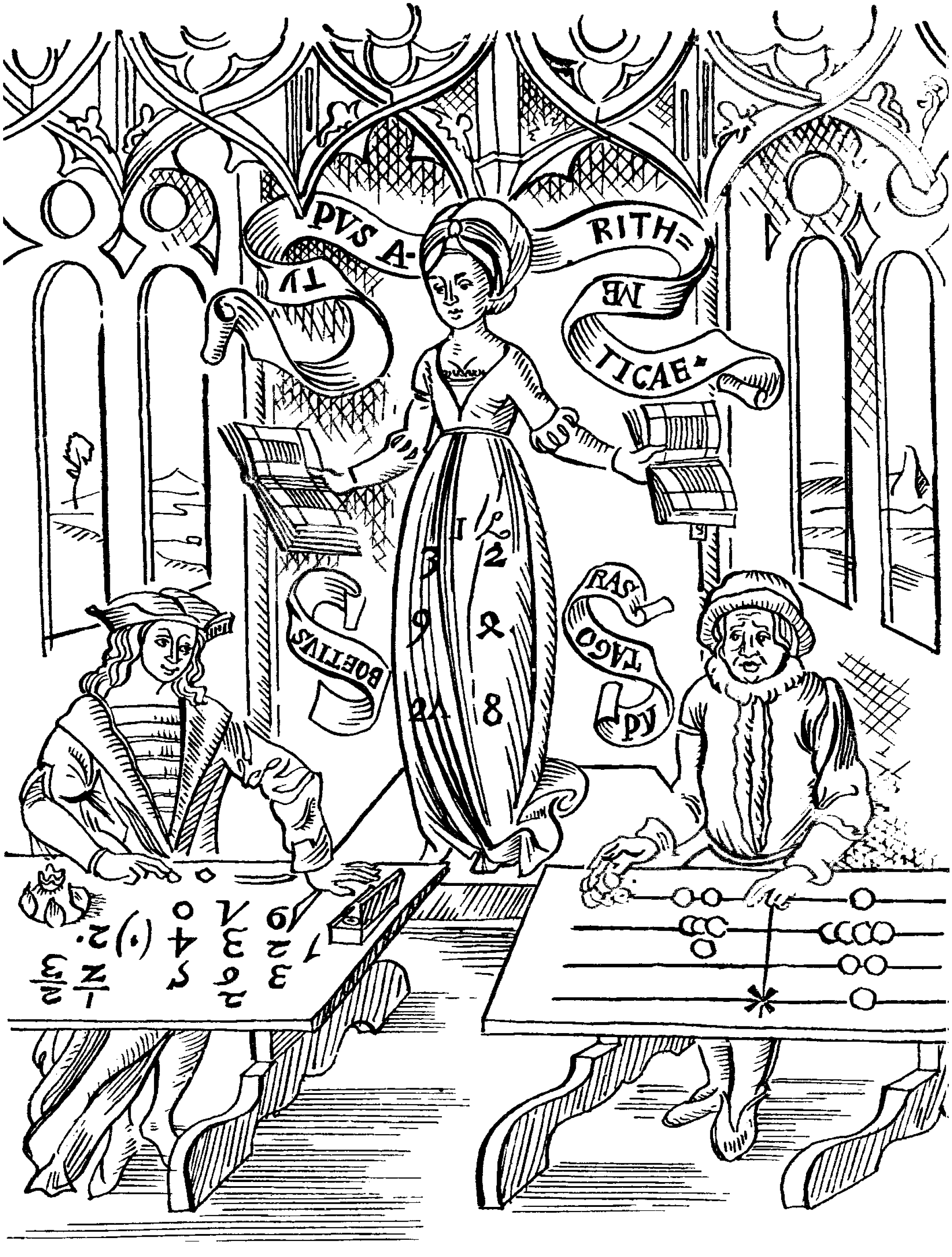

TV PVS A- RITH= ME TICAE
BOETIVS
PY TAGO RAS

Б. В. БОЛГАРСКИЙ

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Издание второе, исправленное
и дополненное

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1979

ББК 22.1 г
Б 79
УДК 51(091)

Рецензент: *Б. А. Розенфельд,* доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института истории естествознания и техники АН СССР, профессор.

Борис Владимирович Болгарский
ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ. Изд. 2-е, испр. и доп.

Редактор *А. А. Белянкина*

Мл. редакторы *Т. С. Канцлер, Н. Д. Савенко*
Художник *Г. Я. Скоморохов*
Худож. редактор *В. Н. Валентович*
Техн. редактор *П. В. Фрайман*
Корректор *А. А. Савицкая*

ИБ 801
Сдано в набор 8.12.78. Подписано в печать 26.07.79. АТ 03628. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Бумага типогр. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 21,39. Уч.-изд. л. 21,53. Тираж 20 000 экз. Изд. № 77—234. Зак. № 1769. Цена 1 руб. 10 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Белорусской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, Парковая магистраль, 11.

Полиграфический комбинат им. Я. Коласа Государственного комитета Белорусской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220005, Минск, ул. Красная, 23.

Болгарский Б. В.
Б 79 Очерки по истории математики.— 2-е изд., испр. и доп.— Мн.: Выш. школа, 1979.— 368 с., ил.

В книге в популярной форме излагается история развития математики с древнейших времен до наших дней. Подчеркивается зависимость развития математической науки от социально-экономических и политических условий каждого конкретного периода. Приведены биографии многих математиков. Книга рассчитана на широкий круг читателей.
1-е издание вышло в 1974 г. под ред. В. Д. Чистякова.

Б $\frac{20201-130}{М\ 304(05)-79}$ 29—79 1702010000

ББК 22.1 г
51(09)

ОТ АВТОРА

Главная цель второго издания «Очерков по истории математики», как и первого (1974 г.),— помочь учителям советских общеобразовательных школ и преподавателям математики педагогических институтов подобрать необходимый исторический материал при преподавании математики. В настоящем издании исправлены допущенные автором недочеты, добавлены некоторые новые разделы, а также внесен ряд дополнений, расширяющих общий обзор исторического материала. В частности, включены новые разделы «Математика в Древнем Китае» и «Несколько слов о современной математике». Внесены дополнительные сведения о развитии понятия о пространственных формах; дополнен раздел об Архимеде; значительно расширен раздел об индийской математике; в раздел о развитии математики у народов Средней Азии и Ближнего Востока внесены заметки о работах аль-Бируни, аль-Фараби и расширены сведения о работах аль-Каши; в разделе «Период создания математики переменных величин» добавлены сведения о П. Ферма; внесены заметки о работах Ж. Роберваля, Х. Гюйгенса; добавлены сведения о борьбе математиков с философией церковников, в частности с Дж. Беркли; даны очерки о работах Л. Карно и о значении работ классиков марксизма-ленинизма в обосновании понятия о дифференциале, а также о трудах К. Вейерштрасса; в кратком очерке «Развитие геометрии в Западной Европе в XVIII и начале XIX в.» добавлен материал о творчестве Ф. и Я. Больяи и Ф. Римана; приведены дополнительные сведения о современных советских математиках.

Перед выходом из печати первого издания «Очерков по истории математики» в 1974 г. профессор Казанского университета им. В. И. Ленина доктор физико-математических наук *Б. Л. Лаптев* тщательно просмотрел рукопись и сделал ряд ценных указаний, использованных мной при окончательном оформлении книги. Выражаю ему глубокую благодарность за проделанный им большой труд, оказавший мне огромную помощь при работе над книгой.

Первое издание этой книги получило много отзывов, из которых три были опубликованы в печати. В журнале «Математика в школе» № 3 за 1976 год была помещена рецензия профессора *Б. А. Розенфельда*, в которой дано подробное обозрение моей работы, высказано пожелание о выпуске второго издания и внесен ряд предложений для нового издания книги. На рукопись, подготовленную для второго издания, Б. А. Розенфельд также дал подробную рецензию, содержащую много полезных указаний и предложений. Я был рад, что книга подверглась столь внимательному рассмотрению крупным представителем историко-математической науки, и со своей стороны постарался по мере возможности выправить замеченные профессором Б. А. Розенфельдом недочеты. Я выражаю свою глубокую благодарность.

Свою благодарность я приношу также доценту Тбилисского педагогического института *Р. К. Таварткиладзе* за рецензию на мою книгу в «Учительской газете» (номер 33 от 16 марта 1975 г.) и доценту Йошкар-Олинского педагогического института *В. К. Смышляеву* за рецензию в газете «Советская Татария» (номер 111 от 14 мая 1975 г.), отзывы которых, конечно, тоже способствовали осуществлению второго издания книги.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге освещены основные этапы развития математики с древнейших времен до наших дней.

Она рассчитана на широкий круг читателей, в основном на преподавателей математики и учащихся старших классов средних школ, а также на преподавателей математики и студентов педагогических институтов.

Первое издание «Очерков по истории математики» вышло под научной редакцией В. Д. Чистякова, ныне покойного. Все примечания, сделанные им, имеют пометку: «Примеч. В. Д. Чистякова».

В истории развития математики академик АН СССР А. Н. Колмогоров выделяет четыре основных периода: 1) зарождения математики, 2) элементарной математики, 3) создания математики переменных величин и 4) современной математики.

Учитывая основное назначение книги, мы включили в нее главным образом вопросы, относящиеся к первым трем из указанных периодов.

Намечая эти периоды, мы отнюдь не хотим ввести в историю математики какие-то грани, строго отделяющие один период от другого, но общее развитие культуры, обусловленное экономическим и социальным развитием человечества, вносило в каждую историческую эпоху свои особые черты, которые были присущи и любой отдельной отрасли этой культуры.

Первый период — **период зарождения математики** — мы, со своей стороны, делим на две эпохи: 1) предысторию математики и 2) эпоху накопления первых математических знаний.

Предыстория математики — это те времена, когда человечество создавало первые основные математические понятия, но от которых не осталось никаких вещественных следов: ни записей, ни архитектурных и скульптурных памятников и пр. В этот период, самый большой в истории развития математики, человечество постепенно выработало понятие о натуральном числе, приемы счета и познакомилось с простейшими геометрическими образами

К эпохе накопления первых математических знаний мы относим те времена, когда у человечества уже сформировались определенные общественные группировки, которые можно рассматривать как древнейшие государства. В этот период уже появляются записи чисел, арифметические операции над ними, устанавливаются некоторые практические сведения из геометрии и решаются простейшие задачи алгебраического характера. Однако математические записи не сопровождаются обобщениями и не имеют строгого теоретического обоснования.

Следующий исторический этап развития математики — **период элементарной математики** (с VI в. до н. э. до XVII в. н. э.) — можно было бы назвать также **периодом развития учения о постоянных величинах.** Его характерной особенностью является то, что добытые человечеством практические сведения из области математики получают теоретическое обоснование. В этот период постепенно оформляются основные разделы элементарной математики: арифметика, геометрия, алгебра и тригонометрия.

Наконец, последним будет рассматриваться период **создания математики переменных величин.** В это время (XVII—XIX вв.) в математику входит переменная величина на базе учения о бесконечно малых величинах.

Зарождение учения о бесконечно малых величинах и создание новых разделов математики — аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений, а также теории вероятностей — вот основные вопросы, которые получат освещение при рассмотрении этого периода развития математики.

Развитие математики в России и Советском Союзе выделяем в особый раздел. Мы считаем, что для преподавателей математики такое расположение будет удобнее, так как при работе с учащимися средней школы им чаще всего приходится иллюстрировать уроки примерами тех достижений в области математики, которыми так богата наша страна.

Вопроса о развитии современной математики мы коснемся в заключении книги, отметив лишь некоторые его особенности.

ГЛАВА I. ПРЕДЫСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

ЗАРОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЙ О ЦЕЛОМ ЧИСЛЕ, СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМАХ

Математика, как и многие другие науки, берет свое начало с тех весьма отдаленных от наших дней времен жизни человечества, от которых не осталось никаких письменных памятников, так как основные ее понятия зародились задолго до изобретения человеком знаков для записи своих мыслей. Однако результаты изучения быта отсталых в культурном отношении народов, их языка и преданий, а также изучение развития языка и сказаний народов, стоящих на высокой ступени культуры, дают нам возможность судить о том, как в связи с развитием производительных сил и производственных отношений развивалась и психическая деятельность народов. Вместе с тем становится ясным, каким напряженным трудом в продолжение тысячелетий человечество вырабатывало основные понятия математики. Перед нами раскрывается, как постепенно возникали у человека первые, самые простейшие, представления математического характера, в частности понятие о числе.

Число служит мерилом количественных отношений во всех проявлениях окружающей нас жизни. Вопрос о развитии этого понятия мы должны поставить во главу изучения развития математических понятий вообще, поскольку количественные изменения имеют превалирующее значение в большинстве математических соотношений.

Однако при помощи косвенных средств изучения нельзя получить точного ответа на то, когда и как возникло у человека понятие числа, ибо народы, стоящие на высших ступенях цивилизации, начали изучать жизнь отсталых народов лишь тогда, когда самые отсталые из них были уже на средней ступени варварства (по терминологии Ф. Энгельса), то есть когда они уже были знакомы с добыванием и употреблением огня, создали первые каменные орудия для охоты, изобрели лук,

В.В. БОБЫНИН

стрелы, когда они уже делали деревянную посуду и другую утварь, а также примитивные лодки как средство передвижения. И куда бы ни проникали исследователи, с каким бы племенем они ни встречались, у каждого из них находили уже некоторые математические представления. Современным исследователям жизни и быта некоторых культурно отсталых народов удалось отметить у них столь малые признаки математического развития, что мы можем довольно ясно представить себе, как постепенно, пядь за пядью, человечество отвоевывало первые сведения из области количественных отношений.

Результаты систематических и случайных наблюдений отдельных исследователей и путешественников подверглись строгой научной обработке, при этом значительную роль сыграли труды русских математиков *В. В. Бобынина* (1849—1919), *М. Е. Ващенко-Захарченко* (1825—1912), *Н. М. Бубнова* и др. Пользуясь выводами из их трудов, а также работами некоторых иностранных авторов, мы с достаточной степенью достоверности можем восстановить картину получения человеком первых сведений из области количественных закономерностей, то есть математики.

Самым трудным этапом, который прошло человечество при выработке понятия о числе, считается выделение им понятия единицы из понятия «много». Оно произошло, по всей вероятности, еще тогда, когда человечество находилось на низшей ступени развития. В. В. Бобынин объясняет такое выделение тем, что человек обычно захватывал рукой один предмет, а это, по его мнению, и выделило единицу из множества. Таким образом, начало счисления Бобынин мыслит как создание системы, состоящей из двух представлений: единица и неопределенное множество.

Так, например, племя ботокудов, жившее в Бразилии (ныне почти вымершее вследствие жестоких преследований и уничтожения их европейцами в период колонизации Бразилии), выражало числа только словами «один» и «много». Появление элемента «два» объясняется тем же автором выявлением возможности взять по одному предмету в каждую руку. На первоначальном этапе счета человек связывал это понятие с понятием обеих рук, в которых находится по одному предмету в каждой. При выражении понятия «три» встретилось затруднение: у человека нет третьей руки; это затруднение было преодолено, когда человек догадался помещать третий предмет у своих ног. Таким образом, «три» характеризовалось поднятием обеих рук и указанием на ноги. Отсюда сравнительно легко произошло выделение и понятия «четыре», так как, с одной стороны, к этому побуждало сопоставление двух рук и двух ног, а с другой — возможность поместить по одному предмету у каждой ноги. На первой ступени развития счета человек еще отнюдь не пользовался наименованием чисел, а выражал их или реальным размещением пересчитываемых предметов в руках или у ног, или же соответствующими телодвижениями и жестами.

Дальнейшее развитие счета относится, вероятно, к той эпохе, когда человечество ознакомилось с некоторыми формами производства — охотой и рыболовством. Человеку пришлось изготовлять простейшие орудия для овладения этими производствами. Кроме того, продвижение человека в холодные страны заставило его делать одежду и создавать орудия для обработки кожи.

Мало-помалу сложилось первобытнокоммунистическое общество с соответствующим распределением пищи, одежды и оружия. Все эти обстоятельства вынудили человека так или иначе вести учет общего имущества, сил врага, с которым приходилось вступать в борьбу за овладение новыми территориями, и пр. Процесс счета уже не мог остановиться на четырех и должен был развиваться далее и далее.

На этой ступени развития человек уже отказывается от необходимости брать пересчитываемые предметы в руку или класть к ногам. В математику входит первая абстракция, заключающаяся в том, что пересчитываемые предметы заменяются какими-либо другими, однородными между собой предметами или знаками: камешками узелками, ветками, зарубками. Операция производится по принципу взаимно-однозначного соответствия: каждому пересчитываемому предмету ставится в соответствие один из предметов, выбранных в качестве орудия счета (то есть один камешек, один узелок на шнурке и т. д.). Следы такого рода счета сохранились у многих народов и до настоящего времени. Иногда такие примитивные орудия счета (камешки, раковины, косточки) нанизывали на шнурок или палочку, чтобы не растерять. Это впоследствии привело к созданию более совершенных счетных приборов, сохранивших свое значение и до наших дней: русские счеты и сходный с ними китайский суан-пан.

Развитие счета пошло значительно быстрее, когда человек догадался обратиться к самому близкому ему, самому естественному счетному аппарату — к своим пальцам. Быть может, первым актом счета по пальцам было указание предмета указательным пальцем; тут палец сыграл роль единицы. Участие пальцев в счете помогло человеку переступить за число четыре, так как когда все пальцы на одной руке стали считаться равноценными единицами, это сразу позволило довести счет до пяти.

Дальнейшее развитие счета потребовало усложнения счетного аппарата, и человек нашел выход, привлекая к счету сначала пальцы второй руки, а затем распространяя свой прием на пальцы ног: для племен, не употреблявших обуви, использование пальцев ног было вполне естественным. При этом такое расширение счетных эталонов, очевидно, произошло вследствие возможности привести в однозначное соответствие пальцы рук и ног, что и отмечается у некоторых народов.

Так, для выражения числа «двадцать» индейцы из Южной Америки противопоставляют пальцы на руках пальцам на ногах.

В описываемую нами эпоху хозяйственные расчеты людей ограничивались тем, что после распределения пищи и одежды, захваченных в результате стычки с врагом, уже не было потребности помнить числа, возникшие во время расчетов, а потому счет и не нуждался в наименованиях для чисел, а производился главным образом путем соответствующих жестов.

Например, туземные жители Андаманских островов, расположенных в Бенгальском заливе Индийского океана (ныне совершенно истребленные колонизаторами), не имели слов для выражения чисел и при счете объяснялись теми или иными жестами. Отсюда видно, что жестикуляция при счете как пережиток еще надолго сохранилась у многих народов, которые не выработали словесную нумерацию.

Словесный счет начал развиваться, лишь когда ведущей формой производства стало сельское хозяйство. В эту пору постепенно возникала частная собственность, объектами которой служили поля, огороды, стада. Обладатели полей, домашних животных, будучи крепко связанными с ними, вынуждены были не только с ч и т а т ь принадлежащие им объекты, но и з а п о м и н а т ь их число, а это и толкнуло человека на путь создания именованных чисел. Сначала запоминание проводилось весьма громоздким и неуклюжим способом: путем восстановления в памяти внешних признаков запоминаемых предметов. Например, обладатель стада волов запоминал количество принадлежащих ему животных по тем признакам, что один вол серый, другой — черный и т. д. Разумеется, такой способ запоминания не мог быть пригоден, когда число запоминаемых объектов было большим.

Следующей ступенью в развитии наименования чисел надо признать появление описательных выражений совокупности нескольких единиц. Например, вместо наименования числа, выражающего два предмета, употреблялась фраза «столько, сколько у меня рук», наименование четыре передавалось фразой: «столько, сколько ног у животного». Итак, словесными выражениями нескольких предметов являлись преимущественно части тела человека и животных.

В дальнейшем эти описательные выражения у многих народов заменились наименованием соответствующих слов, и таким образом эти наименования закрепились за числами. Так, число два стало выражаться словами, обозначающими «уши», «руки», «крылья»; четыре — «нога страуса» (четырехпалая) и пр.

Пальцевой счет постепенно приводил к упорядочению счета, и человек стихийно приходил к упрощению словесного выражения чисел. Так, например, выражение, которое должно соответствовать числу 11 — «десять пальцев на обеих руках и один палец на одной ноге» — упрощалось в «палец на ноге»; для выражения числа 23 вместо слов «десять пальцев на обеих руках, десять пальцев на обеих ногах и три пальца на руке другого человека» говорилось просто: «три пальца другого человека».

Подобного рода сокращения в то же время приводили как бы к выделению единиц высшего разряда. В самом деле, такие названия, как «рука» — для обозначения пяти, «две руки» — для обозначения десяти, «нога» — для обозначения пятнадцати, «человек» — для обозначения двадцати и т. п., служили для обозначения единиц высшего разряда, чем пальцы, а пальцы играли роль единиц низшего разряда. В этом смысле выражение «один на другой руке», означающее «шесть», можно рассматривать как «один из второго пятка» или как «пять и один», где «один» — единица низшего разряда, а «пять», то есть «рука» — единица высшего разряда. Точно так же наименование «два на ноге», означающее «двенадцать», указывало на то, что две единицы взяты из второго десятка; это можно было бы передать и такой фразой: «две руки и два пальца», где «две руки» играют роль единицы высшего порядка по отношению к пальцам. Таким образом составлялись уже своеобразные системы счисления.

Самой старой системой счисления считается двоичная. Она возникла, когда человек вел счет еще не по пальцам, а когда единицей низшего разряда служила одна рука, а единицей высшего разряда — обе руки. Следы этой системы мы находим и до настоящего времени даже у народов, стоящих на высокой ступени развития; они выражаются, например, в стремлении считать парами. В денежной системе старой России мы встречаем деление денежных единиц на 2, на 4 ($^1/_2$ копейки, $^1/_4$ копейки), что также является пережитком двоичной системы. У некоторых народов Австралии и Полинезии двоичная система счисления сохранилась до настоящего времени.

Например, у некоторых племен с островов Торресова пролива существуют только единица — «урапун» и двойка — «окоза». При помощи этих чисел и происходит счет. На их языке три выражается как «окоза урапун», четыре «окоза окоза», пять — «окоза окоза урапун», шесть — «окоза окоза окоза» и т. д.

Переход человека к пальцевому счету привел к созданию нескольких различных систем счисления.

Самой древней из пальцевых систем счисления считается пятеричная. Эта система, как полагают, зародилась и наибольшее распространение получила в Америке. Ее создание относится к той эпохе, когда человек считал по пальцам одной руки. Очевидно, при таком способе счета делался какой-нибудь внешний знак всякий раз, когда заканчивался отсчет всех пальцев на одной руке. До последнего времени у некоторых племен пятеричная система сохранилась еще в чистом виде (например, у жителей Полинезии и Меланезии).

Дальнейшее развитие систем счисления пошло по двум путям. Племена, не остановившиеся на счете по пальцам на одной руке, перешли к счету по пальцам второй руки и далее — по пальцам ног. При этом часть племен остановилась на счете пальцев только на руках и этим положила основу для десятичной системы счисления, а другая часть племен, вероятно, большая, распространила счет на пальцы ног и тем самым создала предпосылки для образования системы с основанием 20. Такая система получила распространение главным образом среди значительной части индейских племен Северной Америки и туземных обитателей Центральной и Южной Америки, а также в северной части Сибири и в Африке.

Десятичная система счисления в настоящее время является преобладающей у народов Европы. Однако это не означает, что в Европе эта система всегда была единственной: некоторые народы перешли к десятичной системе уже в более поздние времена, а ранее пользовались другой системой.

Естественной единицей высшего разряда при возникновении двадцатеричной системы явился «человек» как обладатель 20 пальцев. В этой системе 40 выражается как «два человека», 60 — «три человека» и т. д. Двадцатеричная система имеет большой недостаток: для ее словесного выражения надо иметь 20 различных названий для основных чисел. Поэтому, когда у некоторых племен развилась десятичная система, то и многие другие племена, употреблявшие двадцатеричную, постепенно отошли от нее, переняв десятичную. Как полагают, переходу от двадцатеричной системы к десятичной способствовало и то, что с тех пор, как люди стали употреблять обувь, закрывавшую пальцы ног, возможность непосредственного счета двумя десятками утратилась. Двадцатеричная система в наше время в чистом виде не отмечена ни у одного народа; обычно она соединяется с десятичной или с пятеричной. Однако следы этой системы сохранились в названиях чисел у некоторых, даже достигших высокого культурного развития народов.

Так, например, у французов число 80 выражается словом quatre-vingts (четырежды двадцать), а 90 — словом quatre-vingt-dix (четырежды двадцать и десять). У грузин числа 40, 60 и 80 называются ормоци, самоци и отхмоци, то есть 2×20, 3×20 и 4×20 (где «оци» означает 20, «ори» — 2, «сами» — 3, а «отхи» — 4. Числа 30, 50, 70 и 90 называются оцдаати, ормоцдаати, самоцдаати и отхмоцдаати, то есть $20+10$, $2\times20+10$, $3\times20+10$ и $4\times20+10$.

Некоторые племена в качестве счетного аппарата применяли не самые пальцы рук, а их суставы. В этом случае счет иногда развивался тоже достаточно продуктивно и оформлялся в стройные системы. Здесь процесс счета протекал таким образом: большой палец одной руки являлся счетчиком суставов остальных пальцев этой руки; так как на каждом из остальных четырех пальцев этой руки содержится по три сустава, то следующей за суставом высшей единицей являлось число 12, что и послужило к образованию двенадцатеричной системы счисления. Этот процесс иногда не останавливался на 12, а продолжался далее, причем каждый палец другой руки служил единицей высшего разряда, то есть представлял собой 12, и после отсчета всех пальцев на второй руке создавалась новая единица высшего разряда 12×5, то есть 60. Возможно, что такого рода счет способствовал созданию шестидесятеричной системы счисления, имевшей большое распространение в древнем Вавилоне и перешедшей позднее ко многим другим народам. Впрочем, относительно происхождения шестидесятеричной системы счисления существуют и другие мнения, имеющие, быть может, более веские основания. Мы коснемся этого вопроса в одной из следующих глав.

Следы двенадцатеричной и шестидесятеричной систем счисления сохранились и до нашего времени. Стоит вспомнить хотя бы счет часов в сутках, измерение углов градусами, минутами и секундами и практиковавшийся в дореволюционной России счет дюжинами и гроссами.

Так постепенно, под влиянием потребностей экономического характера, человечество стихийно создавало свои методы счета и достигло, наконец, стройного метода, который в дальнейшем сознательно совершенствовался и упрощался, пока не превратился в метод, которым и пользуется современная математика.

Деятельный труд человека, развитие производительных сил и средств производства заставляли человека приспособлять элементарный счет к своим растущим потребностям, к своему интеллектуальному росту. На базе этого элементарного счета и выросло современное величественное здание математики — выразительницы количественной стороны явлений окружающей жизни и неизменной спутницы развития технической культуры человечества.

* * *

Если развитие трудовых процессов и появление собственности заставили человека изобрести числа и их названия, то дальнейший рост экономических потребностей у людей вел их по пути все большего и большего расширения и углубления понятия о числе. Особенно значительные сдвиги в этом смысле произошли, когда возникли государства с более или менее сложным государственным аппаратом, потребовавшим учета имущества и создания налоговой системы, и когда товарообмен перешел в стадию развития торговли с применением денежной системы. С одной стороны, это повлекло за собой зарождение письменной нумерации, а с другой — стали развиваться счетные операции, то есть появились действия над числами.

Своего рода запись чисел производилась еще в те отдаленные эпохи жизни человечества, о которых мы говорили ранее:

все эти узелки, зарубки, нанизанные на шнур раковины являлись не чем иным, как зародышем записанного числа. Но такими способами физически невозможно было выразить крупные числа, которые стали появляться, когда торговля приняла широкие масштабы. Вместе с тем торговые операции потребовали усложнения счета: появилась потребность суммировать числа, производить вычитание, умножение и деление; такого рода расчеты уже неудобно было проделывать прежними примитивными способами. В это время человечество постепенно перешло к письменной нумерации.

Кроме того, надо отметить, что параллельно с общим ростом жизненных потребностей человека и в тесной зависимости от него в человеческом обществе постепенно развивалась, кроме чисел и счета, другая отрасль мышления и практической деятельности, которая легла в основу дальнейшего развития математических знаний. Это было изобретение человеком различных мер и развитие способов измерения. Если понятие о числе способствовало развитию одного из основных разделов математики — анализа, то наблюдения человека над окружающими его объектами, их формой и развитие методов различных измерений способствовали зарождению другого раздела математики — геометрии.

Мы уже вкратце рассмотрели возникновение понятия о числе, являющегося фундаментальным для анализа. Что же касается возникновения понятий геометрического характера, то прежде всего надо отметить, что здесь первенствующее значение имело ознакомление человека с формами всего многообразия окружающих его предметов. История зарождения геометрических понятий по своему характеру напоминает историю зарождения числа и счета. Возникновение первоначальных пространственных образов относится к временам предысторическим. Каждый человек с момента своего рождения попадает в окружение богатейшей природы; непосредственно соприкасаясь с ней, он невольно начинает воспринимать индивидуальные особенности каждого объекта. Из этого окружения человек и заимствовал первые геометрические образы, первые фигуры. Ему миллионы раз приходилось при передвижениях стремиться избирать кратчайший путь, и вот у человека постепенно выработалось понятие о прямой линии, которое еще более, вероятно, уточнилось, когда ему пришлось создавать простейшее орудие для охоты — лук и натягивать веревку. Каждый раз, когда человеку приходилось бывать на открытом лугу или в степи, перед его взором вырисовывалась линия раздела между небесным сводом и землей, и у него невольно создавалось понятие об окружности и круге, который она ограничивает; такие же очертания ему встречались и в других случаях: на небе ему приходилось видеть диск солнца и луны, а в дальнейшем самому пришлось выделывать колеса и посуду округлой формы. Таким образом, постепенно человек знакомился с различными формами, которым он старался подражать, сооружая необходимые для своего обихода предметы. Правда, эти формы запечатлевались в его сознании несколько идеализированно — в виде правильных фигур, каковых в самой природе не встречается, но подобное представление помогало человеку их запомнить и успешно производить при выработке предметов бытового характера. Такого рода понятия, абстрагированные из окружающего мира, и являлись первыми геометрическими понятиями, причем данные человеком названия надолго сохранялись за ними, а некоторые применяются и до наших времен. Эталоны, заимствованные из окружающей природы, бесчисленное множество раз применялись человеком при постройке жилищ, при выделке из глины необходимой посуды, для создания первобытных орудий для охоты и рыболовства и пр. При устройстве жилищ человеку приходилось обтесывать и выравнивать камни, при устройстве загородок проводить прямые линии. Все это дало обобщенное понятие о выпрямлении, о прямой линии. Выделка глиняных сосудов способствовала пониманию округления. Постройка жилищ и выделка посуды способствовали также восприятию понятия о пространственных телах. Таким образом, первые геометрические понятия вырабатывались у человека в основном не при простом созерцании окружающих объектов, а путем практической деятельности для удовлетворения своих самых необходимых жизненных потребностей. Об этом свидетельствует даже терминология, во многих случаях сохранившаяся в геометрии с древних времен.

Так, например, слово «точка» — основное понятие геометрии — является переводом латинского слова «punqo», что означает «тыкаю», «дотрагиваюсь», откуда и произошел медицинский термин «пункция». Слово «линия» происходит от латинского слова «linea», что означает «лен», «льняная нить»; иногда это слово понималось как «прямая линия», и отсюда произошло название прибора для вычерчивания прямых линий — «линейка». Можно назвать еще ряд терминов явно практического происхождения, сохранившихся до нашего времени или бывших в употреблении раньше. Так, например, в переводе с греческого слова «сфера» означает «мяч»; «куб» — «игральная кость», которая имела форму куба; «пирамида» — египетское слово, которым египтяне назвали сооруженные ими усыпальницы фараонов, и т. д.

Но когда усвоенные формы пришлось применять для создания предметов повседневного обихода — жилищ, орудий производства и других, то возникла потребность и в определении размеров этих форм. Так человек пришел к первым мерам длины, веса, объема.

Естественно, что первые меры длины у человека были связаны с размерами частей его тела. Для измерения длины, например, самой распространенной мерой оказался шаг взрослого мужчины. Ведь до сих пор мы нередко прибегаем к измерению расстояний шагами. Если же приходилось измерять объекты небольших размеров, то человек, как и в случае счета, прибегал к помощи своих рук и ног. При этом единицами измерения служили толщина пальцев, длина сустава большого пальца, ширина ладони, расстояние между концами вытянутых большого и указательного или среднего пальцев, длина руки от локтя до конца пальцев, длина ступни и т. д.

Развитие числовой записи и системы мер всегда сопутствовало общему подъему культурного уровня народов, а потому протекало наиболее интенсивно в тех странах, которые быстро шли по пути развития государственности.

ГЛАВА II. ЭПОХА НАКОПЛЕНИЯ ПЕРВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В ДРЕВНИХ ГОСУДАРСТВАХ ВОСТОКА

Среди народов земного шара в наиболее благоприятных условиях для развития их экономической и политической жизни были такие, которые обитали на стыке трех материков: Европы, Африки и Азии, а также народы, занимавшие территории полуострова Индостан и современного Китая. Природные условия в этих местах были на редкость разнообразны: морские берега в этих странах то изрезаны частыми и глубокими заливами моря, то, наоборот, идут длинной ровной линией; около берегов располагаются большие группы островов или безграничные просторы моря расстилаются на необозримые пространства; безводные пустыни перемежаются с плодороднейшими речными долинами; материк то изрезан горными цепями, то на сотни километров тянутся луговые и болотистые равнины. Это разнообразие природных условий и привело к тому, что такое же разнообразие и крайняя дифференцированность наблюдались в развитии производительных сил и соответствующего общественного быта.

В глубокой древности, когда человек еще не обладал достаточно развитой техникой и не мог господствовать над природой, его жизнь в значительной степени зависела от окружающей среды. Однако даже тогда природные условия не могли играть решающей роли в развитии общественного строя; они лишь благоприятствовали или, наоборот, противодействовали развитию общественных форм, ускоряя или замедляя этот процесс. Но, несомненно, природные условия имели большое значение в хозяйственной жизни древних народов на заре создания ими первых государственных объединений, связующих в одно целое самые разнообразные проявления сложных человеческих отношений.

В географических областях, соответствующих местоположению Китая, Древнего Вавилона, Египта и Индии, труд человека в очень отдаленные времена получил уже известную дифференциацию: богатые пастбища привлекли скотоводов-кочевников, плодородные долины рек издавна были колыбелью примитивного земледелия, горные массивы снабдили человека своими ископаемыми богатствами, а близость морей и рек помогла раннему развитию судоходства и торговли.

Дифференциация труда соответствовала и дифференциации этнических групп. В сложной обстановке этнических и трудовых отношений и создались наиболее благоприятные условия для племенных скрещений и языковых взаимодействий, что весьма способствовало развитию человеческой культуры, а вместе с тем и развитию государственности. Здесь ранее, чем где-либо в других местах земного шара, начался процесс расслоения первобытнокоммунистического общества. Сравнительно быстрое развитие земледелия и торговли, а также постоянные взаимоотношения самых разнообразных народностей и представителей различных видов труда в значительной степени содействовали этому процессу, создавая условия для разделения труда и накопления прибавочного продукта. Все это привело к тому, что в речных долинах северной Африки и примыкающей к ней части Азии, а также на месте современных Индии и Китая образовались первые классовые общества — рабовладельческие.

Государства, расположенные на упомянутых территориях, явились первыми в истории человечества государствами, где мы находим зародыши современных наук и математики в частности.

Математика в Древнем Вавилоне

Древневавилонское государство располагалось в той части Месопотамии, где наиболее сближаются русла рек Тигра и Евфрата. Главный город этого государства — Вавилон находился на берегу Евфрата. Вавилонское государство образовалось в XIX в. до н. э. и было рабовладельческим.

В основе земледелия в Вавилоне лежало искусственное орошение, что требовало создания сложной системы канализации и управления ею. Земли принадлежали царю и только давались в пользование сельским общинам или свободным общинникам. Однако цари имели право дарить земельные участки своим вельможам, и вследствие этого появились крупные частные землевладельцы.

Расцвет Вавилонского государства относится ко второй половине XVIII в. до н. э. В эту эпоху государство как крупнейший земельный собственник в особенности заботилось о развитии оросительной системы: принимались меры для расчистки каналов, сооружения водочерпалок и равномерного распространения орошения по всей территории. Продукты сельского хозяйства (зерно, фрукты, скот) являлись предметами вывоза в соседние страны. Развивалась торговля, а этому сопутствовало и развитие ростовщичества. В основе государственного и частного хозяйства лежал тяжелый рабский труд.

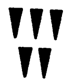
Развитию торговли способствовало прежде всего обилие сельскохозяйственных продуктов. Поля давали богатые урожаи пшеницы и ячменя; финиковые пальмы поставляли муку, вино, уксус, а также ткани для изготовления одежды. Кроме того, торговле благоприятствовало центральное положение Вавилона на берегу судоходных рек, выводящих в море, и на караванных путях, ведущих из Вавилона в Персию и Египет.

В 689 г. до н. э. Вавилон был разрушен ассирийским царем *Синахерибом* и заново отстроен его преемником *Асархаддоном* в 680 г. до н. э. Наивысшего расцвета город достиг при правлении *Навуходоносора* II (604—562 гг. до н. э.). В 331 г. Вавилон был захвачен Александром Македонским, а затем в 312 г. до н. э. перешел к его преемнику *Селевку*, который изгнал из города значительную часть жителей. С этого времени Вавилон утратил свое первенствующее положение и ко II в. до н. э. был окончательно разрушен.

В период наивысшего подъема в Вавилоне развиваются промышленность и торговля. Кроме продуктов натурального хозяйства, отсюда уже вывозятся ковры, шерстяные и льняные ткани, изделия из слоновой кости, ожерелья, браслеты, мечи, копья, парфюмерия, предметы домашнего обихода.

Расцвет торговли повлек за собой развитие денежной системы мер. Первоначально денежными единицами считались меры зерна или серебра. Государственные налоги собирались или натурой, или серебром. Постепенно серебряные деньги начинают вытеснять другие способы оплаты товаров и налогов, и таким образом совершенствуется денежная система. Мало того, развившаяся торговля потребовала уточнения всей системы мер, и в Вавилоне была создана система мер, аналогичная нашей метрической, только в основе ее лежало не число 10, а число 60. Полностью эта система выдерживалась у вавилонян для измерения времени и углов, и мы унаследовали от них деление часа и градуса на 60 минут, а минуты — на 60 секунд. В мерах веса наблюдались некоторые отступления от этого принципа: один талант содержал 60 мин, одна мина — 60 сиклей, а один сикль — 180 зерен, что в переводе на наш счет составляет приблизительно 10 граммов. Меры длины у вавилонян были выдержаны еще меньше.

Исследователи по-разному объясняют появление у вавилонян шестидесятеричной системы счисления. Скорее всего здесь учитывалось удобство основания 60, которое кратно 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 и 60, что значительно облегчает всякие расчеты. Есть, однако, предположение о возникновении шестидесятеричной системы у вавилонян, имеющее в основе геометрическое толкование, но о нем будем говорить ниже.

Числовая запись у вавилонян возникла в весьма отдаленную эпоху. Предполагают, что вавилоняне заимствовали ее у народов, которые жили на территории Вавилонского государства еще до его сформирования. Эта запись, подобно вавилонской письменности, производилась на глиняных табличках путем выдавливания на них треугольных клиньев, причем орудием для записи служил трехгранный брусок. Такого рода клинопись состояла главным образом из трех положений клина: вертикального острием вниз, горизонтального острием влево и горизонтального острием вправо. При этом знак  означал единицу,  — десяток. При помощи этих знаков, применяя еще метод сложения, можно было выражать и многозначные числа. Например, знак  изображал 5, знак  — число 23 и т. д.

Однако те же знаки могли изображать и запись в шестидесятеричной системе, в особенности когда она выражала какие-нибудь меры. В этом случае учитывалось и местоположение цифровых обозначений, причем более крупные доли располагались левее, а более мелкие — правее, то есть соблюдался такой же порядок, какой впоследствии был установлен и при записях в десятичной системе. Так, например, запись  выражала число $34 \cdot 60 + 25$, то есть 2065. Но так как у вавилонян не существовало знака для отделения дробной части, как это делается у нас в десятичных дробях, то вышеуказанная запись с таким же успехом могла быть прочитана как $34+25/60$ или как $34/60+25/60^2$. Следовательно, для правильного чтения записи надо было точно представить себе, в каких мерах это число выражено. Таким образом, вавилоняне уже имели довольно развитую систему записи чисел.

Потребности торговли, сельского хозяйства и строительства в значительной степени способствовали приобретению вавилонянами практических сведений из области математики. В связи с ростом торгового оборота и усложнением операций финансового характера в Вавилоне были созданы учреждения, являвшиеся прообразом современных банков. В этих учреждениях производились операции по выдаче чеков, совершались записи долговых обязательств и различного рода нотариальные сделки. Такого рода операции, несомненно, способствовали развитию арифметического счета. Так, мы знаем, что действие умножения производилось у вавилонян приблизительно в таком же порядке, как и у нас, а действие деления — по принципу умножения на обратное число, что было рационально при употреблении шестидесятеричных дробей: эта операция упрощалась благодаря тому, что 60 имеет много целых делителей.

Занятие земледелием и скотоводством, во многом зависящее от смены времен года, а также необходимость путешествий по водным и караванным путям заставили вавилонян пристально наблюдать за небесным сводом, так как небесные светила являлись в те времена единственными маяками, по которым можно было ориентироваться в нужном направлении. Вследствие этого вавилоняне хорошо изучили расположение видимых невооруженным глазом звезд и составили очень подробную карту звездного неба. Они заметили также, что среди звезд, совершающих вместе с небесным сводом видимый оборот около Земли, находятся некоторые светила, не подчиняющиеся общему закону движения, а движущиеся по каким-то иным путям. Так вавилоняне обнаружили существование планет. Естественно, что первыми из небесных тел, совершающих самостоятельное движение, были замечены наиболее яркие и близкие к Земле. Это были Солнце, Луна и Венера. Вполне естественно также и то, что вавилоняне, заметив, какое большое значение имеет Солнце для жизни на Земле, приписали ему, а вместе с тем и другим открытым планетам свойства божества, и таким образом возник культ трех небесных тел: Солнца, Луны и Венеры. Когда же были открыты новые планеты — Юпитер, Марс, Меркурий и Сатурн, число обожествленных небесных тел достигло семи.

Вавилоняне хорошо изучили движение Луны и определили продолжительность лунного месяца в 30 дней. Он и был положен в основу созданного вавилонянами календаря. Двенадцать лунных месяцев составляли год. Так как лунный месяц несколько меньше солнечного, то и вавилонский год был короче солнечного, а потому, чтобы не было отставания в календаре от солнечного года, вавилоняне исправляли ошибку введением в некоторые годы дополнительного месяца.

Более мелкой единицей для измерения времени служила семидневная неделя, каждый день которой был посвящен одному из обожествленных небесных тел. Многие народы до нашего времени сохранили в названиях дней недели следы вавилонских названий.

Так, у французов наименования дней недели lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi означают: день Луны, день Марса, день Меркурия, день Юпитера, день Венеры; у немцев Sonntag и Montag — день Солнца и день Луны; у англичан Saturday — день Сатурна и пр.

Наблюдая за фазами Луны, вавилоняне составили таблицу их изменения, которая была записана в шестидесятеричной системе и довольно точно передавала истинное изменение фаз Луны. В нашей транскрипции эту таблицу можно представить следующим образом:

$$5;\ 10;\ 20;\ 40;\ 1\cdot 20;$$
$$1\cdot 20;\ 1\cdot 36;\ 1\cdot 52;\ 2\cdot 8;\ 2\cdot 24;\ 2\cdot 40;\ 2\cdot 56;$$
$$3\cdot 12;\ 3\cdot 28;\ 3\cdot 44.$$

Числа в приведенной таблице надо понимать так: $1\cdot 20 = 60+20=80$; $2\cdot 8=60\cdot 2+8=128$; $3\cdot 12=60\cdot 3+12=192$ и т. д.

Эта таблица дает фазы Луны в предположении, что полный диск Луны равен $3\cdot 44$, то есть 224 единицам, а остальные числа показывают, что изменение фаз от полнолуния до новолуния идет в обратном порядке.

Существует предположение, что разделение года на 360 дней и дало вавилонянам повод разделить полную окружность на 360 частей — «шагов», как они именовали эти части, полагая, что Солнце делает при своем видимом обращении вокруг Земли один шаг в сутки. Это деление окружности на 360 равных частей сохранилось и до нашего времени, причем каждую часть мы называем «градус», что и означает в переводе с латинского «шаг».

Некоторые ученые полагают, что такое деление окружности на 360 равных частей привело вавилонян к созданию шестидесятеричной системы счисления. Сторонники такого взгляда опираются на то соображение, что вавилоняне были хорошо знакомы с делением окружности на 6 равных частей: например, колеса у вавилонских колесниц всегда делались с 6 спицами. Если учесть это деление окружности на 6 равных частей, то можно заметить, что на долю каждой приходится 60 градусов, а это и послужило якобы основой для создания шестидесятеричной системы счисления.

Вслед за развитием навыков в арифметических вычислениях последовало накопление понятий более сложного характера и вычислений высшего порядка. Вавилоняне научились извлекать квадратные корни из чисел и дали для этого способы приближенных вычислений. Однако эти способы были столь сложны, что практически вавилоняне пользовались главным образом готовыми таблицами. Точно так же они имели таблицы и для извлечения корней третьей степени, и для возведения чисел во вторую степень. В некоторых случаях вавилоняне оперировали даже понятиями алгебры. Так, они решали некоторые уравнения первой, второй и даже третьей степени, причем для решения уравнений второй степени использовали метод, который мы должны рассматривать как решение системы уравнений с двумя неизвестными: определение двух чисел по данным их произведению и сумме (или разности). Из приведенной ранее таблицы лунных фаз мы можем увидеть, что вавилоняне имели понятие о прогрессиях: первая строка таблицы представляет геометрическую прогрессию, а вторая — арифметическую с разностью 16.

Геометрические сведения вавилонян были довольно разнообразны. Хотя у вавилонян и не существовало ни аксиом, ни теорем, ни доказательств, но в их записях можно найти достаточно задач, решение которых указывает на умение разбираться в довольно сложных построениях. Во всяком случае они оперировали с пропорциональными линиями, если они были параллельны, имели сведения о соотношении сторон в прямоугольном треугольнике, могли определять площади треугольников и трапеций, объемы призмы и цилиндра. Что же касается вообще круглых тел, то при вычислительных задачах с ними вавилоняне неправильно находили длину окружности и площадь круга, полагая, что длина окружности втрое больше ее диаметра. Объемы усеченного конуса и усеченной пирамиды вавилонянами тоже вычислялись, но в большинстве случаев неправильно, путем умножения высоты на полусумму площадей оснований.

Вместе с тем надо отметить, что наблюдения астрономического характера привели вавилонян непосредственно к понятиям, на которых впоследствии базировалась тригонометрия. При этом характерно, что наблюдения за движением небесных светил производились по их кажущимся перемещениям по небосводу, который представлялся вавилонянам в виде полусферы, а следовательно, необходимые измерения производились не на плоскости, а на сферической поверхности. Поэтому вавилоняне подошли ранее к понятиям тригонометрии сферической, а не прямолинейной.

Краткий обзор развития математики в Древнем Вавилоне указывает, что в эту отдаленную от нас эпоху у вавилонян уже накопился некоторый запас математических знаний, но мы не можем сказать, что у них получила развитие математическая наука: накопленные сведения не имели теоретического обоснования, а являлись лишь результатом наблюдения и опыта. Обобщающие выводы и доказательства были чужды вавилонянам.

Наряду с зарождением основных понятий из области различных наук в Вавилоне получили развитие и лженауки, которые близко соприкасались с математикой и вредили ее развитию. Это были астрология и числовая мистика.

Астрология — это лженаука, утверждающая, что жизнь каждого человека в отдельности и человеческого общества в целом зависит от взаимного расположения планет на небесном своде. Мы уже отмечали, что вавилоняне (исходя из соображения, что для человеческой деятельности, в особенности для занятия сельским хозяйством, смена времен года, зависящая от Солнца, имеет чрезвычайно важное значение) пришли к мысли о «влиянии» планет на жизнь человека и обожествили их. Отсюда они сделали и дальнейшие выводы, что на судьбу каждого человека влияет именно расположение планет на небесном своде и что, следовательно, по взаимному расположению небесных светил в момент рождения человека можно предсказать, какова будет его жизнь. Делали соответствующие выводы и для целых государств и народов. Астрология, зародившись в Древнем Вавилоне, в дальнейшем перешла от вавилонян к другим народам и оказала большое реакционное влияние на развитие науки.

Числовая мистика выражалась у вавилонян в присвоении некоторым числам особого, «таинственного» значения. Например, когда вавилоняне обожествляли три небесных тела (Солнце, Луну и Венеру), то число 3 считалось «счастливым». Позднее, когда были обожествлены уже семь небесных светил, «счастливым» стало считаться число 7. Впрочем, мистическое значение числам 3 и 7 придавалось у многих народов. Это объясняется тем, что натуральный ряд чисел не был открыт сразу, а является плодом весьма долгой работы человеческой мысли. Первоначально, как уже упоминалось, люди знали только три числа: «один», «два» и «много»; впоследствии это «много» превратилось в число 3, за которым появились 4, 5, 6 и «много», которое при дальнейшем развитии представления о числах превратилось в 7. Впоследствии таким же образом возникли новые «узловые числа» 12 и 40. Отметим, что эти четыре «узловых числа» играют существенную роль как в христианской, так и во многих других религиях. В последующем нам не раз придется встретиться с тем, как наряду с развитием математики зародились у некоторых народов астрология и числовая мистика и как это задерживало развитие истинных знаний у человечества.

Математика в Древнем Египте

Исторический период развития Древнего Египта относится к очень отдаленной от нас эпохе. Памятники материальной культуры Египта восходят даже к V и IV вв. до н. э. и помогают нам достаточно ясно представить процесс возникновения этого древнейшего в истории человечества классового общества.

Территориальное положение Древнего Египта мало отличалось от современного. Как и ныне, Египет занимал в основном долину нижнего и среднего течения реки Нил, одной из величайших по протяженности рек мира.

За 3000 лет до н. э. на этой территории уже сформировалось раннерабовладельческое централизованное государство, образовавшееся вследствие объединения многочисленных государств — номов. Если первоначальным занятием египетского населения были охота, рыболовство и скотоводство, то постепенно, по мере оседания кочевого населения на более плодородных местах, стало развиваться земледелие, которое и приобрело в дальнейшем преимущественное значение. Успешному развитию земледелия способствовали природные условия долины реки Нил. Нил ежегодно, в период с июня по сентябрь, разливался и затоплял всю долину, а после спада оставлял на заливных берегах принесенный им из Голубого и Белого Нила минеральный и растительный ил, представлявший собой богатейшую почву для земледелия, обеспечивавшую обильные урожаи зерновых. Это свойство Нила и заставило египтян перейти к земледелию как основному виду сельского хозяйства. Однако по окончании Нильского разлива плодородная почва оставалась без орошения, так как начинался период года, в продолжение которого выпадало чрезвычайно малое количество осадков. Это обстоятельство заставило египтян создать сложную систему канализации для искусственного орошения полей; при этом, кроме каналов, в ирригационной системе египтян были даже искусственные водохранилища. Наряду с сельским хозяйством начали развиваться и ремесла: гончарное, ювелирное, ткачество. Кроме того, значительный прогресс был достигнут в обработке камня; из него выделывались сельскохозяйственные орудия, плотничные инструменты, оружие, посуда. Камень стал применяться и для сооружения зданий, могильных памятников, храмов. При этом материалы для изделий из камня добывались в самом Египте, а материалы для ювелирных изделий и предметов домашнего обихода (золото, свинец, медь, а впоследствии и железо) приходилось привозить из соседних стран: Нубии, с острова Кипр, с Синайского полуострова, из Аравийской пустыни на побережье Красного моря и т. д. Необходимость привоза сырья из далеких стран, а также желание продать свои товары способствовали быстрому развитию торговли. При этом египтяне совершали большие путешествия как по суше, так и по речным и морским путям. Морские пути шли вдоль берегов Красного моря и азиатского побережья Средиземного моря.

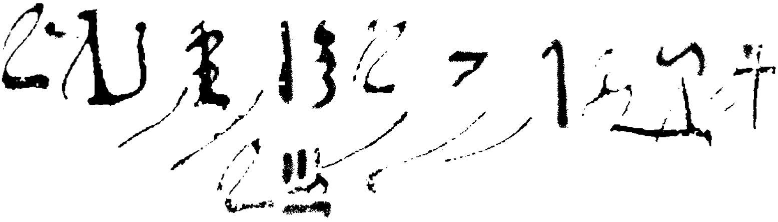
Подобно тому как это наблюдалось в Вавилоне, развитие сельского хозяйства, ремесел и торговли повлекло за собой необходимость производить некоторые наблюдения научного характера, что в свою очередь содействовало накоплению сведений из области естествознания, географии, астрономии и математики.

Самым значительным фактором в развитии сельского хозяйства Египта являлись разливы Нила, периодически повторявшиеся в одно и то же время года. Это обстоятельство, естественно, вызвало необходимость как-то зафиксировать в

ВОДЯНЫЕ ЧАСЫ — КЛЕПСИДРА

памяти годовой промежуток времени. А так как времена года находились в несомненной зависимости от движения небесных светил, то египтяне обратились к наблюдению за планетами. Ими был установлен промежуток времени, который они отсчитывали по восходу звезды Сириус. Ее ранний восход совпадал с началом подъема воды в Ниле. Промежуток между двумя ранними восходами Сириуса был принят египтянами за год, содержащий в себе 365 дней. Год египтяне разделили на 12 месяцев по 30 суток в каждом, а в конце года добавлялись еще 5 дней (считавшихся праздничными). Каждые сутки делились на 24 часа: 12 дневных и 12 ночных; дневные и ночные часы различались между собой по продолжительности, так как дневной час представлял 1/12 часть дня от восхода Солнца и до его захода, а ночной — 1/12 часть ночи от захода Солнца до его восхода. Впрочем, разница в продолжительности ночных и дневных часов была сравнительно невелика, так как вблизи экваториальной части земного шара продолжительность дня и ночи почти равна. Для измерения времени с давних пор применялись солнечные часы, а около 1500 г. до н. э. были введены в употребление водяные часы — к л е п с и д р а, пред-

ИЕРОГЛИФИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ



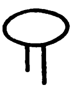
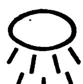
ИЕРАТИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ

ставлявшие собой сосуд с отверстием в дне. В этот сосуд наливалась вода, и срок ее истечения из сосуда через нижнее отверстие служил единицей времени.

Измерения и вычисления при строительстве грандиозных храмов, знаменитых египетских пирамид, измерительные и вычислительные работы при сооружении сложной ирригационной системы, а также при перемеривании границ земельных участков после разлива Нила, смывающего все пограничные знаки,— все это послужило благодатной почвой для развития первых навыков в математическом счете и для ознакомления с основными геометрическими формами и понятиями.

Зарождение египетской культуры относится к периоду времени за 4000 лет до н. э. Предполагают, что в эту эпоху была создана и египетская письменность. Первоначально она носила иероглифический характер, то есть каждое понятие изображалось в виде отдельного рисунка. Но постепенно иероглифические записи принимали несколько иную своеобразную форму, именуемую иератической записью. На рисунке приведен один и тот же текст, записанный при помощи иероглифов и иератической скорописью.

Такими же методами производилась и запись чисел. При иероглифической записи числа выражались уже в десятичной системе, причем существовали особые знаки для разрядных чисел: единиц, десятков, сотен и т. д. Единица изображалась знаком , десяток , сотня , тысяча , десять тысяч , сто тысяч , миллион , десять миллионов . При этом если единица какого-нибудь разряда содержалась в числе несколько раз, то она столько же раз повторялась в записи, то есть соблюдался закон сложения. Например, число 5 выражалось так: . Число 122 имело вид: .

У египтян употреблялись только единичные дроби, то есть такие, которые выражают только одну долю и в нашей записи имеют в числителе единицу (такие дроби мы называем аликвотными). Исключение составляла дробь $^2/_3$, для которой существовал особый знак ; дробь $^1/_2$ тоже имела особый знак , а все остальные выражались при помощи символа «ро», который имел вид . Чтобы изобразить какую-нибудь дробь, рисовали этот символ и под ним ставили число, представлявшее знаменатель. Например, одна седьмая записывалась так: 

Записи производились преимущественно красками на папирусе. Иногда же материалом для записи служили камень, дерево, кожа, холст, черепки. Текст выписывался в строки преимущественно справа налево или столбцами — сверху вниз.

Некоторые из египетских папирусов сохранились до нашего времени; среди них находятся и такие, в которых можно найти сведения о познаниях египтян в математике.

Особенно большой интерес для нас представляют два папируса. Один из них носит название «папирус Райнда», по имени его первоначального владельца, и хранится в Британском музее, а другой, так называемый «Московский математический папирус», исследованный нашими историками *Б. А. Тураевым* (1868—1920) в 1917 г. и *В. В. Струве* в 1930 г. (1891—1964), хранится в Государственном музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина в Москве. Оба эти папируса относятся ко времени 2000—1800 гг. до н. э. Хотя возможно, что папирус Райнда является лишь списком другого документа, написанного около 3000 лет до н. э.

Папирус Райнда, или, как его иначе называют, папирус Ахмеса (считают, что он был составлен египетским писцом *Ахмесом* около XX в. до н. э.), представляет собой скорее школьную ученическую запись сведений сельскохозяйственного характера. Но этот папирус так насыщен математическим материалом, что его вполне можно принять и за документ математического характера.

Из упомянутых папирусов и других памятников, сохранившихся до нашего времени, мы узнаем, что египтяне при математических вычислениях пользовались не только записью чисел, но имели и некоторые символы математических операций. Так, сложение изображалось знаком, представлявшим ноги человека, идущего справа налево, а вычитание — тем же знаком, взятым в обратном направлении. Разность двух величин выражалась символом, представлявшим три стрелы, направленные горизонтально. Изображение совы довольно часто заменяло слова «то есть» или знак двоеточия; иногда этот символ мог означать и равенство.

Действие умножения производилось у египтян путем удвоения: например, чтобы умножить 8 на 8, египтянин должен был умножить 8 на 2, полученное произведение опять умножить на 2 и, наконец, новый результат еще раз удвоить. Чтобы умножить 15 на 17, надо было произвести следующие операции:

$$15(1+2\cdot2\cdot2\cdot2)=15\cdot1+15\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=15+$$
$$+30\cdot2\cdot2\cdot2=15+60\cdot2\cdot2=15+120\cdot2=15+240=255.$$

Действие деления производилось как действие, обратное умножению, то есть подбиралось такое число, которое, будучи умноженным на делитель, давало бы делимое.

Необходимость выражать все дроби при помощи аликвотных заставила египтян ввести в употребление особые таблицы для выражения дробей с числителем два в виде суммы аликвотных дробей. Такая таблица и приводится здесь.

Таблица дробей из папируса Райнда

$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$	$\frac{2}{27}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$	$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$
$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$	$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$
$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$	$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$
$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	$\frac{2}{33}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{57}=\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$
$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$	$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$
$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$	$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$	$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{214}+\frac{1}{448}+\frac{1}{610}$
$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$	$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$
$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$	$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$	$\frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$
$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$	$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{6}{129}+\frac{1}{301}$	$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$
$\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$	$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$	$\frac{2}{69}=\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$
$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$	$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$	$\frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{508}+\frac{1}{710}$
$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$	$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$	$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$

Окончание таблицы

$\frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$	$\frac{2}{85}=\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$	$\frac{2}{95}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$
$\frac{2}{77}=\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$	$\frac{2}{87}=\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$	$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$
$\frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$	$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$	$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$
$\frac{2}{81}=\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$	$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$	
$\frac{2}{83}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$	$\frac{2}{93}=\frac{1}{62}+\frac{1}{186}$	

Эта таблица использовалась для разрешения вопросов, в которых требовалось производить действия над дробями. Например, если нужно было 5 разделить на 21, то процесс протекал в следующей последовательности:

$$\frac{5}{21}=\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\frac{2}{21}=\frac{1}{21}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}=$$
$$=\frac{1}{21}+\frac{2}{14}+\frac{2}{42}=\frac{1}{21}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}=\frac{1}{7}+\frac{2}{21}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}.$$

Такой длительный, на наш взгляд, процесс иногда давал результаты, практически более полезные, чем наше простое выражение ответа в виде дроби $\frac{5}{21}$. Например, задача о разделении семи хлебов на 8 человек даст решение такого вида: $\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, что укажет на способ, каким надо разрезать хлебы: 4 хлеба надо разрезать пополам, два хлеба — разрезать на четыре части и один хлеб — на восемь частей.

В папирусах мы находим довольно сложные вычисления, производимые не только над целыми, но и над дробными числами.

Кроме того, в указанных нами папирусах имеются сведения и из других разделов математики. Так, мы находим в них задачи, которые следует отнести к алгебре, и задачи геометрического характера.

В папирусе Райнда особый отдел посвящен вопросу о «вычислении куч». Этот раздел в сущности содержит задачи на уравнения первой степени с одним неизвестным. «Куча», или по-египетски «хау», заменяет наше неизвестное. Очевидно, под «хау» разумелась куча зерна, в которой находится неизвестное число зерен.

Приведенная нами ранее запись, выраженная иероглифами и иератической скорописью, представляет одно из таких уравнений. Смысл этой записи таков:

куча, ее 2/2, ее 1/2, ее 1/7, ее целое дают 37.

Решение подобных уравнений проводилось в определенном порядке: объединялись все члены, содержащие неизвестное, то есть производилось действие, аналогичное нашему приведению подобных членов, причем особое внимание обращалось на выражение дробей через аликвотные. Часто при решении уравнений прибегали и к методу ложного положения, о котором мы будем говорить, когда перейдем к развитию математики в Индии.

В папирусах встречаются и вопросы, связанные с арифметической и геометрической прогрессиями. Такое раннее появление этих математических понятий в истории математики, очевидно, объясняется тем, что подобного рода последовательности довольно часто наблюдаются в жизни.

Вот одна из задач на арифметическую прогрессию, приведенная в папирусе: «Поделить 100 хлебов между пятью лицами так, чтобы первые три получили в семь раз более остальных двух». При этом подразумевается, что деление производится не поровну, а каждый следующий получает на одно и то же число хлебов менее, чем предыдущий. Спрашивается, какова же должна быть разность? В папирусе дан правильный ответ.

Геометрическая прогрессия представлена в папирусе следующей «лестницей»: написаны числа 7, 49, 343, 2401, 16807 и рядом с ними соответственно слова «картина», «кошка», «мышь», «ячмень», «мера». Здесь же дана и сумма указанных чисел: 19607. Эта запись, представляющая собою геометрическую прогрессию со знаменателем 7, истолковывается так: у 7 лиц есть по 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя, из каждого колоса может вырасти по 7 мер зерна. Каков ряд чисел, возникающих из этой задачи, и какова их сумма?

В папирусах встречается много задач геометрического характера, связанных с определением площадей и объемов сельскохозяйственных построек и размеров полей. Здесь наряду с хорошими решениями трудных вопросов находятся и решения весьма приближенные. Очевидно, египтяне знали точные методы для определения площадей и объемов основных геометрических фигур, но часто прибегали к приближенным вычислениям, при которых пользовались неправильными соотношениями.

Так, в Московском папирусе имеется вычисление объема правильной четырехугольной усеченной пирамиды, проведенное совершенно точно. Равным образом в папирусе Райнда хорошо проведено вычисление площади круга. Автор папируса делит диаметр круга на 9 равных частей и строит квадрат, сторона которого равна 8 таким частям. Полученный квадрат и считается равновеликим данному кругу. Такого рода определение площади круга по своим результатам отличается от современного тем, что число π принимается равным 3,16.

Но надо отметить то обстоятельство, что все эти значения носили преимущественно опытный характер, т. е. ограничивались сведениями, которые нужно было применять при решении задач зарождающейся культурной жизни. Поэтому и в письменных документах мы не находим никаких общих правил, а каждый вопрос частного характера разрешается в них как самостоятельная задача. Нет почти никаких обобщений и тем более доказательств. Следовательно, мы не можем сказать, что в Вавилоне и Египте существовала математика как наука. Мы должны признать, что там наблюдался лишь процесс накопления математических знаний, которые в более поздние времена способствовали развитию науки.

Математика в Древнем Китае

В то время, как математические сведения, накопленные в сокровищницах знаний Древнего Вавилона и Древнего Египта, послужили в дальнейшем развитию математики на Ближнем Востоке и в Европе, начальные понятия математики, зародившиеся в Древнем Китае, послужили развитию математической культуры соседних народов, которые занимали территорию современных Кореи, Индокитая и в особенности Японии.

Китайская культура — одна из самых древних на земном шаре. Есть сведения, что уже за тысячи лет до нашей эры ки-

一 = 1, 二 = 2, 三 = 3, 四 = 4, 五 = 5, 六 = 6, 七 = 7,

八 = 8, 九 = 9, 十 = 10, 百 = 100 千 = 1000

КИТАЙСКИЕ ИЕРОГЛИФИЧЕСКИЕ ЦИФРЫ

тайцы были хорошо знакомы с расположением небесных светил. В Китае издавна существовала письменность, книгопечатание, китайцы изобрели компас, изготовляли бумагу и фарфор, пользовались артезианскими колодцами и имели освещение, сходное с газовым.

В Китае рано начали накапливаться сведения математического характера и появилась запись чисел. При этом китайские иероглифические цифры были по записи еще сложнее египетских. Но, помимо этих иероглифических цифр, в Китае имели распространение и более простые цифровые знаки, употреблявшиеся при торговых операциях.

Выглядели они следующим образом: $| = 1$; $|| = 2$; $||| = 3$; $|||| = 4$; $||||| = 5$; $\underline{|} = 6$; $\overline{||} = 7$; $\overline{|||} = 8$; $\overline{||||} = 9$; $0 = 0$. Запись чисел производилась столбцами, сверху вниз. Большим преимуществом китайской записи чисел было введение в употребление нуля для выражения отсутствующих разрядных единиц. Предполагают, что нуль заимствован из Индии в XII в.

Одним из наиболее интересных документов математического содержания очень древнего происхождения является сочинение «Математика в девяти книгах», которое, как полагают, принадлежит *Ли-Шоу* и относится к 2637 г. до н. э.[1] Впоследствии упомянутое сочинение перерабатывалось и дополнялось китайскими учеными, и потому нам трудно отделить основной его текст от внесенных в него изменений, но все же по некоторым указаниям мы можем судить о материале, заключавшемся в первоначальном тексте. Содержание этого сочинения гораздо шире, чем можно предположить по заголовку, так как в нем даются сведения не только из арифметики, но излагаются так-

---

[1] В переводе на русский язык Э. И. Березкиной она была издана в X выпуске сборника «Историко-математические исследования» в 1957 г.

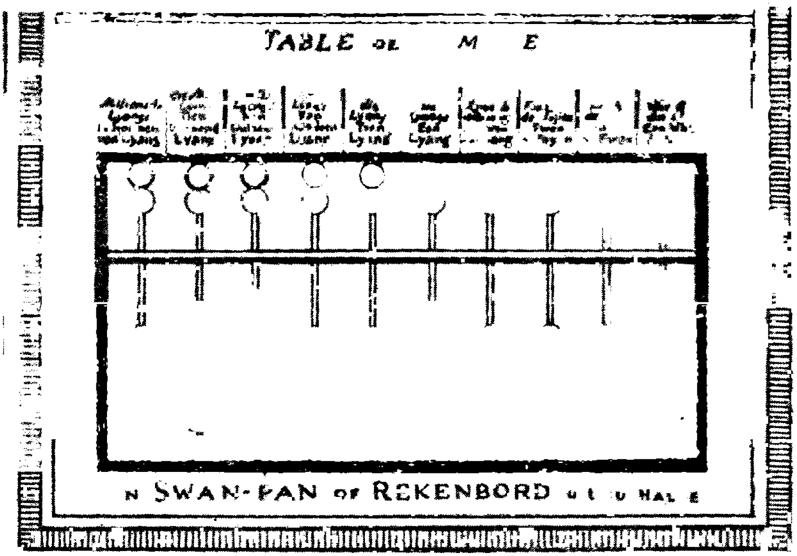
же вопросы, которые мы должны отнести к алгебре, геометрии и даже тригонометрии.

В «Математике в девяти книгах» разбираются алгебраические вопросы такого рода: в книге III содержатся задачи на разделение имущества между несколькими лицами, причем отношение частей выражается преимущественно прогрессиями. В книге IV ставится вопрос об извлечении корней второй и третьей степени. Книга VI посвящена вопросам, связанным с распределением налогов и определением стоимости товаров. Книга VII содержит вопросы, касающиеся распределения товаров. В ней встречается, например, такая задача: «Некоторое число купцов купили некоторое число товаров; если каждый из купцов заплатит по 7 монет, то не хватит 4 монет, если же каждый из купцов заплатит по 8 монет, то останется 3 лишние монеты. Требуется определить число купцов и число товаров». В книге VIII решаются уравнения и разъясняются случаи употребления сложения и вычитания. Здесь находится, например, задача: «5 волов и 2 барана стоят 10 ланов (китайская монета), а два вола и 5 баранов — 8 ланов; требуется узнать цену одного вола и одного барана».

Книги I, V и отчасти IV содержат геометрический материал, причем в книге I приводятся способы измерения полей различной формы: треугольных, четырехугольных, круглых и полукруглых. При этом площадь треугольника определяется путем умножения основания на половину высоты, а для нахождения площади круга даются различные выражения, но число π принимается равным 3. В книге V разбираются различные случаи практических задач, сводящихся к определению объемов, причем здесь встречается определение объема призмы, пирамиды и конуса. В книге VIII излагается способ решения системы линейных уравнений, близкий к методу Гаусса.

В книге IX мы встречаем некоторые понятия, относящиеся к геометрии прямоугольного треугольника.

Уже с давних времен в Китае вошел в употребление и счетный прибор суан-пан, по конструкции напоминающий современные русские торговые счеты. Главное его отличие от русских счетов в том, что наши счеты основаны на десятичной системе счисления, тогда как в основе суан-пана лежит смешанная пятеричная и двоичная система, поэтому в русских счетах на каждой из параллельных проволок нанизано по 10 косточек, а в суан-пане каждая проволока делится на две части: в нижней ее части нанизано 5 косточек, а в верхней — 2. Когда в



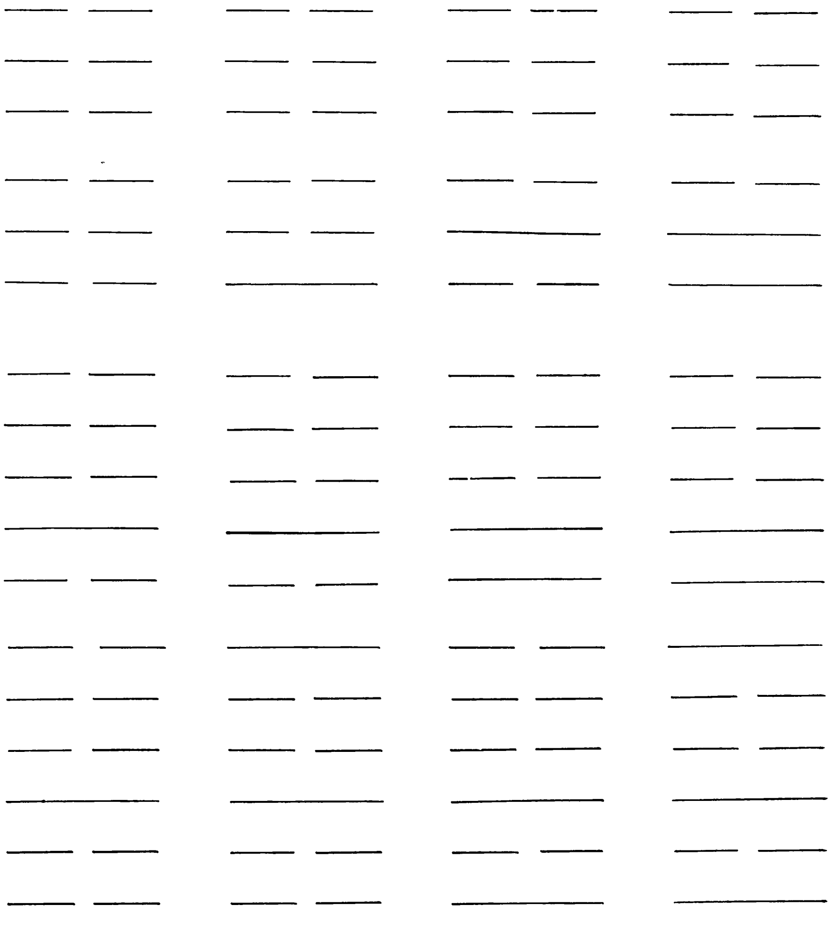
СУАН-ПАН

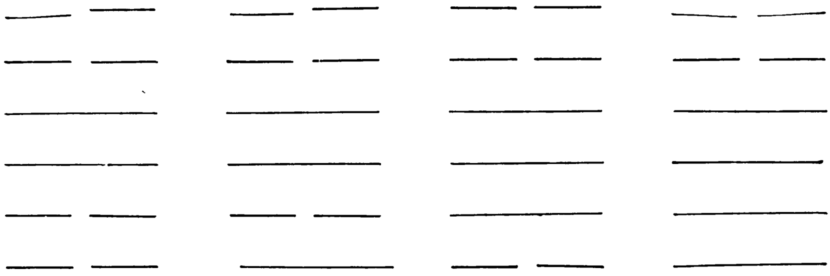
нижней части проволоки отсчитаны все пять косточек, то они заменяются одной в верхней части; две косточки в верхней части заменяются одной косточкой высшего разряда.

Следы двоичной системы, очевидно, имевшей место в Китае в весьма отдаленное время, встречаются также в китайском символе, носящем название Же-Ким и сохранившемся, как полагают, от XXX в. до н. э. Его изобретение приписывают китайскому законодателю тех времен *Фу-си*. Этот символ представляет совокупность 64 фигур, каждая из которых образована из 6 помещающихся одна над другой горизонтальных прямых, причем в каждой фигуре, кроме первой, некоторые линии сплошные, а некоторые распадаются на два отрезка. Схематично первые 16 фигур этого символа можно представить так, как показано на стр. 42—43.

Долгое время этот символ был необъясним, пока его смысл не раскрыл знаменитый философ и математик XVIII в. Лейбниц. Он разъяснил, что фигуры Же-Кима представляют первые 64 числа, начиная с нуля, записанные в двоичной системе.

В приведенной нами части этой таблицы находятся числа от нуля до пятнадцати. Сплошная черта означает единицу, а черта с разрывом посередине — нуль, причем нижняя черта всегда соответствует правой цифре в нашей записи. Например, последняя фигура выражает число 001111, то есть число, равное





$1+2+2^2+2^3=1+2+4+8=15$. Впрочем, это объяснение Лейбница оспаривается современными историками математики.

Как было сказано выше, сложность отделения сведений, относящихся к древнему времени, от наслоений позднейших времен является препятствием к установлению более точных данных о развитии математики в Китае в глубокой древности. Тем не менее мы даже из этого краткого обзора можем сделать заключение, что на заре человеческой культуры в развитии математики Китай шел далеко впереди Вавилона и Египта.

ГЛАВА III. ПЕРИОД РАЗВИТИЯ УЧЕНИЯ О ПОСТОЯННЫХ ВЕЛИЧИНАХ

ЗАРОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

Мы уже видели, что за несколько тысяч лет до нашей эры в странах Древнего Востока была собрана богатая сокровищница математических знаний, возникновение которых объясняется практическими потребностями, появившимися в процессе труда и приведшими к необходимости создания и развития как числовых, так и пространственных образов. Развитие земледелия, строительство ирригационных сооружений, дворцов, храмов, пирамид, расширение торговых и налоговых операций, рост навигации — все это сопровождалось возникновением новых и новых требований по отношению к лежащей в основе всякого рода планов и расчетов математике. Мало-помалу накапливались все новые и новые сведения из области вычислительных операций и геометрических форм. Однако все приобретенные опытным путем математические сведения еще не получили должного обобщения, еще не было сделано логических выводов, которые могли бы показать применимость наблюдаемых соотношений для более широкого круга явлений. Математика Древнего Востока имела опытный характер, была носительницей разрозненных фактов; она послужила тем краеугольным камнем, на основе которого в дальнейшем (когда к накопленному фактическому материалу присоединились элементы логических обобщений) выросла вся стройная система математики.

Буржуазные историки обычно отмечают, что математическая наука зародилась гораздо позднее и уже в другой стране, географически расположенной в непосредственной близости от Египта и Вавилона. Этой страной они считают Грецию. Мы не можем согласиться с их мнением. Основы математической науки были заимствованы греками у народов Востока. А потому мы должны считать греческую математику непосредственной продолжательницей развития тех идей, которые зародились у народов Востока. У нас нет достоверных сведений, в какие годы и какими лицами были сделаны первые обобщающие выводы или проведены доказательства, относящиеся к утверждению подмеченных ранее пространственных зависимостей. Но более или менее достоверные сведения о подобных математических заключениях мы имеем приблизительно с VII в. до н. э. Начиная с этой эпохи в Греции и ее колониях возникает ряд философско-математических школ, в недрах которых, как полагают, и были сделаны первые, еще робкие шаги в области научно-логических заключений.

Хотя в Египте и Вавилоне жрецы тщательно скрывали от непосвященных имевшиеся у них знания, опасаясь подорвать свой авторитет, авторитет служителей богов — единственных обладателей тайн природы, тем не менее эти знания иногда просачивались сквозь толщу жреческих охранных заграждений и даже иной раз утекали за пределы Египта и Вавилона. В частности, купцы из Греции и ее колоний нередко приезжали в Египет для совершения различных торговых операций и при этом иногда имели возможность проникнуть в египетские храмы и тем или иным способом выведать у жрецов некоторые из скрываемых ими знаний. Одним из таких лиц является основатель так называемой Ионийской философской школы — Фалес.

Ионийская школа Фалеса

Фалес (624—547 до н. э.) родился в городе Милете — греческой колонии на Ионийском побережье Малой Азии. Семья его была родом из Финикии, но в его жилах была примесь и греческой крови. Занимаясь торговлей, Фалес по роду своей деятельности бывал в Египте, и там ему удалось познакомиться с теми знаниями, которыми обладали египетские жрецы. Между прочим, во время одного из посещений Египта Фалес очень просто решил задачу, которая была неразрешима для жрецов. Он сумел измерить высоту одной из египетских пирамид. Полагают, что свое измерение Фалес построил на свойстве подобных треугольников: выбрав момент, когда солнечные лучи падали под углом 45°, то есть когда тени от предметов, имеющих вертикальное положение, равны длине самих предметов, Фалес измерил длину тени от пирамиды и тем самым установил высоту пирамиды. Это измерение высоты пирамиды, по всей вероятности, произвело большое впечатление на жрецов, которых Фалес превзошел в мудрости. Однако еще большее впечатление произвело на современников Фалеса другое его деяние, осуществленное на основании тех сведений по астрономии, которые он почерпнул в Египте: 28 мая 585 г. до н. э. Фалес точно предсказал время наступления солнечного затмения. Эти и подобные им факты создали Фалесу величайшую славу.

