый клин перед пустым местом означал 60 · 60,

Бронзовая статуя Шивы в иконостасе Винадхары (покровителя наук и искусств), XI в. В индийской числовой символике на санскрите слово «рудрасья» (пятиликий Шива) означает число 5.

т. е. 3600. Такая неопределенность в записи чисел, особенно больших, вносила путаницу в расчеты. Это проявилось прежде всего при астрономических вычислениях, которыми вавилоняне успешно пользовались, удовлетворяя потребностям календаря и мореплавания.

В клинописных записях вавилонян (приблизительно V в. до н. э.) обнаружены на месте пустот знаки такого вида . Такие знаки стали писать, чтобы указать, что в этом числе пропущен один разряд. Учитывая значение указанного символа, число

 нужно читать как

60 · 60 + 10 + 10 + 1+1+1, т. е. три тысячи шестьсот двадцать три. Указанный знак у вавилонян выполнял роль нуля, но они не додумались ставить его при необходимости в конце числа. Потребовалось еще около 10 веков, чтобы окончательно решить, где и когда нужно применять нуль и означает ли он число или только цифру.

В индийской математике первоначально нуль тоже отсутствовал.

Продолжительное время и в Индии пользовались десятичной системой, но она не была позиционной. Видимо, после знакомства с вавилонской системой счисления индийские математики стали применять позиционную десятичную систему счисления и запись чисел посредством девяти значащих цифр. После распространения десятичной позиционной системы математики Индии, называя число, например, 3971, говорили: три, девять, семь, один.

Перестановка слов в названии числа не допускалась, так как тогда это было бы иное число. Такой способ счета дал повод неизвестному нам гениальному математику при записи чисел не отмечать каждый раз словом или знаком разряд числа, но располагать разряды числа в строго определенном порядке: на первом месте — единицы, на втором — десятки и т. д., т. е. поступать так, как это делаем теперь мы. В случае отсутствия какого-либо разряда индийцы ставили точку. Так, число 5 · 1 означало 501. Читая его, произносили: пять, сунья, один. *Сунья* в переводе означало «пусто». В V—VI вв. вместо точки стали писать кружок, который со временем преобразовался в нуль. Индийцы и его называли *сунья*.

Самую древнюю китайскую математическую книгу относят к X в. до н. э. В то время китайцы пользовались пятеричной системой счисления, но затем ее место заняла десятичная система. Их девять цифр обозначались в виде палочек: 𝍠 — 1, 𝍡 — 2, 𝍢 — 3, 𝍣 — 4, 𝍤 — 5, 𝍥 — 6, 𝍦 — 7, 𝍧 — 8, 𝍨 — 9. Располагать палочки можно было и по-другому. Например, число 6729 можно было записать так: 𝍥 𝍦 𝍡 𝍨 . К применению нуля китайцы пришли значительно позже.

Математики Древней Греции долгое время пользовались буквенной нумерацией и нуля не применяли.

Арабы позаимствовали в Индии цифры, систему счисления и записи чисел. Слово *нуль* они перевели на свой язык и вместо *сунья* говорили «сифр». В X—XII вв. индийская система счисления через арабов проникла в Европу, слово *сифр* не перевели, а немного видоизменили сначала в слово *шифр*, а позже в слово *цифра*.

Самый древний документ в Европе, в котором для нуля имеется свой знак (0), относится к IX в. В одной из книг, написанной на латинском языке в XIII в. (тогда все научные работы писали по-латыни), нуль назван «кружок, или цифра, или знак ничего». С тех пор за ним утвердилось название «фигура нуль», что означало «никакой знак». Словом *цифра* стали называть знаки, обозначающие число единиц в любом разряде, в том числе цифрой назвали и единицу, а позже и сам нуль.

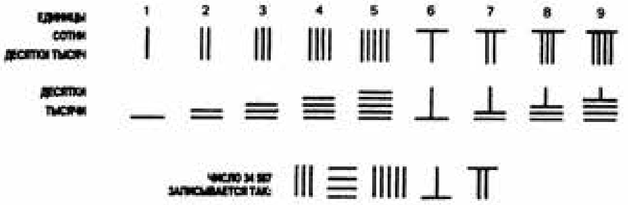
В первом русском учебнике «Арифметика», напечатанном в 1689 г., нуль назван цифрой или ничем. Спустя несколько лет и в России знак 0 стали называть нулем, а знаки чисел 1, 2, 3, 4 ... 9 называли цифрами.

Однако и на этом открытие нуля не закончилось, хотя он приобрел свой вид, получил название, обрел свое место. Но не было решено — нуль цифра или число; если число, то какое: четное или нечетное?

В результате длительных обсуждений математики пришли к заключению: нуль — это число, обозначают его цифрой 0, к натуральному ряду он не принадлежит. С нулем можно производить все действия, за исключением деления на нуль, но сам нуль можно делить на любое число, а также и на

КИТАЙСКАЯ СИСТЕМА ИЗОБРАЖЕНИЯ ЧИСЕЛ

К 3 в. до н. э. в Китае для записи чисел стали использовать палочки. Единицы записываются вертикально, десятки — горизонтально. Величина символов определяется их положением:



два, поэтому нуль отнесли к четным числам. В ряду целых чисел нуль поместился на границе между отрицательными и положительными числами.

9. Пятеричная и десятеричная системы счисления

Считать можно по-разному. Например, сосчитал до пяти — загни палец правой руки. Сосчитал еще пять предметов — загни второй палец той же руки и т. д. Когда все пальцы правой руки загнуты, то загибают один палец на левой руке, а пальцы правой руки разгибают. Дальше счет продолжают снова, загибая пальцы своей правой руки или другого человека.

Пять загнутых пальцев правой руки означают $5 \cdot 5 = 25$, три загнутых пальца левой руки выражают число $25 \cdot 3 = 75$, пять пальцев той же руки означают число $25 \cdot 5 = 125$.

Такой способ счета называют *пятеричным,* так как в его основе лежит число пять. Пятеричной системой счета пользовались папуасы с острова Новая Гвинея. Об этом написал русский этнограф и путешественник Н. Н. Миклухо-Маклай (1846—1888).

Современная *десятеричная,* или десятичная, система счета сложилась несколько тысячелетий назад одновременно у многих народов. В основе этой системы оказалась десятка благодаря тому, что у человека на руках 10 пальцев, которыми при счете он постоянно пользовался. Однако некоторые народы в древности пользовались смешанной пятерично-десятеричной системой счисления. Примером, подтверждающим это, служит римская нумерация. В римской нумерации имеются особые знаки (цифры) для обозначения пяти — V, десяти — X, пятидесяти — L, ста — C, пятисот — D.

10. Различные способы счета и нумерации

Самый простой счет — это счет двойками. В этом счете за основу взято число два. Две единицы образуют уже второй разряд — разряд двоек, две двойки — это третий разряд — разряд четверок. Следующий разряд — это восьмерки и т. д.

Число в *двоичной* системе изображается только двумя цифрами — единицей и нулем. Единица второго разряда — это два. Единица третьего разряда — четыре, так как $2 \cdot 2=4$. Единица четвертого разряда — восемь, так как $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, пятого — $8 \cdot 2 = 16$ и т. д.

В двоичной системе число 101 — это не сто один. В этом числе последняя цифра — разряд единиц — один. Нуль показывает, что второго разряда, т. е. двоек, нет. Первая в числе единица — это единица третьего разряда, т. е. четверка; следовательно, 101 — это $4 + 0 + 1 = 5$. А в числе 1110 по двоичной системе единиц нуль, т. е. их нет. Во втором разряде — одна двойка, в третьем — одна четверка, в четвертом — цифра 1 означает, что в этом случае ее надо принять за 8. Все число составит 8 + 4 + 2 + 0 =14.

Счет двойками в наше время сыграл большую роль при создании электронно-вычислительных машин. Все первые электронно-вычислительные машины работали на двоичной системе счета. Теперь в таких машинах используют

Календарь индейцев из племен майя и ацтеков.

не только двоичную, но и другие системы счисления, что позволяет увеличить скорость действия машин.

Вычисления в двоичной системе счисления самые простые, но они требуют длинных записей, на что тратится много времени.

В прошлом некоторые народы продолжительное время при счете применяли двоичную систему счисления. Например, в Австралии были племена, которые считали так: один — это «энэа», два — «петчевал», три — «петчевал-энэа», т. е. два и один, четыре — «петчевал-петчевал» (два и два) и т. д.

Первоначально и в Древнем Египте считали двойками, что подтверждают записи в более древних папирусах.

В начале нашего летосчисления жители Америки — индейцы племени майя достигли высокого развития культуры. У них была своя письменность. Они создали свою систему счисления и разработали систему символов для записи чисел.

Их система счисления была *двадцатеричная*. Числа в этом племени записывали в столбик — снизу вверх. Первые 4 числа они обозначали точками, 5 — черточкой, 10 — двумя горизонтальными черточками, похожими на наш знак равенства. Знак ракушки имел у них значение нуля. Точка с ракушкой под ней — это двадцать, а две двадцатки — две точки с ракушкой, подобно нашей записи: два и нуль — 20.

Ученые племени майя раньше других сделали многие открытия, в частности изобрели нуль, но, так как они не имели связей с другими народами, их достижения не повлияли на развитие науки в Евразии.

В России не так давно многие предметы считали дюжинами. Дюжина — это 12. Дюжинами считали ножи, ложки, карандаши, тарелки и пр. Следующий разряд при счете дюжинами $12 \cdot 12$ имеет свое название — *гросс*. Гросс листов бумаги состоял из 144 листов. Остатки *двенадцатеричного* счета сохранились до сих пор; например, в году 12 месяцев.

11. Малый счет у славян

Наши не очень далекие предки славяне, как и многие другие народы, долгое время пользовались для сохранения чисел зарубками на палочках. Один из таких древнейших памятников представлял собой кость с 55 зарубками, расположенными по пять в каждом ряду. Ученые определили, что эта кость пролежала в земле около 5000 лет и на ней, вероятно, записано число трофеев первобытного охотника.

Палочки с зарубками славяне называли *бирками,* и на Руси ими пользовались неграмотные люди еще в начале XX в. На палочке-бирке делали надрезы. Число надрезов указывало, например, размер долга или количество взятого зерна. Палочку раскалывали на две части, одну из которых брал должник, а другую хранил как расписку тот, кто давал в долг. При окончательном расчете обе половинки бирки складывали. Такой способ записи чисел существовал и у некоторых других народов. Так, в Англии при учете налогов на крестьян также пользовались бирками. Когда в 1834 г. было решено уничтожить долговые обязательства, то в лондонском казначействе начали сжигать огромное количество бирок. Костер был таким большим, что огонь перекинулся на само здание, и оно полностью сгорело.

В середине IX в. был создан церковнославянский алфавит, который в конце X в. стал довольно быстро распространяться на Руси. Тогда же алфавитом стали пользоваться и для записи чисел, подобно греческой алфавитной нумерации. В славянской нумерации цифры обозначали буквами с особым над ними значком — *титло.* Буквы от *а* до *і* в порядке их следования в алфавите обозначали единицы. Называли их в то время *персты* (пальцы). Числовое значение буквы определялось ее местом в порядке алфавита, например: а҃ — 1, б҃ — 2, г҃ — 3 и т. д. Буквы от *і* до *п* обозначали десятки, следующие буквы обозначали сотни.

В то время славяне пользовались двойной нумерацией: одну называли *малый счет,* а другую — *великий счет.* Малый счет позволял считать до 10 000. В самых ранних рукописях это число называли *тьма,* т. е. число, которое трудно представить. Числа 11, 12 и т. д. до 20 записывали двумя буквами, например: а҃і — 11, где а҃ — 1, і҃ — 10, в҃і — 12, где і҃ — 10, в҃ — 2, ѕ҃і — 16. В двузначных числах на первом месте стояли единицы, а на втором — десятки. Отсюда пошли названия: одиннадцать — «один на десять», семнадцать (*дцать* — сокр. *десять*) — «семь на десять», двадцать — «два на десять» и т. д. При записи многозначных чисел титло ставили только на первом знаке. В числе 25 писали сначала 20 — К, а затем 5 — є҃, т. е. к҃є, и называли эти числа в порядке записи цифр — «двадцать пять».

Числа, содержащие тысячи,

Славянская алфавитная нумерация чисел до 800.

а҃	в҃	г҃	д҃	є҃	ѕ҃	з҃	и҃	ѳ҃
аз	ве́ди	глаго́ль	добро́	есть	зело́	земля́	и́же	фита́
1	2	3	4	5	6	7	8	9
і҃	к҃	л҃	м҃	н҃	ѯ҃	ѻ҃	п҃	ч҃
и	ка́ко	лю́ди	мысле́те	наш	кси	он	поко́й	червь
10	20	30	40	50	60	70	80	90
р҃	с҃	т҃	ѵ҃	ф҃	х҃	ѱ҃	ѡ҃	ц҃
рцы	сло́во	тве́рдо	ук	ферт	хер	пси	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900

славяне записывали с особым значком впереди, например: ҂го҃в , где г҃ — 3, о҃ — 70, в҃ — 2. Значок ҂ , стоящий перед числом, указывал на то, что первое число означает тысячи, поэтому его надо прочитать «три тысячи семьдесят два».

Из общего порядка названий круглых десятков выделяются два числа — 40 и 90. В названиях этих чисел нет обычной для других чисел частицы *дцать* (двадцать, тридцать). Слово *сóрок* (и имеющее тот же смысл *сорочóк*) родственно слову *сорочка* (рубаха). Предполагают, что в древние времена на шитье мехового кафтана или шубы шла связка шкурок куницы или соболя, которую называли *сóрок*. Подобную связку, но более дешевых шкурок, например беличьих, называли сорочком. Сороками или сорочками, т. е. наборами шкурок на один

кафтан, считали количество мехов. Позже название *сорок* распространилось на число 40.

Слово *девяносто* является производным от сочетания слов *девять до ста,* так как от 90 до 100 есть еще девять единиц. При этом в слове *девяносто* звук [**н**] включен для облегчения произношения — вначале он отсутствовал.

Слово *сто* позаимствовано из латинского *центум. Цент* входит во многие слова, пришедшие из латинского языка, например: *центурион* (сотник в римских войсках), *центнер, процент* и др.

Упражнения и задачи

1. Какое самое большое число можно записать тремя знаками (цифрами) в десятичной системе счисления, в двоичной системе счисления?
2. На одной из египетских пирамид сохранилось число 2520, записанное иероглифами. Оно интересно тем, что делится на все однозначные числа. Проверьте!
3. Вычислите суммы пар чисел-перевертышей: 12 и 21; 123 и 321; 1234 и 4321. Заметьте свойства сумм таких чисел и, пользуясь ими, не вычисляя, найдите: 12 345 + 54 321, 123 456 + 654 321. Проверьте сложением.
4. Какой высоты получится столбик, если кубический дециметр разрезать на кубические сантиметры, а полученные маленькие кубики поставить один на другой?
5. Сколько необходимо использовать цифр, чтобы записать все двузначные числа?

---

12. Как маленькая Греция стала великой

В XIV—XII вв. до н. э. к северу от Египта на побережье Средиземного моря и на его островах расселились немногочисленные греческие племена. С течением времени они стали объединяться и образовали свои города-государства. Греческие государства так же, как Вавилон и Египет, были рабовладельческими.

В VI в. до н. э. в наиболее крупных греческих городах произошли восстания. Восставшие свергли правителей, а управлять городами-государствами стали собрания (агора) свободных граждан. Право выбирать в агору имели только мужчины. Хотя рабство в Греции сохранилось и рабы оставались бесправными, даже ограниченное участие народа в управлении государством принесло удивительные результаты. Хозяйство и культура греческих городов-государств стали быстро развиваться и достигли невиданного для тех времен расцвета.

Греки отличались трудолюбием и смелостью. Среди них были отличные строители, мореплаватели, купцы, художники. Корабли греков ходили под парусами и на веслах по водам Средиземного и Черного морей, а по рекам поднимались далеко в глубь соседних стран. Общаясь с другими народами, греки осваивали новые ремесла, научные достижения близких и дальних соседей. Они, например, не только овладели знаниями египетских жрецов и вавилонских мудрецов, но и внесли большой вклад в развитие культуры и науки. Особенно много сделали греки в области создания основ математической науки. Этому способствовало то, что с конца V в. до н. э. в одном из крупных греческих городов-государств — Афинах стали собираться лучшие ученые Греции.

Еще в VIII—VII вв. до н. э. греки переняли от других народов наиболее удобный и простой способ письма, а затем усовершенствовали его. Для нумерации чисел греческие математики придумали алфавитную нумерацию. Первая буква их алфавита — альфа обозначала 1, вторая — бета — 2 и т. д.

Между отдельными греческими городами-государствами не раз

Панорама Александрии. Рисунок В. Григоровича-Барского, 1730 г.

возникали ссоры, которые нередко приводили к войнам. Однако, когда на Грецию обрушился страшный враг — многочисленное персидское войско, греки объединились и разгромили захватчиков, несмотря на то что армия греков была в несколько раз малочисленнее войск персидского царя. Это событие произвело весьма сильное впечатление на всех соседей Греции.

В середине IV в. до н. э. многие греческие города вступили в союз с соседней Македонией. Весной 334 г. до н. э. объединенные войска во главе с молодым Александром Македонским выступили в поход. За несколько лет армия Александра Македонского подчинила себе многие народы и захватила громадную территорию, в том числе Вавилон и Египет. Однако после смерти полководца (323 г. до н. э.) его огромная держава распалась на ряд государств.

Большое влияние на дальнейшее развитие культуры и науки оказала вновь сложившаяся держава Птолемеев. Она находилась на бывших землях Египта, а главным ее городом была Александрия, основанная Александром Македонским на берегах Нила и Средиземного моря. Город быстро разрастался и вскоре стал мировым портом и центром мировой культуры и науки. В начале III в. до н. э. греки создали в этом городе Александрийскую академию, для которой воздвигли великолепное здание. При академии была собрана богатейшая библиотека. В самой Александрийской академии постепенно сосредоточились лучшие ученые, инженеры и архитекторы того времени, имена которых вписаны золотом в историю науки. Александрийские ученые внесли большой вклад в развитие многих наук, в том числе и математики.

13. Архимед

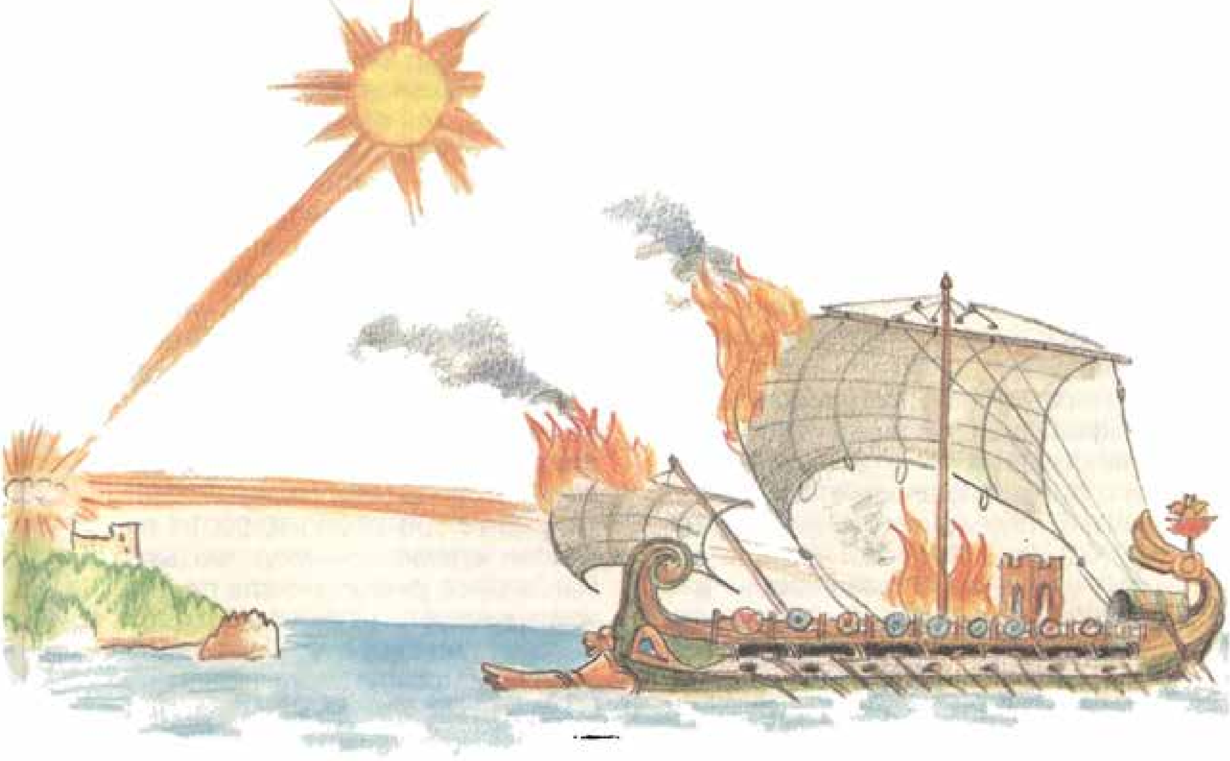
В Средиземном море есть остров Сицилия. Прошло уже больше двадцати двух столетий с тех пор, как на этом острове в городе Сиракузах в греческой семье родился мальчик, который впоследствии под именем Архимеда стал известен всему миру как величайший математик.

Отец мальчика Фидий — выдающийся для того времени астроном и математик — много внимания уделял воспитанию сына. Архимед развивался необычайно быстро, впитывая все, чему учил его отец. Довольно скоро настало время, когда в своих познаниях ученик перерос учителя. Тогда Архимед с согласия своего отца отправился в Александрию — мировой центр науки и культуры.

В Александрийской академии Архимед вместе с другими молодыми людьми продолжил образование у самых знаменитых ученых того времени. Он внимательно и прилежно изучил многие рукописи из семиста тысяч, хранившихся в Александрийской библиотеке. Постигнув высоты науки древних мудрецов, Архимед возвратился в родные Сиракузы. Здесь он нашел широкое поле деятельности для пользы своего отечества. Необыкновенная работоспособность, глубокие знания позволили Архимеду сделать ряд замечательных открытий и изобретений. Он изготовил прибор и с его помощью измерил поперечник (диаметр) Солнца. Сделал небесный глобус, который вращался струей падающей воды. На этом глобусе можно было наблюдать движение планет, солнечные и лунные затмения, смену фаз Луны. Архимед руководил постройкой машины «улитка», которая орошала поля; изобрел винт, вращая который можно было перекачивать по трубе жидкость (винт, подобный Архимедову, используется в виде шнека в современных мясорубках и в ряде машин), разработал систему блоков и рычагов, которая позволяла передвигать громадные тяжести. Это далеко не полный перечень изобретений замечательного ученого. Архимеду приписывают крылатую фразу: «Дайте мне точку опоры — я поверну Землю». До нас дошло 9 математических сочинений Архимеда. Ряд его работ имеют вид посланий к друзьям и коллегам. Как физик Архимед открыл закон, устанавливающий условия, при которых тело, погруженное в жидкость, плавает или тонет, а также обосновал закон рычага.

Своими трудами и открытиями ученый так поразил своих совре-

менников, что о нем сложили легенды. В одной из них говорится, что Архимед, с помощью созданных им механизмов, легким движением руки спустил с берега в воду тяжелый корабль, который не могли сдвинуть с места несколько десятков рабочих. В другой легенде сказано, что посредством многих зеркал Архимед направил солнечные лучи на вражеский корабль, и он вспыхнул. Огонь перекинулся на другие суда, в результате сгорел весь римский флот. В то время римляне вели войну с сицилийским городом-государством Сиракузы и в продолжение трех лет не могли взять главный город. Оборону Сиракуз возглавлял Архимед. Под его руководством были изготовлены разнообразные невиданные до тех пор метательные орудия. Во время осады Сиракуз мощные метательные машины забросали осаждавших город римлян тяжелыми камнями. Предполагая, что от камней можно укрыться у самых стен города, вражеские воины кинулись туда. В это время легкие метательные машины близкого действия стали поражать их градом ядер. Попытка подойти к городу с моря также не



удалась. Мощные подъемные механизмы захватывали корабли крюками, поднимали их вверх, а затем бросали так, что карабли переворачивались и тонули. Римляне вынуждены были отказаться от штурма города. Только после длительной осады Сиракузы вследствие измены были взяты римскими войсками в 212 г. до н. э.

Архимед был убит римским воином в то время, когда он чертил на песке геометрические фигуры, пытаясь отыскать новые их свойства.

В наши дни еще довольно часто говорят: «Звезд на небе, как песчинок в море: их не счесть». А вот Архимед решил пересчитать все песчинки не только в море, но и во Вселенной. Этот подсчет он описал в своей работе «Псаммит», что в переводе значит «исчисление песчинок».

Во времена Архимеда пользовались изобретенной в Греции алфавитной нумерацией. Цифры обозначали буквами алфавита, а над ними ставили короткие черточки, чтобы не путать цифры с буквами.

Первые по порядку 9 букв алфавита обозначали числа 1—9. Например: 1 — $\bar{\alpha}$, 2 — $\bar{\beta}$, 3 — $\bar{\gamma}$ и т. д. Следующие за этими буквами 9 букв обозначали числами 10, 20, 30 и т. д. Число 10 000 называли *мириада* и обозначали $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$, 20 000 обозначали $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$. Таким способом можно было записать все числа до мириады мириад (единица с 8 нулями, или 10^8). Более крупными числами пользовались редко, и поэтому они названий не имели.

Архимед разработал особую систему для записи сколь угодно больших чисел и изложил ее в своем сочинении «Псаммит». В нем он предположил, что Вселенная — это сфера, т. е. имеет форму шара с поперечником (диаметром) в 1000 раз большим, чем расстояние от Земли до Солнца. Он вычислил расстояние от Земли до Солнца, а затем и объем Вселенной.

Представив, что в маковом зернышке (а оно очень мало) содержится мириада песчинок, Архимед подсчитал, сколько песчинок можно вместить в сферу, диаметр которой в тысячу раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца.

Наибольшая трудность состояла в том, как выразить это невероятно громадное число знаками, принятыми в счислении того времени. Архимеду пришлось придумать особую систему счисления.

Все числа от единицы до мириады (10 000) Архимед назвал *числами первыми*. Иначе говоря, это первый класс в его системе. Мириаду мириад ($10\,000 \cdot 10\,000 = 10^8$) он назвал *единицей чисел вторых* — это второй класс в его системе. Мириаду мириад вторых чисел 10^{16} ($10\,000 \cdot 10\,000 \cdot 10\,000 \cdot 10\,000$) он назвал *единицей чисел третьих*. Как видно, уже это число содержит единицу с 16 нулями, т. е. 10 квадриллионов.

Развивая свою систему дальше и продолжая подсчет, Архимед сумел показать, что таким образом можно выразить сколь угодно большие числа. Он определил, что во все мировое пространство, т. е. в сферу с диаметром, равным 1000 расстояний от Земли до Солнца, можно вместить мельчайших песчинок не больше числа, равного единице с шестьюдесятью тремя нулями (10^{63}). Продолжая построение своей системы, Архимед показал, как расширить принятую в то время систему нумерации, чтобы с ее помощью можно было записывать сколь угодно большие числа.

Архимед решил немало сложнейших проблем своего времени в механике, математике, астрономии.

Великий греческий ученый стал первооснователем начал математической физики и математического анализа.

Упражнения и задачи

1. Прочитайте эти числа и запишите их в десятичной нумерации: поверхность земного шара составляет $510 \cdot 10^6$ км^2; объем земного шара равен $1083 \cdot 10^9$ км^3; среднее удаление Земли от Солнца — $149{,}5 \cdot 10^6$ км.

2. Диаметр Солнца в 109 раз больше диаметра Земли. Радиус Земли — 6371 км. Найдите приближенно диаметр Солнца в километрах.

3. Число 142 857 имеет интересное свойство. Если его умножать последовательно на 2, 3, 4, 5, 6 и выписать в столбик все произведения, то можно заметить, как чередуются цифры в этих произведениях. Проверьте!

4. Чем интересны произведения следующих чисел:

$$1 \cdot 91;\ 2 \cdot 91;\ 3 \cdot 91;\ 8 \cdot 91;\ 9 \cdot 91?$$

Указание. Выпишите их в столбик и проследите порядок изменения цифр.

5. Сколько трехзначных чисел можно записать цифрами 2, 3, 4, 5?

14. Большие числа у древних народов

В Древней Индии математики были в большом почете. «Как Солнце затмевает звезды своим блеском, так ученый человек может затмить славу других в народном собрании, предлагая задачи и тем более решая их», — гласит народная мудрость индийцев.

С давних пор многие мудрецы Индии проявляли интерес к большим числам. И хотя в древних рукописях этого государства не встречается чисел больше миллиона, в более поздних записях можно найти числа, которые в современной нумерации выражаются 17 знаками. А в легендах Индии упоминается, что Будда мог назвать любое число, вплоть до числа, содержащего 54 цифры. Однако даже ученые Древней Индии долгое время не представляли, что натуральный ряд чисел бесконечен. По их понятиям, существовало самое большое число, известное только богам.

В Древней Руси, когда был принят «малый счет», десять тысяч (10 000), т. е. греческую мириаду, называли *тьма.* Это число представлялось нашим предкам столь громадным, что этим же словом они называли всякое множество, которое не могли сосчитать. Даже до наших дней сохранились такие словосочетания: «тьма народу» или «тьма-тьмущая», т. е. число, которое и выразить нельзя, а ведь «тьма-тьмущая» — это всегда сто миллионов — 10 000·10 000. Слово *миллион* появилось в Италии в 1500 г. Придумал его итальянский купец и путешественник Марко Поло (ок. 1254—1324). Вернувшись из долгих странствий по Юго-Востоку Азии, он рассказывал о несметных сокровищах Индии и Китая. Пытаясь выразить словом очень большие богатства этих стран, он сказал не *милле* (что на итальянском языке означало «тысяча»), а *миллионе,* т. е. «большая тысяча». Частица, добавленная Марко Поло к слову *милле,* в итальянском языке означает то же, что в нашем увеличительный суффикс **-ище,** когда, например, говорят не *куст,* а *кустище* или не *нос,* а *носище.* Со времен Марко Поло тысячу тысяч стали называть *миллион.*

С развитием хозяйственной деятельности в XVI—XVII вв. на Руси появилась необходимость выражать и записывать числа, не предусмотренные «малым числом». В это время и было открыто «великое словенское число» — порядок записи больших чисел. В этом порядке записи слово *тьма* уже выражало миллион, его обозначали так: . Числа же до миллиона называли почти так же, как их называют сейчас. Миллион миллионов называли *легион* и записывали значком . Легион легионов, который мы теперь записываем единицей с 24 нулями, называли *леодр* и записывали его

	10^3	тысяща
	10^6	тьма
	10^{12}	легеон
	10^{24}	леодр
	10^{48}	ворон
	10^{49}	колода

Запись больших чисел у славян.

так: . Еще большее число леодр леодров называли *ворон* — . Мы это число записываем единицей с 48 нулями, т. е. 10^{48}. Про число ворон говорили: «Больше сего числа несть разумовати (разумети)». Однако иногда употреблялось еще большее число — единица с 49 нулями, которое называли *колода* — десять воронов. Об этом числе также говорили: «Сего числа несть больше», т. е. числа больше этого нет. Конечно, это утверждение ошибочно, так как самого большого числа назвать нельзя — его не может быть.

Когда в Европе распространилась более совершенная арабско-индийская нумерация, ее позаимствовали и на Руси. Распространение современной нумерации на Руси началось в XVII в., но одна из первых ее записей была найдена на колоколе XIII в. Позднее страницы книг стали нумеровать также индийскими цифрами. Большую роль в популяризации прогрессивного способа нумерации сыграла «Арифметика» (1703) Л. Ф. Магницкого.

15. Как велики большие числа?

В настоящее время, чтобы было легче прочитать многозначное число, мы записываем его с небольшими промежутками (интервалами) между числовыми классами, т. е. после каждых трех чисел, считая справа налево, оставляем пробел, например: 17 840 569.

Первый, кто придумал при написании больших чисел отделять один класс от другого, был итальянский математик Леонардо Пизанский — Фибоначчи (1180—1240). Он предложил для удобства чтения чисел ставить точку после каждых трех цифр или дужку над ними, например: 18.361.503 или 18361503. Но так как впоследствии точкой стали обозначать действие умножения, то, чтобы не смешать запись числа с умножением, точку заменили интервалом (промежутком) между классами цифр. Так и записывают теперь числа, состоящие больше чем из четырех знаков.

Вообразим, что мы сделали книгу, в которой миллион листов. Она будет такой толстой, что 50 человек, став друг другу на плечи, не смогут достать до ее верхней крышки. Толщина такой книги составит 100 метров. Шесть таких книг, положенных одна на другую, будут выше Останкинской телевизионной башни в Москве. Не пытайтесь перелистать такую книгу. Даже если вы будете переворачивать в минуту 80 листов, работая по 7 часов в день, то для этого понадобится целый месяц.

От начала нашего летосчисления до настоящего дня, т. е. почти за 2000 лет, не прошло еще миллиона дней. Миллион дней составит больше двадцати семи столетий.

Еще труднее представить себе величину одного миллиарда, но попытаемся это сделать. Земля — большой шар, и экспедиция Магеллана, впервые обогнувшая земной шар на кораблях, плавала три года без двух недель. Если миллиард людей поставить в ряд плечом к плечу, то они расположатся по большой окружности (по экватору) Земли в 12 рядов.

Из приведенных примеров видно, что числа, выраженные в миллионах и миллиардах, очень велики, но в жизни нередко приходится выполнять разнообразные действия с еще бо́льшими числами. Для облегчения такой работы математики придумали записывать многозначные числа в виде произведения числа на десятку, рядом с которой вверху обозначают число нулей. Так, вместо того чтобы указать массу земного шара числом 6000 000 000 000 000 000 000 т, ученые записывают $6 \cdot 10^{21}$ т. Вот еще несколько больших чисел, записанных сокращенным способом: 10^6 — миллион, а 10^9 — миллиард. Расстояние от Земли до Солнца составляет приблизительно $15 \cdot 10^7$ км, а от Земли до

ближайшей звезды — $403 \cdot 10^{11}$ км. В математике запись 10^3 называют: третья степень числа 10 или десять в третьей степени; 10^4 — четвертая степень числа 10 или десять в четвертой степени и т. д. Начало подобной записи больших чисел положил Архимед при подсчете песчинок, которые он мысленно поместил в сферу, диаметр которой в тысячу раз больше расстояния от Земли до Солнца.

Упражнения и задачи

1. Назовите самое большое семизначное число, округлите и запишите его, используя степень числа 10. Назовите получившееся число.
2. Сколько кубических метров в кубическом километре?
3. Напишите самый большой почтовый индекс.
4. На сколько наименьшее девятизначное число больше наибольшего восьмизначного?
5. Сколько потребуется цифр, чтобы записать все числа, начиная с 1 и кончая тысячью?

---

16. Развитие математических знаний на Руси

Интерес к грамоте и математическим знаниям на Руси возник в связи с практическими потребностями людей в измерениях и расчетах. Сохранились сведения, что во времена князя Владимира Святославича (ум. 1015 г.) в Киевской Руси открыли несколько школ для обучения подростков грамоте и счету. К сожалению, многие древние славянские рукописи, по которым можно было бы судить о развитии математических знаний на Руси, погибли во время многочисленных пожаров и войн. Памятников древней культуры сохранилось очень немного.

Дошедший до нас в нескольких вариантах свод правил и законов — «Русская правда» — был создан во времена и при участии князя Ярослава Мудрого (978—1054). Впоследствии свод дополнялся и перерабатывался сыновьями и внуками Ярослава. В нем имеются статьи, содержащие некоторые сведения из математики тех лет. В них говорится о подсчете урожая зерна, стогов сена, собранных с определенных площадей; о подсчете приплода пчел и животных за несколько лет и процентных денег при уплате заимодавцу, о размерах различных штрафов и др.

