2 р. 90 к.

М. Е. ПАЕВ

РЕШЕНИЕ ДВУХ АНТИЧНЫХ ПРОБЛЕМ

НАУКОВА ДУМКА

М. Е. ПАЕВ

М.Е.Паев

РЕШЕНИЕ ДВУХ АНТИЧНЫХ ПРОБЛЕМ

Киев Наукова думка 1987

В монографии дана расшифровка и интерпретация двух малопонятных текстов Платона, имеющих математическое содержание. Исследование носит историко-научный характер. Интерпретация автора указанных текстов развенчивает представления о мистицизме великого мыслителя древности. Показывается, что числовая символика пифагорейцев скрывает вполне обоснованные рациональные суждения.

Для научных работников, преподавателей и студентов вузов, всех интересующихся историей науки.

Ответственные редакторы
и авторы вступительной статьи
Г.А.Заиченко, А.В.Семушкин

Рецензенты
Б.А.Парахонский, Б.А.Старостин

Редакция философской и правовой литературы

П $\frac{1402000000-595}{М221(04)-87}$ 146-87

© Издательство "Наукова думка", 1987

М.Е.ПАЕВ – ТОЛКОВАТЕЛЬ ПЛАТОНОВСКИХ ТЕКСТОВ

Предлагаемая читателю книга не совсем обычна как по истории ее создания, так и по ее содержанию: путь ее от замысла к осуществлению имеет мало аналогов (если вообще имеет) в нашей привычной научной практике; точно также нелегко отыскать параллель ее предметно-жанровому своеобразию.

Автору не удалось увидеть выхода книги в свет. Он умер в 1986 г. в возрасте 75 лет после длительной болезни, успев только узнать о ее готовящемся издании.

Несколько слов о самом авторе. М.Е.Паев не был профессиональным философом или ученым. По роду служебных занятий он был инженером-строителем, однако по внутреннему призванию, или (если выражаться полными смысла, хотя и вышедшими из употребления словами) по определению судьбы, – страстным и пытливым исследователем. Сам себя он называл не то с иронией, не то с гордостью "самоучкой". В нашей речи это понятие давно уже утратило свой некогда благородный, может быть, даже торжественный оттенок; сравнительно с масштабами и мощью современной науки и просвещения слово "самоучка" ассоциируется, как правило, с чем-то курьезным и безнадежно запоздавшим. Случай с М.Е.Паевым – удивительное и счастливое исключение из этого правила.

В конце 40-х годов М.Е.Паев из самообразовательных побуждений познакомился с сочинениями Платона в русских переводах В.Н.Карпова (и, возможно, В.С.Соловьева), а также с научно-критической литературой по толкованию платоновских текстов. С этого момента (это было в 1949 г.), собственно, и началось его ни с кем не согласованное, руководимое одним только инстинктом исследователя научное поприще.

Кто хотя бы в первом приближении знаком с платоновским творчеством, поймет, в каком загадочном и богатом идеями мире оказался этот любопытствующий "самоучка" и с какими препятствиями ему пришлось столкнуться при его освоении. Известно, что творения Платона – чрезвычайно многомерные интеллектуальные построения, сопротивляющиеся какой бы то ни было общепринятой, так сказать,

эталонной мере их однозначного прочтения. Это не только ни с чем не сравнимые памятники художественного слова, но одновременно и философские трактаты, и религиозно-мифологические фантазии, и социально-утопические проекты, и пророческие проповеди, и риторические декламации, и естественнонаучные изыскания, и этно-лингвистические штудии, и многое, многое другое. Причем все это располагается не одно возле другого, а одно в другом, точнее (употребив одну из распространенных философских аксиом древних греков) "все во всем". Экстраполировать этот многоразличный и в то же время единый и нераздельный мир идей и образов на язык нашего восприятия чрезвычайно трудно, подчас просто невозможно без специально подготовленных для этой цели толмачей.

Наиболее затруднительны для понимания пограничные, "междисциплинарные" сферы платоновского идейного комплекса. Интуитивно мы чувствуем, где, например, у Платона кончается философия и начинается религия, но на их различие нельзя, что называется, указать пальцем. Всякая попытка провести между ними границу (а это мы обязаны делать, изучая и оценивая Платона) сопряжена с риском непоправимо нарушить или вообще уничтожить сами условия возможности адекватного истолкования платоновских мыслей. К таким головоломным реалиям относятся те точки в платоновском наследии, в которых соприкасаются, пересекаются, а то и просто стыкуются философское и математическое знания. Эти две абстрактные дисциплины образуют у Платона гибкую и не рационализируемую в понятиях нашей логики позиционную структуру: в ткани его рассуждений математическое и философское никогда не разъединяются до противостояния, но и никогда не сливаются до неразличимости. Это живое двуединство разнородных предметных областей напоминает сложную и хитроумную загадку, ключ от которой великий философ оставил при себе.