В своем родном городе Милете Фалес создал философскую школу, основным положением которой являлось утверждение, что все существующее обязано своим происхождением воде, все образовано из воды и сущность всех вещей зависит от изменения состояния воды. Вместе с тем Фалес явился родоначальником греческой стихийной материалистической философии. Впервые в учении Фалеса мы встречаем чисто физическое объяснение всех процессов природы, совершенно независимое от толкований религии. Наблюдения над явлениями природы и привели Фалеса к выводу о первенствующем значении воды: «жизнь растения содержится в его соке, так как, высыхая, растение гибнет; жизнь животного содержится в крови, даже огонь питается влагой».

Философская школа Фалеса вошла в историю под названием Ионийской. Однако было бы неправильно полагать, что в школе Фалеса разрабатывались вопросы исключительно философского содержания; наоборот, Фалеса скорее интересовало эмпирическое изучение различных явлений природы, а на его основе им уже делались некоторые выводы философско-космогонического характера. Так, например, он представлял себе Землю как плоское тело, плавающее в воде; при этом он своеобразно объяснял происхождение землетрясений на земной поверхности, считая их результатом колебаний воды. Вопросы астрономии занимали в работах его школы немалое место; это видно хотя бы из того, что ближайший ученик Фалеса *Анаксимандр* (ок. 610—546 до н. э.) и его последователь *Анаксимен* (ок. 585—525 до н. э.) уделяли много внимания вопросам строения мира.

Большую роль сыграла Ионийская школа в развитии математики. Школе Фалеса приписывается основное определение из арифметики: число есть совокупность единиц. Но особенно велико в истории развития математики значение геометрических работ Фалеса. Его считают первым ученым-геометром. В школе Фалеса были установлены и доказаны первые теоремы геометрии как истины, обобщающие наблюдения и требующие логических доказательств. Так, на основании свидетельств историков мы можем утверждать, что Фалесу были известны следующие положения: вертикальные углы равны между собой; углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой; диаметр делит круг и окружность пополам; два треугольника равны между собой, если они имеют по одной равной стороне и по два равных угла, прилежащих к этой стороне. Этот случай равенства треугольников вошел в историю под названием теоремы Фалеса. Эта теорема применялась Фалесом при практическом определении расстояния до недоступного предмета (например, для определения расстояния от пункта, находящегося на берегу моря, до корабля в море). Определение проходило в следующем порядке (рис. 1): от пункта наблюдения A намечалось прямое направление на корабль P, и к этому направлению на берегу из точки A строилось направление перпендикулярное, на котором откладывался произвольный отрезок AB; затем намечалась середина C отрезка AB. Наблюдатель шел по прямой линии BK, перпендикулярной к AB, и все время смотрел на корабль. Достигнув пункта K, из которого корабль и пункт C визировались на одной прямой, наблюдатель фиксировал пункт K. Тогда на основании теоремы о равенстве треугольников можно было утверждать, что треугольники ACP и BCK равны между собой и, следовательно, искомое расстояние AP до корабля равно отрезку BK, длину которого можно измерить непосредственно.

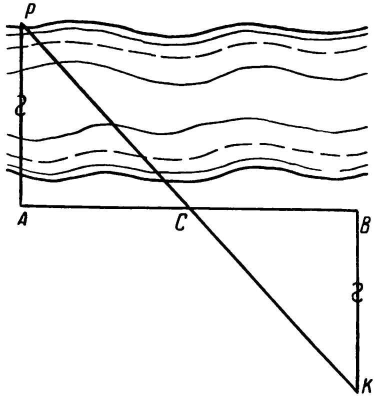


Рис. 1

В школе Фалеса была заложена основа учения о линиях и углах на плоскости. Эта школа внесла в историю математики первые намеки на научный подход к математическим истинам. Однако в ней затрагивался еще очень узкий круг вопросов, и до нашего времени не сохранилось определенных данных о том, какими методами доказывались там основные положения геометрии.

Фалес умер в престарелом возрасте, внезапно. Историки утверждают, что на его гробнице была высечена надпись: «Насколько мала эта гробница, настолько велика слава этого царя астрономов в области звезд». Дальнейшее развитие математические вопросы получили в другой греческой школе, так называемой школе Пифагора.

Школа Пифагора

Пифагор родился на острове Самосе, расположенном вблизи Ионийского побережья. Вокруг личности Пифагора создалось столько легенд, что трудно судить, что в них хоть отчасти соответствует действительности и что является вымыслом. Мы не знаем даже точных дат его рождения и смерти: по некоторым данным Пифагор родился около 580 г. и умер в 500 г. до н. э.

В молодости Пифагор много путешествовал и имел возможность хорошо ознакомиться с Египтом и теми сведениями по математике, которые со времен глубокой древности хранились египетскими жрецами почти в неизменном состоянии. В общей сложности Пифагор пробыл в Египте около 22 лет и сумел воспользоваться там откровенностью жрецов благодаря тому, что его рекомендовал египетскому царю *Амазису* друг царя грек *Поликрат*.

По возвращении из Египта около 530 г. Пифагор создал на родине свою школу, в основе которой лежала аристократическая идеология, резко противоречащая идеологии античной демократии, преобладавшей в те времена на Самосе. Поэтому школа вызвала недовольство граждан Самоса, и Пифагору пришлось покинуть родину. Он направился в греческие колонии на Аппенинском полуострове и поселился в городе Кротоне, где вновь основал школу (пифагорейский союз).

В основу философии пифагорейского союза было положено мистическое учение о числе. Пифагорейцы считали, что число есть лежащая в основе бытия причина стройности и порядка, господствующей самородной связи вечного постоянства в мировом строе. Число — это закон и связь мира, сила, царящая над богами и смертными, условие всего определяемого, всего познаваемого. Вещи суть подражания числам.

Такое преклонение перед числом объясняется теми наблюдениями, которые проводились в пифагорейском союзе над явлениями окружающей жизни, но оно сопровождалось мисти-

ПИФАГОР (АПОКРИФИЧЕСКИЙ ПОРТРЕТ)

ческими измышлениями, зачатки которых были заимствованы вместе с началами математических знаний из стран Ближнего Востока.

Так, наблюдая получение в музыке благозвучных, «гармонических» аккордов, пифагорейцы заметили, что гармонический аккорд при звучании трех струн получается в том случае, когда длины этих струн сопоставляются с соотношением чисел

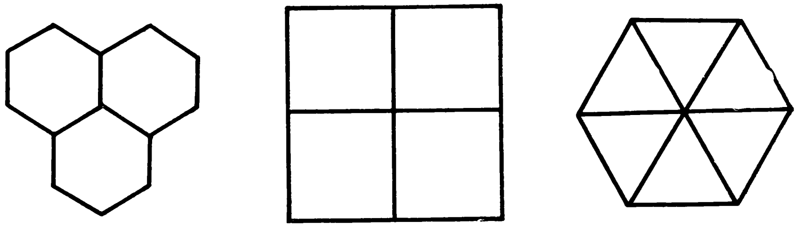


Рис. 2

3, 4 и 6. Такое же соотношение было подмечено пифагорейцами и во многих других случаях. Например, отношение числа граней, вершин и ребер куба равно отношению чисел 6 : 8 : 12. Занимаясь вопросом о покрытии плоскости правильными одноименными многоугольниками, пифагорейцы нашли, что возможны только три случая таких покрытий: вокруг одной точки плоскости можно плотно уложить или шесть правильных треугольников, или четыре правильных четырехугольника (квадрата), или же три правильных шестиугольника (рис. 2). Если обратим внимание на числа правильных многоугольников в этих трех случаях, то увидим, что их отношение равно отношению 6 : 4 : 3, если же возьмем отношение числа сторон этих многоугольников, то найдем, что оно равно отношению чисел 3 : 4 : 6.

На основе подобных наблюдений в школе Пифагора возникло убеждение, что во всей Вселенной явления подчинены вполне определенным числовым соотношениям, то есть существует «мировая гармония».

Пифагорейцы полагали, например, что расстояния небесных тел от Земли в мировом пространстве определяются некоторой пропорцией. На этой почве в школе Пифагора началось внимательное изучение пропорций; при этом, кроме арифметической и геометрической, изучалась так называемая «гармоническая» пропорция [1].

Вследствие того что пифагорейцы придавали числу такое огромное значение, в школе Пифагора уделялось много внимания изучению чисел, то есть было положено начало т е о р и и ч и с е л. Однако здесь, как и во всей Греции тех времен, практика вычислений считалась недостойным занятием для философских школ; ее предоставляли людям «низшим» в их житейских и деловых отношениях и называли «логистикой». Пифагор говорил, что он поставил арифметику «выше потребности торговли». Поэтому в школе Пифагора изучались лишь свойства чисел, а не практический счет. При этом свойства чисел изучались при помощи геометрических построений. Однако считается, что пифагорейцы или их ближайшие последователи ввели в употребление в Греции более удобную систему записи чисел, заимствованную у финикиян и заключающуюся в том, что числа изображались буквами греческого алфавита с прибавлением некоторых букв финикийского. Первые девять букв алфавита изображали числа от 1 до 9, следующие девять — десятки (10, 20, 30, ..., 90) и последние девять — сотни (100, 200, 300, ..., 900). Для того чтобы отличить числа от букв, над числами ставилась черта. Таким образом, для записи чисел были установлены следующие знаки:

1 — $\overline{\alpha}$ (альфа)	10 — $\overline{\iota}$ (ита)	100 — $\overline{\rho}$ (ро)
2 — $\overline{\beta}$ (бета)	20 — $\overline{\varkappa}$ (каппа)	200 — $\overline{\sigma}$ (сигма)
3 — $\overline{\gamma}$ (гамма)	30 — $\overline{\lambda}$ (лямбда)	300 — $\overline{\tau}$ (тау)
4 — $\overline{\delta}$ (дельта)	40 — $\overline{\mu}$ (мю)	400 — $\overline{\upsilon}$ (ипсилон)
5 — $\overline{\varepsilon}$ (эпсилон)	50 — $\overline{\nu}$ (ню)	500 — $\overline{\varphi}$ (фи)
6 — $\overline{\varsigma}$ (стигма)	60 — $\overline{\xi}$ (кси)	600 — $\overline{X}$ (хи)
7 — $\overline{\zeta}$ (дзета)	70 — $\overline{o}$ (омикрон)	700 — $\overline{\psi}$ (пси)
8 — $\overline{\eta}$ (эта)	80 — $\overline{\pi}$ (пи)	800 — $\overline{\omega}$ (омега)
9 — $\overline{\vartheta}$ (тета)	90 — $\overline{\text{ϟ}}$ (коппа)	900 — $\overline{\text{ϡ}}$ (сампи)

Для изображения чисел, больших тысячи, употреблялись

[1] Мы говорим, что три числа составляют гармоническую пропорцию, если числа, им обратные, составляют пропорцию арифметическую. Например, числа 3, 4 и 6 составляют гармоническую пропорцию, так как дроби $1/3$, $1/4$ и $1/6$ составляют арифметическую пропорцию: $1/3 - 1/4 = 1/4 - 1/6$.

дополнительно следующие символы: значок вроде запятой, поставленный перед числом, обозначал тысячи, а для обозначения десятков тысяч перед числом ставилась точка. Таким образом, число 128 записывалось так: $\overline{\rho\chi\eta}$, а число 3000 — $\overline{,\gamma}$. Для изображения дробей ставились подряд число, выражающее числитель, и число, выражающее знаменатель, но после числителя ставился штрих, а знаменатель записывался дважды повторенным числом, сопровождаемым знаками удвоенного штриха. Например, $^1/_2$ записывалась так: $\overline{\alpha}'\overline{\beta}''\overline{\beta}''$.

В школе Пифагора мы впервые сталкиваемся с классификацией чисел, но эта классификация носит весьма своеобразный характер и имеет в основе или геометрические соображения, или соображения отвлеченного, философско-мистического характера. Геометрическим образом единицы служил квадрат. Когда каждая сторона квадрата разделялась на равное число частей и через точки деления проводились прямые, разделяющие основной квадрат на более мелкие квадраты, то совокупность этих квадратов представляла «квадратное» число: 4, 9, 16 и т. д. Аналогично представлялись «плоскостные» или «прямоугольные» числа, то есть числа, разлагающиеся на два неравных множителя: они изображались в виде прямоугольника, разбитого на соответствующее число квадратов. Так, например, число 6 представлялось прямоугольником со сторонами 2 и 3 единицы длины. В этом случае множители, образующие число 6, то есть 2 и 3, назывались сторонами числа 6. Аналогично получались числа «кубические» и «телесные». Кубическими назывались числа, разлагающиеся на три равных множителя, а телесными — числа, разлагающиеся на три неравных множителя. Числа 1, 3, 6, 10, 15, ... назывались «треугольными». Треугольные числа получались путем сложения первых чисел натурального ряда: 1, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ и т. д. Название «треугольные» числа было присвоено им потому, что они получались путем последовательного суммирования числа кругов, расположенных рядами в форме треугольника (рис. 3).

Кроме того, все числа натурального ряда подразделялись на четные — «мужские» и нечетные — «женские», или иначе «гномоны». Число носило название «совершенного», если сумма всех его делителей, за исключением самого числа, равнялась этому числу. Так, число 6 — совершенное, поскольку его делители 1, 2 и 3 в сумме составляют 6. Два числа, обладающие тем свойством, что сумма делителей каждого из них равняется другому, назывались «содружественными». Как утверждают, Пифагор на вопрос, что такое друг, ответил: «Тот, кто есть другой я, вот как числа 220 и 284». Мы можем убедиться, что указанные числа действительно содружественные. В самом деле, 220 имеет делителями числа 1, 2, 4, 5, 10 11, 20, 22, 44, 55 и 110, а делителями числа 284 являются 1, 2, 4, 71 и 142. Легко проверить, что сумма делителей первого числа равна 284, а сумма делителей второго — 220.

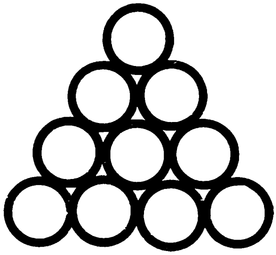


Рис. 3

Особое значение у пифагорейцев имели числа 7 и 36. Почитание числа 7 объясняется тем, что мистический смысл был придан ему еще вавилонянами, и от них это перешло к пифагорейцам. Что же касается числа 36, то оно производило сильное впечатление на пифагорейцев своими качествами: с одной стороны, оно представляет сумму кубов трех первых чисел натурального ряда $(1^3+2^3+3^3)$, а с другой — является суммой первых четырех четных и первых четырех нечетных чисел: $(2+4+6+8)+(1+3+5+7)=36$.

Весь мир, по мнению пифагорейцев, был построен на первых четырех нечетных и на первых четырех четных числах, а потому самой страшной клятвой у них считалась клятва числом 36.

Приписывание мистического значения числам сыграло в истории математики, конечно, только отрицательную роль. Но геометрическое представление чисел пифагорейцами способствовало развитию математики.

Благодаря такому методу изображения чисел геометрические образы сливались с представляемыми ими числами, а потому многие выводы из области теории чисел возникли как результат геометрических соображений и, наоборот, арифметические соотношения приводили к некоторым геометрическим обобщениям. Так, например, было получено соотношение: сумма последовательных нечетных натуральных чисел, начиная с единицы, всегда дает число квадратное или квадратное число всегда равно сумме последовательных нечетных чисел. Таким образом, в школе Пифагора развивалась гео-

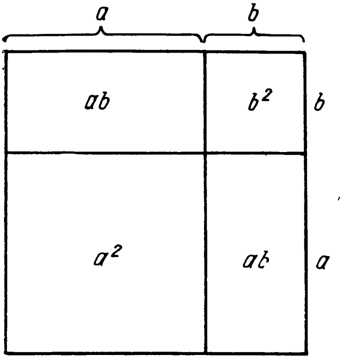


Рис. 4

метрическая арифметика, а за нею постепенно создавалась и геометрическая алгебра. Эта алгебра, конечно, носила совсем иной характер, чем современная, так как она не обладала главным преимуществом современной алгебры — ее символикой. Характерным признаком геометрической алгебры было то, что все ее выводы основывались на геометрических соображениях. **Так,** вывод формул сокращенного умножения проводился следующим построением.

1. **Формула «Квадрат суммы двух количеств»** (рис. 4). Построим квадрат, стороны которого равны сумме отрезков a и b. Через точки раздела отрезков проведем прямые, параллельные сторонам квадрата. Из чертежа видно, что

$$(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

2. **Формула «Квадрат разности двух количеств»** (рис. 5). Построим квадрат, стороною которого является разность отрезков a и b. Проведя внутри этого квадрата прямые, параллельные сторонам квадрата, как это указано на чертеже, получим следующее геометрическое соотношение:

$$(a-b)^2=a^2-ab-ab+$$
$$+b^2=a^2-2ab+b^2.$$

Указанные приемы и сейчас являются удачными наглядными иллюстрациями алгебраических доказательств формул сокращенного умножения.

Возможно, что в школе Пифагора проводилось и решение квадратных уравнений геометрическим путем. Эти методы были развиты в «Началах» Евклида в III в. до н. э., а потому мы остановимся на них позднее.

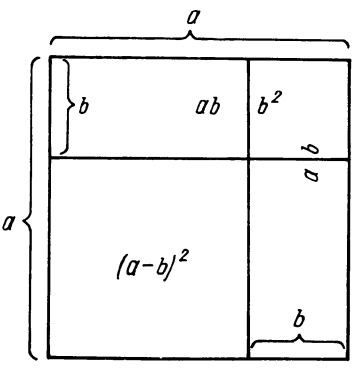


Рис. 5

Особенное внимание уделялось в школе Пифагора вопросам геометрического характера. *Евдем*, один из первых историков геометрии, так отзывается о геометрических работах Пифагора: «Пифагор преобразовал науку геометрии в форму свободного учения, ибо он разобрал принцип ее до самого основания и исследовал ее теоремы невещественным и разумным путем».

Работа над вопросами геометрического характера облегчалась в школе Пифагора именно благодаря счастливой мысли объединить вопросы геометрии с вопросами числового характера. При этом получалась двоякая выгода: числовые построения прекрасно иллюстрировались геометрическими образами, а геометрические в свою очередь получали необходимую трактовку взаимозависимостей. Таким путем из геометрического доказательства независимости произведения от порядка множителей возникли определения площадей квадрата и прямоугольника, а из представления чисел геометрическими фигурами (плоскостные, квадратные, треугольные, телесные числа) — вопросы о построении правильных многоугольников, а затем правильных многогранников. В этом отношении особенно большое значение имело впервые выполненное в школе Пифагора построение правильных пятиугольников. Решение задачи о построении правильных многоугольников помогло построению правильных многогранников, причем пифагорейцами были построены все возможные их виды: тетраэдр, имеющий гранями четыре равносторонних треугольника, октаэдр, гранями которого служат восемь равносторонних треугольников, икосаэдр, ограниченный двадцатью правильными треугольниками, гексаэдр, то есть куб, ограниченный шестью правильными четырехугольниками, и, наконец, додекаэдр, то есть тело, ограниченное двенадцатью правильными пятиугольниками. Решение такой трудной задачи, как построение правильных многоугольников и многогранников, естественно, произвело сильное впечатление на лиц, решивших ее, и потому указанным многогранникам в школе Пифагора было придано мистическое значение — они считались «космическими фигурами», и каждому из них было присвоено наименование одной из стихий, входящих, по представлению греков, в основу бытия: тетраэдр именовался огнем, октаэдр — воздухом, икосаэдр — водой, гексаэдр — землей и додекаэдр — Вселенной. Из всех геометрических тел прекраснейшим считался шар.

Пифагор полагал, что Земля имеет шарообразную форму и какой-то огонь, но не Солнце, является центром Вселенной, около которого Земля вращается по кругу, причем Солнце, Луна и планеты обладают собственным движением, отличным от суточного движения неподвижных звезд.

Надо полагать, что пифагорейцы обладали достаточно обширными сведениями и из других разделов геометрии: им были известны теоремы о равенстве треугольников, учение о параллельных, о сумме углов треугольника, о подобии; они пользовались методами построения равновеликих фигур и основными положениями стереометрии. Одним из важнейших открытий, приписываемых пифагорейцам, считается доказательство теоремы, дающей зависимость между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника, известной в истории под названием «теоремы Пифагора» [1].

Геометрические построения арифметических выкладок привели к тому, что удалось найти простое выражение для числового представления соотношения между сторонами прямоугольного треугольника в том случае, когда сторона выражается рационально и меньший катет представлен нечетным числом. Тогда если меньший катет равен a, то другой катет и гипотенуза соответственно определяются числами $\frac{a^2-1}{2}$ и $\frac{a^2+1}{2}$.

Оперирование прямоугольными треугольниками, а также построение правильных многогранников в связи с геометрическим построением решений квадратного уравнения приводили и к таким случаям, когда отношение отрезков не могло быть выражено ни целыми, ни дробными числами. Таким образом, пифагорейцы вплотную подошли к понятию об иррациональном числе. Однако это величайшее открытие нанесло большой ущерб их философии: нашлись величины, которые не подчинялись закону обычных числовых соотношений. Например, гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого имели по единице длины, не могла быть выражена ни одним из чисел, которыми пифагорейцы располагали, то есть ни целым, ни дробным. Такое открытие настолько не

[1] Частные случаи этой теоремы были известны некоторым древним народам (египтянам, китайцам, индийцам) еще до Пифагора. Доказательство теоремы самим Пифагором не сохранилось. (**Примеч. В. Д. Чистякова.**)

согласовывалось с их понятием о числе, что пифагорейцы старались умалчивать о нем. В этом отношении идеалистическая философия пифагорейцев причинила большой вред математике, надолго задержав развитие понятия о числе.

Несомненно, школа Пифагора имела большое значение для усовершенствования научных методов решения математических проблем. Очевидно, в школе Пифагора утвердилась одна из важнейших сторон математического метода рассуждений, а именно: в математику твердо вошло положение о необходимости строгих доказательств, что и придало математике значение особой науки.

Однако идеология, лежащая в основе деятельности пифагорейского союза, неуклонно влекла его к гибели. Дело в том, что союз состоял главным образом из представителей аристократии, в руках которой было сосредоточено управление Кротоном. Это дало возможность союзу оказывать большое влияние на политическую жизнь, причем это влияние использовалось в интересах аристократии, между тем как в Афинах и в большинстве греческих колоний в те времена устанавливалось демократическое правление, привлекавшее все большее и большее число сторонников. Естественно, что демократические течения стали преобладающими и в Кротоне. Пифагор со своими сторонниками должен был бежать оттуда. Но это не спасло самого Пифагора. Во время пребывания в городе Мерапонте он погиб в стычке с противниками.

После распада пифагорейского союза ученики Пифагора рассеялись по различным городам Греции, причем большинство их сосредоточилось в Афинах.

Математика в Афинах в V в. до н. э.

В V в. до н. э. Афины стали центром развития философской и математической мысли, причем философия была неразрывно связана с математикой, и мы не можем говорить о математике той эпохи, совершенно не затрагивая вопросов философского характера.

К тому времени в Афинах сосредоточились лучшие представители математической мысли. Здесь работал один из последователей школы Фалеса — *Анаксагор* (ок. 500—428 до н. э.), первым внесший в математику понятие о бесконечно больших и бесконечно малых величинах. Здесь получили распространение идеи великого философа из города Абдеры, материалиста и атомиста Демокрита. Здесь же развивались идеи элейца[1] Зенона и проходила деятельность софистов.

Столкновение и борьба различных философских идей способствовали углублению и уточнению основных понятий философии и математики.

Кроме того, V в. до н. э. был веком расцвета демократических идей в Афинах в античном понимании этих слов: демократия была развита настолько, насколько это было возможно в рабовладельческой стране. Демократические принципы соблюдались лишь по отношению к собственно греческому населению и отнюдь не распространялись на рабов. Что же касается греческого населения, то и по отношению к нему демократизм выражался однобоко, так как в государственном управлении и в выборах полномочных лиц могли участвовать только мужчины. Но все же выборная система даже в том виде, в каком она была представлена в Афинах, способствовала тому, что лица, выступавшие на общественных собраниях, должны были для успешного отстаивания своих убеждений учиться правильно мыслить и правильно выражать свои мысли. Поэтому преобладающее значение среди других наук приобрели философия, математика и риторика.

В Афинах математика, образно говоря, вышла из замкнутых стен обособленных школ на широкую улицу. Она сделалась народным достоянием, фактором общественной жизни, и это явилось значительным положительным сдвигом в ходе развития науки. Но, с другой стороны, на первый план выдвинулась логическая сторона математики, и математика стала все чаще отрываться от своего опытного базиса, от жизни. Основные усилия стали направляться на углубление понятий, на обоснование методов. В эти времена особенно стало сказываться стремление отделить арифметику от логистики. Многие математики, опиравшиеся в своих воззрениях на идеалистическую философию, окончательно отвергли логистику как науку.

Логистика стала базироваться на элементарном счете, основанном на вычислениях с помощью а б а к а, то есть прибора, сходного с русскими торговыми счетами. Он представлял собой доску с делениями, соответствующими проволокам

[1] Элея — древний город в Италии.

на русских счетах, причем вместо насаженных на проволоках косточек, как в русских счетах, употреблялись свободные камешки.

Одним из основных философско-математических вопросов, возбуждавших большие теоретические дискуссии, был вопрос о делимости величин. Анаксагор утверждал, что среди малых величин не существует наименьшей, но уменьшение идет непрерывно, ибо существующее не может перестать существовать. Таким образом, по мнению Анаксагора, вещь может быть делима до бесконечности, но любая ее часть всегда больше нуля.

Против учения Анаксагора *Зенон* (около 500 г. до н. э.—?) выдвинул положения, основанные на идеалистической философии. Он, очевидно, хотел доказать, что наука, опирающаяся на опыт, «земная» наука, несовершенна и ее основные положения ложны. Зенон утверждал, что если протяженная вещь подвергнется бесконечному делению и в результате все-таки останутся протяженные частицы, то сумма бесконечно большого числа частиц не может дать конечную, а даст бесконечно большую величину, потому что между отдельными вещами всегда находится еще одна (т. е. промежуток между вещью и промежутком). Зенон построил свои знаменитые апории [1], которые, с его точки зрения, доказывали или невозможность бесконечного деления, или отсутствие, несуществование движения.

Так, апория об Ахиллесе и черепахе утверждает, что быстроногий Ахиллес не может догнать ползущей перед ним черепахи, так как в то время, как Ахиллес достигает того места, на котором находилась черепаха в начальный момент, черепаха успевает продвинуться на некоторое расстояние вперед. Апория о летящей стреле утверждает, что стрела, выпущенная из охотничьего лука, все время находится в покое. В основе этого утверждения лежало соображение, что если предположить время разделенным на бесконечное число элементарных частей — «настоящих моментов», то в каждый такой момент стрела должна находиться в совершенно определенном месте, то есть в покое. А так как время состоит из суммы таких моментов, то, следовательно, стрела постоянно находится в покое.

---

[1] Апория (с греч.— безвыходность) — кажущееся непреодолимым логическое затруднение, противоречие. **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

ДЕМОКРИТ

Метафизические размышления Зенона и других философов, касавшиеся вопроса делимости протяженных величин, помогли зародиться и развиться строгим материалистическим теориям атомистов, гениальным представителем которых был *Демокрит* (ок. 460—370 до н. э.). К сожалению, до нашего времени не сохранились подлинные сочинения Демокрита, и о его трудах мы можем судить только по отзывам позднейших авторов и отдельным отрывкам.

Демокрит применил атомистическую теорию к математике и получил хорошие результаты, он также наметил приемы математического исследования, приведшие впоследствии к методам бесконечно малых величин. Отрицая бесконечную делимость, Демокрит предполагал, что все состоит из дискретных единиц, величина состоит из первовеличин. С этой точки зрения, например, прямая линия состоит из элементарных отрезков прямой линии. Точно так же окружность как линия тоже состоит из элементарных отрезков, число которых хотя и не бесконечно, но так велико, что недоступно для счета. Свою атомистическую теорию Демокрит с успехом применил в области стереометрии, и это дало ему возможность определить объем некоторых пространственных фигур.

Идеи атомистов имели в Афинах много сторонников среди математиков. Одним из них был софист *Антифонт* (2-я пол. V в. до н. э.). Идею атомизма Антифонт развил в вопросе об определении площади круга. Он полагал, что если в круг вписать правильный треугольник, а затем последовательно удваивать число сторон вписанной фигуры (вписывая правильные шестиугольник, двенадцатиугольник и т. д.), то этот процесс всегда будет конечным, так как вершины вписанного многоугольника в конце концов займут все точки окружности круга и, следовательно, последний полученный многоугольник совпадет с кругом. Отсюда, по мнению Антифонта, возможно и решение задачи о построении квадрата, равновеликого по площади с кругом, так как всегда можно построить квадрат, равновеликий многоугольнику. Хотя рассуждения Антифонта и были неправильны, но его решение заняло значительное место в деле развития математических методов. Во-первых, в решении Антифонта заключалась одна из первых попыток решить вопрос о квадратуре круга, то есть о построении квадрата, равновеликого кругу. Эта задача явилась одной из важнейших проблем, поставленных древними математиками. Во-вторых, здесь Антифонт использовал метод, который впоследствии был усовершенствован и принес значительные результаты при решении вопросов геометрии. Этот метод получил название м е т о д а «и с т о щ е н и я» или «и с ч е р п ы в а н и я». Процесс исчерпывания у Антифонта заключался в том, что постепенно исчерпывалась площадь круга: площадь вписанного треугольника заполняла часть площади круга; площадь шестиугольника исчерпывала уже большую часть этого круга, и так по мере увеличения числа сторон многоугольника исчерпывание распространялось все далее и далее,

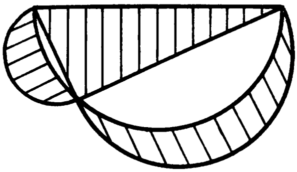


Рис. 6

пока, наконец, последний многоугольник не исчерпывал всю площадь круга.

Современник Антифонта *Бризон* усовершенствовал определение площади круга, применив, кроме вписанных многоугольников, многоугольники описанные. При этом Бризон полагал, что площадь круга равна среднему арифметическому площадей одноименных вписанного и описанного многоугольников.

Немало содействовал развитию геометрических идей другой современник Антифонта — *Гиппократ Хиосский*. Им было написано первое систематическое руководство по геометрии, названное «Началами». Однако это сочинение до наших дней не сохранилось, и мы имеем лишь некоторые сведения о его работах из трудов позднейших авторов. Гиппократ тоже стремился получить решение квадратуры круга, и ему удалось решить задачу, которая, по его мнению, указывала на такую возможность. Эта задача вошла в историю математики под названием «луночки Гиппократа». В результатах этой задачи отмечалось следующее свойство: если на гипотенузе прямоугольного треугольника, как на диаметре, построить полуокружность в сторону расположения треугольника, а на катетах построить так же, как на диаметрах, полуокружности вне треугольника, то луночки, заключенные между полуокружностями, построенными на катетах, и полуокружностью, построенной на гипотенузе, по сумме площадей равновелики площади основного треугольника (рис. 6). Таким образом, из теоремы, доказанной Гиппократом, следует, что криволинейные фигуры равновелики прямолинейной фигуре. Это справедливое заключение привело Гиппократа к заблуждению относительно площади круга: он был уверен, что площадь круга тоже может быть равна площади некоторого квадрата.

Имя Гиппократа связано с попытками решить еще одну интересную проблему древности. Он стремился найти путь к построению куба, равновеликого удвоенному данному кубу. При этом считается, что Гиппократ явился родоначальником апагогического метода в математике, то есть метода, при котором решение поставленной задачи сводится к решению другой, более доступной[1]. В задаче об удвоении куба основной проблемой было отыскание ребра удвоенного куба, если ребро данного известно. Гиппократ показал, что эта задача сводится к отысканию двух средних пропорциональных между величиной данного ребра a и удвоенной этой же величиной, то есть $2a$. Таким образом, отыскание неизвестной величины x ребра удвоенного куба могло быть произведено путем введения еще одной вспомогательной неизвестной y из пропорции: $a : x = x : y = y : 2a$. Эта пропорция сводила вопрос стереометрии к вопросам построения на плоскости. А именно из указанных пропорций можно получить зависимости такого рода $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$; откуда $x^3 = 2a^3$. Разумеется, геометрическим путем при помощи циркуля и линейки построение x все же выполнить нельзя[2].

Афинские школы

Научно-философская мысль в Греции на грани V и IV вв. до н. э. сосредоточивалась главным образом в двух научных учреждениях Афин — Академии Платона и Ликее Аристотеля.

Платон (427—347 до н. э.), происходя из аристократической семьи, по своим социально-политическим взглядам примыкал к противникам демократии, и его идеология вполне соответствовала классовой сущности воспитавшей его среды. При этом со своими противниками — демократами он вел не только идеологическую борьбу, но иногда даже участвовал в активных попытках свергнуть демократическое правление.

Обладая выдающимися способностями и в то же время располагая большими материальными средствами, позволявшими ему много путешествовать и знакомиться с представителями науки, в частности с последователями школы Пифагора и их учениями, Платон создал свою философию, которая на многие века явилась основой идеализма в науке. Большое

---

[1] В логике апагогическим называется косвенное доказательство, когда какое-нибудь утверждение доказывается путем опровержения противоречащего утверждения. В математике апагогический метод является аналогом метода исчерпывания. Термин «метод исчерпывания» был введен лишь в XVII в. *Грегуаром Сен-Венсаном.*

[2] О доказательстве невозможности решить задачу об удвоении куба при помощи циркуля и линейки см.: Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. М., 1963, с. 10—12.

значение для возникновения философии Платона и для распространения ее влияния имела созданная им в Афинах школа. Эта философско-математическая школа была организована в афинских садах, именовавшихся Академа, от них школа и получила название А к а д е м и и. Сам Платон был учеником философа *Сократа*, который не признавал математики, полагая, что она нужна лишь для удовлетворения самых низменных, по его мнению, потребностей: торговли, земледелия и пр., но не может являться предметом изучения и исследования. Однако Платон не унаследовал от своего учителя такого взгляда. Приобретя во время путешествий немало знакомств среди самых передовых людей науки своего времени, Платон в дальнейшем некоторых из них привлек для работы в Академии, что во многих отношениях способствовало ее процветанию. Знакомство с представителями школы Пифагора имело особенное влияние на развитие философии Платона. От них он усвоил возвышенный взгляд на математику и проводил его в своем учении, это повлияло на то, что благодаря философии Платона повысился интерес к математике как науке. Платон считал, что человек, не знающий математики, не может воспринять философских знаний, а потому при входе в Академию красовалась надпись: «Сюда не должен входить никто, не знающий геометрии». Таким образом, математика занимала в школе Платона выдающееся место. Однако в сочинениях самого Платона не встречается ничего, относящегося к развитию математических идей. Между тем в школе Платона были в этом отношении известные достижения, которые нельзя приписать самому Платону, но во всяком случае они принадлежат его ученикам. Так, там систематически применялся м е т о д   а н а л и з а, то есть такой способ рассуждений, когда искомое предполагается известным и на основании этого предположения делаются выводы о соотношениях, которые должны существовать между известными и неизвестными величинами, что, в конце концов, приводит к определению неизвестного. Между прочим, этот метод стал применяться в школе Платона к задачам на геометрические построения, выполнявшиеся при помощи циркуля и линейки. Здесь впервые были установлены те части решения задач на построение, которые по существу сохранились до настоящего времени. В Академии был также разработан м е т о д   г е о м е т р и ч е с к и х   м е с т. В школе Платона были выработаны многие определения геометрического характера. Так, на-

ЕВДОКС

пример, точка определялась как начало прямой линии. Возможно, что здесь же были даны определения для точки, как границы линии; для линии, как границы поверхности; для поверхности, как границы тела, а тело определялось как то, что имеет три измерения.

Много внимания в Академии было уделено решению трех знаменитых задач древности. Две из них мы упоминали ранее: это задачи о квадратуре круга и об удвоении куба. Третьей была задача о трисекции угла, то есть задача о геометрическом построении угла, втрое меньшего, чем данный. Как теперь доказано, все эти три задачи неразрешимы путем построения при помощи циркуля и линейки [1]. Древним же было неизвестно, что такое построение невозможно, и их особенно привлекало то обстоятельство, что задачи казались очень простыми, а решения для них не находилось.

В Академии изучались призма, пирамида, цилиндр и конус. Вообще школа Платона дала толчок к развитию геометрии, и ее последователи — геометры встречались не только в Афинах, но и далеко за их пределами. Так, в городе Кизике на южном побережье Мраморного моря (Пропонтиды) *Евдокс* (ок. 408 — ок. 355 до н. э.) основал чисто геометрическую школу. Эта школа имела связь с Академией Платона, так как Евдокс сам некоторое время, правда, очень непродолжительное, был учеником Академии, а впоследствии посещал Академию вместе со своими учениками.

Евдоксу приписывается усовершенствование метода исчерпывания, первые намеки на который мы встречали у Антифонта. Опираясь на этот метод, Евдокс получил много новых соотношений из области стереометрии. Так, им было доказано, что объем пирамиды равен одной трети объема призмы, имеющей с пирамидой общее основание и равные высоты, а также выведено аналогичное соотношение для объема конуса и цилиндра. Кроме того, Евдокс показал, что площади двух кругов относятся между собой как квадраты их радиусов.

Евдокс же разработал вопрос о пропорциях и о делении отрезка в крайнем и среднем отношениях и, в частности, о «золотом сечении», то есть о том случае деления отрезка, когда длина всего отрезка относится к длине большей его части, как длина большей части относится к длине меньшей.

Из школы Евдокса вышел крупный геометр *Менехм* (IV в. до н. э.), в дальнейшем работавший в Академии Платона. Менехму приписывается открытие трех видов конических сечений, которые иногда называют триадой Менехма. Изучение эллипса, гиперболы и параболы Менехм проводил, рассекая

[1] Строгое доказательство неразрешимости при помощи циркуля и линейки задачи об удвоении куба и задачи о трисекции произвольного угла впервые было дано в 1837 г. французским математиком *П. Ванцелем.* Неразрешимость указанными выше средствами задачи о квадратуре круга была доказана в 1882 г. немецким математиком *Ф. Линдеманом.* **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

поверхность конуса плоскостью, перпендикулярной к образующей. Но для получения каждой из названных кривых ему приходилось брать различные конусы: для получения эллипса — конус с острым углом между противоположными образующими, гиперболы — конус с тупым и параболы — конус с прямым углом. Менехму удалось получить много соотношений, выражающих свойства изучаемых кривых. Так, например, в случае параболы ему удалось доказать, что квадрат, построенный на перпендикуляре MK, опущенном из какой-нибудь точки M кривой на ось симметрии AB, равновелик прямоугольнику, стороны которого AK и AB, где AB — отрезок, вполне определенный для данной параболы (рис. 7). Если выразить это соотношение аналитически, то получим уравнение

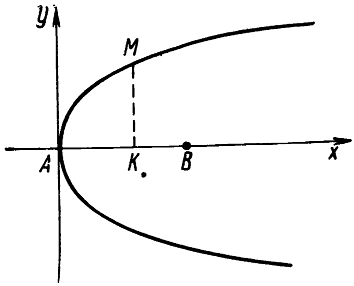


Рис. 7

$$KM^2 = AK \cdot AB.$$

Указанное уравнение заменяет собой то уравнение параболы, которое мы записываем в наше время, если за оси координат принимаем ось симметрии параболы и прямую, ей перпендикулярную и проходящую через вершину параболы. Приняв ось абсцисс за ось Ox, а ось ординат — за ось Oy, мы получим уравнение

$$y^2 = ax,$$

где a — величина, постоянная для данной параболы.

На основании свойств параболы Менехм дал своеобразное решение задачи об удвоении куба, применив пропорции Гиппократа. Вспомним, что из пропорции $a : x = x : y = y : 2a$ мы можем получить два уравнения: $x^2 = ay$ и $y^2 = 2ax$, в которых можем принять a за ребро данного куба, а x — за ребро удвоенного куба. Таким образом, для определения x надо исключить y из этих уравнений. Геометрически это означает, что надо построить две параболы: одну, имеющую уравнение $x^2 = ay$, для которой осью служит координатная ось Oy, и другую, имеющую уравнение $y^2 = 2ax$, с осью Ox (рис. 8). Проекция на ось Ox точки M пересечения этих парабол и определя-

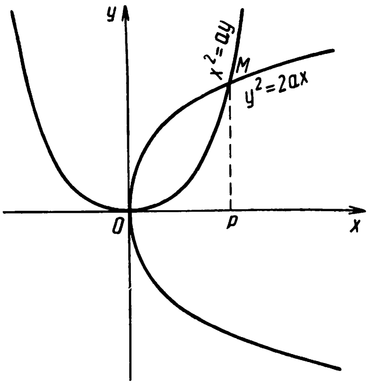


Рис. 8

ет отрезок OP, представляющий искомое ребро удвоенного куба, если отрезок a служит ребром данного куба.

Основателем и руководителем другой афинской философской школы — Ликея[1] являлся философ *Аристотель* (384—322 до н. э.). Будучи учеником Платона и в то же время разделяя во многих отношениях убеждения материалиста Демокрита, Аристотель выработал свою философию, в которой заметны постоянные колебания между материализмом и идеализмом. Во всяком случае для Аристотеля объективное существование реального мира являлось первой предпосылкой всей его философии.

В Ликее математические вопросы как таковые затрагивались мало, а поэтому влияние Аристотеля на их освещение было лишь косвенным. Но Аристотель обладал такими всеобъемлющими познаниями в математике и родственных ей науках, что его работа в других областях знания имела несомненное значение для развития математики. Достаточно упомянуть о том, что Аристотель является творцом дедуктивной логики, на основании которой строятся многие доказательства математики. Кроме того, создавая свою теорию физических явлений, Аристотель способствовал развитию математики, поскольку изучение физических явлений во все времена служило и развитию математических понятий, без которых физика обойтись не может.

Из чисто философских для нас интересно понятие о бесконечности, которому Аристотель дал такое толкование: «Бесконечность это не то, за чем ничего нет, а то, за чем всегда что-нибудь есть». Такое понимание бесконечности не противоречит современному математическому ее определению.

Аристотель впервые стал употреблять буквы алфавита для обозначения неопределенного количества. Однако это дела-

[1] Название «Ликей» или «Лицей» (латинская форма) школа получила от храма Аполлона Ликейского, возле которого она находилась.

лось не с целью упрощения вычислений и не давало возможности производить запись математических вычислений в виде формул; поэтому такой метод записи не вошел в те времена в математику, хотя и существует предположение, что в средние века некоторые европейские математики, следуя Аристотелю, стали пользоваться подобной записью и в математических сочинениях.

Александрийские школы

К середине IV в. до н. э. греческие республики — Афины, Спарта и другие, ослабленные междоусобной Пелопоннесской войной (431—404 гг. до н. э.) и постоянным соперничеством друг с другом из-за торговых рынков, постепенно теряли военное и политическое превосходство над окружающими государствами и вместе с тем не имели возможности объединиться для совместного противодействия угрожавшим Греции врагам. Это дало возможность македонскому царю *Филиппу II* окончательно сломить мощь Афин. В битве при Херонее (338 г. до н. э.) Филипп II нанес жестокое поражение греческим войскам, и в Греции наступил длительный период македонского господства.

Сын Филиппа II — *Александр Македонский* (356—323 до н. э.), ученик Аристотеля, человек образованный и обладавший широким кругозором, сумел поставить в своей стране военное дело на большую высоту. В его войсках было первоклассное по тому времени вооружение и снаряжение; в войсках были специалисты по инженерному делу, врачи и опытные полководцы. Все это создало большое преимущество войскам Александра Македонского перед войсками соседних государств и дало ему возможность вести успешные завоевательные войны. Таким путем Александру в очень короткий срок удалось создать гигантскую империю, простиравшуюся от Каспийского моря до берегов Нила и от Македонии до Индии. Однако эта империя, созданная исключительно силой оружия, не могла просуществовать долго и после смерти Александра распалась на отдельные эллинистические государства, в которых первенствующее значение имели греко-македонские рабовладельцы.

Одним из наиболее значительных государств такого типа стало греко-египетское, управляемое династией Птолемеев. Культурным и торгово-промышленным центром этого государства был город Александрия, основанный Александром Македонским в 332—331 гг. до н. э. на берегу Средиземного моря в дельте Нила. Александрия и стала столицей государства Птолемеев. Вместе с тем Александрия явилась крупнейшим центром научной мысли, в котором сохранились и получили большие возможности для развития научные идеи, зародившиеся в Древней Греции. Здесь были созданы заслужившие всемирную славу библиотека, содержавшая до 700 тысяч свитков, музей, лаборатории, обсерватория, зоологический и ботанический сады и много других культурных учреждений. Александрия явилась наследницей Афин и в смысле дальнейшего развития математических знаний.

III в. до н. э. дал Александрии такие значительные достижения в области математики, что он вошел в историю математики под именем «золотого века». В эту эпоху в Александрии работало много крупнейших математиков, гигантов математической мысли, слава которых в свете их гениальнейших творений не померкла до наших дней.

Работа математиков Александрийской эпохи шла по двум основным направлениям. Некоторые из них, следуя идеалистическим тенденциям школ Пифагора и Платона, оторвались в своих исследованиях от жизни, но их гений проявлял себя в обосновании, разработке и систематике ранее добытых истин. Это углубление математики внутрь себя придало ей крепость и силу, какими она до этого времени не обладала. Другие же математики сумели сохранить тесную связь с практикой и потому смогли сделать колоссальные сдвиги в математике не только вглубь, но и вширь.

Для заведования математической школой в Александрии при Птолемее I был приглашен *Евклид*. Мы мало знаем о жизни этого великого математика. Неизвестны и годы его рождения и смерти. Достоверно лишь, что он жил около 300 г. до н. э. Есть данные, что Евклид одно время обучался в школе Платона. Перу Евклида принадлежит величайшее творение по математике — «Начала».

В «Началах» Евклид дает строгое и логическое изложение всего геометрического материала, известного до него и дополненного им самим. Это изложение строится при помощи дедуктивного метода, заключающегося в том, что в основу положены некоторые определения и истины, не требующие доказательств, а все дальнейшие положения выводятся путем

ЕВКЛИД

строгих доказательств, основанных или на этих истинах, или на положениях, полученных из них.

«Начала» Евклида представляют большой труд, состоящий из 13 книг.

В начале первой книги у Евклида содержатся определения, постулаты и аксиомы. С современной точки зрения нет особой разницы между постулатами и аксиомами, но Евклид подразумевал под аксиомой суждение общеизвестное, общепринятое, констатировавшее определенный факт, а под постулатом[1] — требование возможности практического осуществления того свойства, которое в постулате сформулировано. Так, например, одна из аксиом гласит: «Если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны». Это и есть не что иное, как утверждение определенного факта. А вот пример постулата: «Требуется, чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать неограниченно по прямой». Здесь мы видим выражение возможности фактического выполнения действия, указанного в постулате (то есть неограниченного продолжения прямой).

Первые четыре книги «Начал» содержат вопросы планиметрии: в них излагаются свойства плоских фигур, многоугольников и круга. Пятая книга содержит теорию пропорций; как предполагают, основной материал этой книги заимствован у Евдокса. Шестая книга посвящена вопросам подобия фигур. Основные вопросы теории чисел нашли свое место в седьмой, восьмой и девятой книгах. Здесь рассматриваются, между прочим, вопросы, касающиеся определения наибольшего общего делителя и наименьшего кратного чисел, а также непрерывные пропорции и взаимоотношения квадратов и кубов. Десятая книга содержит выяснение понятий о соизмеримых и несоизмеримых количествах. В одиннадцатой книге изложены основные теоремы стереометрии. Двенадцатая книга устанавливает метрические соотношения для пирамиды, призмы, конуса, цилиндра и сферы, а в тринадцатой рассматриваются правильные многогранники.

Во второй и шестой книгах содержится и материал, который можно назвать геометрической алгеброй. Он служит дальнейшим развитием тех идей, которые были затронуты в школе Пифагора. Здесь имеется геометрическое решение уравнений второй степени. Так, например, решение уравнения вида $x^2+ax=b^2$ проводилось следующим образом. Во-первых, самое условие записывалось, конечно, не так, как пишем его мы, оно понималось тоже геометрически: «площадь квадрата с неизвестной стороной, сложенная с площадью прямоугольника, у которого одна сторона равна a, а другая равна стороне квадрата, равновелика площади квадрата со стороной b. Определить сторону первого квадрата». Для решения задачи строился квадрат со стороною $\frac{a}{2}+x$, где x брался произвольной дли-

[1] Латинское слово postulatum означает требование.

ны (рис. 9). На расстоянии x от верхней стороны квадрата проводилась прямая, параллельная этой стороне, а на расстоянии x от правой стороны проводилась прямая, параллельная ей. Тогда из чертежа можно увидеть, что $x^2+ax=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2=b^2$. Геометрически полученное соотношение можно истолковать как разность между квадратами, построенными на гипотенузе и катете прямоугольного треугольника, равную квадрату, построенному на другом катете. Для определения отрезка x достаточно построить прямоугольный треугольник по данным катетам $\frac{a}{2}$ и b, причем гипотенузой его будет отрезок $\frac{a}{2}+x$. Сделав из вершины острого угла засечку на гипотенузе радиусом, равным $\frac{a}{2}$, отделим на гипотенузе отрезок, равный искомому отрезку x, как это и показано на чертеже.

Так как во времена Евклида отрицательные числа не были известны, то нельзя было дать общее решение для любого вида квадратных уравнений, а потому для уравнений вида $x^2-ax=b^2$ и $ax-x^2=b$ приходилось делать другие построения, аналогичные рассмотренным.

Форма изложения, которой придерживался Евклид в «Началах», такова: сначала разбирается в общем виде данное предложение, далее следуют замечания, относящиеся к фигуре, потом проводятся все необходимые для доказательства и построения вспомогательные линии и, наконец, делается заключение, которое выражается словами: «что и требовалось доказать» (если проводилось доказательство) или словами «что и требовалось сделать» (если проводилось построение). Относительно содержания «Начал» заметим еще, что Евклид писал свой труд, не рассчитывая на его применение для практических целей, а имея в виду только цели научные. Поэтому здесь мы не найдем даже определения величины площади треугольника, как половины произведения чисел, выражающих основание и высоту этого треугольника.

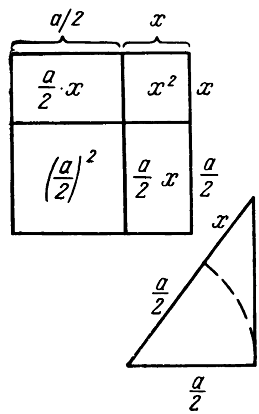


Рис. 9

Общее содержание и даже характер

АРХИМЕД

изложения учебников по геометрии нашего времени нередко весьма близки к «Началам» Евклида, хотя со времени их написания прошло более двух тысяч лет.

«Начала» были самым замечательным трудом Евклида, но им было создано еще много работ по математике, астрономии, музыке и оптике, хотя большая их часть до нашего времени не сохранилась.

Другой крупнейший математик «золотого века» — *Архимед* (ок. 287—212 до н. э.). В истории человечества трудно найти математика, который сделал бы для развития математики и смежных с ней наук больше, чем гениальный мыслитель и великий патриот своей родины Архимед. Недаром имя его в устах его современников являлось символом мудрейшего человека, который может решать простым способом самые трудные задачи. Знаменитый древнегреческий писатель и историк *Плутарх* (I в. до н. э.) так характеризует гениальные способности Архимеда: «В математике не слыхано, чтобы такие трудные задачи разрешались так просто и ясно. Если бы кто-либо попробовал сам разрешить эти задачи, он ни к чему не пришел бы, но если бы он познакомился с решением Архимеда, у него тотчас же получилось бы такое впечатление, что это решение он смог бы найти и сам, столь простым и кратким путем ведет нас к цели Архимед» [1].

Архимед родился в городе Сиракузы, столице самого крупного из Сицилийских государств. Его отец, математик и астроном *Фидий* (III в. до н. э.), дал сыну хорошую домашнюю подготовку по математическим наукам. Но, по всей вероятности, всестороннего образования Архимед не получил, так как его семья не обладала достаточными материальными средствами для помещения сына в школу, доступную лишь людям привилегированных классов. Но и этой домашней подготовки было вполне достаточно, чтобы юноша с ранних лет мог проявить свои гениальные способности.

Кроме геометрии, которая в те времена имела уже прекрасное выражение в трудах Евклида, Архимед увлекался астрономией и механикой. Так, в области астрономии им был создан оригинальный прибор — прообраз планетария, который после смерти Архимеда долго хранился в римском музее.

Один из родственников Архимеда — *Гиерон*, тоже происходивший из небогатой семьи, участвовал в войне против римлян, которую вел греческий полководец *Пирр* в защиту своих соплеменников в Италии и Сицилии. В этой войне Гиерон проявил столько мужества и находчивости, что, когда он возвратился в Сиракузы, ему были предоставлены все преимущества и права верховной власти и он был провозглашен Сиракузским царем. Такая перемена в судьбе Гиерона отразилась и на судьбе Архимеда: ему были созданы благоприятные материальные условия для поездки и обучения в Александрийской школе.

---

[1] Чвалина А. Архимед. М., 1934, с. 5.

Первоначальное увлечение астрономией продолжалось у Архимеда всю жизнь. До нашего времени не сохранилось ни одного его труда по астрономии, но из других его трудов мы можем выяснить, что он не только интересовался вопросами астрономии, но даже сам создавал приборы для проведения астрономических наблюдений. Кроме прибора типа планетария, Архимед изобрел прибор для измерения видимого (углового) диаметра Солнца, при помощи которого ему удалось достичь большой точности измерений.

Находясь в Александрии, Архимед работал и в области математики и механики. При этом многие вопросы математики он решал при помощи методов, основанных на понятиях механики.

Возвратившись в Сиракузы, Архимед продолжал работу над излюбленными им разделами знаний. Его гениальная изобретательность нашла свое практическое применение еще задолго до его возвращения на родину. Во время пребывания в Александрии он совершил путешествие по Египту и оказал важную услугу египтянам, создав для них усовершенствованную машину для поливки полей, которая впоследствии служила также для откачки воды из шахт. В Сиракузах Архимед, решая самые трудные вопросы геометрии и механики, продолжал свои работы и по техническому применению знаний. В одном из писем к Гиерону Архимед писал, что небольшой силой можно привести в движение любую тяжесть, утверждая при этом, что если бы вне Земли нашлась точка опоры, то можно было бы подвинуть и Землю. Гиерон пожелал убедиться в правильности таких утверждений, и Архимед проделал опыт с трехмачтовым судном, которое могло быть вытащено на берег только при помощи очень большого числа людей. Он предложил заполнить судно людьми и грузом и, применив силу только своих рук и систему полиспастов, сумел без особого напряжения передвинуть это судно. Увидев воочию могущество знаний, которыми обладал Архимед, Гиерон поручил ему использовать их для сооружения различных машин и приборов, годных для обороны государства. Задание было Архимедом выполнено. Хотя во время правления Гиерона Сиракузам не пришлось больше вести значительных войн, изобретения Архимеда принесли его отечеству огромную пользу позднее, уже после смерти Гиерона.

О жизни Архимеда в Сиракузах сохранилось много легенд. Эти легенды представляют нам Архимеда как человека, всегда настолько углубленного в свои научные размышления, что все окружающее и даже личное им забывалось. Плутарх пишет, что Архимед забывал об обеде и совершенно пренебрегал заботой о своем теле. Часто его насильно заставляли принимать ванну, натираться благовонной мазью; но и в это время он пальцем чертил на своем намазанном теле геометрические фигуры. В качестве одного из характерных для Архимеда случаев древнеримский архитектор и инженер *Витрувий* (II в. до н. э.) приводит обстоятельства открытия Архимедом закона плавающих тел: «Гиерон заказал себе корону из золота; когда заказ был выполнен, возникло сомнение, не содержит ли корона, кроме золота, и серебро. Гиерон поручил Архимеду найти способ для определения чистоты металла. Архимед долго и упорно думал над решением этой проблемы, пока однажды, принимая ванну, не почувствовал, как уменьшается вес тела при погружении в воду. В этот момент, якобы, Архимед и открыл закон о том, что тело, погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость. Сделанное открытие так поразило Архимеда, что он выскочил из ванны и с криком «эврика!» («нашел!») нагим побежал по улицам. Открытый Архимедом закон и помог выяснить состав металла, употребленного для выделки короны».

Последние годы жизни Архимеда дают нам возможность судить об этом величайшем ученом как о замечательном патриоте, отдавшем на служение родине все свои силы и ум.

Сиракузы, являясь самым крупным государством на острове Сицилия, служили яблоком раздора между двумя могущественными государствами: Римом и Карфагеном. Как Рим, так и Карфаген претендовали на захват Сиракуз и на присоединение их к себе. В 212 г. до н. э. римским агентам удалось предательски убить *Гиеронима*, преемника Гиерона. Это обстоятельство, а также чудовищные зверства, творимые римскими воинами над мирными жителями в городах Леонтины и Энне, возмутили сиракузцев, и они начали враждебные действия против римлян. Тогда римляне двинули на Сиракузы крупные сухопутные и морские силы под руководством опытных военачальников. Сиракузы были осаждены и с суши, и с моря. Город мог противопоставить грозному врагу лишь свои собственные силы, в то время как прекрасно вооруженная римская армия постоянно вводила в бой свежие воинские части. Однако римляне долго не могли овладеть Сиракузами. Среди сиракузцев находился Архимед, который сумел противопоставить передовой римской военной технике свои многочисленные изобретения. Он помог героическим жителям Сиракуз лишить римлян возможности овладеть городом в открытом бою. Около двух лет народ, поддерживаемый гениальным творчеством Архимеда, отстаивал Сиракузы. Древние историки яркими красками описывают это упорное сопротивление. Так, историк *Полибий* пишет: «Архимед заготовил внутри города, а равно и против нападающих с моря такие средства обороны, что защитникам не предстояло утруждать себя непредусмотренными работами на случай неожиданных способов нападения: у них заранее было все готово к отражению врага при всяком случае... Архимед соорудил машины, которые могли выбрасывать снаряды на любое желаемое расстояние. Враги были еще далеко от города, когда Архимед из своих больших дальнобойных метательных машин стал поражать их корабли таким множеством тяжелых снарядов и стрел, что они никак не могли уберечься от них и оказались беспомощными и бездеятельными. Когда Архимед замечал, что снаряды попадают слишком далеко, за линию вражеских кораблей, он пускал в ход меньшие машины, соответственно нужному расстоянию. Это вызывало такой ужас среди римлян, что они не в силах были двигаться вперед». Затем Полибий описывает, как сиракузцы уничтожали римские корабли с помощью других изобретенных Архимедом механизмов. Когда римские корабли подходили близко к городским стенам, из-за стен высовывались клювы, которые выбрасывали на корабли большие тяжести и разбивали их. Другие механизмы опускали над кораблями железные лапы, которые захватывали нос корабля и подымали корабль над водой, ставя его на корму. Затем корабль отпускался, опрокидываясь или погружаясь в воду. Эти действия Архимеда не давали римлянам возможности подступить к городу со стороны моря. Но не лучше обстояло дело и на суше. Солдат *Аппия Клавдия* уничтожали стрелами через амбразуры в стенах, они гибли под ударами камней и бревен, которые сбрасывались на них сверху, а иногда их захватывали железные лапы и бросали с высоты. В конце концов, римских воинов охватил панический ужас, и они стали обращаться в бегство, лишь только над стенами города показывалась какая-нибудь палка. Город пал лишь вследствие измены находившихся в стенах города римских приверженцев, которые воспользовались тем, что сира-

СМЕРТЬ АРХИМЕДА

кузцы в день праздника в честь богини Артемиды предались неумеренному веселью и пьянству. Изменники открыли для врага одни из отдаленных ворот города. Римляне, ворвавшись в город, занялись грабежами и убийствами. В это время погиб и Архимед. Легенда так рисует гибель Архимеда: когда враги ворвались в город, Архимед не подозревал этого и сидел в глубоком раздумье над геометрическими чертежами. К нему подбежал римский воин. Архимед обратился к нему: «Отойди, не трогай моих чертежей». Римский воин был оскорблен этим замечанием, выхватил меч и заколол Архимеда. Так погиб на 75-м году жизни один из величайших математиков. На могиле Архимеда был поставлен памятник с изображением цилиндра со вписанным в него шаром. Поставить такое надгробье завещал сам Архимед, так как оно символизировало то его открытие, которое он особенно ценил.

Тексты многих сочинений Архимеда сохранились до наших дней [1]. Среди них преобладают труды геометрического содержания, но имеются работы, относящиеся к вопросам механики и счисления. Нам известны следующие сочинения Архимеда: «О равновесии плоскостей, или об их центрах тяжести», «О квадратуре параболы», «О сфере и цилиндре», «Измерение круга», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах», «Исчисление песчинок» («Псаммит»), «О методе» («Послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах геометрии»), «О плавающих телах», «Леммы».

Учению о счислении и счете Архимед посвятил свою работу «Исчисление песчинок» («Псаммит»). В ней Архимед ставит задачей определить количество песчинок, которые могли бы заполнить всю Вселенную, то есть воображаемую сферу, центром которой является Земля, простирающаяся до границ области неподвижных звезд. Решение такой оторванной от реальных задач проблемы, казалось бы, не могло принести никакой пользы. Но это дало Архимеду возможность проявить находчивость при решении ряда возникающих попутно частных проблем. Прежде всего «Псаммит» имел большое значение для расширения возможности выражать большие числа. До Архимеда у греков счет простирался не далее десяти тысяч, причем десять тысяч именовалось мириадой. Архимед принял мириаду за своего рода новую единицу и

---

[1] В 1962 г. Московским издательством физико-математической литературы выпущена книга Архимеда «Сочинения», куда вошло все, что уцелело от произведений Архимеда.

ввел счет мириадами, причем мириада мириад давала опять единицу высшего разряда. Продолжая такого рода процесс далее и далее, Архимед дал схему выражения чисел любой величины, изображая их при помощи единиц «первого порядка», единиц «второго порядка» и т. д. Это обстоятельство сразу расширило понятие о числе, представив число чисел бесконечным, причем в основу было положено десятичное счисление. В том же сочинении Архимед писал: «Если будет дан ряд чисел в непрерывной пропорции, начиная от 1, и если два его члена перемножить, то произведение будет того же ряда, настолько удаленным от большего множителя, насколько меньший удален от единицы, и одним членом меньше против того, насколько удалены оба множителя вместе». Так как Архимед под непрерывной пропорцией разумеет геометрическую прогрессию вида 1, a, a^2, ..., то указанное замечание можно представить как правило для умножения степеней при одном и том же основании, то есть, что $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$. Здесь Архимед показывает, что произведение степеней связано с суммой показателей степеней. Некоторые авторы усматривают в этом указании прообраз числовых свойств, которые в очень отдаленном от Архимеда будущем привели к изобретению логарифмов.

В своих геометрических сочинениях Архимед использует два основных метода. Один из них изложен в сочинении «Послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах геометрии». Здесь излагается метод доказательства теорем при помощи механики. Однако, очевидно, этот метод казался самому Архимеду недостаточно обоснованным или, вернее, недостаточно строгим, а поэтому в случае его использования Архимед обычно проверял полученные выводы при помощи значительно развитого им метода исчерпывания. Эти два метода (механический и исчерпывания) содержали в себе предпосылки идей, которые лишь через две тысячи лет вылились в стройный метод интегрального исчисления.

Наиболее простое применение метода исчерпывания приведено Архимедом в его работе «Измерение круга». Здесь Архимед впервые в истории математики поставил задачу об измерении длины окружности и об определении приближенного значения числа π, то есть отношения длины окружности к диаметру; причем он установил даже пределы допускаемой при этом ошибки. К длине окружности Архимед подходил с двух сторон, вычисляя периметры вписанных и описанных правильных многоугольников. Начиная с треугольников и затем удваивая число сторон, Архимед дошел до 96-угольников. При этом он обнаружил, что периметр правильного 96-угольника, вписанного в окружность, диаметр которой равен 1,— более $3\frac{10}{71}$, а периметр правильного 96-угольника, описанного около той же окружности,— менее $3\frac{1}{7}$. Отсюда и получалось значение числа π, равное $\frac{22}{7}$, которое мы часто употребляем при приближенном вычислении и которое именуется «архимедовым числом». Далее Архимед установил, что площадь круга равна площади треугольника, основание которого равно длине окружности, а высота— радиусу.

Если в работе «Измерение круга» Архимед разрешил вопрос о длине окружности и площади круга, то соответствующую задачу для пространства, то есть задачу об определении поверхности и объема шара, он решил в труде «О шаре и цилиндре». Искусно применяя метод исчерпывания, он показал, что поверхность шара равна учетверенной площади диаметрального сечения шара, объем шара в четыре раза больше объема конуса, основание которого равно площади этого сечения, а высота — радиусу шара.

В этой работе Архимеда имеется еще ряд интересных и важных заключений. Здесь, например, доказывается, что поверхность шарового сегмента равна площади круга, имеющего радиусом отрезок прямой, соединяющий вершину сегмента с окружностью, служащей ему основанием. Кроме того, Архимед показал, что если в равносторонний цилиндр вписан шар, то полная поверхность цилиндра и его объем составляют соответственно 3/2 от поверхности и объема шара. Последняя задача и требовала построения, по поводу которого Архимед высказал пожелание, чтобы оно было изображено на его надгробии.

Очень близко к современному методу интегрирования Архимед подошел в своей работе «О коноидах и сфероидах». Коноидами Архимед называл тела, полученные от вращения параболического или гиперболического сегмента около его оси, то есть тела, которые мы именуем параболоидами и гиперболоидами.

Кстати сказать, наименование Архимеда было правильнее, чем принятое нами, так как «параболоид» означает «похожий на параболу», а «коноид» — «похожий на конус». Наш термин неправилен, так как нельзя говорить о сходстве тела и линии; между тем термин Архимеда указывает, что говорится о теле, похожем на конус.

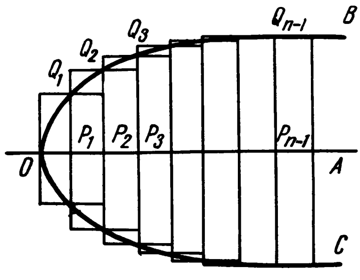


Рис. 10

Для определения объема коноида, полученного от вращения параболического сегмента BOC около оси OA, Архимед поступал следующим образом (рис. 10). Высоту параболического сегмента OA он делил на равные части OP_1, P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}\,A$. Считая, что получилось всего n делений, восставив из точек деления перпендикуляры P_1Q_1, P_2Q_2, ..., $P_{n-1}\,Q_{n-1}$ и построив на них описанные и вписанные прямоугольники, при вращении всей фигуры около оси OA Архимед получил ступенчатые тела, состоящие из описанных и вписанных в параболоид вращения цилиндров. Объем внешнего тела больше объема параболоида, а объем внутреннего — меньше. Исходя из объемов этих тел, Архимед и получил объем параболоида. Оказалось, что этот объем равен половине объема цилиндра, имеющего высоту, равную OA, и радиус основания AB.

Метод исчерпывания нашел применение и в работе «О квадратуре параболы». Эта работа посвящена определению площади параболического сегмента. Пусть требуется определить площадь параболического сегмента AMB, отсеченного от параболы хордой AB. Рассуждения Архимеда при определении площади этого сегмента, за основание которого будем считать хорду AB, в общих чертах сводились к следующему (рис. 11). В параболе проводилась касательная, параллельная хорде AB, и точка касания C соединялась хордами с точками A и B. Площадь треугольника ACB больше половины сегмента AMB. С новыми сегментами AKC и CPB поступали так же, как и

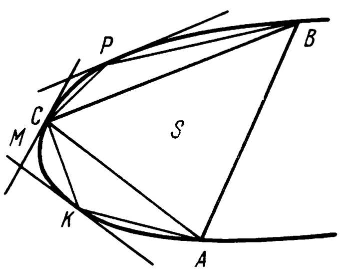


Рис. 11

с сегментом AMB, то есть строились треугольники AKC и CPB. Получалась вписанная фигура $AKCPB$. Такого рода процесс продолжался дальше и дальше. Площадь многоугольника, вписанного в параболу, возрастала и при этом приближалась к площади параболического сегмента. Архимед доказал, что площадь треугольника ACB равна учетверенной сумме площадей треугольников AKC и CPB. А так как такое же соотношение площадей получается и при построении последующих треугольников, то, считая, что сумма площадей всех вписанных треугольников приближается к площади параболического сегмента, и полагая площадь треугольника ACB равной S, получим площадь параболического сегмента

$$S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{16}S+\frac{1}{64}S+\ldots=\frac{4}{3}S.$$

Работа Архимеда «О спиралях» представляет большой интерес во многих отношениях. Прежде всего интересно самое определение спирали, данное Архимедом. Приводим его слова: «Если в плоскости заставить вращаться равномерным движением прямую вокруг одной неподвижной из ее точек до возвращения ее в первоначальное положение и если вдоль перемещающейся прямой заставить одновременно двигаться от неподвижной точки, также равномерно, некоторую точку, то последняя опишет спираль». Таким образом, в определение спирали Архимед внес движение. До Архимеда даже в работах таких крупнейших геометров, как, например, Евклид, движение совершенно игнорировалось, и поэтому Архимед, давая указанное выше определение спирали, уничтожил в геометрии предрассудок, во многих случаях тормозивший ее развитие. Исследуя новую кривую, которую мы теперь именуем спиралью Архимеда, Архимед нашел, что площадь, ограниченная начальным радиусом и первым витком спирали, который получается, когда вращающаяся прямая делает поворот на 360°, равна $1/3$ площади круга, центр которого лежит в начале спирали, а радиус равен радиус-вектору конечной точки данного витка спирали. Им открыто еще несколько интересных свойств спирали. В той же работе Архимед проводит и геометрическое суммирование рядов: $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2$ и $a+2a+3a+4a+\ldots+na$, где n — любое очередное натуральное число.

Скажем еще несколько слов о работе «Леммы», входящей в число названных нами ранее трудов Архимеда. В этой работе содержится 15 предложений, некоторые из которых мы приведем.

1. Определить площадь скорняжного ножа-арбелоса. Этот нож во времена Архимеда применялся для разрезания и очистки кожи, и форма его получалась удалением из полукруга двух других взаимосоприкасающихся полукругов, сумма диаметров которых равна диаметру первого круга, как это указано на чертеже (рис. 12). Легко показать, что площадь арбелоса равна площади круга, диаметром которого служит перпендикуляр, восставленный к диаметру первого полукруга из точки касания других полукругов и продолженный до пересечения с дугой первого полукруга. На рис. 12 площадь арбелоса $ABCDKA$ равна площади круга с диаметром BD.

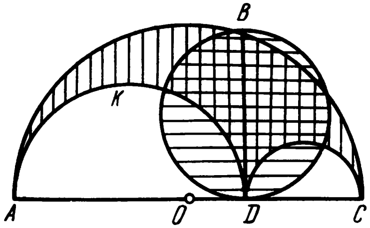


Рис. 12

2. Если круг описан около квадрата, а другой в него вписан, то описанный круг вдвое больше вписанного.

3. Если в круге две хорды пересекаются под прямым углом, то сумма квадратов полученных отрезков этих хорд равна квадрату диаметра.

4. Если в окружности из внешней точки провести одну секущую через центр, а другую так, чтобы внешний отрезок ее равнялся радиусу окружности, то угол между секущими будет измеряться одной третью большей из дуг, заключенных между его сторонами. Решение этой задачи как бы дает возможность разделить данный угол на три равные части, то есть разрешить задачу о трисекции угла. Однако практически, при помощи циркуля и линейки, нельзя построить секущую, внешний отрезок которой равен радиусу окружности.

В кратком обзоре работ Архимеда мы излагали их содержание в форме, доступной для любого читателя, имеющего среднее образование. Однако это не означает, что так же легко можно было ознакомиться с идеями Архимеда, изучая непосредственно его сочинения. Все свои выводы Архимед строил в те времена, когда не существовало символической алгебры, что значительно усложняло ход доказательств. Самый стиль архимедова изложения отнюдь нельзя считать удобным для читателя, так как Архимед, обладавший гениальной интуицией, вносил в свои работы такие соображения, которые были ясны для него самого, но сильно затрудняли читателя, если даже он обладал значительной эрудицией. Наконец, Архимед, ссылаясь на истины, доказанные его предшественниками, никогда не указывал точно, где это доказательство можно найти.

Сочинения Архимеда трудно было понимать даже его современникам. Тем не менее его работы были оценены лучшими математиками древности, а Архимед признан самым великим ученым того времени.

Другим крупным ученым времен Архимеда был его сверстник и друг *Эратосфен* (ок. 276—194 до н. э.). Эратосфен был уроженцем города Кирены на северном побережье Африки. Он получил прекрасное и всестороннее образование в Афинах и около 245 г. до н. э. был приглашен в Александрию в качестве воспитателя наследника престола будущего *Птолемея IV Филопатора*. Ему было поручено и заведование знаменитой Александрийской библиотекой.

Разносторонняя образованность Эратосфена сказалась и в его трудах. Будучи преимущественно географом и астрономом, Эратосфен тем не менее писал трактаты: «О добре и зле», «О богатстве и бедности», «Об искусстве жить, не скорбя», «О том, что всякий поэт стремится развлекать, а не учить читателя». Им написаны сочинения по истории литературы и по грамматике. Эратосфен создал труды «География», «О ветрах», «Об измерении Солнца», «Об измерении Земли», «О расположении звезд», «О расположении знаков Зодиака».

В сочинении «Об измерении Земли» Эратосфен изложил, между прочим, свой метод измерения земного меридиана. Такого рода измерение было произведено впервые в истории человечества. Для этого Эратосфеном были выбраны два пункта на земном шаре (города Александрия и Сиена), расположенные на одном меридиане на расстоянии 750 км.[1] Во время летнего солнцестояния в 12 часов дня было установлено, что в Сиене в этот момент отвес солнечных часов не отбрасывал тени, а в Александрии длина тени соответствовала 7°36′. Это и дало возможность определить величину угла между земными радиусами, направленными в Сиену и в Александрию. Так как 7°36′ приблизительно равны $^1/_{50}$ части

---

[1] Фактически измерение расстояний проводилось в стадиях. Аттический стадий был равен 177,6 м.

полной окружности, то, следовательно, расстояние 750 км составляло такую же часть меридиана. Если принять Землю за шар, то, по вычислениям Эратосфена, диаметр его равен 12 625 км, что отличается от истинной его величины всего на 75 км.

К числу чисто математических сочинений Эратосфена относятся «Решето», «О конических сечениях», «Об измерениях» и «О средних величинах».

В сочинении «Решето» дается метод для выделения простых чисел. Для этого Эратосфен поступал так: расположив натуральные числа в возрастающем порядке, он начинал отсчет с первого простого числа — двойки и удалял по порядку каждое следующее второе число: 4, 6, 8 и т. д. Проделав это, начинал отсчет с первого оставшегося после двойки неудаленного числа, то есть тройки, и удалял каждое третье число: 6, 9, 12 и т. д. После этого следующим неудаленным числом оказывалась пятерка, и Эратосфен удалял все следующие натуральные числа, находящиеся на пятых местах. Этот процесс можно продолжать и далее; при этом остаются только простые числа, а остальные отбрасываются.

В сочинении «О средних величинах» Эратосфен дает практическое решение пропорций, составленных Гиппократом при его попытке дать ответ на задачу об удвоении куба, и описывает прибор, названный им мезолябием, при помощи которого определяется ребро удвоенного куба по ребру данного.

Свою научную работу Эратосфен продолжал до восьмидесятилетнего возраста. Когда, ослепнув, он вынужден был ее прекратить, это обстоятельство так повлияло на его душевное состояние, что он покончил жизнь самоубийством.

Младшим современником Архимеда и Эратосфена является знаменитый геометр древности *Аполлоний* (ок. 200 до н. э.) из города Перги. Аполлоний еще в юности обучался в Александрийской школе, а затем жил в Пергаме, который славился библиотекой, подобной Александрийской, и школой. Главный труд Аполлония «О конических сечениях» посвящен изучению тех кривых, которые мы теперь именуем кривыми второго порядка. В этом труде, состоявшем из восьми книг, Аполлоний привел в строгую систему сведения о конических сечениях, полученные его предшественниками, и одновременно дал много своих новых исследований. В свое время Менехм для получения различных видов конических сечений должен был брать три различных конуса. Аполлоний объединил все три вида сечений, получая их на одном и том же конусе путем проведения плоскостей, параллельных и перпендикулярных к образующей и оси конуса. Аполлонием введены и названия конических сечений: парабола, эллипс и гипербола. Изучая свойства конических сечений, Аполлоний открыл много зависимостей, которые сейчас служат предметом изучения аналитической геометрии.

До нашего времени полностью сохранился текст на греческом языке только первых четырех книг этой работы Аполлония. Следующие три дошли до нас в латинском переводе, а последняя книга утрачена.

Кроме указанного труда, Аполлонию приписывают еще ряд математических работ, которые до наших дней не сохранились, но тем не менее некоторые из них частично восстановлены математиками более позднего времени. В одной из них, а именно в работе «О соприкосновениях», находится знаменитая задача Аполлония о построении окружности, касательной к трем данным окружностям. Теперь мы имеем методы достаточно простого решения этой задачи, но во времена Аполлония она была чрезвычайно трудной, и у самого Аполлония ее решение столь пространно, что, будучи напечатано в наше время, заняло бы около 25 страниц.

Трудами Архимеда и Аполлония завершается самый блестящий период развития греческой математики. В последующее время и в Александрии и в других городах, на которые распространилось влияние эллинистической науки, появлялось еще много крупных математиков, но их труды все же не могут быть поставлены в один ряд с трудами великих геометров «золотого века».

* * *

В истории математики рассмотренный нами период существования Александрийской школы носит название «Первой Александрийской школы». С начала нашей эры на основе работ александрийских математиков начинается бурное развитие идеалистической философии: снова возрождаются идеи Платона и Пифагора, и эта философия неоплатоников и неопифагорейцев быстро снижает научное значение работ новых представителей математической мысли. Но все же математическая мысль не замирает, а время от времени проявляется в работах отдельных математиков. Второй период, в который протекала работа Александрийской школы, носит название «Второй Александрийской школы».

К числу представителей Александрийской школы в начале второго периода ее существования надо отнести *Герона Александрийского*, жившего, вероятно, в I в. до н. э. Герон был выдающимся греческим инженером и ученым. Он известен многими своими изобретениями, работами геодезического характера, а также математическими работами, относящимися главным образом к вопросам геометрической метрики. Из его работ, имеющих значение для математики, можно отметить «Метрику» и «О диоптре». В «Метрике» приводятся правила и указания для точного и приближенного вычисления площадай и объемов различных фигур и тел; среди них имеется и формула для определения площади треугольника по трем его сторонам, вошедшая в математику под названием формулы Герона. Кроме того, в этой работе даны примеры решения квадратных уравнений и приближенного вычисления квадратных и кубических корней. Характерной особенностью «Метрики», выделяющей ее из ряда работ других греческих геометров, предшествовавших Герону, служит то обстоятельство, что в ней обычно правила даются без доказательств и лишь разъясняются на отдельных примерах. Это значительно снижает достоинства работы и, несомненно, является признаком недостаточной научной подготовки ее автора. Но в области практических приложений математики Герон превосходит многих своих предшественников. Лучшей иллюстрацией этого служит его работа «О диоптре». Здесь излагаются методы проведения различных работ геодезического характера, причем землемерная съемка производится с помощью изобретенного Героном прибора — диоптры. Этот прибор является прообразом современного теодолита. Главной его частью служила линейка с укрепленными на ее концах визирами. Эта линейка вращалась по кругу, который мог занимать и горизонтальное, и вертикальное положение, что давало возможность намечать направления как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости. Для правильности установки к прибору присоединялись отвес и уровень. Пользуясь этим прибором и вводя фактически в употребление прямоугольные координаты, Герон мог решать на местности различные задачи: измерять расстояние между двумя точками, когда одна из них или обе недоступны наблюдателю; проводить прямую, перпендикулярную к недоступной прямой линии; находить разность уровней между двумя пунктами; измерять площадь простейшей фигуры, не вступая на измеряемую площадку.