Среди древних славян были такие, кто занимался расчетами не только ради практических нужд, но и для собственного удовольствия. Примером таких «числолюбцев» был новгородский монах Антониева монастыря Кирик. Он написал рукопись (1134), в которой подсчитал, сколько месяцев, дней и часов он прожил, число лет, месяцев, недель и дней, прошедших до 1134 г. от начала летосчисления (в то время считали, что прошло 6644 г. от сотворения мира). По рукописи Кирика Новгородского можно судить, что он умел складывать и умножать целые числа, применять дробные числа со знаменателями 5, 25 и 125. Дробные числа он называл *дробными часами*. Можно предположить, что Кирик был не единственным «числолюбцем» древних времен. При раскопках, начатых в 1951 г. в Новгороде, а позже и в других городах, были найдены берестяные грамоты — письма и документы XI—XVI вв., написанные (процарапанные) на березовой коре. По ним можно судить, что в те века на Руси многие мужчины и женщины из народа и даже дети знали грамоту и умели считать, выполняли некоторые действия с числами.

17. Развитие математики в Средней Азии в IX—XV вв.

Народы Средней Азии уже в глубокой древности достигли высокого уровня культуры. Работы арабских ученых стали связующим звеном в распространении открытий в математике из Древней Греции и Индии в Европу. Кроме того, ученые-арабы и сами внесли в математику ряд дополнений, усовершенствований и открытий.

В нижнем течении реки Амударьи находится оазис Хорезм. Древней столицей Хорезма был город Ургенч. Он расположен на левом берегу реки. В этом городе родился и жил крупнейший математик средневековья аль-Хорезми (727 — ок. 850). С помощью его трудов индийские цифры и десятичная позиционная система счи-

Ученые-математики Древнего Востока.

сления получили дальнейшее распространение в мире. В одной из работ Мухаммеда аль-Хорезми, написанной на арабском языке, впервые дано изложение десятичной позиционной нумерации с применением индийских цифр. Другой его трактат по алгебре стал основой создания алгебры как науки.

Соотечественник аль-Хорезми — астроном и математик Абу Рейхан Бируни (X—XI вв.) в начале своей работы «Книга вразумления начаткам науки о звездах» кратко изложил арифметику, алгебру и геометрию в виде вопросов и ответов, что делало знания более доступными для понимания. В других работах Бируни рассмотрены некоторые вопросы из арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии; например, он довольно точно определил размеры Земли.

Таджикский поэт и математик Омар Хайям (XI—XII вв.) написал «Ключ к трудным местам Евклида» и «Алгебру», в которой дана система исследования одного из видов уравнений.

Азербайджанский астроном и математик Насирэддин Туси (XIII в.) прославился созданием замечательной для того времени обсерватории. Он одним из первых стал рассматривать отношение как число и нашел, что с отношениями можно производить действия как с целыми числами. Это позволило расширить и уточнить понятие о числе.

Среднеазиатский ученый-просветитель Улугбек (XV в.) создал в Самарканде знаменитую обсерваторию с таким богатым оборудованием, которого до этого не было нигде в мире. Ученые, работавшие в этой обсерватории, сделали много полезного для развития и астрономии, и математики: они составили звездный каталог и таблицы движения планет.

18. Леонтий Филиппович Магницкий

К концу XVI и в XVII в. в России появились довольно примитивные рукописные руководства по математике, которые имели чисто практическое назначение, т. е. рассказывали, как производить простейшие арифметические действия и измерения.

В начале XVIII в. было написано и напечатано типографским способом более совершенное и полное руководство по математике — книга Леонтия Филипповича Магницкого «Арифметика — сиречь (то есть) наука числительная».

В то время в России было немного образованных людей. Отсутствие знающих специалистов тормозило развитие страны. Чтобы исправить это положение, по указу царя Петра I в Москве в 1701 г. была открыта Математико-навигацкая школа. Для работы в ней пригласили преподавателей из-за границы. В первые годы работы этой школы единственным русским учителем был Леонтий Филиппович Магницкий.

Л. Ф. Магницкий родился в 1669 г. в Осташковской слободе, которая находилась на территории нынешней Тверской области. Отец его, по прозвищу Теляшин, был крестьянин. Детство Леонтия прошло в бедности и тяжелом крестьянском труде. В школу он не ходил. Вероятно, он научился читать, писать и считать с помощью кого-либо из грамотных соседей.

В пятнадцать лет его отправили с возом рыбы в Волоколамский монастырь, где оставили для чтения церковных книг. В монастыре отрок в свободное от работы время продолжал заниматься самообразованием. Через некоторое время Леонтий переехал в Москву. Здесь он поступил в Славяно-греко-латинскую академию. Юноша учит латинский и греческий языки, а затем самостоятельно овладевает еще голландским, немецким, итальянским и изучает физику, астрономию, а также математику, прочитав для этого не только славянские рукописи, но и многие работы иностранных авторов.

С открытием Математико-навигацкой школы Л. Ф. Магницкий полностью отдается преподавательской работе. Но с самого начала его деятельность выходила далеко за рамки прямых обязанностей учителя. Он заботился о приобретении мореходных и других инструментов для обучения учащихся, работал самостоятельно и вместе с коллегами над созданием учебников и математических таблиц.

В 1701 г. Л. Ф. Магницкому поручают составить учебник математики. Он проделал большую работу и в том же году сдал рукопись в типографию. В 1703 г. было отпечатано — очень много по тому времени — 24 000 экземпляров его учебника «Арифметика — сиречь наука числительная».

Заглавный лист «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

На рисунке показана первая страница «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. На ней изображен дворец науки. В центре его — царица Арифметика. В ее руке ключ ко всем наукам, названия которых написаны на колоннах, поддерживающих здание науки. Без ключа, которым владеет царица Арифметика, нет доступа к познанию наук. К овладению же наукой арифметикой[1] ведут пять ее основных разделов-ступеней: счисление, сложение, вычитание, умножение, деление.

Автор пишет: «Арифметика, или числительница, есть художество (т. е. искусство. — *А. С.*) честное, независтное, всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее...»

В книге страницы пронумерованы славянскими цифрами — буквами славянского алфавита с титлами, а все числа в тексте напечатаны индийскими (арабскими) цифрами.

Математические названия (термины) Магницкий дал в двух вариантах: в латинском и славянском. Так как в то время в нашей стране многих арифметических терминов еще не существовало, то автору пришлось вводить новые названия для некоторых понятий. Например, нумерацию, или счисление (в то время счисление принимали за особое действие в арифметике), он называет «аддицио или сложение», «мультипликация или умножение».

Перед изложением каждого нового правила Магницкий дает решение простого примера, затем формулирует правило, а дальше

---

[1] Арифметика — один из отделов математики, в котором изложены простейшие свойства чисел и действий с ними. Арифметика возникла в глубокой древности и вначале рассматривала только натуральные числа. Название «арифметика» происходит от двух греческих слов: *аритмос* — «число», *техно* — «искусство», т. е. *числовое искусство.*

приводит набор примеров и задач на данное правило.

В «Арифметике» Магницкий изложил основные сведения из математики того времени: арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии, а кроме того, начатки мореходной астрономии.

В книге автор неоднократно подчеркивает значение математики. По его словам, она ценна тем, что не только помогает решать практические задачи, но и «просвещает ум к принятию множайших наук и высочайших».

«Арифметика» Л. Ф. Магницкого сыграла огромную роль в распространении математических знаний в стране. В течение семидесяти лет она оставалась единственным учебником математики. Не напрасно М. В. Ломоносов, великий русский ученый того времени, назвал «Арифметику» Магницкого и «Грамматику» Смотрицкого «вратами учености».

ЗАДАЧИ ИЗ «АРИФМЕТИКИ» МАГНИЦКОГО

1. Гость купил 8664 овчины, а сторговал 100 овчин по 1,5 рубля; да и продал те овчины, ино ему сходилося со 100 овчин по 8 овчин прибыли. Ино, сколько тот гость за овчины денег платил и что у овчин принял денег, сочти ми.

2. Два гостя хотят товары меняться. Один дает 12 пудов инбирю, пол-третие пуда дает по 3 рубля и по 8 гривен. А другой за весь инбирь дает сахаром по 9 денег фунт сахару. Ино, сколько сахару надобе за тот инбирь, сочти ми.

3. Четыре плотника у некоего гостя нанялись двор ставить. И говорит первый плотник так: только бы мне одному тот двор ставити, Я из-бы де его поставил един годом. А другой молвил: только бы де мне одному тот двор ставити, и яз-бы де его поставил в два года. А третий молвил: только бы мне одному тот двор ставити, и яз-бы де его поставил в три годы. А четвертый так рек: только бы де мне одному тот двор ставити, я из-бы де его поставил в четыре года. Ино все четыре плотника учали тот двор ставити вместе. Ино, сколь долго они ставили, сочти ми.

4. Лев съел овцу одним часом, а волк съел овцу в два часа, а пес съел овцу в три часа. Ино хощеш ведати сколько бы они все три — лев и волк, и пес — овцу съели вместе вдруг и сколько бы они скоро ту овцу съели, сочти ми.

5. Некий купец купил колокол весом 2546 пудов, а за всякий пуд дати по 550 копеек, и восхотев ведати, колика цена за весь колокол будет.

6. Купил 112 баранов старых и молодых: дал 49 рублёв 20 алтын (алтын 3 коп.), за старого платил по 15 алтын и по две деньги (2 деньги = 1 коп.), а за молодого по 10 алтын, и ведательно есть колико старых и молодых баранов купил он.

19. Задачи прошлого

В старых учебниках арифметики до XVIII в. описывалось около тридцати различных правил решения задач. При этом обоснования выбора способа их решения не давалось. Ученик должен был заучить правило и строго его придерживаться при выполнении заданий. Вот некоторые правила: фальшивое, тройное, слепое, или девичье, аварийное и др. Запомнить их все и научиться определять, какое правило к какой задаче применимо, было очень трудно. С тех пор, по-видимому, и сложилось у некоторых людей мнение об арифметике как науке сложной и скучной.

Один из наиболее распространенных видов задач, сохранившийся и в современных учебниках, — это задачи на тройное правило, решение которых теперь не представляет большого труда. Вот пример такой задачи: «20 рабочих могут выполнить работу в 30 дней. Сколько рабочих могут сделать ту же работу в 5 дней?»

При решении этой задачи рассуждаем так: чтобы выполнить работу за 5 дней, рабочих потребуется больше во столько раз, во сколько 30 больше 5, т. е. $30 : 5 = 6$. Следовательно, рабочих надо больше в 6 раз, т. е. $20 \cdot 6 = 120$ (человек).

Раньше подобные задачи решали иначе. Условие задачи записывали в одну строку, располагая данные в определенном порядке: 5 — 20 — 30, а затем действовали по правилу: перемножь второе и третье и раздели на первое — $20 \cdot 30 = 600$; $600 : 5 = 120$. Таким образом, решение сводилось к чисто механическим действиям, но, стоило ошибиться в порядке записи условия, решение оказывалось неверным. Сообразить, в каком порядке записывать числа в строку, должен был сам ученик, и это было наиболее трудным моментом в решении задачи.

Тройное правило было известно уже в Древней Индии. В Западную Европу оно пришло через Среднюю Азию благодаря работам аль-Хорезми. Когда ремесла и торговля стали быстро развиваться (XVI в.), тройное правило получило большую известность. Его стали считать наиболее полезным в жизни и называли *золотым правилом* или *ключом купцов*.

Приведем задачу другого характера из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого: «Един человек (муж) выпьет кадь (бочку) пития (кваса) в 14 дней, а со женой выпьет тое же кадь в 10 дней, и ведательно есть (т. е. требуется узнать), в колико дней жена его особно выпьет тое же кадь». В наше время такие задачи решают, составляя уравнение или используя дроби, но можно их решать в целых числах.

Будем рассуждать так: если двое выпьют кадь за 10 дней, то две кади они выпьют за 20 дней, а 14 кадей за $10 \cdot 14 = 140$ (дней). Но один человек (муж) за 140 дней выпьет только $140 : 14 = 10$ (кадей). Значит, его жена выпьет за 140 дней $14 - 10 = 4$ (кади). А квас из одной кади она будет пить $140 : 4 = 35$ дней.

У Магницкого много задач, которые интересны и сейчас. Например: «Найти число, которое при делении на два дает в остатке 1, при делении на три дает в остатке 2, при делении на четыре дает в остатке 3, при делении на пять дает в остатке 4».

Р е ш е н и е. Обратите внимание, что если бы это число было на единицу больше, то на все указанные числа оно разделилось бы без остатка. Поэтому если искомое число будет x, то число $x + 1$ разделится без остатка на 2, на 3, на 4 и на 5, т. е. оно разделится на произведение этих чисел — на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (в этом произведении нет 2, так как 2 входит множителем в 4). Таких чисел, которые делятся на 2, 3, 4, 5, много, а наименьшее из них — это 60. Следовательно, $x + 1 = 60$, а $x = 59$. Проверьте это по условию задачи.

Вот еще одна задача Магницкого: «В некоей единой мельнице было три жерновы, и едины жерновы в нощеденствии (сутки) могут смолоти 60 четвертей, а другие в толикое же время могут смолоти 54 четверти, третьи же в толикое же время могут смолоти 48 четвертей, и некий человек даде жита (зерна) 81 четверть, желая в скорости (скорее) óно смолоти и посыпа (засыпали) на все три жерновы, и ведательно есть (надо узнать), в колико часов óно жито может смолоться и колико на всякие жерновы достоить мельнику насыпати».

На наш взгляд, математика может стать для любого человека самой увлекательной из наук, если постараться понять ее сущность, значение в повседневной жизни, поинтересоваться путями ее развития.

Упражнения и задачи

1. Купил некто трех сукон 106 аршин; единого взял 12-ю больше перед другим, а другого 9-ю больше перед третьим, и ведательно есть, колико коего сукна взято было (из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого).

2. Некий купец купил колокол 2546 пудов. А за всякий пуд дати по 550 копеек, и восхотев ведати (хотел узнать), колико цена за весь колокол будет.

3. Несколько товарищей при встрече обменялись рукопожатиями. Сколько встретилось товарищей, если рукопожатий было 21? (Решение полезно сопроводить чертежом).

4. Если в двузначном числе переставить цифры, то разность чисел данного и полученного будет 72. Какие это числа?

5. Сейчас отец старше сына в 9 раз, а через 3 года будет старше в 5 раз. Сколько лет отцу и сыну?

20. Зачем ломают числа?

Слыхали ли вы о том, как ломают числа? Ломаными числами пользуются и теперь, только называют их иначе.

Попробуйте из кусочка сахара получить половину кусочка. Для этого надо расколоть или разломить кусочек на две равные части. Так и с числами: чтобы из одного получить половину, надо разделить единицу, или «разломить» ее, на два. Вот отсюда и пошло название *ломаные числа*. Теперь их называют *дробями*. Если один разделим (разломим) на 2, получим дробь $\frac{1}{2}$, а если единицу разделим на 3, то получим дробь $\frac{1}{3}$.

В «Арифметике» Л. Ф. Магницкого изложены сведения о дробях — ломаных числах. Вот что там можно прочитать: «Число ломаное... есть токмо часть вещи, числом объявленная, сиречь полтина есть половина рубля, а пишется еще $\frac{1}{2}$ рубля, или $\frac{1}{4}$, или пятая часть $\frac{1}{5}$, или две пятые части $\frac{2}{5}$».

Л. Ф. Магницкий подробно рассказал, как производить действия с обыкновенными и десятичными дробями.

Название «ломаное число» существовало и в других странах. Оно ведет свое начало от арабов. В Европе это название распространилось благодаря работам Фибоначчи.

21. Единичные дроби

Дроби появились в то время, когда человек стал измерять различные величины — длину, массу, площади и пр.

При этом в определенных случаях недостаточно использовать единицу меры целое число раз и приходится учитывать доли или части единицы.

Первая дробь, которую ввели раньше других, — это половина. Современные дети, еще не умея считать, знают, что такое половина яблока, половина конфеты, и

Древнеегипетские дроби.

при необходимости сообразят, как разделить пополам. Возможно, похожие ситуации помогли нашим далеким предкам понять, что такое половина.

За половиной последовало знакомство с половиной половины, или $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, а затем $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ и т. д. Это так называемые *единичные дроби* — числитель их всегда выражен единицей.

Древние египтяне умели делать вычисления с дробями. Однако эти расчеты они сводили к действиям с единичными дробями, за исключением дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. Они пользовались единичными дробями даже тогда, когда обращались к дробям вида $\frac{5}{6}$ или $\frac{7}{8}$. Такие дроби они представляли как сумму нескольких единичных дробей: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, а записывали эту сумму без знаков сложения: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$. Проверим, верно ли египтяне выразили $\frac{7}{8}$: $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$, $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$, значит, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ — это $\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. Таким образом египтяне правильно находили сумму единичных дробей, хотя их запись необычна для нас и довольно громоздка.

В переводе на единичные дроби $\frac{4}{9}$ будут выражаться в египетской записи: $\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}$. Следует заметить, что для практических целей применять единичные дроби иногда даже удобнее. Так, если требуется разделить три яблока между четырьмя мальчиками поровну, то можно применить способ, которым пользовались египтяне: разрезать 1 яблоко на 4 части, а 2 яблока — на половинки. В результате каждый мальчик получит $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{3}{4}$ яблока. А мы бы теперь, наверное, разрезали каждое яблоко на 4 части и роздали каждому мальчику по 3 четвертинки.

Египтяне изображали дроби вот такими знаками: — $\frac{1}{2}$, — $\frac{1}{3}$, — $\frac{1}{4}$, — $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$ — .

При выполнении действий египтяне пользовались специально составленными таблицами.

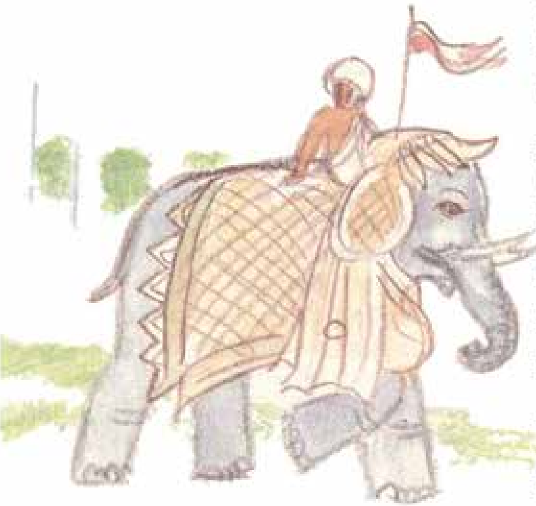
В Древнем Вавилоне пользовались дробями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ и т. д., но затем перешли к вычислению только с шестидесятеричными дробями, т. е. с дробями, у которых знаменатель 60: 60·60, 60·60·60. Такие дроби для вавилонян были удобны, так как их система счисления была шестидесятеричная.

Только спустя тысячелетия в Греции, а затем и в Индии стали пользоваться дробями, которые мы теперь называем *обыкновенными*. Для их записи древние греки применяли порядок, обратный нашему. Дробь $\frac{3}{5}$ они записывали в перевернутом виде. Знамена-

тель 5 они писали вверху, а числитель 3 — внизу. В V в. до н. э. греки умели выполнять с дробями сложение, вычитание, умножение и деление.

Ученые Древней Индии стали применять дроби довольно рано. Первоначально они пользовались только единичными дробями, но уже в записях IV в. до н. э. у них встречаются дроби $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{7}$ и им подобные.

В I в. нашего летосчисления в Индии стали записывать дроби так же, как это делают теперь, но без дробной черты. Они писали $\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}$ вместо $\frac{1}{2}$ и $\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{8}$ вместо $\frac{7}{8}$. Уже в то время индийцы знали все правила действий с обыкновенными дробями. Им мы обязаны развитию идеи обыкновенных дробей.



Первым, кто применил ныне принятую запись дробей с разделительной дробной чертой, стал итальянский математик Фибоначчи. Однако дробная черта стала общеупотребительной лишь в XVI в. Потребовалось свыше 200 лет, чтобы принять современную запись. У Фибоначчи запись с дробной чертой встречается в «Книге абака», появившейся в 1202 г.

В Древней Руси дроби называли *долями*, а затем *ломаными числами*. Отдельные дроби называли весьма своеобразно: $\frac{1}{2}$ — половина, или полтина, $\frac{1}{4}$ — четь, $\frac{1}{8}$ — полчети, $\frac{1}{16}$ — полполчети, $\frac{1}{3}$ — треть, $\frac{1}{6}$ — полтрети, $\frac{1}{12}$ — полполтрети, $\frac{1}{7}$ — седмина, $\frac{1}{5}$ — пятина, $\frac{1}{10}$ — десятина. Еще в XVII в. дроби записывали при помощи букв славянского алфавита и только в XVIII в. перешли на современные цифры.

Интересно, что в России первое упоминание о *переместительном* (коммутативном) законе умножения встречается в рукописи XVII в. в связи с умножением дробей. В ней сказано: «Веда и доли из доли умножение как $\frac{1}{3}$ из $\frac{1}{4}$ умножай придет $\frac{1}{12}$. Також $\frac{1}{4}$ из $\frac{1}{3}$ тож $\frac{1}{12}$». На этом примере видно, что от перемены мест множителей произведение не меняется.

22. Десятичные дроби

Первым руководителем созданной Улугбеком обсерватории был высокообразованный математик и астроном аль-Каши (ум. ок. 1430 г.).

Своими трудами аль-Каши внес большой вклад в математику. Им написаны книги «Ключ к искусству счета» и «Поучение об окружности». В книге «Поучение об окружности» ученый вычислил с большой точностью, во сколько раз окружность больше своего радиуса.

Аль-Каши был хорошо знаком с вавилонской шестидесятеричной системой счисления, распространенной и на шестидесятеричные дроби, т. е. на дроби со знаменателями 60: 60·60, 60·60·60 и т. д. Знакомство с этими дробями и с десятеричной позиционной системой Индии навело ученого на мысль применить десятеричную позиционную систему к дробям. Он первым начал разрабатывать этот раздел в науке. Аль-Каши стал записывать дроби в одну строку с числами в десятеричной системе. Чтобы отделять целое число от десятеричного, он пользовался вертикальной чертой или чернилами разного цвета; например, целое число записывал черными чернилами, а дробные знаки — красными.

В Европе о трудах аль-Каши долгое время не знали. Потребность же в более простых вычислениях с дробями с развитием науки и культуры росла, математики настойчиво искали пути решения этой проблемы. В 1585 г., независимо от аль-Каши, нидерландский ученый Симон Стевин (1548—1620) сделал важное открытие, о чем написал в своей книге «Десятая». Это маленькая работа (всего 7 страниц) содержала объяснение записи и правил действий с десятичными дробями. С. Стевин еще не пользовался запятой, но писал дробные знаки в одну строку с цифрами целого числа. При этом он нумеровал десятичные знаки, вписывая порядковые номера в окружности рядом с цифрой или над цифрой. Например, число 12,761 он записывал так:

12 ⓪ 7 ① 6 ② 1 ③ или $\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 6 & 1 \end{matrix}$.

В первом примере вместо запятой стоит нуль в кружке, десятые доли обозначены знаком ①, сотые — ② и т. д. Во втором примере цифры в верхней строке указывают, сколько нулей содержит предшествующий десятичный знак (семь десятых, две сотых и шесть тысячных). Приведем один из примеров сложения десятичных дробей из руководства С. Стевина.

$$\begin{array}{cccccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 2 & 7 & 8 & 4 & 7 \\ & 3 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 8 & 7 & 5 & 7 & 8 & 2 \\ \hline 9 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}$$

Десятичные дроби постепенно распространились в Европе, но лишь в XIX в. они стали пользоваться широкой известностью в связи с введением десятичной системы мер.

Применение запятой при записи дробей впервые встречается в 1592 г. Несколько позже — в 1617 г. отделять десятичные знаки от целого числа предложил Джон Непер (1550—1617) — знаменитый шотландский математик, изобретатель логарифмов. В России впервые о десятичных дробях было сказано в «Арифметике» Магницкого.

23. Как развивалось представление о числе

На ранних ступенях развития человечества представление о числе у людей складывалось из счета различных предметов — плодов, деревьев, людей, животных, изделий и пр. В то время человек приобрел понятие натурального числа. Вначале он знакомился с небольшими числами. Расширение запаса чисел шло медленно. Довольно долго люди знали счет только до двух. Затем счет постепенно распространился до семи, и это число казалось очень большим, что подтверждается многими пословицами и поговорками, сохранившимися до наших дней: «Семеро (т. е. большое число людей) одного не ждут» или «Один с сошкой (с сохой) — семеро с ложкой» и др.

Затем люди овладели счетом в пределах трех-четырех десятков. В то время у многих народов число 40 выглядело как предел счета, оно служило названием неопределенно большого числа. С тех пор, например, слово *сороконожка* мы понимаем как «много-

ножка». Выражение *сорок сороков* употребляли, чтобы сказать, что это число предметов невозможно назвать. Позже таким числом у славян стало *тьма* — десять тысяч, а потом *тьма-тьмущая*.

При счете множества предметов единица являлась наименьшим числом, при этом необходимости делить единицу на части не возникало. Но когда люди научились измерять различные величины — длину, массу, время и т. д., то у них довольно часто при измерениях получались излишки (остатки), в которых единица меры не укладывалась. Чтобы точнее производить измерения, появилась необходимость делить, или ломать, единицу. Возникла потребность в дробях. Дроби были открыты значительно раньше того, как люди поняли, что натуральный ряд чисел бесконечен.

Дроби получались в результате не только измерений, но и деления. Используя только целые числа, во многих случаях деление нельзя было выполнить. Когда же люди познакомились с дробями, стало возможным разделить любое натуральное число на другое, кроме 0. Однако долгое время математики не считали дроби числами. Их принимали как особые знаки, и только. Дробь определяли как собрание нескольких равных частей или долей единицы. Знаменитый греческий математик Евклид (IV в. до н. э.), разъясняя, что надо понимать под числом, указывал: «Число есть множе-

ство единиц». Это определение числа математики признавали за наиболее верное до XVIII в. Нуль и дроби по этому определению к числам не относились. Нуль в то время определяли как «ничто», так как 1—1=0 и 2—2=0 и т. д., т. е. в результате не было ничего.

Только во второй половине XVIII в. великий английский математик Исаак Ньютон ввел новое определение числа. Он сказал: «Число есть отношение одной величины к другой того же рода, принятой за единицу». Иначе говоря, число стали рассматривать как результат сравнения любой величины с единицей измерения той же величины. Например: число получалось от сравнения, во сколько раз длина данного отрезка больше или меньше меры, принятой за единицу длины. Подобное сравнение можно получить при делении значения одной величины на значение другой величины того же рода. По этому определению дробь заняла вполне определенное положение среди других чисел.

Полноправным числом стали рассматривать и единицу, которая, как и другие числа, могла быть выражена дробью, например, в виде: $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{3}$ и т. д. Нуль все еще понимался как знак «ничто». Лишь значительно позже его признали числом, от прибавления или вычитания которого результат не менялся, а при умножении на нуль произведение преобразовывалось в нуль.

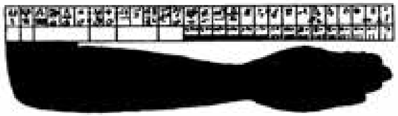
Расширение понятия числа на этом не остановилось. Трудами ученых-математиков это понятие продолжало развиваться и обогащаться.

Упражнения и задачи

1. Найдите значение дробей, записанных единичными дробями: 1/2 1/8 1/4; 1/3 1/5; 1/2 1/3 1/7; 1/2 1/5 1/6.
2. Следующие дроби запишите суммой единичных (основных) дробей, например: 5/8=1/8+4/8=1/8+1/2: 3/8; 5/6; 3/14; 4/9.
3. В одной задаче из папируса Ахмеса требуется разделить 8 хлебов между 10 лицами. В ответе дано (в современной записи) 8:10=2/3+1/10+1/30. Проверьте ответ.
4. Разделить 10 на две части, разность которых 5 (задача Бахаэддина — иранского ученого XVI в.).

Я глубоко почитаю математику, потому что знакомые с ней видят в ней средство к пониманию всего существующего.

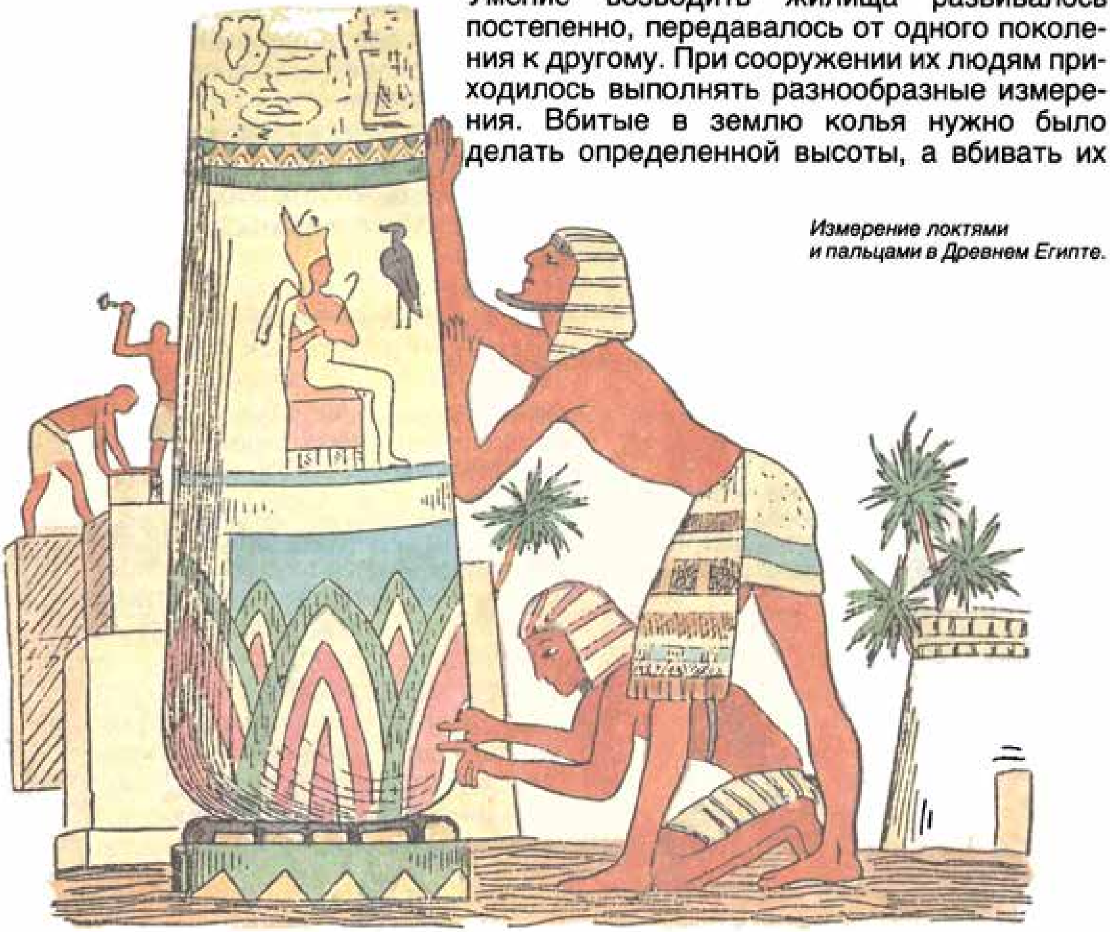
Бхаскара



Локоть (525 мм) — измерительный прибор, применявшийся в Древнем Египте.

24. Как нашли единицы для измерения длины

В холодные ночи или в ненастные дни первобытные люди находили для себя убежища в пещерах, под густыми кронами деревьев. Позже они стали делать для себя навесы, шалаши, а затем более удобные хижины. Умение возводить жилища развивалось постепенно, передавалось от одного поколения к другому. При сооружении их людям приходилось выполнять разнообразные измерения. Вбитые в землю колья нужно было делать определенной высоты, а вбивать их



Измерение локтями и пальцами в Древнем Египте.

следовало один от другого на равных расстояниях и располагать по прямой линии или по окружности. Нашим далеким предкам требовалось измерять длины не только при строительстве жилищ, но и при изготовлении различных орудий труда, а также на охоте, рыбной ловле, при обработке земли, посадке растений и пр.

Вначале для измерения длины (так же как и при счете) люди пользовались руками, пальцами. Например, чтобы измерить длину стрелы, ее сравнивали с длиной руки от локтевого сустава до конца среднего пальца, в результате появилась единица длины — *локоть*.

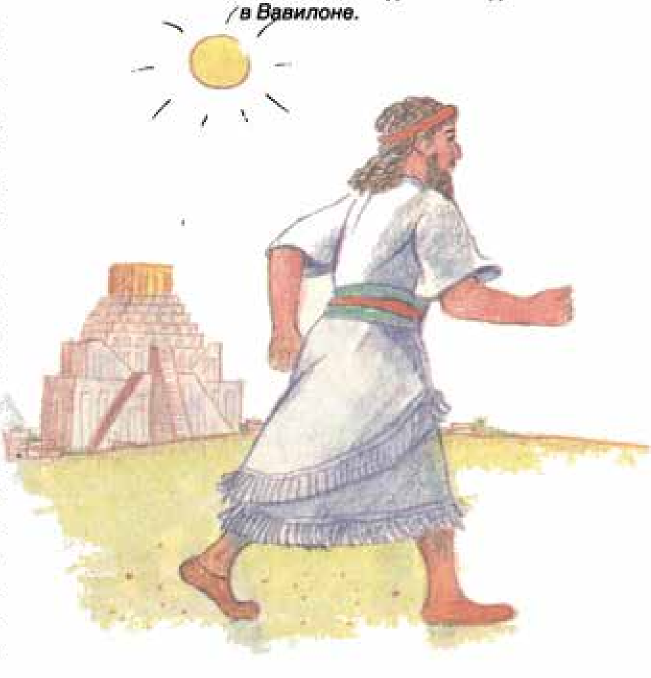
Этой единицей многие народы пользовались на протяжении тысячелетий. Расстояние, на котором надо было вбить в землю колья при постройке хижины, человек измерял шагами или длиной ступни своей ноги. Отсюда произошла единица длины, которую в одних местностях называли *лапоть*, в других *фут* (в переводе с английского означает «нога»).

Величину отверстия, которое человек каменного века высверлил в каменном молотке или топоре, уже нельзя было сравнивать с локтем или ступней ноги. Такие расстояния стали сравнивать с толщиной пальца или длиной одного из его суставов. Так произошли мелкие единицы измерения длины. Значительно позже, когда люди научились выращивать зерновые растения, небольшие расстояния стали сравнивать с длиной, а иногда с толщиной зерна ячменя.

Шло время, люди улучшали орудия своего труда, работали более производительно и иногда получали излишки продуктов, которые можно было обменять на что-то другое. Например, хлеб — на топор, копье — на рыбу и т. д. С развитием обмена, а затем и торговли стало необходимым устанавливать общие единицы величин. Вот тогда и появились линейки, длины которых были одинаковыми. Называли такие линейки в разных местах проживания людей по-разному — *фут, локоть, туаз, аршин* и т. д.

У древних египтян за много веков до начала нашего летосчи-

Установление длины стадии в Вавилоне.



сления за единицу длины был принят локоть. У них было установлено соотношение локтя и других единиц: 1 локоть равен 6 ладоням, 1 ладонь содержит 4 пальца, в 1 локте 24 пальца. Это уже целая система единиц длины.

На одном из древнейших египетских памятников — осколке каменной плиты высечено: «...Нил поднялся на 3 локтя и 10 пальцев». Образец единицы длины — «священный локоть» египетские жрецы берегли в храме. Им пользовались для проверки длины других мерных линеек.