Чтобы отсепарировать в платоновском тексте математическое содержание от философского, этот ключ нужно или выведать у самого Платона, всматриваясь и вдумываясь в каждое его слово и даже знак препинания, или же - полагаясь на удачу и "внутренний голос" - заново его "переоткрыть", для чего, в свою очередь, требуются и упорство, и искусство, и опыт, и даже (чему мы являемся свидетелями) целые исследовательские школы и направления.

Исключительной загадочностью в платоновских текстах отличаются два "темных" философско-математических места, которые, начиная с непосредственных учеников и последователей Платона, не поддаются рационально приемлемой дешифровке. Одно из этих "темных" мест, в котором речь идет о так называемом "брачном числе" (известном также как "Платоновское число"), находится в трактате

"Государство" под текстологическим обозначением (соответствующим международной пагинации) 546 ВС; другой загадочный фрагмент, носящий имя "Феодорова места", расположен в гносеологическом диалоге "Теэтет" (147Д-148В). Современная научно-философская герменевтика не в состоянии установить их подлинный (и, надо полагать, максимально однозначный) идейно-смысловой и семантический статус. Начиная с Аристотеля, в объяснении этих таинственных пассажей предложено немало остроумных и убедительных на первый взгляд толкований и гипотез; интерес к ним давно уже вычленился в самостоятельную отрасль научных изысканий. Однако последнее слово на их счет пока еще не сказано: ответы и предположения приходят и уходят, а "темные" места в платоновских текстах так и остаются "темными". Именно эти загадочные фрагменты и привлекли внимание автора книги.

Нетрудно представить себе, какую предварительную работу пришлось проделать М.Е.Паеву, чтобы обеспечить одни только условия возможности научной разработки темы. Этот подготовительный (и, естественно, сопутствующий работе над книгой) труд поражает объемом, методической дисциплиной и поистине подвижнической целеустремленностью. Прежде всего, он овладел древнегреческим языком (попутно латинским), к тому же в степени, позволяющей ему не только переводить текст оригинала, но и находить и исправлять в нем допущенные по вине переписчиков или издателей ошибки. Кроме того, поскольку дело касалось математической семантики текстов, он изучил состав, специфику и пределы математического мышления греков. Причем не только по учебным и научным руководствам, но и по античным источникам, о чем свидетельствуют его превосходные переводы текстов (ранее у нас не переводимых) из математического трактата Теона Смирнского (ученый компилятор пифагорейско-платоновской ориентации II в. н.э.). Но это еще не все. Необходимо было освоить огромный платоноведческий корпус, касающийся хотя бы только "брачного числа" и "Феодорова места". Чтобы познакомиться с этим обширным собранием литературы, автор изучил английский, немецкий и французский языки. И, наконец, еще один момент, характеризующий поисковую неутомимость и добросовестность М.Е.Паева. Существует много рукописных редакций сочинений Платона. Современные издания, как правило, используют в лучшем случае некоторые, но отнюдь не все рукописи (из соображений экономии времени и труда, например). М.Е.Паев вступил в переписку - не считая отдельных лиц в нашей стране и за рубежом - с виднейшими мировыми музейно-библиотечными центрами (среди них Британский музей, библиотека им. В.И.Ленина в Москве, Парижская национальная библиотека,

библиотека Ватикана, Венецианская и Флорентийская библиотеки), приобрел оттиски необходимых ему текстов с максимального количества рукописей, сличил эти тексты, обнаружил в них разночтения и сумел истолковать эти последние в пользу своей концепции.

Все эти трудности, так сказать, высокого порядка; они лишь раздражали и взвинчивали любознательную активность автора (и, добавим, помогали бороться с источающим его недугом). Теперь, когда его уже нет, с досадой приходится говорить о препятствиях другого порядка, препятствиях, которые М.Е.Паеву приходилось преодолевать с огорчением и мучительным чувством непонятой и безответной радости научных откровений. Речь идет о признании и оценке его научной инициативы со стороны наших ученых и научных работников.