Сочинения Герона давали его современникам богатый материал, практическое использование которого вполне удовлетворяло запросам строительства и земледелия, а потому эти сочинения пользовались большим успехом в продолжение многих столетий.

В конце I в. н. э. надо отметить появление трудов неопифагорейца *Никомаха*. Его работа «Введение в арифметику» — первый труд по арифметике, изложенный независимо от геометрии, и потому она оказывала влияние на изучение арифметики не менее тысячи лет. Между тем эта работа не содержит ничего особенно оригинального. Основной ее идеей является классификация чисел, причем она проводится на основах, всецело опирающихся на числовую мистику. В числовую классификацию Никомаха входят также и многоугольные числа, составленные по образцу пифагорейских. Наиболее интересным в «Арифметике» Никомаха является раздел суммирования числовых рядов. Здесь мы встречаем, например, указание на то, что кубические числа представляют собой суммы последовательных нечетных чисел. Так, $1^3=1$; $2^3=3+5$; $3^3=7+9+11$; $4^3=13+15+17+19$ и т. д.

Современником Никомаха был астроном и геометр *Менелай Александрийский*, который написал трактат о сферических треугольниках, послуживших в свое время как бы фундаментом сферической геометрии. В этом же труде Менелая находится его знаменитая теорема, которую в современной трактовке можно изложить так: «Если какая-нибудь прямая линия пересекает три стороны треугольника или их продолжения, то произведение трех отрезков, не имеющих общих точек, равно произведению трех других отрезков».

Ко II в. относится деятельность *Клавдия Птолемея*. Он работал главным образом в области астрономии, причем его астрономические наблюдения относятся ко времени между 125 и 151 г.[1] В своих работах он невольно сталкивался с понятиями тригонометрического характера, а потому ему удалось внести значительный вклад и в развитие тригонометрии.

---

[1] Как астроном Птолемей разработал геоцентрическую систему мира, согласно которой Земля неподвижно покоится в центре мира, а все небесные светила движутся вокруг нее. Эта система была опровергнута *Н. Ко-*

В своих астрономических трудах Птолемей уже не разделял часы на дневные и ночные, как это делали египтяне, а считал их равными по продолжительности. Окружность он разделял на 360 градусов и каждый градус делил еще пополам. Диаметр же окружности он делил на 120 градусов, полагая, таким образом, что длина окружности в 3 раза больше ее диаметра; при этом каждый градус диаметра подразделял на 60 равных частей, а каждую из этих частей вновь разделял на 60 частей. В более позднее время эти подразделения градуса получили у римлян наименование «partes minutae primae» и «partes minutae secundae», что в переводе означает «части меньшие первые» и «части меньшие вторые». От этих латинских слов и произошли наши названия для единиц измерения углов и времени — минута и секунда.

Главная работа Птолемея называлась «Великое математическое построение астрономии в XIII книгах» или сокращенно «Мэгистэ» (в переводе с греческого — «величайшая»). В историю она вошла под названием «Альмагест», которое ей впоследствии дали арабы.

В «Альмагесте» Птолемей вычисляет величины хорд всех дуг от 0° до 180°, причем значения хорд даны для дуг через каждые $^1/_2$°. Для выполнения этой работы Птолемей ввел свою теорему, которая в истории математики носит название теоремы Птолемея и формулируется так: «Произведение длин диагоналей вписанного в круг четырехугольника равно сумме произведений длин его противоположных сторон». Из этой теоремы Птолемей получил следствия, позволяющие по данному диаметру окружности и двум хордам, стягивающим дуги α и β, вычислить хорды, стягивающие дуги $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$. Пользуясь полученными соотношениями, а также умением вычислять стороны вписанных в круг правильных фигур (треугольника, квадрата, пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника), Птолемей и составил таблицу хорд, предшественницу современных таблиц синусов.

В истории математики Птолемей известен также тем, что он первый усомнился в очевидности постулата Евклида о параллельных прямых и делал попытки доказать его справедливость, тем самым положив начало длинному ряду подоб-

перником в его гелиоцентрической системе мира, полагающей, что центром Вселенной является Солнце, вокруг которого обращаются Земля и другие планеты, причем все планеты вращаются вокруг своих осей. (**Примеч. В. Д. Чистякова.**)

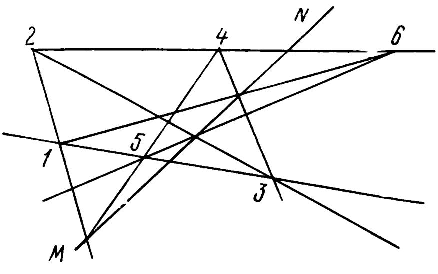


Рис. 13

ных же попыток позднейших геометров, пока Лобачевский не показал безуспешность таких доказательств, разъяснив их невозможность.

Последним крупным геометром Александрийских школ следует признать *Паппа* (III в.). Ему принадлежало, как полагают, значительное число сочинений, из которых сохранилось лишь «Математическое собрание», да и то не в полном виде (из восьми книг этого сборника утрачена первая и не хватает части второй).

«Математическое собрание» Паппа имеет для истории математики большое значение: оно содержит обзор трудов предшественников Паппа, развивает некоторые их идеи, комментирует эти труды. Благодаря этому для нас сохранились сведения о многих математических работах древних, которые не дошли в подлинниках до нашего времени. Кроме того, в работе Паппа имеются и некоторые новые и оригинальные открытия. Так как Папп не всегда называет авторов приводимых им теорем, то нам трудно судить, какие теоремы принадлежат ему самому и какие — другим авторам. Но относительно некоторых из них считают несомненным, что они принадлежат Паппу. Многие из этих теорем имеют теоретический и практический интерес. Теорема Паппа об инволюции точек читается так: «Если на двух прямых, лежащих в одной плоскости, взять по три точки: на первой прямой точки 1, 5 и 3, а на второй — 2, 4 и 6, то точки пересечения пар прямых 1—2 и 4—5, 2—3 и 5—6, 3—4 и 6—1 лежат на одной прямой MN» (рис. 13). Большое применение имеет теорема, которая впоследствии была переоткрыта *Паулем Гюльденом* (1577—1643), а потому и носит имя последнего: «Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг какой-нибудь лежащей в ее плоскости прямой, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной при вращении ее центром тяжести». Интересна предложенная и изученная Паппом спираль. Она описывается точкой, движущейся вдоль дуги четверти окружности, когда эта дуга вращается около диаметра. Из других теорем, доказанных Паппом, приведем еще такие: «Центр тяжести треугольника принадлежит также другому треугольнику, вершины которого лежат на сторонах данного и разделяют эти стороны в одном и том же отношении»; «Прямая, соединяющая противоположные концы параллельных диаметров двух кругов, имеющих внешнее касание, проходит через точку касания». Паппу приписывается также решение задачи о проведении через три точки, лежащие на одной прямой, трех прямых, образующих треугольник, вписанный в данный круг.

К числу александрийских ученых относится и алгебраист *Диофант*, живший, вероятно, в III в. Жил он 84 года. Последнее сведение почерпнуто из эпиграммы некоего *Метродора*, помещенной в так называемой «Греческой антологии». Содержание эпиграммы таково: «Диофант прожил $^1/_6$ своей жизни в детстве, $^1/_{12}$ в юности, следующую затем $^1/_7$ часть своей жизни был холостяком; через 5 лет после женитьбы у него родился сын, который умер на 4 года ранее своего отца и дожил до возраста, вдвое меньшего, чем лета его отца».

Диофант написал сочинение, названное им «Арифметика». Это сочинение резко отличается от известных нам других математических работ древних греков. Главное отличие заключается в том, что изложение его идет чисто аналитическим путем, хотя и вводится иногда геометрическая терминология. «Арифметика» Диофанта включает главным образом вопросы алгебры и теории чисел. Надо отметить, что Диофант не излагает обобщенных методов для решения тех или иных задач, а для решения каждого отдельного вопроса находит свой особый метод. Это выявляет огромные математические способности Диофанта, но сильно снижает научную ценность его труда. Из 13 книг «Арифметики» до нашего времени сохранилось только 6. В них Диофант рассматривает решение уравнений первой и второй степени, причем основное внимание обращает на неопределенные уравнения.

Алгебра Диофанта должна быть отнесена к так называемому периоду «синкопированной алгебры», то есть к тому времени, когда в алгебре переходили от чисто риторического изложения (то есть словесного) к использованию более кратких записей при помощи сокращенных слов и некоторых символов. Так, для изображения неизвестного числа Диофант вводит обозначение ϱ', а когда это неизвестное употребляется во множественном числе, то упомянутое обозначение удваивается. Для каждой степени неизвестного вводились соответствующие синкопированные обозначения. Для обозначения вычитания употреблялся знак ⋔, а для равенства — буква I. Уменьшаемое писалось ранее вычитаемого, а числовые коэффициенты — после неизвестных. Непосредственное следование одной записи за другой означало действие сложения.

Отрицательные числа Диофанту известны не были, но когда приходилось умножать разность двух чисел на разность двух других чисел, Диофант пользовался правилом: «отнимаемое число, будучи умножено на отнимаемое, дает прибавляемое, а будучи умножено на прибавляемое, дает отнимаемое». Профессор И. Г. Башмакова в комментариях к «Арифметике» Диофанта и в книге «Диофант» высказывает предположение, что «отнимаемые величины» Диофанта — отрицательные числа, а его знак (лейпсис) равносилен нашему минусу.

При решении уравнений Диофант признавал только положительные рациональные ответы, и притом для квадратного уравнения он всегда вычислял только один ответ, если уравнение имело два рациональных и положительных корня. Каким методом он решал квадратные уравнения, неизвестно, так как в сохранившихся до нашего времени книгах такого объяснения не дано. Для решения уравнения первой степени Диофант прибегал к приемам, описанным им следующим образом: «Если теперь в какой-нибудь задаче те же степени неизвестного встречаются в обеих частях уравнения, но с разными коэффициентами, то мы должны вычитать равные из равных, пока не получим одного члена, равного одному числу. Если в одной или в обеих частях есть члены вычитаемые, то эти члены должны быть прибавлены к обеим частям так, чтобы в обеих частях были только прибавляемые. Затем снова нужно отнимать равные от равных, пока не останется только по одному члену с каждой стороны». Таким путем Диофант достигал того, чего мы добиваемся перенесением известных членов в одну сторону равенства, а неизвестных — в другую, приведением подобных членов и делением на коэффициент при неизвестном. При этом надо отметить, что Диофант, как и все древние математики, избегал действия деления, заменяя его повторным вычитанием.

Приведем некоторые задачи, решенные Диофантом в его «Арифметике».

1. Требуется число 100 разделить два раза так, чтобы большая часть от первого деления была вдвое более мень-

шей части от второго деления и чтобы большая часть от второго деления была втрое более меньшей части от первого деления.

2. Найти два числа, отношение которых 3, а отношение суммы квадратов этих чисел к их сумме равно 5.

3. Найти три числа так, чтобы произведение любой пары их, увеличенное их суммой, равнялось бы соответственно 8, 15 и 24.

4. Некто купил вина двух сортов, из коих мера первого стоит 5 драхм, а второго 8. За все вино он заплатил известное число драхм, которое есть число квадратное. Число это, будучи прибавлено к 60, также дает квадрат. Корень квадратный из этого последнего числа равен числу купленных мер вина. Требуется узнать, сколько заплачено за каждый сорт вина.

5. Найти два числа, произведение которых, сложенное с каждым из данных чисел, составит куб некоторого числа.

Папп и Диофант были последними представителями александрийских математиков, внесших в математику новые идеи. В дальнейшем значение александрийских ученых снижается все более и более. Это объясняется как внутренними, так и внешними условиями работы в Александрийской школе. Государственный строй, в условиях которого развивались науки в Афинских и Александрийских школах, строй, основанный на рабском труде, не мог способствовать дальнейшему росту научных знаний. В первые годы существования Александрийской школы Птолемея были созданы весьма благоприятные условия для научной работы, так как это было выгодно для правящих классов: надо было создать сильное и богатое государство, приносящее и личную выгоду Птолемеям. Развитие техники военного дела, астрономии, географии, торгового дела и промышленности требовало и быстрого развития математики, а потому математика и имела все данные для своего роста и вширь и вглубь. Но когда материальные потребности правящих классов были удовлетворены достигнутыми успехами наук, то не стало и стимула для поощрения дальнейшего роста научных знаний. Таковы внутренние условия, вызвавшие упадок математических наук в Александрии. Кроме них, существовали и условия внешнего характера. Уже задолго до начала нашей эры Рим начал предъявлять притязания на территорию, на которой была расположена Александрия. В 47 г. до н. э., во время войны Юлия Цезаря против Александрии, значительно пострадала от огня ее замечательная библиотека. Затем она была восстановлена, но когда Рим окончательно овладел Александрией, началась жестокая вражда между христианами и язычниками. Религиозная рознь повлияла и на науку, так как, во-первых, в нее стала проникать христианская мистика (что отразилось, например, на творениях Никомаха), а, во-вторых, христианские фанатики стали преследовать все языческое, в том числе и «языческую» науку. По приказанию патриарха *Теофила* в 391 г. в Александрии был разрушен храм бога Сераписа, а вместе с храмом погибла и библиотека. Дни Александрийской школы были сочтены.

Учеными, завершившими плеяду математиков Александрийской школы, были *Теон* (IV в.) и его дочь *Гипатия* (370—415).

Теон проделал большую работу, комментируя труды Евклида и Птолемея. Что же касается Гипатии, то, по отзывам историков, она обладала большими знаниями в области математики и философии и комментировала труды Архимеда, Диофанта и Аполлония. Она является первой известной в истории математики женщиной-математиком. Ей принадлежат также философские труды по толкованию Платона, Аристотеля и других греческих философов. До нашего времени не сохранилось ни одного из трудов Гипатии. Высокая ученость и красноречие, которыми обладала Гипатия, ее деятельное участие в общественных делах города создали ей популярность в Александрии, но вместе с тем вызвали ненависть христианских религиозных фанатиков к ученой «язычнице». В 415 г. она по подстрекательству епископа Кирилла была растерзана толпой христианских изуверов. Последователи и ученики Гипатии, которым удалось спастись от преследования, бежали в Афины.

Таков был конец Александрийской математической школы.

Последний кратковременный расцвет математических наук в Греции отмечается в V—VI вв. в Афинах. Афинская школа этой эпохи занималась главным образом толкованием работ математиков прежних веков: Евклида, Архимеда и др. Но и эта школа в 529 г. была закрыта по распоряжению императора *Юстиниана* как «языческая мерзость».

Из приведенного выше очерка развития математических знаний в Древней Греции можно увидеть, что за более чем полуторатысячелетний период времени математическая наука в Греции имела значительные достижения. Это относится главным образом к элементарной геометрии, которая в трудах Фалеса, Пифагора, Платона и в особенности Евдокса, Евклида и Архимеда приобрела то содержание, которое сохраняется и в настоящее время. Греческие математики сумели дать ей вполне научную основу и строгое систематическое изложение теории. От греков мы получили и основы всей геометрической терминологии. Что же касается других разделов математики (арифметики, алгебры и тригонометрии), то в них были заложены некоторые научные основы, но полного развития эти разделы у греков не получили. Как мы видели ранее, греки в своих арифметических исследованиях отрывались от практического счета, строго отделяя арифметику от логистики, и это в значительной мере тормозило развитие арифметики, так как никакая наука не может развиваться в отрыве от практики. Развитию алгебры препятствовало то, что еще недостаточно вошли в употребление символические записи, намек на которые мы впервые встречаем в трудах Диофанта, пользовавшегося лишь отдельными символами и сокращениями. Свое значение алгебра приобрела много позднее, когда в связи с развитием символики смогла помочь и практическим расчетам, и научным обобщениям. Тригонометрия же в Греции не получила самостоятельного значения, а являлась лишь вспомогательным вычислительным аппаратом для астрономических наблюдений.

Однако если рассматривать развитие в Древней Греции элементарной математики в целом, то мы должны признать, что обязаны грекам очень большими достижениями на этом пути.

МАТЕМАТИКА В ДРЕВНЕМ РИМЕ И ЭПОХА УПАДКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ЕВРОПЕ

Сравнив ход развития математических идей в Греции с состоянием математики у ее ближайшего соседа — Римского государства, мы увидим, что за весь период времени, рассмотренный нами, в Риме не было создано почти ничего, что можно было бы расценить как значительный вклад в математику. Математика у римлян использовалась только для практических целей и при этом носила характер грубо приближенных вычислений.

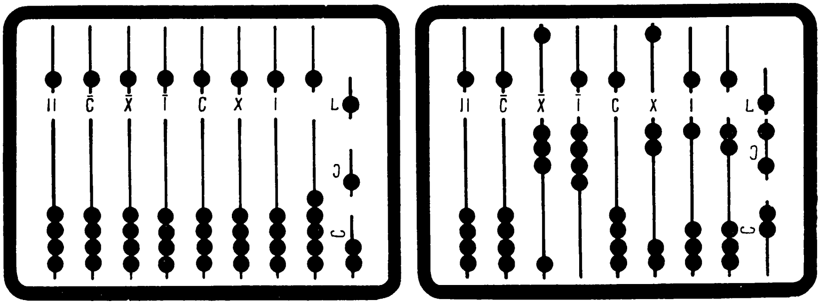
Метод записи чисел заимствован римлянами у древних этрусков.[1] Эта запись не давала возможности производить даже простейшие арифметические операции. В ней сохранились следы пятеричной системы счисления, и числа выражались при помощи букв, а именно числа 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 обозначались соответственно буквами I, V, X, L, C, D и M. Для более крупных чисел (10 000, 100 000, 1 000 000) существовали особые знаки. Для обозначения нуля знака не было. Римляне не пользовались поместным значением цифр. В записях они придерживались принципа сложения и вычитания: числа, написанные справа, прибавлялись, а числа, написанные слева, вычитались от числа, написанного рядом с ними. Так, IX, XII, XC и CXXX означали соответственно 9, 12, 90 и 130. Римская запись чисел используется в наше время в тех случаях, когда надо записать какое-либо строго зафиксированное число, над которым не придется производить никаких арифметических операций: римскими цифрами у нас часто отмечается дата постройки памятника или здания, век, в течение которого произошло какое-нибудь историческое событие, главы в книге, порядковый номер класса в школе или календарного месяца, цифры на циферблате часов и т. п.

Вследствие затруднительности вычислений при римском способе записи для выполнения таковых римляне прибегали к помощи пальцевого счета или абака. Абак употреблялся в таком виде, в каком он был распространен в Греции, а иногда применялся и более усовершенствованный его вид. Об усовершенствованном абаке мы можем судить по тому экземпляру, который хранится с древних времен в Неаполитанском музее.

Этот абак представляет собой металлическую доску с желобками, вдоль которых могут передвигаться жетоны; жетоны играют роль камешков, употреблявшихся в греческом абаке. Продольных желобков девять, причем семь из них дают возможность отсчитывать единицы, десятки, сотни, тысячи, десятки тысяч, сотни тысяч и миллионы. Разряды единиц укрупняются при переходе от правых желобков к левым, как это можно видеть на рисунке. Два же самых правых желобка дают возможность вести отсчет дробных долей. Желобки для целых чисел разделяются на две части: в верхней помещен

---

[1] Этруски — римское название одного из племен Древней Италии.



АБАК

один жетон, а в нижней — четыре. Верхний жетон заменяет пять нижних. Второй желобок справа тоже разделен на две части и дает возможность отсчитывать двенадцатые доли, причем верхняя его часть содержит один жетон, а нижняя — пять. Самый правый желобок разделен на три части, из которых верхняя дает отсчет 24-х долей, средняя 48-х и нижняя — 72-х. На правом чертеже представлен отсчет, равный 84 071+2/12+1/48+2/72.

В начале VI в. счет на абаке был значительно усовершенствован римским философом *Аницием Боэцием* (ок. 480—524). Им были введены жетоны с нанесенными на них числовыми знаками. Это продвинуло искусство счета на абаке и вместе с тем впоследствии помогло развитию письменной нумерации.

Как видно уже из устройства абака, римляне применяли при счете двенадцатеричные дроби. Это объясняется тем, что при практическом счете наиболее часто встречаются доли, полученные в результате деления единицы на 2, 3, 4 и 6, а эти доли легко выражаются при помощи двенадцатеричных дробей. При этом дроби $^2/_{12}$, $^3/_{12}$, $^4/_{12}$, ..., $^{11}/_{12}$ имели каждая особое название, и при вычислениях с ними обращались, как с именованными числами, что значительно облегчало всякого рода расчеты. Общность обращения с дробями и именованными числами у римлян объясняется самим происхождением наименований дробей. Основная денежная единица римлян «асс» разделялась на двенадцать равных частей, из которых каждая именовалась «унцией»; это название перешло к дроби, равной $^1/_{12}$, а другие упомянутые дроби частично получили свое наименование в зависимости от соотношения с унцией; например, $^5/_{12}$ именовались «квинтункс», $^7/_{12}$ — «септункс» и т. д.

Что касается развития геометрических понятий, то в этом отношении римляне отстали от своих соседей — греков. В то время, когда у греков геометрия получила уже строго научное оформление, у римлян геометрические понятия ограничивались практическими сведениями, необходимыми архитекторам и землемерам, и очень недалеко ушли в своем развитии от древнеегипетских. Как архитекторам, так и землемерам приходилось иметь дело лишь с самыми простейшими геометрическими образами. Так, земляные угодья у римлян подразделялись на прямоугольные и прямолинейные участки; при городском строительстве стенами обводились квадратные участки, размеры которых заранее определялись; городские улицы располагались по параллельным направлениям. Все это значительно облегчало необходимые расчеты и позволяло пользоваться приближенными формулами, аналогичными тем, какие были в употреблении у египтян. Римские землемеры часто при определении площади земельного участка ограничивались измерением его периметра, ошибочно полагая, что равные периметры соответствуют равным площадям. Основным землемерным инструментом служил прибор, похожий на современный эккер; он представлял собой две скрещивающиеся под прямым углом линейки, снабженные отвесами и прикрепленные к деревянному колу, втыкаемому вертикально в землю, причем линейки располагались в горизонтальной плоскости. Этот прибор назывался грома (groma), а потому и землемеры часто назывались громатиками.

Надо отметить, что в Риме математика никогда не поднималась на большие высоты. Мы знаем, что семь веков спустя после Евклида математика в Риме стояла еще на очень низком уровне развития. А после падения Александрийской школы и закрытия в 529 г. математической школы в Афинах во всей Европе наступила эпоха упадка математических знаний; эпоха, в течение которой математические науки не только не развивались, но снизились до уровня математических сведений самых отдаленных веков. В эту эпоху в Риме начало распространяться христианство как религия рабов, дающая им утешение в их тяжелой судьбе обещанием счастливой загробной жизни. Христианство как религия, учившая смирению и непротивлению злу, было выгодно правящим классам. С IV в. и римские императоры начинают принимать христианство, которое становится в дальнейшем господствующей религией.

В связи с распространением христианства возгорается жестокое преследование языческой культуры и науки. Христианство, призывавшее к отречению от всех реальных благ жизни, яростно противилось распространению знаний о природе и человеке. В частности, наибольшему гонению подвергалась математика, поскольку ее часто смешивали с астрологией и числовой мистикой, имевшими источником языческие верования. Поэтому нам не приходится удивляться тому обстоятельству, что запрещение математики проникло даже в законодательство. Так, в кодексе римского императора IV в. *Феодосия* мы находим такую статью: «Пусть никто не советуется с гадателями и математиками», а в кодексе императора *Юстиниана* (VI в.) был закон «О злодеях, математиках и тому подобных», который гласил: «Совершенно воспрещается достойное осуждения искусство математики».

Со времени распространения христианства последним прибежищем для науки средневековья оказались монастыри, где сосредоточились и типичные для этой эпохи монастырские школы; там же были собраны и важнейшие рукописи античных ученых. Но математические рукописи античных ученых не интересовали монахов. В монастырях изучались лишь те науки, которые были необходимы служителям религиозного культа. Особое значение имели риторика, грамматика и диалектика, объединенные общим названием «тривиум», что означает «трехдорожье», то есть науки, помогающие искусно и убедительно говорить проповеди и воздействовать на людей словом в нужном для христианской церкви направлении. В своих мистических и религиозных философствованиях монахи доходили до самых нелепых выводов и все эти измышления излагали как научные труды. В качестве писчей бумаги для своих записей они часто использовали фолианты трудов древних ученых, в частности и математиков. Научные работы античных авторов выскабливались, и на их место записывались «творения святых отцов». В результате многие замечательные труды были утеряны для потомства, а некоторые из них спасены лишь благодаря успехам современной техники, позволяющей восстанавливать рукописи, которые, казалось, были совсем уничтожены соскабливанием и наслоением новых записей. Однако в конце концов оказалось, что математика понадобилась даже и для церкви, так как и здесь был необходим элементарный счет; появилась также потребность определять день христианского праздника пасхи, который отмечался в каждое первое воскресенье после весеннего равноденствия и полнолуния. Решение этой задачи имело большое значение для церковников и являлось в те времена чуть ли не главным стимулом для изучения начал астрономии и математики. Поэтому к прежнему «тривиуму» присоединяется еще «квадривиум», то есть «четырехдорожье», содержащий науки математического характера: арифметику, геометрию, астрономию и музыку.

Более или менее заметных сдвигов в развитии математики в Европе мы не находим вплоть до XII в. За весь период с VII по XII в. мы можем назвать лишь несколько лиц, о которых можно сказать, что они имели какое-то отношение к математике.

Так, англосаксонский ученый монах *Беда Достопочтенный* (672 или 673 — ок. 735) в сочинении «Способ счисления времени» излагал методы вычисления «пасхалий» (то есть дней празднования пасхи), а в другом сочинении касался актуального для того времени вопроса о счете при помощи пальцев. Но во всех своих сочинениях он почти не упоминал о дробях и избегал деления целых чисел.

В год смерти Беды в Ирландии родился другой англосаксонский математик — *Алкуин* (ок. 735—804). Им был составлен задачник по математике, который надо считать родоначальником развлекательных книг по математике. В нем встречались остроумные задачи, некоторые из них дошли до нашего времени, причем встречались задачи не только на вычисление, но и на соображение. Со времен Алкуина в задачниках появляются задачи на бассейны и трубы, вливающие в них воду и опоражнивающие их. В этом же сочинении находится и задача юридического характера, заимствованная автором у Боэция. Содержание ее таково: «Некто, умирая и оставляя жену в ожидании ребенка, завещал, чтобы его имущество было разделено таким образом: если родится сын, то выдать две трети имущества сыну, а одну треть вдове, а если родится дочь, то выдать две трети вдове и одну треть дочери. После смерти завещателя у его жены родилась двойня: сын и дочь. Как поделить наследство?» Имеются в задачнике и задачи на погоню, примером которых может служить следующая: «Собака догоняет кролика, находящегося впереди нее на 100 футов. Собака пробегает 9 футов, когда кролик —

7 футов. Сколько футов должна пробежать собака, чтобы догнать кролика?» Там приведена и общеизвестная задача о волке, козе и капусте. «Крестьянин желает переправиться через реку, имея при себе волка, козу и капусту. Для переправы он может использовать только небольшую лодочку, в которой он может поместиться сам и прихватить с собой или волка, или козу, или капусту. Как ему переправиться на другую сторону реки так, чтобы на одном берегу реки не оставались без него одновременно волк с козой или коза с капустой, потому что волк может съесть козу, а коза капусту?» Среди других задач Алкуина находится и задача об определении суммы членов арифметической прогрессии при помощи установления равенства сумм членов, равноотстоящих от начала и конца.

Большинство задач требовало применения только целых чисел и первых четырех арифметических действий над ними. Встречались и задачи, приводящие к решению простейших уравнений первой степени.

В геометрической части задачника применялись неточные формулы для вычисления площадей треугольников и четырехугольников, бывшие в употреблении еще у египтян.

В X в. можно отметить деятельность в области математики француза *Герберта* (год рождения неизвестен — умер в 1003). Им было написано сочинение по геометрии, которое содержало самые элементарные сведения. Но главные работы Герберта посвящены усовершенствованию методов счета на абаке, что сделало абак настолько распространенным счетным прибором в X и XI вв., что в методах применения математического счета даже образовалось особое течение, сторонников счета на абаке стали называть а б а ц и с т а м и.

Математиками XI в. написано немало различных сочинений по вопросам арифметики и геометрии, но все они основаны на принципах, не дающих ничего нового по сравнению с уже имеющимися, а потому не представляют для нас особого интереса.

Отмечая крайний упадок математических знаний в Западной Европе с V по XII в., мы должны в то же время заметить, что в ту же эпоху математика получила значительное развитие в странах Востока — в Индии и на Ближнем Востоке.

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В ИНДИИ В СРЕДНИЕ ВЕКА

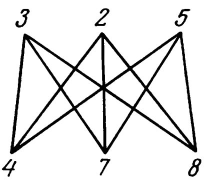
Документальные данные и свидетельства историков дают мало указаний, по которым можно было бы судить о том, насколько общение между Грецией и Индией способствовало обмену научными знаниями между народами этих государств. В отдельных случаях можно было бы заметить влияние греческой науки на развитие научных знаний в Индии, но, несомненно, было и обратное влияние. Тем не менее это взаимное воздействие в общем ходе развития математических знаний было, очевидно, такого характера, что не подавляло индивидуальных творческих способностей ни одного из народов и каждый народ шел в этом отношении по своему пути. Как увидим из дальнейшего, эти пути у греков и индийцев во многом расходились. Если у греков преимущественное развитие получила геометрия, то у индийцев, наоборот, превалирующее значение имели арифметика, алгебра и тригонометрия. Не исключена возможность, что сведения по геометрии индийцы заимствовали у греческих авторов и в особенности у Герона и некоторых других ученых Александрийской школы. С другой стороны, существует предположение, что Диофант в основу своего труда по алгебре положил соображения, заимствованные им у индийцев. Но, как бы там ни было, с уверенностью можно утверждать, что в математических трудах греки придерживались строго логического изложения и мало заботились о практическом применении выводов, получаемых из дедуктивных теорий геометрии, а индийцы, наоборот, не добивались строгих доказательств, а главным образом развивали практический счет.

В особенности ценный вклад внесен индийцами в арифметику. В этом отношении математика обязана индийцам упорядочением числовой записи при помощи введения цифр для десятичной системы счисления и установления принципа поместного значения цифр. Кроме того, в Индии получило распространение употребление нуля для указания отсутствующих разрядных единиц, что тоже сыграло большую роль в усовершенствовании числовых записей и облегчении операций над числами.

В каком веке и при каких обстоятельствах получили в Индии широкое распространение цифровые знаки, мы не знаем, но можно с уверенностью сказать, что цифровые знаки и применение нуля были известны *Ариабхате* (476 — год смерти неизвестен), индийскому математику и астроному V—VI вв., написавшему сочинение под названием «Ариабхатиам». В первой главе этого сочинения Ариабхата употребляет цифровые знаки. Хотя эти знаки и не совпадают по очертаниям с современными цифрами, но все же имеют с ними в некоторых случаях большое сходство. Так, например, очень походили на современные цифры индийские знаки, изображавшие единицу, семерку и нуль. Остальные знаки в течение многих веков, отделяющих нас от времени их происхождения, сильно видоизменились. Впрочем, и в самой Индии в различных местах начертание цифр было различно. Некоторые данные указывают на то, что цифровые знаки в Индии появились ранее изобретения нуля и введения принципа поместного значения цифр. К этому убеждению нас приводит то обстоятельство, что на Цейлоне употреблялись те же цифры, что и в Индии, но в то же время там отсутствовал нуль и не соблюдался принцип поместного значения цифр.

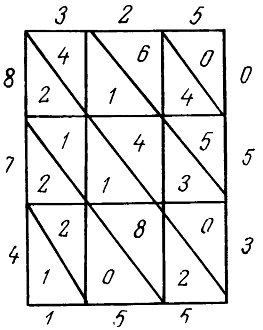
Введение нуля, цифр и принципа поместного их значения облегчило вычислительные операции над числами, а потому арифметические вычисления и получили в Индии значительное развитие. Главное преимущество введения индийцами методов записи чисел заключается в том, что они значительно уменьшили количество цифр, применили позиционную систему к десятичному счету и ввели в употребление знак нуля. В то время как у греков, евреев, сирийцев и т. д. для записи чисел употреблялось до 27 различных цифровых знаков, у индийцев число таких знаков снизилось до 10, включая и обозначение нуля. Что касается позиционной системы, ее зачатки были еще у вавилонян, но там эта система применялась для шестидесятеричного счета, а индийцы ввели ее для десятичного. Наконец, применение знака для нуля при позиционной системе дало большое преимущество перед записью чисел у вавилонян. Так, например, у вавилонян значок ▼ мог обозначать и единицу, и $^1/_{60}$, и вообще любое число вида 60^n, а в записи у индийцев знак 1 мог обозначать только единицу, так как для обозначения десятка, сотни и так далее после единицы записывалось соответствующее число нулей.

Процесс записи чисел и проведение арифметических операций над ними делались индийцами на белой доске, засыпанной красным песком. Орудием для записи служила палочка. Таким образом, при записи на красной поверхности появлялись белые знаки, прочерченные палочкой. Индийские способы записи были гораздо сложнее современных, но зато у индийцев почти для каждой операции имелось по нескольку методов выполнения. Некоторые из них были очень остроумны и практичны. В особенности интересны некоторые методы умножения. Они с успехом могли бы применяться и в наше время ввиду их экономичности и методического значения для уяснения процесса счета в школах. Приведем в качестве примера два случая умножения. Первый способ, издавна именуемый «умножением крестиком», самими индийцами назывался «молниеносным умножением», так как, пользуясь им, индийцы производили умножение с чрезвычайной быстротой. Он основан на том соображении, что при умножении двух чисел единицы произведения могут получиться только от перемножения единиц, десятки — от умножения десятков на единицы, сотни — от умножения десятков на десятки и сотен на единицы, тысячи — от умножения сотен на десятки и тысяч на единицы и т. д. Это и давало возможность писать сразу, без частных произведений, окончательный ответ, объединяя при счете все единицы, все десятки, все сотни и т. д. Если же соединить прямыми линиями те числа, которые приходилось для этого перемножить, то при записи получался ряд крестиков, от которых и получил свое наименование сам способ умножения. Так, при умножении 325 на 478 получим запись:



155350

Другой способ умножения, применявшийся индийцами, именуется нами «умножение в клеточку». Он заключался в следующем: чертилась сетка с квадратными клетками, имевшая столько столбцов, сколько цифр во множимом, и столько строк, сколько цифр во множителе. Над сеткой писалось множимое, а с левой стороны от нее — множитель, строго по одной цифре против каждой клетки сетки, причем множитель писался снизу вверх. Затем проводились диагонали квадратных клеток. Каждый разряд множимого умножался на каждый разряд множителя и частные произведения писались в соответствующих клетках, лежащих на пересечении соответствующих цифрам множимого и множителя столбца и строки, причем если произведение получалось двузначное, то высший разряд записывался под диагональю, а низший — над диагональю. Результат получался, когда складывались между собой числа в диагональном порядке, причем ответ писался под нижней и правой стороной сетки соответственно против той диагонали, по которой производилось сложение. Ниже приведен пример умножения 325 на 478.



В Индии существовала и символическая запись, переживавшая первый этап своего формирования — этап синкопированных записей. На этом этапе мы не встречаем еще алгебраической символики в нашем понимании этих слов, но все же мы видим, что индийцы ушли далеко вперед от алгебры риторической и при записях пользовались сокращенными обозначениями. Так, вместо слова «пхалам», выражавшего равенство, записывалось только «пха»; сложение, выражаемое словом «йута», записывалось начальным слогом «йу»; вычитание — при помощи крестообразного знака, изображавшего первую букву слова «канита» — уменьшаемое; деление — слогом «бха», начальными буквами слова «бхага». Вторая степень обозначалась слогом «ва» от слова «варга», означавшего собрание одинаковых вещей, а третья степень — слогом «гха» от слова «гхана», которое означало — «тело». При помощи этих двух обозначений «ва» и «гха» изображались и более высокие степени чисел: «ва ва» — четвертая степень; «ва гха гхата» — пятая степень; «ва гха» — шестая степень; «ва ва гха гхата» — седьмая степень; «ва ва ва» — восьмая степень; «гха гха» — девятая степень и т. д.

Для умножения особого знака не существовало, а множители записывались рядом. Дроби изображались подобно тому, как мы записываем их в настоящее время: числитель ставился над знаменателем, но черты между ними не было; если записывалось смешанное число, то целая часть помещалась над числителем дробной, и запись получалась уже в три яруса. Известное число называлось «рупака» и обозначалось слогом «ру», а неизвестное — «йаваттават», обозначалось слогом «йа». Если встречалось несколько неизвестных, то их различали по цвету: белая, зеленая, желтая и т. д., и к знаку неизвестного добавлялся еще знак, представлявший начальный слог названия соответствующего цвета. Квадратный корень имел обозначение «ка» от слова «карана» — «невыразимый, иррациональный». Когда записывалось действие и его результат, то числа, над которыми производилось арифметическое действие, помещались внутри прямоугольника.

Покажем на примерах, в каком порядке записывались у индийцев упомянутые выше обозначения. Дробь $\frac{2}{3}$ имела такой вид: $\begin{matrix}2\\3\end{matrix}$, а число $3\frac{1}{2}$ записывалось так: $\begin{matrix}3\\1.\\2\end{matrix}$ Наша запись $5+7=12$ выражалась следующим образом:

$$\boxed{\begin{matrix}5 & 7\\ 1 & 1\text{йу}\end{matrix}}\quad \text{пха}\ \ 12$$

Запись умножения $\frac{3}{4}$ на 24 можно представить в следующем виде:

$$\boxed{\begin{matrix}3 & 24\\ 4 & 1\end{matrix}}\quad \text{пха}\ \ 18$$

При записи уравнения левая и правая части его ставились на разных строчках, одна под другой. Так, например, в труде индийского астронома и математика *Брахмагупты* (ок. 598—660) мы находим запись, которую можно передать так:

йа ва 0 йа 10 ру 8;
йа ва 1 йа 0 ру 1.

Эта запись расшифровывается следующим образом:

$$0x^2+10x-8=1x^2+0x+1.$$

В вышеприведенной записи мы видим несколько иную символику, чем та, которая была нами описана. Это объясняется тем, что у более поздних индийских авторов были введены еще некоторые упрощения. Так, для указания вычитания стали употреблять точку над вычитаемым, для обозначения сложения помещали слагаемые рядом, а умножение сопровождали слогом «бха», заменяющим слово «бхавита» — умножение; деление же стали обозначать помещением делимого над делителем.

Выработанная индийцами символика немало способствовала развитию в Индии начал алгебры. При этом возможности практического алгебраического счета у индийцев значительно превосходили те, которые давала алгебра греков, в том числе и алгебра Диофанта. Большим достижением индийской алгебры было введение отрицательных чисел, которые индийцы употребляли, когда вопрос касался наличного капитала и долга, а также движения в противоположные стороны. Вводя в учение о числах новые элементы, индийцы оперировали с отрицательными числами так же, как и с положительными. Они не избегали и чисел иррациональных, и когда эти числа появлялись при практических вычислениях, то ими оперировали, как и числами рациональными, не вдаваясь в глубокие размышления об их природе и сущности. Таким образом, в Индии теоретические обоснования алгебраических понятий и операций не имели места, но широкое распространение и применение алгебраического счета позволило расширить методы алгебраических вычислений.

Индийские ученые решали уравнения первой и второй степеней. Одним из методов, применявшихся ими при решении арифметических задач и уравнений первой степени, был метод инверсии (обращения). Сущность его такова: задача решалась с конца, то есть исходным числом для решения задачи являлось то, которое получалось в результате операций над неизвестным числом. Инверсия заключалась в том, что над этим числом проделывались действия, обратные тем, которые были произведены по условию задачи над неизвестным числом, и таким образом можно было найти искомое число. Метод инверсии изложен в сочинении Ариабхаты, но это изложение очень лаконично и для непосвященного может быть непонятно.

«Умножение становится делением,— пишет Ариабхата,— деление становится умножением; прибыль обращается в убыток, убыток — в прибыль; инверсия».[1] Пример задачи на решение методом инверсии мы находим у *Бхаскары* (1114 — умер позднее 1178). Вот эта задача: «Прекрасная дева с блестящими очами, скажи мне, ты, которая знаешь, как правильно применять метод инверсии, как велико число, которое, будучи умножено на 3, затем увеличено на 3/4 этого произведения, разделено на 7, уменьшено на 1/3 частного, умножено само на себя, уменьшено на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10 дает число 2?» Согласно методу инверсии, решение этой задачи протекает в таком порядке:

$$2\cdot 10=20;\ 20-8=12;\ 12^2=144;\ 144+52=196;$$

$$\sqrt{196}=14;\ 14\cdot\frac{3}{2}=21;\ 21\cdot 7=147;\ \ 147\cdot\frac{4}{7}=84;\ 84:3=28.$$

Другой метод, имевший применение у индийцев при решении уравнений первой степени с одним неизвестным, носил название «метод ложного положения». В этом случае неизвестному числу придавалось любое значение и над ним производились все действия, указанные в условии. Если результаты вычислений давали правильный ответ, то, следовательно, неизвестное число равнялось произвольно приданному ему значению, а если ответ получался больше или меньше правильного, то следовало приданное неизвестному числу значение увеличить или уменьшить во столько раз, во сколько увеличился или уменьшился ответ. Например, при решении такой задачи: «Поделить 264 денежные единицы на четверых так, чтобы второй получил в два раза более первого, третий — в три раза более второго, а четвертый — в четыре раза более третьего»,— можно было долю первого принять за любое число, например за 2 единицы; тогда второй должен получить 4 единицы, третий — 12 единиц и четвертый — 48 единиц. Общая сумма в этом случае равна 66 вместо 264 по условию задачи. Следовательно, получен ответ в четыре раза меньше данного в задаче, и значение неизвестного не равно 2, а в четыре раза больше, то есть неизвестное равно $2\cdot 4=8$.

При решении квадратных уравнений индийцы имеют перед Диофантом то преимущество, что они признают существование

---

[1] Кэджори Ф. История элементарной математики. Одесса, 1917. с. 106—107.

двух корней такого уравнения. Например, Бхаскара при решении уравнения $x^2-45x=250$ дает ответы 50 и -5, но добавляет, что второе значение в этом случае не следует брать, оно не подходит, так как никто не одобряет отрицательных корней. В сочинениях Бхаскары мы находим и такие соображения относительно отрицательных чисел: квадрат отрицательного числа всегда положителен, а корень квадратный из отрицательного числа не существует. Вместе с тем Бхаскара признает, что корень квадратный из положительного числа имеет два значения. Еще задолго до Бхаскары, в сочинениях Брахмагупты мы встречаем разъяснение, как производить сложение и вычитание отрицательных чисел. Разъяснение Брахмагупты сводится к следующему: «Сумма двух «имуществ» есть «имущество», сумма двух «долгов» — «долг»; сумма «имущества» и «долга» равна их разности, если же они равны, то она есть нуль. Сумма нуля и «долга» есть «долг», а сумма нуля и «имущества» — «имущество»; сумма двух нулей есть нуль. «Долг», вычитаемый из нуля, становится «имуществом», а «имущество» — становится «долгом». Если нужно вычесть «имущество» из «долга» или «долг» из «имущества», то берут их сумму». Для того чтобы отличить положительное число от отрицательного, над этими числами ставились стрелки, обращенные в противоположные стороны.

Что касается иррациональных чисел, то, оперируя ими, как с числами рациональными, индийцы сумели получить довольно сложные зависимости. Так, им были известны соотношения, которые в наше время выражаются формулами:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}.$$

Для извлечения квадратных и кубических корней индийцы применяли формулы, выражающие квадрат суммы и куб суммы двух количеств.

Задачи на квадратные уравнения часто связывались с геометрическими образами и требовали применения теоремы Пифагора. Все задачи обычно составлялись в стихотворной форме (как полагают, для лучшего запоминания). Рассмотрим две такие задачи, заимствованные из сочинений Бхаскары.

«Задача о тополе. На берегу реки рос тополь одинокий. Вдруг ветра порыв его ствол надломал. Бедный тополь упал, и угол прямой с течением реки его ствол составлял. Запомни теперь, что в том месте река лишь в 4 фута была широка. Верхушка склонилась у края реки. Осталось 3 фута всего от ствола. Прошу тебя, скоро теперь мне скажи: у тополя как велика высота?»

Задача о пчелках

Есть кадамба цветок;
На один лепесток
Пчелок пятая часть опустилась.
Рядом тут же росла,
Вся в цвету семендга,
И на ней третья часть разместилась.
Разность их ты найди,
Трижды их ты сложи,
На кутай этих пчел посади.
Лишь одна не нашла себе места нигде,
Все летала то взад, то вперед и везде
Ароматом цветов наслаждалась.
Назови теперь мне,
Подсчитавши в уме,
Сколько пчелок всего здесь собралось?

Много внимания уделяли индийцы и неопределенным уравнениям. При этом для решения уравнения вида $ax+by=c$ они применяли метод, по существу аналогичный методу Эйлера. Эйлер в таких случаях прибегал к разложению в непрерывную дробь числа $\frac{a}{b}$, индийцы же — к последовательному делению. Индийцы решали и более сложные случаи неопределенных уравнений. Так, мы встречаем у них решение уравнений вида $xy=ax+by+c$ и $y^2=ax^2+b$.

Наиболее значительными в области геометрии у индийцев надо считать работы Брахмагупты. Но и здесь мы не находим достаточной строгости. Основными проблемами, разрешенными Брахмагуптой, были такие: определение площади треугольника по данным сторонам и радиусу описанного круга; построение треугольника, у которого стороны, радиус описанного круга и площадь выражаются числами рациональными; по сторонам вписанного в круг четырехугольника вычисление его диагоналей, площади, высот и некоторых других отрезков, связанных с этим четырехугольником. При вычислениях Брахмагупта принимал отношение длины окружности к диаметру равным $\sqrt{10}$.

В позднейшие времена, например в трудах Бхаскары, относящихся к XII в., решение вопросов геометрического характера было заимствовано у Брахмагупты. Бхаскара предпочитал строгим доказательствам наглядность, поэтому некоторые

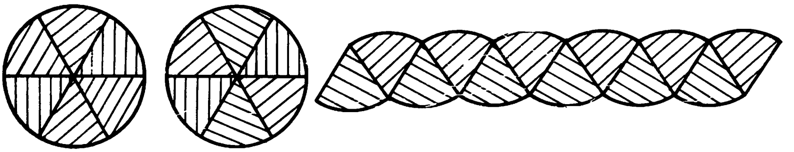


Рис. 14

доказательства Бхаскары, а также других индийских авторов, пользовавшихся наглядными представлениями вместо строгих доказательств, для нас представляют лишь ту ценность, что мы можем их использовать в школах для иллюстрации геометрических соотношений. Так и сейчас в школах в качестве методического пособия используется так называемый «индийский круг». Он употребляется для определения площади круга по известной длине окружности. Для этого два равных круга делятся на равное число равных секторов. Затем круги разрезаются по радиусам, ограничивающим секторы, причем линия окружности сохраняется целой, и оба круга развертываются путем выпрямления линии окружности и вкладываются один в другой, как это указано на рис. 14. При этом получается фигура, близкая к параллелограмму (она тем меньше отличается от параллелограмма, чем больше число делений кругов на секторы). Основанием полученного параллелограмма служит длина окружности, а его высотой — радиус круга. Так как площадь полученного параллелограмма равна произведению длины окружности на радиус, то площадь одного круга равна половине этого произведения. Если радиус круга r, то длина окружности будет равна $2\pi r$, площадь параллелограмма $2\pi r^2$, а площадь круга πr^2.

Интересны также индийские доказательства теоремы Пифагора. Они содержат лишь чертеж и надпись: «Смотри!» (рис. 15, *а, б*).

Говоря об индийских ученых Ариабхате, Брахмагупте и Бхаскаре, мы все же должны отметить, что математика не была их специальностью. Они занимались главным образом астрономией и вследствие этого пользовались в качестве подсобного вычислительного аппарата тригонометрическими соотношениями.

Это обстоятельство имело большое значение для развития в Индии тригонометрии, и здесь индийцы далеко опередили

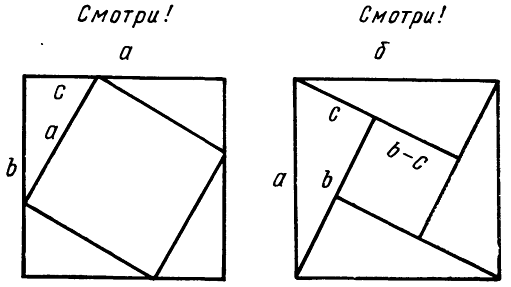


Рис. 15

греков. Уже в самом способе подразделения окружности и диаметра на части мы наблюдаем у индийцев значительный прогресс по сравнению с тем, что мы видели у Птолемея. Если индийцы и разделяли окружность, как Птолемей, на 360 основных частей, то диаметр делился ими на 6876 частей. Это число получалось так: окружность делилась на $60 \cdot 360 = 21\,600$, а диаметр считался в 3,1416 раза менее окружности, следовательно, он содержал $\frac{21\,600}{3,1416}$ делений, что приближенно равно 6876. Такое подразделение надо считать прогрессивным потому, что в нем заметно понимание индийцами возможности сравнивать между собой по длине ду́ги и отрезки прямых линий. Притом индийцы гораздо точнее определяли отношение длины окружности к диаметру, чем вавилоняне и Птолемей.

Кроме того, индийцы в своих вычислениях употребляли уже три тригонометрические величины, или правильнее линии: одна соответствовала нашему синусу, другая — косинусу и третья — вышедшему ныне из употребления обращенному синусу (sinus versus) [1], который представлял собой $1 - \cos\alpha$.

[1] В дальнейшем обозначается sinvers α.

Таким образом, индийцы употребляли уже не полную хорду, а полухорду, то есть линию синуса. Полная хорда, стягивающая дугу AB (рис. 16), называлась у индийцев «джива», что означает тетива лука. AC — полухорда (то есть наша линия синуса) называлась «архаджива». В арабской транскрипции слово «джива» писалось как «джиба», затем его стали записывать как «джайб», что по-арабски имеет уже совсем иной смысл, а именно: «пазуха». Это слово и было впоследствии переведено на латинский язык как sinus (пазуха), и таким образом этот неподходящий термин вошел в научный обиход.

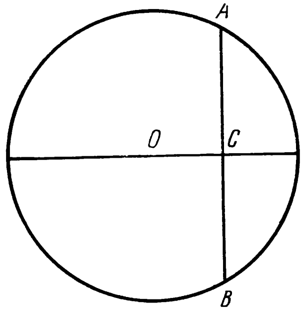


Рис. 16

У индийцев мы встречаем таблицу полухорд, данную для углов через каждые 3°45′. Для вычисления полухорд индийцы брали за основу стороны правильных вписанных многоугольников, длина которых легко выражалась через длину радиуса описанного круга, принимаемую за 3 438. Тогда синус 90° тоже равнялся 3 438, а синус 30°, равный половине хорды, стягивающей дугу в 60°, выражался через 1 719 и т. д.

Известны были им и некоторые соотношения между тригонометрическими величинами, которые позволяли уточнять вычисления. Так, например, они знали соотношения, которые можно представить формулами: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\operatorname{sinvers} 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, а также выражение для синуса суммы и разности двух дуг. Из соотношения $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2$ они получали $\sin 45° = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = 2431$; $\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3r^2} = 2978$.

Исходя из найденных синусов для дуг 90°, 60°, 30° и пользуясь выражением величин для половинного угла, индийцы вычисляли значения синусов для углов $22\frac{1°}{2}$, 15°, $11\frac{1°}{4}$, $7\frac{1°}{2}$, $3\frac{3°}{4}$ и т. д.

В сочинении «Венец систем» Бхаскара дает иной способ составления таблиц. Он использует выражение для синуса суммы и разности двух дуг и производит вычисления, переходя от угла α к углу $\alpha+1$.

Тригонометрические вычисления индийцы всегда связывали с прямоугольными треугольниками, а потому, когда встречались косоугольные треугольники, их разбивали на прямоугольные.

Из приведенного нами обзора развития математики в Индии в средние века видно, что индийцы достигли значительных успехов в алгебре и тригонометрии. Однако этого нельзя сказать о геометрии [1].

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ У НАРОДОВ СРЕДНЕЙ АЗИИ И БЛИЖНЕГО ВОСТОКА В VII—XV ВВ.

Для лиц, интересующихся развитием математических знаний в Европе, важно иметь представление и о том, что сделано в этом отношении в странах Ближнего Востока и Средней Азии, так как европейские математики в своих работах часто исходили из тех выводов и достижений, к которым пришли ученые этих стран, а творения древних греков и индийцев были известны им главным образом в переводах, сделанных представителями народов Средней Азии и Ближнего Востока.

Для нас, советских людей, ознакомление с математическими успехами народов Средней Азии и Ближнего Востока имеет особо важное значение, так как наиболее крупные математики VII—XV вв. являлись представителями народов, входящих ныне в состав Союза Советских Социалистических Республик.

* * *

Очень древняя математическая культура существовала у армянского народа.

Еще в VII в. были широко известны разносторонние научные труды замечательного ученого, философа и патриота Армении *Анании Ширакаци*. В основе философии Анании лежало античное материалистическое учение о четырех элементах — земле, воздухе, огне и воде. При этом Анания стихийно пришел к диалектическому методу мышления. По его мне-

---

[1] Даже в тех сведениях по геометрии, которые мы находим в трудах Ариабхаты, относящихся к V в., нет больших преимуществ перед содержащимися в геометрии Герона или перед приведенными в папирусе Ахмеса.

нию, «возникновение есть начало уничтожения и уничтожение есть, в свою очередь, начало возникновения; из этого неумирающего противоречия мир приобретает свое вечное существование». Поэтому Анания отрицал существование бога как вершителя развития сил природы.

Главными научными работами Анании были работы по астрономии, математике, философии, географии, космографии, метеорологии и пр. Много сделал Анания для развития отечественной науки, а когда его родине угрожало вторжение врагов, то ученый-патриот, не колеблясь, встал в ряды войск для ее защиты.

Из научных знаний выше других Анания ставил, очевидно, математику. Он так отзывался о ней: «И сильно возлюбив искусство числительное, помыслил я, что без числа никакое рассуждение философское не слагается, всей мудрости матерью его почитая». Наиболее значительными математическими трудами Анании являются учебник и задачник по арифметике. В этом учебнике после теоретического введения приводятся таблицы для четырех арифметических операций над числами. Задачник содержит много интересных задач, причем в некоторых случаях мы замечаем применение арифметической и геометрической прогрессий, а числа, встречающиеся в задачнике, достигают величины 90 000 000 000. Анания свободно оперирует дробями, хотя в их записи часто прибегает к египетским дробям, имеющим числителем единицу, а сложные дроби тогда выражаются, как сумма дробей с числителем, равным единице.

Приведем некоторые примеры задач Анании.

1. «Один купец прошел через три города, и взыскали с него в первом городе пошлины: половину и треть имущества, и во втором городе половину и треть (с того, что у него осталось), и в третьем городе снова взыскали половину и треть (с того, что у него было); и когда он прибыл домой, у него осталось 11 дахеканов (денежных единиц). Итак, узнай, сколько всего дахеканов было вначале у купца.»

2. «Фараон, царь Египта, праздновал день своего рождения, и обычай был у него раздавать в этот день десяти вельможам, по достоинству каждого, сто мер вина. Итак, раздели это сообразно достоинству всех десяти.»

Примечание. В условии второй задачи имеется в виду, что дележ по достоинству равносилен дележу в отношении 1 : 2 : 3...

3. «В городе Афинах был водоем, в который проведены три трубы. Одна из труб может наполнить водоем в один час, другая, более тонкая,— в два часа, третья, еще более тонкая,— в три часа. Итак, узнай, в какую часть часа все три трубы вместе наполнят водоем.»

Даже из приведенных примеров видно, насколько армянская математика VII в. ушла вперед от западно-европейской математики той же эпохи. Как мы упоминали ранее, современник Анании Беда Достопочтенный не оперировал дробями и даже избегал действия деления над целыми числами. А задачи на водоем и бассейны у европейцев мы встретили только в VIII в. (Алкуин).

Начиная с VII в. в истории народов, входящих в состав государств Средней Азии и Ближнего Востока, значительную роль начинает играть арабское государство. В течение VII—VIII вв. мелкие арабские государства, целиком умещавшиеся на Аравийском полуострове, значительно расширяют свои границы и подчиняют себе ряд соседних государств, по большей части стоявших на более высокой ступени культуры. Таким образом был создан арабский халифат — государство, занимающее огромную территорию. В его состав вошли, кроме основной территории арабов, Палестина, Сирия, Месопотамия, Персия, Закавказье, Средняя Азия, Северная Индия, Египет, Северная Африка и Пиренейский полуостров. Столицей халифата сначала был Дамаск, а затем в VIII в. вблизи бывшего Вавилона был построен новый город — Багдад, куда и была перенесена столица. Багдад стал центром арабской культуры, которая развивалась на основах воспринятой арабами культуры таджиков, хорезмийцев, азербайджанцев, египтян, персов и народов Древней Греции и Индии.

Так как многие из представителей народов, вошедших в халифат, писали на арабском языке, то буржуазные историки неправильно включают работы ученых этих народов в число работ арабов.

Первым по времени крупным математиком у народов, входивших в состав халифата, мы назовем великого узбекского (хорезмийского) математика и астронома IX в. *Мухаммеда бен Муса аль-Хорезми* (2-я пол. VIII в.— между 830—840).

Будучи уроженцем города Хорезма (Хивы), аль-Хорезми в дальнейшем жил в Багдаде, куда был призван как выдающийся математик халифом *аль-Мамуном*. Первой работой, выполненной аль-Хорезми в Багдаде, было составление таблиц тригонометрических величин. Для выполнения этой работы он использовал таблицы Птолемея и индийские таблицы (так называемые синдханты) и в результате их проверки и объединения создал свои таблицы, гораздо более точные, чем греческие и индийские.

Наиболее ценными для развития математики являются труды аль-Хорезми по алгебре и арифметике.

Алгебраическое сочинение аль-Хорезми сыграло в истории математики большую роль, так как оно, будучи впоследствии переведено на латинский язык, служило долгое время в Европе основным учебником по математике. Некоторыми особенностями это сочинение напоминает работы Диофанта и индийских ученых, но едва ли возможно, что аль-Хорезми использовал указанные источники. Хотя некоторые приемы решения уравнений у аль-Хорезми и напоминают те, которые употреблял Диофант, но аль-Хорезми совсем не пользуется теми сокращениями в записи, которые характеризуют алгебру Диофанта, не употребляет его терминологии, и, наконец, данные исторических исследований говорят о том, что ученые арабского халифата познакомились с трудами Диофанта значительно позднее появления труда аль-Хорезми. Резкие отличия в основных приемах решения уравнений от тех способов, какие применяли индийцы, указывают на то. что аль-Хорезми не следовал и индийским ученым.

Алгебра, созданная аль-Хорезми, даже по своим идейным установкам не может считаться родственной греческой алгебре. Если большинство греков не видело необходимости в приложении научных знаний к практическим потребностям, то здесь мы находим как раз обратное: его главное желание поставить науку на службу человеку, приспособить ее к практическим целям. В алгебре аль-Хорезми есть специальный раздел о торговле и торговых сделках с задачами на тройное правило. С помощью уравнений решаются некоторые геометрические задачи (например, задачи на определение высоты треугольника по трем сторонам). Большим достоинством работы является то, что она представляет собой не простой сборник рецептов для решения задач, как это было в трудах индийских авторов; аль-Хорезми излагает и теорию, указывает приложение этой теории и многие правила поясняет геометрическими образами.

В основном работа аль-Хорезми устанавливает методы решения уравнений. Этим аль-Хорезми дает направление новой науке, и решение уравнений с этих пор на долгие годы сохраняется за алгеброй как основной ее признак. Само название новой науки — алгебра — обязано происхождением аль-Хорезми, так как оно возникло из названия операции аль-джебр, которой аль-Хорезми пользовался в рассматриваемой нами работе.

Наряду с операцией аль-джебр мы встречаем здесь и другую операцию, именуемую им валь-мукабала. Объяснение этих терминов мы находим у математика XVI в. *Бегаэддина аль-Амули*. «Та часть уравнения,— говорит аль-Амули,— которая содержит отрицательную величину, может быть дополнена, а к другой — прибавлено нечто равное тому, что дополняет первую часть; такое действие называется «аль-джебр». Подобные и равные члены в обеих частях могут быть отброшены — это действие носит название «валь-мукабала».

Если сделать запись при помощи современной нам символики, то эти два действия можно пояснить на следующем примере. Пусть дано уравнение

$$5x-12=4x-9.$$

Прибавив к обеим частям по 12 и по 9, совершим действие аль-джебр. Получим

$$5x+9=4x+12.$$

Отнимая от обеих частей по $4x$ и по 9, совершим действие валь-мукабала и в результате получим

$$x=3.$$

Таким образом, действия аль-джебр и валь-мукабала заменяли собой применяющиеся ныне перенос членов уравнения из одной части уравнения в другую и приведение подобных членов.

В алгебраическом сочинении аль-Хорезми дано решение уравнений первой и второй степени.

Для квадратных уравнений аль-Хорезми не приводит общего решения, а на числовых примерах рассматривает шесть различных типов квадратных уравнений, для каждого из которых и дает особые способы решения. Эти шесть типов в современной записи могут быть представлены в следующем виде:

$$x^2=2x;\ \ x^2=36;\ \ 5x=10;\ \ x^2+7x=128;\ \ x^2+21=10x;$$
$$12x+288=x^2.$$

Конечно, третье из приведенных уравнений мы не можем считать квадратным, но у аль-Хорезми оно рассматривается наряду с другими квадратными уравнениями.

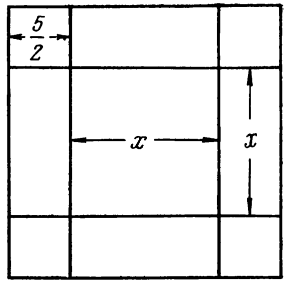


Рис. 17

Квадратные уравнения аль-Хорезми решает аналитически и геометрически, причем при аналитическом решении он признает два ответа, что дает большое преимущество его решению перед решением Диофанта.

Для уравнения $x^2+10x=39$ аль-Хорезми дает даже два геометрических решения, одно из которых мы и приводим.

Строится квадрат с неизвестной стороной x, а затем на его сторонах строятся прямоугольники со сторонами x и $^5/_2$. Затем всю фигуру дополняют до квадрата со стороной $x+5$ (рис. 17). Из чертежа видно, что площадь всего большого квадрата состоит из площади квадрата со стороной x, площадей четырех прямоугольников со сторонами x и $^5/_2$ и площадей четырех квадратов со стороной $^5/_2$. Таким образом, площадь большого квадрата равна $x^2+10x+25$, а так как $x^2+10x=39$, то площадь большого квадрата оказывается равной $39+25$, то есть 64, сторона этого квадрата, следовательно, равна 8, а x, то есть сторона малого квадрата, равна $8-5=3$.

Аналитическое решение аль-Хорезми приведено для уравнения $x^2+21=10x$. Оно проводится словесно таким образом: «Раздели пополам число корней (неизвестных), получишь 5. Умножь это число на самое себя, получишь 25. Вычти из него число 21, получишь 4. Извлеки квадратный корень, получишь 2. Этот корень прибавь или вычти из половины числа корней, получишь 3 и 7».

Если пользоваться современной символикой, то получим для ответа следующую формулу:

$$x=5\pm\sqrt{25-21}.$$

Сочинение аль-Хорезми по арифметике дошло до нашего времени только в переводе на латинский язык. Оно сыграло значительную роль в развитии европейской математики, так как именно в нем европейцы познакомились с индийскими методами записи чисел, то есть с системой индийских цифр, с употреблением нуля и с поместным значением цифр. Вследствие того что сведения эти были получены европейцами из книги, автор которой жил в арабском государстве и писал на арабском языке, индийские цифры десятичной системы стали неправильно именоваться «арабскими цифрами».

Некоторые задачи, которые могли бы быть приведены к уравнениям первой степени, аль-Хорезми решает арифметическим способом, пользуясь правилами ложного и двойного ложного положения. С первым из этих правил нам приходилось встречаться раньше, а второе состояло в том, что неизвестному придавалось сначала одно, потом другое произвольное значение, и для каждого вычислялась ошибка, а затем на основании полученных ответов и вычисленных ошибок находилось истинное значение неизвестного. Пользуясь современной символикой, мы можем этот прием пояснить так: пусть $\varphi(x)=P$, где $\varphi(x)$ — линейная функция от x, а P — постоянное число. Полагая в первый раз $x=a$, а во второй $x=b$, будем иметь $\varphi(a)=A$ и $\varphi(b)=B$. Обозначим $P-A$ через E, а $P-B$ через K. Тогда

$$x=\frac{bE-aK}{E-K}.$$

С именем аль-Хорезми связан математический термин, который вошел в употребление совершенно случайно. Латинизированное имя аль-Хорезми превратилось в «алгоритмус», а затем в «алгоритм», и под этим словом сначала подразумевали индийскую нумерацию, а впоследствии им начали выражать всякую систему или последовательность вычислений (например, алгоритм Евклида для нахождения наибольшего делителя чисел, алгоритм решения уравнения и пр.).

После аль-Хорезми многие математики Средней Азии и Ближнего Востока продолжали развивать его идеи по закреплению за алгеброй значения науки об уравнениях, по расширению возможностей решения более сложных уравнений, а также по уточнению тригонометрических таблиц и оформлению тригонометрии как самостоятельного раздела математики.

Одним из крупнейших астрономов IX и X вв. был *Мухаммед ибн Джабир ибн Синан* (850—929), который вошел в историю под именем *аль-Баттани*. Аль-Баттани был уроженцем города Баттана в Месопотамии, а конец жизни провел в

Дамаске. В сочинении «О звездной науке» он оперирует понятием полухорды, т. е., подобно индийцам, вводит синус, причем дает ему ошибочно укоренившееся название, соответствующее слову «пазуха». В этом же сочинении аль-Баттани впервые вводит в употребление понятие, равносильное нашему котангенсу, и составляет таблицу котангенсов для углов через каждый градус.

Еще большую роль в развитии математики у народов Ближнего Востока сыграл земляк аль-Баттани *Сабит ибн Корра* (836—901). Его важнейшими трудами были два трактата по теории линий и трактат о составных отношениях, подготовивший расширение понятия о числе, трактат о «фигуре секущих», имевший большое значение в развитии сферической тригонометрии, трактат о солнечных часах, в котором приведено правило, равносильное общей сферической теореме косинусов, трактат о движении по эклиптике, где вычислена мгновенная скорость видимого движения Солнца в двух отдельных точках, трактат о сечениях цилиндра, где впервые введено эквиаффинное преобразование и вычислен частный случай эллиптического интеграла. В работах Сабита встречается оригинальное наглядное доказательство теоремы Пифагора.

Астроном и математик *Мухаммед аль-Бузджани Абуль-Вафа*, по происхождению перс (940—998), составил таблицы синусов через каждые $10'$ и притом с точностью до четвертого шестидесятеричного знака, т. е. до $\frac{1}{60^4}$ в шестидесятеричной записи. Кроме того, ему пришла удачная мысль принять при вычислениях радиус за единицу. Абуль-Вафа ввел в употребление тангенс и котангенс под названиями прямой и обратной тени (такое название объясняется тем, что вбитый вертикально в землю кол и его тень можно рассматривать как катеты прямоугольного треугольника, отношение которых и дает тангенс или котангенс угла наклона солнечных лучей) и секанс с косекансом. Он же выявил и зависимость между всеми употребляемыми им тригонометрическими величинами.

В начале XI в. появились труды багдадского математика *Абу Бекра Мухаммеда ибн Хасана аль-Караджи*. Им написано алгебраическое сочинение, названное «Аль-Фахри». В нем указываются методы извлечения корней выше второй степени. Решение квадратных уравнений разбирается там и геометрически и аналитически. Кроме того, там же имеется и решение уравнений высших степеней вида

$$x^{2n} \pm px^n = \pm a.$$

В этом сочинении аль-Караджи имеются выражения для суммы квадратов и суммы кубов натурального ряда чисел. В других работах он распространяет степень неизвестного до «бесконечности» и разложение бинома Ньютона до любого n.

Развитие алгебры как учения об уравнениях впоследствии нашло свое место у многих математиков Востока.

В этом отношении для нас наибольший интерес представляет математик, поэт и философ *Омар Хайям* (1040 — ок. 1123). Родился он в городе Нишапуре, расположенном к югу от Ашхабада и входящем ныне в состав Ирана.

От своих предков Омар Хайям унаследовал любовь к поэзии, и слава о нем как об авторе замечательных рубаи не заглохла до наших дней. Но, кроме поэзии, Хайям интересовался философией и математикой. По убеждениям он, по всей вероятности, не был атеистом, но в некоторых своих стихотворениях выражает резко отрицательное отношение ко всем религиям. Так, можно привести его четверостишие, подтверждающее сказанное:

Дух рабства кроется в кумире и Каабе.
Трезвон колоколов — язык смиренья рабий,
И рабства подлая печать равно лежит
На четках и кресте, на церкви и михрабе.

Основным математическим трудом Хайяма является трактат «О доказательствах задач алгебры и аль-мукабалы», в котором он выделяет алгебру как вполне самостоятельную математическую дисциплину. В указанном трактате Хайям классифицирует алгебраические уравнения первой, второй и третьей степеней, положив в основу классификации степень уравнения и расположение его членов; расположение должно удовлетворять условию, чтобы ни в правой, ни в левой части уравнения не было отрицательных членов.

Для решения уравнений третьей степени он использовал геометрический метод, причем достигал цели, рассматривая пересечение двух кривых: двух парабол, параболы и окружности и т. д.

Алгебраический трактат Хайяма замечателен еще тем, что в нем используется алгебраический метод для решения геометрических вопросов. В этом отношении Хайяма можно считать отдаленным предшественником Декарта.

Кроме трактата по алгебре, Хайямом написаны и другие математические работы, а его «Комментарии к трудным постулатам книги Евклида» нашли отражение в работах позднейших математиков Востока.

Одним из ближайших по времени к аль-Хорезми ученых в Средней Азии является *Абу Наср Мухаммед ибн Тархан аль-Фараби* (870—950), сыгравший большую роль в развитии науки и философии в Средней Азии в X в. В философии аль-Фараби был последователем и пропагандистом идей Аристотеля, что и дало повод современникам называть его «вторым Аристотелем». Особенно интересовали аль-Фараби идеи Аристотеля в области начальных понятий математики. Этот интерес заставил его обратиться к «Началам» Евклида и написать «Комментарии к трудностям во введениях к первой и пятой книгам Евклида». В этой книге аль-Фараби, следуя Аристотелю, ясно выражает мысль об абстрактности геометрических понятий.

Аль-Фараби занимался исследованием иррациональных чисел, известны также его работы в области геометрических построений. Но особо важное значение работ аль-Фараби заключалось в том, что они привлекли внимание современников аль-Фараби к трудам Аристотеля, а это способствовало появлению ряда специальных математических исследований.

К числу великих творцов науки в конце X и начале XI в. мы должны отнести философа, астронома, математика, географа, историка и поэта *Абу-Райхана-Мухаммеда ибн Ахмеда аль-Бируни* (973—1048). Родился аль-Бируни в столице Хорезма — Кяте (ныне г. Бируни Узбекской ССР). Он много лет жил в Индии, где первым ознакомил индийских ученых с трудами греческих математиков и астрономов. Будучи знаком с разными областями природоведения, он высказал много передовых для того времени научных идей, которые лишь через пятьсот лет были развиты в работах европейских ученых эпохи Возрождения. Им написано свыше ста пятидесяти работ, одна треть из них относится к астрономии. Его трактат «Ключ к астрономии» до настоящего времени не найден, но сохранилась «Книга вразумления начаткам науки о звездах», содержащая популярное изложение основ математики, астрономии и астрологии. В его «Книге о нахождении хорд в круге» разработан ряд оригинальных методов и доказательств из геометрии и тригонометрии. В большом трактате по математической и описательной географии «Канон Масуда» изложен тригонометрический метод определения географических долгот, сходный с современным методом триангуляции. Два сохранившихся раздела труда аль-Бируни «Книга объяснений» посвящены основным понятиям геометрии и арифметики. Большой интерес представляют и многочисленные работы аль-Бируни философского и научного содержания из разных областей человеческого знания. Из них, между прочим, мы узнаем, что его мировоззрению свойственны рационалистический скептицизм и презрительное отношение к религиозным суевериям. У него же мы находим высказывания о том, что наша вселенная характеризуется не геоцентрическим, а гелиоцентрическим строением. Труды аль-Бируни охватывают почти все области знания, которыми занимались в его времена на арабоязычном Востоке. Уже около 1000 года он написал трактат «Памятники минувших поколений», в котором излагаются способы исчисления времени у различных народов и проявляются глубокие знания автора в области астрономии и математики.

Дальнейшее развитие математики у народов Средней Азии сильно задержалось, так как их государства подверглись жестоким нашествиям и с Запада, и с Востока. В 1055 г. Багдад был завоеван турками. В 1256 г. монгольский завоеватель хан *Хулагу* окончательно разрушил Багдад и своей столицей сделал город Марагу в Азербайджане. В этом городе имелась прекрасная астрономическая обсерватория, инициатором создания которой был крупный математик-астроном *Насирэддин ат-Туси* (1201—1274 или 1277). Имея большие заслуги в астрономии как создатель распространившихся по всей Азии астрономических таблиц, он очень много сделал и для математики. Им было дано лучшее для тех времен изложение трудов Евклида. Заинтересовавшись «Началами» Евклида и изучив геометрические работы Хайяма, Насирэддин ат-Туси сделал к труду Евклида ряд дополнений. В комментариях к «Началам» Евклида он сделал попытку доказать постулат Евклида о параллельных прямых.[1] Многие выводы, к которым попутно пришел Насирэддин ат-Туси, сы-

[1] До ат-Туси этот постулат пытался доказать Хайям, заменяя его более простым.

НАСИРЭДДИН АТ-ТУСИ

грали большую роль в дальнейшем развитии теории параллельных линий.

В труде «Шаклул Гита» («Трактат о полном четырехстороннике») ат-Туси дает основания сферической тригонометрии. Этот труд, помимо теоретического, имеет еще то значение, что в нем тригонометрия излагается как самостоятельный отдел математических знаний.

В первой половине XV в. выдающийся узбекский политический деятель и ученый *Улугбек* основал в Самарканде пре-

УЛУГБЕК

красную астрономическую обсерваторию.[1] Одним из крупнейших ученых-математиков, работавших в этой обсерватории, был *Джемшид Гиясэддин аль-Каши* (дата рождения неизвестна — ок. 1436), иранский математик, приглашенный Улугбеком около 1420 г. Им написано большое число трудов

---

[1] Улугбек был внуком монгольского властелина Тимура (Тамерлана). Погиб от руки наемных убийц. **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

по математике и астрономии. Из них наиболее значительными для развития математики были «Ключ к арифметике» и «Трактат об окружности».

Одним из замечательных результатов работ аль-Каши является введение им десятичных дробей.[1] Впервые десятичные дроби встречаются у аль-Каши в его труде «Трактат об окружности», написанном в 1426 г. Там он выразил отношение длины окружности к диаметру не только в шестидесятеричных дробях, но и в десятичных. В этом же трактате разъясняется, как производить действия умножения и деления над десятичными дробями.

В работе «Ключ к арифметике» аль-Каши подробно излагает теорию десятичных дробей и указывает методы перехода от шестидесятеричных дробей к десятичным. Для отделения целой части числа от дробной он прибегал к разным способам: иногда целая часть отделялась им от дробной при помощи вертикальной черты, причем над первой частью делалась надпись: «целые»; в других случаях первая часть записывалась черными чернилами, а вторая — красными; иногда же над каждой цифрой записывался ее разряд. Вводя десятичные дроби в практику, аль-Каши, очевидно, руководствовался желанием сделать математические трактаты более популярными, более доступными для широкого круга лиц, интересующихся этими вопросами. Он сам писал, что выражение отношения окружности к ее диаметру записано в десятичных дробях для того, «чтобы им владел вычислитель, не знающий вычислений астрономов», которые записывались в шестидесятеричной системе. Вводя десятичные дроби, аль-Каши много внимания обращал также и на упрощение счета путем округления чисел, пренебрегая разрядами чисел, не имеющими значения при вычислениях.

В «Ключе арифметики» встречается выражение для разложения любой натуральной степени бинома. Это разложение было использовано аль-Каши для извлечения из чисел корней любой степени. Здесь же мы встречаем и выражение для приближенного вычисления корней любой степени, тогда как у его предшественников такого рода выражения были только для корней квадратных. Так, приближенное извлечение

---

[1] Как недавно выяснилось, до аль-Каши десятичные дроби применял *аль-Уклидиси.*

корней у прежних авторов можно представить в наше время в виде формулы

$$\sqrt{A^2+a} \approx A + \frac{a}{2A+1},$$

а у аль-Каши встречается выражение, которое при помощи формулы запишется так:

$$\sqrt[n]{A^n+a} \approx A + \frac{a}{(A+1)^n - A^n}.$$

В работе «Ключ к арифметике» аль-Каши дает также много интересных задач различных типов. Для характеристики этих задач мы приведем некоторые из них.

1. «Мы хотим найти такое число, что если удвоить его, прибавить к этому единицу, умножить сумму на три, прибавить к произведению два, затем умножить то, что получится, на четыре и прибавить к произведению три, то получится девяносто пять».

Примечание. Для этой задачи аль-Каши приводит три способа решения: с помощью алгебры, т. е. решая уравнение методом «аль-джебр и аль-мукабала», затем с помощью инверсии и, наконец, методом двойного ложного положения.

2. «Люди вошли в сад и один сорвал один гранат, второй — два, третий — три и, подобно этому, увеличивая на единицу для каждого. Затем все, что сорвали, разделили поровну. Каждому досталось по шесть гранат. Каково число людей?»

3. «Тело цилиндрической формы является полым и имеет квадратное основание, длина тела равна сумме стороны основания и ее куба. В нем имеется цилиндрическая полость, расположенная по длине, основание полости есть локоть на локоть, а длина короче тела на сторону основания тела. Объем тела — двести сорок три локтя. Мы хотим узнать величину сторон его основания и его длину».

4. «Две пальмы стоят отвесно к поверхности горизонта, одна из них — двадцать локтей, другая — двадцать пять локтей, а расстояние между ними — шестьдесят локтей. Между ними находится река или пруд. На каждой пальме находится по птице. Они увидели в воде рыбу и, полетев по направлению к ней с одинаковой скоростью по прямым линиям, до-

стигли ее одновременно, и прямые линии их полета встретились между корнями пальм. Мы хотим найти величину того, что пролетает каждая из них, а также расстояние между их местом встречи, т. е. местом рыбы и корнями каждой из пальм».

В «Трактате об окружности» особого внимания заслуживает определение отношения длины окружности к диаметру. Как известно, Архимед дал для величины π значение, равное $\frac{22}{7}$, причем для получения этого числа он пользовался заменой длины окружности периметрами правильного вписанного и описанного 96-угольника. Аль-Каши, применяя метод Архимеда, использовал периметры описанного и вписанного правильных многоугольников, имеющих $3 \cdot 2^{28}$ сторон, то есть многоугольников с 800335168 сторонами. Естественно, что это дало аль-Каши возможность получить гораздо более точное значение для π. По его вычислениям, результат которых выражен в десятичных дробях, получено следующее значение: $2\pi = 6{,}2831853071795865$. В этом выражении для π все 17 десятичных знаков верны.