Более крупная единица длины была установлена в Вавилоне следующим образом. Человек с появлением солнечного луча, отметив начало пути, шел по прямой линии. Когда весь солнечный диск выходил из-за горизонта, человек останавливался и отмечал конец пути. Такая единица длины впоследствии была принята и в Древней Греции. Ее назвали *стадия*. Отсюда и название *стадион*, т. е. место, на котором для соревнований в беге отмерена стадия (дистанция).

Подобно тому как в Вавилоне была установлена стадия, в Древнем Риме была определена единица измерения площадей — *югер*. Этой единицей служила площадь, которую можно было вспахать на паре волов за один день работы.

У арабов за мельчайшую единицу длины был принят поперечник круглого макового зернышка. 7 таких единиц составляли длину поперечника горчичного зерна. 7 горчичных зерен равнялись длине ячменного зерна. 7 зерен ячменя по длине укладывались на отрезке, равном суставу большого пальца. Предполагают, что длина сустава большого пальца послужила прообразом единицы, впоследствии названной *дюймом*.

В 1101 г. король Англии Генрих I приказал измерить расстояние от кончика его носа до конца среднего пальца вытянутой руки. По этой

Определение меры длины в один фут.

мерке был изготовлен образец ярда, который стал официальной единицей длины в Англии.

В одном сочинении XVI в. сказано: «Нужно, чтобы 16 человек высоких и низких, когда они, например, выходят из церкви, поставили свои ботинки один перед другим; эта длина должна быть законной мерой, которой надлежит мерить поля». Шестнадцатая доля этой меры была названа *футом*.

Как видно, в разных местах размеры единиц устанавливались поразному и поэтому были различны. Для единообразия в мерах во многих странах принимались общегосударственные единицы измерения. Образцы таких единиц помещались в особых хранилищах и применялись для проверки общеупотребительных измерительных линеек, лент, металлических полос и других приборов. Во многих странах эталоны (образцы) единиц для измерения берегли в храмах.

25. Для чего и как была установлена метрическая система мер

Древними русскими мерами в XI в. были *пядь (ладонь), локоть* (позже *аршин*), *сажень, верста,* или *поприще.* Эти единицы длины использовались на практике довольно долго. Еще в прошлом веке российские крестьяне пользовались мерой *лапоть.* Довольно часто в деревнях при разделе земли на полосы (нивы) ширину каждой из них измеряли «лаптем», т. е. ступней ноги, обутой в лапоть. В России пользовались двумя видами саженей — *маховой* и *косой.* Маховая сажень — это расстояние между концами пальцев, раздвинутых на полный мах рук. Косая сажень — расстояние от концов пальцев поднятой вверх правой руки до конца пальцев левой ноги.

В России, как и в других странах, единицы мер со временем изменялись в зависимости от хозяйственных потребностей. Указом Петра I были уточнены меры длины, которыми пользовались в России продолжительное время:

миля — это 7 верст,
верста — это 500 саженей,
сажень = 3 аршинам = 7 футам,
аршин = 16 вершкам,
фут = 12 дюймам,
дюйм = 10 линиям.

Считают, что слово *аршин* произошло от персидского *арш,* что значит «локоть».

В других странах названия единиц и их величин были другими. Во Франции, например, применяли *туаз, фут, дюйм;* в Англии — *ярд, фут, дюйм;* в Испании меры назывались *эстадель, вара, пальма.*

Такое разнообразие единиц измерения и, кроме того, неупорядоченное соотношение единиц мер одной системы затрудняли развитие техники, торговли и всей хозяйственной деятельности как внутри страны, так и за ее пределами. Поэтому в 1875 г. представители 17 государств подписали соглашение о признании единой метрической системы измерений. Эта система была разработана во Франции комиссией ученых Французской академии и узаконена в стране еще в 1799 г.

В метрической системе мер за основу взят метр. Чтобы определить размеры основной единицы, комиссия из виднейших ученых Франции почти 6 лет производила измерения и вычисления длины меридиана (меридиан — кратчайшая линия, которую можно провести по поверхности шарообразного тела от одного полюса к другому). По замыслу комиссии предполагалось, что метр составит точно одну сорокамиллионную долю земного меридиана. В действительности оказалось, что при измерениях были допущены неточности и метр несколько отличается от намеченной длины. Однако исправлять длину метра отказались, так как ошибка была обнаружена значительно позже того, как метрическая система получила широкое распространение. Изменение основной единицы мер снова вызвало бы большую путаницу. Кроме того, ученые не были уверены, что последующие измерения с применением более совершенной техники не дадут уточнений в определении длины меридиана.

Метрическая система мер удобна тем, что в ней 10 мелких еди-

Маховая и косая сажени.

ниц (например, миллиметров) составляют новую единицу (сантиметр), 10 последующих единиц, в свою очередь, составляют более крупную единицу (дециметр) и т. д. Иначе говоря, она построена на десятичной основе, как и современная система счисления. Это очень удобно при выполнении различных расчетов и действий с именованными числами. Однако привычка к старым мерам довольно долго препятствовала распространению более совершенной системы измерения величин. В нашей стране метрическая система мер была введена только в 1918 г.

Хотя в настоящее время установлены строго определенные единицы десятичных мер длины, каждому человеку полезно знать свои «живые мерки», чтобы в случае нужды измерять ими некоторые расстояния, хотя бы приблизительно. Так, Леонардо да Винчи подметил, что рост человека равен маховой сажени. Запомнить свой рост в сантиметрах необходимо каждому. Полезно знать и помнить, сколько сантиметров составляет ширина вашей ладони, расстояние между концами крайних раздвинутых пальцев руки, длину и толщину указательного пальца. Эти «живые мерки» могут пригодиться вам во многих случаях жизни.

Упражнения и задачи

1. Определите ширину своей ладони в сантиметрах. Для этого положите ладонь на лист бумаги, отметьте ее ширину двумя черточками и затем измерьте расстояние между ними сантиметровой линейкой.

2. Отмерьте на площадке 30—50 м. Затем средним шагом пройдите это расстояние и сосчитайте число сделанных шагов. Разделите число отмеренных метров на число шагов, и вы узнаете среднюю длину своего шага.

3. Картонный квадрат со стороной в 1 м разрежьте на квадратные сантиметры. Получившиеся квадратики сложите вплотную друг к другу в виде прямой полосы.

Какой длины получится эта полоса?

4. Какой длины получится прямая полоса, сложенная из миллиметровых квадратиков, полученных при делении на квадратные миллиметры картонного квадрата со стороной в 1 м?

---

26. Как в старину измеряли объемы, взвешивали и расплачивались

Для измерения объемов зерна, муки и других сыпучих веществ, а также жидкостей в старину употребляли различные по размерам и названиям сосуды, причем емкость их точно не была определена. Так, в одном из указов XIII в. (Богемия) записано: «...меру пшеницы составляет столько, сколько можно удержать обеими руками». Как видно, размер меры определен весьма приблизительно.

На Руси также употреблялась *мера* для измерения объемов, но применялись и другие единицы: *бочка,* или *кадь* (40 ведер), *ведро.* Десятую долю ведра составлял *штоф*, а сотую часть ведра называли *чаркой.*

С введением метрической системы мер за единицу жидкостей и сыпучих тел принят *литр* и *декалитр.* О более древних единицах объема сведения до нас не дошли. А вот об определении массы тел известно, что уже в Древнем Египте применялись простейшие весы. Изображения их сохранились на нескольких памятниках. По-видимому, египтяне считали весы весьма точным прибором для измерения. По их верованиям, даже боги пользуются весами, определяя заслуги и проступки людей. Такая сцена взвешивания грехов изображена на египетском рисунке, находящемся на одном из древних памятников.

Древние вавилоняне для определения массы создали свою систему единиц. У них за мельчайшую единицу массы принимался *шекель,* или *сикля.* Более крупная единица — 60 шекелей — составляла *мину* (ману). 60 мин составляли *билту,* а у некоторых народов ее называли *талант.*

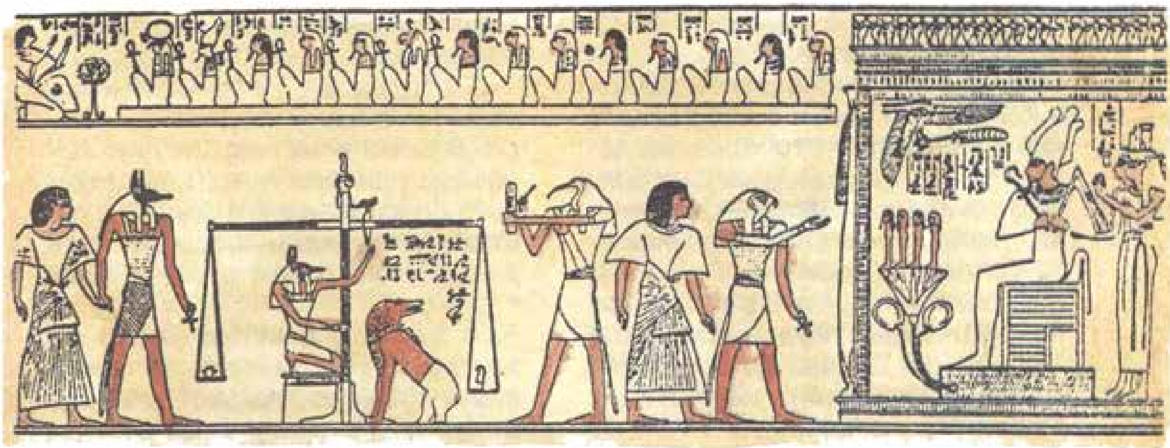
При археологических раскопках нашли образцы вавилонских гирь: наиболее тяжелые — билты были отлиты из бронзы в виде львов, вес их составлял примерно 30 кг 650 г, менее тяжелые — из обработанных камней в виде фигурок птиц. Кусочек серебра около 8,5 г — сикля (шекель) служил в Вавилоне денежной единицей и выполнял роль монеты.

Похожая система денежных единиц существовала в Египте и некоторых других государствах, но у египтян за основу счета был взят десяток, поэтому их весовые и денежные крупные единицы были больше мелких в 10 раз.

На острове Крит при раскопках нашли бронзовые деньги. Одна монета была около 29,5 кг, что составляло примерно одну билту, или один талант.

В Древнем Египте в качестве денег использовались и украшения — кольца. Для удобства торговых сделок небольшие кольца нанизывали на одно кольцо большего размера, подобно тому как в наше время нанизывают ключи.

В древности во многих странах (например, Вавилоне, Египте)



Взвешивание золотых слитков. Загробный суд у бога Озириса. Рисунок с древнеегипетского памятника.

слитки серебра служили не только единицами массы, но и денежными единицами и денежными знаками.

В Древней Руси князья поручали следить за соблюдением мер служителям церкви. Так, князь Владимир Святославич в церковном уставе (X в.) записал, что наблюдение за мерами и весами поручается епископам, которые должны их «блюсти», не позволяя изменять «искони установленных» мер.

Первые образцы единицы массы (фунт) и единицы длины (аршин) были изготовлены на Руси в 1747 г. При этом было установлено, что 40 фунтов составляют пуд, а 10 пудов составляют *берковец*. Однако последняя единица употреблялась редко.

До установления этих мер у славян единицей массы была *гривна*, представлявшая собой слиток серебра весом около 400 г (впоследствии эта единица получила название *фунт*). Серебряная гривна одновременно служила и денежной единицей, подобно вавилонскому шекелю. В XIII в., чтобы получить меньшую единицу, гривну стали рубить на 2 части. Одна такая часть получила название, дошедшее до нас, — *рубль*.

Интересно, что наравне с серебряными деньгами в Древней Руси мерой ценности были меха. За их единицу принималась *куна*. Меньшими единицами были *мордки* и *ушки* белок и других пушных зверьков. Позже появились на Руси кожаные деньги. Это были четырехугольные кусочки кожи с выдавленными на них княжескими клеймами. Кожаные деньги ходили в стране до XVIII в. (до времен Петра I).

В XVI в. появились *новгород-*

ки — маленькие серебряные монетки неправильной формы, на которых был изображен всадник с копьем. От них и пошло название *копейка.* Вместо кожаных денег при Петре I введены серебряные монеты — гривенники, содержащие 10 копеек, и полтинники — 50-копеечные монеты. При этом содержание серебра в рубле было уменьшено. Рубль содержал 100 копеек. Бумажные денежные знаки (ассигнации) появились в нашей стране впервые в XVIII в. при Екатерине II.

С изменением хозяйственной деятельности в стране менялись и денежные знаки. Это происходило много раз до 1917 г. и несколько раз в советское время. Однако соотношение единиц ценностей постоянно сохранялось.

С введением метрической системы мер были упорядочены меры объема и массы. За единицу объема приняли *литр,* или объем куба со стороной в 1 дм; 10 л составляют декалитр, а тысячная доля 1 куб. м (или 1 л) составляет 1 куб. см.

За единицу массы приняли килограмм — это масса 1 л чистой воды. 100 кг составляют центнер, а 1000 кг — 1 тонну. Тысячная доля килограмма — это 1 грамм.

Древнерусские гривна, новгородки, копейка, пожитые деньги.

27. Меры времени. Календарь

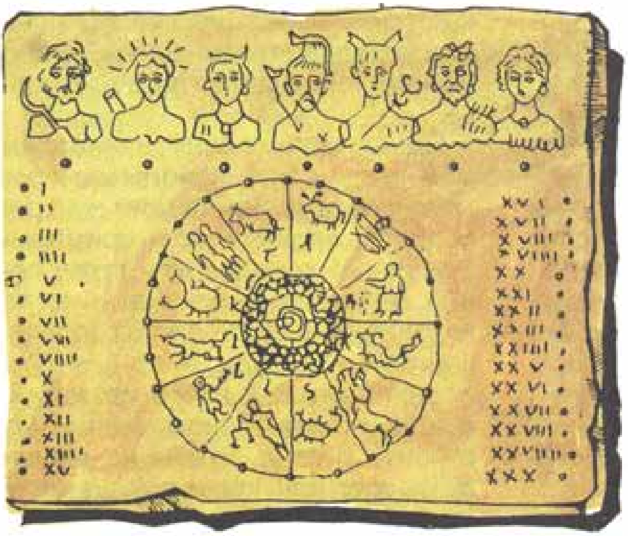
Измерить длину довольно просто. Можно взять любую мерку — шнурок, палочку, ленту, линейку, принять ее за единицу и укладывать по длине той линии, которую надо измерить, затем сосчитать, сколько раз эта мерка уложилась. Гораздо сложнее подобрать мерку для времени. Время нельзя измерить линейкой, шагами, локтями или пальцами. Мерку для времени надо было искать в самой природе.

Древний человек долго наблюдал за явлениями природы, пока не понял, что самой надежной мерой является движение солнца. Оно, как казалось, всходило, двигалось по небосклону и уходило за горизонт, не ускоряя и не замедляя своего «шага». Утро, полдень, вечер, ночь — вот первые приблизительные мерки времени. Они не были точными, но довольно долго удовлетворяли потребностям первобытного человека. Взглянув на солнце, он мог определить, много или мало времени осталось у него, чтобы засветло добраться до стоянки или закончить какую-либо работу.

Определить бег времени по солнцу можно днем. А ночью? Наблюдая за звездами, человек заметил, что и они перемещаются по небосклону. Надо только выбрать какую-то яркую звезду среди скопления других звезд и следить, как она перемещается. По ее положению на небосклоне можно определить, когда наступит полночь и долго ли до рассвета.

Однако по солнцу и звездам можно измерять небольшие промежутки времени. Людям же требовалось заранее знать время наступления холодов или потепления. Им надо было знать, когда созревают в лесу плоды (орехи, каштаны, желуди и пр.), чтобы подготовиться к сбору урожая; в какое время птицы начинают строить гнезда, чтобы не пропустить сбор яиц; когда пойдут косяки рыбы на нерест, чтобы запасти ее впрок. С развитием земледелия человек должен был научиться определять сроки посева и ухода за растениями. Не одно поколение наблюдало, что дни летом постепенно убывают и зимой становятся совсем короткими, а затем вновь начинают увеличиваться и этот круговорот совершается неизменно за один и тот же промежуток времени. Так была установлена естественная **единица измерения времени** — *год.*

Многолетние наблюдения позволили подметить, что ночное светило — луна постоянно меняет свой вид. То она похожа на узкий серп, то выглядит коврижкой хлеба, а то полным кругом, как блин. Затем снова идет на ущерб, пока совсем не исчезнет. Люди сосчитали, что от одного новолуния до другого проходит почти 30 суток (продолжительность обновления луны несколько меньше 30 суток). Эти 30 суток и определили число



Каменный календарь римлян. Наверху изображены боги (слева направо): Сатурн, Солнце, Луна, Марс, Меркурий, Юпитер, Венера. Они управляли днями недели. Субботой управлял Сатурн, воскресеньем — Солнце, понедельником — Луна, вторником — Марс, средой — Меркурий, четвергом — Юпитер, пятницей — Венера. Посредине рисунка — Зодиак, а слева от него — числа месяцев. Под изображением богов у каждого числа месяца просверлены отверстия: в них вставлялись палочки, указывающие соответствующий день недели, дату (число месяца). Это был своего рода «вечный» календарь.

дней в календарном *месяце.*

Известно, что за четыре тысячи лет до наших дней в Вавилоне были звездочеты. Они наблюдали за движением небесных светил и, измеряя время, пользовались уже известной до них природной мерой — *сутками*, т. е. временем от одного восхода солнца до другого (сутки — это период полного оборота Земли вокруг своей оси). Звездочеты пользовались и более крупной единицей времени, которая также существовала в природе, — *месяцем,* т. е. периодом между новолуниями.

Многократно наблюдая за разливом реки Тигр, вавилонские звездочеты установили, что смена природных явлений повторяется через 365 суток. Так была вычислена продолжительность такой единицы времени, как *год.*

Египетские жрецы также из многократных наблюдений установили, что разлив реки Нил обычно совпадает с первым весенним появлением на горизонте звезды Сириус. Считая дни между ежегодным весенним появлением звезды Сириус, жрецы определили продолжительность года. Они, так же как и вавилоняне, приняли его за 365 суток. В действительности полный оборот Земли вокруг Солнца больше чем 365 суток на несколько часов. В результате этого просчета начало нового года по истечении определенного количества лет перемещалось на несколько суток, отставая от годичного движения звезды Сириус, а следовательно, и от годичного движения Земли.

Так постепенно по наблюдениям за движением небесных светил, перемещением которых обусловлено движение Земли и планет вокруг Солнца, люди смогли создать *календарь*, который мно-

Зодиакальный круг — часы.

го раз уточнялся, прежде чем обрел современный вид. Он и теперь все еще не совершенен: не все месяцы имеют одинаковое количество дней. По-видимому, так сложилось потому, что полная смена фаз Луны происходит не точно за целое число суток, а годовое вращение Земли вокруг Солнца также нельзя выразить целым числом суток.

28. Час, минута, секунда

Когда еще не было городов, мастерских и фабрик, люди не нуждались в точном распределении суток по часам. Но вот появились города, застучали молотки кузнецов, завертелись круги гончаров, по рекам поплыли ладьи с товарами. Теперь для мастера или купца стал дорог каждый час. Показания солнца и звезд не могли дать той точности во времени, которая требовалась человеку. Нужно было сутки раздробить на небольшие по продолжительности промежутки времени и отсчитывать их. Раньше других народов эта потребность проявилась в Вавилоне. Вавилонские мудрецы додумались разделить сутки на 24 часа. А затем час разделили на 60 минут и значительно позже минуту — на 60 секунд. Такое деление они произвели подобно тому, как разделили талант на 60 мин, а мину — на 60 шекелей.

Соотношение часов, минут и секунд, принятое в Вавилоне, впоследствии перешло в Индию и в страны Европы. Деление суток на часы, минуты и секунды сохранилось в первоначальном виде до наших дней. Однако недостаточно было установить только единицы времени, необходимо было придумать прибор, который отсчитывал бы часы и минуты, — нужны были *часы.*

29. Солнечные часы

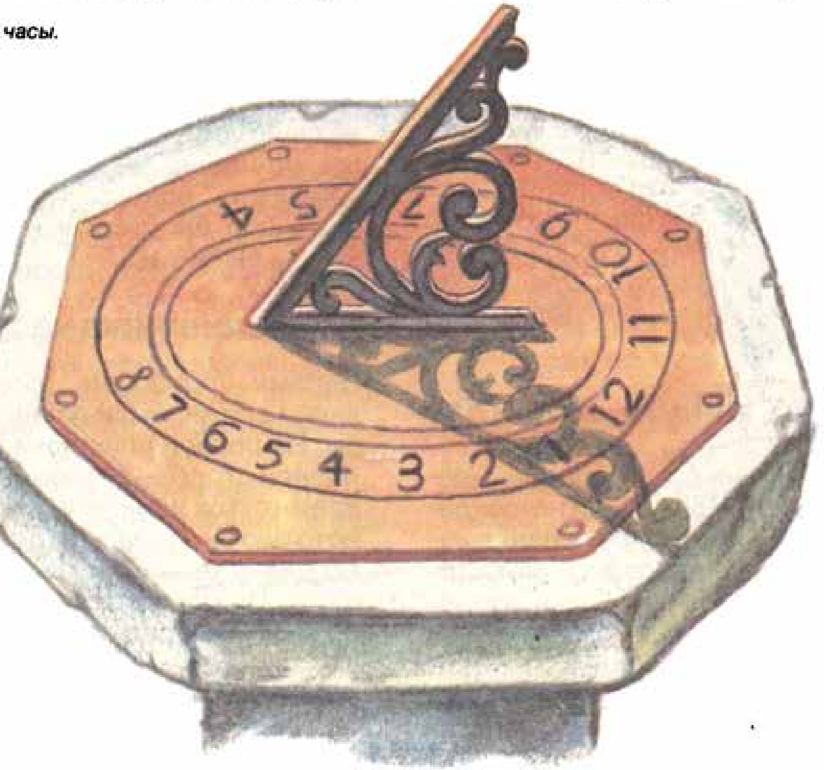
Первым прибором, отсчитывающим время, были солнечные часы. На ровной площадке устанавливали столб — *гномон* и в разное время суток измеряли длину тени, которую он отбрасывал на землю. По длине тени и судили, какой час суток. По таким часам время можно было измерять локтями и даже шагами. Несколько позже вавилоняне усовершенствовали это изобретение. Солнечные часы стали делать с циферблатом.

Роль стрелки в них играла тень, падающая на площадку от столбика, поставленного наклонно в середину циферблата. Вместе с движением солнца перемещалась и тень от столбика по окружности циферблата. На нем отметили начальное положение тени в полдень, когда она бывает наименьшей, и разделили окружность на 24 части — вот и получились часы. Чтобы по таким часам определить время, надо отсчитать, на сколько делений от полуденного положения переместилась тень столбика.

Солнечные часы у вавилонян позаимствовали другие народы, в том числе и греки. От греков они перешли в Рим, а позже и в нашу страну. Однако такие часы не возьмешь с собой, и их стали сооружать на дорогах возле верстовых столбов. Так, на старой дороге из С.-Петербурга в Москву до сих пор на 23-м км сохранился столб с надписью «От Санкт-Петербурга 22 версты». Около этого столба лежит плита с треугольной металлической пластинкой и цифрами по окружности. На эти цифры падает тень от пластинки и указывает время суток.

Индийские факиры изобрели для путешественников походные часы. Они выстругивали граненую

Солнечные часы.



палку — *посох.* Сверлили в ней 3—4 отверстия, в которые можно было вставлять короткий стержень определенной длины (чтобы он не потерялся — его привязывали к посоху). Поднимет путник такой посох в солнечный день вертикально, и солнышко отбросит тень от стерженька на одну из его граней, на которой заранее нанесены деления и проставлено время в часах. На одной из граней посоха время указывалось для весны, на другой — для лета и т. д.

С давних пор своеобразные солнечные часы устраивали в своих жилищах — юртах жители степей. Над центром юрты (в самой вершине) для освещения и вентиляции есть круговое отверстие. Люди заметили, что через это отверстие на пол падает луч солнца (а солнечные дни в южных странах бывают часто). В течение дня он перемещается по полу юрты, описывая дугу. По длине дуги, которую «нарисовал» солнечный луч, можно было определять прошедшее время с точностью до 10 минут.

30. Усовершенствование часов

Солнечные часы показывают время недостаточно точно и только в солнечные дни. А людям нужно знать его в любую погоду и в любое время суток. Вот почему вслед за солнечными были изобретены водяные, песочные, огненные и другие часы.

До наших дней сохранилось выражение: «Много воды утекло с тех пор». Здесь речь идет о той воде, которая прошла через водяные часы, т. е. о прошедшем времени. Кто именно изобрел первые водяные часы, неизвестно, но ими пользовались уже в Древнем Египте.

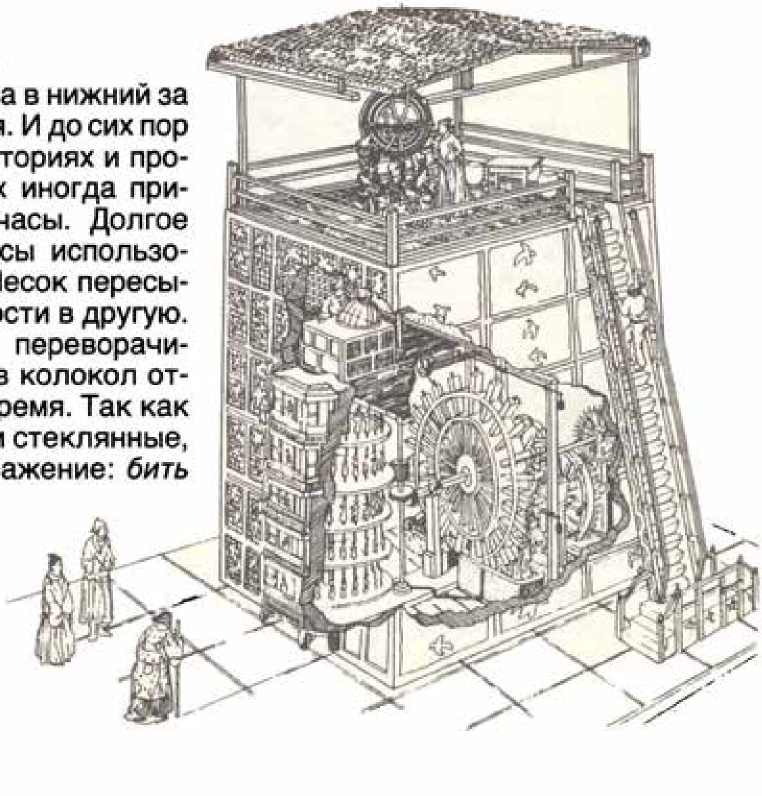
Изготовить водяные часы нетрудно. Надо в дне банки сделать маленькое отверстие. Под банку подставить бутылку с горизонтальными делениями на равных расстояниях друг от друга. Затем наполнить банку водой и проследить, через сколько времени жидкость в бутылке будет подниматься от одной метки до другой. Это время написать против каждой черточки. Вот часы и готовы.

В некоторых городах Средней Азии еще в прошлом веке существовали водяные часы. На ступеньках каменной лестницы стояло друг под другом несколько медных котлов. Верхний котел был наполнен водой, которая медленно переливалась из него во второй котел, из второго в третий и т. д. Служитель, наблюдавший за водяными часами и днем и ночью, громко объявлял каждый час и вывешивал табличку, на которой указывалось, сколько времени прошло от полуночи или от полудня.

Подобно водяным часам делали и песочные. Они состояли из двух расположенных один над другим сосудов, из которых верхний наполняли мелким сухим песком. Песок медленно пересыпал-

Старинные песочные часы.

У водяных и песочных часов должен был постоянно дежурить человек. А людям хотелось, чтобы часы сами подавали сигнал через определенное время. Греческий философ Платон, живший в IV в. до н. э., изобрел ночные часы — своеобразный водяной будильник. Он состоял из двух вместительных сосудов, расположенных один над другим. В верхний сосуд равномерно поступала вода. Когда она достигала определенного уровня, то под ее давлением открывалась гибкая задвижка в трубке, которой были соединены оба сосуда. При этом в



Древние китайские песочные часы.

ся из верхнего сосуда в нижний за определенное время. И до сих пор в некоторых лабораториях и процедурных кабинетах иногда применяют песочные часы. Долгое время песочные часы использовали на кораблях. Песок пересыпался из одной емкости в другую. Вахтенный матрос переворачивал часы и ударом в колокол отмечал прошедшее время. Так как песочные часы были стеклянные, то сохранилось выражение: *бить склянки*.

нижнем сосуде воздух сжимался и с силой вырывался через вторую трубу, издавая довольно сильный звук. По сигналу этого будильника ученики Платона собирались на занятия в академию. Подобные часы греки называли *клепсидра*.

В Китае был изобретен огненный будильник. Медленно тлеющий стержень из опилок, склеенных смолой, укладывали над звонкой продолговатой чашкой, заранее рассчитав, сколько часов он будет гореть. На ниточке, перекинутой через стержень, над чашечкой подвешивали два грузика. Как только огонь доходил до ниточки, она перегорала, грузики падали в чашечку и издавали мелодичный звон.

В середине I в. до н. э. в Греции Ктесибием были изобретены более точные водяные часы. Главной частью их был сосуд, в который равномерно поступала вода. Уровень ее в сосуде постепенно повышался и поднимал легкий поплавок, на котором была укреплена стрелка, указывающая на вращающийся барабан. На последнем были проведены линии, против которых обозначены часы и минуты.

Часы с колокольным боем русского умельца Базина.

Огненный будильник Древнего Китая.

[redacted]

Некоторые водяные часы со стрелкой внешне выглядели иначе. Стрелку укрепляли на торце вала, через который был перекинут шнур с поплавком на одном конце и грузом на другом. Поплавок плавал в сосуде с водой, уровень которой постепенно повышался, так как в него равномерно вливалась вода из другого сосуда. С повышением уровня воды поднимался поплавок, а шнур, перемещаясь, поворачивал вал вместе со стрелкой.

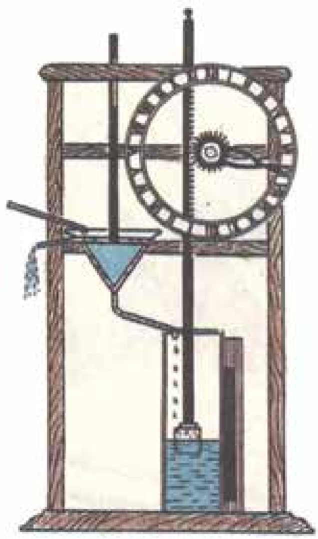
Следует заметить, что прежде, чем изобрести приборы, отсчитывающие секунды, люди обнаружили естественный счетчик, приблизительно соответствующий этой мере времени, — пульс в кровеносных сосудах человека. У здорового взрослого человека он делает приблизительно 60 ударов в минуту, и, следовательно, промежуток между ударами составляет одну секунду. Весьма вероятно, что 60 ударов пульса в минуту послужили поводом для деления минуты на 60 секунд. Но все же вести отсчет секунд, пользуясь пульсом, было неудобно; надо было изобрести прибор, отсчитывающий секунды.

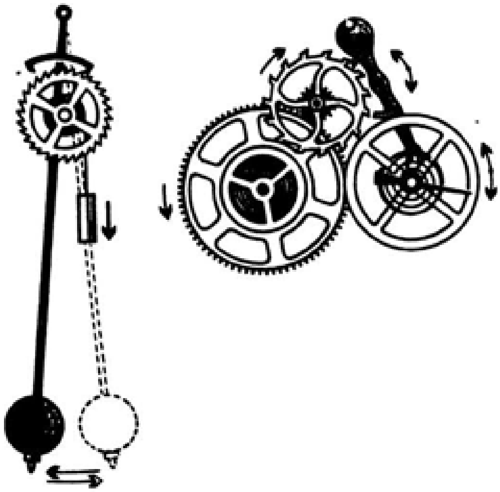
Значительно более точными по сравнению со всеми предшествующими часами стали колесные, а вернее, механические часы. Первое упоминание о них относится к концу XIII в. Первые колесные часы не имели маятника, и поэтому их ход был неточен, они постоянно нуждались в регулировке.

В 1583 г. итальянский ученый Г. Галилей открыл, что время одного качания маятника зависит не от того, как далеко отвести его от положения равновесия, а только от длины самого маятника. Это открытие позволило сконструировать достаточно совершенный прибор. В 1612 г. в Праге изготовили часы с маятником. Такие часы были очень точным механизмом и за год могли допустить ошибку не более чем на 1 секунду. Однако и такая точность в наше время уже не удовлетворяла современную науку и технику. Поэтому были сконструированы атомные часы, у которых ошибка в отсчете времени в 100 раз меньше, чем в механических часах с маятником.

Первые механические часы с боем стоили очень дорого. И все-таки ими пользовались в больших городах. Так, в летописи упоми-

Водяные часы (клепсидра).





Слева — механизм часов с боем (наиболее ранний из известных), XIV в., Италия. Справа — наиболее ранний башенный часовой механизм, 1386 г., Солсберийский собор, Англия.

нается, что в 1404 г. в Московском кремле были установлены колесные часы. По ночам, когда на башне били часы, по всему городу разносился стук и трезвон. Это сторожа на каждой улице, услышав бой часов, ударяли соответствующее количество раз в подвешенные доски или скороводы.

В XVIII в. на Спасской башне в Кремле были установлены более точные маятниковые часы, приобретенные по приказу Петра I в Голландии.

31. Что такое «новый стиль» летосчисления

Само слово *календарь* пришло в нашу страну из Древнего Рима. Календарем римляне называли книги, в которых первоначально записывали денежные расходы, долги, проценты. Позже в таких книгах указывали дни недели, числа месяца, праздничные дни, даты рождения знаменитых людей, отдельные справки и пр. Первое время счет дней в таких записях римляне вели от первого дня каждого месяца, который называли календы (от лат. calendae), например: три дня до календы или шесть дней после календы. Позже календарем стали называть систему счисления больших промежутков времени.

Наиболее древний календарь, из дошедших до нас, создан римлянами в 354 г. В России западные календари появились в XVI в. Позже и у нас стали создавать подобные календари. Появление в стране календарей сыграло большую роль в распространении знаний и культуры. В настоящее время существуют календари различного назначения: настольные, настенные, отрывные, табель-календари, сельскохозяйственные и многие другие. Календарь — это издание, помогающее более удобно, без излишней потери времени вести отсчет и учет необходимого времени. Календарь как система измерения времени основан на периодически изменяющихся явлениях природы, как то смена дня и ночи (сутки), смена времен года (солнечный год), смена фаз луны (месяц). Основной единицей измерения в календаре служит год. Продолжительность года у разных народов и в разные времена считали неодинаково. Первоначальный римский календарь оказался короче астрономического на 10 суток. Это создавало большие неудобства, так как каждый год наступал на 10 суток раньше предшествующего.

К началу нашей эры* в Риме созрела потребность уточнить календарь. Реформу календаря осуществил римский диктатор Юлий Цезарь. Его ученый-консультант Созиген предложил вначале уточнить календарь египтян, добавляя к концу каждого четвертого года один день. В то время конец года приходился на месяц февраль. По египетскому календарю год продолжался ровно 365 дней (суток), а астрономический год, т. е. время, в течение которого Земля совершает полный оборот вокруг Солнца, продолжается 365 дней 5 часов 48 минут и 46 секунд. За четыре года излишек сверх 365 суток дает почти полные сутки. Календарь, в котором год имеет 365 дней и каждый четвертый год високосный (366 суток), был назван *юлианским,* по имени Юлия Цезаря.

* Наша (христианская, или новая) эра — счет годов от общепринятой в христианской религии даты, связанной с Рождеством Христовым.

Юлианский календарь (отсчет времени по старому стилю) очень удобен. В нем каждый четвертый год, т. е. тот, который обозначен числом, делящимся на 4, имеет в феврале не 28, а 29 дней. Но астрономический год на 11 минут и 14 секунд короче года по юлианскому календарю. Это несоответствие само по себе невелико, но через 128 лет оно передвигает начало года на один день вперед. С течением времени разница будет постоянно увеличиваться. Так, за 400 лет она составит около трех суток.