Со своими идеями и соображениями он неоднократно обращался во многие научные учреждения и ко многим лицам. Но не находил ни одобрения, ни ободрения. Старинный дружеский совет: "стучите и вам откроют" - не подтвердился. Не защищенный "охранной грамотой" научных степеней и званий, он вызывал или недоверие, или жалость. По-видимому, не раз и не в одном месте он воспринимался как не знающий оседлости графоман, назойливый провинциальный "Кулибин" неизвестно от какой науки. Философам он казался слишком математичным и они отсылали его к математикам; математикам он казался слишком философичным, и они отсылали его к философам; а кроме философов и математиков были еще историки науки, филологи, лингвисты. Вероятно, этой книге не суждено было бы выйти, если бы автор, наконец, не встретил взаимопонимания и поддержки.

Пользуясь случаем, редакторы благодарят А.Н.Боголюбова, члена-корреспондента АН УССР (Институт математики АН УССР); заместителя директора Института истории естествознания и техники АН СССР А.С.Федорова и старших научных сотрудников этого же института С.С.Демидова и Б.А.Старостина; М.Л.Гаспарова, доктора филологических наук, старшего научного сотрудника института мировой литературы им. А.М.Горького; А.А.Белецкого, доктора филологических наук, профессора Киевского госуниверситета им. Т.Г.Шевченко; Б.А.Парахонского, кандидата философских наук, старшего научного сотрудника Института философии АН УССР, которые "без гнева и пристрастия" (не говоря уже о чисто человеческой стороне дела) отнеслись к материалам М.Е.Паева, увидели в них полноправную научную продукцию и рекомендовали их к печати).

Информативный слой первого из двух упомянутых "темных" мест (Государство 546 ВС) следующий. Платон рассуждает о природе и свойствах двух чисел. Одно из них под названием совершенного

(ἀριθμὸς τέλειος) охватывает круг божественно рожденного порядка вещей (περίοδος θείῳ γενητῷ). Другое число под названием геометрического (ἀριθμὸς γεωμετρικός) охватывает круг человеческого бытия (περίοδος ἀνθρωπείῳ γενητῷ). Причем геометрическое число обладает способностью каким-то образом влиять (через брачные отношения) на качество и судьбу человеческих рождений (потомств), в связи с чем это число и было названо "брачным числом", т.е. числом, наиболее благоприятствующим счастливым бракам и в целом человеческому роду. Спрашивается, что это за числа и какова их рационально-семантическая мера?

Все попытки решить эту загадку от древности до настоящего времени базировались на двух не вызывавших сомнений предпосылках. Во-первых, считалось, что эти числа имеют единственный (или по крайней мере преобладающий) смысл и этот смысл - онтологический, т.е. связан с генезисными судьбами мира (космоса) и человека. Во-вторых, все поиски количественных выражений этих чисел сводились к операциям над прямоугольным треугольником с катетами и гипотенузой, равными 3, 4, 5. У пифагорейцев, учеником которых был Платон, этот треугольник почитался в качестве брачного, или, как его называл неоплатоник Прокл (У в. н.э.), "жизнетворного треугольника" (ζωογονικὸν τὸ τρίγωνον), поскольку в нем сочетание нечетной тройки (мужского начала, согласно нумерологической семантике пифагорейцев) и четной четверки (женского начала) дает в результате продолжение жизни (пятеричный символ сыновства). Так что в целом получалось, что и совершенное (божественное) и геометрическое (человеческое) числа суть лишь математические эмблемы для обозначения генезиса богокосмической и антропологической реальности. Были предложены различные количественные эквиваленты этих чисел. Например, совершенное число искали в группе чисел, известных пифагорейцам (и современной математике) под рубрикой "совершенных" (числа, равные сумме своих делителей, например, 496). Что касается геометрического ("брачного") числа, то здесь наблюдается настоящее столпотворение. Его отождествляли (опять же на основе манипуляций с прямоугольным треугольником) с многими числами, начиная от 50 (Филон Александрийский) и кончая 12 960 000 (Ф.Гульч).