Завершая краткий обзор развития математики в странах Средней Азии и Ближнего Востока, мы приходим к выводу, что народы этих стран оказали прогрессивное влияние на развитие математики, причем главные успехи достигнуты ими в создании алгебры как науки об уравнениях и в разработке тригонометрии как самостоятельного раздела математики. Помимо этого, значительные результаты получены ими и в вопросах упрощения счета: были развиты методы приближенного вычисления, извлечения корней, введены десятичные дроби и т. д.

ПЕРВЫЕ ШАГИ ЗАПАДНОЕВРОПЕЙСКИХ МАТЕМАТИКОВ НА ПУТИ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ОТКРЫТИЙ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ

После продолжительного застоя в Западной Европе начиная с XII в. наблюдается некоторый подъем интереса к наукам вообще и к математике в частности. Этот подъем объясняется рядом социально-экономических и политических условий, которыми характеризуется эпоха окончательного оформления феодальных отношений и роста городов как центров ремесла и торговли в большинстве стран Западной Европы.

До XI в. феодальное общество состояло преимущественно из двух классов: феодалов-землевладельцев, с одной стороны, и крепостных и полукрепостных крестьян — с другой. Крестьяне в период господства натурального хозяйства выплачивали феодалам оброк продуктами питания и нехитрыми изделиями своего деревенского ремесла (ткацкого, кузнечного и т. п.). Начиная с XI в. с развитием техники из среды крестьян начинают выделяться ремесленники — специалисты по различным видам ремесел. Откупаясь от своих господ, они порывают связь с деревней и переселяются в город, где их изделия становятся товаром городского рынка. Крестьяне в свою очередь поставляют на городские рынки продукты сельского хозяйства в порядке обмена или продажи. Города, бывшие до XI в. лишь административными или военными центрами, приобретают, таким образом, экономическое значение как центры торговли и ремесла. Их население вследствие этого быстро увеличивается. Однако быстрое развитие торговли и расцвет городов обостряли классовые противоречия. Обилие товаров на рынках, в том числе предметов роскоши, привозимых из Византии и из стран Востока, вызывало рост потребностей у феодалов. Мелкопоместным феодалам уже не хватало доходов с их земель; появилась необходимость в новых землях. Нажим на крестьян с целью увеличения натурального оброка, а позднее денежной ренты вызывал возмущение крестьян. Притом и сами крестьяне испытывали острую нужду в земле. Крупные же феодалы стремились умножить свои доходы путем приобретения не только новых земельных участков, но и новых рынков для сбыта поступающих в их руки продуктов крестьянского труда.

Все указанные обстоятельства способствовали организации в конце XI в. так называемых «крестовых походов» на Восток. С благословления католической церкви эти походы облекались в форму религиозных, якобы для освобождения «гроба господня» в Палестине из рук «неверных». На самом же деле крестовые походы были военными экспедициями феодалов, имевших весьма реальные цели: богатую добычу, захват новых земель и рынков на Востоке и приобретение даровой рабочей силы.

Крестьяне вначале тоже участвовали в этих походах, надеясь, что они принесут им или освобождение от крепостной зависимости, или получение земельных участков на Востоке.

В результате торговли и ряда крестовых походов (с 1096 по 1270) европейцы познакомились с восточной культурой, стоявшей в то время значительно выше культуры европейской. Одновременно происходило ознакомление с восточной промышленностью и сельскохозяйственной техникой. Все это способствовало ускорению процесса развития европейской науки.

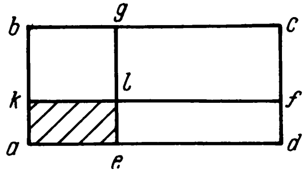


Рис. 18

В частности, развитию математики в Европе способствовало то обстоятельство, что расширение европейской торговли повлекло за собой значительное усложнение счета. Необходимость сложных вычислений, связанных с вексельными операциями, с различием валютной системы у различных народов, с развитием товарооборота, вызвала потребность выработки особых приемов, методов вычисления.

В эту эпоху в Европе зарождаются и входят в употребление тройное правило, цепное правило, правило смешения и пр. Делаются переводы греческих и арабских трудов по математике. В Европе появляются и первые ученые — теоретики математики. Примером может служить итальянский ученый *Леонардо Фибоначчи*, или иначе *Леонардо Пизанский* (ок. 1170 — после 1228). Отец Леонардо работал в алжирской фактории, принадлежавшей итальянской фирме из богатого города Пизы. Получив образование в Алжире под руководством учителя и дополнив его сведениями из области математики, приобретенными во время многочисленных путешествий по торговым делам в Египет, Сирию, Грецию, Сицилию и Прованс, Леонардо решил написать книгу, которая бы ознакомила «род латинян» с основами математики и дала бы им возможность успешнее вести торговые расчеты, связанные с математическими выкладками.

Эта книга была написана в 1202 г. и называлась «Книга абака». В 1228 г. Леонардо снабдил ее дополнениями и издал в переработанном виде. В ней вводятся индийские цифры и нуль, излагаются наиболее практичные методы вычислений с целыми и дробными числами, разъясняются способы извлечения квадратных и кубических корней. Здесь же содержатся правила «большого способа» для нахождения стоимости товаров, то есть тройного правила, сложного тройного правила, пропорционального деления, цепного правила, а также способа определения пробы металлов. Далее следует раздел «О вопросах абака», который по существу является изложением сведений из алгебры, так как в нем разбираются вопросы, приводящие к решению уравнений первой степени путем простого и двойного ложного положения. Неизвестное обозначается у Леонардо словом «вещь», что является заимствованием у восточных народов. В той же главе, где разбираются способы извлечения квадратных и кубических корней, рассматриваются также и арифметические действия над радикалами, причем разъясняются геометрическим путем и операции над двучленными выражениями вида $a \pm \sqrt{b}$. Выражения упомянутого вида Леонардо называет биномиями, и операцию умножения биномии $6-\sqrt{20}$ на биномию $3-\sqrt{5}$ он представляет как определение площади прямоугольника. Для этого строится прямоугольник со сторонами 6 и 3, изображенными (рис. 18) отрезками ad и ab; на этих сторонах откладываются отрезки de и bk, равные $\sqrt{20}$ и $\sqrt{5}$. Проведя через точки e и k прямые, параллельные сторонам прямоугольника, он получает прямоугольник, площадь которого и представляет искомое произведение.

Характерным в записях Леонардо является то, что отрезки прямой он обозначает или двумя буквами, поставленными в начале и в конце отрезка, или даже одной буквой, поставленной в начале отрезка. Таким образом, производя операции над отрезками, Леонардо в записи выражает их как операции над величинами, выраженными буквами.

Книга Леонардо содержит в себе также вопросы алгебры и учение о пропорциях в том виде, в каком это изложено у аль-Хорезми. Подобно аль-Хорезми, Леонардо не признает отрицательных корней при решении квадратных уравнений, но некоторый намек на отрицательные количества мы находим в одной из его задач; в ней требовалось определить денежные суммы, принадлежащие нескольким лицам. Решая задачу, Леонардо пришел к выводу, что решение невозможно, «разве только принять, что один из них имел долг, а не капитал».

«Книга абака» имела большое значение уже в том отношении, что она давала европейским читателям комплекс математических знаний, достигнутых народами Востока. Кроме того, в этой работе Леонардо первый в Европе стал применять алгебру для решения геометрических вопросов; при этом он хорошо сознавал, что арифметика, алгебра и геометрия находятся во взаимосвязи и должны «оказывать помощь друг другу».

Помимо «Книги абака», Леонардо написал несколько других математических сочинений, причем в сочинениях алгебраического характера мы встречаем интересное приближенное решение кубического уравнения вида

$$x^3+2x^2+10x=20.$$

Ответ на это уравнение Леонардо дал с точностью до шестого шестидесятеричного знака. В этом же сочинении находится задача на неопределенное уравнение, которое Леонардо разрешает для частного случая.

Из чисто геометрических сочинений Леонардо наибольшее значение имеет «Практическая геометрия», написанная в 1220 г. В этой работе Леонардо, пользуясь трудами Евклида и других греческих авторов, излагает вопросы об определении площадей плоских прямолинейных фигур, об измерении круга, о многоугольниках, сфере и цилиндре. В «Практической геометрии» приводится, между прочим, доказательство того, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его трех измерений; здесь же даны доказательства теоремы Герона и свойства медиан треугольника пересекаться в одной точке. В этом же сочинении встречаются задачи на геометрические построения, выполненные при помощи алгебры; например, таким методом решена задача о вписанном в равносторонний треугольник квадрате, покоящемся на основании этого треугольника.

С X в. в математических вычислениях широко распространился счет на абаке, который был усовершенствован еще римлянином Боэцием, а затем получил теоретическое обоснование у Герберта. Приверженцы этого счета получили, как было упомянуто ранее, наименование абацистов. Но с того времени, как в Европе начали появляться переводы трудов восточных математиков, методам счета, употреблявшимся абацистами, были противопоставлены методы сторонников индийских цифр, введших в употребление нуль и метод поместного значения цифр. Представителей второго направления называли алгоритмиками. Несомненно, прогрессивным надо считать метод алгоритмиков, так как они во многих отношениях превосходили абацистов. Абацисты совсем не употребляли нуля; извлечение корней второй степени было доступно им только в частных случаях, в то время как алгоритмики могли свободно извлекать даже корни третьей степени. Наконец, абацисты в своих вычислениях придерживались двенадцатеричных дробей, имеющих римское происхождение, а алгоритмики пользовались шестидесятеричными дробями, преимущество которых — в их удобной записи.

По мере распространения сочинений восточных авторов методы абацистов теряли свое значение. Решительный удар абацистам был нанесен трудами Леонардо. Хотя его книга и называлась «Книга абака», но она принесла в Европе окончательную победу алгоритмикам. [1]

В XIV в. многие авторы излагали вопросы математики, и особенно геометрии, но в большинстве их трудов не содержалось каких-либо новых идей, так как мысль авторов сковывали схоластические узы католической церкви. Внешние условия, создавшиеся в этом веке в некоторых европейских государствах, тоже не могли содействовать свободному развитию наук. Между Англией и Францией с 1337 по 1453 г. тянулась разорявшая эти государства Столетняя война. Эпидемия чумы, прошедшая по Европе, принесла неисчислимые бедствия ее населению.

Одним из известных математиков XIV в. был английский математик архиепископ кентерберийский *Томас Брадвардин* (1290—1349). Им написана «Умозрительная геометрия». В этой работе Брадвардин много внимания уделяет изучению звездчатых многоугольников и изопериметрических фигур. Интересны установленные им следующие положения.

Между изопериметрическими многоугольниками наибольшую площадь имеет тот, который имеет большее число углов.

Между изопериметрическими многоугольниками с одинаковым числом вершин наибольшую площадь имеет равноугольный.

Между многоугольниками изопериметрическими и равноугольными, имеющими одинаковое число вершин, наибольшую площадь имеет равносторонний.

Между изопериметрическими фигурами круг имеет наибольшую площадь.

Кроме того, Брадвардину приписывают введение в европейскую практику понятий тригонометрии, заимствованных

[1] В «Книге абака» Леонардо не дает описания абака как инструмента счета. Видимо, как это полагают некоторые историки, здесь под словом «абак» надо понимать всю вычислительную математику. **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

им у народов Востока. Он пользуется понятиями, выражающими тангенс и котангенс, именуя их «umbra versa» и «umbra recta», что означает «обратная тень» и «прямая тень», как это было в изучаемых им источниках.

Другим значительным математиком XIV в. был нормандский епископ *Николай Орем* (1323—1382), преподававший некоторое время в Парижском университете.

В его работах впервые встречается понятие о дробных степенях и их обозначение. Однако его записи таких степеней были несколько громоздки. До нашего времени употребление таких записей не сохранилось.

Орем известен также тем, что внес в математику метод, сходный с методом прямоугольных координат. Системой координат для Орема являлись стороны прямоугольника: длина (longitudo) и ширина (latitudo). Эту систему Орем применял как для исследования геометрических фигур, так и для изучения явлений природы.

Интерес, пробудившийся у математиков средневековья к творениям древних авторов, и вызванное им развитие самостоятельного творчества у европейских ученых в особенности сильно проявились в XV и XVI вв., когда под влиянием особых политических и экономических условий Европа вступила в исторический период, получивший наименование эпохи Возрождения наук и искусств.

ЭПОХА ВОЗРОЖДЕНИЯ НАУК И ИСКУССТВ

Под эпохой Возрождения понимается период времени с середины XV и до конца XVI в., характеризующийся значительным подъемом в развитии искусств и наук в ряде стран Западной и Центральной Европы. Буржуазные авторы полагают, что основным признаком этой эпохи является возрождение античных наук и искусств, возникшее в результате пробудившегося интереса к греческой и римской культуре древних веков. В действительности этот прогресс объясняется большими социально-экономическими сдвигами, обусловленными тем, что на смену отмирающему феодальному строю с его цеховым производством шел новый социальный строй, соответствующий новым производственным отношениям,— строй капиталистический. С XV в. начинается быстрое развитие нового класса — буржуазии, вступающей в классовую борьбу с феодализмом. Это время характеризуется тем, что цеховое ремесленное производство заменяется мануфактурным; применение в промышленности простейших механизмов (водяного колеса, усовершенствованного ткацкого станка, а в дальнейшем ветромера, землечерпалки, подъемного крана и т. д.) потребовало известного комплекса технических знаний, уменья производить расчеты и решать ряд механических и математических задач. Рост мануфактур в значительной степени увеличил объем промышленной продукции. Буржуазии пришлось для сбыта этой продукции расширить сеть своих рынков, а это толкнуло европейцев на поиски и открытия новых земель. В 1492 г. генуэзец *Христофор Колумб* (1451—1506), побуждаемый желанием найти кратчайший путь в Индию с ее колоссальными богатствами, привлекавшими европейцев, доплыл до берегов нового материка — Америки. Несколько позднее (1497—1498) португалец *Васко да Гама* (1469—1524), обогнув Африку с юга, открыл путь в Индию, а его соотечественник *Фернан Магеллан* (ок. 1480—1521) совершил первое кругосветное путешествие.

Эти открытия значительно расширили кругозор европейцев и возбудили пытливую мысль ученых. Развитие мореплавания повлекло за собой дальнейшее развитие астрономических знаний, требовавших больших вычислительных работ и обобщений; того же требовала и техника зарождающейся капиталистической промышленности. Между тем европейская математика того времени не могла в полной мере обслужить возникшие потребности: арифметическая техника вычислений была чересчур громоздкой, в алгебре еще не развилась ее символическая запись, при помощи которой можно легко делать обобщения, а тригонометрия в Европе была еще в зачаточном состоянии. Все это заставляло ученых встать на путь новых исканий в математике. Эпоха Возрождения явилась для математики главным образом эпохой развития алгебраической символики, обобщенных методов решения уравнений, оформления тригонометрии как стройной самостоятельной отрасли математики и методов вычислений, которые к концу эпохи вылились в стройную систему логарифмов.

Успешному развитию наук в эпоху Возрождения способствовало также мощное прогрессивное движение этой эпохи — гуманизм, боровшийся за освобождение человека от контроля католической церкви, заставлявшей отрекаться от познания реальной окружающей человека жизни и преследовавшей за научные наблюдения и опыты материалистической направленности. Гуманизм провозгласил новые принципы, в основе которых лежала вера в человека и в неисчерпаемые возможности его духовных сил.

В 1438 г. *Иоганн Гутенберг* (ок. 1400—1468) изобрел литеры, то есть буквы для печатания, а в 1453 г. появилась первая печатная книга. С этих пор открылись широкие возможности для распространения научных знаний в Европе.

В том же 1453 г. столицу греко-римской империи — Константинополь — захватили турки. Одним из последствий этого было то, что многие жители империи бежали в страны Западной Европы, унося с собой и рукописи греческих и римских ученых. Ученые Европы во многих случаях впервые смогли ознакомиться с этими рукописями. Их изучение дало возможность сделать многие выводы и для европейской науки.

Указанные социально-экономические и политические условия и вызывали значительное оживление в работе европейских математиков эпохи Возрождения.

Наиболее раннее распространение идей Возрождения наблюдалось в Германии и Италии, а затем уже и в других странах Западной и отчасти Центральной Европы.

Первые печатные книги математического содержания появились в Германии. Именно там в 1482 г. вышла из печати арифметика, составленная *Ульбрихтом Вагнером*. В 1489 г. в Лейпциге была напечатана математическая книга *Яна Видмана* «Быстрый и красивый способ счета для всякого вида торговли». Видман первый в истории математики начал чтение лекций по курсу алгебры с университетской кафедры (в Лейпциге). В своей книге, являющейся трактатом по арифметике, Видман излагает счетные операции с целыми и дробными числами, а также теорию пропорций и вопросы суммирования членов арифметической и геометрической прогрессий. Одна из частей книги посвящена вопросам геометрии. В этой части имеется ряд интересных задач. Здесь, например, вычисляется площадь треугольника по трем данным его сторонам, то есть выводится формула Герона; приводится правило для определения радиуса круга, описанного около треугольника, по трем данным: основанию треугольника, его высоте и меньшему отрезку основания.

Особое значение для развития математической символики имеет то обстоятельство, что в книгах Вагнера и Видмана впервые встречаются знаки + и —. Относительно происхождения этих знаков существуют различные теории, и которая из них правильна, трудно судить. Согласно одной из них, эти знаки заимствованы из торговой практики: известно, что виноторговцы, продавая из бочки вино, черточками отмечали сколько мер вина из бочки убыло, а когда запас вина в бочке восстанавливался, то для обозначения того, что взятые ранее меры вина опять восполнены, черточки, изображавшие число отсутствовавших мер, перечеркивались; таким образом и получалось, что при вычитании (то есть при отливании вина) появлялся знак —, а при сложении (то есть при новом наливании вина в бочку) — знак +.

Как Вагнер, так и Видман относятся к числу тех математиков, которых именовали «коссистами». Это название произошло от итальянского слова cosa, что означало «вещь». Этим словом у математиков тех времен обозначалось неизвестное. Таким образом, слово коссист мы можем воспринимать как алгебраист. В Германии алгебра и носила название Kossische Kunst (коссическое искусство).

Крупным представителем немецкой математики XV в. надо считать Иоганна Мюллера.

Иоганн Мюллер (1436—1476), вошедший в историю под именем *Региомонтан*, родился в маленьком франконском городе Кенигсберге, латинизированное название которого и закрепилось за Мюллером.[1] Работая в Венском университете под руководством знаменитого профессора астрономии *Пурбаха* (1423—1461), Мюллер затем продолжал его труды и по астрономии, и по математике. Так, после смерти Пурбаха Мюллером была опубликована их совместная работа «Краткое изложение великого сочинения Птолемея».

Главным математическим трудом Мюллера является «Пять книг о различного рода треугольниках». В ней Мюллер первым из европейцев дал систематическое изложение тригонометрии как самостоятельного раздела математики. Радиус окружности Мюллер предполагал разделенным на 10 000 000, что дало ему возможность выражать тригонометрические величины с очень большой точностью и притом в

[1] «Региомонтан» (лат. Regiomontanus) означает «с королевской горы», то есть то же, что и немецкое название Кенигсберг.

десятичных дробях. Однако сам Мюллер вводил эти дроби только при применении диаметра и радиуса, а в других случаях прибегал к шестидесятеричным; поэтому его десятичные дроби и прошли в истории математики незамеченными: они не были использованы ни его современниками, ни ближайшими последователями. В книге Мюллера есть некоторые основные черты современной нам тригонометрии. Например, в ней дается решение всякого рода треугольников по данным элементам. Что касается таблиц тригонометрических величин, то Мюллеру удалось составить таблицу тангенсов для углов через каждый градус дуги, а также таблицу синусов для углов через каждую секунду дуги.

В книге Мюллера содержится материал и по другим разделам математики. В некоторых задачах можно найти интересные примеры по теории чисел. Многие геометрические задачи решаются с помощью алгебры путем приведения их решения к уравнениям. Интерес представляют также определение радиуса круга, описанного около треугольника, по трем данным сторонам этого треугольника и доказательство того, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. В книге Мюллера появились первые в Европе задачи на максимум и минимум.

Большой заслугой Мюллера в деле развития математики является то, что он ознакомил Европу со многими классиками математики, сделав переводы их трудов. Им были переведены труды Аполлония, Архимеда, Герона и «Альмагест» Птолемея.

Наиболее выдающимся немецким коссистом надо признать математика первой половины XVI в. *Михаила Штифеля* (ок. 1486—1567). Он родился в немецком городе Эсслингене и в молодые годы поступил в августинский монастырь, где и получил первоначальное образование. Впоследствии он примкнул к реформаторскому движению и был одним из приверженцев Лютера. Сначала его большое природное дарование было направлено по ложному пути: религиозно-мистическое учение церкви развило в нем мистическое понимание чисел, и он проявлял интерес в основном к отысканию таинственного смысла в числах, которые встречались в религиозных книгах. Пытаясь сделать практические выводы из соотношения этих чисел, Штифель в своих лженаучных размышлениях дошел до того, что предсказал на 19 октября 1533 г. кончину мира. Когда в назначенный им день мир оказался непоколебленным, Штифель был глубоко потрясен: он убедился, что его заключения, основанные на мистических комбинациях чисел, не соответствуют законам реального мира; кроме того, его авторитету угрожала потеря доверия тех, кто до этого времени не сомневался в его знаниях. Такое потрясение, как оказалось, имело хорошую сторону. С тех пор Штифель уже больше не возвращался к мистическим вычислениям, а направил все свои усилия на работу по созданию настоящих научных ценностей, углубившись в занятия математикой. Он изучал математические работы своих немецких и итальянских предшественников и написал несколько математических трактатов, из которых наиболее ценным является «Полная арифметика», опубликованная в 1544 г.

Из числа вопросов, которые Штифель разработал в своих математических сочинениях, наиболее ценными для развития математики были: введение отрицательных чисел и операций над ними; отыскание коэффициентов разложения бинома натуральной степени; первые намеки на свойства чисел, которые в дальнейшем у других авторов развились в идею логарифмирования; решение показательных уравнений и, наконец, введение некоторых символов в технику алгебраического счета.

Что касается отрицательных чисел, то, вводя их в употребление и оперируя ими, как реальными числами, Штифель именовал их «числами, меньшими чем нуль». Такое наименование смущало многих современников Штифеля, полагавших, что раз нуль есть ничто, то меньше нуля быть ничего не может. Это обстоятельство несколько задерживало проникновение отрицательных чисел во всеобщее употребление. Сам же Штифель ясно сознавал их смысл и дал такую табличку для умножения и деления положительных и отрицательных чисел:

для умножения:

$$\begin{array}{cccc}
0+6 & 0-6 & 0+6 & 0-6 \\
0+4 & 0-4 & 0-4 & 0+4 \\
\hline
0+24 & 0+24 & 0-24 & 0-24
\end{array}$$

для деления:

$$\begin{array}{cccc}
0+24 & 0+24 & 0-24 & 0-24 \\
0+6 & 0-6 & 0+6 & 0-6 \\
\hline
0+4 & 0-4 & 0-4 & 0+4
\end{array}$$

Вводя отрицательные числа в употребление, Штифель все же считал их числами абсурдными, а положительные — истинными. Про нуль он говорил, что он стоит между числами истинными и абсурдными. Однако законность существования отрицательных чисел он признавал в следующих выражениях: «Подобно тому, как мы представляем себе различные корни чисел, не имеющих таких корней, и это представление оказывается в высшей степени полезным в применении к математике, также не без пользы представляем себе и числа ниже нуля».

В этом же сочинении Штифель сопоставляет две прогрессии — арифметическую и геометрическую; первую — с разностью, равной единице, а вторую — со знаменателем, равным двойке:

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$
$$\ldots, {}^1/_{16}, {}^1/_8, {}^1/_4, {}^1/_2, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

и делает следующее замечание: «Сложение в арифметических прогрессиях отвечает умножению в геометрических. Вычитанию в арифметических отвечает деление в геометрических. Простому умножению в арифметических прогрессиях в геометрических отвечает умножение на себя. Так, удвоению члена арифметической прогрессии в геометрической отвечает возвышение в квадрат. Делению в арифметических прогрессиях отвечает извлечение корня в геометрических». Штифель понимал, какое огромное значение имело бы дальнейшее развитие высказанной идеи, но ограничился только замечанием: «Поэтому можно было бы написать целую новую книгу о чудесных свойствах чисел, но я должен воздержаться от этого и уйти с закрытыми глазами». Таким образом, Штифель вплотную подошел к идее логарифмирования, но не развил ее. В скором времени эта идея воплотилась в практику у продолжателей дела Штифеля.

В «Полной арифметике» Штифель решает также вопрос о делении отношения двух чисел на отношение двух других. При этом рассуждения, применяемые им, приводят как бы к решению показательных уравнений. Так, например, желая разделить 2187/128 на 27/8, он по существу решает уравнение такого вида:

$$\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}.$$

После некоторых довольно сложных вычислений он получает верный ответ: $x = 2\frac{1}{3}$.

В странах Ближнего Востока и в Средней Азии уже давно было известно разложение натуральных степеней бинома, но в Европе этот вопрос впервые встречается в работах математиков эпохи Возрождения. В частности, Штифель дает выражение для коэффициентов бинома до 17-й степени бинома включительно. Прием, употреблявшийся им для определения коэффициентов, можно представить в виде следующей таблицы:

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

. . . .

Принцип составления этой таблицы таков: каждый новый столбец начинается с единицы и помещается строкой ниже предыдущего. Первый столбец составлен из единиц, а числа остальных столбцов получаются путем сложения чисел в строке, написанной выше: складываются число, стоящее над записываемым числом, и первое число влево от него. Каждая k-я строка сверху дает коэффициенты разложения $(k-1)$-й степени. Прием этот основан на формуле

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

К числу заслуг Штифеля в развитии алгебры надо отнести также расширение им алгебраической символики. Для обозначения арифметических действий Штифель уже свободно пользуется знаками + и −, введенными в Германии еще в конце XV в., а для умножения и деления он вводит знаки m и d, которые являются первыми буквами слов, выражающих эти действия, multiplicatio и divisio. Для обозначения неизвестного Штифель использовал немецкую букву R как начальную от слова Res, что обозначало «дело», «вещь». Для обозначения степеней неизвестного он пользовался наименованиями, которые употреблял еще Леонардо Фибоначчи, а именно: квадрат неизвестного выражался словом zensus, что означало «имущество», а последующие степени — словами cubus, zensi-zensus, zensi cubus и т. д. Подобная же символика была введена и для изображения корней различных степеней, причем при записи эти слова передавались сокращенно z, c, zz, zc и т. д. Сам же корень у Штифеля имел символ, похожий на современный нам; он представлял первую букву латинского слова $\sqrt{}$adix (корень) и сопровождался буквой, указывающей степень корня. Так, корень квадратный записывался как $\sqrt{}z$, корень третьей степени —$\sqrt{}c$ и т. д. В «Полной арифметике» Штифеля есть такая запись уравнения

$$116+\sqrt{}\mathrm{z}41\,472-18\mathrm{R}-\sqrt{}\mathrm{z}648\mathrm{z}\ \text{aequantur}\ 0,$$

что в современной символике означает

$$116+\sqrt{41472}-18x-\sqrt{648}\,x^2=0.$$ [1]

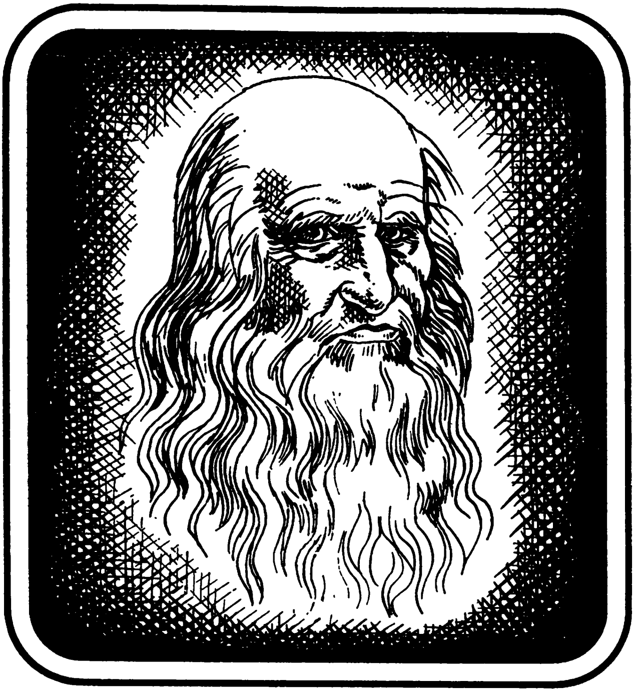
Переходя к развитию математики в эпоху Возрождения в Италии, мы должны прежде всего сказать о гениальном итальянском живописце, скульпторе, архитекторе, механике и математике *Леонардо да Винчи* (1452—1519).

Большая часть жизни Леонардо прошла во Флоренции — самом передовом городе Италии XV в., где гуманистическая наука достигла наивысшего расцвета. Отец его был зажиточным нотариусом, а мать — крестьянкой. Обучаясь в мастерской флорентийского скульптора и живописца *Андреа Вероккьо* (1435 или 1436—1488), Леонардо усвоил основы математики и перспективы, а также художественного рисунка. В дальнейшем работа в области искусства всегда шла у него параллельно с изучением природы, с занятиями по механике и математике. Это слияние обоих направлений весьма типично для эпохи Возрождения.

Будучи смелым экспериментатором, Леонардо подготовил почву для строгого научного изучения природы.

Все исследования Леонардо опираются на опыт, так как он считал опыт источником знаний. Вместе с тем он полагал,

[1] См.: Кэджори Ф. История элементарной математики, с. 446.



ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ

что практика не имеет никакого значения в отрыве от теории, и говорил: «Увлекающийся практикой без науки — словно кормчий, вступающий на корабль без руля и компаса; он никогда не уверен, куда плывет». В то же время и наука, по мнению Леонардо, не может развиваться без практики. Об этом он образно выражался так: «Железо ржавеет, не находя себе применения, ...а ум человеческий, не находя себе применения, сохнет».

Леонардо да Винчи очень высоко ценил математику. Этот художник-ученый говорил: «Никакое человеческое исследование не может считаться истинной наукой, пока оно не прошло через математическое доказательство».

В математике Леонардо интересовали главным образом те вопросы, которые имели приложение к искусству рисования и механике. В связи с этим он разработал теорию перспективы, а также уделял много внимания теории построения правильных многоугольников и делению окружности на равные части. При этом некоторые построения делались им точно, а некоторые — приближенно. Иногда он вводил ограничивающее условие, согласно которому чертеж выполнялся одним и тем же раствором циркуля. Кроме того, им разбирались вопросы построения равновеликих фигур и была решена задача о построении прямолинейной фигуры, равновеликой данному кругу. Для решения этой задачи Леонардо прибегал к очень простому приему. Принимая во внимание, что развертка прямого кругового цилиндра, имеющего высоту, равную половине радиуса основания цилиндра, равновелика площади основания цилиндра, Леонардо предлагал для построения прямоугольника, равновеликого данному кругу, катить по плоскости цилиндр, имеющий в основании данный круг и высоту, равную половине радиуса этого круга; фигура, которую намечает боковая поверхность этого цилиндра на плоскости, и дает решение задачи. Среди других геометрических задач, решавшихся Леонардо, встречаются определение высоты предмета по его тени (основанное на подобии треугольников), определение ширины реки и пр. Особо следует отметить его задачи об определении центра тяжести полукруга и тетраэдра, в решении которых много оригинального. При определении площади эллипса Леонардо применил метод, который получил развитие лишь у математиков позднейшего времени под названием «метода неделимых».

Кроме Леонардо да Винчи, в эпоху Возрождения в Италии работало много других математиков. Особое внимание обращает на себя решение итальянскими математиками проблемы, которая не была решена до них ни греками, ни индийцами, ни народами Средней Азии и Ближнего Востока. Эта проблема заключалась главным образом в решении уравнений степени выше второй и введении в математическую практику мнимых чисел.

Мы знаем, что решение частных случаев уравнений высших степеней было доступно и Хайяму и другим математикам Востока, а у Леонардо Фибоначчи были даны приближенные решения таких уравнений с большой степенью точности, но никто еще не дал методов для решения общих случаев таких уравнений. Это выпало на долю итальянских математиков эпохи Возрождения.

Одним из первых итальянских математиков, достигших больших успехов в вопросе общего решения кубических уравнений, надо считать профессора математики в Болонье — *Сципиона Ферро* (1465—1526). До нас не дошли сведения о том, какими методами он пользовался, но известно, что он решал уравнения вида

$$x^3+mx=n.$$

Теория решений уравнений высших степеней дальнейшее развитие получила у *Никколо Фонтано,* вошедшего в историю под именем *Тарталья* (ок. 1499—1557), и итальянского математика, философа и врача *Джероламо Кардано* (1501—1576), давшего общее решение для неполного уравнения третьей степени вида

$$x^3+px^2=q \text{ и } x^3=px+q.$$

А так как каждое уравнение третьей степени может быть сведено к решению неполного уравнения, то формулы для решения неполного уравнения можно считать общими для уравнения третьей степени.

Эти формулы были впервые помещены в сочинении Кардано «Великое искусство, или о правилах алгебры», а потому и носят название формул Кардано. Фактически трудно установить, кто впервые получил эти формулы, но есть основание предполагать, что первым их вывел Тарталья, а Кардано заимствовал их у него.

Тарталья родился в итальянском городе Бреша. В раннем детстве он лишился отца, который был убит при занятии города французскими солдатами. Тогда же пострадал и сам Тарталья, французский солдат рассек ему язык и челюсть. Это увечье на всю жизнь лишило Никколо возможности правильно произносить слова, и его стали звать «Тарталья», что в переводе с итальянского означает «косноязычный». Мать Тартальи не имела средств, чтобы дать ему образование, и Никколо постиг основы языка и математики самоучкой. Это не помешало талантливому и настойчивому юноше добиться таких успехов в математике, что он стал сначала учителем этой дисциплины, а около 1535 г. ему предложили занять кафедру математики в Вероне. В том же году, выступая на ученом диспуте с учеником Сципиона Ферро *Фиори*, он одержал над последним блестящую победу в вопросе о решении кубических уравнений, так как Фиори мог решать только уравнения вида $x^3+mx=n$, а Тарталья предложил задачи, где встречались уравнения третьей степени другого вида, решения которых были не известны Фиори. Эта победа принесла Тарталье громкую славу. Весть о замечательных открытиях Тартальи дошла до Джероламо Кардано, который чрезвычайно заинтересовался ими.

Сам Джероламо Кардано был весьма талантливым человеком, проявившим свои дарования на самых различных поприщах знания. Он был прекрасным медиком, философом и математиком, но, даже добиваясь крупных результатов во всех указанных областях знания, не сосредоточился ни на одной из них. Кроме того, он страстно увлекся лженаукой астрологией и даже составил свой гороскоп. По этому гороскопу Кардано уверенно определил день и час своей смерти, а так как в назначенное время он не умер, то для доказательства своей правоты Кардано в предсказанный им момент покончил жизнь самоубийством.

По-видимому, Кардано удалось выведать от Тартальи его метод решения уравнений третьей степени, и он обнародовал его в своем сочинении, не скрывая, однако, что этот метод принадлежит Тарталье[1]. Но Тарталья сам собирался написать большой труд по алгебре, в котором его метод решения уравнений третьей степени должен был занимать видное место, поэтому поступок Кардано возмутил Тарталью и послужил причиной их непримиримой вражды.

Метод Тартальи заключался в том, что в уравнении[2]

$$x^3=px+q$$

он заменил x через новые неизвестные u и v. А так как при этом выбор одной из неизвестных произволен, то он положил:

$$\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}=x, \quad \text{а} \quad uv=\left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

откуда при подстановке этих значений в исходное уравнение

[1] Тарталья сообщил Кардано правило решения кубического уравнения в стихах, но его доказательство Кардано нашел сам.

[2] Метод Тартальи приводится в современных обозначениях.

получалось, что $u-v=q$. Затем новые неизвестные u и v определялись через коэффициенты p и q, и тогда x находилось по формуле

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}}.$$

Так как общее уравнение третьей степени вида

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

подстановкой $x=y-\frac{b}{3a}$ всегда можно свести к неполному, разрешенному Тартальей, то можно считать, что Тарталья дал общее решение, то есть нашел зависимость между корнями и коэффициентами этого уравнения.

Основным математическим трудом Тартальи является его незаконченная работа «Общий трактат о числе и мере», в которой содержится изложение вопросов арифметики, алгебры, геометрии и даже некоторых понятий из теории вероятностей.

Самым крупным по значению математическим трудом Кардано было упомянутое нами ранее «Великое искусство, или о правилах алгебры». Здесь, между прочим, указывается и метод приведения уравнений третьей степени к неполному виду, то есть фактически окончательно решается вопрос о выражении корней уравнения третьей степени через его коэффициенты. В этом труде Кардано заключается много идей, которые впоследствии получили развитие и способствовали значительному прогрессу математики.

Так, Кардано первый из европейских математиков допустил существование отрицательных корней квадратных и кубических уравнений, хотя он и именовал отрицательные числа «фиктивными». Мало того, Кардано признавал даже существование мнимых корней уравнений, но называл эти корни «софистическими» и считал, что уравнение, имеющее только мнимые корни, не имеет решения; в то же время ему было известно, что если уравнение имеет один мнимый корень, то у него должен быть и другой мнимый корень, сопряженный с первым. Не признавая софистические корни за истинные, Кардано все же допускал, что эти софистические числа имеют какое-то значение в математической практике. Это видно из разобранного им примера, в котором Кардано решает вопрос: разделить число 10 на две части, произведение которых равнялось бы 40. Рассуждение Кардано приводит его к ответу, что искомые части должны быть $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$. Таким образом, сумма двух найденных софистических чисел и их произведение дают истинные числа.

Среди других интересных мыслей у Кардано встречается также мысль о делимости многочлена на $x-a$, если a является корнем этого многочлена. Наконец, Кардано приводит и общее решение уравнений четвертой степени, указывая на то, что это решение получено его учеником Феррари.

Таким образом, открытием *Лодовико Феррари* (1522—1565) завершается цикл получения формул для выражения зависимости корней уравнений различных степеней от коэффициентов. Хотя в последующие периоды истории и были попытки отыскать общие решения для уравнений выше четвертой степени, но они не могли увенчаться успехом, так как впоследствии, уже в XIX в., норвежский ученый Нильс Абель показал, что уравнения степени выше четвертой в общем виде не могут быть разрешены в радикалах.

К числу крупных итальянских математиков XVI в. надо отнести *Раффаэле Бомбелли* (ок. 1530—1572). В 1572 г. им написана «Алгебра», обладающая большими научными достоинствами: в ней Бомбелли совершенно свободно обращается с мнимыми корнями уравнений и приводит даже табличку для перемножения положительных и отрицательных, действительной и мнимой единиц.

Из французских математиков эпохи Возрождения мы должны отметить прежде всего лионского врача, бакалавра медицины Парижского университета *Николя Шюке* (год рожд. неизвестен — 1500). Им было написано сочинение «Наука о числе». Рукопись этой работы была завершена еще в 1484 г., а издана лишь в XIX в. В «Науке о числе» Шюке дает упорядоченную систему числовых наименований: к введенному еще ранее итальянцами наименованию «миллион» он добавляет наименования «биллион», «триллион», «квадриллион», «квиллион», «сикслион», «септиллион», «октиллион», «нониллион» для обозначения соответственно чисел 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}, 10^{30}, 10^{36}, 10^{42}, 10^{48}, 10^{54} и далее пишет: «Таким же образом поступают в отношении более крупных чисел».

В том же сочинении Шюке обращает много внимания на символическую запись. Для выражения сложения и вычитания он употребляет, как и итальянские математики, знаки $\bar{p}$ и $\bar{m}$.

Шюке вводит в употребление показатели степени, причем встречаются даже обозначения для отрицательного показателя степени. Для выражения степени неизвестного он вводит такую запись: вместо нашего обозначения 12, $12x$, $12x^3$, $7x^{-1}$ он пишет 12^0, 12^1, 12^3, 7^{1m}. Точно такие же показатели он употребляет и для выражения степени корня, причем корень он изображает буквой R.

Так, у Шюке $\sqrt{16}$ записывается как $R^2 \cdot 16$, а $\sqrt[3]{64}$ — как $R^3 \cdot 64$.

В работе «Наука о числе» мы встречаем также идею, подобную той, которую позднее высказал Штифель и которую мы расцениваем как идею логарифмирования. Именно Шюке сопоставляет арифметические прогрессии с геометрическими таким образом:

$$\begin{matrix} 0, 1, 2, 3, \dots \\ 1, 2, 4, 8, \dots \end{matrix}$$

и

$$\begin{matrix} 0, 1, 2, 3, \dots \\ 1, 3, 9, 27, \dots \end{matrix}$$

и при этом указывает, что произведению двух членов геометрической прогрессии в арифметической прогрессии соответствует тот член, который равен сумме членов этой прогрессии, соответствующих множителям.

Решающее значение в развитии современной символической алгебры имели работы другого французского математика конца XVI в. *Франсуа Виета* (1540—1603). Будучи юристом по профессии и крупным государственным деятелем при королевском дворе (тайный советник короля), Виет все свободное время отдавал математике, которой увлекался настолько, что иногда, разрешая какие-нибудь проблемы, не спал по нескольку ночей кряду. В своих математических работах, из которых главной является «Введение в искусство анализа», Виет, помимо усовершенствования алгебраической символики, развил теорию решения уравнений, расширил круг применения алгебры к геометрии, стал применять тригонометрию к алгебре и значительно содействовал развитию тригонометрии.

Главная заслуга Виета заключается в том, что он внес в алгебраическую запись обозначение чисел буквами. При этом важно то, что он изображал буквами не только неизвестные

ФРАНСУА ВИЕТ

величины, но и числовые коэффициенты. Обозначения Виета дали возможность оперировать с общими величинами, что и является главнейшим преимуществом его работ. Он ввел в употребление самое слово «коэффициент» (что означает «содействующий»). Виет стал употреблять знак черты, поставленный над численными или буквенными выражениями, имеющий смысл наших скобок.

В теории уравнений, решая уравнения высших степеней, Виет всегда прибегал к превращению данного уравнения в неполное. Например, решая квадратное уравнение, он исключал в нем первую степень неизвестного, как это будет показано ниже. Его рассуждения мы проведем, пользуясь современными записями.

Пусть требуется решить квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0.$$

Положим $x=u+v$, тогда получим $(u+v)^2+p(u+v)+q=0$ или $u^2+(2v+p)u+v^2+pv+q=0$.

Выберем v таким образом, чтобы коэффициент при u равнялся 0, для этого v должно равняться $-\frac{p}{2}$. Подставив это значение v в уравнение, придадим ему вид

$$u^2+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{2}+q=0.$$

Отсюда

$$u=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

следовательно,

$$x=u+v=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Виет близко подходил к мысли о зависимости между коэффициентами уравнения и его корнями, но не мог полностью выразить эту зависимость, так как, решая уравнение, признавал только его положительные корни, то есть не мог охватить все решения уравнения. Во всяком случае он знал, что для уравнения

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x=abc$$

a, b и c являются корнями. У Виета встречается задача, в которой он предлагает проверить это свойство на уравнениях

$$x^3-6x^2+11x-6=0 \text{ и } x^3-4x^2-4x+16=0.$$

Им предложен интересный метод приближенного решения алгебраических уравнений любой степени, а также разработана «композиция треугольников», которая равносильна умножению комплексных чисел.

В тригонометрии Виет дал полное решение треугольников по трем данным элементам, представил разложение $\sin(nx)$ и $\cos(nx)$ по степеням синуса и косинуса x, впервые сформулировал двойственную теорему косинусов.

В конце эпохи Возрождения — начале XVII в.— в Голландии жил и работал крупный инженер и механик *Симон Стевин* (1548—1620). Наиболее ценный вклад Стевин внес в статику и гидростатику, но и его работы по математике имели большое значение для дальнейшего развития математических идей в Западной Европе. Как инженер-практик Стевин и в математике обращал внимание на вопросы практического счета. В 1582 г. Стевин обнародовал составленные им таблицы для вычисления сложных процентов. Главной его заслугой в математике явилась разработанная им теория десятичных дробей и введение их записи. Мы помним, что десятичные дроби на Востоке были введены еще аль-Каши, но в Европе они до Стевина употреблялись лишь случайно. Стевин же вполне сознательно подошел к ним и считал, что их введение принесет значительное упрощение в счете. Теорию этих дробей он изложил в 1585 г. в маленькой брошюрке «Десятая». Однако введенная Стевиным символика десятичных дробей оказалась недостаточной для практической записи, и современная запись таких дробей гораздо рациональнее. Для выражения десятичных знаков Стевин ставил после каждого знака кружок, в котором отмечал цифрой указатель разряда дроби; например, число 3,237 записывалось Стевином так:

3 ◯ 2 ① 3 ② 7 ③

В этой записи целая часть отделялась от дробной кружком без цифры. Иногда запись еще более упрощалась: указатели тогда ставились не между цифрами, а сверху и притом без кружков. То же число в этой записи представлялось так:

$$\begin{matrix}0123\\3237\end{matrix}$$

Свои обозначения Стевин применил и для записи показателей степени. Кружком он стал обозначать неизвестное, а показатели степени неизвестного отмечались цифрами внутри кружка. То, что мы обозначаем через x, x^2, x^3, x^4 и т. д., Стевин обозначал через

① ② ③ ④

и т. д. При этом он употреблял такое же обозначение и для дробных степеней.

Интересно отметить, что Стевин, видя большие преимущества счета с десятичными дробями, пришел к мысли о желательности введения в практику десятичной системы мер и свой проект их введения изложил в упомянутой выше работе.

РАЗВИТИЕ ЛОГАРИФМОВ

В XVII в. в Западной Европе математика уже имела довольно развитую алгебраическую символику, сильно продвинувшую в развитии тригонометрию, и несколько упрощенную технику счета. Однако открытие логарифмов вполне осуществилось и вошло в практику лишь в конце эпохи Возрождения — начале XVII в.

В XVI в. были широко распространены два метода, позволявшие при расчетах заменять более сложное действие умножения сложением. Первый из них, называемый простаферетическим[1], был основан на тригонометрических формулах:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Второй метод давал переход от умножения к сложению при помощи алгебраической формулы

$$ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2].$$

При этом второй метод был удобен лишь тогда, когда он опирался на готовые таблицы квадратов чисел. Такие таблицы были опубликованы *Антонио Маджини* в 1592 г.

Однако в XVII в. указанные громоздкие методы вычисления постепенно были вытеснены новым методом — логарифмическим.

Из предыдущего очерка мы уже видели, как французский математик Шюке и немецкий Штифель, сопоставляя арифметическую и геометрическую прогрессии, приходили к выводу,

[1] Наименование это происходит от греческих слов «простезис» и «афайрезис» — прибавление и снятие.

что действие умножения над членами геометрической прогрессии можно упростить, производя вместо него действие сложения над сопоставленными с ними членами арифметической прогрессии, и действия деления, возвышения в степень и извлечения корня, произведенные над членами геометрической прогрессии, также можно соответственно заменять вычитанием, умножением и делением сопоставленных с ними членов арифметической прогрессии. Однако ни Шюке, ни Штифель не могут быть названы изобретателями логарифмов, так как они не развили своих идей далее некоторых предположений, еще недостаточно разработанных и не приведенных в стройную систему.

Изобретателями логарифмов, составившими их таблицы для практического пользования и давшими им теоретическое обоснование, были швейцарский часовщик Й. Бюрги и шотландец Джон Непер.

Бюрги (1552—1632) не был специалистом-математиком. Так как Бюрги был часовым мастером и механиком, ему приходилось разбираться в устройстве астрономических приборов, а иногда и делать астрономические вычисления, связанные с наблюдениями при помощи этих приборов. В 1603 г. Бюрги был назначен на место придворного часового мастера в Праге, где он работал рядом со знаменитым математиком и астрономом Иоганном Кеплером. Сталкиваясь с кропотливыми астрономическими вычислениями, Бюрги и пришел к мысли о необходимости их упрощения. В сочинении «Арифметические и геометрические таблицы прогрессий» Бюрги практически осуществил идеи Штифеля: он составил таблицы, сопоставлявшие арифметическую и геометрическую прогрессии, но сами прогрессии были подобраны так, что их употребление было гораздо более приспособлено к практическому счету.

За арифметическую Бюрги взял прогрессию вида

$$0,\ 10,\ 20,\ \ldots,\ 10n$$

и сопоставил ей геометрическую прогрессию

$$10^8,\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right),\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2,\ \ldots,\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n.$$

Таким образом, члену $10n$ арифметической прогрессии соответствует член $10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n$ геометрической прогрессии.

ДЖОН НЕПЕР

Не извращая идеи Бюрги, мы представим схему его таблиц несколько иначе, чем это сделано у него. А именно: вместо упомянутых прогрессий сопоставим другие:

$$0,\ 0{,}0001,\ 0{,}0002,\ \ldots,\ 0{,}000n$$
$$1,\ 1{,}0001,\ (1{,}0001)^2,\ (1{,}0001)^3,\ \ldots$$

Здесь единице в арифметической прогрессии соответствует число $(1{,}0001)^{10^4}$ в геометрической, то есть основанием для таблицы логарифмов Бюрги служит

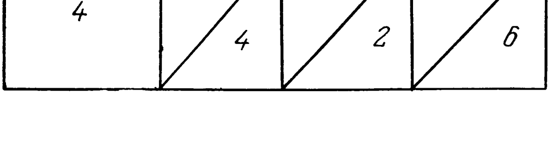
$$(1{,}0001)^{10^4} = 2{,}71814593...$$

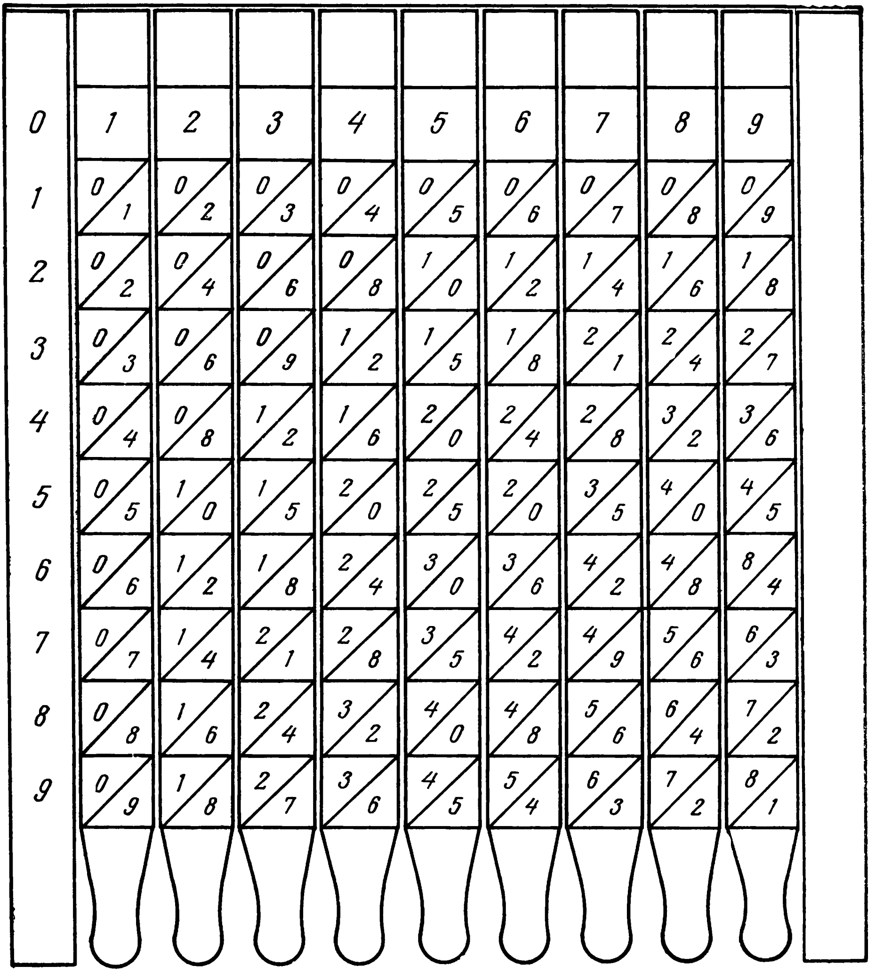
Если мы вспомним, что число $e=2{,}718281828...$, то увидим, что основание логарифмов Бюрги отличается от числа e только начиная с четвертого десятичного знака.

Иоганн Кеплер, понимавший огромное значение таблиц Бюрги для вычислений, настойчиво рекомендовал ему опубликовать свой метод ко всеобщему сведению, но Бюрги медлил, и получилось так, что в печати раньше появились таблицы логарифмов другого автора. Таблицы Бюрги были изданы в 1620 г., а на 6 лет раньше (в 1614 г.) Джон Непер опубликовал составленные им таблицы под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов».

Шотландский барон *Джон Непер* (1550—1617) тоже не был специалистом-математиком. Он делил свои интересы между многими отраслями знания, причем главным образом занимался вопросами, имевшими непосредственное приложение к жизни. Так, он изобрел несколько сельскохозяйственных машин, а также некоторые военные приборы.

В области математики Непер интересовался главным образом вопросами вычислительного характера, отыскивая способы для облегчения счета. Так, в сочинении «Рабдология», изданном в год его смерти, он описывает свой прибор, который в наше время носит название «неперовы палочки» и служит хорошим методическим пособием в школе. Этот прибор состоит из десяти основных палочек, на которых помещена таблица умножения. Левая палочка неподвижна, а все остальные могут менять свои места. В каждом квадратике таблицы проведены диагонали, причем в нижней части квадратика помещаются единицы частных произведений таблицы умножения, а в верхней — десятки. При помощи прибора Непера можно производить умножение и деление чисел, причем умножение заменяется сложением, а деление вычитанием. Если, например, нужно умножить число 684 на 4, то для этого ставим рядом палочки, имеющие сверху числа 6, 8 и 4, и обращаем внимание на клетки этих палочек, стоящие в одной строке с 4. Эти клетки представляются в следующем виде:





НЕПЕРОВЫ ПАЛОЧКИ

Складываем числа параллельно диагоналям квадратов и находим: 2, 3+4=7, 1+2=3, 6. Искомое произведение равно, следовательно, 2736.

Неперовы палочки дают значительное упрощение в счете, но они далеко уступают в этом отношении таблице логарифмов, составленной Непером.

Идею логарифмов Непер разработал еще в последние годы XVI в., не имея никаких сведений о трудах Бюрги в этой области. В первой книге по этому вопросу — «Описание удивительной таблицы логарифмов» — Непер дал таблицу логарифмов, изложил их свойства и указал их практическое применение при производстве различных вычислений. Еще раньше, чем эта работа была опубликована, Непер написал другую книгу — «Устройство удивительной таблицы логарифмов», в которой дается разъяснение метода вычисления логарифмов, но она была издана уже после его смерти, в 1619 г.

Таблицы Непера предназначались главным образом для вычисления тригонометрических величин и были построены на очень оригинальных соображениях, связанных с движением точки.

Довольно сложный ход рассуждений Непера привел его к идеям, которые в наше время можно было бы разъяснить, прибегнув к помощи дифференциального исчисления и методам интегрирования дифференциальных уравнений. Мы постараемся, сохранив в основном ход мысли Непера, сделать разъяснения более элементарными.

Предположим, что по двум прямолинейным траекториям движутся точки A и A' (рис. 19). Обе точки из начального положения выходят с очень большой скоростью v. Пусть отрезок AB выражает величину скорости v. Непер предполагал, что точка A движется с затухающей скоростью, пропорциональной расстоянию этой точки от точки B, а точка A' движется все время равномерно.

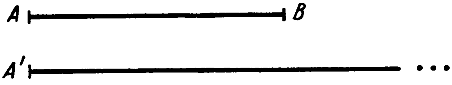


Рис. 19

Несколько отступая от буквального изложения хода мыслей Непера, мы будем считать, что точка A движется так, что ее скорость в начале каждого нового единичного промежутка времени пропорциональна оставшейся до точки B части пути, а в течение каждого малого промежутка времени $\Delta t = \frac{1}{v}$ остается постоянной.

При нашем предположении в конце первого промежутка времени точка A пройдет за промежуток времени Δt путь, близкий к 1, а ее скорость в начале второго промежутка времени будет равна $v - 1 = v\left(1 - \frac{1}{v}\right)$. Двигаясь с этой скоростью, точка A за второй промежуток времени Δt пройдет расстояние, равное $\frac{v-1}{v}$, а расстояние до конца B останется $v - 1 - \frac{v-1}{v} = (v-1)\left(1 - \frac{1}{v}\right) = v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^2$.

Рассуждая подобным образом, мы можем сказать, что в конце k-го промежутка времени расстояние от точки A до точки B будет равно $v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^k$. В то же время точка A', двигаясь равномерно, проходит в первый промежуток времени путь, равный 1, в конце второго промежутка — путь, равный 2, и т. д.

Сопоставляя числа, выражающие в конце каждого промежутка времени путь, оставшийся до точки B у точки A, с путем, пройденным к этому времени точкой A', мы в сущности сопоставим члены геометрической и арифметической прогрессий следующих видов:

$$\begin{array}{ccccccc} v, & v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^1, & v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^2, & v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^3, & \ldots, & v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^v, & \ldots, \\ 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots, & v, & \ldots \end{array}$$

Члены геометрической прогрессии Непер назвал числами, а члены арифметической прогрессии — их логарифмами[1]. Таким образом, Непер еще не придавал понятию логарифма тот смысл, который мы вкладываем в него в настоящее время, называя логарифмом показатель степени, в которую нужно возвести основание, чтобы получить данное число. И это вполне понятно, так как во времена Непера алгебраическая сим-

[1] Само слово логарифм происходит от двух греческих слов: «логос», что может быть переведено словом «отношение», и «аритмос», что означает число. Следовательно, логарифм в дословном переводе означает «число отношения».

волика была развита недостаточно. В частности, еще не вошли в общее употребление методы записи показателей степени, ибо попытки, сделанные в этом направлении Штифелем и Стевином, не получили широкого применения. Таким образом, логарифмы Непера родились ранее, чем вошло во всеобщее употребление понятие об основании и показателе степени.

Логарифмы, созданные Непером, несколько отличаются от тех логарифмов, к которым мы привыкли. Например, с возрастанием числа логарифмы в Неперовской таблице убывают, а отрицательные логарифмы в ней получаются лишь для чисел, превосходящих по величине v.

Такие особенности таблиц Непера объясняются главным образом тем, что свои таблицы Непер создавал преимущественно для упрощения тригонометрических вычислений. Расстояние AB на нашем чертеже представляло у Непера величину синуса 90°, то есть величину радиуса, и этот радиус у него был принят равным 10^7.

Непер заслуженно считается изобретателем логарифмов. Он не только дал практическую таблицу, но и детально разработал теорию логарифмов, выявил их сущность, в то время как Бюрги дал лишь практическое применение идеи Штифеля к вычислениям.

Профессор Оксфордского университета *Генри Бригс* (1561—1630) при свидании с Непером предложил ему внести в таблицы некоторые изменения, которые сделали бы их более удобными для вычислений с обыкновенными числами. Идея Бригса заключалась в том, чтобы за основание таблиц принять число 10. Оказалось, что это предложение вполне совпадало с собственными намерениями Непера. Таким образом, по инициативе Бригса и Непера были созданы наши обыкновенные десятичные логарифмы.

При основании 10 таблица получилась такая:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ 1 & 10^1 & 10^2 & 10^3 & 10^4 & 10^5 & \ldots \end{array}$$

Бригс совместно с другим математиком голландцем *Андрианом Влакком* (1600—1667) выполнил исключительно трудоемкую работу, составив таблицы 14-значных логарифмов; причем вычисления логарифмов от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000 проделал сам Бригс, а для чисел от 20 000 до 90 000 — Влакк. Для того чтобы судить, насколько колоссальна была проделанная Бригсом и Влакком работа по составлению таблиц, на простом примере проследим, как составлялись эти таблицы.

Так как таблицы, составленные при основании 10, с натуральными показателями степени могли давать логарифмы только для круглых чисел: 1, 10, 100..., то логарифмы для промежуточных чисел приходилось находить путем отыскания средних геометрических величин из чисел (то есть из членов геометрической прогрессии) и средних арифметических из логарифмов (то есть из членов арифметической прогрессии), соответствующих этим числам. Так, для нахождения логарифма 5 Бригс исходил из логарифмов чисел 1 и 10. Вычисление шло приблизительно следующим порядком:

Числа	Логарифмы
$A = 1;$	0,00000000000000;
$B = 10;$	1,00000000000000;
$C = \sqrt{AB} = 3{,}162277;$	0,50000000000000;
$D = \sqrt{BC} = 5{,}623413;$	0,75000000000000;
$R = \sqrt{CD} = 4{,}216964;$	0,62500000000000;
5,000000;	0,69897000000000.

Для вычисления одного только логарифма 5 пришлось сделать 22 извлечения корня.

Составленные Бригсом и Влакком таблицы вошли во всеобщее употребление, и в наше время они являются наиболее распространенными таблицами логарифмов и приняты для изучения в школах.

Однако практика показала, что для теоретических, буквенных расчетов и для вычислений, встречающихся при выполнении научных работ, использующих показательные функциональные зависимости, практичнее применять логарифмы с основанием e, то есть так называемые натуральные логарифмы. В точном смысле слова натуральные логарифмы впервые встречаются у математика, имя которого едва не было утеряно для истории, а биография неизвестна. Только из заголовка книги, в которой он опубликовал свои логарифмы, можно узнать, что автор — преподаватель математики в английских школах *Джон Спейдель*. Он выпустил в свет свою работу в 1619 г., то есть на год ранее, чем сделал это Бюрги.

Когда логарифмы ввиду их практического удобства окончательно вытеснили из употребления существовавшие до них простаферетический и подобные ему громоздкие методы, то техника вычислений значительно упростилась. Характерно, что практика логарифмирования внесла коренное изменение в само построение счета: если в предшествующих методах стремились заменить умножение сложением, то при пользовании таблицами логарифмов мы, наоборот, стараемся выразить суммы через произведение, приводя выражения к виду, удобному для логарифмирования.

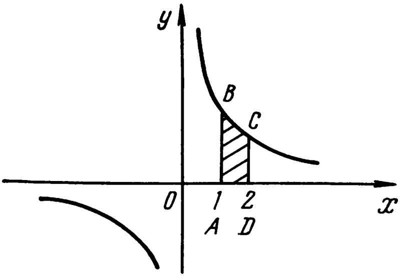


Рис. 20

В дальнейшей истории развития логарифмов нам следует отметить работы *Григория Сент-Винцента* (1584—1667), уроженца г. Брюгге во Фландрии, который сопоставил значения величин логарифмов с площадями, заключенными между равносторонней гиперболой и ее асимптотами. В самом деле, если взять уравнение равносторонней гиперболы, отнесенной к ее асимптотам, то, как известно, оно примет такой вид:

$$y = \frac{1}{x}.$$

В современной символике мы можем это записать так:

$$S_{ADCB} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2,$$

где S_{ADCB} — искомая площадь (рис. 20).

По этой причине натуральные логарифмы иногда называют **гиперболическими** логарифмами.

Идеи Винцента дали возможность *Николусу Меркатору* (ок. 1620—1687) в 1668 г. прийти к идее разложения логарифмов в ряд.[1]

Действительно, если мы несколько сместим оси координат, не изменяя их направления, то можно будет уравнение вышеприведенной гиперболы представить так:

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots,$$

[1] К такой же мысли независимо от Меркатора пришел и Ньютон.

откуда

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots)\, dx = \ln(1+x) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$$

Разложение логарифмов в ряд дало впоследствии возможность производить вычисление логарифмов способами, гораздо более изящными, чем приходилось это делать Бригсу и Влакку, и упростило составление таблиц логарифмов.

Значение логарифмов для вычислительной техники трудно переоценить. Об этом красноречиво говорят слова *Пьера Симона Лапласа* (1749—1827): «Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь».

ГЛАВА IV. ПЕРИОД СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИКИ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

ОБЩИЙ ХОД РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В XVII В.

Эпоха XV—XVI вв. была эпохой умирания феодализма и развития торгового капитализма. В эту эпоху кустарно-ремесленное производство постепенно преобразовывалось в мануфактурное. Стремление торгового капитала к получению новых рынков двинуло корабли в дальние рейсы. Развились астрономия и география. Появилась потребность в точных вычислениях, которая и вызвала развитие логарифмов и тригонометрии.

XVII в. уже вносит нечто новое: в производстве появляются сначала простейшие механизмы, а затем внедряются и более сложные машины; и промышленность, отказываясь от мануфактурных методов производства, переходит к более совершенным его формам, основанным на применении машин. Развитие производительных сил сказывается и на развитии производственных отношений. Зарождается промышленный капитал, и промышленная буржуазия начинает понимать необходимость освоения механического производства. Математике предъявляются новые требования. Вопросы прогрессирующей техники уже не могут быть разрешены средствами одной элементарной математики. Движение механизмов вносит движение и в математику. Зарождаются новые методы, новые отрасли науки, отражающие это движение: развиваются алгебра и алгебраический метод в геометрии, а в анализе постепенно завоевывает свое прочное место учение о бесконечно малых величинах. Новые методы значительно расширяют область применения математики к изучению явлений окружающей жизни и, постепенно совершенствуясь, создают основу современной математики.

Одновременно и внутри элементарной математики назревает перелом: творческая мысль ученых обратилась на изучение ее основ; развиваются теория чисел и комбинаторика,

БАШЕ ДЕ МЕЗИРИАК

а на основах комбинаторики строится новая отрасль математики — теория вероятностей.

Первые представители новых идей в математике еще не могли облечь эти идеи в новую форму и вливали их в старые формы; но эти формы постепенно распадались, изменялись и создавались новые, соответствующие тем идеям, которые зарождались под давлением требований жизни, и таким образом в науке произошел коренной перелом, который по существу был вызван переломом в производстве.

Новые идеи в математике широкое распространение получают первоначально во Франции, а затем уже и в других странах Западной Европы. К этому переходному времени относятся уже рассмотренные нами ранее работы Франсуа Виета, а также деятельность Баше де Мезириака. А затем уже более определенно новые идеи проникают в учения Кеплера, Кавальери, Ферма, Паскаля и многих других ученых и, наконец, выливаются в стройные научные системы Декарта, Лейбница и Ньютона, завершивших построение аналитической геометрии и математического анализа.

Гаспар Баше де Мезириак (1587—1638) родился во французском городе Бург-ан-Гресс. Получив хорошее образование, преимущественно в области литературы, и изучив многие иностранные языки, он с 1635 г. стал членом только что учрежденной французской Академии наук. Баше был неплохим поэтом, но это не мешало ему проявлять и большой интерес к математике. При этом всего более его занимали вопросы теории чисел. В 1621 г. Баше выпустил издание «Арифметики» Диофанта на латинском и греческом языках. Эти издания были тщательно обработаны Баше и снабжены комментариями; они сыграли значительную роль в повышении интереса к вопросам теории чисел.

Эти вопросы привлекали и самого Мезириака; ему приписывается, например, теорема о том, что всякое неквадратное число, начиная с четырех, может быть разложено на сумму двух, трех или четырех квадратов. Эта теорема является как бы частным случаем возникшей впоследствии проблемы Варинга, о которой нам еще придется говорить.

В 1612 г. Мезириак издал весьма популярную в его время книгу «Problêmes plaisants et délectables qui se font par les nombres». Эта книга переиздавалась даже в XIX в. На русском языке она появилась под названием «Игры и задачи, основанные на математике». В этой работе Мезириак собрал различные занимательные задачи, из которых многие заимствовал у авторов прежних времен. Будучи хорошим математиком, Мезириак сумел выделить задачи, наиболее интересные в математическом отношении, а также нашел их обобщающие решения. Решения некоторых из этих задач не требуют особых приемов и основаны лишь на смекалке; другие, наоборот, требуют специальных математических приемов и методов; здесь встречаются и задачи, основанные на теории делимости, и задачи на неопределенные уравнения и системы неопределенных уравнений. Приведем тексты некоторых задач Мезириака.

1. «Бедную женщину, несшую корзину яиц для продажи на базаре, кто-то толкнул так, что корзина упала и яйца разбились. Виновник хочет возместить пострадавшей убытки и спрашивает, сколько было яиц. Она не может вспомнить, но говорит, что когда она раскладывала по 2, или по 3, или по 4, или по 5, или по 6, то всегда оставалось одно яйцо, а по семь они раскладывались без остатка. Сколько всего было у нее яиц?»

2. «Некто, умирая, разделил свои деньги между сыновьями так, что первый получил 1 талер и $^1/_7$ остатка, второй — 2 талера и $^1/_7$ остатка, третий — 3 талера и $^1/_7$ остатка и т. д. Оказалось, что все сыновья получили поровну. Спрашивается, как велика была разделенная сумма и сколько было сыновей?»

3. «Два приятеля имеют 8 литров вина в бочонке, вместимость которого равна как раз 8 литрам. Они хотят разделить эти 8 литров на две равные части и могут воспользоваться для этого двумя другими бочонками вместимостью один в 5, а другой в 3 литра. Как это сделать?»

4. «Три ревнивых мужа должны переправиться вместе со своими женами через реку, имея в своем распоряжении только одну лодку без перевозчика, такую маленькую, что в ней может поместиться не более двух человек. Как выполнить переправу таким образом, чтобы ни в один момент ни одна из жен не находилась в обществе одного или двух чужих мужей в отсутствие своего?»

Четвертая задача является вариантом уже известной нам из работ Алкуина задачи о волке, козе и капусте.

Особое место среди задач Мезириака занимают так называемые «магические квадраты». Во времена Мезириака магические квадраты являлись лишь математическими развлечениями, которые заключались в том, что квадрат разбивался на равные квадратные клетки (9, 25, 49 и пр.) и надо было во всех клетках разместить числа натурального ряда, начиная с единицы, так, чтобы сумма чисел в каждом столбце, каждой строке и каждой диагонали получалась одна и та же. Такое размещение представляет изрядную трудность, и надо выработать особые приемы, чтобы суметь его выполнить. Приводим некоторые примеры магических квадратов:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

В более поздние времена магические квадраты приобрели и чисто теоретическое значение, так как выяснилось, что их теория применима для решения систем уравнений.

Интерес к вопросам теории чисел отразился и в работах крупного французского математика XVII в. Пьера Ферма.

Пьер Ферма (1601—1665), сын торговца кожами, получил юридическое образование и работал сначала адвокатом, а впоследствии он стал советником парламента. Его служебные обязанности, очень далекие по содержанию от математических наук, оставляли ему достаточно досуга, который Ферма и посвящал своему любимому делу — занятиям математическими исследованиями. Благодаря своим природным способностям и настойчивости, необходимой при работе над вопросами математики, Ферма добился крупных результатов в самых различных ее областях. [1]

При этом он не только внес новые выводы в прежде существовавшие разделы математики, но своими работами способствовал развитию ее новых отраслей: математического анализа, аналитической геометрии, теории вероятностей. Его же надо считать и творцом теории чисел как науки.

Немало внимания уделил Ферма и вопросу о магических квадратах. Эти квадраты были известны индийцам и арабам. В эпоху средних веков они появились и в Западной Европе,

---

[1] Ферма был и физиком. В области физики, например, им сформулирован основной принцип геометрической оптики, известный под названием «принципа Ферма». **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

ПЬЕР ФЕРМА

причем благодаря свойствам таких квадратов их считали волшебными, и они расценивались как талисманы, предохранявшие против различных болезней. Но ученые математики подошли к ним с другой стороны. Они заинтересовались математической стороной их построения; их исследования на этом пути содействовали развитию некоторых математических теорий. Еще Мезириак нашел способы составления магических квадратов с нечетным числом клеток. Ферма распространил идею составления магических квадратов на пространство, то есть поставил вопрос о составлении кубов, обладающих свойствами, аналогичными свойствам магических квадратов.

Разбирая вопрос о делимости чисел, Ферма дал интересный способ разложения данного натурального числа на два множителя. Этот способ полезен в том случае, когда приходится разлагать на множители число, про которое трудно сказать, разложимо ли оно.

Для разложения натурального числа A на множители подбирается такое число a, которое является наименьшим из тех, квадрат которых больше A. Тогда $A=a^2-K$. Если K представляет собой квадратное число, то есть если $K=b^2$, то разложение найдено:

$$A=a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Если же K не является квадратом, то вместо a берется $a+1$ и процесс представляется в следующем виде:

$$A=(a+1)^2-K_1.$$

Если K_1 представляет собой квадрат, то разложение проводится вышеуказанным способом; если же K_1 не является полным квадратом, то процесс продолжается далее и далее, причем вместо a и $a+1$ берутся последовательно $a+2$, $a+3$ и т. д. Например,

$$589=25^2-36=25^2-6^2=31\cdot 19;$$
$$703=27^2-26=28^2-9^2=37\cdot 19.$$

В теории чисел Ферма сделал много ценных выводов. Приведем только некоторые из них.

Им доказано, например, что всякое простое число вида $4n+1$ может быть представлено в виде суммы двух квадратов.

Большой известностью пользуются «великая теорема Ферма» и «малая теорема Ферма».

Великой теоремой Ферма называется то заключение, которое было сделано Ферма при чтении изданной Мезириаком «Арифметики» Диофанта. На полях этой книги, против того места, где идет речь о решении уравнения вида $x^2+y^2=z^2$, Ферма написал: «Между тем, совершенно невозможно разложить полный куб на сумму двух кубов, четвертую степень — на сумму двух четвертых степеней, вообще какую-нибудь степень — на сумму степеней с тем же показателем. Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но здесь слишком мало места, чтобы его поместить». Это положение Ферма теперь формулируется как теорема в следующем виде: «уравнение $x^n+y^n=z^n$ не может быть решено в рациональных числах относительно x, y и z при целых значениях показателя n, больших 2». Справедливость этой теоремы подтверждается для всех частных случаев, однако до сих пор она не доказана в общем виде, хотя ею интересовались и ее пытались доказать многие крупные математики. В 1907 г. в городе Дармштадте (Германия) умер математик *Вольфскель*, который завещал 100 000 марок тому, кто даст полное доказательство теоремы. Но эта премия до сих пор никому не выдана.

Малая теорема Ферма заключается в том, что если p — число простое и число a не делится на p, то разность $a^{p-1}-1$ делится на p. Например, $2^{7-1}-1$ делится на 7, $5^{3-1}-1$ делится на 3 и т. д.

Главным вкладом Ферма в алгебру явилась развитая им теория соединений. Отдельные задачи теории соединений или, как ее иначе называют, комбинаторики были решены уже в древности греками и индийцами, но научная постановка этих вопросов возникла лишь в XVII в. в работах Ферма и его современника, знаменитого французского философа, математика и физика Блеза Паскаля. Кроме того, эти два ученых, исходя из основ комбинаторики, положили начало новой математической науке, называемой теорией вероятностей.

Вопросы, из которых развились зачатки теории вероятностей, зародились еще в XVI в. Возникли они на почве страховых расчетов и азартных игр. В особенности интересной для математиков представлялась в этом отношении игра в кости. Так, уже Тарталья знал, сколько различных комбинаций очков может получиться при бросании кубиков при игре в кости. Существенно новым в работах Ферма и Паскаля явилось то, что они ввели основное положение теории вероятностей — понятие о математическом ожидании. Было установлено, что математической мерой вероятности ожидаемого события надо считать отношение числа благоприятных ожидаемому событию случаев к числу всех возможных и равновозможных случаев. Например, вероятность того, что при бросании одновременно двух кубиков на обоих вместе откроется 7 очков, равна $^1/_6$, а вероятность открытия при тех же условиях 3 очков равна $^1/_{18}$.

Задача, которая, как предполагается, дала толчок к зарождению математической теории вероятностей, была такова. В 1654 г. один приятель Паскаля, некий де Мере обратился к нему с вопросом о том, как произвести справедливый раздел денежной ставки при следующих условиях: два игрока в кости, вложившие равные суммы денег, затеяли игру с условием, что тот, кто раньше выиграет известное число партий, получит ставку. По некоторым обстоятельствам игра не могла быть закончена и прекратилась в тот момент, когда первому игроку не хватало до конца одной, а второму игроку — двух партий. Согласно решению, данному Паскалем, первый игрок должен был получить $^3/_4$ ставки, а второй — $^1/_4$ ее. Паскаль рассуждал так: на половину ставки первый игрок имеет право во всяком случае, так как, если бы даже второй выиграл следующую игру, то ставку пришлось бы делить пополам; но первый имеет право еще на четверть ставки, так как на вторую половину ее оба игрока имеют одинаковое право. Свое решение Паскаль передал Ферма, и тот, решив предложенную задачу при помощи комбинаторики, получил такой же ответ.

Теория вероятностей после тех основ, которые были заложены Ферма и Паскалем, стала быстро развиваться и в XVIII в. получила значительную теоретическую базу. При этом она стала приобретать все большее распространение и использоваться в различных областях науки и практической деятельности. Прежде всего она была применена к вопросам страхования, а в дальнейшем область ее применения все расширялась и расширялась.

Большое значение труды Ферма имели для развития аналитической геометрии. В сочинении «Введение в изучение плоских и телесных мест», напечатанном уже после смерти Ферма его сыном, с большой ясностью и исчерпывающей полнотой изложения ставится вопрос об изображении уравнений при помощи геометрии. Ферма находит, что уравнения удобно представлять геометрически, проведя два отрезка прямых под определенным, лучше всего прямым, углом друг к другу, взяв их пересечение за начало отсчета. Обозначая начало координат буквой N, ось абсцисс буквой A, ось ординат буквой E, обозначая также постоянные величины буквами B, D и g, он получал уравнения прямой, проходящей через начало координат, параболы, круга в таком виде: $D \cdot A = B \cdot E$, $A^2 = D \cdot E$ и $B^2 + A^2 = E^2$.

Следует заметить, что записи Ферма для соответствующих уравнений еще в значительной степени отличались от современных. Так, выражение A^2 записывалось им как Aq, где q — сокращение слова quadratum. Фактически уравнение прямой у Ферма записывалось следующим образом: «D на A равно B на E», а уравнение эллипса выражалось так: «Если $Bq - Aq$ име-

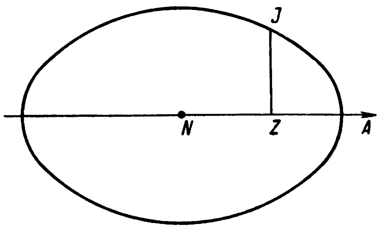


Рис. 21

ет данное отношение к Eq, то точка I находится на эллипсе». Эта запись соответствует чертежу (рис. 21).

Таким образом, в работах Ферма мы находим уже все необходимые данные для получения алгебраических уравнений, выражающих определенные геометрические места, то есть характерные черты аналитической геометрии. Надо лишь заметить, что для построений Ферма выбирал только одну ось (абсцисс) и на ней намечал исходную точку (начало координат), от которой производился отсчет. Оси ординат как таковой совсем не было, а для каждой точки на плоскости Ферма, кроме ее абсциссы, учитывал расстояние до выбранной оси по направлению, перпендикулярному по отношению к этой оси, или по наклонной, то есть пользовался прямоугольными или косоугольными координатами. Отрицательные отсчеты, то есть отрицательные абсциссы или ординаты, в работах Ферма отсутствовали, но тем не менее он свободно выражал уравнения окружности или эллипса, центр которого был расположен в начале координат, а большая ось совпадала с осью абсцисс, хотя такие окружности и эллипсы имели точки с отрицательными абсциссами и ординатами. Если два уравнения с двумя неизвестными [1] отличались только постоянными коэффициентами, то Ферма совершенно справедливо считал, что они выражают кривые одного и того же характера.