Для того чтобы внести в юлианский календарь уточнения, глава католических священнослужителей — римский папа Григорий XIII собрал в 1582 г. особую комиссию из астрономов и представителей церкви. Итальянец Лилио предложил исправить накопившуюся за 1200 лет ошибку так: после 4 октября 1582 г. сразу считать 15 октября, пропустив 10 дней. А в дальнейшем решили из каждых 400 лет исключать 3 дня, для этого, по предложению Лилио, на будущее время стали считать високосными из вековых годов (годов, оканчивающихся двумя и больше нулями) только те, у которых число столетий делится на 4. Таким образом, 1600 год по новому стилю остался високосным (16 делится на 4 без остатка), а годы 1700, 1800 и 1900 остались простыми. Последний год XX столетия — 2000 — будет опять високосным, так как 20 делится на 4. Для всех других годов, кроме кон-

Таким коротким был февраль 1918 г. в нашем календаре.

1918 ГОД											
	ЯНВАРЬ					ФЕВРАЛЬ					
ПОНЕДЕЛЬНИК	1	8	15	22	29		18	25			
ВТОРНИК	2	9	16	23	30		19	26			
СРЕДА	3	10	17	24	31		20	27			
ЧЕТВЕРГ	4	11	18	25		14	21	28			
ПЯТНИЦА	5	12	19	26		15	22				
СУББОТА	6	13	20	27		16	23				
ВОСКРЕСЕНЬЕ	7	14	21	28		17	24				

чающих столетия, счет високосных годов остался и по новому стилю (календарю) таким же, как он был в юлианском календаре, т. е. после трех лет в 365 дней наступает год в 366 суток — високосный. Новый, григорианский календарь постепенно был принят во всех цивилизованных странах, позже всех — в Турции (в 1927 г.) и в Египте (в 1928 г.).

В нашей стране новый стиль был введен с 1 февраля 1918 г. Вместо 1 февраля стали считать 14 февраля. Названия же дней недели сохранили прежними. Разница между календарями по новому и старому стилю после решения специальной комиссии в 1582 г. выросла еще на трое суток за счет удлинения трех годов — 1700, 1800, 1900. Поэтому к счету по старому стилю теперь прибавляют 13 дней.

Упражнения и задачи

1. Может ли человек прожить миллиард секунд, минут?

Указание: переведите секунды в часы и сутки.

2. Часы показывают 7 ч 13 мин. Мысленно поменяйте стрелки местами. Сколько времени будут показывать часы с новым положением стрелок?

3. Величайший математик древности Архимед погиб в возрасте 75 лет во время осады Сиракуз в 212 г. до н. э. Определите год рождения Архимеда и сколько лет прошло со дня его смерти до нашего времени.

4. Великий русский математик Н. И. Лобачевский родился в XVIII в. и прожил 64 года, из которых 56 лет он жил в XIX в. Определите годы его рождения и смерти.

5. Человека спросили: «Сколько тебе лет?» Он ответил: «Я вдвое моложе матери и втрое моложе отца. Если сложить вместе число лет отца и матери, моей десятилетней сестры и мои, то получится 106 лет». Сколько лет каждому?

Арифметика, или числительница, есть художество честное, независимое, всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших в разные времена явившихся изряднейших арифметиков изобретенное и изложенное.

Л. Ф. Магницкий

32. Из истории арифметических действий

Сложение

Еще в древности люди научились считать предметы, называя число их по порядку: 1, 2, 3... Но сущность счета не только в том, чтобы называть по порядку числа, но и в присчитывании, т. е. в прибавлении единицы к первоначальному числу, затем еще одной единицы,

затем еще одной и т. д. Овладение счетом требует умения прибавлять единицу к любому числу и к полученному от этого сложения числу снова прибавлять единицу и т. д.

Итак, сложение числа с единицей возникло с появлением счета. В дальнейшем сложение двух чисел выразилось в присчитывании к данному числу по одному всех единиц второго слагаемого. Понаблюдайте, как складывают числа малыши. Например, чтобы прибавить к трем два, ребенок на одной руке оставляет незагнутыми 3 пальца, а на второй — 2 пальца и сначала считает три пальца (загибая каждый) на одной руке, а затем также присчитывает к ним по одному пальцы другой руки. Когда все пальцы загнуты — сложение закончено. На следующем этапе обучения ребенок уже не пересчитывает единицы первого слагаемого, а сразу называет его и присчитывает к нему по одному все единицы второго слагаемого.

Сотни лет люди древнего мира выполняли сложение подобным же образом, присчитывая к первому данному множеству предметов по одному предмету, взятому из второго множества, до тех пор, пока все предметы (члены) второго множества не будут исчерпаны.

Длительное время сложение чисел люди выполняли только устно с помощью каких-либо предметов — пальцев, камешков, ракушек, бобов и пр., а позже на специальных приборах — *счетной скамье, абаке, счетах.*

Только после того как была изобретена позиционная система счисления и числа стали записывать цифрами, подобно тому как это делаем мы, индийские мудрецы нашли способ сложения чисел в письменном виде. При вычислениях они записывали числа палочкой на песке, насыпанном на специально приготовленную доску. Цифры, изображенные на песке, легко было стирать, а на их месте записывать другие. Вероятно, этим можно объяснить некоторые особенности индийского приема сложения чисел.

В Древней Индии было принято записывать слагаемые в столбик — одно под другим; сумму же записывали над слагаемыми, сложение начинали с наивысшего разряда, т. е. слева направо. Если записанная в сумме цифра при сложении последующего низшего разряда изменялась, то ранее записанную цифру стирали, а на ее место вписывали новую.

Примеры:

$$26+31 \qquad \begin{array}{r} \underline{57} \\ 26 \\ \underline{31} \end{array} \quad \text{слагаемые}$$

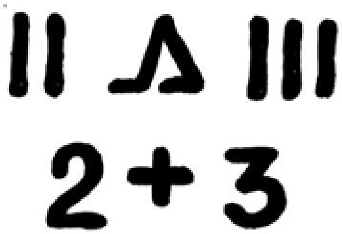
$$39+64 \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ \underline{\ 3} \\ 39 \\ \\ 64 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \text{слагаемые}$$

П р и м е ч а н и е. Здесь знак × указывает, что в числе 13 сначала была записана цифра 1, а затем она прибавлена к сумме

3 + 6 = 9 и вписано не 9, а 10.

Индийский прием сложения позаимствовали математики Среднего и Ближнего Востока, а от них в начале IX в. он перекочевал в Европу.

С XV в. способ письменного сложения чисел принял современный



В Древнем Египте знаком сложения служило схематическое изображение шагающих ног человека.

вид, а до этого долгое время слагаемые записывали одно подле другого без всякого знака между ними. В начале XV в. действие сложения стали обозначать начальной буквой слова *плюс* (в латинском алфавите — P), которое означало «сложить». К концу того же века отдельные математики стали обозначать сложение знаком +, который вскоре получил всеобщее признание. Это быстрое признание нового знака произошло, видимо, потому, что его начертание напоминает сложение двух палочек.

Однако изобретение особых знаков для обозначения арифметических действий нельзя полностью приписывать только европейским математикам. Еще древние египтяне обозначали сложение особым знаком — рисунком шагающих ног.

Название *слагаемое* впервые встречается в работах математиков XIII в., а понятие «сумма» получило современное толкование только в XV в. До этого времени оно имело более широкий смысл — *суммой* называли результат любого из четырех арифметических действий.

Вычитание

В Древней Индии вычитание чисел выполняли способом отсчитывания от уменьшаемого по одному, пока не получится вычитаемое. Например, вычитая от девяти пять, считали: «Девять без одного — восемь, девять без двух — семь, девять без трех — шесть, девять без четырех — пять, девять без пяти — четыре. Все единицы вычитаемого (пять) исчерпаны, следовательно, 9 − 5 = 4».

Второй способ вычитания (австрийский) состоит в прибавлении к вычитаемому такого числа, которое в сумме с вычитаемым даст уменьшаемое. При таком способе, например, считали: «9 − 5: пять прибавить один — шесть, пять прибавить два — семь, пять прибавить три — восемь, пять прибавить четыре — девять. Следовательно, 9 − 5 = 4, так как, прибавив к пяти четыре, получаем уменьшаемое — девять».

Индийские математики выполняли вычитание больших чисел способом, похожим на сложение. Они начинали вычитание с наивысших разрядов, причем те цифры, от которых приходилось «занимать» единицу, чтобы раздробить ее в десяток низших разрядных единиц, они стирали и записывали на место стертой новую, на единицу меньшую цифру. Для них это было удобно, так как в Индии черновые вычисления выполняли на доске, посыпанной песком.

Индийский способ вычитания переняли арабы. Но они не стирали цифры, а перечеркивали их и надписывали новую цифру над перечеркнутой. Это было очень неудобно. Тогда арабские математики, используя тот же прием вычитания, стали начинать действие с низших разрядов, т. е. разработали новый способ вычитания, сходный с современным.

Для обозначения вычитания в III в. до н. э. в Греции использовали перевернутую греческую букву пси (Ψ). Итальянские математики пользовались для обозначения вычитания буквой М (μ), начальной в слове *минус*. В XVI в. для обозначения вычитания стали применять знак $-$. Вероятно, этот знак перешел в математику из торговли. Торговцы, отливая для продажи вино из бочек, черточкой мелом обозначали число мер проданного из бочки вина. Чтобы отличать знак минус от тире, Л. Ф. Магницкий (XVIII в.) обозначал вычитание знаком $\div$.

Знак равенства ($=$) впервые введен английским учителем математики Р. Рикоррдом в XVI в. Он пояснял: «Никакие два предмета не могут в большей степени быть равны между собой, как две параллельные линии». Но еще в египетских папирусах встречается знак, который обозначал равенство двух чисел, хотя этот знак совершенно не похож на знак $=$.

Названия *уменьшаемое* и *вычитаемое* появились в Европе только в XVIII в. А слово *разность* введено на 250 лет раньше.

Умножение

Умножение — это особый (частный) случай сложения нескольких одинаковых чисел. В далекие времена люди учились умножать уже при счете предметов. Так, считая по порядку числа 17, 18, 19, 20, они должны были представлять 20 не только как $10 + 10$, но и как два десятка, т. е. $2 \cdot 10$, 30 — как три десятка, т. е. три раза повторить слагаемым десяток — $3 \cdot 10$ — и т. д.

Умножать люди начали значительно позже, чем складывать. Египтяне выполняли умножение посредством повторного сложения или последовательного удвоения. Например, чтобы умножить 27 на 13, они составляли запись, подобную следующей:

*1—27 (складывая $27 + 27$ или удваивая $27 \cdot 2$, они получали 2—54; сложение или удвоение повторяли):

*4—108 (и т. д.)

*8—216

13 351

Из первого столбика вычислитель выбирал те числа, которые в сумме составляли множитель (13), т. е. 1 + 4 + 8, и отмечал их условными значками (у нас эти числа отмечены звездочкой *). Затем удвоенные числа, стоящие против отмеченных звездочкой, складывали и получали произведение. Этот прием (им пользовались во многих местах, в том числе и в нашей стране) применялся на практике продолжительное время. Ему даже дали название «способ умножения, применяемый русскими крестьянами».

В Вавилоне при умножении чисел пользовались специальными таблицами умножения — «предками» современных.

В Древней Индии применяли способ умножения чисел, тоже довольно близкий к современному. Индийцы производили умножение чисел начиная с высших разрядов. При этом они стирали те цифры, которые при последующих действиях надо было заменять, так как к ним прибавляли число, ныне запоминаемое нами при умножении.

Таким образом, математики Индии сразу записывали произведение, выполняя промежуточные вычисления на песке или в уме.

Индийский прием умножения, напомню, перешел к арабам. Но арабы не стирали цифры, а перечеркивали их и надписывали новую цифру над перечеркнутой.

В Европу индийский способ умножения пришел через арабов. Только в XV в. европейские математики отказались от перечеркивания неточных цифр и стали начинать умножение с низших разрядов. Европейскими математиками было разработано около десятка различных вариантов приема умножения, например умножение «решеткой» и др.

В Европе продолжительное время произведение называли *сумма умножения*. Название *множитель* упоминается в работах VI в., а *множимое* — в XIII в.

В России впервые дал названия всем членам (компонентам) умножения в начале XVIII в. Л. Ф. Магницкий — автор учебника «Арифметика». В нем он указал:

34 — еличество (количество),

2 — множитель,

68 — продукт, или произведение.

Для обозначения действия умножения одни из европейских математиков XVI в. употребляли букву М, которая была начальной в латинском слове, обозначавшем увеличение, умножение, — *мультипликация* (от этого слова произошло название «мультфильм»). В XVII в. некоторые из математиков стали обозначать умножение косым крестиком — ×, а иные употребляли для этого точку. В XVI—XVII вв. для обозначения действий применяли различные символы — единообразия в их употреблении не было. Только в конце XVIII в. большинство математиков стали употреблять в качестве знака умножения точку, но допускали и употребление косого креста. Знаки умножения (·, ×) и знак равенства (=) стали общепризнанными благодаря авторитету знаменитого немецкого математика Готфрида Вильгельма Лейбница (1646—1716).

Деление

Два любых натуральных числа всегда можно сложить, а также умножить. Вычитание из натурального числа можно выполнить лишь тогда, когда вычитаемое меньше уменьшаемого. Деление же без остатка выполнимо только для некоторых чисел, причем узнать, делится ли одно число на другое, трудно. Помимо того, есть числа, которые вообще нельзя разделить ни на какое число, кроме единицы. Делить на нуль нельзя. Эти особенности действия значительно усложнили путь к уяснению приемов деления.

В Древнем Египте деление чисел выполняли способом удвоения и медиации, т. е. делением на два с последующим сложением отобранных чисел. Например, чтобы разделить 60 на 12, египетские математики поступали так: 60 : 12

1 — 12*
2 — 24
4 — 48*
8 — 96

(т. е. составляли табличку, в которой делитель (12) сначала удваивали, затем учетверяли и т. д.). Из второго столбика отбирали числа, которые в сумме составляли делимое. Строки с этими числами — первую и третью (1 — 12 и 4 — 48, так как 12 + 48 = 60) отмечали особым значком (здесь они отмечены звездочкой). Отмеченные числа складывали и получали ответ: 1 + 4 = 5, так как 12 + 48 = 60. Следовательно, 60 : 12 = 5.

А вот более сложный пример: 492:12

1 — 12*
2 — 24
4 — 48
8 — 96*
16 — 192
32 — 384*

Поступаем так же, как в первом случае: так как 492 = 384 + 96 + 12, то 492 : 12 = (32 + 8 + 1). Следовательно, 492 : 12 = 41.

Математики Индии изобрели способ «деление вверх». Они записывали делитель под делимым, а все промежуточные вычисления — вверху над делимым. Причем те цифры, которые при промежуточных вычислениях подвергались изменению, индийцы стирали и на их место писали новые.

Позаимствовав этот способ, арабы в промежуточных вычислениях стали цифры перечеркивать и надписывать над ними другие. Такое нововведение значительно усложнило «деление вверх». Запись деления получалась очень громоздкой и для многих непонятной (поэтому мы его здесь не приводим). Даже знающие люди допускали при таком способе деления ошибки. Однако европейские математики восприняли способ деления от арабов и пользовались им до XVIII в. Вот почему среди итальянских поговорок сохранилась: «Трудная вещь — деление», а человек, усвоивший в то время деление, получал звание «доктора абака».

Способ деления, близкий к современному, впервые появился в итальянской рукописи 1460 г. Этот способ отличался от современного лишь тем, что остаток при вычитании частичного произведения делителя на отдельные разряды частного записывался дважды. Вот, например, как делили числа в XV—XVII вв.

6912:27	
делимое 6912	256 частное
делитель 27	(27·$\underline{2}$; 69−54=15, сносим 1, будет 151)
151	
делитель 27	(27·$\underline{5}$; 151−135=16 и снесли 2)
162	
делитель 27	(27·$\underline{6}$=162. Остатка нет)

Примечание: подчеркнутые цифры записывали в частное, словесные пояснения и вычисления в скобках приведены для ясности; все приведенные вычисления выполняли в уме.

Потребовалось около трех веков, чтобы указанный способ деления был окончательно усовершенствован и в современном виде принят всеми математиками мира. Попыток усовершенствовать деление было сделано немало, и поэтому приемов деления существовало около десятка.

Фибоначчи.

На протяжении тысячелетий действие деления не обозначали каким-либо знаком — его просто называли и записывали словом. Индийские математики первыми стали обозначать деление начальной буквой из названия этого действия. Арабы ввели для обозначения деления черту. Черту для обозначения деления от арабов перенял в XIII в. итальянский математик Фибоначчи. Он же впервые употребил термин *частное*.

Знак двоеточия (:) для обозначения деления вошел в употребление в конце XVII в. До этого у некоторых математиков встречался знак ÷, которым они обозначали это действие.

Результат деления в продолжение нескольких столетий называли *сумма*. В России названия *делимое, делитель, частное* впервые ввел Л. Ф. Магницкий в начале XVIII в. Он в своей книге «Арифметика» привел два способа деления — «деление вверх» и второй способ, близкий к современному.

33. Зарождение и распространение понятия о процентах

Вам, конечно, часто приходится слышать слово *процент*, вы знаете, что сотую долю числа называют *процентом числа* и обозначают знаком %. Понятие процента как особой единицы расчета появилось в связи с распространением в обществе торговых отно-

шений, когда за взятые на время (в долг) деньги заимодавец получал с должника некоторую сумму сверх долга. Эту сумму обычно выражали в сотых долях от взятых в долг денег. Позднее она получила особое название — *проценты.*

Уже в клинописных табличках вавилонян содержатся задачи на расчет процентов. До нас дошли составленные вавилонянами таблицы процентов, которые позволяют быстро определять сумму процентных денег.

Были известны проценты и в Индии. Индийские математики вычисляли проценты, применяя так называемое тройное правило, т. е. пользуясь пропорцией. Например, при расчете 6% от 720 записывали:

1% составляет $\frac{720}{100}$,

а 6% составляет $\frac{720 \cdot 6}{100} = 43{,}2.$

Они умели производить и более сложные вычисления с применением процентов.

В Древнем Риме были широко распространены денежные расчеты с процентами. Даже римский сенат вынужден был устанавливать максимально допустимый процент, взимаемый с должника, так как некоторые заимодавцы чрезмерно усердствовали в получении процентных денег.

В средние века в Европе в связи с широким развитием торговли особенно много внимания обращали на умение вычислять проценты. В то время приходилось рассчитывать не только проценты, но и проценты с процентов, т. е. *сложные проценты,* как называют их в наше время. Отдельные конторы и предприятия для облегчения труда при вычислениях процентов разрабатывали свои особые таблицы, которые зачастую составляли коммерческий секрет фирмы.

Впервые опубликовал таблицы для расчета процентов в 1584 г. Симон Стевин — инженер из города Брюгге (Нидерланды). Стевин известен замечательным разнообразием научных открытий, в том числе особой записи десятичных дробей.

Долгое время проценты использовались только в денежных делах, при определении прибылей или убытков. К нашему времени область применения процентов значительно расширилась. Проценты применяются в статистике, планировании экономики, в технике и науке, в денежных расчетах и т. д.

Слово *процент* произошло от двух латинских слов: *про* — «на» и *центум* — «сто», т. е. буквально в переводе на русский язык процент означает «на сто». Если, например, принять план за 100 единиц, то перевыполнение его на 7 единиц даст прирост к плану на 7%.

Употребление знака % закрепилось в XVII в. Предполагают, что этот символ произошел от сокращения латинского слова centum в cto. При скорописи cto стало выглядеть о/о, а затем %. Довольно продолжительное время этот знак записывали только с горизонтальной чертой, а затем от этого условия отошли.

Иногда при расчетах применяют не сотую долю, а тысячную. В этом случае ее называют *проми́лле*. Промилле — это тысячная доля числа, а обозначают ее особым знаком ‰.

Упражнения и задачи

1. Выполните сложение чисел столбиком индийским способом, т. е. начиная с наивысших разрядов: 367 + 1843; 8391 + 6258.

2. Произведите вычитание начиная с высших разрядов:
17 358 — 12 487   5698 — 4809

3. Произведите умножение способом египетских писцов, т. е. способом удвоения и последующего сложения: 28·19; 72·16.

4. Выполните умножение начиная с высших разрядов:
8329·8   5723·24

---

34. Несколько старинных приемов вычислений

Проверка девяткой

В Древней Индии математические вычисления обычно выполняли тонкой палочкой на доске, покрытой песком, при этом довольно часто приходилось записанную ранее цифру стирать и записывать на ее место новую, полученную при вычислениях. Но проверить по сохранившейся на доске записи результат вычисления было довольно сложно. Индийские вычислители нашли иной способ проверки действий — *проверку девяткой*. Впоследствии проживавшие в Средней Азии арабы позаимствовали у индийцев их нумерацию и многие приемы вычислений, в том числе и проверку девяткой.

Проверка девяткой основана на том, что остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления на 9 суммы значений цифр данного числа. Например, 372 : 9 = 41 (остаток 3); сумма значений цифр этого числа 3 + 7 + 2 = 12; при делении 12 на 9 образуется тоже остаток 3.

Математики Востока ввели даже особое «мерило» — укороченное число, которое облегчало проверку действия. Укороченное число (мерило, или остаток при делении числа на 9) находили сложением значений всех цифр данного числа. Так, для числа 372 сумма значений цифр составляет 12, а для 12 — 3 (1 + 2 = 3), следовательно, мерило (или укороченное число, или остаток) при делении на 9 для числа 372 будет 3. Для числа 8695: 8 + 6 + 9 + 5 = 28; 2 + 8 = 10; 1 + 0 = 1, т. е. укороченное число равно 1.

Приведем примеры проверки девяткой различных действий.

1. **Сложение.**
577 + 439 = 1016.

Сумма значений цифр слагаемых
(5 + 7 + 7) + (4 + 3 + 9) = 35.

Укороченное число для 35 будет: $3 + 5 = 8$.

Следовательно, при делении суммы значений цифр слагаемых на 9 получаем в остатке 8, и укороченное число суммы (1016) тоже 8. Ошибки при сложении не обнаружено.

2. **Умножение.**
$365 \cdot 56 = 20\,440$.

Для проверки девяткой находим укороченные числа множителей, т. е. для 365: $3 + 6 + 5 = 14$ и $1 + 4 = 5$; для 56: $5 + 6 = 11$, $1 + 1 = 2$; умножаем укороченные числа множителей $5 \cdot 2 = 10$, находим укороченное число произведения: $1 + 0 = 1$. Сравниваем его с укороченным числом для 20 440, т. е. $2 + 0 + 4 + 4 + 0 = 10$, $1 + 0 = 1$. Остатки при делении на 9 произведения и множителей совпадают. Ошибки не обнаружено.

3. **Вычитание.**
$794 - 359 = 435$.

Найдем укороченные числа. Для 794: $7 + 9 + 4 = 20$, $2 + 0 = 2$; для 435: $4 + 3 + 5 = 12$, $1 + 2 = 3$; для 359: $3 + 5 + 9 = 17$, $1 + 7 = 8$. Найдем укороченное число при сложении остатка с вычитаемым, т. е. $8 + 3 = 11$, $1 + 1 = 2$. При делении на девятку остаток в первом случае (для 794) 2 и в последнем (для 435 и 359) тоже 2. Ошибки в действии вычитания не обнаружено.

4. **Деление.** Порознь для частного и делителя находим укороченные числа. Умножим их и найдем для их произведения укороченное число. Сравним его с укороченным числом делимого из заданного примера. Если они не равны, то при делении допущена ошибка.

$775 : 25 = 31$.

П р о в е р к а: укороченное число частного: $3 + 1 = 4$. Укороченное число делителя: $2 + 5 = 7$. Произведение найденных укороченных чисел $4 \cdot 7 = 28$. Укороченное число для 28: $2 + 8 = 10$ или $1 + 0 = 1$. Укороченное число делимого: $7 + 7 + 5 = 19$ или $1 + 9 = 10$, $1 + 0 = 1$.

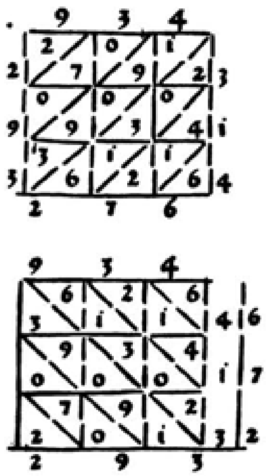
Проверка показала: найденные укороченные числа равны, следовательно, ошибка не обнаружена.

Проверка девяткой широко применялась в XV в. и позже. Способы проверки девяткой рекомендовал применять и Л. Ф. Магницкий в «Арифметике». Однако он не указал, что эта проверка не всегда позволяет уловить ошибку, допущенную при вычислениях, например при ошибочной перестановке цифр.

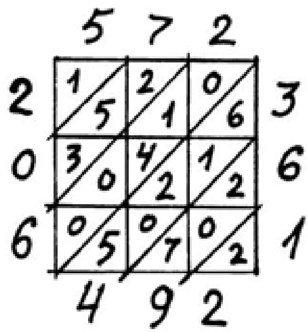
Два способа умножения чисел

Умножение долгое время считалось трудной операцией. Многие математики в XVI в. пытались отыскать более легкий прием умножения, и появилось несколько вариантов умножения. Тогда же был открыт и современный метод под названием «шахматный способ умножения».

В старину многие при умножении пользовались способом умножения решеткой. Для этого один из множителей записывали горизонтально с увеличенными промежутками между цифрами. Под ним вычерчивали решетку в виде клеток, причем каждую клетку делили наклонной линией на два треугольника. Второй множитель располагали справа от решетки и записывали число вертикально сверху вниз, располагая цифры строго против клеток решетки.



Умножим способом решетки 572 на 361. Умножать начнем с наивысших разрядов. Когда от умножения пары цифр получим однозначное число, запишем его в нижней части клетки, а в верхней части напишем нуль. Если же получим двузначное число, то десятки его запишем в верхней части клетки, а единицы — в нижней. Когда все пары множителей будут умножены и результаты записаны в решетке, произведем сложение цифр отдельно для каждой наклонной полосы. Сложение выполним справа налево. Если при сложении получится сумма двузначная, то запишем только единицы, а десятки прибавим к сумме чисел слева от наклонной полосы. Произведение окажется записанным слева от решетки и внизу нее. Прочитаем ответ: 206 492.



В Италии этот способ умножения называли *джелозия,* что означает «оконные жалюзи» — решетка.

А вот еще один способ умножения, не утративший своего значения и в наши дни. В «Арифметике» Л. Ф. Магницкого, в главе, посвященной умножению, читаем: «Нецыи же умножают странным иным некоим образом... якоже зде умножено есть зри сице

481
×
399

1443
4329
4329

19 1919».

В приведенном способе умножение начато с высших разрядов, а не с низших. В этом и состоит «странность» этого способа.

Академик А. Н. Крылов (1863—1945) — один из крупнейших математиков и вычислителей — настойчиво советовал начинать умножение с высших разрядов. Особенно следует рекомендовать этот способ при выполнении приближенных вычислений, так как он экономичнее и удобнее обычного — в этом случае при первом же умножении мы получаем важнейшую часть произведения.

35. Таблица умножения

«Пятью пять — двадцать пять, шестью шесть — тридцать шесть». Все школьники помнят эти две строки из таблицы умножения. Но не каждый учащийся знает, когда и в каком виде она появилась.

Еще в глубокой древности многие математики, чтобы облегчить труд, пользовались таблицами для умножения и деления чисел. Однако вавилонские, египетские, греческие и даже римские таблицы до нас не дошли. Самая ранняя таблица умножения (I в.), дошедшая до нас, по своей форме близка к известной нам так называемой пифагоровой таблице умножения, записанной в квадрате, состоящем из 100 клеток. В ней все произведения чисел от 1 до 10 повторяются дважды.

В книге, изданной в 1496 г., подобная таблица случайно была названа пифагоровой, хотя никакого отношения к Пифагору[1] она не имеет. Все же это название за квадратной таблицей умножения сохранилось и дошло до наших дней.

Недостатком квадратной таблицы умножения является нера-

Такой вид имела усовершенствованная в XV в. таблица умножения.

1	2							
2	4	3						
3	6	9	4					
4	8	12	16	5				
5	10	15	20	25	6			
6	12	18	24	30	36	7		
7	14	21	28	35	42	49	8	
8	16	24	32	40	48	$\boxed{56}$	64	
9	18	27	36	45	54	63	72	

[1] Древнегреческий философ и математик Пифагор жил в VI в. до н. э.

циональное повторение произведений: например, в ней записано 4·5 и 5·4. Запоминание таблицы умножения требовало много времени. Поэтому еще в XII в. были созданы треугольные таблицы умножения, в которых одно и то же произведение записано только один раз. Вот какой вид имела усовершенствованная в XV в. таблица умножения.

По этой таблице произведение 7·8 будет соответствовать числу, стоящему в седьмом столбце восьмой строки (цифры над каждым столбцом указывают и номер столбцов).

Математик аль-Хорезми рекомендовал таблицу умножения заучить наизусть: «И если ты захочешь умножить какое-нибудь число на другое с помощью индийских букв (цифр), необходимо запомнить умножение чисел, которые имеются между единицей и девятью, друг на друга, совпадают ли эти числа или они различны».

В Москве в 1682 г. была напечатана книга «Считание удобное, которым всякий человек купающий и продающий зело удобно изыскати может число всякие вещи». В ней приведены таблицы произведений всех целых чисел от 1 до 100. В пояснении дано описание, как пользоваться данной таблицей. Применяя эту таблицу, без особого труда можно определить, например, произведение 37·26 и др.

В XVIII в. в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого таблица умножения дана в рациональном виде. Вот отдельные столбцы из нее:

	2	4		3	9		4	16
	3	6		4	12		5	20
	4	8		5	15		6	24
2-жды	5 есть	10	3-жды	6 есть	18	4-жды	7 есть	28
	6	12		7	21		8	32
	7	14		8	24		9	36
	8	16		9	27		10	40
	9	18		10	30			
	10	20						

Каждый следующий столбик уменьшается на одну строку, и последний из них имеет вид:

9-тью	9 есть	81
	10	90

Автор наказывал: «Таблицу надо заучить и всегда ее помнить, а если кто ее забудет, то пользы не будет».

Упражнения и задачи

1. Выполнить действия и проверить девяткой:

$$3729 + 12\,068; \quad 863 \cdot 647$$

2. Произвести умножение решеткой:

$$1829 \cdot 367; \quad 468 \cdot 248$$

3. Произвести умножение по методу академика А. Н. Крылова:

$$6274 \cdot 845$$

4. Какой цифрой оканчивается сумма: $21 \cdot 34 \cdot 46 + 64 \cdot 29 \cdot 37$?

---

36. Как быстрее вычислять?

Абак и счеты

Долгое время счет для людей оставался трудным занятием. Значительно легче было считать на пальцах рук и ног, которые стали как бы первой счетной машиной. Постепенно люди придумали немало хитроумных способов счета при помощи не только пальцев, но и суставов. Однако так можно было выполнять некоторые действия лишь с небольшими числами. С развитием хозяйственной деятельности человек стал оперировать большими числами, используя однородные предметы: камешки, ракушки, орехи, бобы и т. п. Для удобства подсчета в употребление вошли специальные доски, на которых раскладывали эти предметы и пересчитывали их.

Со временем доски для подсчета стали расчерчивать на несколько полос или колонок. Это позволило вести счет с помощью однородных предметов значительно быстрее. Например, чтобы сложить числа 231 и 156, не надо было брать такое же количество предметов. Достаточно было положить в первую колонку 1 предмет, во вторую — 3, в третью — 2. Затем в таком же порядке под этими предметами раскладывали число 156. Подсчитав число предметов в каждой отдельной колонке (в первой их было 1 + 6=7, во

второй 3 +5=8, в третьей 2 + 1 = 3), можно было определить сумму 387.

Так люди пришли к изобретению *абака* — счетной доски, которая многие сотни лет в разных странах помогала экономить время в действиях с большими числами.

Абак за время своего существования постепенно совершенствовался. Первоначально это была доска, посыпанная тонким слоем мелкого песка или порошком из голубой глины. На ней простой палочкой можно было писать буквы, числовые знаки, чертить фигуры, а при необходимости все это стирать. Такой доской обычно пользовались при обучении. От порошка, покрывающего доску, вероятно, и произошло само название *абак*. Это слово имеет корень *-бак*, что в переводе с древнееврейского языка на русский означает «песок, прах, пыль».

Для практических подсчетов

абак расчерчивали линиями на полосы или колонки. Впоследствии колонки вверху дужками объединяли в группы по три. Каждая такая группа представляла собой определенный класс (числовой). Такое усовершенствование позволяло быстрее прочитывать числа, выложенные на абаке.

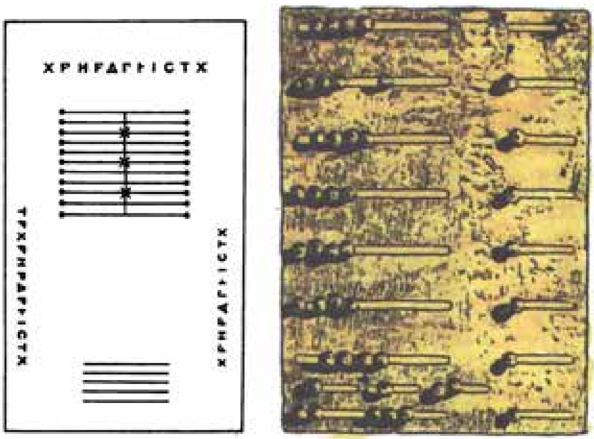
Предполагают, что древние вавилоняне пользовались абаком с колонками, соответствующими шестидесятеричной системе счисления.

Имеется упоминание о том, что в Греции абак существовал уже в V в. до н. э. На древней вазе сохранилось изображение грека, считающего на абаке. Археологи прошлого века при раскопках нашли старинный абак. Он имеет вид мраморной плиты размером 105 см $\times$75 см с высеченными на ней линиями.

При дальнейшем усовершенствовании абака стали пользоваться специально изготовленными кружками или квадратиками — жетонами. Позже (в I в. до н. э.) вошли в употребление «меченые жетоны», т. е. кружки или квадратики с проставленными на них цифрами (метками). Такие жетоны называли *алексами.*

Древние римляне пользовались абаком в виде доски или особого столика, крышка которого была разделена на полосы или колонки. Вверху каждой колонки стояли знаки, указывающие разряд чисел — единицы, десятки, сотни и т. д.

Пользовались, хотя сравнительно недолго, абаком и народы Индии. Десятичное позиционное счисление и нумерация, разработанные в Индии, позволяли выполнять действия письменно. Свои вычисления индийцы делали на песке, поэтому они отказались от абака, расчерченного на колонки, а пользовались простой доской, покрытой слоем песка. На таком приборе было удобно не только записывать числа, но и без



Старинный абак и древние счеты.

труда заменять одну цифру другой, если это требовалось при вычислениях.

Арабы, переняв абак у индийцев и переселившись на запад после завоевания Испании (VIII в.), продолжали считать на абаке значительно дольше индийцев. От западных арабов (начиная с X в.) абак переняли народы Европы.

Абак, а точнее его близкий собрат — счетная скамья, которая на нескольких языках (немецкий, итальянский и др.) называется «банка», дала повод назвать учреждение, в котором производят разнообразные денежные операции, словом *банк*.

В Древней Руси при счете также применяли приборы, близкие к абаку. Первоначально они, по-видимому, были позаимствованы у римлян или греков, но впоследствии усовершенствованы на свой лад. О том, что у нас считали на абаке, говорит крылатое выражение «остался на бобах». Надо полагать, это выражение сложилось при игре, когда выигрыш и проигрыш подсчитывался на абаке с помощью бобов. Тот, кто, проиграв, отдавал все свои деньги, оставался только с бобами, на которых считал, т. е. «оставался на бобах».