Работы Ферма в области аналитической геометрии, быть может, имели бы не меньшее значение для развития этой науки, чем работы Декарта, считающегося ее создателем, но, как уже было указано, большинство работ Ферма было приведено в порядок и опубликовано его сыном уже после смерти их автора, а потому работы Декарта и получили приоритет.

Та же участь постигла и те работы Ферма, которые являлись исследованиями в области математического анализа: они стали достоянием человечества уже после его смерти. К числу таких работ относятся, например, «Методы исследования наи-

[1] Термина «переменные величины» во времена Ферма еще не существовало, вместо него употребляли термин «неизвестные величины».

больших и наименьших значений» и работы, касающиеся квадратуры всех гипербол. В трудах по анализу Ферма дает методы определения касательных к плоским кривым, а также устанавливает методы интегрирования некоторых простейших функций. Его метод определения экстремальных значений функции в современных обозначениях можно представить в следующем виде: для определения экстремального значения функции $f(x)$ даем аргументу приращение, равное ε, и составляем уравнение $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}=0$. После деления на ε полагаем $\varepsilon=0$. Полученное уравнение и дает значение аргумента, при котором функция принимает экстремальное значение. Как видим, при указанном порядке производимых операций мы прибегаем к современному определению экстремума, так как если ε стремится к нулю, то левая часть уравнения представит производную, и, следовательно, мы найдем то значение аргумента, которое обращает производную функцию в нуль.

Свой метод Ферма применял ко многим геометрическим задачам, например к определению конуса наибольшего объема и цилиндра наибольшей поверхности, вписанных в шар, а также к вопросу построения касательных к кривым линиям. В общих чертах это построение можно представить в следующем виде: пользуясь современными обозначениями, построим график функции $y=f(x)$, изображающий данную кривую, (рис. 22). Если надо провести касательную в точке M этой кривой, то сначала строим секущую TMK, где T — точка пересечения этой секущей с осью абсцисс; затем опускаем перпендикуляры MS и KP на ось абсцисс и из точки M проводим линию, параллельную оси абсцисс, до пересечения в точке H с прямой KP.

Из подобия треугольников MTS и KMH получаем

$$TS : MS = MH : KH,$$

откуда

$$TS = \frac{MS \cdot MH}{KH}$$

или

$$TS = \frac{f(x) \cdot \Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)}.$$

Если Δx стремится к 0, то TS в пределе обращается в подкасательную и равняется $\frac{f(x)}{f'(x)}$. Имея точку M и зная подкасательную, можно уже легко построить и касательную.

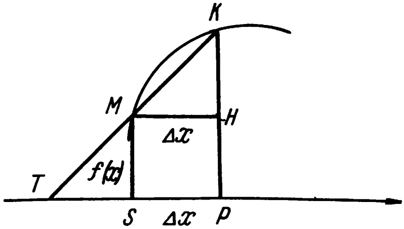


Рис. 22

Мы видим, что при решении подобной задачи Ферма пользовался треугольником KMH, в котором катетами являются приращения аргумента и функции. Этот треугольник имел большое значение для дальнейшего развития математического анализа, и им пользовались и другие современники Ферма, например Паскаль. Позднее Лейбниц назвал его характеристическим треугольником.

Решая задачи, связанные с нахождением экстремальных значений функции и с построением касательных, Ферма вплотную подошел к вопросам, которые впоследствии стали фундаментальными задачами дифференциального исчисления. Однако этим еще не исчерпывались проблемы математического анализа, которые умел решать Ферма. Решая геометрические задачи по квадратуре плоских кривых, то есть по определению площадей, ограниченных плоскими кривыми, Ферма выработал методы, очень близкие к интегральному исчислению.

Так, например, для парабол вида $x^p=y^q$ Ферма разбивал площадь, заключенную между графиком функции $y=x^{\frac{p}{q}}$, двумя ординатами и осью абсцисс, на полоски, как мы это делаем при интегрировании, но эти полоски он строил по определенному закону: ординаты строились для точек, абсциссы которых соответственно были равны x, ax, a^2x, a^3x и т. д., причем a считалось меньше единицы. При таком построении абсциссы точек уменьшаются, стремясь к 0, ширина полосок соответственно принимает значения

$$(1-a)x,\ a(1-a)x,\ a^2(1-a)x,\ a^3(1-a)x,\ \ldots$$

Соответствующими ординатами являются $x^{\frac{p}{q}}$, $a^{\frac{p}{q}}x^{\frac{p}{q}}$, $a^{\frac{2p}{q}}x^{\frac{p}{q}}$, $a^{\frac{3p}{q}}x^{\frac{p}{q}}$ и т. д. Приближенное значение площади получится, если брать вместо полосок прямоугольники, имеющие высотой ординаты, а основаниями — отмеченные нами расстояния между полосками, и суммировать площади всех полученных прямоугольников. Когда же в полученной сумме, представляющей сумму членов бесконечно убывающей прогрессии, положить

$a=1$, то найдется истинное значение искомой площади фигуры, расположенной между ординатами, соответствующими абсциссам 0 и x, а это равносильно тому, что вычисляется интеграл $\int\limits_0^x x^{\frac{p}{q}}dx$.

Варьируя свои методы, Ферма мог получать и интегралы вида $\int\limits_x^\infty \frac{dx}{x^m}$. Таким образом, он добивался квадратуры уже не парабол, а гипербол.

Рассмотренные нами примеры показывают, что Ферма владел основными методами анализа, но его приемы были громоздки: ему не удалось выработать более простых алгоритмов и соответствующей им упрощенной символики, для того чтобы подойти к современным методам дифференциального и интегрального исчислений.

Применяя открытый им метод к явлениям природы, Ферма установил так называемый «принцип наименьшего действия», согласно которому природа заставляет все явления совершаться с минимальной затратой энергии. Подобная мысль высказывалась еще в древности Героном, который полагал, что по этому принципу происходит отражение света (рис. 23): луч света, отраженный от зеркала, исходя из точки A, доходит до точки B по самой короткой ломаной линии AOB. Всякая другая линия (AO_1B, AO_2B и т. д.) длиннее линии AOB.

На основании принципа наименьшего действия Ферма объяснял, что форма пчелиных ячеек является более целесообразной в смысле расходования воска, чем какая-либо иная. Наиболее блестяще Ферма применил принцип наименьшего действия при объяснении закона преломления света, переходящего из одной среды в другую. Согласно этому принципу, Ферма установил, что общее сопротивление среды, слагающееся из сопротивления среды, из которой луч света исходит, и сопротивления среды, в которую он входит, является наименьшим, когда скорости света в обеих средах относятся прямо пропорционально синусам угла падения и угла преломления. Вы-

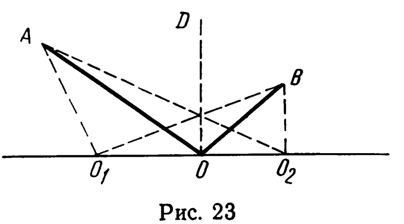


Рис. 23

РЕНЕ ДЕКАРТ

раженный Ферма принцип наименьшего действия носил чисто метафизический характер, но ввиду того что он объяснял многие явления природы, он был признан и практически применялся многими учеными не только XVII, но и XVIII в. Метафизический характер принцип сохранял до тех пор, пока его не удалось заменить более основательными принципами механики, что было сделано в XVIII в. на основании работ Лагранжа по механике.

Близки работам Ферма и Паскаля труды Декарта.

Рене Декарт (1596—1650) — великий французский философ, физик, математик и физиолог — происходил из старинного дворянского рода. Получив образование в одной из лучших школ Франции — в коллегии La Flèche,— он дополнил его чтением книг. «Я выучился всему, чему учились другие, не удовлетворяясь этим, я прочел все, какие только могли попасть мне в руки, книги о предметах, считавшихся самыми любопытными и необычными»,— писал о себе Декарт. [1] Однако книжная мудрость не удовлетворила Декарта, и он решил лучше познакомиться с «книгой мира», то есть с жизнью природы и людей, и для этого, пишет он, «употребил остаток своей молодости на путешествия, изучая людей при дворах и в армиях, общаясь с людьми различных общественных положений и характеров, собирая различные опыты, испытывая самого себя в положениях, в которые ставила меня судьба, и все, все, что мне представлялось, я рассматривал так, чтобы извлечь из этого какую-нибудь пользу». [2]

Поступив на военную службу, Декарт участвовал во многих войнах, в том числе и в Тридцатилетней. Военные походы приучили его к путешествиям, любовь к которым он сохранил на всю жизнь.

Большую часть своей научной работы Декарт проделал, живя в Голландии, но в 1649 г. по приглашению шведской королевы Христины переселился в Стокгольм, где ему были предоставлены прекрасные условия для научной работы. Однако суровый климат плохо повлиял на слабый организм Декарта, и уже в 1650 г. он умер от воспаления легких.

Исключительный интерес к философским вопросам и натурматематическим наукам, а также большая эрудиция Декарта в этих отраслях знания позволили ему выработать собственную философию, которая имела последователей. Эта философия носила дуалистический характер, так как опиралась на два взаимно противоречащих начала — идеализм и материализм. Этот дуализм выражался, с одной стороны, в том, что разрабатывалась идеалистическая метафизика, развивающая учение о духовной субстанции, о боге и о существовании души, с другой — в том, что все сочинения Декарта по физике, мате-

---

[1] Лоренц Г. Элементы высшей математики. Т. 1. М., 1910, с. 298—299.

[2] Там же.

матике и физиологии носили материалистический характер. В основу научных взглядов Декарт положил учение о материи, причем его материализм был механистическим. Основными свойствами материи Декарт считал ее подвижность и делимость. В своих материалистических сочинениях Декарт выступал против феодального церковно-схоластического учения, и этому учению он противопоставлял разум. Поэтому философия Декарта и получила в истории развития философской мысли название рационализма[1].

Математику, которую Декарт признавал как науку «о порядке и мере», он считал более других наук отвечающей требованию разума, а потому неудивительно, что математика очень интересовала его и его труды в области математических знаний имели особое значение для всего хода дальнейшего развития математики.

Положив в основу своей научной философии понятие о движущейся материи, Декарт внес движение и в математику. Если до Декарта математика носила метафизический характер, оперируя с постоянными величинами, то с трудами Декарта в математику, а вместе с тем и во все естествознание вошла диалектика.

«Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика»*.[2] «Сама математика, занимаясь переменными величинами, вступает в диалектическую область, и характерно, что именно диалектический философ, Декарт, внес в нее этот прогресс».[3]

Переворот в математике был произведен главным образом математическим трудом Декарта — «Геометрия». Движение, вошедшее в математику со времени появления этого труда, изменило ее характер, введя в нее переменную величину, тогда как до этого времени в математике господствовали постоянные величины. Это и было равносильно тому, что в науку вторглась диалектика, заменившая царившую ранее метафизику.

«Геометрия» является всего лишь одной из частей анонимно опубликованного в 1637 г. сочинения Декарта «Рассуждение о методе».

---

[1] От латинского слова ratio (ум, разум).

[2] Маркс К., Энгельс Ф. Соч., изд. 2-е, т. 20, с. 573.

[3] Там же.

Метод Декарта состоит из следующих четырех правил.

1. Считать истинным только то, что с очевидностью познается таковым. Другими словами, научное исследование следует проводить без спешки и предубеждения о выводах, причем отчетливость и ясность должны быть на первом плане.

2. Каждую из рассматриваемых трудностей делить на столько частей, сколько требуется для лучшего разрешения.

3. Исследование надо начинать всегда с наиболее простых и легко познаваемых предметов и постепенно восходить, как по ступеням, до познания наиболее сложных предметов и явлений, допуская существование порядка даже среди тех, которые не следуют друг за другом.

4. Делать всегда настолько полные перечни и общие обзоры (фактов, открытий, гипотез, систем), чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

В «Геометрии» Декарт дает основы символической буквенной алгебры и аналитической геометрии, то есть метод, при котором путем введения системы координат становится возможным выражать геометрические образы и зависимости аналитически, при помощи уравнений. Этот метод, как известно, применялся и ранее. Так, значительное развитие он получил у Ферма. Тем не менее у Декарта он приобретает гораздо большее значение, так как при помощи этого метода Декарту удалось изменить общее направление в дальнейшем развитии математических исследований. До Декарта с древних времен преобладающее значение в математике имела геометрия и даже алгебраические понятия и формулы обычно выражались геометрическими образами. Это наблюдалось и у тех ученых, которым мы обязаны значительным усовершенствованием алгебраической символики (например, у Виета). Декарт же, давая аналитическое выражение геометрическим образом, направлял математику по иному пути, на котором преимущественное значение получила алгебра. Вот почему в «Геометрии» Декарта и в его других работах, среди которых большое место занимает его переписка с друзьями, очень много внимания уделяется алгебре, причем он создает новую символику, и вследствие этого труды Декарта имеют большое значение и для развития алгебры. Благодаря Декарту алгебра как в своих основных методах, так и в символике приняла тот вид, который ей присущ и в настоящее время.

«Геометрия» Декарта по характеру изложения была мало доступна большинству его современников. Трудность заклю-

GEOMETRIA,

à

RENATO DES CARTES

Anno 1637 Gallicè edita, postea autem
Unà cum NOTIS

FLORIMONDI DE BEAUNE,

In Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in
Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,

Operâ atque studio

FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.

Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quam ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,

Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.

AMSTELÆDAMI,

Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
cIↄ Iↄc LIX.

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ ПЕРВОГО ЛАТИНСКОГО
ИЗДАНИЯ «ГЕОМЕТРИИ» ДЕКАРТА

чалась в том, что читателям приходилось разбираться в новой для них алгебраической символике и усваивать совершенно новые идеи, изложенные весьма лаконично. По существу в «Геометрии» даже нет строгого систематического изложения аналитической геометрии, а скорее приведены лишь краткие записи мыслей, для расшифровки которых надлежит употребить изрядный труд. Такой метод изложения вполне свойствен Декарту. Обладая гениальными способностями, сам он не любил читать подробные объяснения, которыми сопровождались научные трактаты, а, взяв книгу и выяснив основную идею автора, ограничивался прочтением первых страниц, а все выводы, к которым должен был прийти автор, он старался сделать сам. В этом для него и заключался основной интерес чтения. Полагая, что такой метод доступен всем читателям, Декарт и свои труды излагал лаконично.

Так, на одной из первых страниц «Геометрии» Декарт пишет: «Я, однако, не стану задерживаться и излагать подробнее, ибо тогда я лишил бы вас удовольствия разобрать это самостоятельно, а также пользы, которую приобрел бы при этом упражнении ваш ум и которая, на мой взгляд, составляет основную выгоду, извлекаемую из этой науки».[1]

В самом начале «Геометрии» Декарт устанавливает связь между арифметическими операциями и геометрическими соотношениями. Для этого он проводит между ними параллель такого рода: «подобно тому, как вся арифметика состоит только в четырех или пяти действиях, именно в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней, которое можно считать некоторого рода делением, подобно этому в геометрии, чтобы подготовить искомые линии к определению, нужно только прибавить к этим линиям или отнять от них другие; или же, имея линию, которую я, дабы удобнее установить более тесную связь с числами, назову единицей и которая обыкновенно может быть избрана произвольно, и имея еще две другие линии,— найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как другая к единице, и это то же самое, что умножение; или же найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как единица к другой, а это то же самое, что деление; или, наконец, найти одну, или же две, или несколько средних пропорциональных между

[1] Декарт Р. Геометрия. М., 1938, с. 113.

единицей и какой-либо другой линией, а это то же самое, что извлечь квадратный или же кубический и т. д. корень».[1]

Эти соображения помогают Декарту заменить сложные геометрические соотношения простыми аналитическими выражениями. Но для того чтобы уметь легко оперировать этими аналитическими выражениями, надо было упорядочить алгебраическую символику и более строго обосновать теорию решения алгебраических уравнений. Вот почему в «Геометрии» Декарта очень много внимания уделяется вопросам алгебры. Символика, употребляемая Декартом в этом сочинении, очень близка к современной. У Декарта неизвестные обозначаются последними буквами алфавита (x, y, z), а известные — первыми (a, b, c). Со времен Декарта показатели степени стали записываться так, как делаем теперь мы. Декарт записывал уравнения, одинаково свободно обращаясь с положительными и отрицательными знаками входящих в уравнение величин, причем обычно в правой части уравнения он оставлял 0, а все остальные члены переносил в левую часть. Однако Декарт употреблял своеобразный знак равенства, а именно λ , хотя принятый в наше время знак равенства, представляющий равные отрезки двух параллельных прямых, уже существовал во времена Декарта; он был введен лондонским врачом и математиком *Робертом Рекордом* (1510—1558).

В «Геометрии» Декарта мы встречаем так называемую «основную» теорему алгебры. Хотя эта теорема была введена ранее лотарингцем *Альбером Жираром* (1595—1632), но, по всей вероятности, Декарт не был знаком с открытием Жирара и пришел к своим выводам самостоятельно. Его выводы заключались в том, что всякое уравнение имеет число корней, равное числу, выражающему степень уравнения. При этом Декарт признавал, что некоторые из этих корней могут быть «ложными» (именуя ложными отрицательные корни) или даже «воображаемыми» (то есть мнимыми). Однако доказательство этой теоремы в труде Декарта отсутствует.

Большой вклад в теорию уравнений Декарт внес своим методом определения числа положительных и отрицательных корней уравнения. Этот метод выражался «правилом знаков», согласно которому число положительных корней уравнения (если все они действительные) равно числу перемен

---

[1] Декарт Р. Геометрия. М., 1938, с. 11—12.

знаков перед членами уравнения, а число отрицательных — числу их постоянств. Например, уравнение

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

имеет три положительных корня, а уравнение

$$x^3+2x^2-x-2=0$$

имеет один положительный и два отрицательных.

В «Геометрии» Декарта содержится и введенный им важный метод неопределенных коэффициентов, заключающийся в том, что у двух тождественно равных многочленов коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного должны быть тождественно равны. Этот метод сам Декарт использовал для решения многих геометрических задач. В дальнейшем он стал применяться во многих вопросах математики.

Итак, «Геометрия» Декарта явилась не только ценным вкладом в развитие геометрии, но и способствовала дальнейшему прогрессу алгебры.

Что же касается геометрии как таковой, то введенный Декартом метод координат позволил ему разрешить аналитическим путем ряд сложных геометрических проблем и вылился в дальнейшем в особую отрасль математических наук, которую впоследствии Ньютон назвал аналитической геометрией. Для этой науки Декарт, помимо введения метода координат, установил принципы получения уравнений кривых линий и решил задачу о построении нормалей к ним (а следовательно, и касательных). Однако Декарт совсем не останавливался на вопросе об определении положения точки в пространстве.

Как было указано выше, Декарт придавал очень большое значение математике. Он исходил из того убеждения, что математика должна быть образцом для всякой другой науки; по его мнению, только та наука может считаться истинной, которая в своем построении следует математике, так как все выводы математики являются логически необходимыми, дающими полную достоверность. Однако в своих доводах, доказывающих справедливость этой мысли, Декарт впадал в грубую ошибку, так как считал, что объекты, которыми оперирует математика, суть чистые построения нашего разума, а не результат переработки опыта, почерпнутого человеком из реальной жизни. Это его идеалистическое убеждение было основано на том положении, что все мыслимое нами ясно и отчетливо — истинно, не требует опытной проверки и соответствия фактам действительности. Математические идеи для Декарта и являлись такими достоверными истинами, полученными не из опыта, а из деятельности человеческого разума. Декарт называл эти истины врожденными в отличие от истин, полученных опытным путем. Таким образом, гениальный ученый, внесший, как было отмечено, диалектику в математику и естествознание и давший толчок к развитию учения о переменных величинах, создав предпосылки для обоснования математического анализа с теорией бесконечно малых величин, в то же время не мог преодолеть некоторых идеалистических концепций, находящихся в резком противоречии с материалистическими взглядами, развиваемыми Декартом в большинстве его научных трудов.

Современником Ферма и Декарта является великий французский математик, физик и философ Блез Паскаль.

Блез Паскаль (1623—1662) родился в городе Клермон-Ферране. Его отец Этьен Паскаль — председатель апелляционного суда — после смерти жены переселился в Париж, где занялся вопросами математики и физики и добился в этих науках значительных успехов. Интерес Этьена Паскаля к физико-математическим наукам очень рано передался его сыну Блезу, с детства отличавшемуся необычайными способностями к этим наукам. По свидетельству некоторых современников, пятилетний Блез Паскаль, еще не зная геометрии, уже сумел самостоятельно разрешить вопрос о сумме внутренних углов треугольника, а когда ему было около 10 лет, написал работу о звуке, идея которой возникла у него при наблюдении того явления, что звучащий стакан замолкает, если к нему прикоснуться пальцем.

Трудно сказать, насколько достоверны указанные сведения, но известно, что в возрасте 16 лет Блез Паскаль написал очень ценную работу о конических сечениях, которая была высоко оценена крупнейшими математиками того времени — Декартом и Дезаргом. В печати появилась лишь часть этой работы, которая носила название «Опыт теории конических сечений» (1640).

В 20 лет Паскаль изобрел счетную суммирующую машину, выполняющую сложение и вычитание чисел. Говоря об этом, нужно подчеркнуть, что причиной, толкнувшей молодого ученого на это изобретение, было желание облегчить тяжелый труд финансовых работников.

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ

Отец Блеза был очень встревожен необычайными способностями сына и его упорной работой и даже пытался воспрепятствовать развивавшемуся влечению мальчика к наукам, опасаясь, что оно вредно отзовется на его здоровье; убедившись, однако, что это влечение не случайно и всецело овладело Блезом, отец вынужден был разрешить сыну отдаться любимому делу.

Напряженный труд действительно подорвал здоровье Блеза. Его слабый организм не выдержал усиленной умственной работы, и Паскаль умер в возрасте 39 лет.

Оставленное Паскалем богатое научное наследие содержит вопросы математики, физики и философии.

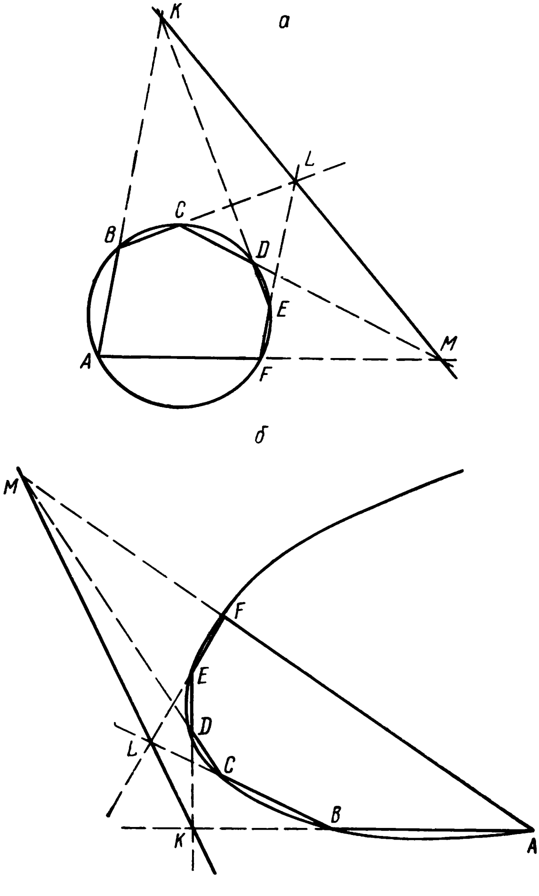


Рис. 24

Работы Паскаля по изучению циклоиды и применяемые им методы геометрического интегрирования для определения площадей, объемов и поверхностей, несомненно, содействовали дальнейшему развитию методов математического анализа.

Основные идеи Паскаля, дающие методы интегрирования, изложены им в работе «Письма А. Детонвилля о некоторых его геометрических открытиях» (1659). В этой работе Паскаль излагает метод интегрирования тригонометрических функций, а также вводит понятие о «характеристическом треугольнике», который мы упоминали, говоря о работах Ферма.

Еще юношей, под влиянием работ своего старшего современника, французского математика Жерара Дезарга, Паскаль заинтересовался вопросами проективной геометрии. Так, в упомянутой нами работе «Опыт теории конических сечений» он изложил знаменитую теорему, которая вошла в историю под названием «Теорема Паскаля» или «Паскалев шестиугольник». Эта теорема заключается в том, что «во всяком шестиугольнике, вписанном в коническое сечение (окружность, эллипс, гиперболу или параболу), точки пересечения трех пар противоположных сторон (или их продолжений) лежат на одной прямой».

Наш чертеж представляет случай шестиугольников, вписанных в окружность (рис. 24, *а*) и параболу (рис. 24, *б*).

В трактате Паскаля «О характере делимости чисел», изданном уже после его смерти, содержится общий признак делимости чисел, в основу которого положена сумма цифр числа. Суть его заключается в следующем: если надо разделить n-значное число $A=\overline{a_1a_2...a_n}$, где a_i представляет соответствующую цифру числа A, на число B, то сначала проводится следующая последовательность вычислений: 10 делим на B, если при этом получается остаток r_1, то далее $10r_1$ делим на B и, обозначая новый остаток через r_2, делим $10r_2$ на B; так продолжаем до тех пор, пока не получим остаток r_{n-1}. Тогда, если $a_n+a_{n-1}r_1+a_{n-2}r_2+\ \dots\ +a_1r_{n-1}$ делится на B, то и A разделится на B.

В своем труде «Трактат об арифметическом треугольнике» (появившемся в печати тоже после смерти Паскаля, в 1665 г.) Паскаль установил основные положения теории вероятностей и некоторые теоремы, относящиеся к комбинаторике.

Арифметический треугольник — это треугольник, составленный из чисел по особому закону. По существу он представляет ту же таблицу, которой пользовался еще в XVI в. М. Штифель для определения коэффициентов разложения бинома натуральной степени. Схематически этот треугольник можно представить так:

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Здесь приведены первые 10 строк этого треугольника, но их число можно увеличивать до бесконечности.

Столбец C дает нумерацию строк, начиная с нулевой. Каждый следующий столбец начинается вверху с единицы, причем начальная единица у каждого столбца помещается в строке, соответствующей номеру столбца, то есть у второго столбца единица помещается во второй строке, у третьего — в третьей и у любого k-го столбца единица помещается в k-й строке. Основной принцип составления треугольника тот же, что и принцип составления таблицы Штифеля.

Будем обозначать числа треугольника символами $a_{p,q}$, где p — номер строки; q — номер столбца. Так, $a_{4,3}$ в нашем обозначении представляет число 4, а $a_{4,2}$ — число 6 и т. д. Тогда принцип составления арифметического треугольника можно представить формулой $a_{p.q}=a_{p-1,q}+a_{p-1,\, q-1}$. Например, $a_{4,3}=a_{3,3}+a_{3,2}$, или $4=1+3$; $a_{7,5}=a_{6,5}+a_{6,4}$, или $21=6+15$ и т. д.

Арифметический треугольник Паскаля обладает рядом интересных свойств, которые имеют большое значение при вычислении биномиальных коэффициентов и изучении свойств сочетаний. В самом деле, нетрудно убедиться, что число сочетаний из p элементов по q, которое мы обозначим C_p^q, равно $a_{p,\,q}$, то есть $C_p^q = a_{p,\,q}$. Это обстоятельство сразу дает возможность определять коэффициенты разложения бинома, так как они выражаются числом сочетаний.

Если нужно, например, определить коэффициент при шестом члене разложения бинома $(a+b)^9$, то следует искать в треугольнике $a_{9,\,5} = C_9^5 = 126$; коэффициент пятого члена разложения $(a+b)^7 = C_7^4 = a_{7,\,4} = 35$ и т. д.

Треугольник Паскаля обладает еще следующими свойствами.

1. Любое число арифметического треугольника равно сумме всех членов, находящихся выше этого числа в предыдущем столбце. Например, $20 = 10+6+3+1$.

2. Любое число арифметического треугольника равно сумме всех чисел, расположенных по нисходящей диагонали, оканчивающейся над этим числом. Например, $56 = 21+15+$ $+10+6+3+1$.

3. Числа, полученные от сложения чисел по восходящим диагоналям, образуют ряд Фибоначчи. В самом деле:

$$\begin{aligned}
1+0&=1,\\
1+0&=1,\\
1+1&=2,\\
1+2&=3,\\
1+\ 3+1&=5,\\
1+\ 4+3&=8,\\
1+5+\ 6+1&=13,\\
1+6+10+4&=21 \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

4. В каждой строке арифметического треугольника равноотстоящие от концов члены равны.

5. Сумма членов какой-нибудь строки арифметического треугольника равна удвоенной сумме членов предыдущей строки.

Свойства арифметического треугольника легко распространяются на свойства сочетаний. Например, самый закон образования элементов треугольника представляет следующее свойство сочетаний:

$$C_p^q = C_{p-1}^q + C_{p-1}^{q-1},$$

то есть дает формулу, известную из общей теории соединений.

Свойство 5 треугольника Паскаля имеет следствие:

$$C_p^0 + C_p^1 + C_p^2 + \ \dots \ + C_p^p = 2^p,$$

которое в элементарной алгебре приводится для вычисления суммы всех биномиальных коэффициентов.

В своих письмах к Ферма и в «Арифметическом треугольнике» Паскаль часто использовал метод математической индукции и тем самым ввел этот весьма ценный метод в круг математических доказательств.

Особое значение для философских обоснований геометрии имеет работа Паскаля «О духе геометрии», в которой он выясняет значение определений и аксиом и требует их точности и строгой ограниченности. Полагая, что в математике эти требования уже соблюдаются, Паскаль считал, что они должны со всей строгостью распространяться и на другие науки и области человеческого мышления.

Рассматривая деятельность Мезириака, Ферма, Декарта и Паскаля, мы познакомились с развитием математики в первой половине XVII в. во Франции. Мы видели, что упомянутые французские математики много сделали для усовершенствования идей элементарной математики и в то же время явились творцами новых идей в математике, создателями новых ее разветвлений и подготовили почву для построения методов анализа бесконечно малых величин.

Однако не следует думать, что новые идеи в математике явились плодом мысли лишь одних французских математиков. Сходные социально-экономические условия жизни во всех западно-европейских государствах были источником близких стремлений умов, а потому и в других странах Европы наблюдалось развитие идей математического анализа. Виднейшим представителем этого направления в Германии, Австрии и Чехии в эту эпоху был знаменитый астроном и математик Кеплер.

Иоганн Кеплер (1571—1630), уроженец города Вейль-дер-Штадт в Вюртемберге, уже с ранних лет, обучаясь в монастырской школе, познакомился с астрономией, которая стала его любимой наукой. Свою научную деятельность он начал не на родине, а в Австрии, где сначала получил должность профессора математики и морали в Граце, а затем по приглашению знаменитого астронома *Тихо Браге* (1546—1601) переселился в Прагу, там Кеплер работал в обсерватории в качестве его помощника. Когда же Тихо Браге умер, Кеплер принял заведование обсерваторией. Огромный практический материал по астрономическим наблюдениям, собранный Тихо Браге и увеличенный собственными трудами Кеплера, помог

ИОГАНН КЕПЛЕР

последнему сделать ряд важных выводов по вопросам движения небесных тел, которые были сформулированы им в форме законов движения планет и в таком виде вошли в науку. Кеплер в астрономии был последователем Коперника. Он утверждал, что не Солнце движется вокруг Земли, а Земля — вокруг Солнца.

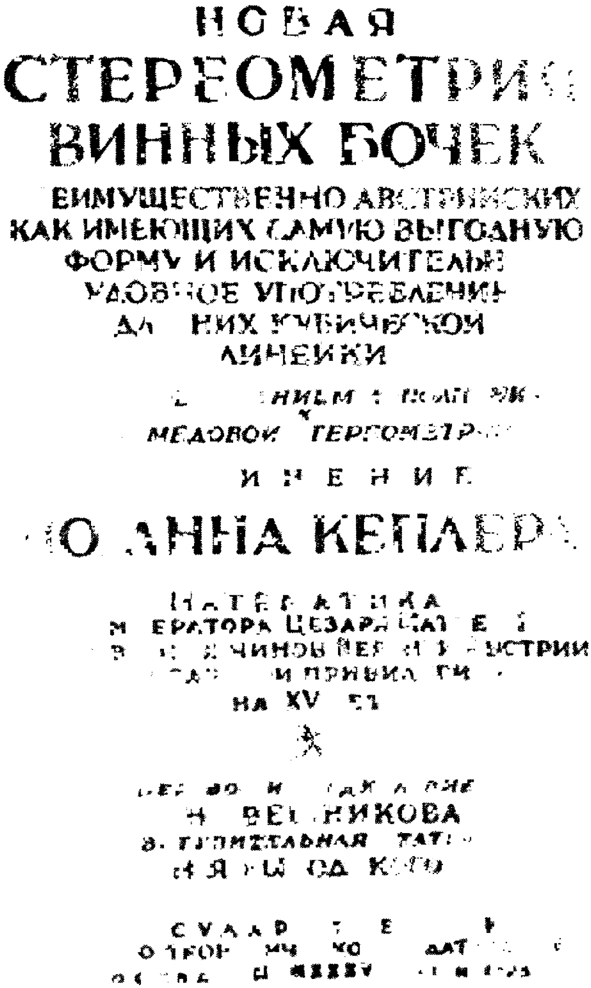
Когда Кеплер был уже известным ученым, церковники причинили ему тяжелые страдания, объявив его мать ведь-мой и организовав над ней позорное судилище. При жизни Кеплера Ватикан объявил астрономические сочинения Кеплера «безбожными» и занес их в список запрещенных книг.

Работая над вопросами движения небесных тел, Кеплер невольно столкнулся с понятиями, близкими к понятию о бесконечно малых величинах, и он так искусно пользовался ими, что в сущности создал особый метод оперирования с ними, близкий к интегральному исчислению. Этот метод он развил в математической работе «Новая стереометрия винных бочек».

Основной прием, которым пользовался Кеплер, заключался в том, что при определении длины линии, площади плоской фигуры или объема тела он представлял измеряемую величину разбитой на очень мелкие части, а затем определял их сумму, пользуясь некоторыми геометрическими соображениями. Этот прием и представлял по существу не что иное, как интегрирование. Правда, термина «бесконечно малая величина» у Кеплера не было, но, измеряя, например, длину линии, он представлял линию состоящей из точек, что в его рассуждениях равносильно разбиению дуги на бесконечно малые элементы — отрезки.

Излагая свою теорию в «Стереометрии», Кеплер полагал, что он следует методу исчерпывания, развитому в трудах Архимеда. Однако надо признать, что метод Кеплера сильно отличался от приемов, употреблявшихся Архимедом, и являлся творческим шагом вперед в деле развития методов применения инфинитезимальных величин.

Определяя площадь круга, Кеплер разбивал его на равные секторы. Когда эти секторы берутся в большом числе, то их можно с некоторым приближением считать равновеликими треугольниками, высотой которых служит радиус круга, а основанием — дуга данного сектора. Тогда площадь круга рассматривается как сумма площадей секторов, причем сумма оснований секторов дает длину окружности, и площадь круга получается равной $2\pi r \cdot \frac{1}{2} r = \pi r^2$. Так как фактически площадь каждого сектора не может равняться площади треугольника, основанием которого является дуга сектора, а высотой — его радиус, то Кеплер ввел поправку, заключающуюся в том, что надо считать число секторов бесконечным, и тогда основания секторов обратятся в точки. Кеплер в этом случае упускал из вида, что секторы при таком толковании


НОВАЯ
СТЕРЕОМЕТРИЯ
ВИННЫХ БОЧЕК
ЕИМУЩЕСТВЕННО АВСТРИЙСКИХ
КАК ИМЕЮЩИХ САМУЮ ВЫГОДНУЮ
ФОРМУ И ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО
УДОБНОЕ УПОТРЕБЛЕНИЕ
ДЛЯ НИХ КУБИЧЕСКОЙ
ЛИНЕЙКИ
ИОАННА КЕПЛЕРА

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ РАБОТЫ КЕПЛЕРА
«СТЕРЕОМЕТРИЯ ВИННЫХ БОЧЕК»

превратятся в радиусы и, следовательно, площадь круга будет рассматриваться уже как бесконечная сумма бесконечного числа радиусов. Такой прием скорее служит примером применения метода Демокрита, а не Архимеда, так как он построен на предположении, что окружность может быть составлена из неделимых атомов — точек.

Свой метод Кеплер использовал и для определения объема шара, а затем распространил его на определение объемов самых разнообразных тел вращения, число которых достигает у Кеплера 92.

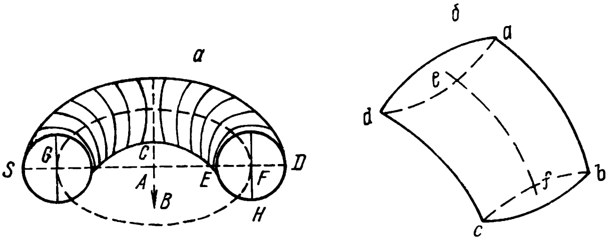


Рис. 25

В качестве примера рассуждений Кеплера приведем его определение объемов тора и «яблока».

Как известно, тором называется тело, образованное вращением круга около оси, лежащей вне этого круга, но в его плоскости.

Кеплер рассекает тор на мелкие части плоскостями, проходящими через ось вращения, как это показано на рис. 25, *а*. Части, на которые распадается тор, представляют собой искривленные цилиндры, основанием которых служит вращающийся круг; эти цилиндры имеют вид, представленный на рис. 25, *б*.

Каждую часть Кеплер «выпрямляет», т. е. делает прямым цилиндром с тем же основанием и с высотой, равной длине дуги ef, которая является средней арифметической длин дуг ab и cd. Такой элементарный цилиндр для Кеплера является равновеликим прежнему искривленному цилиндру. Выпрямляя и складывая все части, на которые распался тор, Кеплер получает круглый цилиндр, основанием которого служит круг, образующий тор, а высотой — длина окружности, описанной радиусом, равным полусумме радиусов AD и AE окружностей, полученных вращением наиболее удаленной от центра вращения и наиболее близкой к нему точек вращающегося круга.

Если обозначить радиус вращающегося круга через r, радиус AD — через R_1 и радиус AE — через R_2, то объем V тора выразится так:

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{R_1 + R_2}{2} = \pi^2 r^2 (R_1 + R_2).$$

Если же обозначить через d расстояние AF от центра вращения до центра вращающегося круга, то объем V выразится еще проще:

$$V = \pi^2 r^2 d.$$

«Яблоком» Кеплер называет частный случай тора, когда ось вращения находится внутри вращающегося круга. Иначе говоря, «яблоко» — тело, полученное от вращения кругового сегмента (большего, чем полукруг) около его хорды. Если же производится вращение около той же хорды сегмента, меньшего, чем полукруг, то полученное тело вращения Кеплер называет «лимоном».

На рис. 26, *а* представлен разрез «яблока». Объем такого «яблока» Кеплер определил равным объему клина, вырезанного из цилиндра плоскостью, как это представлено на рис. 26, *б*. Цилиндр имеет основание, равное кругу, вращением сегмента которого образовано «яблоко», а секущая плоскость проходит через хорду, около которой происходит вращение, и через точку S на образующей цилиндра, когда отрезок DS равен длине окружности, описываемой точкой D при ее вращении около хорды MN.

Умер Кеплер в глубокой бедности. На его могиле была высечена надпись, составленная им самим:

Я измерил небеса,
землю теперь измеряю,
Дух воспарил в небеса,
тело распалось прахом.

В те же времена, когда Кеплер создавал свои астрономические труды и предпосылки для геометрического интегрирования, в Италии большую славу приобрели новые идеи крупного геометра, которого великий астроном, механик и физик

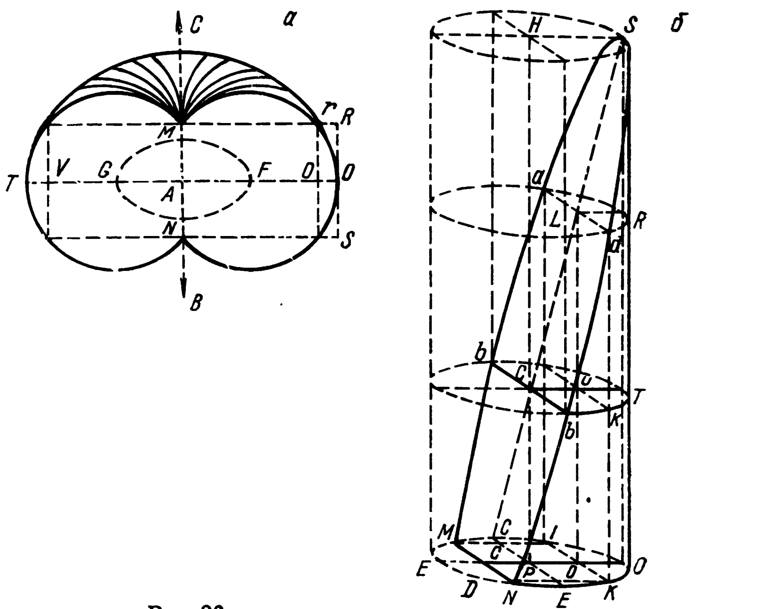


Рис. 26

Галилео Галилей (1564—1642) [1] считал одним из самых замечательных математиков того времени, по гениальности равным Архимеду. Этим геометром был ученик Галилео Галилея Бонавентура Кавальери.

Бонавентура Кавальери (1598—1647) происходил из знатного миланского рода. Ему удалось получить всестороннее и по тем временам блестящее образование.

С ранних лет заинтересовавшись математикой, Кавальери создал в геометрии, по-видимому, под влиянием Галилея, свой метод — метод неделимых, который и получил развитие в главном труде Кавальери, названном им «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635).

---

[1] Необходимо отметить, что Галилео Галилей как последователь Коперника был «вечным» узником инквизиции (всегда находился под ее надзором). Как математик и механик Галилео Галилей написал «Трактат о механике», «Руководство к познанию сферы», «Обращение с геометрическим военным циркулем» и т. д. (**Примеч. В. Д. Чистякова.**)

БОНАВЕНТУРА КАВАЛЬЕРИ

«Неделимым» для Кавальери являлись параллельные хорды, проведенные внутри плоской фигуры, и параллельные плоскости, заключенные внутри тела. Для сравнения между собой плоских фигур и объемов тел он ввел понятие о «сумме всех неделимых», заполняющих данную плоскую или пространственную фигуру. Отношение этих «сумм» и служило для Кавальери отношением площадей и объемов. Плоские фигуры он рассматривал расположенными между двумя параллельными прямыми.

Пусть, например, между параллельными прямыми AB и CD расположены две фигуры: треугольник LMN и криволинейная фигура $L_1M_1N_1$ (рис. 27). Если секущие, параллельные прямым AB и CD, например EF и GH и все другие, отсекают в фигурах LMN и $L_1M_1N_1$ равные хорды ef и e_1f_1; gh и g_1h_1 и т. д., то отношение сумм параллельных, заключенных внутри рассматриваемых фигур, считается равным единице, а площади обеих фигур — равными между собой. Если отно-

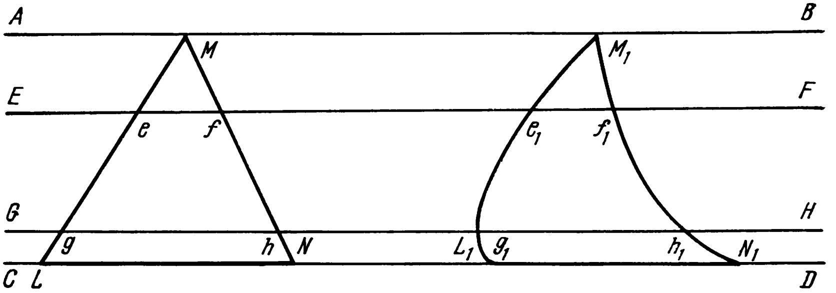


Рис. 27

шение отрезков всюду равно $m : n$, то в таком же отношении находятся и площади фигур.

Аналогично Кавальери представлял и вопрос о телах, заключенных между параллельными плоскостями. В этом случае для сравнения объемов этих тел строились секущие плоскости и находилось отношение сумм площадей, полученных в сечении.

Этот принцип под названием «принципа Кавальери» вошел в школьную практику, где он формулируется для следующего специального случая: «два тела, основания которых лежат в одной плоскости и высоты которых равны, равновелики, если равновелики их сечения, взятые на одинаковой высоте параллельно плоскостям оснований».

На основании этого принципа Кавальери доказывал многие теоремы.

Так, он доказал, что площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон. В самом деле, пусть $\triangle ABC \sim \triangle EFG$. Поместим $\triangle EFG$ так, чтобы его вершина E совпала с вершиной A треугольника ABC, а сходственные стороны EF и EG пошли бы по направлению сторон AB и AC (рис. 28).

Соединим прямой точки B и G; тогда пл. $\triangle ABG$: : пл. $\triangle AFG = AB : AF$ и пл. $\triangle ABC$: пл. $\triangle ABG = AC : AG$. Перемножая полученные пропорции, найдем: пл. $\triangle ABC$: : пл. $\triangle AFG = AB \cdot AC = AF \cdot AG$, но из подобия данных треугольников $AB : AF = AC : EG$. Имея в виду, что $\triangle AFG = \triangle EFG$ и что $AF = EF$, а $AG = EG$, получим пл. $\triangle ABC$: : пл. $\triangle EFG = AB^2 : EG^2$, что и требовалось доказать.

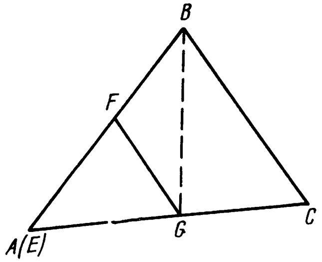


Рис. 28

Недостаточно ясное понятие о «сумме неделимых» подверглось жестокой критике со стороны некоторых современников Кавальери. Тогда Кавальери издал работу «Шесть геометрических этюдов», в которой уточнил введенные им понятия, однако и у самого Кавальери до конца жизни оставалось некоторое сомнение в достаточной строгости этих понятий, хотя он был вполне уверен в их истинности.

Изложенное в «Геометрии» Кавальери его учение о неделимых внесло полезные соображения не только в элементарную геометрию. Это учение — суммирование неделимых — являлось прообразом интегрирования. Кавальери, еще не пользуясь символикой, присущей интегральному исчислению, фактически производил интегрирование для интегралов типа

$$\int_0^a x^m dx.$$

Кроме того, в «Геометрии» Кавальери мы находим и теоремы, которые имеют определенное значение приложений дифференциального исчисления. Так, первое предложение «Геометрии» содержит утверждение, равносильное теореме Ролля, а следующее равносильно утверждению, что в точках максимума и минимума функций касательная к их графику параллельна оси абсцисс.

Одним из крупных недостатков «Геометрии» Кавальери является то, что автор избегает применения алгебры и использует геометрические методы древних геометров. Несомненно, применение алгебраической символики, уже достаточно развитой в эпоху Кавальери, помогло бы ему проще и изящнее подойти к разрешению выдвинутых им проблем и сделало бы его труд более доступным пониманию его современников.

Вторая половина XVII в. явилась эпохой дальнейшего оживления в развитии идей бесконечно малых величин и математического анализа. Интерес к этим вопросам пробудился во всех странах Западной Европы, и много ученых математиков и физиков, соприкасаясь с идеями о бесконечно малых величинах, строили свои теории, опираясь на них и тем самым помогая формированию основных разделов анализа: дифференциального и интегрального исчислений. Среди этих ученых следует отметить французского академика Жиля Роберваля и нидерландского физика, механика и математика Христиана Гюйгенса.

Французский академик Жиль Персонье, известный под именем *Жиль Роберваль* (1602—1675), много работал над вопросами о квадратуре парабол, причем ему удалось обосновать свои выводы лишь тогда, когда он познакомился с трудами Ферма по аналогичным вопросам. В дальнейшем ему удалось добиться квадратуры циклоиды и конхоиды[1]. При разрешении этих квадратур Роберваль, пользуясь полярными координатами, решил задачу, которую в современной символике можно представить как вычисление интеграла вида

$$\int_0^x \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

Интересно также данное Робервалем элементарное определение площади, ограниченной дугой циклоиды и ее основанием. Если радиус катящейся окружности равен R, то, когда окружность опишет полный оборот, основанием циклоиды будет служить отрезок, равный $2\pi R$ (рис. 29). Следовательно, прямоугольник $ABCD$ имеет площадь, равную $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$. Когда окружность O, катясь по прямой AD, сделает полный оборот, то точка A опишет полную дугу циклоиды $AKMD$. Согласно условию поставленной задачи, определяется площадь, заключенная между дугой $AKMD$ и прямой AD. В произвольный момент точка A окружности переместится в положение K,

[1] Конхоидой называется геометрическое место точек, получаемое следующим образом: если из неподвижной точки O провести лучи, пересекающие некоторую прямую, отстоящую от точки O на данном расстоянии, и на каждом луче отложить от точки пересечения равные отрезки, то концы их и явятся точками конхоиды.

причем точка K принадлежит циклоиде. От точки A до точки D чертим дугу синусоиды. Для каждой точки K отрезок KK_1, параллельный прямой AD и соединяющий точки циклоиды и синусоиды, всегда равняется половине соответствующей хорды окружности PQ. По принципу неделимых Кавальери, один лепесток кривой, образованной совокупностью циклоиды и синусоиды, равновелик полукругу $AOBA$, а оба лепестка вместе равновелики всему катящемуся кругу, т. е. их площадь

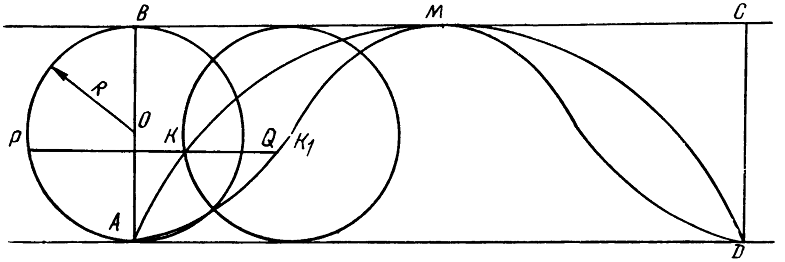


Рис. 29

равна πR^2. Вместе с тем по построению ясно, что синусоида делит площадь прямоугольника $ABCD$ пополам. Отсюда и видно, что искомая площадь, ограниченная циклоидой и прямой AD, равна половине площади прямоугольника $ABCD$, сложенной с площадью круга, т. е. искомая площадь равна $\frac{1}{2}\cdot 4\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$.

В своем сочинении «О неделимых» Роберваль решил, между прочим, интересную задачу о пересечении цилиндра и шара. Он показал, что часть кривой поверхности цилиндра, отсекаемая поверхностью шара, центр которого лежит на поверхности цилиндра, а радиус равен диаметру основания цилиндра, равна учетверенному квадрату радиуса шара.

В 1668 г. Роберваль удачно развил метод определения касательных и кривых путем сложения скоростей. Этот метод был предложен еще ранее итальянским физиком *Эванджелистой Торричелли* (1608—1647), но Роберваль изложил и применял его уже систематически. Исходя из сложения скоростей по правилу параллелограмма, Роберваль нашел касательные к коническим сечениям с данными фокусами, к конхоидам, архимедовой спирали, циклоиде и некоторым другим кривым. Следует отметить, что, решая вопросы, связанные

ХРИСТИАН ГЮЙГЕНС

с касательными, Роберваль отождествлял направление касательной с направлением кривой и с направлением движения точки этой кривой.

Одним из крупнейших деятелей науки второй половины XVII в. был нидерландский физик, механик и математик *Христиан Гюйгенс* (1629—1695).

Отец Христиана Гюйгенса, по профессии дипломат, обладал большой эрудицией в области различных наук, в частности в математике; в то же время он был поэтом и любителем искусств. Он дал сыну прекрасное образование, которое и позволило Христиану Гюйгенсу проявить свою талантливую натуру во многих областях знания. Христиан Гюйгенс является изобретателем маятниковых часов. Это изобретение было впоследствии высоко оценено К. Марксом, который в письме к Ф. Энгельсу от 28 января 1863 года писал: «... за время с XVI до середины XVIII в., то есть за период мануфактуры, развивающейся из ремесла до собственно крупной промышленности, имелись две материальные основы, на которых внутри мануфактуры происходит подготовительная работа для перехода к машинной индустрии, это — *часы и мельница*...» «Часы — это первый автомат, употребленный для практических целей. На их основе развилась вся теория *производства равномерного движения*». [1]

Гюйгенс был творцом волновой теории света и много сделал для усовершенствования астрономических оптических приборов путем ослабления хроматической аберрации и увеличения светосилы. Это дало ему возможность сделать ряд новых открытий в астрономии. Свои исследования по вопросам оптики Х. Гюйгенс изложил в «Трактате о свете» (1690), который приобрел большую известность.

Крупные работы Х. Гюйгенса по физике и механике сопровождались не менее значительными исследованиями и в математике. Еще в молодости он определил длину дуг окружности, эллипса и гиперболы, а в 1654 г. написал свой знаменитый труд «О найденной величине круга». В этой работе Гюйгенс добился приближенного выражения числа π, используя описанные многоугольники с гораздо меньшим числом сторон, чем его предшественники. В частности, то значение π, которое Архимед получил только путем вычислений при помощи 96-угольника, Гюйгенс получил при помощи 12-угольника. Его вычисления приобрели еще большую точность благодаря применению им некоторых свойств центра тяжести.

Гюйгенс разрабатывал вопрос о создании механического прибора для представления движения тел Солнечной системы, то есть планетария, и развил для этого теорию непрерывных дробей.

Кроме указанных вопросов, Гюйгенс интересовался зарождающейся теорией вероятностей и написал по этому вопросу трактат «О расчетах при игре в кости».

---

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч., изд. 2-е, т. 30, с. 262—263.

Знакомство Гюйгенса с Декартом и другими крупными математиками способствовало тому, что он заинтересовался и теми проблемами, которые были в то время предметом исследований большинства математиков, а именно квадратурой кривых линий. Гюйгенс не выработал какого-либо стройного общего метода, но изобретал для каждой отдельной проблемы особый метод, проявляя при этом исключительную находчивость. В сочинениях Гюйгенса мы впервые встречаем понятие бесконечно малой величины. При вычислениях квадратур Гюйгенс стал прибегать к помощи бесконечных рядов.

Можно еще отметить, что решение некоторых проблем приводило Гюйгенса к методам, сходным с интегрированием дифференциальных уравнений.

В конце XVII в. значительный подъем математических знаний наблюдался и в Англии. Одним из наиболее ярких представителей математической мысли в эту эпоху в Англии был Джон Валлис.

Джон Валлис (1616—1703), сын кентского священника, получил прекрасное классическое образование. Однако математика не принадлежала к числу основных дисциплин, входящих в систему этого образования, а потому Валлис, интересуясь этой наукой, изучал ее самостоятельно. Когда же ему удалось познакомиться с творениями современных ему математиков — Декарта, Кавальери, а также с трудами античных математиков, то его интерес к математике еще более возрос, и он сам занялся разработкой ее проблем. В этом отношении ему немало помогли его способности, например изумительная память.

Валлис написал много работ по математике. К их числу относятся «Арифметика бесконечного», «О циклоиде», «Трактат алгебры», «Всеобщая математика, или полный курс арифметики». Однако в некоторых из этих работ нет строгих доказательств; в них используется главным образом неполная математическая индукция, которую Валлис применял весьма искусно, или же содержатся просто догадки, которые позволили Валлису сделать много научных открытий. Основная цель большинства работ Валлиса — ознакомить читателей с практической стороной разбираемого вопроса.

Главным стремлением Валлиса было распространение математических знаний и пропаганда их практического применения. Он считал, что основное значение арифметики за-

ДЖОН ВАЛЛИС

ключается в искусстве хорошо вычислять, что алгебра еще более облегчает эту задачу, а геометрия является искусством хорошо измерять.

В тригонометрию Валлис внес упрощение записей: каждую из тригонометрических величин он обозначал одной буквой (синус — S, косинус — Σ, тангенс — T, котангенс — τ, секанс — s и косеканс — σ), что позволяло ему оперировать с этими функциями, как с любыми другими величинами, имеющими символическое обозначение. Надо отметить, что именно в трудах Валлиса впервые встречается символ ∞ для выражения бесконечности.

В «Арифметике бесконечного» Валлис ввел определение предела переменной величины, которое сохранилось до нашего времени: «предел переменной величины — это величина постоянная, к которой переменная приближается так, что разность между ними может быть сделана менее любой данной величины».

Математические работы Валлиса сыграли большую роль в распространении интереса к математическим наукам в Англии [1].

Другим крупным математиком Англии во второй половине XVII в. был *Исаак Барроу* (1630—1677).

Сын торговца мануфактурой, Барроу обучался в Кембриджском университете, где специализировался по древним языкам и изучал под руководством Валлиса математику.

29 лет от роду он получил профессуру по греческому языку в Оксфорде, затем профессуру по геометрии в Лондоне и, наконец, с 1663 г. занял кафедру математики в Кембридже.

Им были написаны «Оптические и геометрические лекции». Там он первый ввел в употребление термин «дифференциальный треугольник» для треугольника, который именовался у Паскаля характеристическим.

В своих математических трудах Барроу, следуя принципам древних атомистов, принимал окружность и другие замкнутые кривые за многоугольники, обладающие бесконечно малыми сторонами, а потому и касательную к кривой линии считал прямой, продолжающей одну из сторон многоугольника. Им введен термин «угловой коэффициент касательной» и понятие о нем как о предельном отношении бесконечно малого приращения функции к бесконечно малому приращению аргумента.

Во многих случаях, когда наряду с конечными величинами встречались величины бесконечно малые, Барроу пренебрегал последними.

---

[1] К очерку о Валлисе можно добавить, что в области геометрии он пытался улучшить теорию параллельных линий путем доказательства постулата Евклида (постулата параллельности). В своих рассуждениях Валлис исходил из предположения о существовании подобных фигур с коэффициентом подобия, отличным от единицы (постулат Валлиса). **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

Особенно важным выводом, к которому пришел Барроу, надо считать то, что он уяснил взаимно-обратную зависимость между задачами интегрирования и дифференцирования.

Барроу часто прибегал к помощи своего гениального ученика Исаака Ньютона, с которым у него завязались дружеские отношения. Но если Ньютон и помогал своему учителю в его работах по математике, то, несомненно, и Барроу оказал влияние на развитие у Ньютона интереса к физико-математическим наукам. Во всяком случае Барроу чувствовал, что его ученик превзошел учителя в научной области, а потому добровольно уступил кафедру математики в Кембриджском университете Ньютону, перейдя на более высокооплачиваемую должность.

Исаак Ньютон (1643—1727) родился в семье небогатого фермера в местечке Булсторп, близ города Грантема. Отец его умер незадолго до рождения сына. Ньютон в 1665 г. окончил колледж Кембриджского университета и получил степень бакалавра, а в 1668 г. ему была присвоена ученая степень магистра. Вскоре после этого (в 1669 г.) Барроу передал ему кафедру математики, которой Ньютон и заведовал до 1701 г.

Еще до начала своей работы в качестве профессора Ньютон сделал ряд открытий, которые проложили совершенно новые пути в различных областях человеческого знания и сделали имя его бессмертным. Характерной чертой личности Ньютона является его увлеченность наукой, удивительная скромность, трудолюбие и «непрерывные размышления о предметах своих изысканий».

Бедствие, постигшее Англию,— эпидемия чумы — заставило Ньютона покинуть на время Кембридж, и он, уединившись в деревенской тиши, сосредоточился на научном исследовании многих вопросов, интересовавших его с ранней юности.

Здесь у Ньютона возникла идея о всемирном тяготении, развившаяся из простой мысли, что Луну удерживает на ее орбите та же сила, которая заставляет яблоко с яблони падать на землю. Предполагая, что всякое тело, падающее на Землю, притягивается ею с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния этого тела от центра Земли, Ньютон доказал, что центростремительная сила, действующая на Луну, тождественна силе тяжести. В дальнейшем Ньютон утвердился в этой мысли и распространил свои выводы на движение планет, спутников Юпитера, на явления приливов и даже на движение комет. Таким образом, был открыт величайший

ИСААК НЬЮТОН

из законов — закон всемирного тяготения, объясняющий происхождение ряда явлений природы. Так появился труд Ньютона, который был озаглавлен им «Математические начала натуральной философии». Он был опубликован лишь в 1686—1687 гг. В этом труде Ньютоном сформулированы основные принципы механики (закон инерции, закон равенства действия и противодействия, закон изменения количества движения, учение о всемирном тяготении и пр.) и даны многочисленные исследования приложений этих принципов в астрономии и физике.[1]

Годы, в течение которых создавался закон всемирного тяготения, явились для Ньютона годами величайших открытий и в области математики. В это время он получил разложение в ряд степени бинома. Уже из многих данных, приведенных нами в предыдущих очерках, можно увидеть, что идея разложения бинома развивалась веками. На долю Ньютона выпало завершение методов разложения бинома натуральной степени, что он и сделал, найдя общую формулу образования коэффициентов разложения. Не давая строгого доказательства правильности своих выводов, Ньютон показал, что эта формула может быть распространена на дробные и отрицательные показатели. Заметим кстати, что строгое доказательство формулы разложения бинома для натуральных степеней было впоследствии дано Якобом Бернулли, а Леонард Эйлер представил доказательство для случая дробных и отрицательных степеней, но оно не было строго обосновано. Строгое же доказательство для этих случаев было дано лишь в 1811 г. Карлом Гауссом.

Разложение бинома послужило Ньютону основой для разложения некоторых других функций в бесконечные ряды и явилось одним из сильнейших стимулов развития математического анализа, теории уравнений, комбинаторики и методов изучения функций.

Сочинение Ньютона «Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов», посвященное вопросу о рядах и написанное им в 1665 г., появилось в печати лишь в 1711 г. В этой работе Ньютон, исходя из разложения биномов вида

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

выработанными методами интегрирования сумел получить разложение для $\ln(1+x)$ и $\arcsin x$.

Математика для Ньютона была важнейшим орудием для познания законов природы, так как она отражала явления окружающего мира. Углубляясь в изучение законов физики, которым подчиняются все объекты реального мира, Ньютон

---

[1] Хотя Ньютон не был атеистом, однако под воздействием богословов во многих университетах Европы одно время было запрещено преподавание небесной механики Ньютона и его гелиоцентризма. **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

должен был уточнять и совершенствовать и орудие их познания, то есть математику. Вот почему им и создано много глубоких и ценных в смысле разработки новых методов исследования трудов по математике.

В 1665—1666 гг. Ньютоном было написано «Рассуждение о квадратуре кривых», а в 1670 г.— сочинение на тему «Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых». Оба эти сочинения появились в печати гораздо позднее: первое — в 1704 г., а второе — в 1736 г., уже после смерти Ньютона. В них излагаются методы математического анализа. В этих сочинениях, а также в трудах современника Ньютона — Лейбница завершено создание и оформление классического анализа бесконечно малых величин, то есть дифференциального и интегрального исчислений.

Основные понятия математического анализа у Ньютона являлись отражением понятий механики. Даже простейшие геометрические образы — линии, углы, тела — рассматриваются Ньютоном как результат механических перемещений. Линия — результат движения точки, угол — результат вращения его стороны, тело — результат движения поверхности. Переменная величина для Ньютона — движущаяся точка. Всякую переменную величину Ньютон называл флюентой («текущей»).

И в наше время еще употребляется термин «текущая точка» для обозначения точки, координаты которой непрерывно изменяются, то есть для точки движущейся. Так как всякое движение возможно лишь во времени, то аргументом для переменных величин у Ньютона всегда служило время. Скорость движения, то есть то, что для нас является производной, называлась Ньютоном флюксией и обозначалась точкой: если флюента x, то флюксия $\dot{x}$ представляла собой производную переменной по времени, то есть то, что мы обозначаем через $\frac{dx}{dt}$.

Ньютон вполне ясно представлял себе взаимообратимость двух операций: нахождения флюксии по данной флюенте и флюенты — по данной флюксии. Таким образом, он точно установил ту связь между дифференцированием и интегрированием, которая намечена в трудах Барроу.

Разрешая прямую и обратную задачи, Ньютон применял эти решения к многочисленным вопросам геометрии и механики. Им производилось построение касательных к кривым линиям, определение максимумов и минимумов функции, кривизны кривой линии, длины кривой линии и площади фигуры, ограниченной кривыми линиями. Иногда он разрешал и более сложные задачи, где по данным соотношениям между флюксиями определялось соотношение между флюентами, то есть решалось дифференциальное уравнение.

Метод отыскания производных (флюксий), применявшийся вначале Ньютоном, был основан главным образом на отбрасывании бесконечно малых величин, но в дальнейшем Ньютон стал прибегать к другому методу, который более близок приемам, употребляемым в наше время. Однако отчетливого разъяснения этого метода и строгости его обоснования в работах Ньютона мы не встречаем. Этот метод заключался в том, что флюксия рассматривалась как «последнее отношение исчезающих величин». Такое толкование флюксии содержало в себе элемент мистики, а потому неудивительно, что впоследствии оно вызвало возражения. Позднее Ньютон по-другому подошел к этому вопросу: он начал употреблять моменты как «мгновенные приращения», но от этого процесс не стал более ясным.

Таким образом, используя с большим искусством свои новые методы для правильного решения практических задач, Ньютон не дал им строгого теоретического обоснования.

Большое значение для развития элементарной математики имела работа Ньютона «Всеобщая арифметика, или книга об арифметических синтезе и анализе». Этот труд является обобщением лекций по элементарной математике, читавшихся Ньютоном в течение 9 лет в Кембриджском университете. По своему содержанию он завершает многовековой процесс развития символической алгебры. Издан он был в 1707 г. преемником Ньютона по кафедре в Кембридже *Вильямом Уинстоном* (1667—1752).

В этом труде Ньютон дает сначала определения основных понятий алгебры, а затем излагает все арифметические операции над численными и буквенными целыми и дробными выражениями до извлечения корней включительно. Затем следует изложение учения об уравнениях. При этом впервые встречаются способы исключения неизвестных из систем уравнений: способ сравнения неизвестных и способ подстановки. Очень много внимания Ньютон уделяет вопросу составления уравнений. Большая часть «Всеобщей арифметики» содержит задачи, среди которых есть много интересных и до нашего времени используемых авторами задачников.

Характерно, что во всей этой работе Ньютон избегает строгих доказательств, а для разъяснения теории часто обращается к примерам, объясняя это тем, что доказательства представлялись слишком легкими, а иногда не могли быть изложены без докучливых длиннот. Однако едва ли Ньютону были известны доказательства всех разбираемых им правил и теорем, так как многие из них были недоступны для ученых его времени, а некоторые доказаны крупными математиками лишь в XIX в.

Понятию «всеобщая арифметика», которое фигурирует в заголовке работы, можно дать объяснение, которое приводит сам Ньютон. Он говорит: «Вычисления производятся либо при помощи чисел, как в обыкновенной арифметике, либо при помощи видов (species) [1], как в алгебре. Оба приема основаны на одинаковых принципах и ведут к одной цели, причем арифметика — путем определенным и частным, алгебра же путем неопределенным и всеобщим... Особое превосходство алгебры заключается в том, что, тогда как в арифметике при решении вопросов переходят только от данных величин к искомым, в алгебре следуют обратному порядку, переходя от искомых величин, рассматриваемых как данные, к данным величинам, рассматриваемым как искомые, с тем чтобы как-либо удалось прийти к заключению или уравнению, из которого можно было бы найти искомую величину».

В приведенном отрывке дается определение анализа как характерного приема всеобщей арифметики или алгебры.

Переходя к вопросу о составлении уравнений, Ньютон очень подробно разъясняет и иллюстрирует этот процесс на примерах. Здесь приведены также многие интересные свойства многочленов, в частности оригинальный метод определения делителей многочлена.

Среди задач, содержащихся в рассматриваемой нами работе, есть, как мы уже отмечали, много интересных по содержанию или по выполнению решения. В качестве примера приведем знаменитую задачу о быках, которая вошла в историю математики под названием «задача Ньютона». Вот текст этой задачи: «12 быков съедают $3\frac{1}{3}$ югера [2] пастбища за 4 недели;

[1] Слово «species» (вид) заимствовано Ньютоном у предшественников: Виета, Декарта и других. Для нас оно равносильно слову «буква».

[2] Римская мера площади «югер» приблизительно равна 2500 м^2.

21 бык съедает 10 югеров такого же пастбища за 9 недель; сколько быков съедят траву на 24 югерах за 18 недель?»

Введем такие обозначения: искомое количество быков — x; количество травы на одном югере в весовых единицах — y; количество травы, вырастающей на одном югере за неделю,— z.

Тогда 12 быков за 4 недели на $3\frac{1}{3}$ югерах съедят $\frac{10}{3}y + \frac{10\cdot 4}{3}z$ весовых единиц травы, а один бык за одну неделю съест всего $\frac{10(y+4z)}{3\cdot 4\cdot 12}$ весовых единиц травы. Из данных для второго и третьего пастбища то же количество травы выразится так:

для второго пастбища $\frac{10(y+9z)}{9\cdot 21}$,

для третьего пастбища $\frac{24(y+18z)}{18x}$.

Отсюда получаем два уравнения с тремя неизвестными:

1) $\frac{10(y+4z)}{3\cdot 4\cdot 12} = \frac{10(y+9z)}{9\cdot 21}$;

2) $\frac{10(y+9z)}{9\cdot 21} = \frac{24(y+18z)}{18x}$.

Упрощая эти уравнения и заменяя отношение $\frac{y}{z}$ через p, получим

1) $\frac{p+4}{16} = \frac{p+9}{21}$;

2) $\frac{5(p+9)}{63} = \frac{2(p+18)}{x}$.

Из первого уравнения найдем $p=12$. Подставив это значение p во второе уравнение, получим, что $x=36$.

Из математических работ Ньютона отметим еще «Метод разностей», опубликованный в 1711 г. Эта работа представляет первые опыты по теории разностей, которая после Ньютона развилась в отдельную дисциплину — теорию конечных разностей. В «Методе разностей» содержится известная интерполяционная формула Ньютона, которая в современной символике записывается так:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1} \cdot \frac{\Delta f(x_0)}{h} + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2} + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)(x - x_0 - 2h)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta^3 f(x_0)}{h^3} + \ldots$$

В этой формуле $\Delta^n f(x_0)$ — конечная разность n-го порядка для данной функции; h — разность между двумя соседними значениями аргумента.[1]

Главные работы Ньютона по физике касаются явлений света. Систематическое изложение теории световых явлений проведено Ньютоном в трехтомном сочинении «Оптика». В «Оптике» Ньютон положил в основу световых явлений гипотезу о том, что свет представляет собой тонкую, состоящую из отдельных частиц материю, которая испускается светящимся телом. Это учение впоследствии получило название теории эманации и господствовало в науке вплоть до XIX в., пока оно не сменилось волновой теорией; в наше время теория эманации возродилась в измененном виде в форме квантовой теории.

Ньютону удалось открыть разложение белого света на цветные лучи; им изучены явления дифракции света, цвета тонких пластинок и дано объяснение окраски радуги. Ньютоном сконструирован также отражательный телескоп.

В то время, когда вышло в свет упомянутое нами ранее сочинение Ньютона «Математические начала натуральной философии», доставившее ему наибольшую славу, его постигло несчастье: во время пожара сгорела часть его ценных работ. Ньютон так тяжело переживал эту потерю, что некоторое время даже опасались за его рассудок.

Появление в печати «Начал» сделало имя Ньютона наиболее уважаемым во всей Англии. В 1689 г. он был избран в парламент от Кембриджа, а его материальное положение значительно улучшилось, когда в 1696 г. он получил место управляющего королевским монетным двором. Конец жизни Ньютона протекал в полном достатке.

При погребении праху Ньютона были оказаны почести, какими сопровождались в Англии лишь похороны членов

[1] Конечной разностью $f(x)$ называется разность значений этой функции: $f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$; $f(x_2) - f(x_1) = \Delta f(x_1)$; ...; $\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)$ и т. д.

королевского двора. На его могильном памятнике сделана надпись на латинском языке, которая перечисляет все многочисленные заслуги Ньютона перед наукой и заканчивается словами: «Пусть смертные радуются тому, что в их среде жило такое украшение человеческого рода».

Мы уже упоминали, что рядом с именем Ньютона в вопросе об оформлении новой отрасли математики — математического анализа, то есть дифференциального и интегрального исчислений, стоит имя Лейбница.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) родился 21 июня 1646 г. в Лейпциге, где отец его был профессором нравственной философии в университете. Предки Лейбница были славянами и носили фамилию Любенец, но когда они переселились в Германию, то их фамилия стала произноситься на немецкий лад — Лейбниц.

Лейбниц с детства мог пользоваться книгами из хорошей библиотеки своего отца, и это дало ему возможность ознакомиться с некоторыми науками совершенно самостоятельно. Он самоучкой постиг латинский язык, изучил схоластическую философию, а также механистическую философию Декарта. Последняя наиболее привлекла юного Лейбница, и под ее влиянием в нем пробудился особый интерес к вопросам математики.

Лейбниц 15 лет от роду поступил в Лейпцигский университет, где основной специальностью избрал юридические науки. По окончании университета, несмотря на прекрасные успехи, ему не удалось сразу добиться ученой степени, так как он был слишком молод. Однако в 1661 г. Лейбниц написал диссертацию по вопросам философско-логического характера и занял место доцента в Иене, а в 1667 г. в Альтдорфе получил степень доктора, и ему была предложена профессура. Но он предпочел поступить на службу к курфюрсту г. Майнца. В 1672 г., приехав с дипломатическими целями по поручению курфюрста в Париж, Лейбниц познакомился там с Гюйгенсом и многими другими выдающимися учеными. Эти знакомства возродили в Лейбнице былой интерес к математике. Между тем к этому времени среди математиков стало распространяться известие о новых методах, применявшихся Ньютоном в натурматематических исследованиях. Сам Ньютон не обнародовал своих открытий, но слухи о них просачивались из сообщений Ньютона лицам, с которыми он вел переписку. Когда об этих открытиях было сообщено Лейбни-

ГОТФРИД ЛЕЙБНИЦ

цу, то он указал, что и им тоже открыт метод, который приводит к тем же результатам, что и метод Ньютона. Свой метод Лейбниц обнародовал в работах «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления» (1684) и «О скрытой геометрии и анализе неделимых и бесконечных» (1686).

В работе «Новый метод...» Лейбниц изложил основные принципы дифференциального исчисления. При этом он исходил из задачи определения бесконечно малого приращения функции, полученного ею вследствие бесконечно малого изменения аргумента. Это приращение функции Лейбниц назвал дифференциалом, обозначив его буквой d.

Во второй из названных работ Лейбниц, исходя из квадратур фигур, ограниченных кривыми линиями, подходит к понятию интеграла и даже вводит символ $\int$, который сохранился и доныне; однако название «интеграл» появилось позднее и было введено Я. Бернулли.

Две упомянутые работы можно считать обобщающими ряд идей, разбросанных в других работах Лейбница, а также идей его предшественников.

До Лейбница не было выработано ни определенной символики, применяемой для задач дифференцирования, ни общего метода, который мог быть использован для различных случаев подобных задач. Лейбниц, введя понятие о дифференциале как разности между двумя бесконечно близкими значениями переменной величины, разработал весь алгоритм (термин, введенный Лейбницем) дифференцирования и потому с полным правом назвал открытый им метод дифференциальным исчислением.

Пользуясь «характеристическим треугольником», который употреблялся Паскалем лишь для случая окружностей, Лейбниц применил его для других кривых, что позволило в значительной мере расширить область применения дифференциального исчисления к геометрии.

В интегральном исчислении Лейбниц не ограничивался интегрированием целых рациональных функций, а ввел методы интегрирования алгебраических дробей.

В своих работах он искусно использовал разложение функций в степенные ряды и представил разложение

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$$

При этом им был указан и признак сходимости знакочередующихся рядов.

Лейбницем же открыт и общий метод разложения функций в степенные ряды, который и до нашего времени несправедливо приписывается *Бруку Тейлору* (1685—1731).

Многие математические термины, введенные в употребление Лейбницем, оказались настолько удачными, что сохранили значение до нашего времени. К таковым относятся, например, кроме ранее упомянутых, функция, координаты, алгебраические кривые, трансцендентные кривые и пр.

Влияние Лейбница на развитие математики не ограничилось одним лишь оформлением нового метода математических исследований.

В вопросах философии Лейбниц много внимания уделил формальной логике. Он полагал, что логика как наука о мышлении может быть сведена, подобно математике, к символическим операциям. Поэтому между математикой и формальной логикой может быть установлена связь. Эти мысли Лейбница были зародышами тех идей, которые впоследствии вылились в новую науку — математическую логику.

Лейбниц полагал, что часть тайны успеха алгебры состоит в искусстве пользоваться символами. Поэтому появляется возможность мечтать о создании новых алгоритмов, новых алгебр, изучающих и другие отношения, отличные от отношений между величинами. Даже более того — появляется надежда свести всякое рассуждение в комбинации знаков, и можно мечтать о том времени, когда два философа вместо бесконечных споров будут, подобно двум математикам, брать перья в руки и, сев за стол, заменять спор вычислением. Всеобщая математика обращается, таким образом, в счисление рассуждений и сливается с логикой.

Искусство пользоваться символами помогло Лейбницу создать единую символику в математическом анализе. Оно же во многих случаях оказывало Лейбницу помощь в его математических вычислениях. Еще Ньютон ввел в практику употребление индексов для указания порядка значений такого вида: x_1, x_2 и т. д., а Лейбниц усовершенствовал применение индексов, введя двойные обозначения. Например, при рассмотрении системы уравнений он записывал эту систему таким образом:

$$a_{10}x+a_{11}y=a_{12};$$
$$a_{20}x+a_{21}y=a_{22}.$$

Подобными индексами мы теперь широко пользуемся при решении систем уравнений, при составлении определителей, матриц и во многих других случаях.

Из сказанного выше мы можем заключить, что Ньютон и Лейбниц в разработке ими основ дифференциального и интегрального исчислений шли к одной цели, но каждый своим путем. Если Ньютон исходил преимущественно из понятий механики, то Лейбниц интересовался этими методами как философ и геометр. Если к окончательным выводам Ньютон подошел несколько ранее Лейбница, то Лейбниц опубликовал свои выводы ранее Ньютона. Кроме того, Лейбницу удалось создать более удобную символику и технику счета, а потому его идеи сразу после их обнародования вошли в широкое употребление, а его методы вычислений постепенно вытеснили методы Ньютона даже в Англии, хотя англичане всячески старались отстаивать приоритет Ньютона.

До сих пор не установлено, в какой мере Ньютон мог повлиять на Лейбница при создании таких замечательных методов для исследования явлений окружающей жизни, как дифференциальное и интегральное исчисления, а потому честь изобретения разделяется между обоими гигантами мысли, и наши современники не отдают ни одному из них приоритета в этих завоеваниях науки.

Открытиями Ньютона и Лейбница завершается длительный период развития наук, начавшийся с пробуждения научной мысли на заре великой эпохи — эпохи Возрождения. В дальнейшем это развитие вступает в новую фазу.

КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ЗАПАДНОЙ ЕВРОПЕ В XVIII В.

Человечество, в результате наблюдений накопив большое количество фактов, пришло к выводу, что не все в нашем мире остается постоянно неизменным, как это думали до того времени и как этому учили все религии. Так, теория Канта — Лапласа ведет к утверждению, что весь мир, а в том числе и наша Земля, переживает различные стадии своего существования. Биология и палеонтология делают открытия, показывающие, что весь животный и растительный мир тоже претерпевает изменения. Изменяется даже и высший представитель живых существ — сам человек.

Наука позволяет установить связи между отдельными родами и видами живых существ, выявить их общие качества, а следовательно, и их различие между собой. Улавливается связь между животным и растительным миром, и даже выявляются существа, которые служат промежуточными звеньями между растениями и животными, то есть которых нельзя строго отнести ни к растениям, ни к животным. Наконец, возникает даже сомнение в различии живого и неживого, то есть появляется мысль о возможности зарождения жизненных клеток из неорганической материи.

В эту эпоху, когда человек стал замечать изменения, происходящие в окружающей его жизни и природе, математика, создавшая под влиянием задач геометрии, механики, физики и техники методы исследования изменений переменных величин, приобрела особое значение и стала самым необходимым орудием человека для изучения соотношений и явлений окружающего мира. Но вместе с тем в математике зародился глубокий внутренний кризис, основной причиной которого явилась недостаточная обоснованность тех понятий дифференциального и интегрального исчислений, которыми оперировали и на которые опирались основоположники нового метода.

Хотя Ньютон и развил довольно строгую теорию пределов, в ней имелись неясности. Кроме того, Ньютон, оперируя с бесконечно малыми величинами, не проводил последовательно и до конца перехода к пределу.

Что же касается Лейбница и ближайших его последователей, то у них мы не находим даже ясного и точного определения понятия бесконечно малой величины; это понятие в различных случаях получает различное толкование.

Таким образом, творцы математического анализа дали в руки человечества замечательное орудие для исследования явлений, но не снабдили его достаточно ясным объяснением принципа его устройства. А потому проверенная опытом практическая приложимость математического анализа к разрешению задач самого различного характера не получила теоретического обоснования и вызывала сомнение, не являются ли удачные приложения нового метода простой случайностью.

Многие философы и математики отметили эту теоретическую необоснованность новых течений в математике и потому резко выступали против применения бесконечно малых величин. В среде математиков наблюдались две тенденции: одни из них, вполне убежденные в безупречности нового метода, стремились углубить его теорию, подвести под этот метод твердый фундамент, а другие, наоборот, не будучи твердо уверены в его обоснованности, старались в своих научных исследованиях совсем избегать бесконечно малых величин.

В особенности против анализа бесконечно малых величин восставала церковь, которая чувствовала, что новое учение, в основе которого лежало понятие о переменных величинах, представляло большую угрозу реакционным религиозным представлениям мира как комплекса вещей и существ, сотворенного богом и пребывающего со времени творения неизменным. Одним из серьезных противников бесконечно малых величин был английский епископ *Джордж Беркли* (1684—1753). Этот философ-идеалист, философии которого В. И. Ленин дает сокрушительный отпор в своих сочинениях (в особенности в труде «Материализм и эмпириокритицизм»), яростно оспаривает многие положения современной ему математики. Надо отдать справедливость Дж. Беркли в том отношении, что его выступления против идеи бесконечно малых величин отчасти имели под собой почву, пока основные понятия анализа (бесконечно малые и бесконечно большие величины, производные, дифференциалы и пр.) не получили строгого теоретического обоснования.

В своей работе «Трактат о началах человеческого знания» он восстает против мнения, что конечная величина может быть делима до бесконечности. В доказательство своего утверждения он говорит: «Каждое отдельное конечное протяжение, которое может служить предметом нашего мышления, есть и д е я, существующая лишь в нашем уме, и, следовательно, каждая его часть должна быть воспринимаема. Если, поэтому, я не могу воспринимать бесконечное множество частей в отдельной линии, поверхности или теле, ... из него заключаю, что оне не содержатся там»... «Всякий, кто полагает, что ощущаемые предметы существуют вне духа, не затруднится утверждать, что линия длиною всего в дюйм может заключить в себе бесчисленное множество частиц, которые действительно существуют, хотя слишком малы, чтобы быть различаемыми. Это заблуждение укоренилось в умах как геометров, так и прочих людей»... «Умозрения относительно бесконечных величин достигли в новейшее время таких размеров и выродились в столь странные понятия, что послужили поводом к немалым сомнениям и спорам среди геометров. Некоторые из них, имеющие громкое имя, не довольствуются мнением, будто конечные линии могут быть делимы на бесконечное число частей, но утверждают далее, что каждая из этих бесконечно малых частей в свою очередь делима на бесконечное число других частей, или бесконечно малых величин второго порядка и так далее до бесконечности»... «Другие утверждают, что все порядки бесконечно малых величин ниже первого порядка суть ничто, основательно считая нелепым предположение, будто существует какое-либо положительное количество или часть протяжения, которая, даже будучи бесконечно умноженною, никогда не сравнится с наименьшим данным протяжением»... «Не в праве ли мы отсюда заключить, что и те и другие ошибаются, и что в действительности нет такой вещи, как бесконечно малые части или бесконечное число частей, содержащееся в конечной величине?»... [1]

Еще более резко Дж. Беркли выступает против учения о бесконечно малых величинах в другом своем сочинении — «Аналист». Тут он в особенности нападает на методы И. Ньютона. «Прежде всего, разум не в состоянии понять этих последних «частиц времени» или «последних приращений»,— говорит Беркли.— «Что такое флюксии? Скорости исчезающих приращений. А что такое сами эти исчезающие приращения? Это ни конечные величины, ни бесконечно малые, ни даже ничто. Не могли бы мы их назвать призраками почивших величин?»

Мы не будем приводить других высказываний Беркли и его нападок на основные идеи Лейбница и его последователей. Скажем лишь, что подобные нападки заставляли призадуматься и математиков и философов, обратить их внимание на обоснование новых методов. Задачей философов являлось подведение под новые методы прочных методологических основ, которые помогли бы изгнать из математики все темные, казавшиеся мистическими, понятия, вроде понятия о производной. А перед математиками стояла проблема создания строгих, научных обоснований для применения этих новых методов или же полного отказа от применения бесконечно малых величин.

Методы и алгоритмы новых исчислений, выработанные Лейбницем, стали быстро распространяться среди его современников. Прежде всего они нашли своих приверженцев в лице швейцарских математиков — братьев Бернулли.

Якоб Бернулли (1654—1705), профессор математики Базельского университета (с 1687 г.), и его младший брат *Иоганн Бернулли* (1667—1748) вели оживленную переписку с Лейбницем и сумели еще более расширить рамки применения его

---

[1] Беркли Дж. Трактат о началах человеческого знания. Спб., 1905, с. 157—158, 162—163.

ЯКОБ БЕРНУЛЛИ

методов. Еще до получения каких-либо разъяснений от Лейбница Якоб Бернулли, пользуясь введенными Лейбницем новыми методами, разрешил задачу о так называемой брахистохроне. Эта задача заключалась в нахождении кривой быстрейшего спуска, то есть такой кривой, по которой материальная точка в поле тяжести, двигаясь под действием только сил этого поля и с начальной скоростью, равной нулю, перейдет из одного наперед заданного положения в другое, тоже заданное, за кратчайший срок. Якоб Бернулли показал, что этой кривой является циклоида. В этой работе Я. Бернулли, употребляя введенный Лейбницем символ $\int$, впервые наименовал его интегралом, в то время как Лейбниц называл его суммой. С этих пор и сам Лейбниц принял это название, и к термину «дифференциальное исчисление» присоединился термин «интегральное исчисление».

Я. Бернулли, широко применяя эти исчисления, разрешил ряд геометрических задач. Так, им была получена формула для определения радиуса кривизны плоской кривой. Им изучены также многие кривые, например логарифмическая спираль, цепная линия (линия, по которой располагается ненатянутая материальная нить или цепь, подвешенная за оба конца). Он открыл и изучил лемнискату — кривую, произведение расстояний которой от двух постоянных точек (фокусов) равно постоянной величине a^2. В декартовых координатах эта кривая выражается уравнением

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0,$$

а в полярных

$$\rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Я. Бернулли впервые обнаружил расходимость гармонического ряда.

После смерти Я. Бернулли в 1705 г. кафедра математики в Базеле перешла к его брату Иоганну Бернулли, занимавшему до того времени кафедру математики Гронингенского университета в Голландии.

И. Бернулли в сотрудничестве с Лейбницем способствовал оформлению дифференциального исчисления и установлению некоторых положений математики. В учении о функции он считал, что функция выражается аналитически при помощи постоянных и переменных величин. Это было определенным прогрессом, так как до сего времени функция имела исключительно геометрическое толкование.

Работы И. Бернулли по математическому анализу оказали положительное влияние на развитие вопроса о дифференциальных уравнениях (о «суммарных уравнениях», как именовал их в свое время Лейбниц). Им разработаны методы решения однородных и линейных дифференциальных уравнений, так называемого уравнения Бернулли, а также уравнений с постоянными коэффициентами.

При исследовании неопределенных выражений вида $\frac{0}{0}$

ИОГАНН БЕРНУЛЛИ

И. Бернулли открыл правило, которое неправильно именуется правилом Лопиталя. Им дано также выражение для разложения функций в ряд, сходный с рядом Тейлора.

Решая задачи геометрического характера на спрямление кривых и вычисление квадратур, И. Бернулли совершенствовал и развивал методы интегрального исчисления. Так, им были основательно разработаны методы интегрирования рациональных дробей.

Братья Бернулли, решая задачи, связанные с понятиями максимума и минимума, пришли к вопросам, из которых впоследствии (главным образом в трудах Эйлера и Лагранжа) выросла особая отрасль математических наук, называемая вариационным исчислением.

Иоганн Бернулли, кроме всего прочего, оставил о себе память созданием лекций по дифференциальному и интегральному исчислениям. Эти лекции он читал своему ученику — маркизу Лопиталю, и впоследствии они послужили основой для составленного Лопиталем первого курса дифференциального исчисления.

Маркиз *Гильом Франсуа Лопиталь* (1661—1704) сумел хорошо использовать те знания, которые он получил от И. Бернулли, и в 1696 г. издал книгу «Анализ бесконечно малых», которая должна считаться первым систематическим изложением дифференциального исчисления. Достоинством этого труда является последовательность и методичность изложения. «Анализ» выдержал большое число изданий в течение XVIII в. и был переведен с французского языка на английский.

Являясь первым последовательным курсом дифференциального исчисления, «Анализ» Лопиталя, однако, не разрешал вопроса о безупречности основных понятий анализа с философской и строго математической точек зрения. Эти понятия по-прежнему носили мистический характер. Поэтому нет ничего удивительного в том, что уже к концу XVIII в., а именно в 1784 г., Берлинская академия наук объявила конкурс, целью которого было установление «строгой и ясной теории того, что в математике называют бесконечным».

Знаменитый французский математик и механик *Жозеф Луи Лагранж* (1736—1813), бывший в то время президентом Берлинской академии наук, сделал попытку освободить математический анализ от употребления бесконечно малых величин и пределов. С этой целью он ввел понятие о производных разных порядков как о коэффициентах разложения функции в степенной ряд. Таким образом, ему удалось подойти к понятиям анализа исходя из понятий алгебры конечных величин. Однако при этом была постулирована возможность разложения функции в степенной ряд, а это излишне ограничивало общее понятие функции. Кроме того, созданный им алгоритм отличался гораздо большей сложностью, чем алго-

ЖАН Д'АЛАМБЕР

ритм Лейбница, и потому для практического применения был неудобен. Тем не менее Лагранжу удалось успешно разработать многие важные вопросы математического анализа. Им дана очень удобная для практики формула выражения остаточного члена ряда Тейлора, разработана теория условных максимумов и минимумов, дан метод вариации произвольных констант при решении линейных дифференциальных уравнений. В элементарной алгебре Лагранж разработал теорию цепных дробей.

Попытку дать строгое обоснование математическому анализу делал и французский математик и философ *Жан Лерон Д'Аламбер* (1717—1783).[1]

Заслугой Д'Аламбера является то, что он хотел обосновать анализ, построив его впервые на теории пределов. Как мы увидим далее, эта идея была осуществлена позднее французским математиком Огюстеном Коши. Д'Аламбер в «Энциклопедии наук, искусств и ремесел» дал такое определение предела переменной величины: «Одна величина является пределом другой величины, если эта вторая может стать к первой ближе, чем на любую данную величину, как бы ни была мала эта последняя, причем, однако, приближающаяся величина никогда не может превзойти величину, к которой приближается. Таким образом, разность такого количества и его предела абсолютно неуказуема». Очевидно, это определение относится к величине монотонно возрастающей.

Заслуги Д'Аламбера в истории развития математики не ограничиваются попыткой введения теории пределов. Ему принадлежат значительные работы в области теории рядов дифференциальных уравнений. Им получен признак сходимости рядов с положительными членами. Что же касается дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также системы линейных уравнений первого и второго порядка, то Д'Аламбер в значительной степени способствовал развитию их теории. Кроме того, им дано решение дифференциального уравнения второго порядка в частных производных, которое представляет собой уравнение математической физики, дающее выражение поперечных колебаний струны и именуемое волновым уравнением. В работах Д'Аламбера впервые встречается практическое применение функций комплексного переменного.

Д'Аламбером и Эйлером открыты и условия дифференцируемости функций комплексного переменного, которые неправильно вошли в математику под названием условий Коши — Римана.

Если Лагранж пытался совсем отказаться от понятия о бесконечно малых величинах, а Д'Аламбер — дать им теоре-

[1] История фамилии ученого такова. Ребенком его подкинули. Полицейский комиссар велел назвать найденыша Жаном Лероном (в память церкви Круглого Иоанна (Gean le Rond), при входе в которую его нашли). Фамилию «Д'Аламбер» ученый придумал себе сам в зрелом возрасте по имени воспитавшего его Аламбера. **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

ЛАЗАРЬ КАРНО

тическое обоснование при помощи метода пределов, то третий путь — путь оправдания и разъяснения существующего алгоритма бесконечно малых величин — избрал *Лазарь Никола Карно* (1753—1823). Л. Карно происходил из семьи французского провинциального нотариуса города Нолан в Бургундии и получил специальное образование военного инженера в г. Мезьере. Он принимал активное участие во французской буржуазной революции 1789 г., будучи с 1791 г. членом Законодательного Собрания, а с 1792 — членом Конвента, где, состоя в партии якобинцев, голосовал за смертную казнь королю Людовику XVI. В 1793 г. Л. Карно была поручена организация революционной армии. Он создал мощную армию, которая сумела дать достойный отпор коалиции европейских государств, направивших против революционной Франции огромные вооруженные силы. Вот почему французский народ метко называл его «генералом от революции» и «организатором побед».

Трудные и ответственные обязанности по защите завоеваний революции не отвлекали Л. Карно от упорных исследований в области математики, о которой он не забывал ни при каких обстоятельствах, и он добился больших успехов на этом поприще, став крупным геометром своего времени.

В работе «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых», написанной им в 1797 г., Карно останавливается на выяснении понятия «бесконечно малое». Он, между прочим, говорит: «Количества, называемые в математике бесконечно малыми, не являются ни действительно исчезающими количествами, ни даже количествами, действительно меньшими, чем те или иные определенные величины, а только количествами, которым условия данного вопроса и предположения, на которых основывается вычисление, позволяют до тех пор, пока вычисление не будет совсем выполнено, оставаться переменными, причем они уменьшаются непрерывно, пока не сделаются сколь угодно малыми, без того, чтобы представлялось необходимым изменять в то же время значения количеств, соотношение между которыми желают получить. Только в этом и состоит истинный характер количеств, которым дано имя бесконечно малых, а вовсе не в той малости, которой они будто бы должны были действительно обладать, согласно их наименованию, и не в абсолютной ничтожности, которую им можно было бы принять. Мы видим, таким образом, что понятие бесконечно малых совершенно просто и свободно от всякой неопределенной или спорной идеи». Введя в первой части своей работы такое определение, оправдывающее, с его точки зрения, реальность понятия бесконечно малой, Карно рассматривает различные, сложившиеся исторически, методы, приводящие к бесконечно малой величине (метод исчерпывания, метод пределов, метод флюксий, метод Лейбница), и приходит к выводу, что все эти методы имеют свое место в практических приложениях: один метод более удобен для разрешения одних вопросов, а другой — для каких-либо других. Но все же у Карно предпочтение отдается методам, установленным Лейбницем. Однако теоретическое обоснование анализа бесконечно малых, приведенное у Карно, весьма сомнительно. Рассуждения Карно основаны на том соображении, что в анализе одна ошибка снимается при помощи другой ошибки и результат получается абсолютно достоверный. Первая ошибка возникает, когда вместо точных уравнений берутся приближенные (содержащие бесконечно малые величины), а вторая — когда эти бесконечно малые затем отбрасываются. Свою теорию Карно подтверждает рядом примеров. Такого рода объяснения, конечно, не могли считаться строгими.

Как мы видели, в работах Д'Аламбера и Карно не было дано полного оправдания методам, применявшимся в математическом анализе. Вследствие этого мысль передовых математиков продолжала работать над утверждением методов математических исследований на более прочных основах. Эти основы были найдены другим французским математиком — Коши.

Огюстен Луи Коши (1789—1857) — выдающийся французский математик — родился в Париже. С ранних лет он проявил большие способности к математике, чем и обратил на себя внимание крупных ученых.

По окончании Политехнической школы он работал инженером в Шербуре. С 1816 г. состоял членом Академии и профессором Политехнической школы в Париже, но его монархические убеждения, идущие вразрез с общим укладом республиканского строя, заставили его эмигрировать в 1830 г. из Парижа. По возвращении на родину в 1838 г. он еще долго не мог восстановить своего прежнего положения и лишь с 1848 г. стал профессором Парижского университета (Сорбонны).

Основными систематическими математическими курсами Коши надо считать «Курс анализа» (Алгебраический анализ) и «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых». Кроме того, большое значение имеют его многочисленные работы по дифференциальным уравнениям и теории комплексного переменного, а также по алгебре, где, например, разработана теория детерминантов.

Первое из упомянутых сочинений дает новое обоснование для математического анализа. В этой работе содержится строгое определение бесконечно малой величины, причем в его

ОГЮСТЕН КОШИ

основу положено понятие о предельном переходе. Такое определение и дало возможность обосновать все операции, которые производятся над бесконечно малыми величинами в курсах дифференциального и интегрального исчислений.

Коши на основании введенного им понятия о бесконечно малых величинах установил следующее определение непрерывности функции: функция непрерывна, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

В указанных работах Коши развивает также учение о сходимости бесконечных рядов и вводит понятие интеграла как предела интегральных сумм. Большая заслуга Коши в истории математики заключается в том, что он положил начало развитию теории функции комплексного переменного. Он показал, что степенной ряд в комплексной области обладает кругом сходимости, и дал понятие об интеграле с комплексными пределами.

Коши углубил теорию дифференциальных уравнений, доказав существование в области, не содержащей особых точек, решений системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющих определенным условиям.

Теоретическое обоснование математического анализа Коши было настолько прочно, что оно сохранило свое значение до последних лет XIX в. Лишь в конце XIX в. появилась необходимость вновь пересмотреть эти основы и ввести еще более строгое обоснование для понятий, входящих в классический математический анализ. Это было сделано творцами нового направления в математических концепциях — сторонниками теоретико-множественного разъяснения функциональной зависимости.

Развитие новой отрасли математики — теории множеств — позволило установить еще более строгие определения для основных понятий математики: функции, производной, непрерывности, интеграла и пр. Эти определения являются неоспоримыми до нашего времени. На основе теории множеств получило более глубокое толкование и фундаментальное понятие математики — число, а в математическом анализе появилась новая ветвь — теория функций (действительного и комплексного переменного).

Параллельно с теоретическим шло и философское обоснование математического анализа. В XIX в. крупнейшие мыслители — вожди международного пролетариата К. Маркс и Ф. Энгельс — дали диалектико-материалистическую трактовку ряда основных понятий математики.

Фридрих Энгельс (1820—1895) в своих трудах «Диалектика природы» и «Анти-Дюринг» исчерпывающе разъясняет те сомнения, которые возникали в связи с введением понятия о бесконечно малых величинах, и указывает на полную реальность этого понятия. Тем самым он в корне разбивает попытки Беркли доказать необоснованность внесения этих понятий в строгую научную теорию.

Ф. Энгельс пишет: «Из всех теоретических успехов знания вряд ли какой-нибудь считается столь высоким триумфом человеческого духа, как изобретение исчисления бесконечно малых во второй половине XVII века. Если уж где-нибудь мы имеем перед собой чистое и исключительное деяние человеческого духа, то именно здесь. Тайна, окружающая еще и в наше время те величины, которые применяются в исчислении бесконечно малых,— дифференциалы и бесконечно малые разных порядков,— является лучшим доказательством того, что все еще распространено представление, будто здесь мы имеем дело с чистыми «продуктами свободного творчества и воображения» человеческого духа, которым ничто не соответствует в объективном мире. И тем не менее справедливо как раз обратное. Для всех этих воображаемых величин природа дает нам прообразы.

Наша геометрия исходит из пространственных отношений, а наша арифметика и алгебра — из числовых величин, соответствующих нашим земным отношениям, т. е. соответствующих тем телесным величинам, которые механика называет массами, как они встречаются на Земле и приводятся в движение людьми. По сравнению с этими массами масса Земли является бесконечно большой и трактуется земной механикой как бесконечно большая величина. Радиус Земли$=\infty$, таков принцип всей механики при рассмотрении закона падения. Однако не только Земля, но и вся Солнечная система и все встречающиеся в ней расстояния оказываются, со своей стороны, опять-таки бесконечно малыми, как только мы переходим к тем расстояниям, которые имеют место в наблюдаемой нами с помощью телескопа звездной системе и которые приходится определять световыми годами. Таким образом, мы уже имеем здесь перед собой бесконечные величины не только первого, но и второго порядка, и можем предоставить фантазии наших читателей — если им это нравится — построить себе в бесконечном пространстве еще и дальнейшие бесконечные величины более высоких порядков».[1]

Так Ф. Энгельс объясняет практическое происхождение бесконечно малых величин и их различных порядков. Однако при этом несколько затушевывается чисто математическое понятие бесконечно малой величины как величины переменной.

Совершенно реальным оказывается и понятие дифференциала со всеми его характерными математическими особенно-

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е, с. 582—583.

стями. Ф. Энгельс дает этому следующее разъяснение: «...молекула обладает по отношению к соответствующей массе совершенно такими же свойствами, какими обладает математический дифференциал по отношению к своей переменной, с той лишь разницей, что то, что в случае дифференциала, в математической абстракции, представляется нам таинственным и непонятным, здесь становится само собой разумеющимся и, так сказать, очевидным». [1]

Крупнейший германский философ-идеалист *Георг Вильгельм Фридрих Гегель* (1770—1831) в своих суждениях о математических понятиях дал дифференциалу очень туманное толкование, отличающееся абстрактным характером и содержащее мистические элементы.

Иначе обстоит дело с той трактовкой, которую привел для понятия дифференциала и производной *Карл Маркс* (1818—1883). Этот великий создатель революционной науки, основоположник научного коммунизма, в последние годы жизни весьма интересовался математикой и дал диалектическую трактовку некоторым основным понятиям анализа. В рукописях К. Маркса имеется большой материал по вопросам математики. Математические рукописи К. Маркса [2] посвящены главным образом исследованиям в области дифференциального исчисления. Мы находим в них разоблачение мистического характера основных понятий анализа, заключающегося в идеях творцов анализа И. Ньютона и Г. Лейбница. Что касается того алгоритма, который применялся И. Ньютоном при определении флюксий и который основан на понятии «последних отношений», то К. Маркс полагает, что как сам Ньютон, так и его последователи сами верили в мистический характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом отношении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем.

К. Маркс, со своей стороны, показывает, что в процессе нахождения производной от функции нет ничего мистического и что для получения производных мы в сущности пользуемся обычными приемами алгебры. Прежде всего он обращает внимание на то, что если исследуется некоторая функция $f(x)$ и если величина x принимает два значения x_0 и x_1, то, представ-

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е, с. 583.

[2] Математические рукописи К. Маркса не были опубликованы при его жизни. Впервые частично они появились в печати лишь в 1933 г. в СССР, а их полное издание было выпущено в 1968 г.

ляя разность $f(x_1)-f(x_0)$ выраженной через x_0 и x_1, можно вывести следующее заключение:

$$f(x_1)-f(x_0)=(x_1-x_0)\,\varphi(x_1,\ x_0),$$

что при $x_1=x_0$ обращается в тождество $0=0$. Но так как x_1-x_0 при $x_1\neq x_0$ есть величина конечная, то равенство можно представить в таком виде:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\varphi(x_1,\ x_0).$$

Эту функцию $\varphi(x_1, x_0)$ К. Маркс называет «предварительной производной». Значение предварительной производной при $x_1=x_0$ дает производную $f'(x_0)$. В самый ответственный момент, кода x_1 принимает значение x_0, в левой части равенства получается $\frac{0}{0}$, но смысл этого выражения раскрывается путем алгебраических, вполне реальных вычислений в правой стороне равенства. Когда этот алгебраический путь выявлен, то производная вполне определяется. Этот процесс К. Маркс называл алгебраическим дифференцированием.

Представляя в указанной последовательности нахождение предварительной производной, а затем по ней и производной функции, Маркс снимает с этого процесса мистику и делает его реальным [1]. Поэтому и символ $\frac{dy}{dx}$, знаменующий производную, приобретает реальный смысл. Вполне естественно, что такой же реальный смысл сохраняется и за символами, представляющими производные высших порядков. Например, $\frac{d^2}{dx^2}$ дает выражение производной от $f'(x)$, которая, в свою очередь, есть не что иное, как некоторая функция от x. Таким образом, при определении производной второго порядка весь процесс протекает в той же последовательности, что и процесс отыскания производной первого порядка.

В наше время классический анализ, получивший полное оправдание как с теоретической, так и с методологической стороны, является могучим орудием в руках человечества, которым оно искусно пользуется для раскрытия законов приро-

---

[1] Все изложенное здесь о процессе отыскания производной функции и предварительной производной можно найти в книге: К. Маркс. Математические рукописи. М., 1968, с. 29—45.

ды и скрытых ее сил, преобразования природы в целях лучшего устройства человеческого общества и создания необходимых жизненных условий, облегчающих труд человека.

КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИИ В ЗАПАДНОЙ ЕВРОПЕ В XVIII И НАЧАЛЕ XIX В.

Говоря о развитии геометрических идей во Франции, мы упоминали имена Декарта, Паскаля и некоторых других ученых. К ним мы должны присоединить еще имя крупного математика XVIII в. Клеро.

Алексис Клод Клеро (1713—1765) принадлежит к тем замечательным математикам, которые проявили свои необыкновенные способности уже в весьма раннем возрасте[1].

Клеро в возрасте 12 лет представил в Парижскую академию наук доклад об особых кривых, в котором, между прочим, было проведено исследование одного типа алгебраических кривых четвертого порядка. В 1729 г., то есть когда Клеро было всего 16 лет, он написал большую работу «Изыскание о кривых двоякой кривизны». Эта работа произвела большое впечатление на членов Академии, и Клеро было присвоено звание действительного члена Академии наук, когда ему исполнилось всего 17 лет. Это было сделано вопреки существовавшему закону, согласно которому лицу, избираемому в Академию, должно было быть не менее 20 лет. Указанная работа имела большое значение в развитии геометрии, так как она наряду с работами Эйлера положила начало серьезному изучению криволинейных стереометрических образов. Клеро первым ввел понятие криволинейного интеграла, а также дал понятие полного дифференциала функции нескольких независимых переменных.

Эпоха французской буржуазной революции выдвинула видного геометра, труды которого значительно расширили область изучения пространственных образов и поставили это изучение на строгую научную почву,— Гаспара Монжа.

Гаспар Монж (1746—1818) происходил из семьи крестьянина, который занимался также мелкой торговлей. Отец Мон-

[1] У Алексиса Клеро был младший брат (умер в 17 лет), который так же рано проявил замечательные дарования в области математики (в 14 лет написал трактат по геометрии, который был напечатан в трудах Парижской академии наук. **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

АЛЕКСИС КЛЕРО

жа дал своим троим сыновьям такое хорошее образование, что они все стали впоследствии профессорами математики.

В 1769 г. Монж получил назначение на должность профессора в военно-инженерную школу г. Мезьера. Долголетняя работа в этой школе была тем периодом в жизни Монжа, в течение которого ему удалось развить свои основные идеи в математике, придавшие новое направление математической науке и в то же время нашедшие использование в инженерном деле. Математика обязана Монжу зарождением новой

ГАСПАР МОНЖ

отрасли математических знаний — начертательной геометрии, творцом которой он справедливо считается. Его труд «Начертательная геометрия» был написан в середине семидесятых годов XVIII в. Ряд лет он использовался для преподавания в рукописном виде и был опубликован лишь в 1799 г.

Г. Монж понимал огромное значение созданной им науки для промышленных целей и полагал, что она может «освободить французский народ от зависимости от иностранной индустрии, в которой он находился до настоящего времени».

Со времен Монжа начертательная геометрия приобрела характер строгой научной системы.

В восьмидесятых годах XVIII в. Монж несколько отошел от чисто математических исследований и все внимание сосредоточил на вопросах прикладного характера. Это объясняется главным образом переменой обстоятельств в личной жизни Монжа. После женитьбы он стал владельцем металлургического завода и заинтересовался технологическими процессами обработки металла. Эта заинтересованность стимулировала его большие успехи в физике и химии и поставила его имя рядом с именами крупных ученых в области этих наук.

В 1780 г. Монж был избран членом Академии наук и в 1784 г. расстался с Мезьерской школой и переселился в Париж, где его и застала восторженно встреченная им французская революция. Он понимал, что изменение политического режима будет способствовать развитию наук, и со своей стороны приложил немало усилий, чтобы помочь этому делу.

Как известно, одним из деяний революционного времени, содействовавших развитию наук, была реформа системы мер и весов, выразившаяся во введении системы метрических мер. В комиссии, проводившей это мероприятие в жизнь, состоял и Монж.

Когда монархия была свергнута и образовалось первое революционное правительство — Временный Исполнительный Совет,— Монж вошел в его состав и сначала выполнял обязанности морского министра, а затем использовал свои знания для обороны Франции. В этой области ему удалось добиться усовершенствования обточки и высверливания артиллерийских орудий, а также организовать в крупных масштабах добычу селитры для производства пороха.

После свержения революционно-демократической диктатуры Монжу пришлось сначала скрываться, опасаясь преследований со стороны нового французского правительства; но и новое правительство нуждалось в услугах такого крупного ученого, каким был Монж, и он был привлечен к преподаванию в учрежденной в Париже в 1794 г. Центральной школе общественных работ. Эта школа трудами Монжа и других крупных ученых, преподававших в ней, стала самой передовой школой Франции, выпускавшей весьма квалифицированных ученых. В 1795 г. она была преобразована в Политехническую школу, в которой Монж играл руководящую роль по выработке и установлению всей системы обучения. В этой школе он читал лекции по начертательной геометрии и анализу. Здесь окончательно оформились его идеи по начертательной геометрии и был подготовлен и опубликован его труд «Листы анализа в приложении к геометрии». Третье издание этого труда, выпущенное в свет в 1805 г., носит название «Приложение анализа к геометрии».

В той же Политехнической школе Монж излагал теорию интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных и дал свое решение задачи о колебании струны.

Монж первым ввел в науку линии кривизны поверхностей, изучая эволюты пространственных кривых, исследовал огибающие развертывающихся поверхностей. Кроме того, он дал геометрическое истолкование уравнений с частными производными и, с другой стороны, изложение геометрических фактов на языке уравнений с частными производными.

В последний период жизни Монжа его судьба была тесно связана с политической жизнью его родины. Ему пришлось участвовать в качестве советника по техническим вопросам в первых походах генерала *Наполеона Бонапарта*, который в то время всячески старался показать свое уважение к ученым и их трудам. Этим он сумел завоевать расположение Монжа, глубоко преданного интересам науки. Кроме того, первые победы Наполеона, разрушавшие остатки феодальных отношений в Европе, принимались Монжем, да и не им одним, за проявление прогрессивных начал. После падения Наполеона и новой реставрации династии Бурбонов Монж испытал на себе всю тяжесть расправы со стороны реакции и за свое революционное прошлое, и за близость к Наполеону. Монж, как и другие прогрессивные ученые Франции, был исключен из Академии наук, из совета Политехнической школы, лишен пенсии.

Глубокая скорбь об унижении родины, отстранение от любимой научной работы, вне которой Монж не представлял своего существования, и другие невзгоды, связанные с реакционным режимом, губительно подействовали на семидесятилетнего ученого. 28 июня 1818 г. Монж скончался.

Значительный вклад в дальнейшее развитие геометрических идей был внесен крупнейшим немецким математиком Карлом Фридрихом Гауссом.

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) родился в семье бедного водопроводчика в г. Брауншвейге. Высшее образование ему удалось получить в Геттингенском университете благодаря по-

КАРЛ ГАУСС

кровительству герцога, имевшего случай убедиться в необыкновенных способностях мальчика. В 1799 г. он заслужил звание доцента, а с 1807 г. стал профессором и заведующим обсерваторией в Геттингене, где и работал до самой смерти.

Многочисленные и глубокие по содержанию труды Гаусса относятся к самым различным областям математики, а также астрономии и геодезии.

Одним из первых значительных трудов по математике, написанных Гауссом, была его работа «Арифметические иссле-

дования». Она явилась фундаментом современной теории чисел. В первой ее части Гаусс развил теорию квадратичных вычетов[1]. В этой же части работы выведен и так называемый закон взаимности (теорема, которую Гаусс называл «золотой теоремой»), открытый Эйлером, но впервые доказанный Гауссом. Этот закон выражается при помощи такого символа, введенного Лежандром: $\left(\frac{a}{p}\right)=1$, когда a — квадратичный вычет по модулю p и $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$, когда a — невычет. Тогда закон взаимности представляется в следующем виде: $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{p}{a}\right)=$
$=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}}$.

Вторая часть «Арифметических исследований» содержит исследование квадратичных форм, то есть определение того, какие значения может принимать трехчлен $am^2+2bmn+cn^2$ при целых значениях a, b, c, m и n.

Третья часть посвящена вопросу разрешения двучленных уравнений вида $x^n=1$. Здесь особое внимание обращается на разрешимость подобных уравнений в квадратных радикалах. С этим связан вопрос о геометрических построениях. Известно, что геометрические построения при помощи циркуля и линейки возможны лишь тогда, когда геометрические образы связываются между собой рационально или иррационально уравнениями не выше второго порядка.

Свою теорию решения двучленных уравнений Гаусс применил к построению правильных многоугольников и тем самым завершил разрешение вопроса, который возник у древних греков и 2000 лет оставался без продвижения вперед. Метод Гаусса дает возможность определить, какие правильные многоугольники можно построить при помощи циркуля и линейки и как выполнить построение. В частности, Гаусс доказал возможность построения правильного семнадцатиугольника и сам его выполнил. Решению этой задачи Гаусс придавал большое значение, и, согласно его завещанию, на его могильном памятнике изображен вписанный в круг семнадцатиугольник.

Ранее мы уже не раз останавливались на вопросе о том,

---

[1] Квадратичным вычетом целого числа x по модулю m называется такое число a, для которого разность x^2-a делится на m; если эта разность не делится на m, то a называется невычетом.

как проникали в жизнь мнимые числа. Однако они вошли во всеобщее употребление лишь тогда, когда получили геометрическое толкование, реально воплощавшее их название «комплексное число», и его представление в виде $a+bi$ было впервые дано Гауссом в исследовании о биквадратных вычетах (в работах 1825 и 1831 гг.).

После Гаусса вошло в употребление и геометрическое толкование мнимых и комплексных чисел, но оно создавалось постепенно.

Первые намеки на геометрическое изображение мнимых чисел мы встречаем уже у Дж. Валлиса в его «Алгебре» (1685 г.) Валлис подметил, что при алгебраическом решении некоторые геометрические задачи, при определенных заданиях, выражались уравнениями, корни которых приводили к точкам на прямой линии, а при измененных заданиях — к уравнениям, имеющим «невозможные» корни, и к точкам, лежащим вне этой прямой, на прямой, к ней перпендикулярной. Отсюда Валлис сделал вывод, что мнимые величины есть средние пропорциональные между положительными и отрицательными.

Геометрически мысль Валлиса можно пояснить так: если из точки 0 (нуль) очертить окружность радиусом, равным 1, то на оси Ox она даст засечку $+1$ в точке A и -1 в точке B, а на оси Oy засечки в точках C и D дадут мнимые величины. Но OC, как перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, есть среднее пропорциональное между $+1$ и -1, или $OC=\sqrt{(+1)(-1)}=\sqrt{-1}$ (рис. 30).

В рассуждениях Валлиса, с современной точки зрения, содержится та ошибка, что он рассматривает OC как среднюю геометрическую между отрезками диаметра, из которых один положителен, а другой отрицателен. Между тем в геометрической теореме о перпендикуляре, опущенном из точки окружности на диаметр, все отрезки должны считаться положительными.

Датский землемер и математик *Каспар Вессель* (1745—1818) в работе «Об аналитическом представлении направлений» (1799) дал впервые геометрическую интерпретацию комплексных чисел на плоскости, но его работа, написанная на датском языке, не получила распространения, а потому вопрос о геометрическом представлении комплексных чисел в дальнейшем разрабатывался другими математиками совершенно независимо от Весселя. Особенно продуктивны в этом отношении были работы французов *А. Бюе* и *И. Франсе* и женевца

Ж. Аргана (1768—1822), который в 1806 г. опубликовал работу «Этюды об одном способе изображения мнимых количеств и геометрических построениях». Если Бюе опирался лишь на построение мнимых чисел на оси, перпендикулярной к вещественной, то Арган представлял комплексные числа точками плоскости, а Франсе популяризовал этот метод изображения.

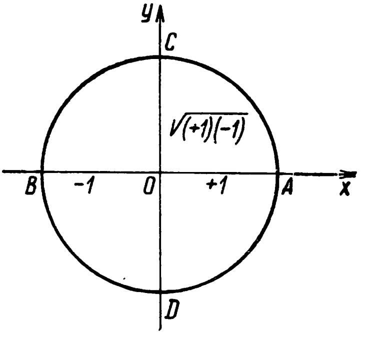


Рис. 30

Однако идеи Аргана и его современников не сделались достоянием широкого круга математиков, и только когда эту идею развил в 1831 г. великий Гаусс, она получила всеобщее признание. Гаусс же дал применение комплексных чисел во всех областях математики, а Коши, как мы видели ранее, явился одним из создателей теории функций комплексного переменного, которая имеет в настоящее время большое применение во многих отраслях современной науки и техники.

В области дифференциальной геометрии Гаусс развил теорию поверхностей, заложив начала внутренней геометрии поверхности, и дал по этим вопросам формулы, удобные для практических применений и дальнейших исследований.

Кроме того, Гаусс приложил свои силы главным образом к изучению вопросов прикладной математики: астрономии и геодезии, где достиг значительных результатов. Так, в астрономии Гауссу удалось при помощи составленных им таблиц «на кончике пера» вычислить орбиту (тогда новой малой планеты) Цереры и указать ее вероятное местонахождение. Именно после замечательных астрономических работ Гаусс приобрел мировую известность и славу «геттингенского колосса».

В заключение очерка о Гауссе надо коснуться размышлений великого ученого над вопросами неевклидовой геометрии (геометрии Лобачевского). Как стало известно из переписки Гаусса с учеными (опубликована после смерти Гаусса), он, независимо от Лобачевского, пришел к выводу о существовании неевклидовой геометрии. Но боязнь быть непонятым помешала ему обработать свои идеи и обнародовать их.

Говоря о Гауссе, нельзя не остановиться на деятельности в области математики его близкого друга *Фаркаша Больяй* (1775—1856) и его сына *Яноша Больяй* (1802—1860).

Фаркаш Больяй был профессором математики, физики и химии в городе Марошвашархей (ныне Тыргу Муреш) и очень много работал над созданием математических книг для юношества. Кроме того, он долго и усердно изучал вопрос о возможности доказать пятый постулат геометрии Евклида о параллельных линиях. Им была написана работа, в которой он давал исчерпывающее решение этого вопроса. Однако Гаусс нашел в ней ошибку, которая разрушала весь смысл работы. Янош Больяй унаследовал от отца исключительную любовь к математике, а также стремление решить задачу постановки вопроса о параллельности в системе евклидовой геометрии. Этот вопрос стал основным во всей работе Яноша. Ему удалось создать труд, который при издании получил наименование «Аппендикс», что означает «Приложение», так как он был издан в 1832 г. в качестве приложения к книге «Тентамен» («Завещание»), написанной Фаркашем Больяй. Когда эта работа была представлена на отзыв к Гауссу, Фаркаш получил ответ, который не только не помог Яношу, но даже возмутил его. Гаусс о работе Яноша написал: «Я ее не должен хвалить ... хвалить ее значило бы хвалить самого себя, ибо все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил,— почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30—35 лет тому назад». Янош не знал, что еще в 1829 г. вышла из печати работа русского математика Н. И. Лобачевского, в которой были опубликованы идеи неевклидовой геометрии, выводы которой совпадали с его собственными, изложенными в «Аппендиксе». Янош предполагал, что «жадный колосс» Гаусс хочет похитить приоритет его открытия, присвоив его идеи себе. Как-никак, но данная работа Яноша Больяй хотя и не дала ему первенства в создании первой неевклидовой геометрии, но должна быть расценена как гениальная идея крупного математика, оставившая большой след в истории математики.

Одним из крупнейших математиков XIX в. можно считать немецкого математика Римана, который, будучи студентом, слушал лекции Гаусса в Геттингенском университете.

Георг Фридрих Бернгард Риман (1826—1866) был сыном сельского священника из Брезеленце в провинции Ганновер. Он внес много нового в различные области математики, а так-

ГЕОРГ РИМАН

же в ее приложения к естествоведению и физике. Его работы оказали большое влияние на развитие математики во второй половине XIX в. и в XX в. Его можно считать одним из основателей теории дифференциальных уравнений. Его мемуар «О числе простых чисел, не превышающих данной величины» (1859) имел большое значение для развития теории комплексного переменного и аналитической теории чисел. В докторской диссертации («Основы общей теории функций одной комплексной переменной») Риман, между прочим, разработал и основы новой науки — топологии. Вскоре после того, как из России в Западную Европу проникли сведения о создании Лобачевским новой, неевклидовой, геометрии, свидетельствующей о возможности существования других геометрий, Риман разработал свою неевклидову геометрию. Ныне эта геометрия носит название Римановой. Она оказалась весьма полезной для развития других математических дисциплин: теории относительности, топологии и пр.

Работа Римана «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда» (1853) имела большое значение для теории интеграла и теории множеств, а также теории функций действительного переменного.

Смерть от туберкулеза рано прервала жизнь этого великого математика: он умер всего сорока лет от роду.

Деятельность великого ученого Л. Эйлера отразилась на развитии математики во всей Европе, а потому считаем уместным сказать несколько слов о нем.[1] Учитель Эйлера, Иоганн Бернулли, впервые дал определение функции, свободное от геометрических образов. Он писал, что «функцией переменной называется количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». Если Бернулли впервые отметил, что к определению функции можно подойти без геометрических образов, то изложение первого учения о функциях без всяких геометрических представлений и даже без чертежей принадлежит его гениальному ученику Л. Эйлеру и приведено в его труде «Введение в анализ бесконечно малых». А в работе «Дифференциальное исчисление» им дано и определение функции: «Величины, зависящие от других так, что с изменением вторых изменятся и первые, принято называть их функциями».

Рассматривая труды Клеро, Монжа, Гаусса, Ф. и Я. Больяй и Римана, мы убеждаемся, что уже начало XIX в. знаменуется крупными достижениями в области геометрии: значительно продвинулось изучение пространственных линий и поверхностей. Высший математический анализ дал прекрасный метод для изучения пространственных форм. В то же время аналитическое понятие о комплексных числах получило геометрическое истолкование, что способствовало дальнейшему развитию анализа в сторону изучения пространства.

---

[1] Более подробный обзор дятельности Л. Эйлера будет дан в очерке «Развитие математики в России в XVIII в.»

НИЛЬС АБЕЛЬ

КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАПАДНОЙ ЕВРОПЕ В XIX В.

Одним из крупнейших математиков XIX в. в Западной Европе был норвежец *Нильс Хенрик Абель* (1802—1829).

Абель происходил из семьи бедного деревенского пастора в местечке Финге. С детства он проявлял большие способности к учению, но крайняя бедность семьи не дала ему возможности получить систематическое образование. Своими успехами в науке Абель был обязан впоследствии самому себе и некоторым близким друзьям. С большим трудом ему удалось поступить в университет в столице Норвегии — Христиании (ныне Осло), но университет не мог дать ничего для развития его способностей, так как у Абеля уже в полной мере проявился интерес к математическим наукам, а в университете в то время не было математического факультета. Тем не менее Абель, состоя студентом университета и работая самостоятельно, сосредоточил все свои интересы на вопросах математики.

В 1823 г. Абель обратил на себя внимание одним, как выяснилось впоследствии, ошибочным исследованием, которое привело его как бы к решению уравнения пятой степени в радикалах. Однако, когда ошибочность исследования была обнаружена, Абель, работая дальше в этом направлении, доказал замечательное положение, что уравнение пятой степени в общем виде не может быть решено в радикалах, то есть что для таких уравнений могут быть решены лишь частные случаи.

Эта знаменитая работа, а также сочинение Абеля по вопросу об интегрировании алгебраических выражений дали ему возможность получить стипендию для заграничной командировки с научной целью. Но судьба самой работы была плачевна. Абель представил ее на рассмотрение Гауссу, а тот отнесся к ней с предубеждением, как к работе молодого неопытного математика, и не счел нужным дать на нее рецензию.

За границей Абель сначала жил в Берлине, и этот период жизни был для него наиболее благоприятным в смысле признания его творческих успехов. Здесь ему удалось познакомиться с издателем журнала чистой и прикладной математики *Августом Леопольдом Креллем* (1780—1855), который принял большое участие в судьбе скромного и очень нуждающегося юноши и предоставил ему возможность поместить некоторые математические исследования в руководимом им журнале.

В Берлине Абель провел исследование сходимости степенных рядов и сформулировал те знаменитые теоремы, которые решали вопрос об интервале и радиусе сходимости степенных рядов в области действительных и комплексных чисел.

В 1826 г. Абель переехал в Париж и здесь представил в Академию наук доклад на тему «Мемуар об одном очень обширном классе трансцендентных функций». Однако к этой замечательной работе тоже не отнеслись с должным вниманием;

она долгое время пролежала у Коши и затерялась среди его личных рукописей, а опубликована была лишь после смерти Абеля, в 1841 г. В этой работе Абель исследует интегралы типов $\int R(x, y)dx$, где $R(x, y)$ — произвольная рациональная функция от x и y, а y представляет алгебраическую функцию от x. При этом особо выделяются два следующих случая: если y выражается корнем квадратным из многочлена третьей и четвертой степени, то интегралы сводятся к эллиптическим; если же y представляет корень квадратный из многочлена степени, выше четвертой, то интегралы носят название гиперэллиптических. Упомянутые интегралы вида $\int R(x, y)dx$ вошли в математику под названием абелевых интегралов.

Дальнейшая жизнь Абеля весьма печальна. То пренебрежение, которое было оказано светилами науки к его замечательным творениям, получившим признание лишь после смерти Абеля, а также постоянная нужда заставили Абеля в 1827 г. вернуться на родину. Но и возвращение в Христианию было нерадостным. Первое время Абелю не удалось найти никакой постоянной работы, и, будучи, по его словам, «бедным, как церковная мышь», он зарабатывал на жизнь лишь частными уроками. Правда, в 1828 г. ему удалось получить должность заместителя преподавателя в университете, но к этому времени постоянная нужда и огорчения окончательно подорвали его здоровье: у него развился туберкулез, и 6 апреля 1829 г., то есть когда ему было всего 26 лет, Абель умер. Так была загублена жизнь гениального юноши. Но смерть Абеля не лишила науку его великих идей в математике, которые до настоящего времени имеют большое значение. В частности, сохранилась и одна его глубокая мысль, которая ныне является руководящей во многих математических исследованиях. Эта мысль была выражена Абелем так: «Вместо того чтобы задаваться вопросом о зависимости, самое существование которой остается неизвестным, следует поставить вопрос, возможна ли в действительности такая зависимость». Руководствуясь этой идеей, Абель показал, что нельзя искать общее решение уравнений четвертой степени в радикалах, а также нашел некоторые типы функций, которые не могут быть интегрируемы с помощью элементарных. Уже после смерти Абеля «Журнал Крелля» писал о нем: «Он работал не для себя, а лишь для науки, которую горячо любил».

Не менее печальна участь другого крупнейшего математика XIX в. Э. Галуа.

ЭВАРИСТ ГАЛУА

Эварист Галуа (1811—1832) родился в Бур-ла-Рене, около Парижа. Еще обучаясь в лицее, он стал публиковать свои первые научные работы. В 1829 г. Галуа держал экзамен в Политехническую школу в Париже, которая чрезвычайно привлекала его как содержанием своих учебных курсов, так и революционными традициями ее студентов. К отчаянию Галуа он не был принят: глубокий интерес к математике, отвлекавший юношу в лицее от систематических занятий по другим учебным дисциплинам, неблагоприятно сказался на экзаменационных оценках.[1] Галуа был вынужден поступить в Нормальную школу, являвшуюся фактически продолжением лицея. Но оттуда уже на следующий год Галуа исключили. Причиной был пылкий интерес Галуа к политической жизни Франции, побудивший юношу разоблачить директора школы в двуличном поведении по отношению к июльскому перевороту 1830 г. во Франции, завершившемуся установлением монархии Луи-Филиппа. Будучи убежденным республиканцем, Галуа тотчас по исключении из школы развил активную политическую деятельность, вступив в тайное республиканское общество «Друзья народа». «Если для того, чтобы поднять народ, нужен труп,— говорил он,— я пожертвую собой». 9 мая 1831 г. Галуа, присутствуя на банкете республиканцев, поднявшись с места с бокалом и с кинжалом в руке, провозгласил тост «за Луи-Филиппа». Смысл его тоста был правильно понят и с энтузиазмом подхвачен большинством присутствующих республиканцев, а лица, не желавшие быть скомпрометированными (в том числе и известный писатель А. Дюма-отец), незаметно скрылись.

После этого случая Галуа был арестован и помещен в тюрьму Сент-Пелаги. На суде, который грозил Галуа очень серьезными последствиями, ему, однако, вынесли оправдательный вердикт, так как судьи были тронуты молодостью обвиняемого (ему было тогда 19 лет).

14 июля 1831 г. Галуа снова оказался в тюрьме за активное участие в народной манифестации в годовщину революции 1789 г.

Вскоре после освобождения из тюрьмы двадцатилетний Эварист Галуа был убит на дуэли, спровоцированной, как полагают биографы, его политическими противниками.

За свою недолгую жизнь Галуа сумел внести в математику совершенно новые идеи, которые резко изменили ход развития алгебры и направили его в новое русло.

При жизни Галуа было опубликовано всего 5 небольших его статей, которые в русском переводе занимают около 32 страниц малого формата. Вот заголовки этих статей: «Доказательство одной теоремы из теории непрерывных дробей», «Заметки по некоторым пунктам анализа», «Анализ одного мемуара об алгебраическом решении уравнений», «Заметка о решении численных уравнений» и «Из теории чисел».

[1] Галуа держал экзамены дважды и оба раза провалился. На одном из экзаменов он отказался отвечать на вопрос о логарифмах, считая его слишком простым.

Эварист Галуа дважды обращался в Парижскую академию наук с другими, очень значительными своими работами, причем они передавались на рассмотрение крупнейшим математикам Коши и *Фурье* (1768—1830), но те не оценили всей важности представленных им работ и даже затеряли их. В ночь перед дуэлью Галуа написал своему другу О. Шевалье письмо, в котором сообщал ему о том, что он сделал в анализе несколько новых открытий: одни из них касаются теории уравнений, другие — интегральных функций. Разъясняя сущность своих работ, из которых, по мнению Галуа, можно было сделать три мемуара, он поручил Шевалье обратиться к Якоби и Гауссу с просьбой дать заключение не о справедливости входящих в них теорем, так как в этом Галуа был уверен, а об их важности для науки. Однако и эти ученые с пренебрежением отнеслись к замечательным трудам Галуа, и ответа от них получено не было. Только спустя 14 лет после смерти Галуа его работы подверглись серьезному изучению *Жозефом Лиувиллем* (1809—1882), который и открыл их огромное значение. Тогда же они были и опубликованы.

Основные глубокие исследования Галуа касаются вопросов алгебры. Им создана теория классификации иррациональностей, определяемых алгебраическими уравнениями. Эта теория вошла в математику под именем теории Галуа.

Теория Галуа завершает длинный ряд исторических попыток разрешить уравнения высших степеней. Если уравнения третьей и четвертой степеней были решены еще итальянскими учеными в XVI в., то, как мы видели, доказательство неразрешимости в радикалах уравнений степени, выше четвертой, дано лишь в XIX в. Абелем, а теорию двучленных уравнений развил немного ранее Гаусс. При этом Гаусс развил также теорию о возможности свести решение двучленного уравнения высшей степени к решению двучленных уравнений низших степеней, а это в свою очередь позволило ему найти критерий разрешимости двучленных уравнений в квадратных радикалах и тем самым определить возможность построения правильных многоугольников.

Галуа в своем посмертном «Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах» дал общую теорию разрешимости в радикалах уравнений с одним неизвестным, указав, к цепи каких более простых уравнений может быть сведено решение данного, и выявил условия разрешимости уравнения в квадратных радикалах.

При разработке своей теории Галуа ввел в математику много новых понятий, которые дали возможность углубить алгебраические исследования. К таким понятиям относятся, например, понятия о группе, подгруппе, нормальном делителе, поле и пр.

Результаты работ Галуа нашли применение в самых разнообразных вопросах математики. На основе его работ возникли совершенно новые разделы, как, например, понятие о римановых поверхностях, дающих геометрические образы для многозначных функций и обобщающих их с однозначными; развилось учение об автоморфных функциях, то есть об аналитических функциях, значение которых не изменяется, если их аргумент подвергается дробно-линейным преобразованиям.

Выше мы упоминали об успешной работе норвежского математика Н. Абеля по исследованию эллиптических интегралов. Разработку этого вопроса продолжил немецкий математик К. Вейерштрасс.

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815—1897) родился 31 октября 1815 г. в городе Остенфельде в семье заведующего казначейством. Первоначальное образование он получил в Падерборнской гимназии, по окончании которой обучался в Боннском университете. Однако университет не пробудил в нем желания заняться развитием математических идей, хотя Вейерштрасс всегда имел тягу к математическим наукам: в Бонне совсем не читалось чисто математических курсов, а математика связывалась с физикой. Но время пребывания в университете Вейерштрасс использовал для самостоятельного изучения математических вопросов и достиг в этом отношении больших результатов. Услышав, что математик Гудерман, живущий в Мюнстере, усиленно работает над теорией эллиптических функций, Вейерштрасс в 1839 г. переселился в Мюнстер. В этом городе Вейерштрасс заинтересовался так называемыми модулярными функциями, которые являются обратными по отношению к интегралу

$$U = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

где k — модуль.

В 1841 г. Вейерштрасс написал работу «О разложении модулярных функций», которая дала ему возможность добиться звания учителя средней школы. С этих пор в течение 15 лет Вейерштрасс работал преподавателем в различных городках

КАРЛ ВЕЙЕРШТРАСС

Германии. В 1856 г. он стал экстраординарным, а затем, с 1864 г.,— ординарным профессором Берлинского университета.

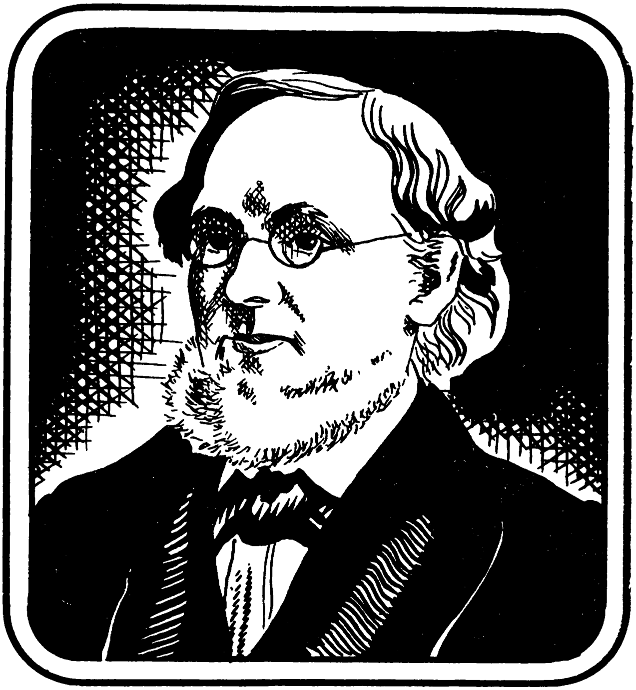
Большинство работ Вейерштрасса при его жизни не печаталось, а лишь излагалось им на лекциях, и, таким образом, его идеи получали распространение только посредством лекций, читаемых им в университете.

Основные интересы Вейерштрасса сосредоточивались на проблемах математического анализа, причем он совершенно не признавал геометрических методов построения этой дисциплины. Интегралы Абеля привели его к более глубоким исследованиям вопроса о функциях. Многочисленные выводы, к которым при этом пришел Вейерштрасс, в наше время вошли в курсы математического анализа и теории функций. Им изучены вопросы о гранях числовых множеств и о предельных точках, сформулировано свойство функции, непрерывной на замкнутом отрезке, достигать своей верхней и нижней грани. Им разработана теория аналитических функций, в основу которой положена разложимость функции в степенной ряд. В теории рядов мы имеем критерий Вейерштрасса абсолютной сходимости ряда. Развитие теории аналитических функций дало возможность Вейерштрассу обосновать некоторые вопросы, связанные с изолированными особыми точками аналитической функции. Так, известна теорема Вейерштрасса, выявляющая поведение аналитической функции в окрестности существенно особой точки.

Проводя многочисленные исследования в области анализа, Вейерштрасс лично не прилагал развиваемой им теории к вопросам физики, но поощрял такие работы у своих учеников. Так, знаменитый русский математик Софья Васильевна Ковалевская, бывшая ученицей Вейерштрасса, прилагала математические теории к таким вопросам, как решение задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки, о преломлении света в кристаллических средах, о кольцах Сатурна и пр.

К числу крупнейших математиков XIX в., работы которых, несомненно, имели свое влияние на дальнейшее развитие математики, относятся немецкий математик Г. Грасман и английский У. Гамильтон.

Наиболее значительным трудом *Германа Грасмана* (1809—1877) является «Учение о протяженности» (1844). В этом сочинении Грасман впервые вводит понятие о многомерном евклидовом пространстве. Грасман подверг исследованию такие понятия, как точка, прямая, плоскость, расстояние между двумя точками, и распространил эти понятия на любое пространство R_n (то есть n-мерное). В связи с этим он развил свою теорию протяженности и теорию измерений. Так как последняя опиралась всецело на арифметический счет, то Грасман вынужден был обратить внимание на основы арифметики и изложил свое учение о целых числах в «Учебнике арифметики» (1861). Здесь Грасман отметил особенности правил счета, к числу которых относятся коммутативность, ассоциативность

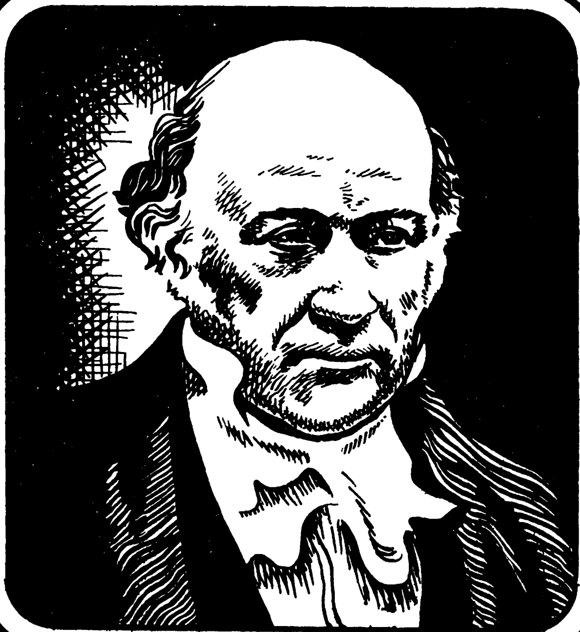


ГЕРМАН ГРАСМАН

и дистрибутивность умножения. Свои исследования Грасман обосновал на аксиоме, которая так и вошла в математику под названием аксиомы Грасмана и заключается в том, что

$$(a+b)+1=a+(b+1).$$

Понятие о числе Грасман расширил путем введения высших комплексных чисел, но следует отметить, что последние не обладают свойством коммутативности умножения.



УИЛЬЯМ ГАМИЛЬТОН

В этом отношении далее Грасмана пошел создатель теории векторов и векторного исчисления *Уильям Роуэн Гамильтон* (1805—1865). В статье «Теория сопряженных функций или алгебраических пар» (1835) он подробно останавливается на комплексных числах вида $x+yi$ и рассматривает их как пару действительных чисел $(x;\ y)$, над которыми и производятся условные действия, подчиненные определенным правилам. Изучение таких чисел привело Гамильтона к мысли о комплексных числах высшего порядка, представляющих собой тройки, четверки и т. д. чисел. Эти искания завершаются его работами «Лекции о кватернионах» (1853) и «Элементы теории кватернионов» (изданы посмертно в 1866 г.). Кватернионами Гамильтон называл числа вида $t+xi+yj+zk$, где i, j и k удовлетворяют следующим условиям: $i^2=j^2=k^2=-1$, $jk=i$, $ki=j$, $ij=k$, $kj=-i$, $ik=-j$, $ji=-k$.

Чисто числовая часть кватерниона, то есть t, названа Гамильтоном скалярной частью, а часть $xi+yj+zk$ — векторной. Отсюда и появилось понятие о векторе, который можно рассматривать как отрезок прямой, направленной от начала координат к точке с координатами (x, y, z). Сам термин «вектор» тоже впервые введен Гамильтоном.

Гамильтон был крупным механиком и физиком. В механике он сформулировал принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона). В оптике для двухосных кристаллов открыл явление внешней и внутренней конической рефракции.

Гамильтону принадлежит более 140 работ.

Сделав краткий обзор деятельности Абеля, Галуа, Вейерштрасса, Грасмана и Гамильтона, мы видим, что уже в первой половине XIX в. был внесен значительный вклад в алгебру, а именно в теорию уравнений, положившую конец попыткам найти общие формулы решения уравнений выше четвертой степени. Во второй половине XIX в. было значительно расширено понятие о числе и впервые введено понятие о векторе, имеющее большое значение в наше время.

ГЛАВА V. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ

МАТЕМАТИКА В ДРЕВНЕЙ РУСИ

Восточнославянские племена, древние предки русской, украинской и белорусской народностей, начали формироваться около 2—3 тысяч лет до н. э. Часть этих племен с давних времен занималась рыболовством, охотой и сбором меда диких пчел, а у другой части развилось скотоводство и примитивное земледелие. Эти промыслы помогли восточным славянам довольно быстро пойти по пути экономического развития, и к VIII—IX вв. славянские племена стали переходить от общинного родового строя к феодальному, минуя рабовладельческий.

Вместе с политико-экономическим ростом восточнославянские племена в значительной степени продвинулись вперед на пути культурного развития. Этому обстоятельству, помимо самобытного развития, способствовала постоянная непосредственная связь восточных славян с наиболее культурными странами древности: Римом, Грецией и странами Востока.

Занимая огромную территорию от Лабы (Эльбы) на западе до Оки на востоке и от Балтийского моря на севере до побережья Черного моря на юге, славянские племена в упорной борьбе с кочевниками Азии и с Византией настойчиво продвигались на юг. Одержав немало побед над византийскими войсками, славяне расселились по Дунаю и уже в 626 г. осаждали столицу Византии Константинополь.

В VII и VIII вв. у славян появились первые города. Эти города были оплотом для окрестного населения, когда ему угрожали набеги иноземцев, а также служили резиденцией князей. В города стали стекаться ремесленники и купцы, деловая жизнь которых за крепкими городскими стенами проходила в относительной безопасности. Города постепенно превращались в значительные торговые центры. Первыми большими городами на Руси были Киев и Новгород, которые являлись крупными центрами обмена товарами между Востоком и Западом и по размерам и архитектуре считались одними из лучших городов Европы.

Уже в IX в. техника сельского хозяйства значительно улучшилась, а ремесло обогатилось новыми приемами обработки железа и стали, среди которых выделялись особые методы чеканки, чернения, производства эмали и пр.

Техника производства вооружения, первобытная металлургия, гончарное искусство, возросшие требования городского строительства и сельского хозяйства — все это вызывало необходимость в распространении и усвоении элементов научных знаний, а потому появилось стремление к созданию школ.

Прежде считалось, что грамота у восточных славян появилась после принятия ими христианства, но современные исследования и в особенности археологические раскопки, проведенные за последнее время в Новгороде, дали несомненные доказательства того, что на Руси была своя письменность еще задолго до распространения христианства; вещественными доказательствами этого служат берестяные грамоты, найденные в Новгороде и относящиеся ко времени, предшествующему принятию на Руси христианства.

Христианство повлекло за собой укрепление феодального строя и господства князей и бояр над народом, но в то же время оно явилось движением вперед по сравнению с язычеством, так как способствовало объединению восточных славянских племен в единую народность с единым языком, религией и культурой, утвердило государственное единство Руси и содействовало распространению письменности и усилению политических и культурных связей с государствами, в которых христианство было принято ранее,— Византией, Болгарией, Арменией, Грузией и странами Западной Европы.

Выдающиеся просветители славян, проповедник христианства, уроженец г. Фессалоники грек Константин, известный в истории под монашеским именем *Кирилл* (827—869), и его брат *Мефодий* (?—885), в 863 г. в г. Херсонесе, древней греческой колонии на Крымском полуострове, случайно обнаружили религиозные книги, написанные на славянском языке. На основе рукописных букв этих книг им удалось составить упрощенную азбуку для славянских народов, которая получила значительное распространение. Вместе с древнеславянской письменностью вошла в употребление и запись чисел, основанная на той же азбуке и построенная на принципах древнегреческой нумерации.[1]

В X в., в княжение *Владимира Святославича* (?—1015), древнерусское государство (Киевская Русь) достигло наибольшего расцвета и могущества. По развитию культуры оно занимало одно из видных мест среди государств Европы. В эту эпоху в его наиболее крупных городах (Киеве, Новгороде и др.) уже создавались школы различного типа. Наряду с элементарными школами, в которых дети обучались закону божьему, чтению, письму, церковному пению и простейшему счету, существовали школы повышенного типа, дававшие систематическое образование. Многие русские князья были лучше и разностороннее образованы, чем западные короли и императоры. Характерно, что грамотность была распространена даже в среде мелких ремесленников. Многие женщины тоже были грамотны. Внучка *Ярослава Мудрого* — *Янка Всеволодовна* — открыла первое в Европе женское училище.[2] Если первая половина средневековья в Западной Европе характеризовалась полным упадком математических знаний, то на Руси в эту эпоху параллельно с общим развитием культуры шло и сравнительно быстрое распространение сведений из математики.

Правда, до нашего времени не сохранилось никаких памятников математической литературы, которые давали бы нам возможность судить о развитии математики на Руси в IX—X вв., но документы другого характера позволяют делать некоторые выводы в этом отношении.

Так, знаменитый сборник древнейших законов «Русская Правда», создававшийся в XI и XII вв., содержит некоторые данные, позволяющие судить о степени математической культуры в Древней Руси. Из этого источника видно, что в те времена русские умели проводить вычисления с целыми числами и с дробными. Дробные числа употреблялись главным образом при вычислениях, требующих применения различных мер (например, при определении площадей земельных участков или при денежных расчетах).

В связи с развитием земледелия, товарообмена, а затем ремесел и торговли у славян появились и постепенно совер-

---

[1] См. очерк о школе Пифагора.

[2] В других европейских государствах женские школы появились только в XVI—XVII вв.

шенствовались единицы для измерения длин, площадей, сыпучих тел, денег и пр. Однако эти меры не были устойчивы: их значение с течением времени иногда изменялось.

Денежными знаками у славян служили сначала домашние животные и их шкуры. В это время денежные единицы носили соответствующие наименования: «куны» (от слова куница), «резаны» (шкуры, нарезанные на куски) и «ногаты»[1].

С переходом к металлическим деньгам между прежней и новой системой единиц установилось соответствие. Металлическая (серебряная) гривна приравнивалась к 20 ногатам, 25 кунам и 50 резанам. Русская серебряная гривна была, очевидно, заимствована у арабов, так как она в весовых единицах была равна арабской единице — «ротль».

В более поздние времена (XIV—XV вв.) основной денежной единицей стал «рубель» или «рубль», представлявший собой отрубленный кусок серебра весом около 205 г. В эту эпоху в ходу были «полтина» ($^1/_2$ рубля), «гривна» ($^1/_{10}$ рубля) и «деньга»[2] ($^1/_{200}$ рубля). Позднее появилась «копейка», на которой изображался всадник с копьем, откуда, как полагают, и произошло это название. Стоимость деньги составляла $^1/_2$ копейки, и со временем деньгу стали называть полушкой, а иногда грошем. Кроме указанных денежных единиц, существовал «алтын», заимствованный от татар («алты» по-татарски означает шесть), равный стоимости 6 денег или 3 копеек.

Некоторое время (при *Иване III* и *Василии III*) имели распространение «саблянки», получившие свое наименование от изображенного на них воина с саблей и равнявшиеся по стоимости одной деньге.

Для измерения длины употреблялись меры, большей частью связанные с размерами частей человеческого тела. Основными мерами длины являлись «большая и малая пядь», «локоть», «сажень» и «верста», или «поприще». Малая пядь — расстояние между концами раздвинутых большого и указательного пальца, а большая пядь — расстояние между концами большого пальца и мизинца. Локоть — расстояние от локтя до конца руки, сжатой в кулак. Сажень — расстояние от ступ-

---

[1] Слово арабского происхождения; арабский глагол «накд» обозначал наличные деньги.

[2] Слово деньга индийского происхождения: у индийцев существовала серебряная монета «таньга». Это название перешло к татарам («теньга»), а от них — к русским.

ни до конца вытянутой вверх руки человека среднего роста [1]. Верста в разное время имела различное значение: ее размеры колебались от 500 до 750 сажень. Позднее (в XVI—XVII вв.) появилась мера «аршин» (от персидского слова «араш» — локоть), равная $^1/_3$ сажени.

Для измерения сыпучих тел употреблялась «кадь» (около 14 пудов ржаного зерна) и ее доли, а в более поздние времена (в XVI—XVII вв.) ее заменила «четверть» (6 пудов ржаного зерна) с ее долями.

В связи с мерами сыпучих тел образовались и меры площадей. Название «четверть» было присвоено земельной площади, на которой высевалась четверть ржи. Две четверти составляли «десятину». Самая большая мера площади — «соха» — имела различное значение. Так как сохами мерялась земля для определения размера налога, то соха хорошей земли содержала значительно меньше четвертей, чем соха плохой; первая содержала 800 четвертей, а вторая — 1200. Кроме того, государственные и общинные земли измерялись «черной сохой», размеры которой колебались от 400 до 600 четвертей. Меньшие участки земли измерялись долями четверти.

Вес серебряной гривны был издавна принят за основную единицу веса, которая впоследствии стала называться фунтом, а 40 фунтов составляли 1 пуд.

Первым русским памятником математического содержания до настоящего времени считается рукописное сочинение новгородского монаха *Кирика*, написанное им в 1136 г. и носящее заголовок «Кирика диакона и доместика [2] Новгородского Антониева монастыря учение имже ведати человеку числа всех лет».

В этом сочинении Кирик выявил себя весьма искусным счетчиком и великим числолюбцем. Основные задачи, которые разрешаются Кириком, хронологического порядка: вычисление времени, протекшего между какими-либо событиями. При вычислениях Кирик пользовался той системой нумерации, которая называлась малым перечнем и выражалась следующими наименованиями: 10 000 — тьма, 100 000 — легион, или неведий, 1 000 000 — леодр.

---

[1] Слово сажень, или сяжень, происходит от глагола «сяжать», то есть достигать (сажень — наибольшее расстояние, которое доступно человеку, когда он тянется за чем-нибудь рукой).

[2] Доместик — регент хора.

Кроме малого перечня, в Древней Руси существовал еще большой перечень, который давал возможность оперировать с очень большими числами. В системе большого перечня основные разрядные единицы имели те же наименования, что и в малом, но соотношения между этими единицами были иные, а именно:

тысяча тысяч	— тьма,
тьма тем	— легион, или неведий,
легион легионов	— леодр,
леодр леодров	— ворон,
10 воронов	— колода.

О последнем из этих чисел, то есть о колоде, говорилось: «И более сего несть человеческому уму разумевати».

Единицы, десятки и сотни изображались славянскими буквами с поставленным над ними знаком ҃ , называемым «титло», для отличия цифр от букв. Тысячи изображались теми же буквами, но перед ними ставился знак ҂. Так, а҃ изображала единицу, к҃в҃ — двадцать два, ҂ѕ҃ — шесть тысяч и т. д.

Тьма, легион и леодр изображались теми же буквами, но для отличия от единиц. десятков, сотен и тысяч они обводились кружками. Так, Г изображало три тьмы; Г — три легиона, а Г — три леодра.

При исчислении долей одного часа Кирик ввел свою систему дробных единиц, причем пятую часть он называл вторым часом, двадцать пятую — третьим часом, сто двадцать пятую — четвертым часом и т. д. Самой малой долей у него были седьмые часы, и он считал, что меньших долей часов быть уже не может: «больше сего не бывает, то есть не рождаются от седьмых дробных, которых в дне будет 987500». Делая расчеты, Кирик производил действия сложения и умножения, а деление, по всей вероятности, он осуществлял путем подбора, рассматривая последовательно кратные для данного делимого и делителя.

Основные хронологические расчеты Кирик производил от даты, принимавшейся в Древней Руси за дату сотворения мира. Исчисляя таким образом момент написания своей работы, Кирик (с ошибкой в 24 месяца) утверждает, что со дня сотворения мира протекло 79 728 месяцев, или 200 неведий и 90 неведий и 1 неведий и 652 часа. Такого же рода подсчетом Кирик определяет свой возраст, и мы узнаем, что он родился в 1110 г.

Оперируя с дробными часами, Кирик в сущности имел дело с геометрической прогрессией со знаменателем 5.

В сочинении Кирика уделено место и вопросу о вычислениях пасхалий, столь важному для церковников и являвшемуся одним из наиболее трудных арифметических вопросов, которые приходилось решать служителям церкви. Если Кирик и не дает общих методов подобного рода вычислений, то во всяком случае он показывает свое умение производить их.

Рукописное сочинение Кирика является единственным математическим документом, дошедшим до нас с тех далеких времен. Однако это отнюдь не означает, что других математических сочинений в ту эпоху на Руси не существовало. Надо полагать, что многие рукописи утрачены для нас вследствие того, что они были затеряны в тревожные годы княжеских междоусобиц или погибли при пожарах, всегда сопровождавших набеги соседних народов на Русь. Возможно, что тщательные розыски в архивах помогут восстановить некоторые из подобных рукописей.

Ужасное бедствие постигло Русь в начале XIII в., когда огромные полчища монголов надвинулись с востока, уничтожая на своем пути все живое. Монголы, пользуясь разобщенностью и неорганизованностью военной силы гораздо более культурных народов Северного Китая и Средней Азии, покорили их, восприняли от них военную технику и с удвоенной силой обрушились на Русь. Такого мощного удара, какой пришлось выдержать Руси, история до тех пор еще не знала. Между тем Русь, раздираемая внутренними междоусобицами, не смогла дать сокрушительного отпора захватчикам, несмотря на проявленное русским народом исключительное мужество. Как известно, большая часть Руси попала под власть монголов, опустошавших русские земли в течение двух с половиной веков. Однако упорное сопротивление Руси остановило дальнейшее продвижение монгольских орд на Запад и тем спасло от гибели западную культуру. Русь была завоевана, но русский народ не покорен.

Опустошения, причиненные завоевателями, нанесли страшный удар русской культуре в период ее высокого подъема. Огнем и мечом уничтожались памятники русской культуры и письменности. Вместе с тем на долгое время было приостановлено и экономическое развитие страны.

Крупнейшие города Южной и Восточной Руси подверглись почти полному разорению. Большинство городских ремесленников было уведено в плен, и потому ремеслам был нанесен тяжкий урон. Многие ремесла на Руси возродились лишь спустя несколько столетий. Так, была уничтожена высокоразвитая для этой эпохи русская промышленность, в то время как промышленность Запада имела возможность беспрепятственно развиваться.

Естественно, что создавшиеся на Руси политико-экономические условия временно привели к упадку знаний вообще, математических в частности.

Однако в дальнейшем объединение русских княжеств под властью московских князей и создание мощного государства постепенно привело к ослаблению, а затем и к прекращению междоусобных феодальных войн. Иноземное иго было свергнуто в конце XV в., и Россия, как молодое государство, вновь пошла по пути промышленного, экономического и культурного развития.

Нам известно сравнительно мало источников, по которым мы могли бы судить о состоянии математических знаний в России в XV, XVI и даже XVII вв. До нашего времени сохранились лишь рукописные арифметики XV и XVI вв. Все они приблизительно однотипны и не носят самостоятельного характера, а скорее представляют варианты аналогичных учебников, существовавших в Западной Европе. Поскольку в эту эпоху в России начинала быстро развиваться торговля, то и учебники арифметики предназначались главным образом для помощи торговым расчетам. В этих арифметиках содержалось объяснение операций над целыми и дробными числами, а затем излагались приемы решения типичных задач на вычисление цены товара, прибыли, получаемой при продаже, на правила товарищества и пр. Здесь же приводились и некоторые правила для решения методом ложного положения простейших уравнений первой степени с одним неизвестным. Встречались задачи развлекательного содержания, схожие с задачами западных математиков (Баше де Мезириака и др.).

К XVI в. относится и изобретение замечательного счетного прибора, получившего впоследствии наименование «русские счеты». Этот прибор, имеющий и доныне столь большое распространение и применение, обладая самой простейшей конструкцией, позволяет выполнять достаточно быстро арифметические вычисления. Как полагают, идея создания этого прибора принадлежит русским купцам Строгановым, которые в конце XVI в. владели огромными земельными угодьями по реке Каме и главным промыслом которых была добыча соли. Русские счеты получили быстрое распространение, и вычисления при их помощи получили название «дощаного счета». Мы здесь не даем описания этого прибора, так как он общеизвестен, но должны заметить, что во многих случаях счеты видоизменялись, так как их приспосабливали для специальных расчетов. Так, например, существовали счеты для денежных расчетов. В них имелись проволочки, содержащие по 9 костей для счета рублей, десятков рублей, сотен рублей и тысяч рублей; кроме того, были две проволоки по девять костей для отсчета алтынов (трехкопеечников) и их десятков; особая проволока с четырьмя костями служила для отсчета денежек (денежка равнялась $^1/_2$ копейки); наконец, были проволоки для отсчета третьих и четвертых долей.

Книг, относящихся к этой эпохе и посвященных специально алгебре или геометрии, до наших дней не сохранилось. Но потребность в таковых проявлялась все настоятельнее. В XVI в. возросла мощь государства и появилась необходимость в дальнейшем развитии военного дела.

Высокая талантливость и проницательный ум русского народа нашли широкое применение при мужественной защите родины и создании вооружения и крепостей, при строительстве городов, устройстве механических сооружений (водяных мельниц, крупорушек, сукновален и пр.), а также при искусном изготовлении различных изделий из дерева и металла.