Считая на абаке, числа нередко откладывали особыми костями. Такой способ у нас называли «счет костьми». Несколько позже на Руси получил широкое распространение «дощаный счет». Этот прибор состоял из ряда шнуров с нанизанными на них косточками. Впоследствии этот прибор стали делать в виде рамы с рядом стержней, на каждом из которых был нанизан десяток костей. В XVI в. этот прибор уже имел вид русских счетов, которые были значительно совершеннее абака и поэтому употребляются и в наши дни.

Русские счеты после войны с Францией (1812) были завезены пленными во Францию и получили распространение в Европе.

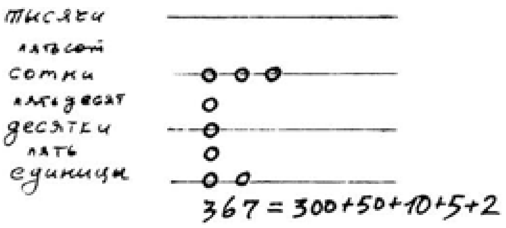
Своеобразные приборы, похожие на наши счеты, но более сложные, применялись с давних пор в Китае и Японии.

Счет на линиях

Европейские математики в XIII в. разработали *счет на линиях*, позаимствовав приемы счета на абаке.

На листе бумаги, разделенном на две части, проводили несколько параллельных отрезков с промежутками в 2—5 см. Число откладывали с помощью кружков или жетонов, пользуясь пятеричной системой счисления. Жетон, расположенный на нижней линии, означал 1, а жетон, лежащий между первой и второй линиями, означал 5. Жетон на второй линии означал 10, а жетон, лежащий выше этой линии, — 50. На третьей линии жетон означал 100.

Жетон, положенный выше третьей линии, но ниже четвертой, уже означал 500 и т. д. На рис.   показано, как отложить на линиях число 367.



На одной половине листа выкладывали первое число, а на другой — второе. Выполняя сложение, складывали жетоны, расположенные на одном отрезке или в одном и том же промежутке между линиями. Результат сложения записывали или выкладывали также на линиях в нижней части листа. В Западной Европе лишь в XVI в. счет на линиях стал вытесняться «счетом пером» — письменными вычислениями.

Абацисты и алгоритмики. Старинная гравюра.

Борьба между абакистами и алгоритмиками

Утверждение десятичной позиционной системы счисления и нумерации происходило в борьбе нового со старым. Новая система медленно распространялась в Европе в течение XII и XIII вв. До этого времени в Западной Европе действия с числами выполняли только с помощью абака, устно или на линиях. Знакомство с десятичной позиционной системой счисления и нумерацией привело к тому, что некоторые математики стали отказываться от применения абака и перешли к письменным вычислениям — к *счету пером* (так называли этот способ вычислений в то время).

Сторонники абака (абакисты) стремились сохранить укоренившийся способ математических вычислений. Новый способ — счет пером — для них был непривычен. Им было трудно и сложно переучиваться. Абакисты отвергали счет пером. Они уверяли, что только абак позволяет считать быстро, легко и безошибочно.

Сторонников письменных вычислений прозвали алгоритмиками.


PVS A
RITH=
ME
TICAE.
BOETIVS
RAS
TAGO
PY

Они упорно боролись за нововведение. Сторонники нового — алгоритмики утверждали, что счет пером проще, удобнее и его легко проверить, дабы устранить ошибки.

Между абакистами и алгоритмиками во многих городах проходили своеобразные турниры-диспуты о преимуществах того или иного способа вычислений. Диспуты сопровождались практическими вычислениями на скорость — кто скорее и без ошибок произведет одни и те же вычисления на абаке или пером. Довольно часто эти турниры перерастали в жаркие споры, а иногда заканчивались крупными скандалами.

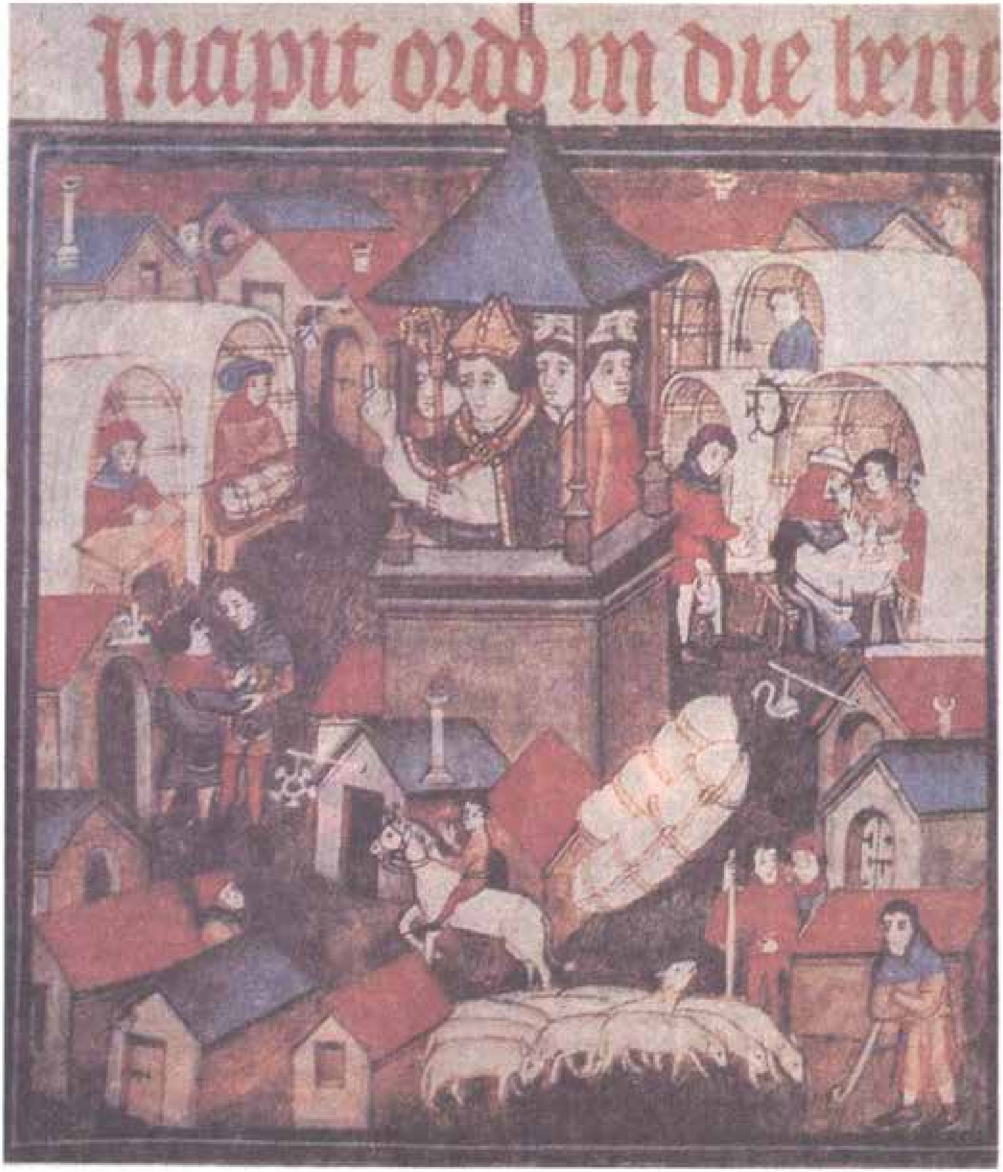
Борьба старого и нового нашла свое отражение в ряде рисунков. Победе алгоритмиков способствовали работы ученых Средней Азии, и особенно аль-Хорезми, имя которого послужило возникновению термина *алгоритм.* Значительную роль в победе алгоритмиков сыграла практическая потребность в быстром и удобном счете.

Заключительный удар по абакистам нанес первый ученый-математик Европы Леонардо Пизанский — Фибоначчи. Он родился в конце XII в. в семье купца и еще мальчиком научился производить вычисления на абаке. Позднее в путешествиях по Египту, Сирии, Греции и другим странам он познакомился с различными способами вычислений и пришел к выводу, что индусский способ — наилучший. Большое влияние

оказали на него арабские математики.

В 1202 г. Фибоначчи написал и издал «Книгу абака». Она начинается так: «Девять индусских знаков суть следующие: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. С помощью этих знаков и знака 0, который называется по-арабски «сифр», можно написать какое угодно число». В этой книге изложены основы математических знаний того времени.

«Книга абака» разрушила все доводы абакистов в пользу счета на абаке. Запись чисел с употреблением нуля, о чем писал Фибоначчи, позволяла производить любые вычисления письменно значительно проще и быстрее, чем на абаке. Хотя «Книга абака» была сложна для понимания, сведения из нее постепенно распространялись и нашли практическое применение. Торговые люди того времени, которые больше



других нуждались в скорых и правильных вычислениях, увидели в счете пером удобный и быстрый способ всевозможных расчетов.

Репутация Фибоначчи как вычислителя привлекла внимание даже правителя Священной Римской империи Фридриха II (1194—

Изображение училища из букваря 1701 г.

1250). Однажды Фридрих во главе большой свиты посетил город Пизу, чтобы лично убедиться в искусстве знаменитого вычислителя. В честь знатных гостей в городе был устроен большой математический турнир, на котором Фибоначчи быстро решил несколько сложных задач, обнаружив блестящий талант математика и вычислителя.

Купцы, участвующие в оживленной торговле со странами Востока, высоко оценили преимущества подсчета, которым пользовались арабы и который распространяли алгоритмики. В городах объединения купцов стали подыскивать мастеров, знающих новые индо-арабские приемы вычислений, и нанимали их для обучения своих детей и торговых людей. Именно эти мастера-алгоритмики — учителя математики и содействовали широкому распространению счета пером.

Пользовались услугами счетных мастеров и в некоторых прибалтийских городах, а позднее, в XVIII в., и в Москве была открыта Математико-навигацкая школа. По ее образцу в ряде городов России были созданы так называемые цифирные школы, в которых особое внимание уделялось изучению математики и географии. В цифирных школах преподавали бывшие ученики навигацкой школы. Цифирные школы сыграли большую роль в распространении математических знаний и культуры в нашей стране.

Упражнения и задачи

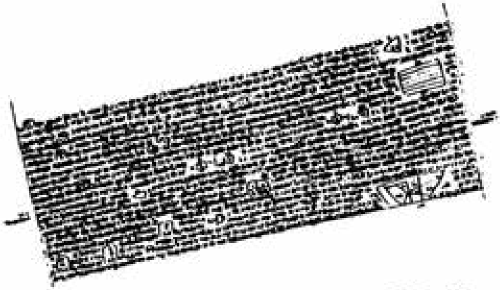
1. Произведите вычисления на счетах с «волшебным числом» 142 857, которое дает следующие результаты:

$$142\,857 \cdot 2 = 285\,714$$
$$142\,857 \cdot 3 = 428\,571$$
$$142\,857 \cdot 4 = 571\,428$$
$$142\,857 \cdot 5 = 714\,285$$
$$142\,857 \cdot 6 = 857\,142$$
$$142\,857 \cdot 7 = 999\,999$$

Примечание. При умножении на 2, 3, 4, 5, 6 в произведениях получаются числа, состоящие из цифр данного числа, а при умножении на 7 в произведении окажутся только девятки. Проверьте!

2. Умножьте число 3367 на 33, 66, 99, 132... 264, 297. В произведениях получим: 111 111, 222 222, 333 333... 888 888, 999 999.

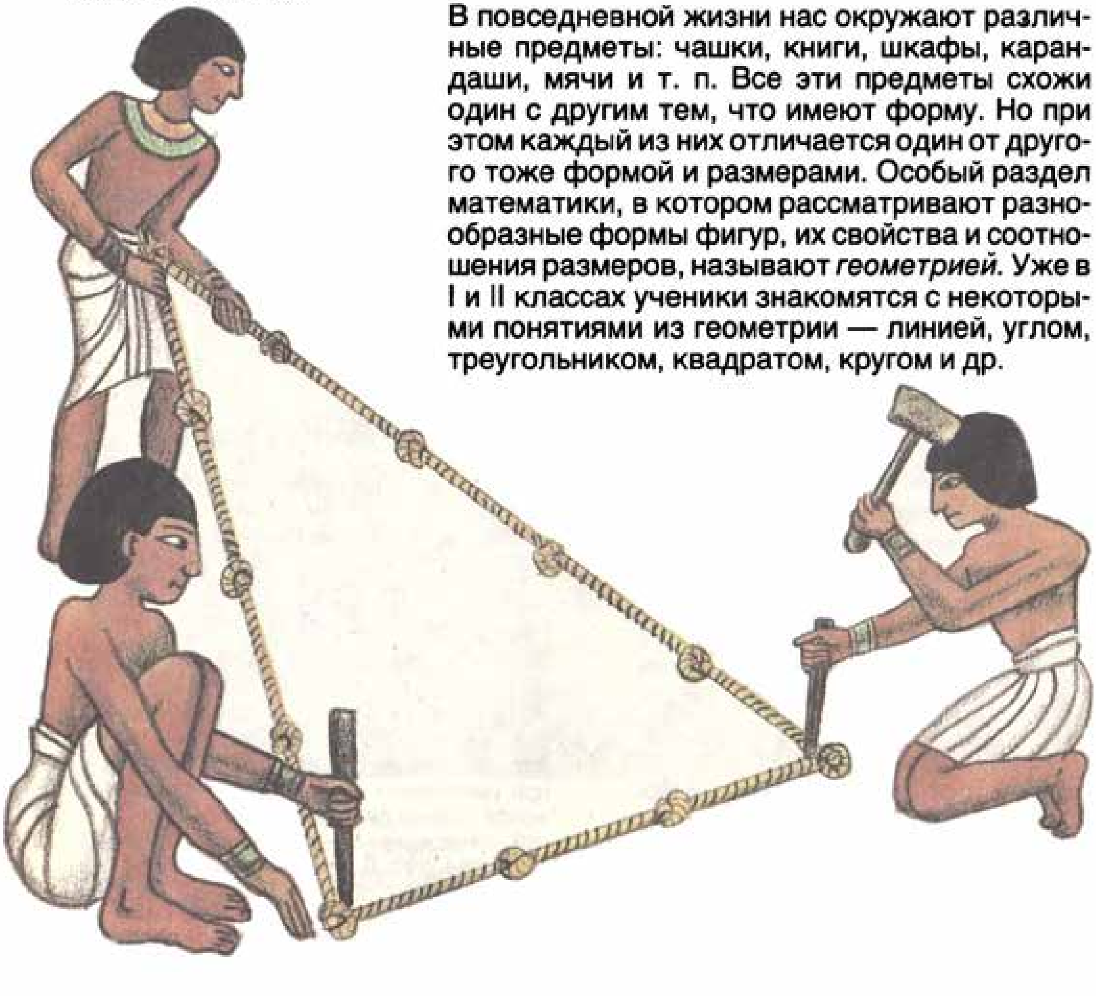
Геометрия — это наука хорошо измерять.
П. Рамус



Фрагмент копии рукописи на санскрите (составлена в 750 г.) с изображением геометрических фигур.

37. Зачем потребовалась геометрия?

В повседневной жизни нас окружают различные предметы: чашки, книги, шкафы, карандаши, мячи и т. п. Все эти предметы схожи один с другим тем, что имеют форму. Но при этом каждый из них отличается один от другого тоже формой и размерами. Особый раздел математики, в котором рассматривают разнообразные формы фигур, их свойства и соотношения размеров, называют *геометрией*. Уже в I и II классах ученики знакомятся с некоторыми понятиями из геометрии — линией, углом, треугольником, квадратом, кругом и др.



Еще в глубокой древности человек при подготовке к охоте изгибал ствол тонкого деревца и связывал его концы тетивой — шнуром. Ствол, разгибаясь, вытягивал шнур. Натянутый шнур-тетива стал прообразом прямой линии. На это указывает сходство в словах *линия* и *лен*, из волокон которого делали нити и шнуры. Лен и на латинском языке называют «линум». Произношение этого слова по-русски и по-латыни почти полностью созвучно со словом *линия*.

Развитие земледелия, ремесел и торговли вызвало практическую необходимость измерять длину и вычислять площади, определять объемы и массы различных фигур и тел. Так, правители Египта (государство образовалось примерно четыре тысячи лет назад в долине реки Нил) — фараоны установили налоги на земледельцев. В связи с этим надо было уметь определять размеры площадей земельных участков. Кроме того, Нил после обильных дождей в его верховьях сильно разливался, менял свое русло, смывая ранее установленные межи — границы участков, и поэтому приходилось ежегодно восстанавливать заново границы земельных наделов, измерять и вычислять их площади. Выполняли эту работу египетские гарпедонапты — люди, которые должны были знать свойства разнообразных геометрических фигур и способы определения площадей и объемов с применением простейших приборов. К этому времени и относят зарождение практической геометрии, которая с течением времени постепенно развилась в науку.

В дошедшем до нас древнеегипетском папирусе Ахмеса[1] среди арифметических задач есть задачи на нахождение площади земельных участков, имеющих форму квадрата, треугольника и др. Следовательно, уже в те времена люди умели определять площади треугольников, прямоугольников, трапеций. Они знали, как приблизительно вычислить площадь круга, объем куба, пирамиды.

Существование геометрических знаний у народов Древнего Востока и египтян подтверждается их умением возводить громадные сооружения.

В Древнем Вавилоне и Египте ученые вели наблюдения за движением небесных светил с целью создания календаря, и это также потребовало развития точных наук.

Расширение торговых связей повлекло за собой развитие мореплавания, которое было невозможно без знаний о путях движения звезд и планет. В свою очередь, чтобы правильно определять перемещение небесных све-

[1] Англичанин Ринд в 1858 г. нашел папирус, ширина которого — 33 см, а длина — 544 см. Полоска склеена из листьев камыша и содержит 80 записанных на ней задач. Этот папирус назван именем Ахмеса — человека, написавшего этот документ. Хранится папирус в Британском музее. Иногда его называют «папирус Ринда».

тил, надо было уметь измерять расстояния, углы, площади и пр. Решение возникших практических задач заставило людей открывать и изучать свойства геометрических фигур.

Слово *геометрия* пришло к нам от греков. Оно составлено из двух греческих слов — *гео*, что в переводе на русский язык означает «земля», и *метрио* — «мерю». Значит, слово *геометрия* в переводе означает «землемерие». Само название указывает на практическое происхождение этой науки.

В своем дальнейшем развитии геометрия шагнула далеко за пределы землемерия и стала одним из важнейших разделов современной математики. Она изучает разнообразные формы тел, свойства фигур и их соотношения.

38. У истоков науки геометрии

Наиболее сведущие люди Древнего Египта и Вавилона умели измерять площади четырехугольников, треугольников и некоторых других фигур. Они знали свойства прямоугольного треугольника, умели определять объемы тел различной формы, решать некоторые простейшие геометрические задачи. Однако сведения из геометрии, которые накопили древние вавилоняне и египтяне, не были упорядочены и представляли набор правил, установленных на основе ряда практических наблюдений.

К VIII в. до н. э. к северу от Египта на побережье Средиземного моря выросло несколько крупных греческих городов-государств — *полисов*. В V в. до н. э. полисы достигли своего расцвета. Они вели оживленную торговлю, которая связывала их с другими странами, особенно с Египтом. Наиболее любознательные греки, посещая Египет — «страну чудес», знакомились с ее достижениями в области культуры и науки. Много знаний они почерпнули и у вавилонских ученых.

Греческие ученые не просто переняли знания у древних египтян и вавилонян, но и внесли свой вклад в развитие научной мысли древнего мира. В частности, они занялись поиском обоснований правил, установленных в практических работах.

С начала VI в. до н. э. греческие ученые пытались открыть законы, по которым перемещаются планеты и звезды, но знаний, почерпнутых греками в Египте и Вавилоне, для этих целей было недостаточно. Кроме того, уже известные законы движения требовали своего обоснования. А для этого нужно было постигать закономерности материального мира, выясняя причины и связи разнообразных явлений в природе.

Древние греки из наблюдений делали выводы и высказывали свои предположения (гипотезы). На встречах ученых — симпозиумах (буквально: «пиршества») эти гипотезы пытались обосновать и доказать. В то время сло-

Пифагор. Гравюра XVI в.

жилось утверждение: в споре рождается истина.

Такой подход к поискам достоверных положений в науке привел к очень важным изменениям в дальнейшем развитии математики, и особенно в разделе геометрии.

Практическая геометрия, опиравшаяся ранее только на наблюдения и опыт, трудами древних греков получила строгие научные обоснования — доказательство каждого высказанного положения.

Начало поиску доказательств положили греческий мыслитель Фалес, знаменитый Пифагор, а также его ученики и последователи. Сами греки связывали рождение геометрии как науки с деятельностью Пифагора.

Пифагор обосновал многие свойства геометрических фигур. Он и его последователи заложили основы систематических доказательств в геометрии. Они ввели в научный оборот такие понятия, как точка, не имеющая длины и ширины; линия, которая имеет только длину, и фигуры, составленные из таких линий.

Громадная заслуга древних греков в развитии науки состоит в том, что они находили причины и выводили из них соответствующие следствия. Каждое утверждение доказывалось посредством логических рассуждений. Доказав какое-либо положение, математик применял его при доказательстве следующего положения или утверждения, а затем переходил к доказательству нового.

В Древней Греции сложились основы науки геометрии, в которой каждое утверждение обосновывалось строгим доказательством. Лишь основные понятия в ней были приняты как истины, не требующие доказательств, — *аксиомы*. Такой строго обоснованной науки до этого не было ни у одного народа.

39. Фалес из Милета

Одним из семи мудрецов древности считают Фалеса Милетского

Фалес Милетский.
Гравюра XVII в.

(ок. 624—548 до н. э.). Будущий ученый родился в городе Милете, находившемся в западной части побережья Малой Азии. Фалес предсказал солнечное затмение 585 г. до н. э. Он сделал немало важных открытий в различных областях науки. Его считают отцом греческой математики.

Однажды Фалес отправился по торговым делам в Египет. Там он пробыл несколько лет и настолько глубоко изучил достижения египетских жрецов, что вскоре превзошел их в знаниях.

Рассказывают, что фараон пожелал узнать высоту пирамиды, но никто не мог ее определить.

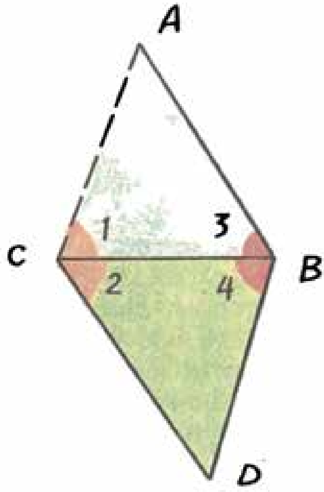
Измерение высоты пирамиды по ее тени.

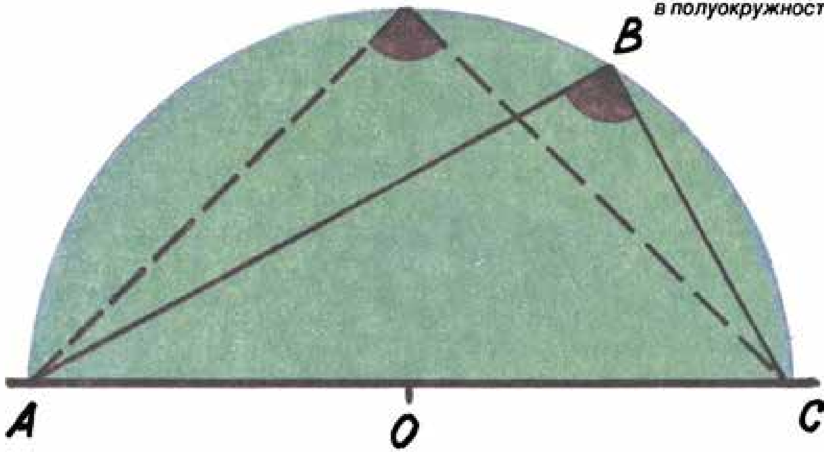
рему о равенстве двух треугольников, если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника. На основании этой теоремы Фалес Милетский определил, как измерить расстояние от конкретного места на берегу до корабля, находящегося недалеко в море.

Фалес легко справился с этой задачей. Он выбрал день и час, когда его собственная тень стала равной его росту. Измерив тень, которую отбрасывала пирамида, он установил, что длина тени от центра основания пирамиды до ее вершины была равна высоте этой пирамиды. Фараон и его приближенные были изумлены, как точно, быстро, без специальных приборов северный пришелец решил трудную задачу.

Однако, прежде чем сделать такое простое измерение, Фалес должен был открыть и доказать, что углы при основании равнобедренного треугольника равны и что против равных углов в треугольнике лежат равные стороны, а также, что сумма углов любого треугольника равна двум прямым углам. Фалес доказал также тео-

Теорема Фалеса о равенстве двух треугольников.





Угол (прямой), вписанный в полуокружность.

Предполагают, что ученый рассуждал так. Чтобы определить расстояние от точки B до точки A, надо провести произвольную линию BC и измерить угол 1 (BCA), затем отложить у той же точки C равный ему угол 2. Измерить угол 3 и у его вершины B отложить равный ему угол 4. Так как получившиеся треугольники ABC и BCD равны, то их стороны AB и BD тоже равны. Измерив BD, находили искомое расстояние AB. Равенство треугольников ABC и BCD следует из того, что эти треугольники имеют общую сторону BC и по два равных, прилежащих к ней угла ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$).

Кроме указанных теорем Фалесу приписывают доказательство следующих теорем: диаметр делит круг пополам; любой из углов, вписанных в полуокружность, — прямой; вертикальные углы равны.

Некоторые из этих утверждений были известны вавилонянам и египтянам и до Фалеса, но до него их не доказывали, а установили практическими измерениями на примере частных случаев. Фалес же указанные положения доказывал и только после этого применял их на практике. Доказательство позволяло ему утверждать, что та или иная теорема справедлива для взятых в ней фигур во всех случаях. Введя в практику доказательства теорем, Фалес заложил основы создания геометрии как науки. После него каждое открытие в геометрии древние ученые стремились обосновать доказательством и только после этого считали его истинным.

Фалес был знаком с вавилонской астрономией и сделал ряд важных открытий в этой науке. Он настолько увлекался наблюдениями за движением небесных светил, что иногда не замечал окружающих предметов. Существует предание, что однажды, наблюдая звездное небо, Фалес настолько был поглощен этим занятием, что упал в глубокий ров, а сопровождавшая его женщина воскликнула: «Как можешь ты знать, что делается на небе, когда не видишь того, что делается у тебя под ногами!»

Как философ Фалес утверждал, что все явления в мире не случайны, а закономерны; все, что существует, развилось из единой первоматерии — воды. Он говорил: «Праматерия не исчезает, меняются только формы существующего».

40. Евклид и его «Начала»

Древние греки, ознакомившись с накопленными ранее сведениями по геометрии, пришли к выводу, что их надо упорядочить, т. е. изложить последовательно одно утверждение за другим и каждое из них доказать. Впервые попытался это сделать в V в. до н. э. греческий математик Гиппократ Хиосский. После него было еще несколько попыток написать начала геометрии. Наиболее совершенной оказалась работа «Начала» Евклида (365—300 до н. э.).

Евклид жил и трудился в городе Александрии, основанном Александром Македонским. О жизни этого ученого известно очень мало. Один из его последователей — Папп (III в.) вспоминал, что Евклид был «мягок и любезен со всеми, кто мог хоть в малейшей степени способствовать развитию математической науки». Одна из легенд рассказывает, что царь Птолемей спросил Евклида: «Нет ли более короткого и менее утомительного пути к познанию геометрии?» На что ученый ответил: «Нет царской дороги к геометрии!»

Следующая легенда подчеркивает преданность ученого науке. Один из учеников Евклида спросил: «А что я смогу заработать, если выучу все это?» Ученый позвал слугу и сказал: «Дай ему 3 абола (серебряная монета), так как бедняжка хочет заработать деньги своим учением».

Евклид, глубоко изучив накопленные к тому времени сведения по математике, изложил их в строгой логической последовательности. Он выбрал несколько основных не противоречащих практике положений — аксиом, которые принял без доказательств за истинные. Все последующие утверждения он доказывал на основе принятых им аксиом и определений. Руководствуясь таким принципом, Евклид систематизировал известные в то время знания по геометрии, дополнил их своими открытиями и изложил в книге, названной «Начала».

В первых шести книгах «Начал» Евклида изложена геометрия плоских фигур. Книги VII—X вв. посвящены учению о числе, а в книгах XI—XIII вв. рассматриваются свойства геометрических

Академия наук и изящных искусств XVII в.

тел. По-видимому, многие положения в своем труде Евклид разработал и доказал самостоятельно, так как ранее они не были известны.

«Начала» Евклида послужили основой для создания ряда более поздних курсов геометрии, по содержанию весьма близких к современным учебникам средней школы. Кроме «Начал» Евклид написал труды «О делении фигур», «Данные» (задачи, решаемые с помощью геометрической алгебры), «Оптика» и др.

Величайшая заслуга Евклида в том, что он сумел привести в порядок (в систему) все сведения по геометрии. Усилиями Евклида практическая геометрия превратилась в подлинную науку.

41. Прямые. Параллельные прямые

Разнообразные геометрические фигуры (точка, прямая, кривые и ломаные, треугольники и многоугольники) встречаются в самых древних, дошедших до нас, памятниках культуры — каменных плитах, керамических сосудах, клинописных табличках, египетских папирусах.

Евклид в «Началах» дает определения многим геометрическим понятиям, например: «Линия — длина без ширины», «Прямая линия — такая, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам». Эти определения простейших понятий весьма расплывчаты. В современной геометрии их считают основными не подлежащими определению.

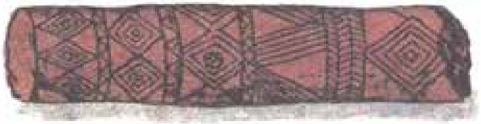
Обозначение прямых и отрезков буквами, а также термин «параллельные» появились в Древней Греции. На греческом языке parállēlos означает «рядом идущий». Это название прямых, проведенных рядом одна с другой, употреблялось пифагорийцами 2500 лет назад.

В «Началах» Евклида даны признаки параллельных. Понятие о них Евклид начинает с определения: «Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются». Уже в те времена, как указывает один из толкователей «Начал» — Прокл (410—485), существовало иное определение параллельных. Посидоний (I в. до н. э.) называл параллельными «две прямые, лежащие в одной плоскости, равноотстоящие друг от друга». Это определение по своей сущности равносильно определению Евклида, которое довольно просто логически, т. е. посредством доказательств приводит к утверждению Посидония.

Древнегреческий ученый Папп пользовался для обозначения параллельных символом =. После того как англичанином Риккордом был введен знак равенства (=), знак параллельности преобразовали, изменив направление черточек. В XVIII в. его стали писать так: II.

С развитием геометрии определение параллельных совершенствовалось. Теперь «прямые a и b называют параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек или совпадают».

Геометрические фигуры на древних орнаментах.



42. Об углах и треугольниках

Уже в древнейших орнаментах на керамических сосудах встречаются углы и треугольники.

В египетских папирусах и на вавилонских плитках даны задачи на определение площади треугольника. Это подтверждает, что понятия об угле и треугольнике возникли в глубокой древности и зародились они в связи с практическими потребностями, вероятно в связи со строительством примитивных жилищ. Прямой угол, связанный с образом естественно растущего растения (вертикаль) и других стоящих предметов, — одно из древнейших геометрических понятий. Даже в простейших сооружениях прямой угол выступает как самостоятельная фигура, а не элемент других фигур — прямоугольника, квадрата и пр. Сопоставление иных углов с прямым привело к их классификации.

Жесткая фигура треугольника сыграла большую роль в сооружении неподвижных креплений разнообразных конструкций начиная с самых примитивных. Однако научный подход к рассмотрению свойств углов и треугольников мы находим только у древних греков. У них дана классификация углов и треугольников. Среди постулатов в «Началах» Евклида имеется утверждение: «Все прямые углы равны». Там же дано определение треугольников: «Из трехсторонних фигур равносторонний треугольник есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же — имеющий только две равные стороны, разносторонний же — имеющий три неравные стороны».

Знак △ вместо слова *треугольник* впервые встречается у греческого ученого Герона (I в.).

Упражнения и задачи

1. Пользуясь приемом Фалеса, определите расстояние до какого-либо предмета, не приближаясь к нему.

2. Определите высоту столба или дерева, несколько изменив способ Фалеса (так как в нашей местности солнце редко поднимается до такой высоты, что тень становится равной длине предмета, который ее отбрасывает, то можно способ Фалеса изменить). Поставьте метровую линейку вертикально и измерьте ее тень. Приняв длину этой тени за 1 метр, измерьте этой меркой длину тени дерева или столба. Так вы узнаете их высоту в метрах.

3. «Данную ограниченную прямую (т. е. отрезок) рассечь пополам». (Задача из книги I «Начал» Евклида.)

4. В квадрате  переложите две палочки так, чтобы получилось 3 маленьких квадрата.

Математика черпает свою силу в умении исключать все лишнее в процессе мышления.

Э. Мах

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

В этом стоклеточном квадрате натуральные числа расставлены просто по порядку. Но слово «просто» может ввести в заблуждение: на самом деле этот квадрат довольно сложное сооружение. Кроме всего прочего он иллюстрирует тот факт, что в нашей системе счисления мы считаем «десятками».

43. Как складывалось понятие о числовом ряде

С незапамятных времен люди открыли первые числа и стали учиться считать разные предметы. Они считали: один, два, три, а большее число уже не могли сосчитать и говорили «много» или «куча». Людям трудно было представить, как долго можно продолжить ряд чисел, но со временем они научились считать до десяти, потом до сорока.

Проходили тысячелетия, и люди постепенно открывали все новые числа, про-

должая натуральный (естественный) ряд чисел. Разные народы прошли этот путь открытий натурального ряда чисел за различные промежутки времени. Еще и сейчас есть племена, которые пользуются лишь весьма коротким рядом чисел.

Теперь мы называем натуральным рядом чисел такое их расположение, которое начинается единицей и у которого каждое следующее число больше стоящего перед ним на единицу. Открыв натуральный ряд чисел, наиболее наблюдательные люди стали замечать, что он обладает многими интересными свойствами и имеет свои законы.

Долгое время считали, что ряд чисел не бесконечен, полагали, что есть самое большое число. До нашего времени сохранилось выражение: «Ворон, воронец — и счету конец». *Ворон* или *вран* — это название числа, состоящего из единицы и 48 нулей. Оно существовало у славян и обозначалось знаком 

Дальнейшее развитие науки показало, что счет конца не имеет, натуральный ряд чисел бесконечен. К этому выводу в разных странах пришли в разное время.

Укреплению представления о бесконечности натурального ряда чисел послужило сочинение Архимеда о подсчете числа песчинок в мире.

Название *натуральное число* впервые ввел римский философ и математик Боэций (480—524). Но окончательно это название утвердилось только в XVIII в., после того как оно было приведено в «Энциклопедии», созданной группой французских ученых.

44. Числа количественные и порядковые. Четные и нечетные

Натуральный ряд чисел позволяет ответить на вопрос, сколько предметов в том или другом множестве. Кроме того, он позволяет расположить предметы в определенной последовательности и выяснить, которым по порядку идет тот или иной предмет — шестым, седьмым или четырнадцатым и т. п. В первом случае числа называют *количественными* (два, четыре, семь), а во втором — *порядковыми* (седьмой, десятый и т. д.).

Порядковые числа натурального ряда позволяют, скажем, в шеренге солдат быстро определить место каждого человека, стоит лишь выполнить команду: «По порядку номеров рассчитайся!»

Деление чисел на количественные и порядковые было известно с самых древних времен.

Все числа натурального ряда можно распределить на два бесконечных ряда — числа нечетные и числа четные. Вот начала этих рядов.

Числа нечетные: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23...

Числа четные: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22...

В натуральном ряду числа нечетные и четные строго чередуются. За нечетным числом обязательно следует четное, за ним — нечетное.

Четные и нечетные числа были известны еще египтянам, хотя они их так и не называли. В Греции подобное распределение чисел приписывают Пифагору (VI в. до н. э.) и его последователям. Позже понятие о четных и нечетных числах получило довольно широкое распространение, что подтверждается игрой «в чет и нечет», вошедшей тогда в моду среди привилегированных слоев греков. Деление чисел на четные и нечетные вызывало интерес к свойствам натурального ряда чисел у многих математиков Греции.

Ряд нечетных чисел обладает интересными свойствами. Убедитесь в этом сами:

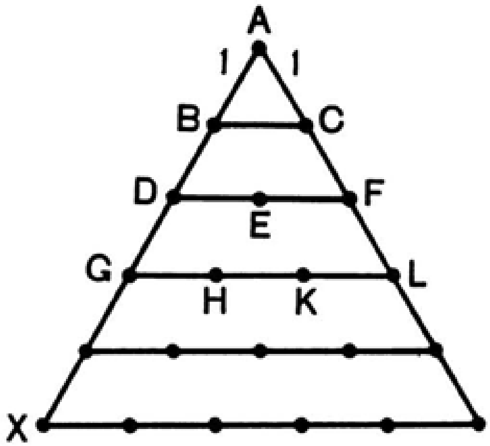
$$
\begin{aligned}
1&=1\cdot1\\
1+3&=2\cdot2\\
1+3+5&=3\cdot3\\
1+3+5+7&=4\cdot4\\
1+3+5+7+9&=5\cdot5\\
1+3+5+7+9+11&=6\cdot6\\
1+3+5+7+9+11+13&=7\cdot7\\
1+3+5+7+9+11+13+15&=8\cdot8\ldots \text{ и т. д.}
\end{aligned}
$$

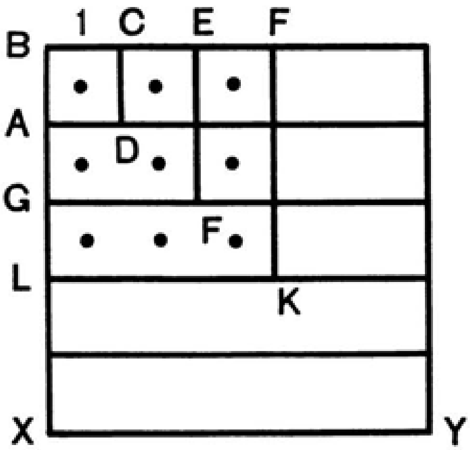
Из приведенной таблицы видно, что сумма двух первых рядом стоящих нечетных чисел дает произведение $2\cdot2$. Сумма трех нечетных стоящих рядом чисел дает произведение $3\cdot3$. Сумма первых восьми рядом стоящих нечетных чисел даст $8\cdot8$. Сумма тринадцати рядом стоящих нечетных чисел, по-видимому, даст $13\cdot13=169$. Проверьте это утверждение.

Сделанное наблюдение можно строго доказать.

Натуральный ряд чисел можно разделить на три группы. Первая — это единица; вторая группа — это числа простые, т. е. такие, которые делятся на единицу и на самих себя и больше никаких делителей не имеют, например: 2, 7, 19 и др. Третья группа — числа составные, т. е. составленные из множителей, представляющих собой простые числа. К ним относятся, например, числа 4, 6, 8, 9, 15, 20 и др. Каждое из составных чисел можно выразить произведением нескольких простых чисел. Например: $20=2\cdot2\cdot5$; $18=2\cdot3\cdot3$; $34=2\cdot17$ и т. д.

Понятия о простых числах и составных сложились также у пифагорийцев. Название этим группам чисел было присвоено позже. В книге Евклида «Начала» речь идет как о числах простых, так и о составных. К простым числам ученый отнес и единицу. Исключение единицы из группы простых чисел произошло значительно позже. Это сделал великий математик Леонард Эйлер (1707—1783). Эйлер родился и получил образование в Швейцарии, а в 1727 г. был приглашен в Петербургскую академию наук. Он указал, что единица, будучи началом всех целых чисел, не является ни простым, ни составным числом, так как у единицы только один делитель, равный числу один. О числе два, которое теперь с полным основанием отнесено к простым числам, у древних греков существо-





Геометрические фигуры пифагорийцев.

вали разные мнения. Одни из них считали это число простым, другие не относили его к таковым.

Пифагорийцы тесно связывали числа с геометрическими фигурами. Они составляли из камешков или ракушек разнообразные фигуры, которые содержали определенное число предметов, а также изображали числа точками, расположенными в определенном порядке в геометрических фигурах. Таким образом числа получались треугольные, квадратные и др.

45. Как найти сумму ряда чисел, расположенных по порядку?

Есть еще очень интересное свойство рассмотренных выше рядов чисел.

Рассказывают, что, когда будущий великий немецкий математик Карл Гаусс (1777—1855) учился в начальных классах, преподаватель предложил ученикам самостоятельно найти сумму ряда натуральных чисел от 1 до 100. Он предполагал, что учащиеся будут складывать эти числа по порядку, на что потребуется не менее 10 минут. Каково же было его удивление, когда маленький Карл через 1—2 минуты заявил, что задание он выполнил, и дал правильный ответ — 5050. На просьбу учителя дать объяснение ученик ответил: «Я заметил, что $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$ и т. д., т. е. пара равно отстоящих от краев ряда чисел дает 101 и последняя пара средних чисел $50+51$ также дает 101. Числа, взятые по паре с начала и с конца ряда, встречаются в сере-

Карл Гаусс.

дине после пятидесяти сложений этих пар. Поэтому надо $101 \cdot 50 = 5050$. Это и будет суммой всех ста чисел».

Обратимся к другому ряду чисел. Надо найти сумму ряда из 20 нечетных чисел, т. е. $1+3+5+7+...+35+37+39$. Воспользовавшись приемом Гаусса, сложите $1+39=40$, 3 и 37, 5 и 35. Каждый раз будут получаться равные суммы, составляющие число 40. Всего чисел дано 20, следовательно, пар будет 10. Поэтому сумма этого ряда составит $40 \cdot 10 = 400$. Проверьте сложением.

Сделайте такой же подсчет двумя способами для ряда 20 пар четных чисел, т. е. найдите $2+4+6+...+34+36+38+40=?$ (первый способ).

Сумма 20 первых нечетных чисел равна 400. Так как каждое четное число больше предшествующего ему нечетного числа на 1, а всех чисел дано 20, то сумма 20 четных чисел будет больше суммы 20 нечетных чисел на 20. $400+20=420$ (второй способ). Проверьте первым способом.

$$(2+40) \cdot \frac{20}{2} = 420.$$

Выпишите из какого-либо числового ряда три соседних числа. Среднее из них будет выражать половину суммы двух крайних. Например, для 13, 15, 17 полусумма двух крайних чисел будет $15=(13+17):2$. А сумма всех трех чисел составит $15 \cdot 3 = 45$. Проверьте! Для чисел натурального ряда 32, 33, 34 — $(32+34):2=33$, а сумма трех чисел $33 \cdot 3 = 99$. Можно выписать числа из натурального ряда, не соседние, а разделенные одинаковыми промежутками в два, три (или более) числа. И для этих трех чисел указанное свойство будет справедливо. Проверьте это для чисел натурального ряда 62, 67, 72 (здесь промежутки между числами равны пяти).

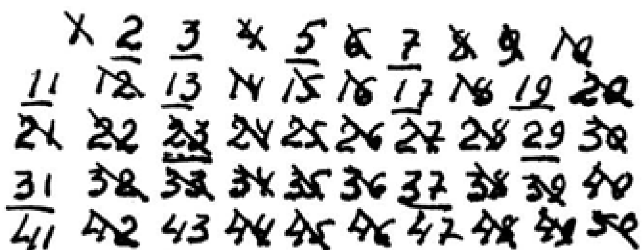
46. Решето, через которое просеяли числа

В натуральном ряду простые числа расположены весьма загадочно. Заметить порядок их чередования с числами составными чрезвычайно трудно. Решить эту задачу пытались и пытаются многие математики, начиная с Евклида.

О существовании простых чисел знали еще пифагорийцы. Заметив, что по мере удаления от начала натурального ряда промежутки между простыми числами возрастают, можно было предположить, что существует конечное простое число, после которого в натуральном ряду пойдут только составные числа. Не удовлетворившись таким предположением, Евклид сумел доказать, что это не так: наибольшего простого числа нет, так же как нет наибольшего числа и в натуральном ряду. Это положение в XVIII в. было исследовано вновь Эйлером, который еще раз доказал справедливость утверждения Евклида.

Долгое время математики затруднялись выделить из натурального ряда простые числа, не пропустив ни одного. Греческий математик Эратосфен (III в. до н. э.) открыл довольно простой, но трудоемкий способ выделения из натурального ряда простых чисел. Он записывал в ряд несколько натуральных чисел, исключал из него те числа, которые делятся на 2, затем те числа, которые делятся на 3, 4, 5, 6 и т. д. Для этого он сначала вычеркивал все числа начиная с двух через одно, т. е. четные числа, кроме двух. Затем исключал числа, которые делятся на 3, — эти числа расположены в ряду через два числа на третьем месте. Дальше вычеркивал каждое четвертое число, т. е. числа, делящиеся на четыре. Так постепенно Эратосфен отсеивал все числа, которые делятся на 2, 3, 4, 5, 6...

После многочисленных вычеркиваний в ряду оставались только те числа, которые не делятся ни на какое другое число, кроме единицы и самое себя. Это выглядело так:



Решето Эратосфена.

Эратосфен писал числа на восковой пластинке или на материале, натянутом на рамку. Числа он не перечеркивал, а прокалывал палочкой, поэтому у него получалось подобие решета, через которое как бы просеивались все составные числа. С тех пор такой прием отбора (отсеивания) простых чисел от составных называют «решето Эратосфена».

Эратосфен не стремился найти длинный ряд простых чисел. Но после него на протяжении свыше 20 столетий многие математики немало потрудились, чтобы продолжить распределение чисел на простые и составные. Настоящий подвиг в этом деле совершил чешский профессор Кулик (1793—1863). Он составил таблицы простых и составных чисел до 100 330 201. Его таблицы были написаны мелким почерком на 4212 страницах. Кулик передал свои таблицы в дар библиотеке Академии наук Вены.

В наше время поиск больших простых чисел выполняют на электронных вычислительных машинах, которые за несколько минут могут установить, к каким числам относится заданное число. Так, например, в 1958 г. нашли простое число, состоящее из 969 цифр. Открыто несколько простых чисел и более крупных. Однако свойства распределения простых чисел в натуральном ряду так до конца и не раскрыты.

Среди простых чисел нередко встречаются смежные числа, или «близнецы», например: 3 и 5, 11 и 13, 101 и 103 и др. А много ли пар таких чисел? Это пока неизвестно.

До сих пор не найдена формула, которая дала бы возможность путем вычисления находить простые числа.

Наш соотечественник с Урала И. М. Первушин (1827—1900), математик-любитель, не имевший специального образования, в 1883 г. доказал, что число $2^{61}-1=2305\,843\,009\,213\,693\,951$ — простое. Он вычислил его без применения ЭВМ, так как их в то время не существовало.

«Охота» за общей формулой, с помощью которой можно выразить любое простое число, началась еще в древности, но до сих пор не увенчалась успехом.

Француз Пьер Ферма (1601—1665), юрист, занимавшийся математикой в часы досуга, уделил немало времени исследованию простых чисел. По его заключению, выражение $2^{2^n}+1$ при $n=0$ и при любом натуральном значении n дает только простое число. Однако в этом утверждении интуиция обманула П. Ферма. Спустя 100 лет великий математик Леонард Эйлер обнаружил, что при $n=0,1,2,3,4$ формула верна, но при $n=5\,2^{2^5}+1=2^{32}+1$ дает число 4 294 967 297, которое делится на 641 и, следовательно, не является простым. Числа вида $2^{2^n}+1$ называют теперь числами Ферма.

Исследуя простые числа, П. Ферма установил, что если a — целое число, а n — простое, то выражение $(a^{n-1}-1):n$ дает только

Пьер Ферма.

целые числа. Например, при $a=6$, $n=5$ получим:
$(6^{5-1}-1):5=(1296-1):5=1295:5=$
$=259$.
(Проверьте это для $a=7$, $n=5$.)

Это утверждение известно как малая теорема П. Ферма.

В середине XVII в. П. Ферма высказал предположение, что для любого натурального числа $n>2$ уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет решения. Однако доказательства этой теоремы он не привел, хотя записал, что открыл его. Это утверждение назвали великой теоремой Ферма. Доказать эту теорему пытались многие математики. Л. Эйлер дал доказательство для чисел $n=3$ и $n=4$.

Поиски доказательства этой теоремы привели к открытию новых методов доказательств в математике и сыграли значительную роль в развитии этой науки. В настоящее время великая теорема Ферма доказана для $n \leqslant 10\,000$. С помощью ЭВМ она легко может быть проверена для любых значений n, x, y, z, но общего доказательства так и не найдено.

Самые выдающиеся математики много лет и труда отдали, чтобы разгадать тайну распределения простых чисел в натуральном ряду. Значительный вклад в решение этой проблемы внесли русские математики П. Л. Чебышёв (1821—1894), Л. Г. Шнирельман (1905—1938) и И. М. Виноградов (1891—1983). Работа по исследованию загадки простых чисел продолжается и в наши дни. Так, 13 августа 1993 г. газета «Известия» сообщала: «...заканчивается подготовка к защите патентами России практических результатов, полученных из общего доказательства великой теоремы Ферма».

47. Русский математик П. Л. Чебышёв

Пафнутий Львович Чебышёв родился в 1821 г. в селе Окатове, недалеко от Калуги. В семье его отца — Льва Павловича Чебышёва было пятеро сыновей и четыре дочери. Пафнутий с детства немного прихрамывал. Этот недостаток вынуждал его бóльшую часть времени проводить дома. Мальчик с удовольствием мастерил различные, особенно механические, игрушки. Эту увлеченность механизмами П. Л. Чебышёв сохранил на всю жизнь.

Грамоте обучила его мать, а арифметике и французскому языку — двоюродная сестра. Впоследствии Пафнутий Львович как-то рассказывал, что «своим развитием обязан бывшей у него учительнице музыки, которая музыке-то его не научила, а ум ребенка приучила к точности и анализу». Среднее образование Пафнутий получил в домашних условиях.

Шестнадцатилетним юношей он поступил на математическое отделение Московского университета, где слушал лекции лучших русских профессоров. Уже через год П. Л. Чебышёв выполнил самостоятельное исследование и написал работу о решении уравнений, за что был отмечен медалью. При обучении в университете Пафнутий Львович вынужден был сам зарабатывать средства для существования. В 20 лет он успешно окончил университет, затем работал над диссертацией и в 1847 г., защитив ее, получил звание доцента. Его пригласили читать лекции в Петербургский университет. Прошло еще три года, и молодой ученый защитил докторскую диссертацию. В звании профессора он продолжал работать в том же Петербургском университете до 1882 г.

После Евклида многие математики мира пытались установить, как распределяются простые числа среди чисел натурального ряда.

П. Л. Чебышёв.

Однако прошли тысячелетия, а заметного продвижения в решении этой проблемы не было. Существенного результата добился только П. Л. Чебышёв. Он открыл, как приблизительно подсчитать, сколько простых чисел в натуральном ряду от единицы до заранее заданного числа. Это открытие сразу сделало имя молодого ученого известным среди математиков Европы.

Научные интересы Пафнутия Львовича были весьма широки и разнообразны. Он решал и чисто практические задачи, например, как раскроить материал, чтобы получить детали одежды, абсолютно точно соединяющиеся между собой.

В своих исследованиях ученый

стремился связать теорию с практикой. Он писал: «Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает, сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных». Эту идею ученый постоянно подтверждал делом. Он математическими расчетами обосновывал действия механизма и только после этого создавал механическую модель. Таким способом он изобрел более 40 разнообразных механизмов, среди которых стопоходящая машина, подражающая движению ног животного, самокатное кресло, конструкция для гребли веслами, счетная и сортировальная машины и ряд других.

В течение 40 лет Пафнутий Львович участвовал в работе военного ведомства, в частности занимался усовершенствованием дальнобойности и точности стрельбы артиллерийских орудий.

В своих работах П. Л. Чебышёв исходил из того, что в современной науке «задачи ставит масса (народ) и ее нужды». Вся жизнь ученого была постоянным трудом. Он и умер во время работы, за письменным столом. Это произошло 7 декабря 1894 г. Научные заслуги П. Л. Чебышёва были высоко оценены учеными мира. Он был избран почетным членом многих академий наук различных стран. Его учениками и последователями были такие известные математики, как Е. И. Золотарев, А. А. Марков, В. А. Стеклов, А. М. Ляпунов и другие. П. Л. Чебышёва справедливо считают основателем Петербургской математической школы.

Упражнения и задачи

1. Найдите сумму нечетных чисел 101, 103, 105... 501.

2. П. Л. Чебышёв доказал, что для любого натурального числа между ним (n) и его удвоенным числом (2n) содержится не меньше одного простого числа; например, для $n=3$ между 3 и 6 есть простое число 5. Проверьте это для чисел от 4 до 10.

3. П. Ферма считал, что число $F_n=2^{2^n}+1$ при любом натуральном n простое. Действительно, для $n=1$, 2, 3, 4 F_n — число простое. Однако $F_5=4294\,967\,297$ делится на 641. Проверьте!

4. Найдите следующие произведения: 1·91, 2·91, 3·91, 4·91 и т. д. Выпишите эти произведения в столбик, внимательно сопоставьте цифры и их порядок в каждом произведении. Попробуйте записать произведения 8·91 и 9·91 без вычислений, а затем проверьте результаты.

48. Зачем сбрасывали камни с Пизанской башни?

В итальянском городе Пизе, известном наклонной или «падающей» башней (но еще более этот город славен другим), в 1564 г. в семье музыканта родился мальчик, которого звали Галилео Галилей. В детстве он любил играть самодвижущимися моделями и даже сам их мастерил. До 11 лет Галилео жил в родном городе, а затем вместе с родителями поселился во Флоренции. Там он некоторое время учился в монастыре.

Семнадцатилетним юношей Галилео Галилей, по совету отца, поступил в Пизанский университет и занялся изучением медицины. Однако эта наука не увлекла молодого человека. Его интересовали исследования в области техники. Покинув Пизанский университет, Галилей возвращается во Флоренцию в семью отца.

По рекомендации отца, юноша штудировал труды древних греков — Евклида, Архимеда, Платона, Аполлония и особенно углубленно постигал точные науки — математику, физику и астрономию. В этот период он написал свою первую научную работу и провел ряд исследований по гидростатике и центру тяжести.

В 1589 г. Галилею предоставили место профессора математики в Пизанском университете, а в 1592 г. его приглашают в Падунский университет, однако главная сфера интересов ученого — техника и механика, в частности изучение законов падения тел. За время работы в Пизанском и Падуанском университетах Галилей сделал ряд важных открытий. Он исследовал и обосновал, как находить центр тяжести тел разнообразной формы, открыл законы падения тел, изобрел особые весы для измерения плотности тел и др. Свои исследования и открытия Галилей изложил в форме писем к ученым мира. Его имя стало широко известно в научных кругах многих стран.

Преподавательская работа тяготила Галилея, так как в университете требовали излагать студентам положения, которые часто противоречили его собственным взглядам и убеждениям. Кроме того, чтение лекций отнимало много времени, что мешало полностью отдаться исследованиям. В 1610 г. Галилей покинул Падуанский университет и снова уехал во Флоренцию. Здесь он занялся астрономическими наблюдениями. Годом раньше Галилей своими руками построил зрительную трубу и первым использовал ее для наблюдений за небесными светилами. Ему удалось с помощью зрительной трубы обнаружить пятна на Солнце, горы на Луне, увидеть фазы планеты Венеры (подобные фазам Луны), открыть четыре спутника планеты Юпитер и т. д.

Астрономическими наблюдениями и выводами из них Галилей подтвердил учение Коперника о том, что Земля вращается и движется вокруг Солнца, а не стоит на месте, как утверждало религиозное учение. О своих открытиях Галилей написал в работе, названной «Звездный вестник». Однако церковники объявили зрительную трубу Галилея «дьявольским инструментом, обманывающим глаз наблюдателя». Об открытии пятен на Солнце было строго запрещено даже упоминать. Помощники римского папы предупредили Галилея о том, что поддерживать учение Коперника о движении Земли — значит быть обвиненным в ереси. Но и после такого предупреждения Галилей остался верен своим идеям. Он изложил их в книге «Диалог о двух главнейших системах мира — Птоломеевой и Коперниковой», хотя и в завуалированной форме. Книга вышла в 1632 г. В этом же году против ученого было возбуждено судебное дело. Галилея вызвали в Рим, где находился церковный суд — суд инквизиции.

Галилео Галилей.

В 1633 г. Галилей предстал перед судом инквизиции. Церковники-иезуиты, прибегнув к угрозам, принудили семидесятилетнего ученого отречься от своих идей и установили за ним надзор до конца его жизни. Однако инквизиторы не достигли самого главного. Галилей не признал себя виновным в ереси. Суд над Галилеем — это одна из позорнейших страниц истории церкви. Только спустя 350 лет папа римский решился признать эту ошибку.

После суда Галилей поселился во Флоренции и, не обращая внимания на надзор, продолжал заниматься научной работой. В 1642 г. великий ученый, окруженный учениками, окончил свой жизненный путь. Охота церковников за рукописями и трудами Галилея продолжалась и после его смерти. Они стремились уничтожить не только его труды, но и даже память о нем.

В своих исследованиях Галилей первым в науке использовал опыт в качестве источника познаний. Он пришел к выводу, что опыт служит проверкой научных предположений. Кроме того, Галилей доказывал необходимость применения математических методов при изучении природы и дал прекрасные образцы такого приложения. Его труды расчистили дорогу к здравому смыслу в поисках неизвестного и способствовали распространению законов о движении тел.

А Пизанская «падающая» башня помогла Галилею сделать одно из главных его открытий.

Жители города не раз с недоумением наблюдали, как молодой профессор Пизанского университета с группой студентов, набрав в кожаные мешки камней, поднимались по лестницам на самый верх башни. Оттуда они сбрасывали камни. Другая группа студентов, находившихся внизу, наблюдала за тем, как эти камни падали на землю.

— Чем это они заняты? — спрашивали друг у друга пизанцы.

Но никто не мог догадаться, зачем профессор и его студенты сбрасывают камни с их знаменитой башни.

А дело заключалось в следующем. В древности знаменитый греческий философ Аристотель утверждал, что тяжелые предметы падают быстрее легких. Аристотель был известным ученым, и потому его утверждение считалось верным. Со времен Аристотеля в то время прошло почти две тысячи лет, а люди продолжали заблуждаться, считая, что более тяжелый предмет падает быстрее легкого. Но вот нашелся человек, который решил проверить, правильно ли такое утверждение. Это был Галилей. Он много раз один и вместе со студентами сбрасывал с наклонной башни камни и ядра различного веса и

Солнечная система Галилея.

убедился, что и тяжелые и легкие предметы падают с одинаковой скоростью.

Заметить это было не так уж трудно. Но как убедить других, что утверждение Аристотеля — знаменитого ученого! — ошибочно? По какому закону падают предметы? Около пяти лет занимался Галилей исследованием свободного падения тел, чтобы установить законы их движения. Чтобы переубедить заблуждающихся, Галилей иногда прибегал к таким примерам: «Если одна лошадь может пробегать в час 3 мили и другая столько же, то они не пробегут 6 миль в час, если их запрячь вместе». Следующее рассуждение было уже близко к доказательству: если более тяжелое тело падает быстрее легкого, то какова скорость падения этих тел, связанных вместе? Тяжелое должно ускорить, а легкое замедлить падение связанного с ним тела. Значит, скорость их падения должна быть средней, но, по учению Аристотеля, скорость падения связанных тел должна возрасти, так как вес их увеличился. Так ли это?

Подобные рассуждения надо было проверять опытами. Галилей придумал немало хитроумных приспособлений, чтобы найти и точно обосновать законы свободного падения тел.

В результате многолетних исследований он установил: при свободном падении любых тел в пустоте один и тот же путь они проходят за равные промежутки времени, независимо от формы, размеров и массы. Скорость падающего тела возрастает с каждым мгновением. Если в первое мгновение тело прошло расстояние, равное единице длины, то в следующее такое же мгновение оно проходит расстояние в три раза большее, а в третье — в пять раз большее и т. д., т. е., иначе говоря, при падении тело проходит за каждое последующее мгновение отрезки пути, соответствующие ряду нечетных чисел: 1, 3, 5, 7...

Подсчитаем, какое расстояние пройдет тело за один, два, три, четыре и т. д. равных промежутка времени.

Если за первую секунду оно пройдет расстояние, равное 1, то, согласно выводам Галилея,

за две секунды пройдет			$1+3=4=2\cdot2$;
за три	»	»	$4+5=9=3\cdot3$;
за четыре	»	»	$9+7=16=4\cdot4$;
за пять секунд		»	$16+9=25=5\cdot5$;
за шесть	»	»	$25+11=36=6\cdot6$ и т. д.

Галилей нашел, что пути, пройденные телом при падении за один, два, три и т. д. равных промежутка времени, соответствуют такому ряду чисел: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 и т. д.

Теперь известно, что за первую секунду свободно падающее тело проходит приблизительно 5 м (точнее, 4,9 м/сек). Зная это, легко высчитать, какое расстояние пройдет оно за определенное время. Так, за 4 секунды это составит приблизительно $5\cdot4\cdot4=80$ (м); за 7 секунд — $5\cdot7\cdot7=245$ (м).

Если вы захотите узнать глубину колодца или ущелья, то достаточно сбросить вниз небольшой камешек и сосчитать, сколько секунд он будет падать. Зная время его падения, можно определить глубину колодца или ущелья. При расчете вам помогут законы, открытые Галилеем, — законы свободного падения тел.

Задачи

1. Чтобы узнать глубину ущелья, в него сбросили камень и по звуку заметили, что он падал 5 секунд. Какова глубина ущелья?

2. Глубина шахты — 320 м. Можно ли узнать, сколько секунд будет падать свободно пущенный камень в эту шахту? Какова будет скорость камня в конце падения?

49. Алгебра в арифметике

Продолжительное время предметом алгебры было изучение вопросов, связанных с решением разнообразных уравнений. Впоследствии предмет алгебры значительно расширился.

Уже после того, как люди научились считать и решать многие задачи, долгое время древние мудрецы и вычислители даже не подозревали, что может появиться целая наука — алгебра.

Алгебра зарождалась и развивалась постепенно в недрах арифметики.

Ее начатки существовали еще за 2000 лет до н. э. в Древнем Вавилоне и Египте. На вавилонских клинописных пластинках и в египетских папирусах содержится ряд задач, которые решают посредством составления уравнений.

Вавилонские математики решали их с помощью специальных таблиц и правил, которыми предписывалась последовательность действий.

В Древнем Египте при решении таких задач для обозначения неизвестного был установлен особый значок  . Называли его *хау*, что в переводе на русский язык значит «куча». В папирусе

Ахмеса среди других задач есть такая: «Куча, ее седьмая часть, ее целое. Что составляет 19». Эту задачу легко решить, составив уравнение: $x+\frac{1}{7}x=19$. При решении аналогичных задач египетские писцы пользовались правилом ложного положения, или фальшивым правилом. Они сначала предполагали, что куча — это 7. Тогда $\frac{1}{7}$ кучи составит 1, а вместе 8, но эта сумма (8), по условию, составляет 19. Допущенное значение кучи 7 надо увеличить в 19 раз и уменьшить в 8, т. е. куча равна $7\cdot\frac{19}{8}$ или $16\frac{5}{8}$.

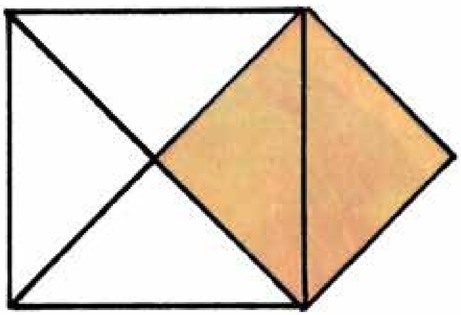
Приведем запись уравнения из папируса Ахмеса.

Правило ложного положения было известно и в Древнем Китае около 2000 г. до н. э. Китайские математики разработали свой прием решения уравнений с двумя и большим числом неизвестных.

Дальнейшее развитие начала алгебры получили в Древней Греции и в Средней Азии. Этому содействовали ученые Пифагор, Евклид, Диофант и другие, хотя о существовании алгебры они еще не подозревали. Только спустя тысячелетия сведения из алгебры расширились так, что возникла потребность выделить алгебру в самостоятельный отдел математики.

50. Как алгебра стала геометрической

Начертите квадрат со стороной в 1 см и подумайте, чему равна его площадь. Площадь такого квадрата будет равна 1 кв. см, так как $1\cdot1=1$ (см^2). Начертите в этом квадрате отрезок, соединяющий вершины двух противоположных углов, — *диагональ*. Этот отрезок разделит квадрат на два равных треугольника. Один треугольник отличается от другого только положением.



На проведенном отрезке — на диагонали — как на стороне постройте новый квадрат так, чтобы диагональ первого квадрата стала стороной нового квадрата. В новом квадрате соедините попарно вершины противоположных углов отрезками (т. е. проведите две диагонали). Второй квадрат окажется разделенным на четыре равных треугольника, а в первом квадрате равных им будет только два треугольника; следовательно, второй квадрат в два раза больше первого квадрата, т. е. его площадь равна 2 см^2. А чему будет равна сторона второго квадрата? Обозначим ее через х. Чтобы вычислить площадь квадрата, надо его сторону (х) умножить на самое себя или $x \cdot x = 2$ (см^2).

Попытаемся подобрать такое число, которое при умножении на равное ему даст 2. Например, $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$. Получили число больше двух. Следовательно, это число велико. Возьмем число меньше, чем 1,5, а именно 1,4. $1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96$. Оказалось, что число 1,4 мало. Увеличим его: $1{,}41 \cdot 1{,}41 = 1{,}9881$. Полученное число опять меньше 2. Испытаем большее число 1,42. Получим $1{,}42 \cdot 1{,}42 = 2{,}0164$. Следовательно, $x < 1{,}42$. Мы нашли $1{,}41 < x < 1{,}42$, т. е. в поиске значения х мы приблизились к его значению, но точного выражения для него не нашли.

Если продолжить поиск числа х, то можно еще ближе подойти к истинному значению х, но точного значения числа, которое, будучи умноженным само на себя, дало бы в произведении 2, мы никогда не найдем. Евклид доказал, что таких дробных чисел нет.

Измерить диагональ квадрата, сторона которого равна 1, и выразить результат точным числом нельзя. Поэтому сторону квадрата и его диагональ назвали *несоизмеримыми*. Свойство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата было открыто пифагорийцами.

Пифагор и его последователи анализировали свойства натуральных чисел. Среди них они выделяли *четные* и *нечетные, треугольные* и *квадратные, дружные, избыточные* и ряд других. Однако дроби они к числам не относили. Пифагорийцы считали их отношениями. Много внимания они уделяли изучению пропорций. Пифагорийцы пытались найти в природе и обществе постоянные вечные законы и свести все их к числовым соотношениям. Они полагали основой всего существующего числа и их отношения.

Пифагор открыл, что три колеблющиеся струны дают приятное для слуха гармоническое звучание, когда длины струн соотносятся как 3:4:6. Обнаружив ряд замечательных свойств чисел и числовых рядов, а также зависимость гармонии звуков от числовых соотношений, пифагорийцы приписали числам божественные свойства. Но когда было установлено существование несоизмеримых отрезков, когда математики не нашли числа, которыми можно было бы выразить отношение двух отрезков, пифагорийцы были обескуражены. Это открытие противоречило их утверждению: «Всё есть число». Они решили сохранить свое открытие о несоизмеримости отрезков в тайне.

Существует легенда о том, что один из пифагорийцев разгласил эту тайну и за это боги его страшно покарали — он погиб при кораблекрушении.

Научные открытия хранятся в

тайне недолго. О несоизмеримости отрезков узнали и другие древнегреческие математики и стали искать способы преодоления создавшегося осложнения.

Греческий математик и астроном Евдокс (ок. 406—355 до н. э.) разработал теорию отношений и пропорций, в которой, чтобы избежать несоизмеримости, осознанно отверг числовые значения отрезков и рассматривал отношения только геометрических величин, т. е. отрезков и площадей. Этот подход позволил преодолеть затруднения, возникшие с открытием несоизмеримых отрезков.

Перейдя к изображению чисел отрезками, греческие математики стали рассматривать все арифметические операции как действия с отрезками и выполняли сложение, вычитание, умножение и деление посредством геометрических построений. Например, о произведении ab они говорили: «Прямоугольник, содержащийся между отрезками a и b», о выражении $a^2 = a \cdot a$: «Квадрат со стороной a» и т. д.

Так появилась *алгебра,* которая оперировала не числами и не буквами, а отрезками, площадями и объемами геометрических фигур. В дальнейшем преобразование назвали *геометрической алгеброй.* Она довольно долго способствовала прогрессу науки, так как давала возможность посредством геометрических построений с последующими доказательствами решать и исследовать разнообразные задачи из алгебры.

В «Началах» Евклида приведены доказательства алгебраических тождеств: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$; $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ и др. Там же дано геометрическое решение уравнений вида $ab = cx$ и более сложных.

Алгебра древних греков со времен Евклида превратилась в строгую математическую теорию. Хотя решения и доказательства посредством геометрических построений были очень громоздки и требовали много времени, все же геометрическая алгебра несколько веков способствовала развитию науки. В геометрических доказательствах алгебраических предложений греки достигли высокого искусства, но решения практических задач они избегали.

Совсем иначе подошел к изложению вопросов алгебры аль-Хорезми. Он показал, что алгебра может существовать самостоятельно, вне геометрии.

51. Алгебра выходит на самостоятельную дорогу

Решать простейшие алгебраические задачи люди научились в далекой древности. Еще в Древнем Вавилоне и Египте существовали зачатки числовой алгебры. Однако общих приемов решения алгебраических задач не было даже у древних греков.

Один из последних александрийских ученых — Диофант (III в.)

в своих исследованиях далеко продвинулся в развитии алгебры. Он сформулировал основные ее правила и классифицировал уравнения. Диофант нашел ряд остроумных частных случаев решения довольно сложных задач. Он придумал несколько символов для обозначения алгебраических выражений и применял их в своей практике. Но сочинения Диофанта долго оставались неизвестными для математиков более позднего времени.

В разработку первоначальных представлений по алгебре значительный вклад внесли индийские жрецы (брахманы). Математические знания в Индии развивались в тесной зависимости от астрономии, которой особенно увлекались в древнее время. Это увлечение привело к тому, что ученые Индии достигли высоких результатов в разнообразных вычислениях.

По найденной Бахшалайской рукописи, которая написана на 70 полосах березовой коры, можно судить о знаниях в математике индийцев III—IV вв. В то время в Индии уже была известна десятичная позиционная система счисления и нумерации. Целые числа индийцы записывали как дробь со знаменателем 1. Вместо равенства употребляли слово *пхалам*, а при записи обозначали его первым слогом этого слова — *пха*. Неизвестное они называли *сунья* и обозначали его жирной точкой. Это название и знак использовались и для нуля. Вероятно, неизвестное, пока не было найдено его значение, математики принимали за «пустое место».

Фрагмент перевода на латынь трактата «Китаб аль-джебр валь-мукабала» аль-Хорезми из рукописи 1145 г.