Эта зарождающаяся техника и расширение торговых отношений с Западом и Востоком вызывали повышенный интерес к вопросам вычислительного и измерительного характера, и практические сведения из геометрии стали постепенно завоевывать свое место в книгах, по содержанию относящихся к военному делу, сельскому хозяйству и строительному искусству.

Так, в XVII в. можно отметить «Книгу по сошному письму» и «Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до военной науки». Первая из названных книг посвящена вопросам землемерия, а вторая — вопросам стратегии. В обеих книгах имеются сведения, по которым можно до некоторой степени судить о состоянии геометрических знаний в России этого времени.

В «Книге по сошному письму» при измерении земельных участков нередко применяются вычисления, теоретически неправильные. По всей вероятности, в их основе лежат соображения, заимствованные из практического счета. Эти вычисления напоминают соответствующие вычисления у древних египтян. Так, площадь треугольника приравнивается половине произведения большей его стороны на меньшую, а площадь трапеции — половине произведения суммы ее оснований на боковую сторону.

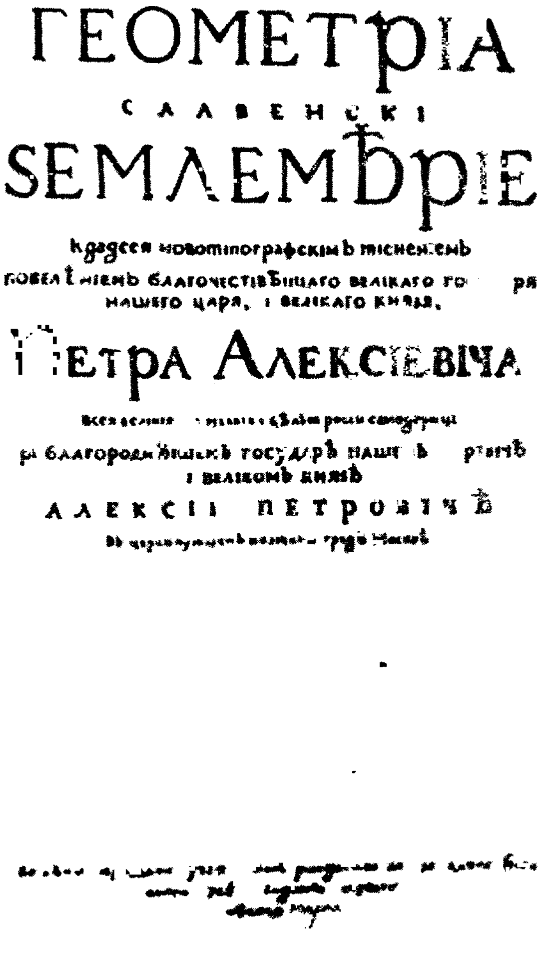
В «Уставе ратных, пушечных и других дел» разбираются вопросы, показывающие, что знания по геометрии у русских в эти времена были значительно лучше, чем можно было судить по предыдущей книге. Здесь даются, например, методы определения расстояния до недоступных предметов и высоты недоступных предметов, причем эти методы основаны на применении подобия треугольников.

При *Иване Грозном* в России появилось книгопечатание, но первая математическая печатная книга появилась лишь в 1682 г. Она принадлежит неизвестному автору и называется «Считание удобное, которым всякий человек купующий или продающий зело удобно изыскати может число всякия вещи». Как показывает название книги, ее цель — облегчить счет при торговых сделках. По существу она представляет таблицы произведений любых чисел от 2 до 100. Таблицы, занимающие 50 страниц, построены так же, как строятся таблицы подобного рода и теперь: каждая страница разделена на клеточки; сомножители помещены в клеточках верхней строки и левого столбца страницы, а их произведения — в клеточках, лежащих в одной строке с левым множителем и в одном столбце с верхним множителем. Шрифт текста и цифры таблиц церковнославянские. Второе издание этой книги, относящееся к 1714 г., отпечатано уже гражданским шрифтом и индийскими цифрами, ошибочно называвшимися раньше арабскими. В предисловии к книге дается объяснение, как ею пользоваться. «К читателям. Сия книжка, читателю любезный, надобна человеку для скорого всякия вещи цены обретения, которую кто купити или продати хощет. А мера и цена, за сколько чего сколько денег дати или взяти, объявляется в сей книжке на всякой странице, в верхних да в посторонних первых строках в клеточках, и мощно считати, сколько чего купити или продати в верхней строке, а меру в посторонней, сице: Есть ли меру положиш в верхней строке, а цену в посторонней строке, ты от того числа пойди рядом клеточками и дойди до той клеточки, которая стоит против верхняго числа, которое числу меру показует, и стани: и сколько в той клеточке будет числа, столько будет за товар и цены копейками, или алтынами, или гривнами, или рублями... А есть ли мера или цена превзыдет число счета, который положен в сей книжке, и тому возможно по сему счету, меру и цену умножая, хотя многия тысящи счести».

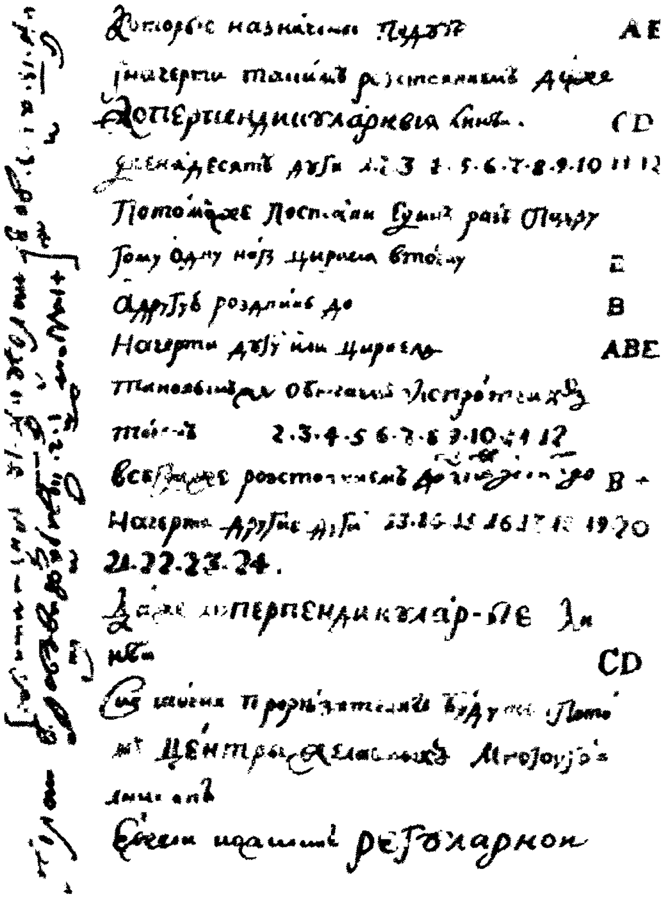
Заканчивая очерк о зарождении у славян и в России математических сведений, мы должны отметить, что еще в X в. у восточных славян это развитие шло быстро в связи с ростом сельского хозяйства и различного вида ремесел и техники производства вооружения, и оно даже превзошло развитие многих западных стран. Но уже в XII в. татаро-монгольское нашествие привело к полному подрыву русской экономики и культуры. Замерло и развитие математики. Первые признаки дальнейшего развития математики и подъема культуры появились лишь в XVII в. после свержения татаро-монгольского ига.

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ В XVIII В.

В XVII в. все еще значительно сказывалась культурная отсталость России от Западной Европы, обусловленная длительным татаро-монгольским игом, постоянной борьбой русского народа с иностранными интервентами, отсутствием в России свободного выхода к морям. Для укрепления обороноспособности страны необходимы были люди, знающие теорию военного дела: военные инженеры, артиллеристы, сведущие кораблестроители и опытные мореходы. В связи с развитием горного дела и освоением новых земель уже недостаточно было одних самородков «рудознатцев» и «землепроходчиков», для металлургии и систематического изучения географии страны и ее природных богатств также необходимы были специалисты.


ГЕОМЕТРІА
славенскі
ЅЕМЛЕМѢРІЕ
издадеся новотипографским тиснением
повелѣнием благочестивѣйшаго великаго го[illegible]ря
нашего царя, і великаго князя,
ПЕТРА АЛЕКСІЕВИЧА
всея великия [illegible] россии самодержца
[illegible] благороднѣйшем государѣ нашем [illegible] царевичѣ
і великом князѣ
АЛЕКСІИ ПЕТРОВИЧѢ
в царствующем великом граде Москвѣ

«ГЕОМЕТРИА СЛАВЕНСКИ ЗЕМЛЕМЕРИЕ»



СТРАНИЦА ИЗ «ГЕОМЕТРИА СЛАВЕНСКИ ЗЕМЛЕМЕРИЕ» С ПОПРАВКАМИ ПЕТРА I

Весь ход культурного и экономического развития страны подготовил появление в России выдающегося государственного деятеля и полководца — *Петра I* (1672—1725).

Реформы, проведенные Петром I в области культурного строительства, содействовали более быстрому распространению знаний и привели к зарождению самостоятельной русской науки. Хотя меры, принимаемые Петром I в борьбе с закоренелым невежеством и варварством в обычаях и нравах, часто являлись весьма жесткими, тем не менее они имели целью поднятие уровня культурного развития страны, а потому и оставили глубокий след в истории науки и просвещения.

Среди общих мер, содействующих распространению образования, надо отметить приказ Петра I о введении гражданского шрифта (близкого к западноевропейскому латинскому), который был значительно удобнее для пользования, чем существовавший до него церковнославянский. Гражданский шрифт был введен с 1708 г., и им стали печатать все книги, кроме книг богослужебных. Для распространения технических и математических знаний на русский язык переводились по указанию Петра I лучшие книги иностранных авторов.

При Петре I введен в употребление более совершенный юлианский календарь вместо существовавшего прежде летосчисления от мифического «сотворения мира».

Наконец, при Петре I началось развитие школьного дела. Для начального образования были открыты так называемые «цифирные школы», в которых обучались дети дворян, чиновников, дьяков и подьячих. Основными дисциплинами в этих школах служили грамота, арифметика и начала геометрии. Кроме того, при Петре I были созданы специальные школы для подготовки инженерно-технических сил и специалистов по кораблестроению и кораблевождению. Так, в 1701 г. в Москве была открыта математико-навигацкая школа для обучения морскому делу, а затем в Петербурге создана морская академия. Были также открыты артиллерийская, хирургическая и инженерная школы. При горных заводах существовали специальные школы, в которых учащиеся знакомились с горным делом.

Первой книгой, напечатанной гражданским шрифтом, была книга по геометрии, написанная австрийским ученым *Пюркенштейном* и переведенная на русский язык *Я. В. Брюсом* (1670—1735). Книга была издана под названием «Геометриа славенски землемерие».

Перевод книги был самым тщательным образом прокорректирован и исправлен самим Петром, при этом он внес туда написанную им самим главу о построении солнечных часов.

Из математиков, работавших в России при Петре I, выделялись Фархварсон и Магницкий.

Эндрью Фархварсон, или, как его звали по-русски, *Андрей Данилович Фархварсон* (1675—1739), участвовал в издании переводов на русский язык иностранных математических книг и имел свои труды, относящиеся к вопросам математики. Из его собственных сочинений была напечатана лишь одна книга, которая знакомила с логарифмической линейкой и пропорциональным циркулем, в ней также приводились правила и примеры решения прямоугольных треугольников. Под редакцией Фархварсона вышел из печати первый русский перевод «Начал» Евклида, содержащий восемь книг этого труда. Этому переводу предшествовало введение, написанное другим автором. Оно представляет значительный интерес как одна из первых попыток в русской математической литературе дать краткий обзор истории развития математики.

Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) был первым русским выдающимся педагогом-математиком.

До нашего времени сохранилось очень мало достоверных сведений о годах детства и юности Магницкого. Однако все же установлено, что он родился 9 июня 1669 г. в Осташковской патриаршей слободе бывшей Тверской губернии. Большинство историков считает, что происходил он из крестьян и что фамилия его отца была Телятин.

По всей вероятности, Магницкий в школе не обучался, а приобретал знания самоучкой; это можно заключить из намека в надписи на его надгробном памятнике: «Наукам изучился дивным и неудобовероятным способом». Фамилия «Магницкий» была ему присвоена по указу Петра I, который высоко ценил большие познания Магницкого во всех науках и говорил, что он притягивает к себе знания, как магнит. Действительно, знания Магницкого были весьма обширны. Он по праву мог называться одним из самых образованных людей своего века.

Самостоятельное ознакомление с различными науками было доступно Магницкому, так как он знал несколько иностранных языков. Глубокая эрудиция дала возможность Магницкому поступить преподавателем в самую передовую школу того времени, то есть в математико-навигацкую. Там он с 1701 г.

работал в качестве помощника Фархварсона, а с 1715 г.— старшим преподавателем и руководителем учебной части.

Магницким написано несколько работ по математике, но самый значительный след в истории развития русской математики и методики математики оставил его главный труд «Арифметика, сиречь наука числительная». Эта книга была написана в 1703 г. и содержала сведения не только из области арифметики, но частично охватывала материал и из других частей математики: алгебры, геометрии и даже тригонометрии. Мало того, «Арифметика» явилась для своего времени энциклопедией технических знаний, в основном по навигации. Таким образом, называя свой труд «Арифметикой», Магницкий приуменьшал ее значение как научной или учебной книги. В полном заголовке книги, данном ей самим Магницким, «Арифметика» расценивается как перевод с иностранных языков: «Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведенная и во едино собрана, и на две книги разделена». Но на самом деле эта книга являлась глубоко продуманным, оригинальным трудом самого Магницкого и по методическим достоинствам стояла выше современных ей учебников математики, распространенных за границей.

Самой важной особенностью этого труда является стремление не только догматически изложить основные правила и вопросы математики, но и разъяснить их на многочисленных примерах: все изложение проникнуто желанием дать учащемуся понимание практической приложимости изучаемых вопросов.

Вся «Арифметика» состоит из двух книг: «Арифметика политика или гражданская» и «Арифметика логистика». При этом «Арифметика политика или гражданская» в свою очередь подразделяется на пять частей, а «Арифметика логистика» — на три. Книга напечатана славянским шрифтом, но все вычисления производятся в ней при помощи цифр индийской нумерации.

«Арифметика политика или гражданская» содержит нумерацию, арифметические операции над целыми и дробными числами, различные правила для решения типичных задач, а также извлечение корней второй и третьей степени, прогрессии и методы вычисления размеров некоторых геометрических тел.

В «Арифметике логистика» изложены вопросы, относящиеся к шестидесятеричным дробям, решению уравнений первой и второй степени, а также приведены элементы астрономии, землемерия и навигации.

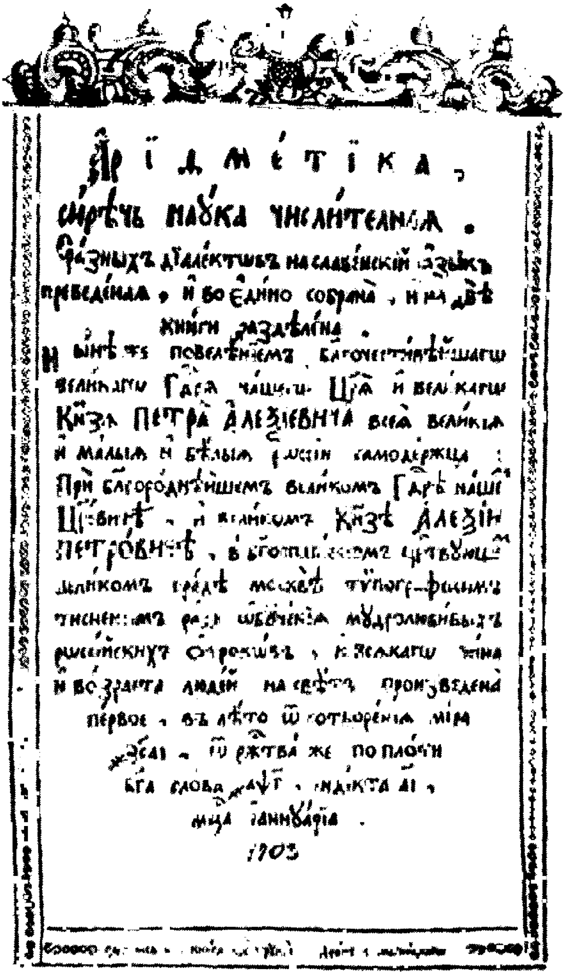
Вопросы тригонометрии в учебнике Магницкого занимают всего девять страниц, причем не дается определения тригонометрических величин, так как предполагается, что понятие о них уяснится непосредственно из чертежа. Однако Магницкий все же указывает способ вычисления хорд кратных и половинных дуг по хорде данной дуги, а также решает задачу о нахождении косинуса по данному синусу острого угла.

В «Арифметике» встречается много материала, которого в прежних русских руководствах не было. В некоторых же случаях введены новшества, которые делают учебник Магницкого более передовым, чем соответствующие учебники Запада. Так, например, Магницкий считает нуль числом и этим вносит существенную поправку в математические понятия его времени. В учебнике Магницкого рассматриваются основные понятия о десятичных дробях, которые лишь незадолго до выхода «Арифметики» из печати стали появляться в учебной литературе Запада. Новшеством является и то, что в курсе арифметики добавлены статьи из алгебры, чего в иностранных руководствах обычно не было.

Что касается логарифмов, то о них в «Арифметике» Магницкого упоминания нет. Однако в год выхода ее из печати, то есть в 1703 г., были изданы логарифмические таблицы Влакка, причем в этом издании принял участие наряду с другими лицами (Фархварсоном и *Гвином*) и Магницкий.

«Арифметика» Магницкого заслужила в свое время большую популярность не только как учебник математики, но и как книга энциклопедического характера, включающая сведения из астрономии, навигации и некоторых разделов других наук. Недаром великий русский ученый *М. В. Ломоносов* (1711—1765) называл «Арифметику» Магницкого, по которой он сам обучался, «вратами учености». Свое научное и методическое значение «Арифметика» Магницкого сохраняла не менее половины столетия, а ее историческое значение как книги, по которой можно судить о состоянии математического образования в России в первой половине XVIII в., сохраняется и в наше время.

Для современного читателя покажется странным стихотворный способ изложения математического материала, содержащегося в «Арифметике». Но надо вспомнить, что во вре-



Арiѳметiка,
сиречь наука числителная.
С разных диалектов на славенский языкъ
переведена, и во едино собрана, и на две
книги разделена.
И ныне же повеленiем благочестивейшаго
великаго государя нашего царя и великаго
князя Петра Алексiевича всея великiя
и малыя и белыя россiи самодержца:
При благороднейшем великом государе нашем
царевиче и великом князе Алексiи
Петровиче, в богоспасаемом царствующем
великом граде Москве типографским
тисненiем ради обученiя мудролюбивых
россiйских отроков, и всякаго чина
и возраста людей на свет произведена
первое, в лето от сотворенiя мiра
҂зсаі, от рождества же по плоти
бога слова ҂аѱг, индикта аі,
месяца iаннуарiя.
1703

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ ИЗ «АРИФМЕТИКИ...»
Л. Ф. МАГНИЦКОГО

Арифметика, практика или деятельная.

Что есть арифметика?

Арифметика или числительница есть художество честное, независтное, и всем удобопонятное, многополезнейшее, и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разная времена явившихся изряднейших арифметиков, изобретенное, и изложенное.

Колико образна есть арифметика практика?

Есть двояка.

1 Арифметика политика, или гражданская.

2 Арифметика логистика, не ко гражданству токмо, но и к движению небесных кругов принадлежащая.

СТРАНИЦА ИЗ «АРИФМЕТИКИ...» Л. Ф. МАГНИЦКОГО мена Магницкого многие учебные руководства писались стихами. Считалось, что написанное стихами легче запомнить, а это было важно: при догматическом обучении многое приходилось заучивать на память. Кроме того, современного читателя «Арифметики» затрудняют термины, которые ныне совсем вышли из употребления. Так, например, числа 0, 1, ..., 9 именуются там «перстами», числа 10, 20, ..., 100 — «составами», а числа 11, 12, ... и тому подобные, не оканчивающиеся нулями,— «сочинениями». Арифметические действия имеют наименования: сложение — «аддицио», вычитание — «субтракцио», умножение — «мультипликацио» и деление — «дивизио». Дробь именуется «ломаным числом», корень — «радиксом», поверхность — «суперфицией», объем — «корпуленцией» и пр.

Приведем несколько текстов задач из «Арифметики» Магницкого.

1. Купил полторажды полтора аршина, дал полтретьяжды полтретьи гривны: колико дати за полдевятажды полдевяти аршина. Придет 20 рублей 2 алтына $3\frac{7}{9}$ полуденги.

2. Случися некоему человеку к стене лестницу прибрати, стены же тоя высота есть 117 стоп, и обрете лестницу долготою 125 стоп. И ведати хощет, колико стоп сея лестницы нижний конец от стены отстояши имать. Придет 44 стопы.

3. Егда 36 копий вдвое вервию обязаны яже 9 стоп долготы имять; и ведательно есть, когда ону вервь распростерти во един ряд всю ону долготу 9 стоп, колико копий мощно обязати. Придет 144.

Петр I ясно сознавал, что для развития и укрепления научных знаний в России необходимо вырастить своих, русских ученых, которые могли бы в дальнейшем воспитывать новые и новые поколения отечественных ученых. В связи с этим он замыслил великий план создания Российской академии наук. О практическом осуществлении этой идеи Петр I совещался с Лейбницем, и тот охотно занялся проектом организации Академии. Созданная в 1725 г. (уже после смерти Петра I) согласно этому проекту, Российская академия стала быстро развиваться и в отношении многих отраслей знания достигла уровня самых знаменитых западных академий наук. Правда, первое время не удалось во главе этой Академии поставить русских ученых, так как ученые в России того времени были недостаточно квалифицированы: первыми академиками стали иностранцы. Особенно удачно был подобран состав академи-

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ков по разделу физико-математических наук. Среди них находился и один из величайших ученых XVIII в. Л. Эйлер.

Леонард Эйлер (1707—1783) родился в швейцарском городе Базеле в семье сельского пастора. Высшее образование он получил в Базельском университете, где его математической подготовкой руководил Иоганн Бернулли и где он подружился с его сыном *Даниилом Бернулли.*

Окончив в возрасте 19 лет университет, Эйлер не нашел в Швейцарии подходящей работы. Его попытка весной 1727 г.

занять освободившуюся вакансию заведующего кафедрой физики в Базельском университете окончилась неудачей. В это время Даниил Бернулли, работавший тогда в Петербургской академии наук, стал усиленно приглашать его в Россию, и Эйлер отважился покинуть родину. В Петербурге ему удалось получить место адъюнкта высшей математики при Академии наук, затем в 1731 г. ему была поручена кафедра теоретической и экспериментальной физики, и, наконец, с 1733 г. он руководил кафедрой высшей математики при Академии.

В течение большого промежутка времени (с 1741 до 1765 г.) Эйлер работал в Берлинской академии наук, но, даже находясь в Берлине, он все время поддерживал связь с Россией, куда направлял свои научные труды и где у него были ученики, работой которых он руководил. Возвратившись в 1765 г. в Россию, Эйлер уже более не покидал ее.

Трудно в кратком очерке показать, какую большую роль сыграл Эйлер в истории развития науки во всем мире и в России в частности. Его труды по математике, физике, механике, теории корабля и по многим другим отраслям знаний можно назвать неисчерпаемыми по богатству и разнообразию содержания. Им заложены основы многих новых отраслей наук и проведена большая работа по распространению научных и технических знаний.

Эйлер долгие годы активно трудился над составлением географических карт России, и, таким образом, было выполнено то, о чем мечтал еще Петр I.

Эйлер был единственным из академиков, который охотно оказывал помощь в технических расчетах знаменитому русскому изобретателю-самоучке *И. П. Кулибину* (1735—1818) как при составлении проекта одноарочного моста через Неву, так и при испытании этого проекта.

Работая в комиссии мер и весов, Эйлер принимал участие в исследовании точности весов различного рода. Кроме того, им оказано много услуг самой Академии наук, так как он рецензировал мемуары для академических изданий и долгое время состоял в комиссии, управляющей Академией. Проводя огромную научную работу в Академии, Эйлер находил время и для чтения лекций в университете, и для проведения публичных лекций. В его кипучую разностороннюю деятельность входило также составление учебников по различным дисциплинам и популярных статей по самым разнообразным научным вопросам.

Приезд Эйлера в столицу России имел решающее значение для всей его деятельности. Неизвестно, как сложилась бы судьба гениального ученого, если бы он не нашел тех условий для творчества и публикации своих научных трудов, какие смогла предоставить ему Россия. Недаром во время пребывания в Берлине Эйлер говорил, что своими успехами в науках он обязан тому, что работал в Российской академии наук. «Мы должны сознаться,— отмечал он,— сколько обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых только что находились. Что собственно меня касается, то в случае неимения такого превосходного случая я бы вынужден был главнейше прилежать к другим наукам, от которых, по всем признакам, я бы отупел только. Его королевское величество (Фридрих Прусский) недавно меня спрашивал, где я изучил то, что знаю. Я согласно истине ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской Академии наук».

Россия для Эйлера явилась второй родиной и, может быть, более близкой, чем Швейцария. Тем не менее, как упоминалось выше, Эйлер все же на довольно долгое время покидал Россию. Это объясняется тем, что после смерти императрицы Анны, во время регентства *Бирона*, в России «дела стали почти плохо». Это обстоятельство особенно сказалось на работе Академии наук, куда стали в качестве академиков назначаться лица, не имеющие никакого отношения к науке, зато стоящие близко к царскому двору; так, например, в Академию был зачислен учитель детей Бирона. В начале правления Бирона многие ученые были вынуждены уйти из Академии, и для Эйлера обстоятельства сперва сложились благоприятно, так как он получил возможность вследствие освобождения вакансии занять в Академии место, соответствующее его дарованиям и знаниям. Но со временем и Эйлер почувствовал на себе гнет бироновского правления: «оставаться в России было опасно». К этому присоединилась и вызванная крайним переутомлением болезнь, в результате которой он в 1736 г. ослеп на один глаз. Поэтому, когда в 1741 г. прусский король *Фридрих* предложил Эйлеру переехать в Германию для работы в Берлинской академии наук, Эйлер без особых колебаний согласился. Однако, когда обстоятельства в России изменились, Эйлер по приглашению императрицы *Екатерины II* вновь возвратился в Петербург и здесь с неослабной энергией работал до конца своей жизни, несмотря на то что приехал он в Россию совсем больным и вскоре ослеп на второй глаз. Большие способности и исключительная память позволили Эйлеру продолжать разностороннюю и обширную работу, несмотря на полную слепоту.

Научное наследство, оставленное Эйлером, весьма велико. Он, безусловно, был одним из самых замечательных математиков XVIII в. Знаменитый математик, астроном и механик Лаплас говорил: «Читайте Эйлера — это учитель всех нас».

За первые 14 лет пребывания Эйлера в России в академических изданиях было опубликовано около 70 его трудов, а за все время работы в России — 473 научных сочинения. Общее количество научных работ, написанных Эйлером, достигает 865.

Большое число работ Эйлера относилось к математическому анализу, причем они имели исключительно важное значение для развития этой отрасли математики.

В одном из предыдущих очерков мы уже упоминали об Эйлере как о творце нового, прогрессивного понятия о функции. Им дано новое определение понятия функции, основанное на алгебраической зависимости величин, в то время как до него функция выражала только геометрическую зависимость. Им дана строгая классификация функций. В работах «Введение в анализ бесконечно малых», «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление» Эйлер дал классические примеры изложения математического анализа, широко пользуясь приемами арифметизации. В работах по анализу много внимания уделено вопросу о разложении функций в ряды и учению о непрерывных дробях. Особо приходится отметить большие заслуги Эйлера в развитии методов интегрирования дифференциальных уравнений. Кроме того, Эйлер представил вывод замечательных формул, дающих зависимость между тригонометрическими и показательными функциями; на основании этих формул вся тригонометрия может быть построена аналитическим методом, без участия геометрических построений. Вот эти формулы:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \quad \text{и} \quad e^{zi} = \cos z + i \sin z.$$

Они вошли в математику под названием **формул Эйлера**.

Оперируя с бесконечными рядами и пользуясь приведенными формулами, Эйлер установил зависимость между бесконечными рядами и бесконечными произведениями. Характерно и то, что получившие полное признание и употребление символы для обозначения чисел, выражающих отношение длины окружности к ее диаметру, а также для выражения предела $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при n, стремящемся к бесконечности, то есть символы π и e, введены в практику Эйлером. Наряду с указанным необходимо отметить, что в этих же трудах Эйлера разработаны следующие алгебраические вопросы: разложение дробей на простейшие, освобождение дробей от иррациональностей в числителе и знаменателе и другие случаи преобразования алгебраических функций.

Свыше 100 работ Эйлера относится к теории чисел, и многие его формулы сохранились в этой науке до нашего времени. Например, имеет практическое и теоретическое значение так называемая числовая функция Эйлера $\varphi(N)$, выражающая число чисел, меньших N и взаимно простых с ним. Числовая функция вычисляется по формуле

$$\varphi(N)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{l}\right)=$$
$$=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots l^{\lambda-1}(a-1)\,(b-1)\,(c-1)\ldots(l-1),$$

где $N=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}$.

Интересна формула для выражения суммы делителей данного числа N:

$$S(N)=[S(N-1)+S(N-2)]-[S(N-5)+S(N-7)]+$$
$$+[S(N-12)+S(N-15)]\ldots,$$

где в круглых скобках вычитаются пятиугольные числа вида $M=\frac{3n^2\pm n}{2}$, если n — порядковый номер члена, заключенного в квадратную скобку.

В вопросе о расположении простых чисел Эйлера даны следующие формулы для получения таких чисел:

1. $p=2x^2+29$. При натуральных значениях x эта формула дает 29 простых чисел.

2. $p=x^2+x+41$. Дает 41 простое число.
3. $p=x^2-79x+1001$. Дает 80 простых чисел.

Эйлер с ранней молодости проявлял большой интерес к задачам экстремального характера. Разрешая вопросы такого рода, он заложил основание для новой отрасли анализа — вариационного исчисления, основоположником которого он и считается. Им разрешались вопросы о максимальных и минимальных значениях величин в задачах, относящихся к механике, а также написан трактат об изопериметрах.

Велики заслуги Эйлера и в области распространения элементарных знаний. Им написаны учебники по элементарной алгебре и арифметике. Они отличаются тщательно продуманной системой изложения. В них отброшены многие вопросы, которые в прежние времена только загромождали учебники лишними или устарелыми понятиями. Вместе с тем со всей научной строгостью и с большим методическим мастерством излагаются наиболее важные отделы курса. В них можно найти много новых мыслей и приемов изложения. Так, в арифметике изложение впервые сопровождается необходимыми доказательствами или, по крайней мере, разъяснениями. В алгебре совершенно по-новому изложен раздел логарифмов. Определив логарифм, как показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить данное число, Эйлер тем самым установил, что действие логарифмирования является обратным по отношению к возведению в степень. Он же ввел термины «мантисса» и «основание». В связи с этим следует упомянуть и о том, что Эйлер впервые установил многозначность логарифмической функции комплексного переменного.

Хотя Эйлер и не писал специальных учебников по элементарной тригонометрии, его роль в развитии этой науки очень велика: благодаря Эйлеру тригонометрия приобрела тот характер, который отвечает современным требованиям к ней. В сочинении «Введение в анализ бесконечно малых величин» и во многих других трудах, касающихся так или иначе вопросов тригонометрии, Эйлер дал понятия синуса, косинуса и прочих тригонометрических величин как функций и установил между ними простейшие соотношения, выраженные аналитическими формулами. Более того, Эйлером дана аналитическая трактовка всей тригонометрии. До Эйлера каждая формула выводилась только из чертежа и по большей части выражалась словесно; Эйлер показал, как можно все тригонометрические формулы вывести аналитически из нескольких исходных, не прибегая к чертежу; при этом ему удалось получить некоторые ранее неизвестные формулы. Эйлер впервые исследовал знаки тригонометрических функций во всех четвертях и дал формулы приведения. Даже сама техника записи формул была облегчена Эйлером, так как им были введены практикуемые и ныне обозначения сторон треугольника строчными буквами a, b и c, а противолежащих углов — соответствующими прописными буквами A, B и C. Надо учесть и то, что Эйлером были получены упомянутые нами знаменитые формулы, связывающие тригонометрические функции с показательными, что дало возможность строить тригонометрию совершенно независимо от геометрии и под аргументом тригонометрических функций разуметь не только углы и дуги, а какие угодно величины; это позволило применять тригонометрию к вопросам самого разнообразного характера.

Можно считать, что благодаря работам Эйлера тригонометрия вступила в завершающий этап своего развития.

Эйлер считается создателем в России первой научной математической школы, так как его гениальные научные и методические идеи были восприняты многочисленными учениками, причем многие из них являлись одаренными математиками, во многом способствовавшими развитию и распространению идей Эйлера.

Крупным представителем математической школы Эйлера был академик *С. Е. Гурьев* (1764—1813), в своих работах по дифференциальной геометрии создавший метод исследования при помощи полярных координат и получивший ряд формул, вошедших в теорию дифференциальной геометрии. Большое место в его исследованиях занимают вопросы усовершенствования преподавания математических дисциплин, касающиеся установления и углубления основных понятий математических наук, особенно геометрии и математического анализа. Его работа «Опыт о усовершенствовании элементов геометрии» расценивается историками математики как первое русское сочинение по философии и методике математики.

Распространению и методической обработке идей Эйлера способствовали также и некоторые математики, не являвшиеся его непосредственными учениками, но опиравшиеся в своих работах на его идеи. К таковым принадлежит, например, ученик Магницкого профессор *Н. Г. Курганов* (1725—1796). Большую известность получил его учебник арифметики, озаглавленный «Универсальная арифметика», а другой его учебник «Универсальная алгебра» по построению очень напоминает курс арифметики Эйлера, но служит как бы дальнейшим его развитием.

Смерть Эйлера была величайшей утратой для всего научного мира. Память о нем в особенности дорога нам, советским людям, так как мы сознаем, что вся деятельность этого великого человека, все его силы были посвящены неустанной работе во имя развития науки и образования в России.

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ В XIX В.

Середина XVIII в. в России явилась эпохой начавшегося разложения феодально-крепостнических отношений. В особенности это сказалось в последней трети XVIII в., когда на фоне крепостнического уклада жизни вследствие роста товарно-денежных отношений на месте натурального хозяйства стал формироваться капиталистический уклад. Развитие внутренних и внешних рынков постепенно заставляло помещиков переходить от натурального хозяйства к рыночным отношениям, и это в свою очередь побуждало их усиливать эксплуатацию крестьянских хозяйств и урезывать и без того незначительные крестьянские наделы в пользу барских запашек. В эту же эпоху усилилось закрепощение крестьян; число крепостных значительно возросло.

Рост капиталистических отношений сказывался и в возникновении крупных купеческих мануфактур, успешно конкурировавших с дворянскими, где подневольный крестьянский труд не давал высокой производительности.

Положение городских вольнонаемных рабочих на купеческих мануфактурах и промыслах (рыбных, соляных и т. д.) и ремесленников, работавших по заказам купечества, было немногим лучше положения крестьян: унизительная зависимость от алчного работодателя, являвшегося обычно и ростовщиком, тяготела над рабочим людом.

Таким образом, рост производительных сил страны и укрепление военной мощи достигались за счет усиления эксплуатации трудящихся масс. Такое положение дел вызывало обострение классовых противоречий и порождало ожесточенные крестьянские войны против помещиков и волнения среди рабочих на мануфактурах и казенных заводах.

Крестьянские войны, расшатывая крепостнический уклад и вызывая бешеное сопротивление крепостников и их сторонников и покровителей, в то же время будили передовую общественную мысль лучших людей того времени. Так, наряду с движением крестьянства росла и крепла среди передовых мыслителей России прогрессивная материалистическая философия. Основоположником материалистической философии в России надо считать величайшего гения М. В. Ломоносова. Русские философы-материалисты конца XVIII в., оставаясь на позициях механистического материализма, стихийно подходили и к диалектическому миропониманию. Революционно-материалистическая философия *А. Н. Радищева (1749—1802)* подготовила к началу XIX в. возникновение идей *В. Г. Белинского* (1811—1848) и *А. И. Герцена* (1812—1870). Русское естествознание, а вместе с тем и математика получили крепкую материалистическую базу, и с этих пор материализм стал основной ведущей философией большинства русских математиков.

Тимофей Федорович Осиповский

Большую роль в развитии математики в России сыграл талантливый русский ученый — философ-материалист, математик, физик и астроном Т. Ф. Осиповский.

Тимофей Федорович Осиповский (1765—1832) происходил из семьи сельского священника села Осипово бывшей Владимирской губернии.

Первоначально Осиповский обучался во Владимирской духовной семинарии, но когда в Петербурге была открыта первая в России учительская гимназия, он в числе других наиболее талантливых учащихся духовных академий и семинарий был переведен в эту гимназию для подготовки к учительской деятельности. Закончив ее в 1786 г., Осиповский получил назначение на должность преподавателя математических дисциплин и русской словесности в главном народном училище Москвы. Здесь он проявил себя как весьма талантливый преподаватель и вдумчивый ученый. В высшем народном училище Осиповский проработал 14 лет. В этот период у него сформировались твердые материалистические убеждения, которым он оставался верен в течение всей жизни. Публично свои убеждения Осиповский впервые высказал в речи, произнесенной им на торжественном акте училища в 1795 г. В этой речи, озаглавленной «Рассуждение о пользе наук», Осиповский, выступая против необоснованных идеалистических теорий, представлявших природу в извращенном, нереальном виде, рекомендовал идти путем опытов и наблюдений, считая этот путь единственно правильным, то есть приводящим к истине, а следовательно, и единственно полезным.

В 1800 г. Осиповский был назначен преподавателем Петер-

Т.Ф. ОСИПОВСКИЙ

бургской учительской гимназии, в которой он ранее сам обучался. Здесь он преподавал до 1803 г., причем им был написан «Курс математики», который получил широкую известность, выдержав три издания.

С 1803 и до 1820 г. Осиповский работал уже профессором Харьковского университета, где являлся ведущим лектором почти по всем математическим дисциплинам, включая физику и астрономию, в то же время состоя (с 1813 г.) ректором этого университета.

Осиповскому принадлежит много научных трудов по физике, механике и астрономии. Эти труды строились на его материалистических убеждениях. Материалистическая философия Осиповского с особой силой выразилась в его научно-философских сочинениях, направленных главным образом против идеалистических высказываний Канта. К такого рода сочинениям относятся две его публичные речи: «О пространстве и времени» (1807) и «О динамической системе Канта» (1813). В первой из них Осиповский подверг резкой критике основные положения Канта о независимости понятия о времени и пространстве от приобретенного опыта. Вторая же была направлена против развиваемой Кантом теории «чистой» силы, не зависящей от материи.

Осиповский обладал редкой способностью выражать свои мысли ясно и увлекательно, и это обстоятельство в значительной мере способствовало тому, что его материалистические идеи живо воспринимались учениками — студентами Харьковского университета.

Такое положение дел заставило насторожиться представителей религиозно-мистического направления, которые во второй половине царствования *Александра I* стояли во главе министерства народного просвещения, объединенного с министерством духовных дел и возглавляемого махровым реакционером князем *А. Н. Голицыным.*

Приспешник Голицына *З. Я. Карнеев*, назначенный в 1817 г. попечителем Харьковского учебного округа, стал искать предлог, чтобы освободить университет от Осиповского. Удобный случай представился в 1820 г., когда Осиповский, уже по выслуге пенсии, подал заявление об освобождении его от части обязанностей пс университету, а именно от работы по кафедре чистой математики, которую он собирался передать профессору Павловскому. Но Карнеев представил дело так, будто бы Осиповский просил освободить его от всей работы по университету. Так это и было передано министру Голицыну, который с большой готовностью отстранил Осиповского от всех дел.

Лишившись работы в университете, Осиповский уже не принимал на себя никаких официальных обязанностей и конец жизни прожил в Москве, всецело отдавшись занятиям наукой.

Научные и методические работы Осиповского имели большое значение для развития математики в России. Наиболее крупным его трудом, вошедшим в историю математики как классический, был «Курс математики». Первые два тома этого труда вышли из печати в 1801—1802 гг., а третий — в 1823 г. «Курс математики» охватывал очень большой материал. В нем излагались и начала элементарной математики, и разделы высшей, вплоть до вариационного исчисления. Этот учебник обладал такой полнотой содержания, как ни один из существовавших в те времена курсов математики. В него впервые вошли вопросы высшей алгебры и излагался метод вычисления корней уравнений, который впоследствии получил наименование «метод Горнера», хотя *Горнер* (1768—1837) опубликовал свой способ на 17 лет позднее Осиповского. В написанном Осиповским, но не опубликованном четвертом томе курса содержался материал, относящийся к приложению аналитических функций к теории кривых линий поверхностей.

«Курс математики» Осиповского был для своего времени настолько хорош в смысле методики изложения и широты охвата материала, что он был переведен на некоторые западноевропейские языки и пользовался большим успехом за границей.

Николай Иванович Лобачевский

Среди ученых XIX в. выделяется своими гениальными трудами великий геометр, гордость нашей отечественной науки — Лобачевский.

Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) родился в Нижнем Новгороде в семье скромного служащего межевой конторы. Нам неизвестно о времени смерти отца Лобачевского, но мы знаем, что тяжелая болезнь заставила его отказаться от службы в 1800 г., и дальнейших сведений о нем мы не имеем.

После ухода со службы отца семья Лобачевских оказалась в очень тяжелых материальных условиях, и в 1802 г. мать Николая Ивановича, Прасковья Александровна, поместила всех сыновей (Александра, Николая и Алексея) в интернат при Казанской гимназии, где они содержались сначала за свой счет, а впоследствии были переведены на казенное содержание. С этих пор жизнь Лобачевского была неизменно связана с Казанью.

Гимназический курс Лобачевский закончил за четыре года и после окончания гимназии, с 1808 г., стал студентом университета, открытого в 1804 г.

Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

Годы учения в гимназии, где Лобачевский обучался математике под руководством талантливого учителя *Г. И. Карташевского,* способствовали развитию его природных дарований и интереса к этой науке. Когда же появилась возможность изучать дисциплины математического цикла в университете под руководством таких видных педагогов, как профессора *Бартельс*, *Броннер* и *Литтров*, творческие силы Лобачевского получили еще более широкое поле для своего развития.

В 1809 г. Лобачевский уже сделал в математике такие успехи, что был произведен в камерные студенты, обязанностью которых было раъяснение остальным непонятого ими на лекциях и помощь отстающим. Однако Лобачевский, обладавший живым темпераментом, часто нарушал дисциплину. Это заставило администрацию университета в начале 1810 г. лишить его этого звания. В течение последующих лет Лобачевский, отличаясь блестящими успехами в науках и вызывая этим восхищение со стороны профессоров, пользовался, однако, все меньшим и меньшим расположением со стороны администрации. Помимо обычных нарушений дисциплины, ему приписывались пагубные, с точки зрения администрации, идеи: «Лобачевский в значительной степени явил признаки безбожия». Несмотря на недоброжелательное отношение администрации университета, профессора, лично знавшие исключительную талантливость Лобачевского и его замечательные успехи в области математических наук, настояли на том, чтобы Лобачевскому по окончании университета была присвоена ученая степень магистра, которая была утверждена за ним 3 августа 1811 г. Начиная с 1814 г. Лобачевский уже читает самостоятельные курсы в университете, и в 1816 г. его утверждают в звании экстраординарного профессора. В 1814/15 учебном году он читал лекции по теории чисел, а в следующем году — лекции по элементарной математике, плоской и сферической тригонометрии, дифференциальной и элементарной геометрии. В дальнейшем круг дисциплин, преподаваемых Лобачевским, расширился и охватил, кроме математики, физику, механику и астрономию.

С первых же лет работы в университете Лобачевский принимал живое участие в деятельности организованного при университете педагогического института, целью которого была подготовка преподавателей для учебных заведений Казанского учебного округа. Кроме того, уже в 1818 г. Лобачевский был избран членом училищного Совета при университете и стал самым активным его работником. В ведении Совета в то время, согласно Уставу 1804 г., фактически находилось все управление и методическое руководство школами Казанского учебного округа.

В 1827 г. Совет университета избрал Лобачевского ректором университета. Пребывая на этом посту в течение 19 лет, Лобачевский проявил не только замечательные административные способности, но и исключительный педагогический талант, позволивший ему быть идейным вдохновителем всей педагогической работы, проводившейся Советом университета.

Лобачевский работал в университете вплоть до 1846 г., когда он должен был оставить эту работу, согласно пункту университетского Устава, который гласил, что 30 лет работы в университете являлись предельным сроком для занятия профессором кафедры, а этот срок у Лобачевского истек в указанном году. Хотя Совет университета и вынес постановление, что он за особую честь почитает иметь и в дальнейшем в числе профессоров столь отличного ученого и опытного педагога, как Лобачевский, «доколе у того сил и желания хватит», но сам Лобачевский в заявлении министру народного просвещения просил освободить его от заведования кафедрой чистой математики и передать ее ученику его по университету *А. Ф. Попову*, как достойному своему заместителю. Мотивировка Лобачевского его отказа от горячо любимого дела выявляет такой благородный облик истинного педагога, превыше всего ставившего интересы науки и просвещения, что невозможно без чувства волнения и глубокого уважения к Лобачевскому читать его заявление. Он писал: «Кафедру чистой математики более с пользой, вероятно, может занять учитель 1-й Казанской гимназии Попов, получивший степень доктора в прошедшем году и для которого такое повышение не только совершенно заслуженное, но даже должное, с той целью, чтобы поощрить далее к занятиям при несомненных его хороших способностях. В силах еще первой молодости, не отвлекаемый, подобно мне, другого рода занятиями по службе и обязанностями семейными, он не замедлит показать себя достойным профессором и встать в кругу самых известных европейских ученых. При таких обстоятельствах желание с моей стороны оставаться в должности профессора не могло почитаться справедливым». [1]

Заявление Лобачевского было использовано министерством как предлог для освобождения его не только от заведования кафедрой, но против его желания и от всех других обязанностей по университету. Это объясняется тем, что прогрессивно настроенный Лобачевский в своих заботах о развитии университетской науки держал себя очень самостоятельно, не всегда следуя букве указов, исходящих из министерства, а руководствуясь лишь интересами вверенного ему учебного заведения. Для министерства народного просвещения гораздо

---

[1] Каган В. Ф. Лобачевский. М.— Л., 1948, с. 344.

удобнее было иметь ректором Казанского университета более податливого человека. И такой человек был уже заранее намечен: на смену Лобачевскому был выдвинут профессор *И. М. Симонов* (1794—1855). Лобачевскому было предложено занять должность помощника попечителя Казанского учебного округа. Хотя работа на новом поприще давала Лобачевскому возможности для применения его педагогических и методических талантов в школьном преподавании, но отстранение от любимой работы в университете, которой он отдавал все силы, тяжело переживалось великим ученым, и он не смог примириться с этим актом произвола до конца жизни.

Должность помощника попечителя была последней официальной должностью, занимаемой Лобачевским. 12 февраля (по ст. ст.) 1856 г. Лобачевский умер.

При ознакомлении с научными и педагогическими идеями Лобачевского нас поражают их смелость и новизна, которые становятся для нас особенно значительными, когда мы видим ту мрачную обстановку в университете, в которой пришлось работать Лобачевскому в первый период его преподавательской деятельности.

«Вольнодумство», проникавшее в университеты вместе с идеями французских материалистов конца XVIII в. и окрепшее под влиянием французской буржуазной революции 1789—1794 гг., встретило яростный отпор со стороны мировой реакции. После Отечественной войны 1812 г. наиболее реакционную позицию занял русский император Александр I. В правительственных кругах господствовали религиозно-мистические взгляды, и, как уже упоминалось, министерство народного просвещения было объединено с министерством духовных дел под общим управлением обер-прокурора синода, крайнего реакционера князя Голицына. Подобно тому как это происходило в Харьковском университете, когда там работал Т. Ф. Осиповский, во всех университетах России была начата ревизия постановки учебного и научного дела. Ревизия Казанского университета была поручена *М. Л. Магницкому* [1], пользовавшемуся неограниченным доверием Голицына.

Магницкий появился в Казани в феврале 1819 г. При обследовании Казанского университета Магницкий главным принципом университетской науки выдвигал необходимость благо-

---

[1] М. Л. Магницкий не имеет отношения к Л. Ф. Магницкому, составителю «Арифметики». (**Примеч. В. Д. Чистякова.**)

честия как основы народного просвещения. Подходя с такой установкой к науке, он нашел, что Казанский университет не только не полезен, но даже «причиняет общественный вред», а потому подлежит публичному разрушению. Однако на эту меру не согласился даже Александр I, который решил, что университет можно «исправить», и это «исправление» поручил тому же Магницкому. Ему были переданы все полномочия попечителя Казанского учебного округа, и он начал с того, что изгнал значительную часть профессоров. Студентам предписывалась жизнь по образцу монастырской. Изложение всех наук должно было опираться на «божественное откровение». Профессора, которые желали выслужиться и быть угодными начальству, раболепно следовали этим предписаниям и нередко преподносили студентам на лекциях вместо научных знаний совершенно извращенные и нелепые сведения. Но не таким был Лобачевский. Хотя он и не оказывал явного сопротивления действиям Магницкого, понимая, что при данной обстановке это бесполезно, однако никогда не унижался до того, чтобы в угоду Магницкому искажать те университетские дисциплины, которые он читал студентам.

В эти годы Лобачевский много занимался разработкой своих научных и методических трудов, которые послужили основой его дальнейшей работы.

Главным предметом размышлений методического характера был для Лобачевского вопрос об основаниях геометрии. Лобачевский находил, что при преподавании математики необходимы ясность и вместе с тем строгость изложения и полная отчетливость всех понятий, на которых базируется курс математики, и в частности геометрии. Его не удовлетворяло то изложение геометрии, которое существовало неизменно со всеми недостатками на протяжении двух тысяч лет со времени автора этого изложения — Евклида. Лобачевского смущали многие места этого изложения, но в особенности неприемлемым казался ему постулат о параллельных прямых: он не являлся ни достаточно очевидным, ни доказанным, а между тем на этот постулат опиралось чуть не все построение элементарной геометрии. Таким образом, нарушались основные требования методического изложения математических дисциплин — изложение утрачивало строгость построения и теряло ясность.

Проблема построения методически правильного курса геометрии стала интересовать Лобачевского, очевидно, с того времени, когда ему пришлось читать курс элементарной геометрии. Во всяком случае, из записей лекций Лобачевского, составленных его слушателями в 1816—1817 гг., можно видеть, что уже в эти годы Лобачевский не удовлетворялся тем, что в основу геометрии положен довольно сложный постулат Евклида о параллельных линиях. Поэтому Лобачевский уже в первые годы своей педагогической деятельности пытался доказать этот постулат, как теорему.

Да и не один только вопрос о параллельных смущал Лобачевского как требовательного методиста при изложении курса элементарной геометрии. Находя весь порядок изложения геометрии, все ее построение устаревшим, Лобачевский в 1823 г. создал свой, совершенно оригинальный учебник геометрии, по характеру изложения сильно отступающий от евклидовых традиций. Основную идею построения учебника Лобачевский выразил в самом определении геометрии, данном им в первой же фразе учебника: «Часть чистой Математики, в которой предписываются способы измерять пространство, называется Геометриею» [1]. Таким образом, Лобачевский полагал, что задачей геометрии является измерение пространственных величин. В соответствии с этим он во всем курсе говорит только об измерении, сопровождая учение об измерении пространственных величин лишь необходимыми определениями и допущениями, играющими роль аксиом. В курсе Лобачевского нет привычного для обычных учебников геометрии выделения аксиом, теорем, лемм и пр. Изложение начинается с измерения прямых линий и разъяснения того, что надо понимать под этим процессом. Непосредственно с измерением прямых линий Лобачевский связывает и измерение кривых. При этом Лобачевский рекомендует за единицу измерения брать метр и его десятые, сотые, тысячные и т. д. части. Это использование метра для измерения длины, а в дальнейшем употребление сотой доли прямого угла для измерения углов явилось в России таким новшеством, что академик *Н. Фусс* (1755—1826), рецензировавший «Геометрию» Лобачевского, рассматривал его как проявление революционного бешенства.

При измерении длины дуг кривых линий, площадей поверхности и объема некоторых тел Лобачевский прибегает к приему, приближающемуся к методам математического анализа. Он нигде не вводит понятия о бесконечно малых величинах, но тем не менее многие доказательства проводятся так, что в них

---

[1] Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч., т. 2. М.— Л., 1949, с. 43.

применяется бесконечно малая величина, хотя Лобачевский и не называет ее собственным именем.

На протяжении всего курса геометрии Лобачевский излагает вопросы планиметрии и стереометрии параллельно, то есть придерживается принципа, который впоследствии получил наименование ф у з и о н и з м а. В наше время применение этого метода в школьной практике показало его отрицательные стороны, но в «Геометрии» Лобачевского фузионизм был естествен, так как вытекал из желания обобщить, объединить однородные по своему характеру измерения на плоскости и в пространстве, тем более что рассматриваемый курс геометрии Лобачевского читался им для студентов 1-го курса университета и носил характер сжатого обзора материала, пройденного в гимназии. В этом смысле идеи Лобачевского являлись передовыми для его времени и имели гораздо больше внутреннего содержания, чем идеи методистов, воскресивших фузионизм в более поздние времена.[1]

Среди достоинств «Геометрии» Лобачевского надо отметить то, что она в некоторых случаях при ознакомлении с новыми пространственными понятиями не дает сразу сухого, формального определения, а предварительно разъясняет возможность практического создания нового образа. Кроме того, в «Геометрии» Лобачевского имеются примеры на решение конструктивных задач в пространстве.

Что касается учения о параллельных линиях, то в своей «Геометрии» Лобачевский считал, что строгого доказательства постулата никем (а следовательно, и самим Лобачевским) не было дано, «а какие были даны могут называться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими доказательствами»[2]. Сам Лобачевский дает пояснение, основанное на исследовании бесконечных частей плоскости, предложенное ранее французским математиком Бертраном.

То, что постулат о параллельных оставался необоснован-

---

[1] Говоря о фузионизме Лобачевского, надо подчеркнуть, что этот фузионизм у Лобачевского служит для более полного и решительного, чем у Евклида, выдвижения на первый план всего геометрического материала, не зависящего от постулата параллельности. Кроме того, фузионизм планиметрии и стереометрии Лобачевский, по-видимому, считал одним из методических приемов для написания курса обзорного характера, каким и является его учебное руководство. **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

[2] Л о б а ч е в с к и й Н. И. Полн. собр. соч., т. 2, с. 70.

ным, заставляло Лобачевского все серьезнее и серьезнее присматриваться к основаниям геометрии и, наконец, прийти к мысли об отказе от этого постулата в том виде, в каком он приводится у Евклида, и замене его другим, согласно которому в плоскости, содержащей данную прямую и точку, лежащую вне прямой, через эту точку можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих данной. Эта мысль и была воплощена Лобачевским в ряде его трудов, создавших ему славу величайшего геометра. Так методические искания Лобачевского привели его к замечательным научным выводам, открывшим новую эпоху в развитии геометрии и послужившим человечеству новым средством для исследования и покорения окружающей природы. Вместе с тем научные труды Лобачевского, помимо непосредственного влияния на развитие неевклидовой геометрии, приобрели огромное значение в деле развития механики, физики и философии.

Свои новые идеи Лобачевский изложил в написанном им сочинении, которое он представил для опубликования на физико-математическом отделении университета 7 февраля 1826 г. 11 февраля дело было заслушано и назначены рецензенты. Это сочинение, написанное на французском языке, носило название «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теории о параллелях». Сам Лобачевский указывает, что он читал это сочинение на заседании отделения 12 февраля 1826 г. К сожалению, до нашего времени его текст не дошел, и только из позднейшей работы Лобачевского «О началах геометрии» мы узнаем, что в этом труде Лобачевский излагал мысли, которые потом явились содержанием первой части упомянутой работы «О началах геометрии».

Следует заметить, что как в своем труде «О началах геометрии», напечатанном впервые в 1829 г. в журнале «Казанский вестник», так и в работе «Геометрические исследования по теории параллельных линий», изданной Лобачевским в 1840 г., мы находим указания на то, что основной причиной, заставившей Лобачевского пересоздать геометрию, было желание построить безупречную в методическом смысле геометрию.

Так, в работе «Геометрические исследования по теории параллельных линий» Лобачевский пишет: «В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука, поскольку она не переходит в анализ, до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком к нам перешла от Евклида. К этим несовершенствам я отношу неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы представляем измерение этих величин, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий, к восполнению которого все усилия математиков до настоящего времени были тщетными».[1]

О тех недостатках, которые лежали в основе преподавания геометрии, Лобачевский еще более определенно высказывается в своих «Обозрениях преподавания чистой математики» за 1824/25 и 1825/26 учебные годы. «Первые наши понятия о природе вещей, которые, будучи раз приобретены, сохраняются навсегда, которые неразлучны с каждым умственным представлением и служат первым основанием всякого суждения о вещах: таковы-то должны быть и основания геометрии. Далее начальные понятия применяются прямо к природе и тем самым отличаются от составных, которые необходимо требуют существования других, откуда бы они происходили. Поверхности и линии не существуют в природе, а только в воображении: они предполагают, следовательно, свойства тел, познание которых должно родить в нас понятие о поверхностях и линиях». «Но в чем же заключаются отличительные качества тел от прочих величин, познаваемых нами в природе, чтобы отсюда могло проистекать учение о линиях и поверхностях?» — задает вопрос Лобачевский и сам отвечает: «Этого еще нет ни в одной геометрии».[2]

Лобачевский пытается ответить на этот вопрос, вводя как основное свойство соприкосновения или касания геометрических тел. Это свойство он вводит и в своей элементарной геометрии, на нем же строит и все величественное здание «воображаемой» геометрии. Из понятия о соприкосновении тел Лобачевский выводит и понятие о трех измерениях пространства.

Кроме рассмотренных недочетов в изложении геометрии, Лобачевский относит к ним еще «темноты, которых причина бывает двоякая: первое, что не следуют правилу определять все в мере; второе, что хотят сохранить идеальность, тогда как истинная цель геометрии этого не требует».[3] Приведенные слова Лобачевского заставляют нас еще раз убедиться в том, что он придавал большое значение вопросу о пространствен-

---

[1] Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч., т. 1, с. 79.

[2] Модзалевский Л. Б. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.— Л., 1948, с. 204.

[3] Там же, с. 205.

ных измерениях и требовал от преподавания реального ознакомления с окружающими явлениями, не идеализируя их, подобно тому, как геометрические образы идеализируют реально существующие тела.

Положив в основание геометрии аксиому, согласно которой через каждую точку вне прямой в плоскости этой прямой проходят две параллельных к этой прямой линии (если параллельной назвать прямую, отделяющую все прямые, пересекающиеся с данной прямой, от прямых, ее не пересекающих), Лобачевский построил свою геометрию, в которой многие положения в значительной мере отличаются от положений геометрии Евклида. Так, в геометрии Лобачевского перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки вне прямой на эту прямую, образует с линией, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку, угол, не равный прямому, а меньший прямого. При этом угол, называемый углом параллельности, тем более отклоняется от прямого, чем далее от данной прямой отстоит точка; следовательно, он является функцией расстояния точки от прямой. В основных положениях геометрии Лобачевского характерно также следующее: сумма внутренних углов треугольника менее двух прямых и отклонение от двух прямых тем более, чем больше треугольник. А отсюда как прямое следствие возникает необходимость признать, что подобных треугольников существовать не может, а равноугольными два треугольника могут быть лишь тогда, когда они равны, то есть имеют соответственно равные стороны. Таким образом, геометрия Лобачевского как бы существенно отличается от геометрии Евклида. Однако это не совсем так. Следует считать, что геометрия Евклида является лишь частным случаем или даже предельным случаем геометрии Лобачевского, так как угол параллельности, принимаемый в геометрии Евклида за прямой, в геометрии Лобачевского может заметно отклониться от прямого лишь при расстояниях, которые имеют величину, не слишком малую по сравнению с некоторым постоянным отрезком, характеризующим, как говорят, радиус кривизны пространства Лобачевского. Если этот отрезок очень велик (кривизна очень мала), то отклонение от прямого угла может наблюдаться лишь при расстояниях очень больших, которые в случае физического пространства будут очень сильно превосходить те, с которыми обычно имеет дело человек. Поэтому для опытной проверки этого отклонения следует проводить наблюдение в пределах астрономических расстояний, что и пытался сделать сам Лобачевский, пользуясь точнейшими данными астрономических наблюдений, проведенных и опубликованных в те годы наиболее совершенными обсерваториями. В итоге Лобачевский пришел к выводу, что отклонения, если они и имеются, лежат в пределах возможных ошибок измерений и что не только в пределах земных расстояний, но и в пределах, связанных с Солнечной системой, пространственные свойства в границах достижимой точности вполне характеризуются геометрией Евклида.

А так как с геометрией Евклида оперировать проще, чем с геометрией Лобачевского, то геометрия Евклида и сохраняет свое значение для практических целей. Если же вопрос касается измерений в мировом пространстве или измерений для изучения физических явлений в микромире, то геометрия Евклида может сделаться непригодной и тогда может появиться необходимость применения геометрии Лобачевского.

Свои идеи в области геометрии Лобачевский развивал все далее и посвятил им, кроме упомянутых, еще ряд трудов, к числу которых принадлежат: «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835—1838), «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (1840), «Пангеометрия» (1855).

Свои новаторские идеи по уточнению основных положений математических наук и по общему упорядочению изложения этих наук Лобачевский распространил далеко за пределы геометрии и внес их как в изложение элементарной алгебры, так и в высший математический анализ. Так, уже в 1823 г. Лобачевский создал курс элементарной алгебры. Этот труд он направил на рассмотрение физико-математического отделения университета, который на своем заседании 11 сентября 1825 г. одобрил его. Однако по разным причинам указанная работа Лобачевского была впервые опубликована лишь в 1834 г. в переработанном виде под наименованием «Алгебра или вычисление конечных». Курс алгебры первоначально предназначался Лобачевским в качестве учебника для гимназий, но после переработки он определил его как пособие для учителей.

Уже в предисловии к своему руководству Лобачевский намечает главные установки работы. Он находит, что в алгебре, как и в геометрии, недостаточно разработаны самые основные понятия.

Лобачевский свое требование строгости изложения математических дисциплин распространяет с геометрии и на алгебру. Это требование соблюдается им начиная с первых же положений алгебры, когда им доказываются самые элементарные утверждения, например, что разность равна уменьшаемому, когда вычитаемое есть нуль, или что число не изменится, если к нему будет придано другое, а затем оно же вычтено, и пр. В дальнейшем изложении Лобачевский обосновывает строгим доказательством любое новое положение, опираясь в своих доказательствах на истины, принятые за очевидные или доказанные ранее. Так строится им дедуктивный курс алгебры, аналогичный по конструкции обычным курсам геометрии. Всю «Алгебру» Лобачевского надо рассматривать как распространенный и углубленный курс элементарной алгебры. В то же время этот курс содержит много особенностей, которые делают его оригинальным и выделяющимся по своей научной ценности из числа других, современных ему курсов алгебры.

Отметим некоторые из этих особенностей. В главе VIII Лобачевский дает способ получения окончательного решения системы линейных уравнений в виде развернутых детерминантов. В главе XI вопрос о действительных степенях и корнях Лобачевский соединяет с выводом формулы разложения бинома Ньютона и на основании этой формулы получает правило для извлечения корней любой степени. Рассматривая случаи дробных и отрицательных показателей бинома, Лобачевский приходит к бесконечным рядам и выясняет некоторые их свойства. В главе XII, посвященной изложению вопроса о мнимых степенях и корнях, выясняется и метод извлечения корней из единицы. В главе XIV Лобачевский вносит в свою «Алгебру» рассмотрение тригонометрических функций. Он мотивирует это так: «О тригонометрических функциях я также захотел поговорить, не выходя из пределов алгебры, ...потому, что не только решение уравнений требует такого пособия, но даже и учение о степенях осталось бы иначе неполным». [1] Возможно, что сюда присоединились и другие соображения Лобачевского, которые изложены им в «Обозрении преподавания чистой математики на 1825—26 гг.». Там он говорит: «Геометрические рассмотрения до тех пор необходимы в начале тригонометрии, покуда они не послужат к открытию отличительного свойства тригонометрических функций и которое заключается в значе-

[1] Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч., т. 4, с. 26.

нии синуса суммы двух углов, определяемого помощью синусов и косинусов сих углов порознь. Отсюда делается тригонометрия совершенно независимой от геометрии и имеет все достоинства анализа». Интересно то, что в основе изложения вопроса о тригонометрических функциях у Лобачевского лежит понятие о показательных функциях, то есть он исходит из формул Эйлера, откуда затем аналитическим путем получает и все основные тригонометрические соотношения.

Аналитический подход к изложению тригонометрии дает возможность под аргументом разуметь любую величину. Освобождая тригонометрию от геометрии, мы тем самым даем возможность применять ее методы в вопросах самого различного характера, рассматривая геометрические приложения тригонометрии как один из частных случаев. Поэтому идеи Лобачевского в отношении тригонометрии являются весьма ценными для развития нашей современной методики тригонометрии.

Большой интерес представляет заключительная статья последней главы «Алгебры», в которой Лобачевский дает метод приближенного решения уравнений, часто несправедливо именуемый методом швейцарского математика *Карла Греффе* (1799—1873). Иногда открытие этого метода приписывается также бельгийскому математику *Жоржу Данделену* (1794—1887), приведшему ранее Лобачевского некоторые теоретические соображения, исходя из которых можно было бы подойти к определению корней уравнений, но не сам метод. Между тем Лобачевский, исходя из совсем других теоретических оснований, не только сумел подойти к решению вопроса, но и дал метод, которым сразу можно воспользоваться для конкретного вычисления корней.

Та строгость понятий, в особенности понятий, лежащих в основе той или иной математической науки, которой придерживался Лобачевский в своих лекциях по элементарной математике, в не меньшей степени характерна и для его трудов по математическому анализу. В статьях «Об исчезании тригонометрических строк» (1834) и «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функции от весьма больших чисел» (1835) Лобачевский заостряет внимание на кардинальных понятиях математического анализа и, уточняя эти понятия, дает такие толкования, которые далеко опережают идеи его западных современников, относящиеся к этой области. Именно в этих трудах Лобачевский уточняет понятие о функции, ее дифференцируемости и непрерывности.

Если во времена Лобачевского функция рассматривалась как переменная величина, изменения которой, зависящие от изменения другой переменной, могли быть выражены аналитической записью, то у Лобачевского функция приобретает более широкое значение. Он говорит: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постоянно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и остаться неизвестной... Кажется, нельзя сомневаться в истине того, что все в мире может быть представлено числом, ни в справедливости того, что всякая в нем перемена и отношение выражаются аналитической функцией. Между тем обширный вид теории допускает существование зависимости только в том смысле, что числа, одно с другим в связи, принимать как бы данными вместе».[1] Таким образом, Лобачевский дал то определение функции, которое обычно несправедливо приписывают *П. Дирихле* (1805—1859), несмотря на то, что Дирихле дал свое определение лишь в 1837 г.

По вопросу о непрерывности и дифференцируемости функций Лобачевский высказал глубокие соображения, которые опередили идеи его современников на десятилетия и приемлемы и в наше время. Так, именуя «постепенностью» непрерывность и «непрерывностью» — дифференцируемость, Лобачевский первый строго разграничил эти понятия и дал им правильное толкование. Он говорит: «Во всякой аналитической функции обращать должно внимание на постепенность и непрерывность. В сочинении моем об исчезании тригонометрических строк я доказывал необходимость этого различия, называя функцию постепенною, когда приращения в ней уменьшаются до нуля вместе с приращением переменного x; непрерывной — когда содержание двух этих перемещений с их уменьшением переходит нечувствительно в новую функцию, которая будет, следовательно, дифференциальным множителем. Интегралы должны быть всегда разделены так на промежутки, чтобы элементы под знаком каждого интеграла сохранили постепенность и непрерывность».[2]

Вся научная и педагогическая деятельность Н. И. Лоба-

---

[1] Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч., т. 4, с. 43—44.
[2] Там же, с. 130—131.

чевского протекала в строгом соответствии с выработавшимся у него материалистическим мировоззрением, с которым мы можем отчасти ознакомиться, если обратимся к тем высказываниям философского характера, которые встречаются в научно-математических и методических работах Лобачевского.

Для того чтобы понять, откуда могли возникнуть и под каким влиянием окрепли основные убеждения Лобачевского, надо вспомнить, что он жил в ту эпоху, когда уже появилась и расцвела русская самобытная материалистическая философия, которая пустила глубокие корни в научной мысли России и проникла в творческие работы математиков. Лобачевскому, несомненно, были знакомы, например, материалистические труды Осиповского.

С другой стороны, надо принять во внимание и то, что юность Лобачевского и первые годы его педагогической деятельности протекали во времена, когда еще свежи были впечатления от буржуазной революции во Франции, когда в России готовилось восстание декабристов и когда передовая русская молодежь с восторгом воспринимала мысли французских философов-материалистов конца XVIII в.

Из высказываний Лобачевского можно увидеть, что в ранней молодости его мировоззрение развивалось главным образом под влиянием прогрессивной западной философии, и по мере того как вырабатывались и крепли его личные независимые убеждения, он уходил далеко вперед от этой философии и создал собственную материалистическую философию, созвучную с философией передовых, лучших людей русского общества.

Еще в молодости, в первые годы своей работы ректором Казанского университета, Лобачевский сумел найти практическое приложение своим убеждениям в деле восстановления университета после разгрома, учиненного ему Магницким. При этом надо учесть, что условия эпохи были очень неблагоприятны для воссоздания университета. Это было время жестокой реакции, наступившей вслед за подавлением восстания декабристов. Поэтому тем более ценны передовые идеи Лобачевского, который горячо ратовал за свободное развитие человеческой личности, утверждая, что каждый человек рожден для служения обществу.

Лобачевский был последовательным материалистом: он даже в абстрактных математических идеях видел их происхождение из окружающей природы, а не из построений человеческого разума, тогда как большинство европейских математиков, включая даже наиболее выдающихся (Якоби, Грасман и др.), придерживались идеалистических взглядов в вопросе о происхождении математических истин.

Материалистические убеждения Лобачевского нашли яркое выражение в его научных трудах по геометрии и в его «Обозрениях преподавания». В них Лобачевский не раз подтверждает свою мысль, что любая наука возникает из понятий, приобретенных человеком посредством чувств, то есть вырастает на реальной почве, а не может иметь в своих основаниях каких-нибудь врожденных понятий. Если человек создает математические выводы, не основывая их на данных опыта, а опираясь только на суждения, выработанные его разумом и не согласованные с природой, то результаты таких рассуждений бесполезны и расходятся с истинными выводами математики. «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука,— говорил Лобачевский,— приобретаются чувствами; врожденным — не должно верить». [1] Этим высказыванием Лобачевский вместе с тем наносил удар и кантовской идее о врожденности понятий о пространстве. «Все математические начала, которые думают произвести из самого разума, независимо от вещей мира, останутся бесполезными для математики, а часто даже и не оправдываемы ею». [2]

Как видно из сказанного, Лобачевский весьма последователен в своей обрисовке процесса познания человеком явлений жизни. Он признает, что все явления жизни воспринимаются нами прежде всего при помощи чувств, а затем в какой-то момент, когда требуются обобщения и руководствоваться одними чувствами становится уже невозможно, результаты чувственных восприятий подвергаются абстрактной обработке разума. Такое понимание процесса познания, естественно, приводит Лобачевского к правильной оценке синтетического и аналитического процессов в общей теории познания. В работе «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» Лобачевский писал: «В Математике следуют двум способам: анализу и синтезу. Отличительную принадлежность анализа составляют уравнения, которые служат первым основанием всякому

---

[1] Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч., т. 1, с. 186.

[2] Модзалевский Л. Б. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского, с. 204.

суждению и ведут уже ко всем заключениям. Синтез, или способ построений, требует того самого представления, которое соединено непосредственно с первыми понятиями в нашем уме. Главная выгода в анализе та, что здесь от уравнений идут всегда прямой дорогой к предположенной цели. Синтез не подчиняется каким-нибудь общим правилам, но с него надобно начинать по необходимости, чтобы, наконец, отыскав уравнения, достигнуть с тем вместе той черты, на которой все переходит уж в науку чисел».

Материалистические убеждения Лобачевского и созданная им теория познания, которой он руководствовался в своих научных работах и в педагогической деятельности до конца жизни, помогли ему разработать грандиозную научную систему геометрии, плодами которой широко пользуется современная наука, а в области педагогики и методики преподавания математики эта теория послужила фундаментом многим ценным идеям, нашедшим широкое применение в нашей советской школе.

Огромное значение научной педагогической деятельности Лобачевского сказалось и в том, что он явился создателем Казанской математической школы и Казанской школы математического образования.

Работами Лобачевского, в особенности его неевклидовой геометрией, и начинается в истории математики период современной математики.

Михаил Васильевич Остроградский

Михаил Васильевич Остроградский (1801—1861), один из величайших русских математиков XIX в., родился на Полтавщине (д. Пашенная) в семье помещика. Мальчик уже с ранних лет проявил большую пытливость, вдумчивость и стремление проникнуть в смысл происходящих вокруг него явлений. В особенности его интересовали действия механизмов, применявшихся при сельскохозяйственных работах, процессы измерений и пр.

Поступив в возрасте 9 лет в гимназию, Остроградский обучался в ней в течение трех лет.

Общий подъем патриотических чувств, вызванный переживаниями русского общества в годы Отечественной войны 1812 г., возбудил в юном Остроградском желание посвятить свою жизнь военной службе. Он по желанию отца, вполне сов-

М.В. ОСТРОГРАДСКИЙ

падавшему с его личным, вышел из гимназии с целью поступить в один из гвардейских полков для обучения военному делу. Этому отроческому желанию Остроградского осуществиться не удалось. Один из его дядей, некто Устинович, отговорил отца Михаила Васильевича от намерения направить сына на военную службу, указав на то, что при большой любознательности Миши ему гораздо полезнее и интереснее будет обучаться в университете. Благоразумный совет был принят, и Остроградского направили в Харьков для подготовки к поступлению в Харьковский университет, куда он и поступил осенью 1816 г.

Обучаясь на физико-математическом отделении Харьковского университета, Остроградский преодолел свое прежнее увлечение военным делом и занялся математическими науками с таким усердием, проявил в этом деле такое упорство и такие способности, что поразил своих учителей необыкновенными достижениями. С тех пор и в течение всей жизни Остроградский неизменно и с увлечением работал над вопросами математического характера.

В 1820 г. Остроградский получил аттестат об окончании университета и следующий год посвятил исключительно закреплению полученных знаний, а затем решил вновь поступить на последний курс университета для более углубленной проработки математических дисциплин.

Ректором Харьковского университета в то время был Т. Ф. Осиповский. Философские идеи Осиповского, особенно его идеологическая борьба с кантианством, увлекали юношество, и немудрено, что среди студенческой молодежи Харьковского университета материалистическая философия заняла почетное место. Одним из приверженцев этой философии стал и молодой Остроградский. С этих пор во всех работах Остроградского материалистические идеи являлись тем плодотворным началом, которое делало эти работы жизненно необходимыми и стимулировало творческую деятельность Остроградского.

После вторичного завершения курса университета Остроградский ввиду выдающихся успехов, проявленных им в математических науках, был представлен к утверждению за ним ученой степени кандидата математических наук. Однако в результате острой идеологической борьбы в Харьковском университете между представителями реакционной идеалистической философии и последователями материалистической философии, во главе которых стоял ректор Осиповский, дело неожиданно осложнилось. Профессор философии Харьковского университета *Дудрович*, будучи представителем крайне идеалистического направления в философии, опротестовал представление Остроградского Советом университета и приложил к протоколу заседания Совета свое особое мнение, в котором возражал против производства Остроградского в кандидаты наук, приводя в качестве одного из мотивов то, что «Остроградский не слушал богопознания и христианского учения»[1]. Попечитель Харьковского учебного округа Карнеев и министр Голицын главное внимание обратили на особое мнение Дудровича. Не считаясь с постановлением Совета университета, министр не только запретил представлять Остроградского к ученой степени, но даже предписал задержать его университетский аттестат впредь до пересдачи заново всех экзаменов. Это предписание мотивировалось тем, что Остроградский закончил университет в ускоренные сроки, не предусмотренные общим университетским положением.

Остроградский не согласился на такое унизительное предложение и, лишившись вследствие этого права продолжать научную работу в России, вынужден был покинуть родину и искать возможности для продолжения своих успешно начатых творческих исканий за границей. Он уехал в Париж, являвшийся тогда центром математической мысли Западной Европы.

В Париже Остроградский прилежно посещал лекции по физико-математическим наукам в Сорбонне и в Collège de France. Блестящими дарованиями он вскоре привлек внимание своих профессоров — знаменитых французских математиков: Лапласа, Фурье, *Ампера* (1775—1836), *Пуассона* (1781—1840), Коши и других и с некоторыми из них по-дружески сблизился. Благодаря этому у него появилась возможность ознакомиться со всеми научными проблемами, волновавшими в те времена представителей физико-математических наук. Вскоре Остроградский и сам стал проявлять большую самостоятельность в разрешении этих проблем. Он работал в области математической физики, аналитической и небесной механики, а также и над вопросами чистой математики, необходимыми для наиболее успешного решения проблем прикладной математики.

Ранние работы Остроградского относятся к теории распространения волн, к теории теплоты и приложениям теории главных значений интегралов от функций, обращающихся в бесконечность между пределами интеграла.

Еще в 1825 г. Коши дал лестный отзыв о работе Остроградского в области интегрального исчисления, а в 1826 г. широкую известность в кругах ученого мира получила работа

[1] Здесь уместно подчеркнуть, что Остроградский был последовательным атеистом. Он говорил: «Следует верить лишь в доказанные вещи. Но мы не можем доказать существование высшего существа, таким образом, мы не должны верить в бога». **(Примеч. В. Д. Чистякова.)**

Остроградского «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне», представленная им Парижской академии наук. В этом мемуаре Остроградский дает определение весьма малого волнообразного движения массы воды, заключенной в бассейне цилиндрической формы с круглым горизонтальным дном.

Своими работами в области математической физики и интегрального исчисления Остроградский завоевал имя крупного ученого. Поэтому когда он в конце 1827 г. вернулся на родину, то, несмотря на то, что был взят под негласный надзор полиции, очень скоро занял подобающее ему место в ученом мире России. В декабре 1828 г. Академия наук избрала его адъюнктом по прикладной математике; в 1830 г. он был уже экстраординарным академиком, а через год — ординарным, причем с 1855 г. ему были поручены обязанности ординарного академика по чистой математике.

Его дальнейшие работы в области чистой и прикладной математики принесли ему мировую известность: он стал членом Туринской, Римской и Американской академий наук, а также членом-корреспондентом Парижской академии наук и приобрел другие почетные научные звания.

Высшие специальные учебные заведения считали большой честью видеть Остроградского в числе своих профессоров, и он читал в разное время лекции в офицерских классах Морского кадетского корпуса, в Институте инженеров путей сообщения, в Главном педагогическом институте и в Главном инженерном и артиллерийском училищах.

Научные труды Остроградского касались главным образом вопросов математической физики, математического анализа, механики и небесной механики. Однако им было написано несколько статей и по теории вероятностей, а также три работы, связанные с вопросами преподавания в школе.