Позже — в средневековый период — в Индии математика получила дальнейшее развитие. В этот период нуль стали обозначать кружком; слагаемые записывали рядом поставленными числами без отделения их каким-либо знаком. Вычитание стали обозначать точкой, которую располагали над вычитаемым. Делитель записывали под делимым. Умножение обозначали слогом *бха*, что означало слово *бхавита,* т. е. «произведение». Неизвестное стали называть *йаватават* и обозначали первыми буквами этого слова — *йа.* Второе неизвестное обозначали слогом *ка.* Запись *йа бха ка* означала: $x \cdot y$.

При решении задач индийские математики пользовались правилом положения. Вслед за ними его стали применять математики Ближнего и Среднего Востока. В истории развития алгебры в первой половине IX в. огромную роль сыграл трактат аль-Хорезми, в котором решение уравнений рассматривалось не в связи с арифметикой, а как самостоятельный раздел математики.

Абу Абдалах Мухаммед бен Муса аль-Хорезми, т. е. отец Абдалаха, Мухаммед, сын Мусы из Хорезма, написал сочинение на арабском языке, известное под названием «Книга о восстановлении и противопоставлении» (на арабском языке — «Китаб аль-джебр валь-мукабала»). При переводе на латинский язык арабское название трактата было сохранено. С течением времени его сократили и стали писать коротко: algebra, т. е. *алгебра.*

Аль-Хорезми в своем трактате разъясняет, что в алгебре применяются неизвестные, их квадраты и свободные члены уравнений. Неизвестное автор называет *корень.* Затем он рассматривает различные виды уравнений и приемы их решения. При этом аль-Хорезми предлагает переносить отрицательные члены уравнений из одной части в другую и называет это *восстановление,* а вычитание равных членов из обеих частей уравнения он называет *противопоставление* — валь мукабала. Видоизменение слова «аль-джебр» и послужило названием нового раздела математики — *алгебра.*

Уравнение $5x^2 = 6 - 2x + 5x^2$, используя приемы аль-Хорезми, можно решить так:

аль-джебр (восстановление) дает $5x^2 + 2x = 6 + 5x^2$; применяя валь-мукабала (противопоставление), получим $2x = 6$; $x = 6:2$; $x = 3$.

Однако аль-Хорезми еще не пользуется символами и все выкладки записывает словами. Например, уравнение $x^2 + 10x = 39$ он выразил бы так: «Квадрат и десять корней его равны девяти дирхемам».

В другом разделе алгебраического трактата аль-Хорезми излагает правила умножения одночленов и двучленов. В заключительных главах его сочинения приведены задачи и рассматриваются способы их решения. Вот одна из его задач: «Работник, месячный заработок которого 10 дирхемов, работал 6 дней. Какова его доля?»

Решение этой задачи сведено к решению уравнения $30:10 = 6:x$; $x = 6 \cdot 10:30$; $x = 2$ (здесь решение дано в современных обозначениях).

В своем трактате аль-Хорезми рассматривает неизвестное число как величину особого рода, вводит термин *корень,* свободный член называет *дирхем* (так в то время называли и денежную единицу). Он распределяет уравнения по видам, разъясняет, как применять правила восполнения и противопоставления, формулирует правила решения уравнений различных видов.

В рукописях аль-Хорезми все математические выражения и все выкладки записаны словами, вот почему алгебру того времени и более поздних времен называли риторической, т. е. словесной. В период работы над алгебраическим трактатом аль-Хорезми уже знал о числовой алгебре Вавилона и других стран Востока. Он был знаком с геометрической алгеброй греков и достижениями индийских астрономов и математиков.

Аль-Хорезми выделил алгебраический материал в особый раздел математики и освободил его от геометрического толкования, хотя в некоторых случаях пользовался геометрическими доказательствами. Алгебраический труд аль-Хорезми стал образцом, который изучали и которому подражали многие математики более позднего времени. Последующие алгебраические сочинения и учебники по своему характеру стали приближаться к современным. Алгебраический трактат аль-Хорезми послужил началом создания науки алгебры. Он был в числе первых сочинений по математике, переведенных на латинский язык. В то время в Европе все научные труды писали и печатали на латинском языке.

52. Отрицательные числа с трудом проникают в математику

В практической деятельности при измерениях и делении человек познакомился с дробными числами значительно раньше, чем с числами отрицательными. К отрицательным числам математики подошли при решении уравнений в тех случаях, когда получали значения неизвестных со знаком минус; например, при решении уравнения $8x-16=9x+11$; $-16-11=9x-8x$; $-27=x$. Они обратились к исследованию дробей, когда потребовалось распространить действие деления на любые натуральные числа. Отрицательные же числа математики стали использовать, когда при решении уравнений возникали случаи вычитания из меньшего числа большего, т. е. когда требовалось распространить действие вычитание на все числа, независимо от значения вычитаемого и уменьшаемого.

Древние греки к отрицательным числам не обращались. Но уже Диофант пришел к необходимости введения действий с отрицательными числами при умножении выражений, подобных следующим: $(3x-2)\ (3x-2)=9x^2-12x+4$. Однако действий с отдельно взятыми отрицательными числами он не производил и отрицательные ответы при решении квадратных уравнений не принимал во внимание.

Впервые идея о самостоятельных отрицательных числах встречается у математиков Индии — Ариабхаты (V в.), Брахмагупты (VII в.) и других. В их работах упоминаются отдельно стоящие отрицательные числа. У Брахмагупты даже приведены правила сложения и вычитания отрицательных чисел. Причем он рассматривает отрицательные числа как *долг.* В XII в. индийский математик Бхаскара указывает правила умножения и деления: «Произведение двух имуществ или двух долгов есть имущество; произведение имущества на долг есть убыток. То же правило имеет место и при делении». Тем не менее к действиям с отрицательными числами индийские математики относились с недоверием. «Люди их не одобряют», — говорит Бхаскара. Довольно долго индийские математики избегали пользоваться отрицательными числами. В Европе еще в XVI в.

$$x^3\cdot 8 - x^2\cdot 16 = x^3\cdot 1$$

отрицательные числа считали абсурдными.

Окончательно ввел в математику наряду с другими отрицательные числа француз Рене Декарт (1596—1650). Он дал им геометрическое толкование и определил место и порядок следования на числовой оси.

Такое истолкование положительных и отрицательных чисел привело к более ясному пониманию отрицательных чисел. Однако по традиции их продолжали называть *ложными.* Обоснование правил умножения и деления отрицательных чисел еще долгое время вызывало споры у европейских математиков. За правомерность введения отрицательных чисел пришлось вступиться и знаменитому немецкому математику Карлу Гауссу. Он писал: «Нисколько не опасаются вводить в общую арифметику дробные числа, хотя существует так много пересчитываемых вещей, в применении к которым дробь не имеет никакого смысла. Настолько же не следует отказывать отрицательным числам в правах, равных с положительными, потому только, что многие вещи не допускают противоположения. Реальность отрицательных чисел достаточно оправдывается тем, что в бесчисленных других случаях они находят подходящую основу».

Обозначают отрицательные числа цифрами со знаком – (минус). Нуль, отрицательные и положительные числа целые и дробные в научном толковании называют *рациональными числами.*

Введение отрицательных чисел устраняет ряд трудностей, возникавших при решении уравнений.

Рене Декарт.

Правила действий с отрицательными числами следуют из необходимости согласования результатов действий с теми, которые получали при операциях с натуральными и дробными неотрицательными числами. Все правила действий с отрицательными числами могут быть установлены при рассмотрении простейших уравнений, например: $11-5=10x-7x$; $6=3x$; $x=2$, но если записать иначе, то $7x-10x=5-11$, и тогда $-3x=-6$; $x=-6:(-3)=2$. Мы убедились, что правило деления двух отрицательных чисел не противоречит тем правилам, которые применяются для положительных чисел.

53. Уравнения, которыми занимались в арифметике

Многие задачи в математике проще решать применяя уравнения, поэтому уже в I классе ученикам предлагают решать простейшие уравнения, например: $x+2=8$; $14-x=5$ и т. п. Но решением сложных задач с применением уравнений занимаются ученики старших классов. Однако есть ряд трудных задач, решить которые легче не применяя уравнений, а посредством использования четырех арифметических действий. Приведем пример вот такой задачи: «В бригаде было несколько учеников, которые зарабатывали в день по 80 руб. А рабочие этой бригады зарабатывали в день по 150 руб. Вся бригада в составе учеников и рабочих получила за выполнение заказа 1210 руб. Сколько человек было в бригаде?»

Для решения этой задачи примем, что в бригаде x учеников и y рабочих; зарплата (цены условные) учеников составит $80x$ и рабочих — $150y$. Тогда $80x+150y=1210$ (руб.). Для составления второго уравнения в задаче данных нет. Решение составленного уравнения не дает определенного значения неизвестных, но позволяет выразить значение x в зависимости от y: $80x=1210-150y$, или $x=(121-15y):8$.

Попытаемся решить эту задачу подбором чисел: допустим, что в бригаде был всего один ученик. Тогда на долю рабочих из зарплаты придется $1210-80=1130$. Но это число 1130 не делится без остатка на 150, а число рабочих должно выражаться целым числом. Следовательно, учеников должно быть больше. Если их было 2 человека, то их зарплата составит $80\cdot 2=160$ (руб.), а зарплата рабочих будет $1210-160=1050$ (руб.). При делении этого числа на 150 получим: $1050:150=7$, что вполне возможно. Но, может быть, учеников было не 2, а 3 или 4. Проверим эти предположения. Три ученика получат $80\cdot 3=140$ (руб.). Тогда рабочие получат $1210-240=$ $=970$ (руб.). Однако 970 разделить на 150 без остатка нельзя. Также не делится без остатка на 150 и число $(1210-80\cdot 4)$. Следовательно, условию задачи удовлетворяет только одно решение: учеников было 2, а рабочих — 7. Проверка решения подтверждает правильность этих чисел. Следовательно, ответом к этой задаче будет $2+7=9$ (человек).

Мы смогли решить приведенную задачу, воспользовавшись дополнительным скрытым указанием, что число рабочих может быть только целым.

Вот еще одна задача, подобная приведенной.

«Вася и Петя коллекционировали монеты. У Пети были только пятачки, а у Васи трехкопеечные монеты. Вася намеревался обменять 6 копеек на пятачки. Сколько пятачков должен был дать Петя, чтобы рассчитаться с Васей копейка за копейку? Сколько монет должен был отдать Вася?»

Составим по условию задачи уравнение: Вася должен отдать $3x$ (коп.), а Петя даст ему $5y$ (коп.). Поэтому по условию $3x=5y$. Найти определенное решение для этого уравнения нельзя. Из составленного уравнения выразим x: $x=\frac{2y}{3}$. По условию x — целое число не меньше 2. Следова-

тельно, $5y>3\cdot2$. Кроме того, $5y$ делится на 3. Посмотрим, каким может быть y. Если он равен 1, то $(5\cdot1)\neq6$. Возьмем $y=2$, тогда $(5\cdot2)\neq6$. Возьмем $y=3$, тогда $(5\cdot3)\neq6$, но $\frac{x\cdot3}{3}=5$.

Следовательно, если Вася отдаст 5 трехкопеечных монет, или 15 копеек, то получит от Пети 3 пятачка. Можно получить и другой ответ, но тогда Вася отдаст не 15 копеек, а в 2, 3, 4 и т. д. раз больше. Наилучшим будет решение: Вася отдаст $3\cdot5=15$ коп., Петя — $5\cdot3=15$ коп.

Подробное исследование решения задач, похожих на приведенные и более сложных, проводил математик Диофант. Предполагают, что раньше него Архимед тоже знал, как решать такие задачи.

В XII в. приемы решения подобных и более сложных задач изучали ученые Индии. Одним из них был Бхаскара Аскарья.

54. Математики создают язык алгебры

Известно, что при решении задачи самое главное — осмыслить содержание задачи и выразить его на языке алгебры, т. е. записать условие задачи посредством символов — математических знаков.

Так, задачу, которая рассказывает о жизни Диофанта, можно перевести на язык алгебры следующим образом:

Все годы жизни Диофанта	x лет,
Диофант провел шестую часть своей жизни в детстве —	$\frac{x}{6}$,
двенадцатую — в юности,	$\frac{x}{12}$,
после седьмой части, проведенной в бездетном супружестве, и еще 5 лет у него родился сын —	$\frac{x}{7}+5$,
умерший по достижении половины числа лет жизни отца —	$\frac{x}{2}$,
после чего Диофант прожил только 4 года —	4.

Сложив числа лет жизни Диофанта, выраженные иносказательно, получим x, т. е. составим уравнение:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Решив это уравнение, найдем $x=84$. Диофант прожил 84 года. Это все, что нам известно о жизни замечательного ученого.

Диофант в своей «Арифметике» дает понятие об алгебраическом уравнении, записанном символами, однако очень далекими от современных. Путь к современному языку в математике — путь постепенного изобретения, преобразования и развития символов, начиная от египтян и вавилонян, был очень долгим.

Диофант обозначал неизвестное, которое он называл *аритмос* (число), греческой буквой σ (сигма), коэффициент при неизвестном ставил после неизвестного, а букву σ' писал со штрихом и ее повторял. Неизвестное называл *множеством.* Например, 2x он записывал $\sigma'\sigma'\bar{\beta}$, где $\bar{\beta}$ означает 2, x выражал $\sigma\bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}=1$.

Квадрат неизвестного (x^2) Диофант называл *дюнамис* и обозначал $\delta^{\bar{\gamma}}$ или $\Delta^{\bar{\gamma}}$; x^3 он записывал первой буквой слова *кюбос* $\lambda^{-\gamma}$ (каппа). Известное число — знаком μ^0 — начальной буквой слова *монас,* что означает «один». В его записях $\mu^0\bar{\alpha}$ — это 1, $\mu^0\bar{\gamma}$ — это 3. Знак сложения он не писал — слагаемые он записывал рядом одно с другим, что и означало сумму. Иногда он заменял символы их сокращенными названиями. Так, в его рукописи встречается замена неизвестного слогом *ар,* от слова *аритмос* — «число». Начало слова *изос* (равные) заменено *ис* или ı, что у него обозначает «равенство». Вычитание он обозначал знаками ρ или $\uparrow$.

Вот запись уравнения из «Арифметики» Диофанта, которое мы записываем как $8x^3-16x^2=x^3$:

$$\varkappa^{\gamma}\,\bar{\eta}\uparrow\Delta^{\gamma}\,\iota F\;\iota\sigma^{\gamma}\bar{\alpha}$$
$$x^3\cdot 8-x^2\cdot 16=x^3\cdot 1$$

Труды Диофанта долгое время оставались неизвестными для широкого круга математиков и поэтому не оказали заметного влияния на развитие символов — языка алгебры.

В первом алгебраическом трактате аль-Хорезми буквенная символика отсутствовала, поэтому и в трудах европейских математиков символика появилась гораздо позже.

Значительный вклад в развитие языка алгебры — символики внес француз Франсуа Виет (1540—1603). Юрист по образованию, Виет служил при дворе Генриха IV. Математикой занимался в часы отдыха. Ознакомившись с учением Коперника, Виет заинтересовался астрономией и решил написать обширный астрономический трактат, но для этого надо было глубоко знать математику. Занявшись изучением математи-

Франсуа Виет.

ки, он выполнил ряд алгебраических исследований, разработал символику в алгебре, но трактата по астрономии так и не написал.

Во время войны Франции с Испанией Виет оказал большую услугу своей родине — он расшифровал весьма важное письмо испанского двора. Правители Испании, письмо которых было перехвачено, даже не допускали мысли, что такой сложный шифр может быть раскрыт. Впоследствии они приписали раскрытие их шифра волшебству чародея.

В работе «Введение в аналитическое искусство» Виет изложил усовершенствованную им теорию уравнений с применением изобретенных символов. В названном трактате Виет использовал алгебраические выкладки при рассмотрении вопроса геометрии.

Виет ввел в алгебру общую символику. Числовые коэффициенты он стал обозначать согласными буквами и придумал новый термин — *коэффициент*, позаимствовав из латинского языка слово coefficiens — «содействующий». Знаки + и − он употреблял в современном значении, неизвестные обозначал гласными буквами латинского алфавита, а вместо A^2 писал: «А квадратное»; знак равенства записывал словом. Выражение $x^3+3bx=2c$ у Виета выглядело так:

Acubus + Bolano 3in A, aequari Z2 solido 2

Дальнейшее значительное усовершенствование алгебраической символики принадлежит Рене Декарту. Он ввел для обозначения коэффициентов строчные буквы латинского алфавита: a, b, c и т. д., а для обозначения неизвестных — последние буквы того же алфавита — x, y, z... Это нововведение получило широкое распространение в работах математиков и с небольшими изменениями сохранилось до наших дней.

Пользуясь символами Декарта, выражение $x^3+px+q=0$ нужно записать так: $x^3+px+q\infty 0$. В этой записи уже и слово *равно* заменено символом ∞.

После Декарта усовершенствование языка алгебры не закончилось — оно продолжается.

Упражнения и задачи

1. «Из множества чистых цветков лотоса были принесены в жертву: Шиве — третья долю этого множества, Вишну — пятая и Солнцу — шестая; четвертую долю получил Бхавани, а остальные 6 цветков получил уважаемый учитель. Сколько было цветков?» (Задача Бхаскары.)

2. «Некто сказал другу:

— Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя.

Друг ответил:

— Дай ты мне только десять, и я стану в 6 раз богаче тебя.

Сколько было у каждого?» (Задача Бхаскары.)

3. «Некто пришел в ряд, купил игрушек для малых ребят: за первую игрушку заплатил 1/5 часть всех своих денег, за другую — 3/7 остатка от первой покупки, за третью игрушку заплатил 3/5 остатка от второй покупки; а по приезде в дом нашел остальных в кошельке денег 1 руб. 92 коп. Спрашивается: сколько в кошельке денег было и сколько за которую игрушку денег заплачено?» (Задача Магницкого из «Арифметики».)

4. «Идет человек от града в другой град, а идет на день по 40 верст, а другой человек идет из другого града в против первого человека, а идет по 30 верст на день. Между же городами 350 верст, и ведательно есть, в колико дней сойдутся оба человека и колико который человек ушел до встречи». (Задача Магницкого. Решить составлением уравнения.)

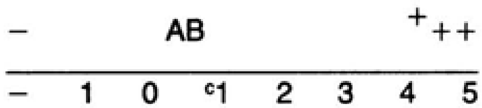
5. «В клетке находится неизвестное число фазанов и кроликов. Известно только, что вся клетка содержит 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать число фазанов и кроликов». (Древняя китайская задача.)

6. «— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ. — Половина изучает математику, четверть — музыку. Седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть еще три женщины». (Задача из «Греческой антологии»). (Указание. Решить уравнением:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x.$$

55. Как изобразить число отрезком?



Еще Евклид в «Началах» стал изображать значения величин не числами, а отрезками. Каждое число и всю систему рациональных чисел наглядно можно представить на прямой линии. Для этого проведем прямую. Отметим на ней точку и поставим против нее нуль. Эта нулевая точка будет служить началом отсчета. Примем длину какого-либо отрезка за единицу.

Отложим взятый за единицу отрезок (единичный отрезок) на прямой от нуля вправо так, чтобы один его конец совпал с нулем, а второй расположился бы на прямой правее нуля. Против второго конца отрезка поставим 1. Отложим на прямой отрезок второй раз так, чтобы первый его конец совпал с меткой 1, а второй лег правее. Против этой точки поставим 2. Затем единичный отрезок отложим третий раз, четвертый и т. д. Прямая продолжается бесконечно, и поэтому для каждого числа на ней найдется соответствующее место. Такую прямую называют *числовой осью.*

Если мы захотим отложить на числовой оси дробное число, то должны разделить отрезок от 0 до 1 на несколько равных частей, например на десять. Тогда дробь $\frac{1}{10}$ будет отмечена точкой A. Дробь $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ изобразится точкой B, а дробь $\frac{7}{10}$ — точкой C.

Единичный отрезок от 0 до 1 можно разделить на какие угодно мелкие части: на 2, 7, 10, 100, 5000 и пр. Следовательно, на этом отрезке можно отложить любую дробь. Так как число делений может быть сколь угодно большим, то, значит, и точек, соответствующих дробям на этом отрезке, может быть любое число. Следовательно, множество дробей, так же как и натуральных чисел, бесконечно. На числовой оси отрицательное число откладывают в левую сторону от нуля. Такое истолкование отрицательных чисел как отрезков, отложенных в левую от нуля сторону, впервые дал в XVII в. Рене Декарт.

В то время ученые трактаты (статьи) писали на латинском языке, поэтому и способ изображения чисел посредством отрезков был назван латинским словом ordinatus (упорядоченный). С приставкой cum (ко), означающей «совместно», это словосочетание означает: совместно заданные числа, определяющие положение точки на плоскости (координаты). Расстояние от нуля по горизонтальной оси названо *абсциссой* от латинского слова abscissus (отрезанный), а расстояние от горизонтальной оси назвали *ордината,* т. е. «расставленный в определенном порядке, упорядоченный».

56. Счетные таблицы

Большую помощь при вычислениях оказывают таблицы. Впервые таблицы сложения и умножения были составлены и широко применялись в Древнем Вавилоне и Египте. Египетские писцы, которым приходилось производить многочисленные вычисления, умели пользоваться такими таблицами, а некоторые из писцов даже сами их составляли. Нам известно, что в Египте были таблицы для выражения некоторых дробей в виде суммы единичных дробей. Например: $\frac{2}{11}$ — это $\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$, а $\frac{2}{7}=\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}$. Подобные таблицы найдены в «папирусе Ахмеса».

Таблицы сложения и вычитания, умножения и деления широко использовались и в дальнейшем при изучении математики. Более пространными таблицами арифметических действий и таблицами более сложными пользуются счетные работники и в наше время. На основе приема, разработанного Эратосфеном, составлены таблицы простых чисел, в которых содержится свыше 100 миллионов чисел. Кроме указанных таблиц математики всех времен и народов разрабатывали более сложные таблицы, которые применяются в астрономии, мореплавании, военных целях и т. д.

С изобретением огнестрельного оружия и использованием крупнокалиберных орудий потребовались точные и трудоемкие расчеты для стрельбы по далеко стоящим целям. Чтобы быстро выполнять такие расчеты (на войне время терять нельзя), потребовались таблицы. Такие таблицы в России были вычислены и составлены математиком П. Л. Чебышёвым.

Астрономам для расчета движения Земли, Луны и других небесных тел требовалось производить действия с громадными числами. Чтобы облегчить их работу, были изобретены и вычислены таблицы, которые позволили заменить умножение и деление больших чисел сложением и вычитанием значительно меньших чисел.

В наше время таблицами широко пользуются многие люди. Например, в сберегательных кассах таблицы используют при начислении процентов, в лесном хозяйстве определяют объем древесины с помощью таблиц объема стволов деревьев.

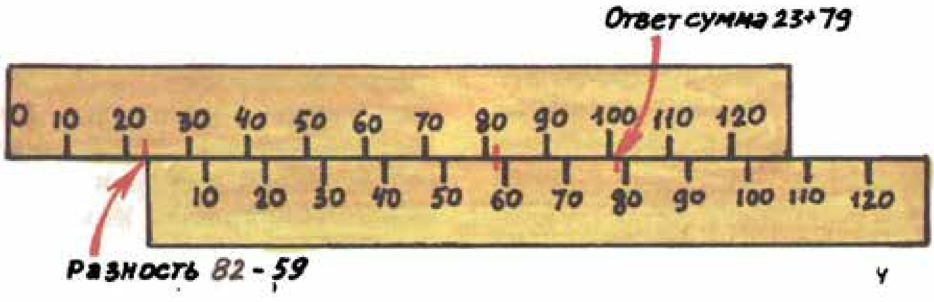
О всех таблицах можно сказать: они облегчают жизнь всем вычислителям.

57. Счетные линейки

Рассмотрим две одинаковые линейки с миллиметровыми делениями. Пользуясь ими, можно производить сложение и вычитание двузначных чисел. Чтобы сложить два числа, например 23 и 79, надо приложить нулевое деление первой линейки к метке 23 на второй линейке. Тогда против деления 79 мм первой линейки можно прочитать ответ 102 на второй линейке.

Если у вас только одна линейка, то вторую линейку можно начертить на листе бумаги и на ней нанести деления точно такие же, как на первой линейке. Например, чтобы из 82 вычесть 59, надо найти на первой линейке или на чертеже линейки метку 82 и приложить к ней деление 59, отмеченное на второй линейке. Тогда против нулевого деления второй линейки прочитаем на первой линейке (или ее чертеже) ответ 23 ($82-59=23$).

Мы рассмотрели в качестве примера простейшие счетные линейки. Подобные и более сложные счетные линейки были изобретены свыше трехсот лет назад. Они имеют различное назначение. В зависимости от этого их конструкция, форма и шкалы (деления) значительно отличаются одна от другой. Кроме прямых



Сложение с помощью счетных линеек.

есть счетные линейки круговые, в которых деления (шкалы) расположены по окружности.

Во многих случаях счетные линейки можно заменить «считающими» чертежами.

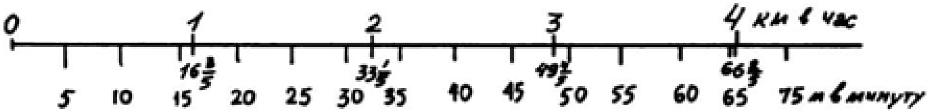
58. «Считающие» чертежи

Изображение чисел отрезками во многих случаях помогает не только при решении задач, но и при сложных вычислениях, облегчая умственный труд человека. Рассмотрим пример, в котором чертеж позволяет найти приблизительный ответ без вычислений. Во многих задачах довольно часто скорость движения одного предмета задана километрами в час, а для другого предмета скорость выражена метрами в минуту. При решении таких задач одну из скоростей нужно определить в других единицах измерения. Для выражения скорости в одних и тех же измерениях сделаем чертеж. Проведем прямую, отложим на ней равные отрезки, проставим над их концами числа 1, 2, 3..., которые будут выражать скорость в километрах в час. Один километр в час составляет 1000 м в 60 мин, или, разделив 1000 на 60, найдем, что 1 км/ч равен $16\frac{3}{5}$ м в минуту. Против метки 1 км в час проставим внизу $16\frac{3}{5}$ м в минуту. Против 2 км/ч — $33\frac{1}{5}$ м/мин, против 3 км/ч — $49\frac{4}{5}$ м/мин и т. д. Затем измерением найдем значение отрезка скорости в 5 м/мин и нанесем на прямую метки, соответствующие отрезкам 5, 10, 15, 20... метров в минуту (см. с. 146).

Теперь у нас получился «считающий» чертеж, который позволит выразить заданное число километров в час в метрах за минуту, и наоборот. Например: точка верхней шкалы $1\frac{1}{2}$ км/ч стоит над делением 25 нижней шкалы, следовательно, $1\frac{1}{2}$ км/ч приблизительно составит 25 м/мин. А 35 м/мин — приблизительно $2\frac{1}{10}$ км/ч.

Еще пример. Представьте себя на месте учетчика, который определяет выполнение нормы выработки при вспашке земли. Пусть, например, по плану для трактористов установлена норма выработки $4\frac{1}{2}$ га пашни в день. Чтобы легче было подсчитывать, сколько норм выполнил тракторист или целая бригада, сделаем чертеж. На листе клетчатой бумаги (лучше взять миллиметровку) проведем из одной точки две прямые (оси) под прямым углом друг к другу. На горизонтальной оси откладываем равные отрезки и против точек, ограничивающих отрезки, запишем числа 0,1, 2, 3... На вертикальной оси сделаем то же. Для нашего чертежа против числа 45, стоящего на горизонтальной оси, отсчитаем десять делений вверх и поставим точку. Делаем это так потому, что десять норм выработки составляют 45 га. Указанную точку соединим наклонной прямой с начальной точкой отсчета — точкой пересечения осей, у которой стоит 0.

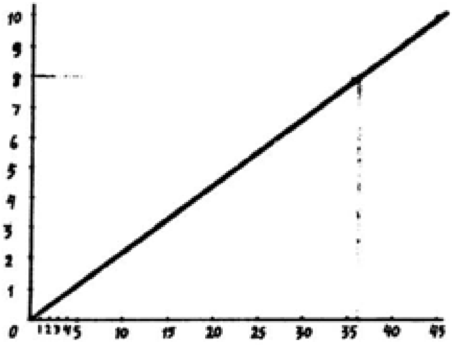
Если бригада трактористов вспахала 36 га, то учетчик должен на горизонтальной оси найти число 36 и подсчитать, на какой высоте, выраженной в масштабных единицах, над этой точкой проходит наклонная прямая. В этом месте она отстоит на 8 единиц от горизонтальной оси. Значит, бригада выполнила 8 норм.



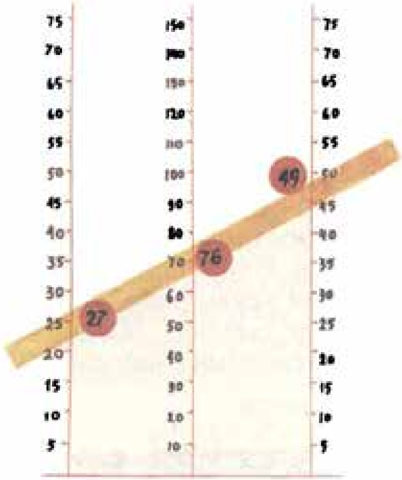
Такие чертежи называют *номограммами*. *Номограмма* — слово греческое. В переводе оно означает «черчение закона», или «черчение правила», т. е. изображение закона, или правила, чертежом. Номограммы можно применять во многих случаях вычислений.

Например, когда требуется часто складывать двузначные числа, можно построить следующую номограмму. Проведем на равных расстояниях одна от другой три прямых под углом к четвертой прямой. На крайних прямых отложим равные масштабные единицы. А на средней прямой такие единицы отложим в два раза мельче. Против делений проста-

Определение нормы выработки с помощью номограммы.



вим соответствующие числа. Если потребуется сложить, например, 27 и 49, приложим линейку так, чтобы на левой шкале она проходила через деление 27, а на правой — через деление 49. Ответ 76 можно прочитать на



Сложение двузначных чисел по номограмме.

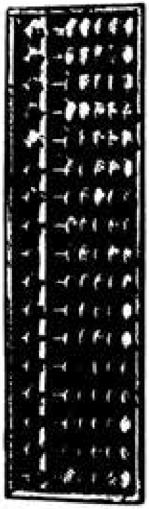
средней шкале. Этой номограммой можно воспользоваться и при вычитании двузначных чисел.

Подобные «считающие» чертежи, или номограммы, имеют длинную историю. Уже солнечные часы представляли собой «считающий» чертеж на песке, где роль линии выполняла тень от стержня, воткнутого в землю. Греческие математики Евклид, Аполлоний Пергский и другие выражали числа отрезками. Галилей доказывал открытый им закон ускоренного движения тел с помощью построения своеобразной номограммы. Но в то время этого названия не существовало, да и специальным изучением чертежей для вычислительных целей не занимались. Большой вклад в обоснование графического выражения величин внесли математики Ферма, Декарт и Эйлер.

Значительный интерес к разработке правил построения и применения номограмм при вычислениях у математиков появился в XIX в. Первым занялся прямолинейными номограммами в 1843 г. французский математик Л. Лалан. В России изучением метода номограмм занялись лишь в начале XX в. — Н. М. Герсованов (1879—1950) и особенно Н. А. Глаголев (1888—1945).

Математика — царица наук, арифметика — царица математики.

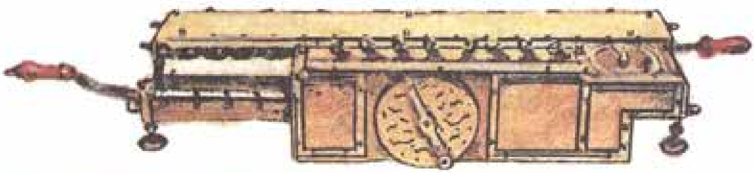
К. Гаусс

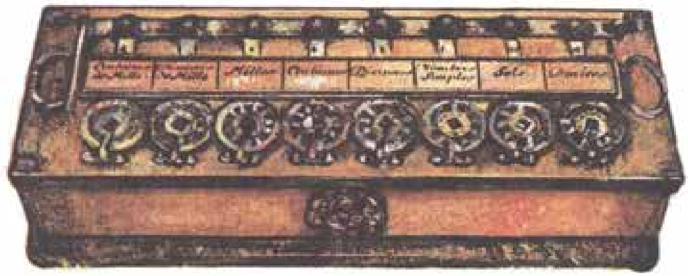


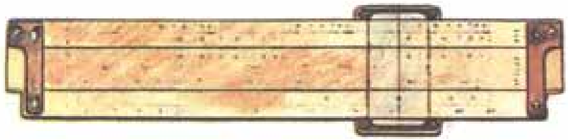
Абак. *Это, пожалуй, первый вычислительный прибор. Появился он около 2500 лет назад и был широко распространен в Египте, Китае, Греции.*

59. Простейшие счетные приборы

С давних пор человек задумывался, как легче и быстрее выполнять вычисления, которых ему приходилось делать с каждым годом все больше и больше. Мы уже знаем, что древнейшими приспособлениями были разного рода абаки. Более совершенным прибором стали счеты. Они были изобретены в нескольких странах в разное время. Наиболее ранним из них является китайский «суан-пан», который в Китае применяется до сих пор. «Суан-пан» основан на пятеричной системе счисления. Он







После того как Джон Непер придумал логарифмы, изобретение его было использовано в логарифмической линейке. Она появилась в XVII в.

состоит из рамы, на которой закреплено в ряд несколько стержней. На каждый стержень надето семь подвижных фишек-косточек. Планка, укрепленная посередине рамы, распределяет фишки на две группы. В первой группе на каждом стержне оказывается по пяти фишек, а во второй группе на каждом стержне по две фишки. Когда при счете на первом стержне отложены все пять фишек, то их заменяют одной фишкой второй группы, а пять фишек сбрасывают. Продолжая счет, набирают еще раз пять фишек и вновь заменяют второй фишкой из второй группы на этом же стержне. Две фишки второй группы на первом стержне означают десять и могут быть заменены одной фишкой из пяти штук на втором стержне и т. д.

Другой старинный счетный прибор, дошедший до наших дней, — японский «соробан». Он почти полностью повторяет «суан-пан» и, вероятно, является разновидностью последнего. Отличие «соробана» в том, что число косточек-фишек в нем на каждой проволоке (стержне) меньше. В первой группе их по четыре, а во второй по одной на каждой проволоке. Считая на «соробане», откладывают косточку за косточкой на первой проволоке. После того как все четыре косточки первой проволоки отложены, чтобы положить пять, четыре косточки сбрасывают и откладывают одну косточку второй группы — она обозначает 5. После того как отложено 9 — четыре косточки первой группы и одна косточка (5) второй группы, — откладывают одну косточку на второй проволоке — 10, а все остальные косточки сбрасывают.

Русские счеты в отличие от «суан-пана» и «соробана» полностью основаны на десятичной системе счисления. Они появились как усовершенствование «дощаного счета» (своеобразного абака) и довольно широко распространились в России с XVI в.

Во время Отечественной войны 1812 г. русскими воинами был взят в плен французский математик Понселе (1788—1867). В плену он продолжал заниматься математикой и познакомился с русскими счетами. Они показались Понселе таким совершенным прибором, что после освобождения он увез на родину один прибор. С этого времени во французских школах русские счеты использовались при обучении детей.

Был случай, когда один из агентов по продаже счетных машин организовал по японскому образцу состязание на скорость вычислений с большими числами. Русские счетчики работали на счетах, а высококвалифицированный зарубежный специалист — на сложной счетной машине. Каково же было изумление иностранцев, когда победителем оказался наш соотечественник. Но достичь такого совершенства в вычислениях на счетах можно лишь при постоянной тренировке. Вычисления даже на простой механической машине значительно облегчают труд счетного работника и позволяют увеличить скорость вычислений.

60. Механические счетные машины

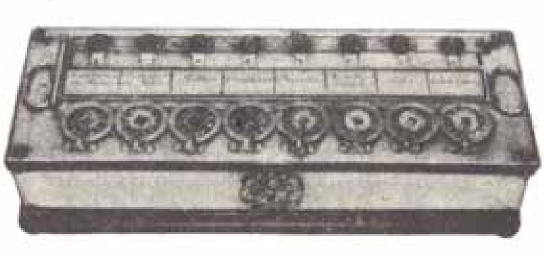
С давних времен люди стремились сделать такую машину, которая могла бы считать сама. Первую такую машину создал знаменитый французский ученый Блез Паскаль (1623—1662). Он задумал ее еще в детстве. Его отец работал в городе Руане сборщиком налогов. Ему приходилось все вечера заниматься подсчетами. Сын видел, как отец устает от этих занятий, и мечтал сделать машину, чтобы облегчить его труд.

Несколько лет все свое свободное время юноша отдавал изобретению. Он сделал более пятидесяти различных моделей, пока не изготовил в 1646 г. машину, на которой можно было складывать и вычитать числа, вращая рукоятку. Свыше десяти лет жизни ушло на эту работу у Блеза Паскаля. Однако машина была далека от совершенства.

Блез Паскаль.

Спустя почти 50 лет немецкий математик Лейбниц изобрел счетную машину, на которой можно было выполнять все четыре действия с многозначными числами. Но и эта машина не получила распространения — она работала медленно. В последующие двести лет было изобретено и построено еще несколько подобных счетных машин, которые из-за ряда недостатков не получили признания.

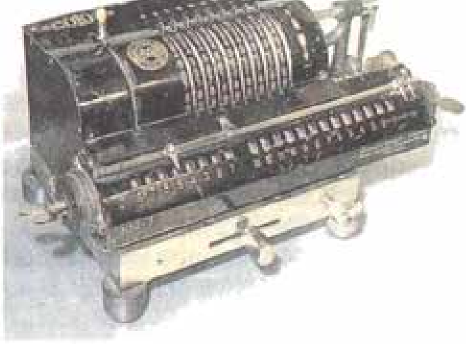
Наш гениальный соотечественник П. Л. Чебышёв также много потрудился, разрабатывая оригинальную счетную машину. В



*Первую механическую **счетную машину** придумал выдающийся французский ученый Блез Паскаль в 1642 г. Эта машина умела выполнять сложение.*

1878 г. он создал машину, которая выполняла сложение и вычитание многозначных чисел, а спустя пять лет изобрел к ней приставку, позволявшую выполнять на машине умножение. Арифметическая машина Чебышёва была показана на выставке в Париже и получила всеобщее признание. По образцу этой машины предприимчивый немецкий делец стал выпускать счетные машины, присвоив себе изобретение русского ученого.

Счетная машина.



Арифмометр Однера.

Широкое распространение получил арифмометр Однера. Изобретен этот арифмометр петербургским инженером В. Т. Однером в 1874 г. Спустя семь лет эти счетные устройства стали изготавливать в Петербурге на механическом заводе. Конструкция машины оказалась весьма удачной. На ней можно было выполнять довольно быстро все четыре действия с многозначными числами. Арифмометры Однера выпускались в течение многих десятилетий. В 30-е годы в нашей стране разработан более совершенный арифмометр — «Феликс», созданный на основе арифмометра Однера. Эти машины применяли до конца 50-х годов.

В настоящее время производят клавишные счетные машины, которые работают от электрического тока. Набор данных чисел на

них осуществляется с помощью нажатия соответствующей клавиши. Но и эти машины уже уходят в прошлое. Им на смену пришли портативные настольные и даже карманные клавишные электронно-вычислительные машины — *калькуляторы,* которые работают точно и бесшумно. На них можно выполнять разнообразные действия с числами свыше миллиона.

Упражнения и задачи

1. Имеются только две линейки. На одной отмечен отрезок длиной 7 см, а на другой — 5 см. Как, пользуясь для измерения только данными линейками, нанести на них сантиметровые деления?

2. Двузначное число имеет сумму цифр 13. Поменяв местами цифры этого числа, получим новое число, которое больше первоначального на 27. Найдите это число.

3. Сколько надо написать цифр, чтобы записать все однозначные и двузначные числа?

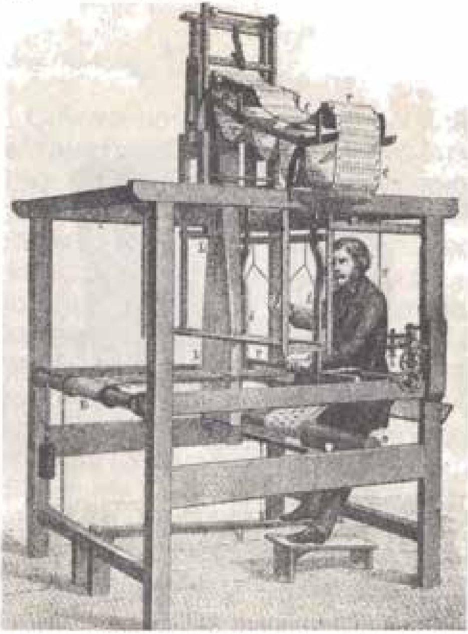
4. Газету разрезали на 4 части. Одну ее часть опять разрезали на 4 части. Затем так же поступили еще несколько раз. Сколько получилось всех кусков после 13 разрезов?

5. Брат и сестра собирали орехи. У них оказалось одинаковое число гроздьев (гнезд). Но у брата в каждом гнезде было по 5 орехов, а у сестры — по 3. Всего они сорвали 24 гнезда. Сколько орехов оказалось у каждого?

6. В данном ряду чисел 6****8 заменить звездочки цифрами так, чтобы сумма каждых трех рядом стоящих чисел составляла 18.

61. Машины с «высшим образованием»

В конце XVIII в. в результате полувекового поиска в Англии были созданы прядильные и ткацкие станки. С тех пор в наиболее развитых странах началось бурное развитие ткацкого производства. Развитие ткачества вызвало к жизни двигатель, а появление механических паровых двигателей способствовало развитию горнодобывающей промышленности.



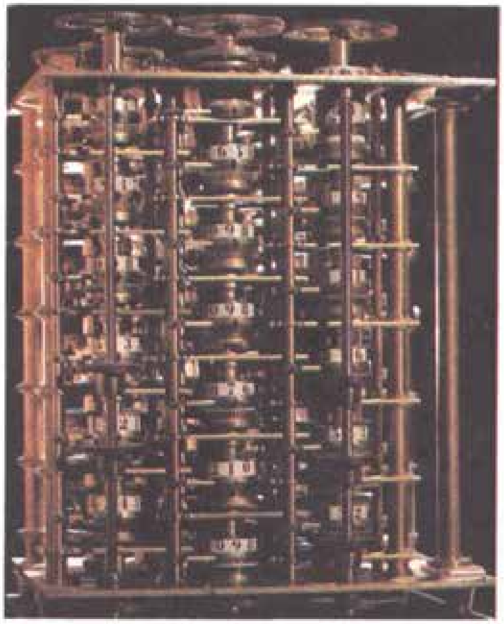
Жаккардов ткацкий станок. В 1801 г. французский изобретатель Жозеф Мари Жаккар создал машину для выработки крупноузорчатых тканей. Для управления нитями в нем применялись специальные карты с отверстиями.

Так, создание первых машин привело к промышленному перевороту и вызвало быстрый прогресс техники и науки.

Дальнейшее развитие промышленности потребовало строительства крупных зданий, развития транспортных средств и создания быстродействующих механизмов. Для осуществления этого нужно было выполнять много сложных и точных расчетов. Чтобы облегчить и тем самым ускорить труд счетных работников, стали изобретать приборы, таблицы, счетные машины. Первые действующие счетные машины были далеки от совершенства, а практика, наука и техника требовали ускорять выполнение расчетов. Изобретатели стали учить машины считать быстрее: поставили на них моторы, заставили записывать и запоминать результаты вычислений, усовершенствовали управляющие устройства и пр. Постепенно счетные машины стали совершеннее, значительно выросло их быстродействие. Но жизнь требовала еще больших скоростей, так как количество вычислений росло не по дням, а по часам. Ведь только при расчете прогноза погоды на завтрашний день требуется ежедневно выполнять около трех миллионов математических операций, т. е. столько, что их не успевает выполнить за рабочий день коллектив в 1000 человек. А, например, при запуске ракеты, чтобы выправить отклонение при ее полете, нужно производить многочисленные сложные расчеты почти мгновенно. Вот почему потребовались счетные машины, которые могли бы выполнять в секунду тысячи операций с числами по заранее составленной программе, в которой указывается, какие действия и в каком порядке нужно выполнить.

В 1833 г. английский математик и естествоиспытатель, инженер и изобретатель Чарлз Беббидж (1791—1871) приступил к разработке проекта и постройке такой механической быстродействующей программирующей вычислительной машины. По замыслу, она должна была по команде ав-

Машина для автоматизации вычислений — аналитическая машина Чарлза Беббиджа.

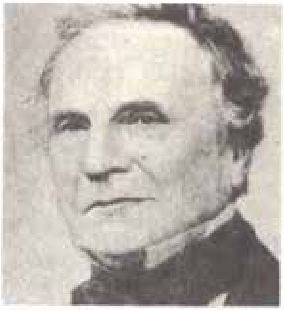


томатически определять последовательность операций в зависимости от произведенных ранее вычислений. В отличие от арифмометров она должна была работать по заранее составленной программе, которая представляла собой полосу картона с пробитыми в ней отверстиями, т. е. *перфокарту*.

Дочь знаменитого английского поэта Джорджа Байрона Ада Лавлейс (1815—1852), обладавшая незаурядными способностями к математике, узнав о работе Ч. Беббиджа по созданию автоматической вычислительной машины, серьезно заинтересовалась его идеями. Она разработала ряд важных положений по составлению программ для будущей машины и опубликовала первую статью по теории программирования. Многие ее мысли и предложения сохранили свое значение и в современном программировании. Леди Лавлейс по праву считают основоположником теории программирования.

В продолжение 15 лет на работы Ч. Беббиджа по созданию изобретенной машины было израсходовано 20 000 фунтов стерлингов. Затем английское правительство прекратило отпуск средств. Работа по созданию вычислительной машины была остановлена. Однако главная причина прекращения работ по созданию машины была не в средствах, а в низком уровне развития науки и техники того времени.

Основополагающие принципы

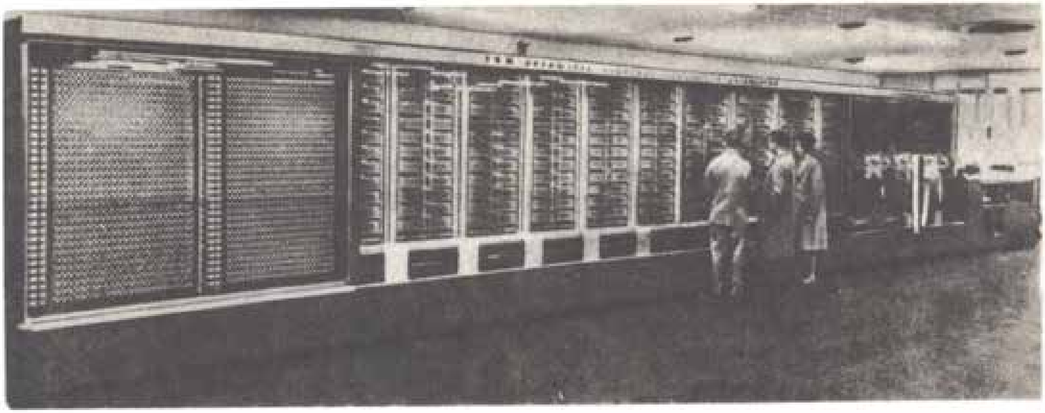


Чарлз Беббидж.

работы электронно-вычислительной машины были высказаны в 1937 г. физиком Джоном Винсентом Атанасовым (1903—1995) — болгарином по происхождению, проживавшим в США. Он предложил применить двоичную систему счисления и использовать комбинации схем из электронных ламп — конденсаторов и реле.

Лишь в 1945 г. физикам Дж. Мокли и Дж. Эккерту удалось сконструировать и построить первую в мире электронно-вычислительную машину, названную ЭНИАК. Она могла рассчитывать только таблицы для артиллерийской стрельбы.

В нашей стране в 1950 г. была создана и начала действовать малая ЭВМ. Коллективом инженеров и ученых под руководством академика С. А. Лебедева (1902—1974) была создана и стала работать БЭСМ-1 (большая электронная счетная машина). Она работала на электронных лампах (их было около 4000 шт.) и выполняла в секунду 5000 математических действий. БЭСМ-1 в то время была лучшей в Европе, но при работе требовала очень много элект-



Первая в мире универсальная электронная вычислительная машина ЭНИАК.

роэнергии, часто останавливалась от перегрева ламп и занимала много места. Изобретатели начали поиски путей совершенствования машины; в результате были построены БЭСМ второго, третьего и более позднего поколения. Они работают по заранее составленной программе.

Программу для компьютера (ЭВМ) разрабатывает программист. Он вносит в нее все необходимые данные и указывает последовательность действий, которые должна выполнить машина. В программе обязательно надо указать, как поступить с полученным при вычислениях результатом — запомнить его, а затем включить в операцию на последующем этапе или использовать в ближайшей операции.

Составленную программу закладывают (вводят) в машину, и после команды ЭВМ автоматически выполняет все указания, предусмотренные в программе, и в кратчайший срок выдает окончательный результат на экране ЭВМ (его называют дисплеем) или в виде отпечатанного на машинке текста. Невероятное быстродействие ЭВМ позволяет буквально в считанные доли секунд найти и дать поправку, например, для уточнения пути полета уже запущенной ракеты.

По своим способностям современные ЭВМ — это машины-богатыри в сравнении с БЭСМ-1.

Современные ЭВМ (компьютеры) независимо от того, являются они персональными или представляют целый комплекс единой системы программно-совместимых ЭВМ, работают по предложенной им заранее подготовленной программе или отдельным командам. Все они:

1) быстро и безошибочно производят вычисления;

2) запоминают и классифицируют нужные данные, как числовые, так и текстовые;

3) выбирают, какие действия и в какой последовательности выполнять в зависимости от полученного результата в предшествующем расчете, т. е., проверив результат выполнения заданного условия, автоматически определяют, что следует делать дальше в соответствии с программой или поданной командой;

4) повторяют многократно или один-два раза некоторую заданную серию команд;

5) находят в памяти и используют в нужном месте различные сведения, необходимые при выполнении заданной программы;

6) записывают, печатают на бумаге или показывают на экране (дисплее) результат выполнения всей программы или каждой ее части.

Первые ЭВМ работали на электронных лампах. В машины второго и третьего поколения были вставлены транзисторы. А более современные компьютеры действуют на интегральных схемах.

Для создания интегральных схем используют тончайшую пленку из кремния. На нее в виде пылинок наносят особые вещества, которые превращают пластинку кремния в сложную электронную схему. Спрессовав ряд таких пластинок, получают кристалл — большую интегральную схему. Интегральная схема — маленький кубик (1—2 мм^3) — способна заменить многие тысячи электронных ламп в сочетании с другими деталями. Большие интегральные схемы (кристаллы) кремния могут управлять работой машин, приборов и выполнять разнообразные вычисления. Эти схемы, называемые микропроцессорами, — основной элемент компьютера.

Современные ЭВМ, или компьютеры, по своим размерам невелики (уже существуют компьютеры не больше печатной машинки), но имеют большую скорость действия. Значительно увеличилась их память, они выдают информацию в виде печатного текста или высвечивают ее на экране дисплея.

ЭВМ находят широкое применение в промышленности, управлении хозяйством, в обучении и быту, они используются при составлении географических карт, при определении залежей полезных ископаемых, расчете прогнозов погоды, разработке графиков движения на транспорте, обеспечении пассажиров билетами и т. д. ЭВМ переводят книги, расшифровывают древние тексты, управляют самолетами, ракетами, электростанциями, многочисленными станками и машинами, рассчитывают полеты космических кораблей, выполняют многие другие работы.

62. Какой станет математика?

Труд и разум сделали человека великим и сильным. Он открывает законы природы, изобретает различные механизмы, строит машины и здания, корабли и ледоколы, дороги и летательные аппараты... Но чтобы делать все это, он должен много знать и непременно уметь считать — считать точно и быстро.

Лишь за последнее столетие в мире выполнено столько вычислений, сколько их не было сделано за все предшествующие тысячелетия существования человека. Теперь математика стала необходимой помощницей даже в тех областях, которые веками обходились без всяких расчетов. Она проникла в химию и биологию, в медицину и языкознание, в металлургию и психологию, в литературоведение и историю и т. д. Причем не только проникла, но и помогла этим наукам в их развитии.

Такое огромное значение математика приобрела благодаря созданию компьютеров (ЭВМ). В наше время и наука, и техника не могут обходиться без вычислительных машин. ЭВМ заменяют труд тысяч работников. Они не только считают, но и управляют. Возможности автоматических систем управления (АСУ), основанных на электронно-вычислительной технике, поистине безграничны.

Современная математика — результат деятельности человеческого гения в течение многих тысячелетий. На своем пути развития математика неоднократно меняла свое содержание, характер и форму выражения. От примитивного счета с помощью пальцев и других предметов она, пройдя через века, выработала собственный язык и символику, сложилась в обширную научную дисциплину, которая находит свое приложение в многочисленных областях человеческих знаний и практических делах.

Хозяйственные потребности человеческого общества постоянно вынуждают людей совершенствовать знания в счете, измерениях и вычислениях, вводить новые математические понятия и расширять уже известные. Долгое время математика представляла собрание небольшого числа правил рецептурного характера, установленных в результате практических наблюдений. Но уже на той ступени развития математические представления, сложившиеся в разных странах и у разных народов, оказывались изумительно близкими по своему содержанию, хотя между собой эти народы и не общались.

Принципиально новый этап в развитии математики был открыт древними греками. Это они преобразовали разрозненные сведения в стройную систему научных знаний, разработали основные методы математических исследований.

В культурном развитии народов совершился грандиозный скачок.

Потребовались многие столетия, чтобы произошел новый подъем в дальнейшем развитии математики. Предпосылкой к нему послужили Великие географические открытия и создание мануфактурного производства.

Так и шло развитие науки, то медленно набирая разгон, то бурно продвигаясь вперед. Причем бурное развитие математики, как правило, всегда связывалось со скачком в развитии производительных сил. Прогресс в производстве требовал новых знаний, и наука, опираясь на практику, разрабатывала новые положения, новые теории, которые должны были удовлетворять практические запросы общества.

В наш век — век электроники и атомной энергии — математика далеко не та, что была сто лет назад. Область ее исследований значительно расширилась, а задачи, которые ей приходится рассматривать, стали неизмеримо разнообразнее и сложнее. Современная техника немыслима без математических обоснований и расчетов. Математика, вооруженная электронной техникой, еще никогда не была столь могущественной и необходимой в жизни человека, как в настоящее время.

Какой станет математика завтра, сказать невозможно. Она развивается так стремительно, что предугадать, как далеко она шагнет, никто не может. Известно лишь, что завтра математика станет еще нужнее людям, еще более мощной и распространит свое воздействие на многие отрасли знаний и производства значительно глубже и шире.

А путь к вершинам математики начинается в начальных классах школы. Желаем вам успехов и открытий на этом пути.

Летопись открытий в мире чисел и фигур

Точные даты возникновения первоначальных математических понятий нигде не отмечены, и поэтому указать их невозможно.

Можно предположить: где-то в начале древнего каменного периода (палеолита) стали возникать первые представления о числе как особой характеристике группы предметов, о соответствии членов одного множества другому. Стали выделять один, два предмета и много предметов. Появились первые рисунки в пещерах и наскальная живопись, положившие начало открытию символов, стали употреблять слова, которые указывали на числа ***один*** *и* ***два*** *(луна — один, глаза — два и т. п.). Дальнейшие числа включались в понятие «много».*

Археологами найдена кость волка, пролежавшая в земле свыше 30 тысяч лет. На ней сделано 55 зарубок, расположенных пяткáми. Попробуем представить, как развивались математические представления людей, когда и кем были сделаны важнейшие открытия в начальной математике.

300 в. до н. э. Люди не только считали, но и отмечали числа зарубками. Почти все народы первые пять чисел отмечали черточками или зарубками, точками или кружками.

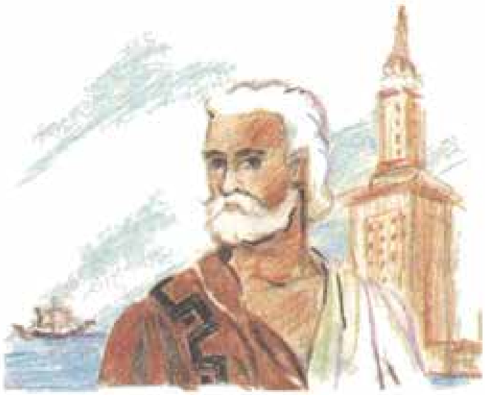
100—40 вв. до н. э. Изображение простейших геометрических фигур в орнаментах на глиняных сосудах. Клинописные глиняные таблички и египетские папирусы указывают на изобретение письма. За письмом появились записи чисел иероглифами или клинописью.

40—30 вв. до н. э. Изобретение пальцевого и узлового счета. Открытие простейших систем счета.

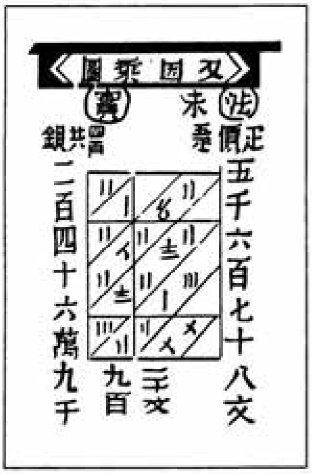
30—15 вв. до н. э. Первые записи астрономических наблюдений. Изобретение календаря в Вавилоне и Египте. Папирус Ахмеса с 84 задачами и Московский папирус (25 задач). Позиционные системы счисления: вавилонская и племени майя. Первые (неточные) подсчеты площадей и объемов, единичные дроби египтян, шестидесятеричные дроби вавилонян. Решение задач с применением простейших уравнений (Ахмес).

VIII—VI вв. до н. э. Древние греки овладевают культурными достижениями других народов. В Греции входит в обиход нумерация посредством геродиановых знаков; несколько позже переходят на алфавитную нумерацию. *Фалес Милетский* (ок. 624—546 до н. э.) — доказательство некоторых теорем. *Пифагор* (580—500 до н. э.) и его школа — зарождение теории чисел. Числа четные и нечетные, совершенные, простые, фигурные и пр. Открытие несоизмеримости отрезков. Доказательство несоизмеримости стороны единичного квадрата с его диагональю. Геометрическая алгебра. Открытие пропорциональности чисел.

V—IV вв. до н. э. Развитие строгих доказательств. Первая попытка систематизировать накопленные по геометрии сведения («Начала» *Гиппократа из Хеоса* — V в. до н. э.), попытки решить три неразрешимые задачи древности. Применение математики в астрономии, музыке, механике. *Евдокс Книдский* (ок. 406 — ок. 355 до н. э.) — теория движения планет. Введение обозначения величин буквами. Разработка отношений однородных величин. Метод исчерпывания при определении площадей и объемов. *Аристотель* (344—322 до н. э.) — представления о шарообразности Земли.



III в. до н. э. Создание Александрийской академии. *Евклид* (365 — ок. 300 до н. э.) — обобщил накопленные в древности знания в трактате «Начала», в котором систематически изложил основы античной математики. *Эратосфен* (276—194 до н. э.) — впервые определил размер земного шара. «Решето» для нахождения простых чисел. *Аристарх Самосский* (IV—III вв. до н. э.) — впервые определил расстояние до Луны и Солнца. *Архимед* (ок. 287—212 до н. э.) — разработал метод нахождения площадей и объемов геометрических фигур, определения длины окружности и площади круга, поверхности и объема шара, конуса и др. В трактате «Псаммит» расширил систему нумерации.



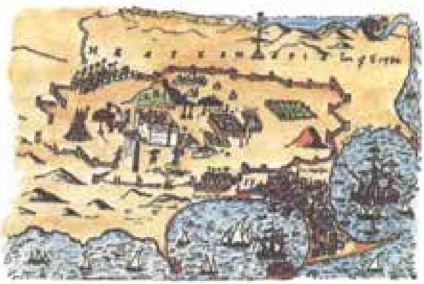
Китайская таблица умножения из книги 1593 г.

II—I вв. до н. э. В Китае написан трактат «Математика» (в девяти книгах). Рассмотрены отрицательные числа, уравнения с двумя неизвестными.

Наша эра

I в. *Никомах из Геразы* (I—II вв.) — создал один из первых учебников арифметики, дошедших до нашего времени. Впервые упоминает об естественном ряде чисел, но термин «натуральный ряд чисел» первым дал Боэций (480—524) при переводе книги Никомаха. В «Арифметике» Никомаха даны совершенные числа и таблица умножения 10•10.

II в. *Птолемей Клавдий* (II в.) — в таблицах применил особый символ для обозначения пропущенного разряда (шестидесятеричного), чего не было у вавилонян. В качестве географических координат пользовался долготой и широтой.



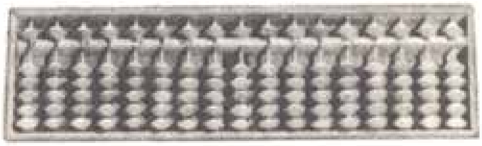
III в. *Диофант Александрийский* (III в.) — в «Арифметике» дает общие правила алгебры: перенос членов, приведение подобных. Впервые вводит буквенную символику для неизвестных членов, разрабатывает методы решения неопределенных уравнений (диофантовы). В Китае Сунь-Цзы в трактате употребляет десятичные дроби с целыми коэффициентами.

V—VII вв. Начало расцвета математики в Индии. Создание десятичной позиционной системы счисления. Нуль — особая цифра. *Ариабхата* (476—?) — решение неопределенных уравнений первой степени. Применение правил действий с це-

лыми, дробными и отрицательными числами. Проверка с помощью девятки. *Брахмагупта I* (598—660) — операции с отрицательными числами, введение особых символов для обозначения неизвестных и их степеней, гипотезы о размерах Земли и Луны.

IX в. Начало расцвета математики в странах Ближнего и Среднего Востока. *Мухаммед аль-Хорезми* (787 — ок. 850) — дает подробное объяснение правил действия с числами, записанными в десятичной позиционной системе; первая книга по алгебре.

X—XI вв. Индийские приемы вычислений в арифметике. Нуль как число, его свойства. Пифагоровы числа. *Герберт* (Сильвестр II, ок. 940—1103) — апексы, предки наших цифр; абак Герберта.



XII в. *Бхаскара II* (1114—1185?) — правила умножения и деления отрицательных чисел. Начало распространения десятичной позиционной системы счисления в Европе через арабов. Перевод арифметики и алгебры аль-Хорезми на латинский язык.

XIII в. *Насир ад-Дин ат-Туси* (1201—1274) — развитие теории о параллельных, расширение понятия о числе. *Леонардо Фибоначчи* (1170?—1250?) — первое в Европе изложение арифметики и алгебраических уравнений, впервые употреблены термины «плюс» и «минус», дробная черта, таблицы простых чисел. *Джованни Кампано* (XIII в.) — новый перевод на латинский «Начал» Евклида (1260).

XIV в. *Николь Орем* (1323—1382) — развитие учения о дробных отношениях. *Иммануил Бонфис* — первая попытка систематического изложения учения о деся-

тичных дробях. *Аль-Каши* — учение о десятичных дробях в трактате «Ключ к арифметике» (1427).

XV в.

Видман (1460 — первая половина XVI в.) — в книге «Арифметика» ввел знаки + и —. *Никола Шюке* (Леон, XV в.) — ввел нулевой и отрицательный показатели степени. Дальнейшее развитие алгебраической символики (1484).

XVI в.

Штифель (1486—1567) — в книге «Полная арифметика» рассматривает отрицательные числа как числа меньше нуля, вводит круглые скобки и символы для

многих неизвестных (1544). *Роберт Риккорд* (1510—1558) — в арифметике (1540) применил знаки + и —, впервые ввел знак равенства =. *Рудольф ван Кейлен* — вычислил π с 35 знаками (1580). *Стевин Симон* (1548—1620) — в трактате «О десятой» (1585) разрабатывает систему десятичных дробей, развивает алгебраическую символику и дает таблицу сложных процентов. *Виет* (1540—1603) — в книге «Введение в аналитическое искусство» употребил алгебраическую символику и положил начало буквенному счислению (1591).

XVII в.

Шиккард — первая счетная машина. *Жирар* (1595—1632) — в трактате «Новое изобретение в алгебре» (1629) первым дает геометрическое толкование отрицательных чисел и

впервые применяет двойной знак ±. *Гарриот* (1560—1621) — в книге «Практика искусства анализа» впервые применяет знаки >, <, совершенствует алгебраическую символику (1631). *Оутред* (1574—1660) — в работе «Ключ математики» (1631) ввел знак умножения × (Лейбниц пользовался при умножении точкой). *Джонсон* употребил при делении двоеточие : (1633). *Эригон* — в 1634 г. ввел геометрические символы. *Декарт* (1596—1650) — в «Геометрии» ввел понятия переменной величины и

функции (1637). *Паскаль* (1623—1662) — создал суммирующую счетную машину, в трактате «О делимости чисел» (1665) дал общие признаки делимости любого целого числа на любое другое. *Гюйгенс* (1629—1695) — в работе «Маятниковые часы» (1673) обосновал применение маятника в часовом механизме. *Лейбниц* (1646—1716) — создание счетной

машины (1674). *В. Ф. Копиевский* — первая русская печатная работа «Арифметика» (1689).

Арiѳметiка, практiка
или дѣятелнаѧ.

XVIII в.

Л. Ф. Магницкий (1669—1739) — первый русский учебник математики. *Ньютон* (1643—1727) — издание «Всеобщей арифметики» (1707), определение числа как отношения двух однородных величин, переход от риторической и геометрической алгебры к

символической и числовой (1707). Основание Московского университета М. В. Ломоносовым в 1755 г.

XIX в. *Н. И. Лобачевский* (1792—1856) — создание учебника геометрии (1823). *П. Л. Чебышёв* (1821—1894) — «Об определении числа

простых чисел, не превосходящих данной величины» (1849), «Теория сравнений» и ряд других работ. Закон больших чисел. Сети Чебышёва. Арифмометр Чебышёва (1878). *Д'Окань* (1884—1890) — заложил основы номографии. *А. Н. Крылов* (1863—1945) — «О приближенных вычислениях» (1907).

Ответы к задачам

К стр. 14

1. 4 — это 3 и 1: $4=3+1$; $2+2$; $5=3+2$; $2+2+1$; $6=3+3$; $2+1+3$; $2+2+2$; $7=3+3+1$; $2+2+2+1$.
2. Шесть.
3. 3 (2 двухколесных и 1 трехколесный).
4. 20 329 (разность чисел равна шестикратному двузначному числу).
5. $33 \cdot 3 + \frac{3}{3}$.

К стр. 23

1. $23 = XXIII$.
2. Шесть (12, 13, 21, 23, 31, 32).
3. Шесть.
6. 217 217.

К стр. 33

1. 999; 111.
3. $12\,345 + 54\,321 = 66\,666$;
   $123\,456 + 654\,321 = 777\,777$.
4. Высота столбика из 1000 кубиков размером 1 $см^2$ составит 1000 см, т. е. 10 м.
5. 180 ($90 \cdot 2$).

К стр. 39

2. ~ 1389000 км $= \sim 13{,}9 \cdot 10^6$ км.
3. $142\,857 \cdot 2 = 285\,714$;
   $142\,857 \cdot 3 = 428\,571$;
   $142\,857 \cdot 4 = 571\,428$ (и т. д.).
5. Шестнадцать (234, 235, 254, 253, 345, 342, 354, 352 и т. д.).

К стр. 43

1. $9\,999\,999 \approx 10^7$.
2. $1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 10^9$; 1 $км^3 = 10^9$ $м^3$.
4. На 1.
5. 999 (единиц 9, десятков 9, сотен 9).

К стр. 52

1. $25\frac{1}{3}$; $34\frac{1}{3}$; $40\frac{1}{3}$.
2. 14 003 руб.
3. Поставьте 4 точки, соедините их попарно линиями. Число этих линий укажет число рукопожатий четырех человек. Добавив число точек до 7, увеличьте число соединительных линий (рукопожатий) и сосчитайте их.

4. 91 и 19. Если разность двух чисел 72, то одно из этих чисел больше 72, т. е. первая цифра будет больше 8. Вторую цифру подберите, используя различные варианты.
5. 27 и 3.

К стр. 59

1. а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$; б) $\frac{8}{15}$; в) $\frac{31}{42}$; г) $\frac{26}{30} = \frac{13}{15}$.
2. $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$; $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; $\frac{3}{14} = \frac{1}{14} + \frac{1}{7}$; $\frac{5}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3}$.
4. $7\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$.

К стр. 65

3. 100 м (100·100 = 10 000 (см); 10 000 см = 100 м).
4. 1000 м (1000·1000 = 1 000 000 (мм); 1 000 000 мм = 100 000 см = 1000 м).

К стр. 79

1. Не может.
2. 2 ч 35 мин.
3. В 287 г. до н. э.
4. 1792—1856.
5. 16 лет сыну; 32 года матери; 48 лет отцу.

К стр. 123

1. 120 400.
2. Возьмем p = 9; 2p = 18. В ряду 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 три простых числа: 11, 13, 17.

К стр. 129

1. 125 м.
2. 8 секунд.

К стр. 142

1. 120(40 + 24 + 20 + 30 + 6 = 120).
2. 40; 170.
3. 10 рублей 50 копеек (2 руб. 10 коп. + 3 руб. 60 коп. + 2 руб. 88 коп. + 1 руб. 92 коп. = = 10 руб. 50 коп.).
4. За 5 дней; 200 верст прошел один, а второй — 150 верст.
5. 23 фазана; 12 кроликов.
6. Всего школу посещали 24 человека; из них математикой занимались 14, музыкой — 7, находились в молчании 4 человека.

К стр. 152

2. 85(85 – 58 = 27).
3. 9 и 99.
4. 52.
5. У брата 60, у сестры 36.
6. 648 648.

Научно-популярное издание

Александр Александрович Свечников

ПУТЕШЕСТВИЕ В ИСТОРИЮ МАТЕМАТИКИ, ИЛИ КАК ЛЮДИ УЧИЛИСЬ СЧИТАТЬ

Зав. редакцией
Л. И. Коровкина

Ведущий редактор
И. Н. Баженова

Редактор
Ю. Л. Бурлакова

Художественный редактор
Е. К. Мазанова

Технический редактор
Т. Е. Морозова

Корректоры
М. К. Александрова,
В. С. Антонова

ИБ № 1945

ЛР № 010236 от 21.04.92 г.

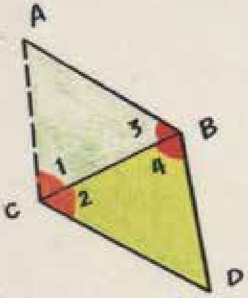
Сдано в набор 10.11.94. Подписано в печать 10.07.95. Формат 70×90 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Гарнитура гельветика. Усл. печ. л. 12,28. Уч.-изд. л. 10,95. Усл. кр.-отт. 50,29. Тираж 15 000 экз. Зак. № 2722. «С»-18.

Издательство «Педагогика-Пресс»
Комитета Российской Федерации по печати
и Министерства образования Российской Федерации
119034, Москва, Смоленский б-р, д. 4.

АООТ «Тверской полиграфический комбинат»
170024, г. Тверь, проспект Ленина, 5.

Александр Свечников

ПУТЕШЕСТВИЕ В ИСТОРИЮ МАТЕМАТИКИ



«ПЕДАГОГИКА-ПРЕСС»