Работая в области математической физики, Остроградский явился пионером этого дела в России, и первоначальным развитием эта отрасль науки в России обязана исключительно ему. Важнейшие мемуары Остроградского, посвященные математической физике, относятся к теории упругости, к теории теплоты и пр. Большую известность получил его курс небесной механики, о котором дали блестящие отзывы *Д. Араго* (1786—1853) и С. Пуассон.

В курсе механики Остроградский установил в самом общем виде начала возможных перемещений и принцип наименьшего действия, разработанный им независимо от Гамильтона.

В методах вариационного исчисления Остроградский добился более общих результатов, чем те, которые были достигнуты западными математиками. В одном из своих трактатов по этим вопросам Остроградский вывел в самом общем виде формулу для перехода от интегралов высшей кратности к интегралам низшей кратности, то есть получил формулу, для которой встречающиеся в анализе формулы Гаусса, *Грина* (1793—1841) и *Стокса* (1819—1903) являются лишь частными случаями.

В области интегрального исчисления Остроградский получил много полезных выводов и обобщений; в частности, он занимался вопросом о возможности представления интеграла от рациональной функции в виде алгебраической или логарифмической функции и попутно получил формулу для разложения интеграла рациональной дроби на две части, из которых одна представляет алгебраическую функцию, а другая — интеграл от дроби с простыми корнями в знаменателе; эта формула именуется формулой Остроградского — Эрмита и часто входит в элементарные учебники математического анализа.

В связи с работами Остроградского по исследованию алгебраических функций следует упомянуть большой курс лекций по алгебраическому и трансцендентному анализу, читанный им для слушателей офицерских классов Морского кадетского корпуса. В этом обширном труде Остроградский дал прекрасное изложение высшей алгебры и теории чисел, причем в нем были учтены все последние достижения в области этих наук, известные в то время. Здесь же Остроградский дал точное определение алгебраической функции.

Остроградский написал также несколько работ по теории вероятностей, внесших ценный вклад в эту отрасль математических наук.

Проводя большую научную работу, Остроградский всегда находил время и для вопросов педагогического и методического характера. Работая в военных учебных заведениях, Остроградский состоял там главным наблюдателем по математическим дисциплинам. Под его председательством собиралась комиссия для обсуждения способов преподавания математики, для составления программ, а также для проведения экзаменов и пробных лекций, проводившихся лицами, желавшими получить звание преподавателей математических дисциплин. Остроградским создан и ряд методических работ. Так, он совместно с французским математиком *Исааком Августом Блюмом* написал брошюру о преподавании в средней школе. Авторы брошюры отрицательно относились к тому, что в средней школе преподавание большинства дисциплин строилось на абстрактных понятиях, они писали: «Учащиеся должны по возможности самостоятельно приобретать понятия о фигурах, счете, весах и мерах, простейших машинах, физических и химических свойствах тел. При школах необходимо организовать небольшие мастерские и лаборатории, где ученики могли бы лепить, рисовать, строить фигуры, учиться обращению с несложными приборами и т. п., лишь когда учащиеся приобретут некоторые сведения таким наглядным путем, можно приступить к систематическому преподаванию точных наук».

Остроградским написаны также следующие методические работы: «Конспект тригонометрии» и «Руководство начальной геометрии».

В «Конспекте тригонометрии» Остроградский подошел к определению тригонометрических величин исходя из отношения сторон прямоугольного треугольника. Этот ценный методический прием, впервые примененный Остроградским, в начале XX в. встречается в работах казанского математика *Н. П. Кильдюшевского*, а ныне принят в учебнике тригонометрии *А. Ф. Берманта* (1904—1959) и *Л. А. Люстерника* (род. 1899).

«Руководство начальной геометрии» является довольно оригинальным по замыслу. В нем Остроградский пытался приблизить метод изложения геометрии к методам изложения аналитических частей математики. Он писал: «Сочинение это отличается от других руководств по той же науке развитием основных начал, порядком теорем и способом доказательств. Автор имеет в виду приблизить изложение геометрии к способам, употребительным в других частях математики, а потому разместил предложения в порядке, который показался наиболее соответствующим предложенной цели. Некоторые предложения доказаны способом аналитическим и без пособия фигур, то есть дан алгебраический характер только некоторым частям геометрического изложения» [1].

---

[1] Крокотов А. И., Марон И. А. М. В. Остроградский и его педагогическое наследство. М., 1961, с. 126.

Хотя выраженные в «Руководстве...» взгляды Остроградского на геометрию и на способ ее изложения представляют значительный научный интерес, сам учебник не нашел практического применения, так как оказался слишком отвлеченным для учащихся, приступающих к изучению геометрии. В нем нарушались принципы наглядности и практической приложимости, в пользу которых сам Остроградский высказался в брошюре о преподавании в школе.

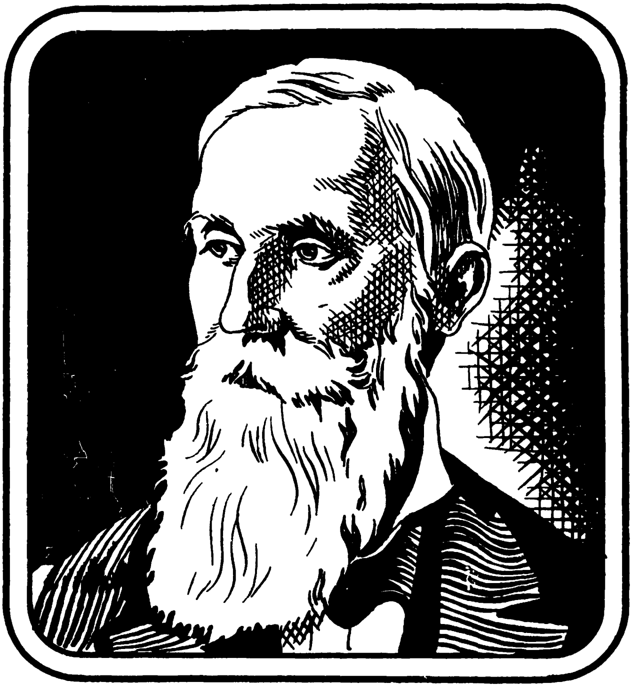
Более столетия прошло со дня смерти Остроградского, а его научные и методические идеи до сих пор служат предметом тщательного изучения для советских ученых, так как Остроградский своим творчеством обогатил науку огромным запасом новых идей, поставил ряд задач и некоторые из них не решены до сих пор.

Пафнутий Львович Чебышев

Во второй половине XIX в. из среды русских математиков выделился своими оригинальными трудами, оставившими неизгладимый след в истории развития математических наук, П. Л. Чебышев.

Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) принадлежит к старинной дворянской семье. Родился он в сельце Окатово Боровского уезда Калужской губернии. Закончив в 1841 г. курс Московского университета, Чебышев получил степень кандидата математических наук. В 1843 г. он сдал магистрские экзамены и в 1845 г. защитил диссертацию на степень магистра, представив в качестве диссертации сочинение «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». Эта диссертация давала изложение основных законов теории вероятностей без применения высшего анализа, путем использования лишь элементарной алгебры и простейших сведений из теории рядов.

В 1847 г. Чебышев начал работать в Петербургском университете в качестве адъюнкта, а в 1849 г. защитил докторскую диссертацию на тему «Теория сравнений» и ему была присвоена степень доктора математики и астрономии. Работу в Петербургском университете Чебышев не покидал до 1882 г., совмещая ее с работой в других учебных и научных заведениях. С 1853 г. он служил в Академии наук сначала адъюнктом, затем с 1856 г. экстраординарным, а с 1859 г. ординарным академиком.



П.Л. ЧЕБЫШЕВ

Вся научная деятельность Чебышева основывается на его материалистическом мировоззрении, а потому она тесно связана с практическим применением разрабатываемых им теорий.

В работе «Черчение географических карт» Чебышев пишет: «Науки математические в самой глубокой древности обращали на себя особенное внимание; в настоящее время они получили еще более интереса по влиянию своему на искусство и промышленность. Сближение теории с практикой дает самые благоприятные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных. Несмотря на высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и, таким образом, вызывает на изыскание совершенно новых метóд. Если теория много выигрывает от новых приложений старой метóды или новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метóд, и в этом случае наука находит верного руководителя в практике». [1]

Чебышев в научных изысканиях более всего интересовался именно теми вопросами, которые имеют непосредственное приложение в практической деятельности и в то же время применимы для разрешения теоретических проблем. У него с юности проявилось влечение к изобретению и построению различного рода механизмов. Это влечение еще более усилилось и получило твердую теоретическую базу с 1851 г., когда Чебышев принял на себя преподавание практической механики в Царскосельском лицее.

Теорию изобретенных им механизмов, по преимуществу основанных на принципе шарнирных соединений рычагов, Чебышев изложил в ряде своих сочинений. Одной из первых работ такого рода была «Теория механизмов, известных под именем параллелограммов».

К числу основных задач, которые разрешались Чебышевым при создании механизмов, принадлежала задача преобразования криволинейного движения в прямолинейное. «Параллелограммы» Чебышева не давали точного решения этой задачи, но неточности в системе Чебышева были столь незначительны, что не играли никакой роли в практических приложениях, а потому созданные им механизмы были вполне пригодны для замены точных механизмов, обладающих более сложной конструкцией. Чебышевым изобретено большое число самых разнообразных механизмов, применение которых давало экономию труда и времени при выполнении работы, для которой они предназначались. К числу наиболее замечательных из

---

[1] Чебышев П. Л. Избранные математические труды. М., 1964, с. 160.

них принадлежит, например, арифмометр, по конструкции бывший лучшим в Европе; а из приборов, основанных на принципе перехода от криволинейного движения к прямолинейному, особенно интересны самокатное кресло, сортировалка, стопоходящая машина, гребной механизм, линейка для измерения кривизны дуг, лекало для черчения дуг большого радиуса, койка для морских кораблей и др.

Сооружение подобных механизмов требовало развития механики и изобретения новых методов, которые основывались на вопросах максимума и минимума. Поэтому подобные вопросы и являлись предметом особых исследований Чебышева. В результате им создана особая теория функций, наименее отклоняющихся от нуля, и построено несколько замечательных полиномов в интервале от $-h$ до $+h$; наиболее известным из них является полином вида

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2^{n-1}} [(x + i\sqrt{1-x^2})^n + \\ + (x - i\sqrt{1-x^2})^n] = \frac{1}{2^n} [x^n + C_n^2 x^{n-2}(x^2-1) + \\ + C_n^4 x^{n-4}(x^2-1)^2 + \ldots].$$

Здесь индекс n указывает степень полинома. Придавая различные натуральные значения этому индексу, мы можем получать полиномы различных степеней, причем каждый из них будет наименее отклоняющимся от нуля из всех полиномов этой степени.

Какие же полиномы называются наименее отклоняющимися от нуля? Для пояснения этого вопроса рассмотрим частный случай — полином второй степени. Любой полином второй степени представляется в виде ax^2+bx+c. Если строить график этого полинома, то есть график функции $y=ax^2+bx+c$, то в зависимости от величины коэффициентов a, b и c будут получаться различные параболы. Рассматривая графики парабол в определенном сегменте, например в сегменте $(-1, +1)$, мы будем получать в нем отрезки кривых, причем точки этих кривых в пределах указанного сегмента, конечно, расположатся на разных расстояниях от оси абсцисс. Тот полином (из имеющих коэффициент при высшей степени x, равный единице), максимальное отклонение которого в сегменте $(-1, +1)$ от оси абсцисс будет минимальным, то есть менее, чем у всех других полиномов второй степени, и является полиномом этой степени, наименее отклоняющимся от нуля. Аналогично можно представить и получение полиномов высших степеней, наименее отклоняющихся от нуля. Частными случаями полиномов Чебышева будут следующие:

$$T_1(x) = x;\ T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2};\ T_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x;$$

$$T_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{3} \text{ и т. д.}$$

Такой полином n-й степени, то есть $T_n(x)$ в сегменте $(-1, +1)$ обращается в нуль ровно n раз и по величине колеблется между $-\frac{1}{2^{n-1}}$ и $+\frac{1}{2^{n-1}}$, в то же время отклонения от нуля других многочленов той же степени будут больше. Полиномы Чебышева имеют большое значение в развитии современного анализа.

Не меньшее значение в развитии математических наук имеют и труды Чебышева в области теории чисел, в частности его работы, относящиеся к вопросу о простых числах.

Еще со времен Евклида многие крупные математики интересовались вопросом о распределении простых чисел среди других чисел натурального ряда. Евклидом было доказано существование бесконечного множества простых чисел. В дальнейшем над проблемой распределения простых чисел работали Эйлер, *Лежандр* (1752—1833), Дирихле и другие математики, но все же значительных результатов для ее разрешения получено не было. Чебышев в своих классических трудах по теории чисел «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» и «О простых числах» дал много замечательных выводов по вопросу о распределении простых чисел. Так, им дан закон, выражающий асимптотической формулой число простых чисел, меньших любого данного числа. Вот эта формула:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x},$$

где x — число, для которого определяется количество простых чисел, меньших этого числа x. Формула называется асимптотической потому, что для малых значений она дает недостаточно точные ответы, но по мере возрастания числа x погрешности в показаниях формулы делаются относительно меньше и меньше.

Среди многочисленных выводов Чебышева относительно простых чисел находится доступное для практической проверки утверждение: «Между всяким данным числом и его удвоением находится по крайней мере одно простое число».

Чебышев также внес большой вклад в развитие теории вероятностей, математического анализа и теории интерполяций. Во времена Чебышева теория вероятностей в России впервые приняла характер науки, имеющей значительные приложения в экономической жизни народа. Первые шаги в этом направлении были сделаны замечательным русским математиком *В. И. Буняковским* (1804—1889), который в своих трудах «Опыт о законах смертности», «Таблицы смертности и народонаселения России» и «Антропологические исследования» установил основные положения, на которые опирался при применении теории вероятностей к статистике и страховому делу. Что касается Чебышева, то уже первые его работы, написанные после окончания университета, были посвящены вопросам теории вероятностей. В этой области Чебышевым был выработан специальный оригинальный метод, пользуясь которым он дал элементарные выводы важнейших законов теории вероятностей.

Вопросам теории вероятностей у Чебышева посвящен ряд трудов, из которых наиболее значительными надо считать «О средних величинах», «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей», «О двух теоремах относительно вероятностей» и др. Среди других выводов по теории вероятностей Чебышев сформулировал одно из основных ее положений, так называемый «закон больших чисел». Суть этого закона состоит в том, что если случайные величины иногда практически принимают значения, сильно уклоняющиеся от их среднего значения, то среднее арифметическое большого числа случайных величин имеет малые отклонения, то есть имеет большую вероятность принимать значения, очень близкие к среднему.

Весьма велико как теоретическое, так и прикладное значение работ Чебышева по теории вероятностей, в особенности в артиллерии, технике и естествознании.

Очень важны исследования Чебышева и в области математического анализа. В частности, развивая идеи Абеля и других математиков, Чебышев разрешал трудные задачи об интегрировании в конечной форме эллиптических интегралов. Ему удалось также доказать, что неизвестные еще в XVIII в.

три случая интегрирования дифференциальных биномов являются единственными, когда интегрирование выполняется при помощи алгебраических и логарифмических знаков. Эти случаи интегрирования дифференциальных биномов и вошли во все элементарные курсы интегрального исчисления под именем чебышевских подстановок.

Исследования Чебышева в области создания механизмов и его труды по теории функций, наименее отклоняющихся от нуля, как нельзя лучше отвечали его стремлению приблизить математику к практическим целям. В этом смысле им много сделано для практического приближенного вычисления функций. В сущности, вопрос о функциях, наименее отклоняющихся от нуля, явился лишь частным случаем работы Чебышева над приближенным выражением функций с помощью полиномов. Так, широкой известностью пользуются работы Чебышева по созданию интерполяционных формул, имеющих большое практическое значение.

Идея приближенного выражения функций отразилась у Чебышева и в ряде его работ прикладного характера: «О построении географических карт», «О кройке одежды» и др. Работа «О кройке одежды» имеет тесную связь с теорией построения механизмов. Подобно тому как механизмы создаются из прутьев, длина которых неизменна, а изменяются углы наклона между ними, так и при выделке платьев длины нитей остаются неизменными, а изменяются углы между нитками утка и основы. Связывая вопросы кройки с теорией поверхностей, Чебышев установил основные принципы, по которым должны строиться кривые разрезов материи для создания оболочки, в которую должно быть облечено, хотя бы приближенно, но с наименьшим отклонением, одеваемое тело.

Через всю многообразную научную деятельность Чебышева проходила одна общая идея: дать людям возможность применить глубокие математические теории к практике и научить их тому, «как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды».

Содержание работ Чебышева не являлось случайным, а было подсказано ему запросами времени. Чебышев жил в тот век, когда развитие машинной техники предъявляло математике новые требования. Вращательное движение, уже давно вошедшее в технику, особенное значение приобрело после создания паровой машины. Современник Чебышева, теоретик по созданию механизмов и машин, немецкий ученый *Франц Реле* охарактеризовал свою эпоху как такую, в которой «все вращается». Естественно, что появилась необходимость преобразовывать круговые движения в иные, в частности в прямолинейные, хотя бы приближенно, но с помощью механизма с небольшим числом звеньев, что и воплотилось в механизмах Чебышева. А создание механизмов привело к необходимости развития теории приближенных выражений функции; эта теория и содержала наиболее оригинальные идеи Чебышева.

В большинстве своих творческих работ Чебышев ставил совершенно новые для того времени задачи и вводил для их исследования собственные методы. Поэтому значение Чебышева в развитии математических наук состоит не только в тех теоретических и практических выводах, которые он передал нам в своих трудах, но также и в том, что им поставлен ряд новых проблем, которые возбудили интерес у следующих поколений.

Чебышев явился основателем новой математической школы, которую называют второй Петербургской математической школой (первой Петербургской математической школой считалась школа Л. Эйлера).

Научные заслуги Чебышева получили широкое признание еще при его жизни, и его имя стало известно всему культурному миру. Об этом мы можем судить по тем почетным наградам и званиям, которые были присвоены Чебышеву. Чебышев был вице-президентом Петербургской Академии наук, а в 1874 г. его избрали в иностранные члены Парижской Академии; в истории Парижской Академии это был всего лишь второй случай присвоения этого почетного звания русскому ученому [1].

В 1890 г. Чебышев был награжден высшим орденом Французской республики — орденом Почетного Легиона. Многие крупные иностранные математики, современники Чебышева, дали блестящую характеристику его научной деятельности. Так, французский математик *Шарль Эрмит* (1822—1901) писал Чебышеву, посылая ему в 1853 г. сообщение об избрании его в члены-корреспонденты Парижской Академии наук: «Эта дань уважения вполне заслуженная и должная, которая была воздана Вашим прекрасным открытиям в арифметике и Ва-

---

[1] Первым русским академиком в Парижской Академии был Петр I.

шим важным работам по теории интерполирования».[1] А в 1890 г. тот же Эрмит назвал Чебышева «гордостью науки России, одним из величайших геометров всех времен». Профессор математики в Стокгольме *Густав Миттаг-Леффлер* (1846—1927) считал Чебышева «одним из величайших учителей анализа всех времен». Не менее высокие отзывы о деятельности П. Л. Чебышева давали и русские академики *А. А. Марков* (1856—1922) и *Н. Я. Сонин* (1849—1915); они писали: «Труды Чебышева носят печать гениальности. Он изобрел новые методы для решения многих трудных вопросов, которые были поставлены давно и оставались нерешенными».

Чебышев до самой смерти в мыслях не расставался с вопросами математики. Еще накануне смерти он беседовал со своим учеником, впоследствии крупным математиком, *Д. А. Граве* (1863—1939) и сообщил ему правило приближенного спрямления дуг кривых линий.

Софья Васильевна Ковалевская

Говоря о русских математиках XIX в., известных своими достижениями и несомненно повлиявших на развитие математики и на уточнение ее основных положений, мы не можем обойти молчанием первую в России женщину-математика С. В. Ковалевскую.

Софья Васильевна Ковалевская (1850—1891) родилась в семье полковника артиллерии В. В. Корвин-Круковского. То, что ее детство и юность прошли в помещичье-дворянской обстановке, не помешало развитию тех исключительных способностей и черт ее характера, которые сделали Ковалевскую и значительным ученым, и революционно настроенным человеком. Передовые веяния разными путями проникали в эту дворянскую семью и встретили живой отклик у молодого поколения. Позднее, в дни расцвета творческих сил С. В. Ковалевской, эти веяния получили яркое отражение в том, что ее богато одаренная натура не ограничилась областью чистой математики. Ковалевская проявила себя и как писательница, создав несколько литературных произведений, которые поставили ее в ряды последовательных русских революционных просветителей шестидесятых годов прошлого столетия.

---

[1] Прудников В. Е. П. Л. Чебышев — ученый-педагог. М., 1950, с. 21.

С.В. КОВАЛЕВСКАЯ

Наряду с живым интересом к общественно-политическим событиям у Ковалевской развивался и интерес к науке.

С ранних лет в ней пробудилось чувство большой любознательности. Она была еще совсем девочкой, когда ее стали привлекать рассказы о различных научных открытиях и проблемах, которые ей приходилось слышать от своего начитанного дяди П. В. Корвин-Круковского. Хотя в этот период жизни ее детский рассудок еще не мог постигнуть самой сущности математических проблем, вроде квадратуры или существования асимптот, к которым кривая бесконечно приближается, но эти проблемы так увлекательно излагались ее дядей, что невольно оставляли неизгладимый след в душе нервной и впечатлительной от природы девочки. Когда Соне исполнилось лет 8, с ней стал заниматься общеобразовательными предметами приглашенный для этой цели домашний учитель *И. И. Малевич*. Он, как специалист по историко-филологическим наукам, при преподавании больше внимания обращал именно на эти науки и приходил в восхищение от замечательных успехов своей ученицы. Что же касается математики, то Малевич находил, что занятия идут нормально и даже хорошо, но никаких особенных дарований по этому предмету у своей ученицы не отмечал. Но когда девочке было уже около 12 лет, то один случай обратил на себя особое внимание учителя. Малевич предложил своей ученице изучить вопрос об отношении длины окружности к диаметру, который подробно разбирался в учебнике и был разъяснен самим Малевичем, на другой день девочка представила ему совершенно самостоятельные рассуждения. Несколько позднее произошел еще один случай, утвердивший окружающих в мнении о ее необычайных способностях к математике. Один из знакомых, преподаватель физики в Морском училище *Н. Н. Тыртов* подарил отцу девушки экземпляр своего учебника физики. Соня к большому удивлению родителей заинтересовалась этой книгой. Во время чтения она в тексте учебника встретила неизвестные ей тригонометрические функции. Изучая в книге применение этих функций, она разгадала их смысл и самостоятельно вывела простейшие формулы тригонометрии, чем вызвала восхищение Тыртова; он назвал ее «Новым Паскалем», желая этим сказать, что Ковалевская совершенно самостоятельно заново переоткрыла некоторые зависимости из тригонометрии, не зная этой дисциплины, подобно тому как Паскаль, будучи совсем ребенком, открыл первые теоремы геометрии.

С этих пор отец Ковалевской окончательно убедился в необыкновенных способностях дочери к математике, и потому было решено, что в дальнейшем ей следует заняться специальной подготовкой по математическим наукам.

В то же время окончательно установились и два преобладающих у Ковалевской непреодолимых стремления. Первое влекло ее к непосредственному участию в общественно-революционном движении, второе — к разрешению труднейших проблем из области математических наук. Первое стремление заставило ее идти по пути пропаганды наиболее передовых идей, оно сделало ее писательницей. Второе стремление направило ее к преодолению всех препятствий на пути завоевания женщиной права на науку. Идя по первому направлению, Ковалевская создала ряд беллетристических произведений, художественно отражавших современную ей эпоху и призывавших молодежь к борьбе за светлое будущее человечества. А второе направление привело ее к самым труднодоступным высотам математики и прославило ее как первую женщину, достигшую этих высот. Своими успехами в научном творчестве она пробила дорогу в науку другим женщинам мира и доказала, что и женщина может наравне с мужчиной бороться за познание сложнейших тайн окружающей человека природы.

1867 и 1868 гг. Ковалевская провела в Петербурге, где изучала математику под руководством одного из видных деятелей просветительного движения, преподавателя математики в Морском училище *А. Н. Страннолюбского*. Овладев основами высшей математики, Ковалевская не удовлетворилась этим. У нее появилось настойчивое желание приобрести систематическое университетское образование. Однако осуществить это во времена Ковалевской было весьма нелегко. В России женщины не допускались в высшие учебные заведения, а для обучения за границей необходимо было согласие родителей на выезд из России, что обычно являлось непреодолимым препятствием для большинства русских девушек. Выходом из положения служил распространенный среди прогрессивной молодежи способ: заключение фиктивного брака; то есть девушка вступала в церковный брак с каким-либо молодым человеком, который соглашался на то, что этот брак не будет фактическим, а послужит лишь для того, чтобы девушка могла выйти из-под опеки родителей и жить самостоятельно. Ковалевская нашла такого человека. Это был *В. О. Ковалевский* (1842—1883) — молодой ученый-палеонтолог и геолог, впоследствии сделавший крупные открытия в той научной области, которую избрал для своих исследований. Этот фиктивный брак был заключен в 1868 г., а позже, когда молодые люди поняли, что их научные и общественные стремления совпадают и что они во многом близки друг другу, возникла любовь и брак превратился в фактический.

В 1869 г. Ковалевская выехала вместе с мужем и старшей сестрой Анной за границу, но и здесь на первых порах ее ожидало разочарование: оказалось, что в Гейдельберге, куда устремилась Ковалевская в надежде устроиться студенткой университета, ей удалось включиться в слушание лекций только отдельных профессоров. Прослушав их лекции в течение трех университетских семестров, Ковалевская, имея уже большой запас знаний и умение приходить к самостоятельным выводам, решила подготовиться к докторской диссертации. Она направилась в Берлин, где главной ее целью было слушание лекций знаменитого математика Вейерштрасса. Однако и здесь университетский устав не давал возможности женщинам слушать лекции профессоров, а потому Ковалевской пришлось обратиться непосредственно к Вейерштрассу с просьбой допустить ее к нему на лекции. Когда Вейерштрасс ознакомился с прекрасными характеристиками ее математической работы, а также получил возможность лично убедиться в ее больших математических дарованиях, то он согласился заниматься с ней на дому частным образом, так как получить разрешение на посещение лекций было невозможно. Вскоре Ковалевская добилась таких больших успехов, что стала его любимой ученицей.

Под руководством Вейерштрасса Ковалевская работала четыре года. Однако в этой работе были значительные перерывы, во время которых Ковалевская посещала родину или выезжала в Париж и в Швейцарию. Один из таких выездов был особенно знаменательным. Это было в 1871 г. в тот период, когда свершалось одно из величайших политических событий XIX в.— в Париже образовалась Парижская Коммуна. Это событие ярко отразилось в жизни Ковалевской. Ее старшая сестра Анна еще в 1869 г. уехала из Гейдельберга в Париж, привлеченная туда желанием познакомиться с социальным движением и исследовать его, и быстро вошла в курс растущего в Париже революционного движения. Этому особенно способствовало то обстоятельство, что она вскоре вышла замуж за крупного французского революционера Виктора Жаклара. Сам Жаклар во времена Парижской Коммуны являлся весьма деятельным и ответственным руководителем Парижской Коммуны, а Анна Жаклар была членом президиума в Комитете бдительности Монмартра и членом Центрального Комитета союза женщин. В то время, когда в Париж можно было проникнуть только минуя фронт немецких войск и кольцо контрреволюционных версальцев, С. В. Ковалевская с мужем все же отважились на это предприятие, невзирая на огромную опасность, грозившую их личной свободе и даже жизни. Им удалось благополучно достигнуть цели. В Париже они пробыли более половины того времени, когда героическая Коммуна оказывала сопротивление контрреволюционным войскам. В эти грозные дни Ковалевская вместе с сестрой работала в госпитале, оказывая посильную помощь раненым коммунарам. Супруги Ковалевские выехали из Парижа за 9 дней до падения Коммуны. Получив во время своего пребывания в Берлине весть о падении Коммуны и о бесчинствах контрреволюционных войск, Ковалевские, обеспокоенные судьбой Жаклара, вернулись в Париж и там им удалось спасти от каторги Анну Жаклар, а ее мужа — от грозившего ему расстрела, подготовив ему побег из тюрьмы.

В результате научной работы, проделанной под руководством Вейерштрасса, Ковалевская создала ряд ценных работ математического характера. Одна из них «К теории уравнений в частных производных» привела Ковалевскую к решению одной из фундаментальных теорем теории дифференциальных уравнений. Эта теорема вошла в историю математики под названием теоремы Коши — Ковалевской. Ее различные обобщения были предметом изучения многих математиков, и до настоящего времени она часто используется в различных математических исследованиях. Другая работа Ковалевской была посвящена вопросу о форме кольца Сатурна. В ней уточнено решение задачи, поставленной еще ранее Лапласом. Наконец, в третьей работе Ковалевская дает упрощение вида интегралов Абеля. По ходатайству Вейерштрасса эти три работы были рассмотрены Геттингенским университетом, и Ковалевской была присуждена ученая степень доктора философии (1874). Эта степень приблизительно соответствует современной степени кандидата наук.

После получения степени доктора Ковалевская вернулась на родину, рассчитывая там найти работу, соответствующую ее знаниям и ученой степени. Однако для женщины путь к науке в России был в те времена закрыт. Ковалевской не удалось получить работы ни в одном высшем учебном заведении. Это обстоятельство, а также изменение материальных условий жизни, а в дальнейшем рождение у Ковалевской дочери временно отвлекли ее от математики. Она продолжительное время работала совсем в другой области, а именно занялась журналистикой и писала публицистические очерки. Но все же мысль Ковалевской невольно возвращалась к излюбленным ею вопросам математики. В конце 1879 г. на VI Съезде естествоиспытателей и врачей она сделала доклад, посвященный вопросу об абелевых интегралах, и этот доклад был одобрен присутствовавшими на Съезде крупными математиками.

В 1880 г. Ковалевская решила готовиться к защите в России диссертации на степень магистра. Но оказалось, что получение ученой степени для женщин было по-прежнему невозможно. Этому воспрепятствовал министр просвещения Сабуров, который издевательски заявил, что сама Софья Васильевна и ее дочка «успеют состариться прежде, чем женщин будут допускать к университету».

Разочаровавшись в своей мечте вести научную работу в России, Ковалевская вновь установила контакт с Вейерштрассом и в 1881 г. опять покинула Россию, возвратившись в Берлин, а затем поселилась в Париже. В 1883 г. ее постиг большой удар. Из России было получено известие о том, что ее муж, В. О. Ковалевский, покончил жизнь самоубийством.

Ковалевская вынуждена была вернуться в Россию для устройства личных дел. Здесь в 1883 г. она выступала с докладом на VII Съезде русских естествоиспытателей и врачей, проходившем в Одессе. Темой доклада послужил вопрос о преломлении света в кристаллах.

В конце того же года Ковалевская получила предложение вести курс лекций по математическим дисциплинам в Стокгольмском университете. Это предложение было ею принято. Летом 1884 г. она была назначена профессором этого университета и работала в нем до конца жизни, завоевав своими прекрасными лекциями большую популярность как среди студентов, так и среди научных работников. Одновременно с проведением академических занятий Ковалевская состояла членом редакции известного математического журнала «Acta mathematica», имеющего большое научное значение.

Стокгольмский период жизни С. В. Ковалевской ознаменовался в 1888 г. ее замечательной работой по вопросу о вращении твердого тела, которая принесла ей всемирную славу. Эта работа, носящая название «Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки», была выполнена Ковалевской, когда Парижская Академия объявила конкурс на лучшее научное исследование по вопросу о вращении. Авторы представленных на конкурс сочинений, согласно условию конкурса, скрывали свои имена под выбранными ими девизами, для того чтобы суждение конкурсной комиссии было беспристрастным. Премия была присуждена автору работы, скрывавшемуся под девизом «Говори, что знаешь, делай, что должен, будь, чему быть». Члены жюри, ознакомившись с этой работой, пришли к заключению, что автор ее сделал значительно больше, чем требовалось по условиям конкурса, а поэтому было решено увеличить ему премию с предполагавшихся 3000 франков до 5000. Когда решение было принято и узнали, что под девизом скрывается имя русской женщины-математика С. В. Ковалевской, это очень поразило конкурсную комиссию.

Работая далее над вопросами, затронутыми в конкурсном сочинении, Ковалевская получила еще некоторые дополнительные выводы к своей работе и за это была удостоена премии Шведской Академии наук.

Ценные исследования Ковалевской затронули ряд интересных вопросов из области механики и дифференциальных уравнений и послужили толчком к многочисленным исследованиям русских и французских ученых.

Замечательные научные работы С. В. Ковалевской поставили ее имя в один ряд с именами самых крупных математиков XIX в. Это дало возможность знавшим ее русским ученым поднять вопрос о выдвижении Ковалевской кандидатом в члены-корреспонденты Петербургской Академии наук. Надо отметить, что Ковалевскую еще ранее в Швеции собирались избрать членом Шведской Академии наук, но она отказалась от этой чести, полагая, что это может вызвать неприязнь к ней со стороны других ученых Швеции. Выдвижение в члены-корреспонденты Петербургской Академии прошло удачно, так как оно было предпринято по инициативе крупных ученых, состоящих членами Академии,— П. Л. Чебышева, *В. Г. Имшенецкого* (1832—1892) и В. И. Буняковского и поддержано другими выдающимися учеными. Так, в 1889 г. состоялось избрание первой русской женщины в Академию наук. Однако и после такого почетного избрания Ковалевская не смогла найти в России работу, соответствующую ее научной квалификации, а потому вынуждена была остаться в Стокгольме. Здесь в самом начале 1891 г. она скончалась от воспаления легких.

Научная деятельность С. В. Ковалевской была весьма плодотворна, и ее результаты до нашего времени играют большую роль при разработке математических вопросов и вопросов, связанных с проблемой вращения твердого тела.

Не меньшее значение для развития в России математики и науки вообще имеет и тот факт, что Ковалевская открыла для женщин дорогу в науку и, действуя личным примером, а зачастую оказывая и непосредственную помощь многим русским женщинам, стремившимся к знанию, добилась того, что число женщин, приобщившихся к борьбе за науку, стало расти.

Однако не только в этом заключается значение Ковалевской в развитии русского общества. Память о Ковалевской дорога нам и как память о человеке, содействовавшем развитию общественного самосознания русской интеллигенции. Это выразилось в литературном наследии, оставленном нам Ковалевской. Одним из ее главных литературных произведений была повесть «Нигилистка», в которой правдиво представлено революционное движение в России тех времен. Эта повесть является одной из лучших повестей на эту тему, но она была запрещена царским правительством и появилась в печати лишь в 1928 г. Кроме этой повести, перу Ковалевской принадлежит драма «Борьба за счастье», написанная ею совместно со шведской писательницей *Анной Шарлоттой Леффлер*, ценный автобиографический очерк «Воспоминания детства», а также ряд других более мелких литературных произведений и стихов.

В 1896 г. на средства, собранные русскими женщинами и другими организациями, на могиле Ковалевской был воздвигнут памятник, подножием которого служит сделанная из гранита могучая поднявшаяся волна.

Заканчивая обзор деятельности некоторых русских ученых XIX в., мы невольно приходим к мысли, что в их лице мы имели талантливых и гениальных мыслителей, внесших в мировую математику столько грандиозных идей, что благодаря им русская математика не только поднялась на один уровень с зарубежной, но в некоторых вопросах даже опередила ее.

ГЛАВА VI. КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В СОВЕТСКОМ СОЮЗЕ

МАТЕМАТИКА В СОВЕТСКОМ СОЮЗЕ

Несмотря на сословные, национальные и религиозные препятствия, которые ставило царское правительство на путях к вершинам науки, XIX и начало XX в. были эпохой, в которую русская наука завоевала на мировом фронте передовые позиции во многих пунктах. Со времен Н. И. Лобачевского, М. В. Остроградского, П. Л. Чебышева, С. В. Ковалевской, а также крупнейших математиков конца XIX в. А. А. Маркова, *Е. И. Золотарева* (1847—1878), *А. М. Ляпунова* (1857—1918) и многих других русская математика в решении наиболее значительных проблем, вставших перед математиками Европы, заняла ведущее положение. Однако социальное неравенство, искусственно поддерживаемое царским режимом, задерживало рост народных талантов, стремящихся к знанию, подавляло ростки пытливой мысли. И лишь после Великой Октябрьской социалистической революции, приведшей к уничтожению классов, к уравниванию в правах национальностей и раскрепощению женщин, открылась широкая дорога в науку для каждого.

В настоящее время в небывалых масштабах развивается промышленность страны и усложняется техника производства. Новые труднейшие проблемы строительства и технического оборудования промышленных предприятий предъявляют все возрастающие требования к математике, а потому усиливается, углубляется и усложняется работа ученых Советского Союза в области математической науки. По различным отраслям математических знаний в Советском Союзе работают не отдельные лица, как это часто бывало в прежние времена, а сотни и тысячи лиц и коллективов. В математике возникают новые проблемы, появляются новые ее разделы, и число ведущих математиков все увеличивается. Самое содержание математических вопросов значительно дифференцируется, и в настоящее время даже крупнейшие математики уже не могут полностью охватить весь комплекс знаний, относящихся к математике, и специализируются в определенных рамках какой-либо ее отрасли.

Советская математическая наука заняла передовые позиции в мировом масштабе по таким важнейшим разделам, как теория функций, теория вероятностей, дифференциальная геометрия, теория чисел, топология, алгебра (в широком смысле этого слова) и пр. Имена советских математиков *П. С. Александрова, И. М. Виноградова, Д. Ф. Егорова, М. В. Келдыша, А. Н. Колмогорова, А. Н. Крылова, М. А. Лаврентьева, Н. Н. Лузина, Н. И. Мусхелишвили, Л. С. Понтрягина, П. С. Урысона, С. П. Финикова, А. Я. Хинчина, Н. Г. Чеботарева* и многих других прочно вошли в науку, а их идеи стали ведущими в различных областях математики.

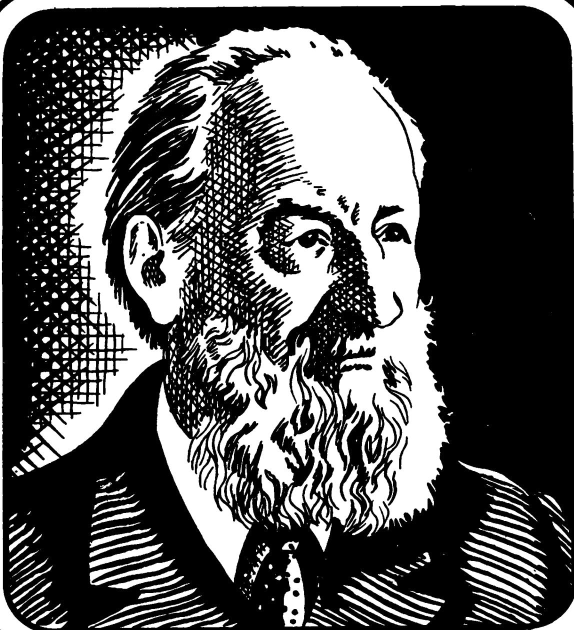
Характерно и количественное развитие математических знаний в смысле зарождения новых математических центров в тех областях и республиках, где до Великой Октябрьской социалистической революции даже грамотность народных масс стояла на низком уровне (Узбекистан, Казахская ССР и др.).

Математическая наука, развиваясь все более и более, постепенно достигла такого уровня, который далеко превосходит все то, что мы обыкновенно относим к области элементарной математики. Остановимся на работе некоторых выдающихся советских математиков.

Алексей Николаевич Крылов

Алексей Николаевич Крылов (1863—1945) родился в семье артиллерийского офицера. В 1884 г. он закончил курс Морского училища и поступил на службу, в компасное отделение Главного гидрографического управления, где и начал свою педагогическую и научную работу, главным образом по теории корабля. Уже в первом его научном труде «О расположении стрелок в картушке компаса» [1] проявилось стремление Крылова к разработке теории, которая давала бы непосредственное приложение к практике. В данном случае Крылов предлагал устройство компаса такой системы, при которой девиация [2] сказывалась бы менее всего. Такой стиль работы Крылова за-

[1] Картушка — подвижная часть компаса, указывающая страны света.
[2] Отклонение магнитной стрелки компаса от направления магнитного меридиана под влиянием магнитного поля корабля.



А.Н. КРЫЛОВ

метен и во всех его последующих многочисленных научных исследованиях.

В 1888 г. Крылов поступил на кораблестроительное отделение Морской академии, пройдя предварительно годичный практический стаж на судостроительном заводе. После окончания в 1890 г. курса Морской академии Крылов был оставлен при академии в качестве преподавателя математики и теории корабля. Преподавание курса механики и других наук математического цикла он в дальнейшем вел в других высших учебных заведениях: в политехническом институте, в институте инженеров путей сообщения и т. д.

За время своей почти полувековой работы в Морской академии Крылов создал большое число трудов по теории кораблестроения, разработал теорию устойчивости корабля, то есть способности корабля возвращаться к состоянию равновесия после вынужденного выхода из него под влиянием внешних сил, а также установил строго научную теорию качки корабля при волнении, его плавучести, непотопляемости и др. Эти работы доставили Крылову мировую славу и способствовали установлению приоритета русской науки в этой области знания.

Из области прикладных наук большое значение имеют в артиллерии работы Крылова по вопросу о продольных и поперечных колебаниях орудийных стволов во время выстрела, а также его исследования о вращательном движении артиллерийского снаряда при полете.

Многие работы Крылова посвящены воздухоплаванию. Так, известны его доклад «О значении формы управляемого аэростата, о фигуре и месте постановки на нем пропеллеров», очерк «О теории ракет» и др.

Все работы Крылова по прикладным наукам требовали от него постоянного соприкосновения с техникой вычислений и с самыми глубокими проблемами из области математики. Поэтому у него неослабный интерес к вопросам математики сохранялся в продолжение всего шестидесятилетнего периода его научной работы, и мы обязаны ему глубокими исследованиями и в этой области человеческого знания. Его научные труды по математике всецело опираются на те убеждения, какие выработались у него по отношению к этой науке. «Не следует,— говорил Крылов,— чтобы прикладное изучение математики сводилось к рецептуре или к умению пользоваться справочниками, ибо тогда оно сводило бы математику к орудию счета по готовым образцам и ее значение, как орудия исследования, утратилось бы... Надо помнить, что прикладная математика не самодовлеющая, что все свои методы, все основания для них она почерпает из строго логической чистой математики, которая идет непрестанно в своем философском строгом развитии» [1].

---

[1] Крылов А. Н. Прикладная математика и ее значение для техники. М.— Л., 1931, с. 15.

Крылов неустанно трудился над развитием теоретической базы математики, имея в виду ее приложения к практическим вопросам. Наиболее значительными его работами по математике можно считать труды «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах» и «Лекции о приближенных вычислениях».

Что касается первого из указанных сочинений, то уже самый заголовок вполне определяет его внутреннее содержание. В этом сочинении дается строго научное изложение теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с правой частью и уравнений высших порядков, а затем рассматриваются дифференциальные уравнения математической физики в частных производных. Эта работа снабжена множеством указаний к подробным решениям практических вопросов, связанных с явлениями физического характера, и к техническим вопросам судостроения и артиллерии.

«Лекции о приближенных вычислениях» Крылова являются трудом по практике вычислений. Этот труд до настоящего времени является по своим качествам непревзойденным руководством по практическим вычислениям ввиду того, что разработанная в нем стройная система практических вычислений в каждом отдельном случае проводится до конца и сопровождается полным разъяснением всех отдельных этапов счета; эти качества делают «Лекции ...» доступными для вычислителей-практиков.

Интерес и любовь к математике выразились у Крылова и в том, что он очень интересовался развитием математических идей, с большим удовольствием изучал классиков математики, переводил их сочинения и писал очерки их жизни. Так, им переведены на русский язык «Математические начала натуральной философии» Ньютона (с дополнениями, внесенными самим А. Н. Крыловым) и «Новая теория движения Луны» Эйлера. Им же написаны очерки жизни П. Л. Чебышева, Жозефа Лагранжа и Исаака Ньютона.

Всего А. Н. Крыловым написано более 100 научных работ.

Отличаясь большой изобретательностью, А. Н. Крылов создал много приборов, которые были введены в практику. Большинство этих приборов относится к оборудованию кораблей и к артиллерии, им же изобретена и первая в России машина для производства механического интегрирования.

За выдающиеся заслуги в области науки и техники Крылов был отмечен высокими званиями и наградами. Еще в 1916 г. ему за многочисленные научные труды и плодотворную практическую деятельность была присвоена степень доктора прикладной математики, а 5 марта 1916 г. он был избран ординарным академиком. За время Советской власти Крылов получил Государственную премию, три ордена Ленина, а в 1943 г. высокое звание Героя Социалистического Труда.

Кроме замечательного научно-технического наследия, Крылов оставил нам ряд автобиографических очерков, которые позволяют нам подробнее ознакомиться с научными исканиями и богатыми творческими идеями этого исключительно талантливого человека. Наиболее интересными из них являются написанные им незадолго до смерти «Мои воспоминания».

Иван Матвеевич Виноградов

Иван Матвеевич Виноградов (род. 1891) родился в селе Милолюб Великолукского уезда бывшей Псковской губернии в семье сельского священника. Получив среднее образование в реальном училище, Виноградов в 1910 г. поступил на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета, курс которого он закончил в 1914 г. Ввиду больших успехов в математических науках его оставили при университете для продолжения научной деятельности и в 1918 г. назначили доцентом в Пермский университет, где вскоре он стал профессором. С 1920 г. Виноградов перешел работать в Петроград и там вел лекции в различных высших учебных заведениях. В 1929 г. он получил звание академика и с 1932 г. выполнял ответственную научную работу, состоя директором Математического института им. Стеклова при Академии наук СССР.

Научная деятельность И. М. Виноградова сосредоточена главным образом на аналитической теории чисел, в которую он ввел совершенно новые методы исследований, позволившие этой отрасли математики получить в дальнейшем очень широкое развитие. Его книга «Новый метод в аналитической теории чисел» удостоена Государственной премии первой степени. В методе, развиваемом Виноградовым в этой книге, используются весьма деликатные математические понятия, и он труднодоступен для лиц, не обладающих специальными знаниями,

И. М. ВИНОГРАДОВ

но результаты применения этого метода представляют интерес даже для школьников.

Виноградов применил свой метод к решению двух исторических проблем, одна из которых носит название «проблемы Варинга», а другая — «проблемы Гольдбаха», над решением которых безуспешно трудились уже около двух столетий самые крупные математики. Метод Виноградова дал блестящие результаты.

Первая проблема сформулирована в 1770 г. английским математиком *Варингом* (1734—1798) и выражается так: «доказать, что всякое целое число N может быть представлено в виде суммы не более чем четырех квадратов». Например:

$$11 = 3^2 + 1^2 + 1^2;$$
$$29 = 5^2 + 2^2;$$
$$55 = 7^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2;$$
$$286 = 16^2 + 5^2 + 2^2 + 1^2.$$

В последующие годы было доказано, что всякое натуральное число может быть представлено не более чем восемью кубами, семнадцатью четвертыми степенями и пр., но в общем виде эту теорему доказал только Виноградов, и при этом ему удалось дать весьма точную оценку числа необходимых слагаемых. Граница для числа слагаемых была выражена величиной равной

$$n[3(\ln n + 11)],$$

где n — показатель степени слагаемых.

Вторая проблема связана с именем одного из первых академиков Петербургской Академии наук — уроженца города Кенигсберга *Христиана Гольдбаха* (1690—1764).

Эта проблема имела следующее происхождение. В письме к Л. Эйлеру, написанном в 1742 г., Гольдбах высказал предположение, что каждое натуральное число, большее шести, является суммой трех простых чисел. В своем ответе на это письмо Л. Эйлер сообщил, что, по его мнению, каждое четное число представляет сумму двух простых чисел, но что доказательства этого положения он не имеет. Из этого вытекает следствие, что всякое нечетное число может быть представлено как сумма трех простых чисел. Ввиду того что все попытки доказать это на первый взгляд простое положение не давали никаких положительных результатов, считалось, что оно недоказуемое при существующих в настоящее время математических средствах. Это и высказал на международном математическом конгрессе в Кембридже в 1812 г. немецкий математик профессор Геттингенского университета, специалист в области аналитической теории чисел — *Эдмунд Ландау* (1877—1938). Он заявил: «Проблема Гольдбаха превосходит силы современной математики». И он был прав: для доказательства проблемы Гольдбаха нужны были новые методы, которые и были предложены Виноградовым.

Проблема Гольдбаха была разрешена в 1937 г., когда Виноградов сумел показать, что для достаточно больших нечетных чисел теорема справедлива. При этом «достаточно большое число», согласно более поздним исследованиям математика *Бороздкина,* оказалось равным приблизительно числу, которое выражается так:

$$C = e^{e^{e^{41,96}}},$$

где $e = 2{,}71828...$ Если бы это число можно было записать в развернутом виде, то его запись обернулась бы вокруг земного экватора 100 миллионов раз.

Методы, введенные Виноградовым, прочно вошли в науку и используются многими советскими и зарубежными учеными в их теоретических исследованиях. За свои заслуги перед наукой И. М. Виноградов награжден двумя орденами Ленина и медалями.

Николай Григорьевич Чеботарев

Николай Григорьевич Чеботарев (1894—1947), обучаясь еще в младших классах Каменец-Подольской гимназии, проявил большой интерес к математике. Поступив на математическое отделение физико-математического факультета Киевского университета, он стал одним из наиболее талантливых учеников выдающегося алгебраиста Д. А. Граве. Чеботарев заканчивал курс университета уже в Саратове, куда был эвакуирован Киевский университет во время первой мировой войны. По окончании учебы Чеботарев был оставлен при университете. В 1921 г. он начал свою научно-педагогическую работу в Одессе, где и создал много глубоких по содержанию научных работ в области алгебры. В особенности высокую оценку в научном мире получила его работа во вопросу о бесконечности множества простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок группы Галуа. В дальнейшем эта работа послужила основой докторской диссертации Чеботарева, защищенной им в 1926 г. при Киевской Академии наук. В 1927 г. он был приглашен профессором в Казанский государственный университет, где и работал до конца жизни.

Казанский период жизни Чеботарева был временем наиболее высокого подъема его творческих сил. Им были проведены глубокие исследования по теории Галуа и создана так называемая теория резольвент для решения уравнений высших степеней. Резольвентой уравнения

Н.Г. ЧЕБОТАРЕВ

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

называется другое уравнение той же степени

$$y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_n = 0, \qquad (2)$$

где $x = c_0 + c_1 y + \ldots + c_{n-2} y^{n-2} + c_{n-1} y^{n-1}$.

Проблема, поставленная и разрешенная Н. Г. Чеботаревым, заключалась в том, чтобы кэффициенты уравнения (2) зависели от наименьшего числа параметров. Он первый указал подход к решению вопроса и разработал методы для дальнейшего развития теории резольвент.

Методы современной алгебры своим развитием во многом обязаны трудам Чеботарева по вопросам теории групп Ли, диофантовых приближений и теории целых аналитических функций. Следует также отметить его труды по исследованию расположения корней уравнения.

Работая в области научных изысканий с большим энтузиазмом, Чеботарев заражал им своих учеников, которые с большим успехом продолжали разработку его идей. Это способствовало тому, что около Чеботарева сплотился широкий круг молодых ученых, заинтересованных решением алгебраических проблем, и таким образом зародилась возглавляемая им алгебраическая школа, центром которой являлась кафедра алгебры Казанского университета, руководимая Чеботаревым.

Научную работу Чеботарев всегда сочетал с работой в области методики преподавания математических дисциплин. Хотя он и не имел печатных трудов, отражающих его взгляды на методику изложения математических дисциплин, но много работал по созданию учебников элементарной математики. Так, с 1939 по 1941 г. он возглавлял группу преподавателей по созданию учебника арифметики для школ взрослых. С особым интересом он работал с середины тридцатых годов до последних дней своей жизни над созданием руководства по элементарной геометрии. К сожалению, он не успел его завершить. Уже после смерти Чеботарева этот не вполне законченный труд был рассмотрен крупными специалистами и получил высокую оценку как прекрасный материал для создания школьного учебника.

Безвременная смерть Чеботарева прервала его исследования, имеющие большие научные и практические приложения.

Большие заслуги Чеботарева для развития математики и математического просвещения были высоко оценены партией и правительством Советского Союза еще при его жизни: он был награжден орденом Ленина и двумя другими орденами и медалью; кроме того, в 1929 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1943 г. ему было присвоено звание заслуженного деятеля науки РСФСР. За работы по проблеме резольвент Н. Г. Чеботарев был удостоен в 1947 г. (посмертно) Государственной премии первой степени.

Скажем еще несколько слов о некоторых современных советских математиках.

П.С. АЛЕКСАНДРОВ

Павел Сергеевич Александров

Павел Сергеевич Александров (род. 1896) — советский математик, с 1929 г. член-корреспондент Академии наук СССР, а с 1953 г. — академик, Герой Социалистического Труда (1969 г.), лауреат Государственной премии — родился в г. Богородске (ныне г. Ногинск Московской области). Закончил курс гимназии с золотой медалью. Окончив курс Московского университета в 1917 г., с 1921 г. П. С. Александров работал в нем сначала доцентом, а затем профессором. С 1932 г. он президент Московского математического общества. Является основателем Московской топологической школы. В начале своей научной деятельности получил много значительных результатов в области теории множеств, теории функций действительного переменного. Занявшись вопросами топологии, создал один из основных ее разделов — теорию бикомпактных пространств. Ныне П. С. Александров — глава советской топологической школы и широко известен не только в Советском Союзе, но и за рубежом. Он состоит иностранным членом-корреспондентом Берлинской академии наук, иностранным членом Американского философского общества в Филадельфии, членом Национальной академии наук в Вашингтоне (с 1947 г.), членом Геттингенской академии наук и других иностранных обществ.

Мстислав Всеволодович Келдыш

Мстислав Всеволодович Келдыш (1911—1978) — видный советский ученый в области механики и математики — родился в г. Риге. В 1931 г. он окончил курс Московского университета, с 1943 г.— член-корреспондент АН СССР, а с 1946 г.— академик. За теорию, расчет и разработку мер устранения вибраций на самолете и за исследования теории и методов расчета автоколебаний самолетных конструкций был дважды награжден Государственными премиями (в 1942 и в 1946 гг.). Основные его научные работы относятся к вопросам теории колебаний, аэродинамики, теории волн на поверхности тяжелой жидкости, удара о воду, приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, теории потенциала, конформных отображений и теории приближения функций комплексного переменного рядами полиномов. За огромные заслуги М. В. Келдыш был выдвинут на высокий пост президента Академии наук СССР (1961 г.) и занимал его до конца жизни.

Андрей Николаевич Колмогоров

Андрей Николаевич Колмогоров (род. 1903) — крупный советский математик — родился в г. Тамбове. В 1925 г. он закончил курс Московского университета, с 1929 г. работает в том же университете, с 1931 г. стал там профессором, а с 1939 г. он — академик АН СССР. Огромное количество его на-

М.В. КЕЛДЫШ

учных работ относится к различным областям математических знаний. В начале своей научной деятельности он много работал в области теории функций действительного переменного, где им получены значительные результаты по сходимости тригонометрических рядов, теории меры, обобщенного понятия интеграла и теории операций над множествами. Им много сделано и в области разработки математической логики. Очень большое значение имеют его работы по теории вероятностей, где, применяя теорию функций действительного переменного,

А.Н. КОЛМОГОРОВ

он решил ряд трудных проблем и построил систему аксиоматических обоснований теории вероятностей. В дальнейшем А. Н. Колмогоров развил теорию так называемых стационарных случайных процессов, которая была использована в работах по автоматическому регулированию. Его теоретические исследования помогли также развитию вопросов по теории стрельбы и статистических методов контроля массовой продукции. Обладая глубокими познаниями в области современной математики, Андрей Николаевич в то же время много внимания уделяет школьному преподаванию математики и активно участвует в создании учебников по этой дисциплине. Советский народ высоко ценит заслуги Андрея Николаевича, и он удостоен звания Героя Социалистического Труда (1969 г.) и является лауреатом Государственной премии (1941 г.). Научные труды А. Н. Колмогорова получили широкую известность не только в СССР: он является лауреатом премии Больцано (1963 г.), членом Польской академии наук, доктором Парижского университета, членом Национальной академии наук США.

Лев Семенович Понтрягин

Лев Семенович Понтрягин (род. 1908) родился в Москве. Еще учась в VI классе средней школы, он при взрыве примуса лишился зрения на оба глаза, но тем не менее продолжал учебу, в этом ему помогала мать. В школе его любимой дисциплиной была математика, и в выпускном классе он уже перешел к изучению основ высшей математики. В 1925 г. он поступил на физико-математический факультет Московского университета, где уже в 1927 г. профессор П. С. Александров привлек его к научной работе в топологическом семинаре. Окончив в возрасте 21 года курс университета, Понтрягин поступил в аспирантуру Московского университета, а по завершении ее в 1929 г. был допущен к чтению лекций в Московском университете, а в 1939 г. за выдающиеся заслуги был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР. В настоящее время Л. С. Понтрягин является ее действительным членом (с 1958 г.).

В топологии и теории непрерывных групп им достигнуты большие успехи, и он считается самым крупным (в международном масштабе) специалистом по топологической алгебре, то есть по совокупности вопросов, граничных между алгеброй и топологией.

За заслуги перед наукой Лев Семенович награжден тремя орденами Ленина, двумя другими орденами и медалями, а в 1941 г. ему присуждена Государственная премия.

Сергей Львович Соболев

Сергей Львович Соболев (род. 1908) — крупный советский математик и механик, член Академии наук СССР с 1939 г.,

Л.С. ПОНТРЯГИН

лауреат Государственной премии (1941 г.) — родился в Петербурге. Он еще учился в средней школе, когда обнаружились его замечательные способности к математическим наукам. Однако по окончании школы ему не удалось сразу поступить в университет, так как он не достиг еще возраста, достаточного для приема туда (ему было тогда 15 лет). Поэтому Соболев пошел в музыкальную студию. Лишь в 1924 г. он поступил в Ленинградский университет и сразу

С.Л. СОБОЛЕВ

начал упорно работать в области математических наук и изучать их не только в рамках университетских программ, но и самостоятельно, по специальной научной литературе. После окончания университета в 1929 г. Соболев упорно работал в области математической физики и сделал ряд самостоятельных открытий, которые имеют большое применение в сейсмологии, теории упругости и гидродинамике. Введенные им обобщения решения дифференциальных уравнений привели к увязке современного функционального анализа с классической теорией дифференциальных уравнений. Большое количество его работ посвящено динамике упругого тела. Им построена общая теория плоских волн. В его работах, касающихся теории упругости, заложена идея решения дифференциальных уравнений в частных производных, на основе которой он еще в 30-е годы открыл новый метод решения большого количества задач математической физики. Установленное им понятие решения дифференциальных уравнений с частными производными естественно увязано с понятиями о функции и ее производной.

В послевоенное время С. Л. Соболев много работал над вопросами вычислительной математики и первый применил для этой цели электронную технику, а также с новой точки зрения подошел к решениям задач математического анализа. Он явился одним из инициаторов создания Научного центра в Новосибирске, и ему поручено руководство Институтом математики Сибирского отделения Академии наук СССР.

Свою научную работу он всегда сочетает с педагогической и общественной деятельностью. Он занимает ряд почетных должностей, награжден семью орденами Ленина, двумя другими орденами и медалями.

* * *

Заканчивая на этом очень краткий очерк о некоторых выдающихся советских математиках, мы должны отметить, что подобных тружеников науки в области математики в Советском Союзе так много, что для описания их жизни и деятельности понадобилась бы не одна книга, а много томов, но нам кажется, что и указанных нескольких примеров достаточно для того, чтобы читатель мог понять, какую великую силу представляют наши ученые и как многообразна и полезна их работа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ [1]

Начало современного этапа в развитии математики характеризовалось глубокими изменениями во всех ее основных разделах: геометрии, алгебре и анализе.

Еще в первой половине XIX в. Н. И. Лобачевским и Яношем Больяй была создана новая, неевклидова геометрия. Ее идеи были смелы и неожиданны. С этого момента началось принципиально новое развитие геометрии, изменилось понятие того, что такое геометрия. Ее предмет и область применения стали быстро расширяться. В середине XIX в. немецкий математик Риман внес общую идею о неограниченности числа «пространств», которые может изучать геометр, и указал возможный их реальный смысл. Если прежде геометрия изучала только пространственные формы материального мира, поскольку они находили отражение в рамках евклидовой геометрии, то ныне предметом геометрии являются иные формы реального мира, сходные с пространственными, допускающие исследование на геометрическом материале. В самой евклидовой геометрии произошли большие изменения: в ней изучаются свойства несравненно более сложных фигур произвольных точечных множеств. Появляется также принципиально новый подход к самим исследуемым свойствам фигур. Выделяются отдельные группы свойств, которые подвергаются исследованию в отвлечении от других свойств, причем это отвлечение, это абстрагирование уже внутри геометрии порождает своеобразные ее разделы, являющиеся по существу новыми геометриями. Предметом рассмотрения геометрии служат все новые и новые пространства и их «геометрии»: пространство Лобачевского, проективное пространство, евклидовы многомерные пространства, пространство Римана, топологическое

[1] В этом кратком обзоре развития современной математики автор использовал материал статьи проф. А. Д. Александрова «Общий взгляд на математику» из книги «Математика, ее содержание, методы и значение», т. 1. М., 1956.

пространство и проч. И все эти новые понятия находят свое применение.

Коренные изменения в алгебре наметились также еще в XIX в. Если алгебра минувшего времени, развивая символический характер, оперировала главным объектом — числом, то современная алгебра распространила свою область на величины гораздо более общего характера, сохраняя формально свои операции, подобные тем, какие производились ранее только над числами. Свои операции современная алгебра производит и над векторами, и над движениями разного рода и т. д. (Мы уже можем говорить об обычных по характеру действиях над ними: сложении, умножении и т. п.) Таким образом, область алгебры значительно расширилась и объектами ее операций являются часто не числа и даже не величины.

Такого рода обобщения и расширение алгебраической области начались еще со времен Э. Галуа, а в настоящее время сильно разрослись методы ее применения в различных науках: геометрии, анализе, физике, кристаллографии и пр. Обширными разделами современной алгебры являются теория групп и линейная алгебра. Теория групп возникла из простейшего учения о симметрии, а в своем развитии получила большое практическое применение, в особенности в приложении к теории алгебраических и дифференциальных уравнений. Норвежский математик *Софус Ли* (1842—1899) распространил методы теории групп на проблему интегрирования дифференциальных уравнений.

Вся теория линейной алгебры опирается на понятие функции вида: $\Phi(x)=ax+b$. Исходя из этого понятия, строится вся система операций и создается основа для обоснования практических приложений в науке и технике.

В предыдущих очерках нам уже приходилось говорить о большой работе, проведенной учеными и философами над установлением и определением основных понятий математического анализа. Мы упомянем еще о работе немецкого математика *Морица Кантора* (1845—1919), в частности о его работе по установлению теории множеств, которая дала толчок к развитию многих других новых отраслей математики. Теория множеств оказала глубокое влияние на общий ход развития математики. Она явилась основой теории функций действительного переменного, топологии алгебры, теории групп, функционального анализа и пр. В особенности большое значение теория множеств имела и имеет для математического анализа.

В анализе развиваются новые разделы (например, теория функций действительного переменного). Эти новые разделы объединяются общим наименованием с о в р е м е н н ы й а н а л и з, а прежние достижения в области анализа сохраняют название к л а с с и ч е с к и й а н а л и з. Современный анализ в особенности обязан своим развитием французским математикам *Эмилю Борелю* (1871—1956) и *Анри Лебегу* (1877—1941) и советскому математику *Н. Н. Лузину* (1883—1952), давшему широкое развитие идеям теории функций действительного переменного.

Рассмотренные нами в одном из предыдущих очерков работы П. Л. Чебышева по вопросу о теории функций, наименее отклоняющихся от нуля, в дальнейшем развились в конструктивную теорию функций в трудах советского математика *С. Н. Бернштейна* (1880—1968).

Обоснование теории множеств привело к созданию еще одной области математики, которая сильно развивается за последнее время и составляет важную часть современной математики. Эта область математики, основанная на философских, исторических и логических началах, вошла в науку под именем математической логики и имеет большое практическое применение в науке и технике.

* * *

Автор не ставил своей целью охватить все новые области в развитии математики и не стремился подробно осветить детали развития современной математики, так как это потребовало бы больших дополнительных исследований и создания отдельной книги, а потому и завершает свою работу, ограничившись кратким обзором некоторых путей развития современной математики.

ПРИЛОЖЕНИЕ[1]

СОВЕТСКИЕ МАТЕМАТИКИ — ЛАУРЕАТЫ ЛЕНИНСКОЙ И ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРЕМИЙ

Благодаря трудам наших ученых советская наука шагнула далеко вперед и служит мощным орудием построения коммунизма в нашей стране. Показателем исключительных успехов наших ученых, в том числе и ученых-математиков, являются присуждения лучшим из них Ленинской и Государственной премий.

Ниже в алфавитном порядке приведен список лауреатов Ленинской и Государственной премий по математике и ее приложениям.

Ф. И. О.	Даты жизни	Ученое звание	Год присуждения премии	
			Ленинской	Государственной
1	2	3	4	5
Айзерман М. А.	род. 1913	проф.	1964	
Александров А. Д.	род. 1912	акад.		1942
Александров П. С.	род. 1896	акад.		1943
Арнольд В. И.	род. 1937	проф.	1965	
Бабенко К. И.	род. 1919	проф.		1967
Барбашин Е. А.	1918—1969	проф.		1972
Бернштейн С. Н.	1880—1968	акад.		1942
Боголюбов Н. Н.	род. 1909	акад.	1958	1947, 1953
Болтянский В. Г.	род. 1925	проф.	1962	
Векуа И. Н.	род. 1907	акад.	1963	1949
Веников В. А.	род. 1912	проф.	1958	
Ветчинкин В. П.	1888—1950	проф.		1943
Виноградов И. М.	1891	акад.	1972	1941
Витушкин А. Г.	род. 1931			1967
Владимиров В. С.	род. 1923	акад.		1953
Гантмахер Ф. Р.	1909—1964	проф.		1947
Герсеванов Н. М.	1879—1950	проф.		1948
Глушков В. М.	род. 1923	акад.	1964	1968, 1977
Годунов С. К.	род. 1929	проф.	1959	
Голузин Г. М.	1906—1952	проф.		1948
Гутенмахер Л. Н.	род. 1908	проф.		1948
Дородницин А. А.	род. 1910	акад.		1946, 1947, 1951
Еругин Н. П.	род. 1907	проф.		1951
Ефимов Н. В.	род. 1910	акад.	1966	
Зубов В. И.	род. 1930	проф.		1968

[1] Составил В. Д. Чистяков.

1	2	3	4	5
Ибрагимов И. А.	род. 1932	проф.	1970	
Иваненко Д. Д.	род. 1904	проф.		1950
Ильюшин А. А.	род. 1911	проф.		1948
Ишлинский А. Ю.	род. 1913	акад.	1960	
Каган В. Ф.	1869—1953	проф.		1942
Канторович Л. В.	род. 1912	акад.	1965	1949
Кары-Ниязов Т. Н.	1897—1970	проф.		1952
Келдыш М. В.	1911—1978	акад.	1957	1942, 1946
Колмогоров А. Н.	род. 1903	акад.	1965	1941
Крейнес М. А.	род. 1903	проф.		1945
Крылов А. Н.	1863—1945	акад.		1941
Лаврентьев М. А.	род. 1900	акад.	1958	1946, 1949
Ладыженская О. А.	род. 1922	проф.		1969
Лебедев С. А.	род. 1902	акад.		1950, 1969
Левитан Б. М.	род. 1914	проф.	1962	
Лейбензон Л. С.	1879—1951	акад.		1943
Линник Ю. В.	1915—1972	акад.		1947
Локуциевский О. В.	род. 1922	проф.		1953
Лупанов О. Б.	род. 1932	проф.	1966	
Люстерник Л. А.	род. 1899	проф.		1946
Мальцев А. И.	1909—1967	акад.	1964	1946
Манин Ю. И.	род. 1937	проф.	1967	
Марченко В. А.	род. 1922	проф.	1962	
Мейман Н. Н.	род. 1912	проф.		1953
Меньшов Д. Е.	род. 1892	проф.		1957
Мигиренко Г. С.	род. 1916	проф.	1962	
Микеладзе Ш. Е.	род. 1895	проф.		1952
Митропольский Ю. А.	род. 1917	проф.	1965	
Мищенко Е. Ф.	род. 1922	проф.	1962	
Мусхелишвили Н. И.	род. 1891	акад.		1941, 1947
Некрасов А. И.	1883—1957	акад.		1951
Никольский С. М.	род. 1905	проф.		1952
Новиков П. С.	1901—1975	акад.	1957	
Новиков С. П.	род. 1938	проф.	1967	
Овсянников Л. В.	род. 1919	проф.	1956	
Папалекси Н. Д.	1880—1947	акад.		1942
Петров Г. И.	род. 1912	акад.		1949
Петровский И. Г.	1901—1973	акад.		1946, 1952
Погорелов А. В.	род. 1919	проф.	1962	1949
Полубаринова-Кочина П. Я.	род. 1899	акад.		1946
Понтрягин Л. С.	род. 1908	акад.	1962	1941
Постников М. М.	род. 1927	проф.	1961	
Прохоров Ю. В.	род. 1929	проф.	1970	
Рахматулин Х. А.	род. 1909	проф.		1949
Романовский В. И.	1879—1954	проф.		1948
Сарымсаков Т. А.	род. 1915	проф.		1948
Седов Л. И.	род. 1907	акад.		1952
Смирнов В. И.	1887—1974	акад.	1972	1948

Окончание

1	2	3	4	5
Смирнов Н. В.	1900—1966	проф.		1951
Соболев С. Л.	род. 1908	акад.		1941
Степанов В. В.	1899—1950	проф.		1951 (посмертно)
Тихонов А. Н.	род. 1906	акад.	1966	1953
Уральцева Н. Н.	род. 1934	проф		1969
Фок В. А.	род. 1898	акад.		1946
Хинчин А. Я.	1894—1959	проф.		1941
Христианович С. А.	род. 1908	акад.		1942, 1946, 1952
Цыпкин Я. З.	род. 1919	проф.	1960	
Черный И. А.	1909—1967	проф.		1949
Четаев Н. Г.	1902—1959	проф.	1960 (посмертно)	
Чеботарев Н. Г.	1894—1947	проф.		1948 (посмертно)
Шафаревич И. Р.	род. 1923	проф.		1974
Шура-Бура М. Р.	род. 1918	проф.		1955
Яблонский С. В.	род. 1924	проф.	1966	

Примечание. Кроме указанных, награждены также следующие советские ученые-математики: 1. Ленинской премией — Г. В. Гамкрелидзе (1962), Ю. И. Журавлев (1966), В. К. Иванов (1966), Н. Н. Красовский (1976), А. Б. Куржанский (1976), Ю. С. Осипов (1976), В. П. Платонов (1978), А. И. Субботин (1976);

2. Государственной — Д. В. Аносов (1976), О. В. Босов (1977), В. П. Деркач (1977), В. П. Ильин (1977), Ю. В. Капитонова (1977), Н. П. Корнейчук (1973), С. М. Никольский (1977), С. А. Степанов (1975).

БИБЛИОГРАФИЯ

Маркс К. Математические рукописи. М., 1968.

Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е, т. 20, 21.

Ленин В. И. Философские тетради. М., 1969.

Адамантов А. Краткая история развития математических наук с древнейших времен. Киев, 1904.

Андронов И. К. Трилогия предмета и метода математики. М., 1974.

Арнольдов А. И. Развитие науки в странах народной демократии. М., 1957.

Архимед. Исчисление песчинок. М.— Л., 1932.

Архимед. Сочинения. М., 1962.

Беллюстин В. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. М., 1941.

Белянкин А. Краткий курс истории развития математики от древнейших времен до наших дней. Киев, 1909.
Берман Г. Н. Число и наука о нем. М., 1949.
Бобынин В. В. Очерки по истории развития физико-математических наук в России. Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем, 1885—1888.
Боев Г. П. Лекции по истории математики. Ч. 1. Саратов, 1956.
Болгарский Б. В. Идеи Лобачевского в области методики математики.— «Математика в школе», 1952, № 2.
Болгарский Б. В. Основные этапы развития тригонометрии и ознакомление с ними учащихся.— «Математика в школе», 1952, № 1.
Болгарский Б. В. Историзм при преподавании математики как одно из средств идейно-политического воспитания.— В сб.: «Вопросы преподавания математики в средней школе». М., 1957.
Болгарский Б. В. Элементы истории математики в курсе арифметики восьмилетней школы.— В сб.: «Вопросы обучения математике в школе». Киров, 1962.
Болгарский Б. В. Элементы истории математики при преподавании алгебры в школе.— /Уч. зап. Ульянов. пед. ин-та, 1963.
Болгарский Б. В. Казанская школа математического образования. Ч. 1. Казань, 1967; ч. 2, Казань, 1969.
Болгарский Б. В. К истории развития логарифмов.— В сб.: «Вопросы методики преподавания математики». Казань, 1968.
Болотников А. Происхождение и развитие анализа бесконечно малых. Тифлис, 1931.
Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. На укр. яз. Киев, 1973.
Больяй Я. Приложение. М.— Л., 1950.
Бубнов Н. М. Происхождение и развитие наших цифр. Киев, 1906.
Бубнов Н. М. Арифметическая самостоятельность европейской культуры. Киев, 1908.
Ван-дер-Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. М., 1959.
Васильев А. В. Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых. [Введение к книге Ж. Папелье «Начала анализа бесконечно малых».] Казань, 1906.
Васильев А. В. Математика. Вып. 1. Пг., 1921.
Васильев А. В. Целое число. Пг., 1922.
Вебер Г., Вельштейн И. Энциклопедия элементарной математики. Одесса, 1910.
Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. Изд. 2-е. М.— Л., 1935.
Выгодский М. Я. Проблемы истории математики с точки зрения методологии.— В сб.: «На борьбу за материалистическую диалектику в математике». М.— Л., 1951.
Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. Изд. 2-е. М., 1967.
Гейберг И. Л. Естествознание и математика в классической древности. М.— Л., 1936.
Гиршвальд Л. Я. История открытия логарифмов. Харьков, 1951.
Глейзер Г. И. История математики в средней школе. Под ред. В. А. Розенфельда. М., 1971.
Гнеденко Б. В. Краткие беседы о зарождении и развитии математики.

М.— Л., 1966.
Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. М.— Л., 1948.
Дарбу Г. Этюд о развитии геометрических методов. Казань, 1911.
Даннеман Ф. История естествознания. Т. 2. М.— Л., 1936; т. 3, М.— Л., 1938.
Депман И. Я. Меры и метрическая система. М., 1953.
Депман И. Я. Рассказы о математике. М., 1953.
Депман И. Я. Рассказы о решении задач. М., 1964.
Депман И. Я. История арифметики. М., 1965.
Депман И. Я. Рассказы о старой и новой алгебре. Л., 1967.
Дильс Г. Античная техника. М.— Л., 1934.
Зубов В. И. Историография естественных наук в России. М., 1956.
Историко-математические исследования. Вып. 1—23. М., 1946—1978.
История естествознания в России. Сб. ст. Под ред. Н. А. Фигуровского. Т. 1, ч. 1—2; т. 2. М., 1956—1960.
История математики. Под ред. А. П. Юшкевича. Т. 1—3. М., 1970.
История математики с древнейших времен до начала XX столетия. М., 1970.
История математического образования в СССР. Киев, 1975.
История отечественной математики. Гл. ред. И. З. Штокало. Киев, 1966—1970, т. 1—4 (кн. 1—2).
Каган В. Ф. Великий ученый Лобачевский Н. И. и его место в мировой науке. М., 1945.
Кеплер И. Стереометрия винных бочек. М.— Л., 1935.
Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. Арифметика, алгебра, анализ. М.— Л., 1935; т. 2. Геометрия. М.— Л., 1934.
Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.— Л., 1937.
Колесников М. Лобачевский. М., 1965.
Кольман Э. История математики в древности. М., 1961.
Кузнецов В. Г. Очерки истории русской науки. М.— Л., 1940.
Кэджори Ф. История элементарной математики. Одесса, 1917.
Лебедев В. И. Кто изобрел алгебру? М., 1916.
Лебедев В. И. Кто автор первых теорем геометрии? М., 1916.
Лебедев В. И. Как постепенно обобщалось понятие о числе. Пг., 1919.
Лебедев В. И. Знаменитые геометрические задачи древности. Пг., 1920.
Леффлер Э. Цифры и цифровые системы главнейших культурных народов. Одесса, 1913.
Литцман В. Теорема Пифагора. М., 1960.
Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч. М.— Л., 1946—1951.
Лопиталь Г. Ф. Анализ бесконечно малых. М.— Л., 1935.
Лурье С. Я. Архимед. М., 1945.
Лурье С. Я. Теория бесконечно малых у древних атомистов. М., 1935.
Малыгин К. А. Элементы историзма в преподавании математики в средней школе. М., 1963.
Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 1—3. М., 1956.
Монж Г. Приложение анализа к геометрии. М.— Л., 1936.
Нейгебауер О. Лекции по истории античных математических наук. Т. 1. Догреческая математика. Изд. 2-е. М.— Л., 1963.
Ньютон И. Математические работы. М.— Л., 1937.
Ньютон И. Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе. М., 1948.

О квадратуре круга. Под ред. С. Бернштейна. М., 1936.
Попов Г. Н. Памятники математической старины в задачах. М.— Л., 1929.
Попов Г. Н. Сборник исторических задач по элементарной математике. М.— Л., 1938.
Райк А. Е. Очерки по истории математики в древности. Изд. 2-е. Саранск, 1977.
Розенфельд Б. А. О математических работах Насирэддина Туси. «Историко-математические исследования». Вып. IV. М., 1951.
Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Примечания к математическим трактатам Омара Хайама.— Историко-математические исследования. Вып. VI. М., 1953.
Россовская В. А. Календарная даль веков. М.— Л., 1936.
Рыбников К. А. История математики. Ч. 1. М., 1960; ч. 2, 1963.
Рыбников К. А. История математики. Изд. 2-е. М., 1974.
Стеклов В. А. Математика и ее значение для человечества. М., 1923.
Стройк Д. Я. Краткий очерк по истории математики. М., 1964.
Таннери П. Основные понятия математики. М., 1914.
Таннери П. Основные сведения из истории математики. М., 1914.
Тропфке К. История элементарной математики в систематическом изложении. М., 1914.
Успенский Я. В. История логарифмов. Пг., 1923.
Фаццари Г. Краткая история математики. М., 1923.
Фосс А. Сущность математики. М., 1923.
Ханович И. Г. Алексей Николаевич Крылов. Л., 1967.
Хрестоматия по истории математики. Под ред. А. П. Юшкевича. М., 1977.
Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. М.— Л., 1932.
Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. М.— Л., 1933.
Циглер Ф. Т. Развитие идеи числа.— В сб.: «Элементарная математика в средней школе». М., 1934.
Чаплина А. Архимед. М.— Л., 1934.
Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. М., 1963.
Чистяков В. Д. Рассказы о математиках. Минск, 1966.
Чистяков В. Д. Старинные задачи. Минск, 1966.
Шереметьевский В. П. Очерк по истории математики. М., 1940.
Ширакаци Анания. Вопросы и решения. Пг., 1918.
Энциклопедия элементарной математики. Т. 1. М., 1951; Т. 2, М., 1952; т. 3. М., 1963.
Юшкевич А. П. История математики в средние века. М., 1961.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