М.Е.Паев подошел к решению проблемы с неожиданной и до него не апробированной стороны. Он изменил не вариант толкования платоновского текста, а сам подход к толкованию. По его убеждению (которое он и стремился обосновать в своей книге), содержание фрагмента 546 ВС не онтологическое, а математическое. Совершенное и геометрические числа, следовательно, не есть символические

знаки бытия (космического и человеческого), а выражение математической истины самой по себе. Он полагает, что отрывок 546 ВС в "Государстве" полностью и специально посвящен преодолению пифагорейцами кризиса, вызванного в математике открытием (сделанном ими же, пифагорейцами) несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. Это преодоление пифагорейцы осуществляют, по мысли автора, на путях созданной ими принципиально новой математики - математики актуально бесконечных (завершенных) чисел, которые М.Е.Паев прямо связывает с трансфинитными числами Г.Кантора, а самих пифагорейцев считает предшественниками этого великого математика. Следовательно, во фрагменте о "брачном числе" речь идет не о конкретных числах, а об алгоритме числового становления, о бесконечной, но актуально завершенной последовательности целых положительных чисел (геометрически выраженных стороной и диагональю квадрата), преодолевающей явление несоизмеримости и вытекающей из нее иррациональности.

Такая трактовка Платона заставляет с собой считаться; по крайней мере у нее есть свои основания. Ей не противоречит глубокий пиетет Платона перед математикой. Да и сам Платон - не кто иной, как пифагорействующий философ, рассматривающий математику (геометрию) как своего рода условие возможности философского обучения в возглавляемой им Академии (μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςἰτω)*. Поэтому попытка понять "темное" место у Платона через высшие достижения и догадки пифагорейской математики выглядит и правомерной и обнадеживающей. Другое дело, что о пифагорейской математической теории актуально бесконечного нам почти ничего не известно. Однако в ее существовании сомневаться не приходится. О ней свидетельствует Аристотель (признающий только потенциально-незавершенную бесконечность) в своей полемике против пифагорейцев и Платона. Он прямо говорит о том, что они учили о бесконечности как таковой (καθ'αὐτο), видели в ней самосущую реальность (οὐσίαν αὐτὸ ὄν). В пользу существования у пифагорейцев математики актуально бесконечного говорит также качественная маркировка чисел, известная обычно под названием числовой мистики. На самом деле мистика чисел - всего лишь беспомощный язык их выражения. Будучи не в состоянии обосновать идею актуальной бесконечности (трансфинитности) логико-математически, пифагорейцы ограничились ее интуитивным постулированием, приписыванием числам качественных значений (что, собственно, и вызвало неудовольствие и реакцию Аристотеля, требующего во всем обстоятельности и доказатель-

* Никто, не знающий геометрии, пусть не входит.

ности). О том, что актуальная бесконечность в системе пифагореизма не фикция, свидетельствуют и позднейшие пифагорейские источники (например, трактат "Что в математике полезного для чтения Платона" уже упомянутого Теона Смирнского), как правило, сохраняющие в неприкосновенности открытия зачинателей традиции. Из них мы узнаем о специфике "трансфинитного" понимания числа пифагорейцами: число понимается как множество, которое, начиная с единицы, стремится к расширению (προποδισμὸς πλήθους), т.е. является экстенсивной величиной; в то же время это расширение не удаляется в разомкнутую ("дурную") бесконечность, но стремится замкнуться на себя, возвратиться к исходному началу (ἀναποδισμὸς), т.е. наряду с экстенсивностью число приобретает завершенную, интенсивно-смысловую (качественную) выразительность. М.Е.Паев как бы реставрирует эту интуитивную "теорию множеств пифагорейцев" и применяет ее к дешифровке головоломного "брачного числа". Недюжинное, прямо сказать, виртуозное искусство он проявляет и в лингво-математической процедуре самого этого применения. При чтении его книги начинаешь верить (разумеется, приняв предварительно переводческие версии автора и ту степень разработки пифагорейцами теории актуально бесконечного, которую он предполагает у них), что ключ к "брачному числу" действительно найден.

Конечно, внимательный читатель заметит, что математическая интерпретация "брачного числа" не защищена от возражений. В ней есть слабые места, снижающие ее концептуальное совершенство. Укажем на некоторые из них. Автор исходит из предпосылки, что фрагмент 546 ВС - безраздельно математического содержания; он даже считает, что этот фрагмент специально посвящен математическим истинам. Однако эта предпосылка не диктуется с необходимостью ни буквой, ни духом платоновского текста (как и идеализма Платона в целом). Для автора это - аксиома, требующая не обоснования, а всего лишь демонстрации. Но нельзя забывать, что здесь мы имеем дело не с "Началами" Евклида, а с философией жизни Платона. Здесь исходная предпосылка не должна быть беспредпосылочной, она должна опираться на органическую логику первоисточника и служить ее исследовательским выражением. С точки зрения этой логики, математические истины, взятые сами по себе ("специально", ради них самих), безотносительно к истинам высшего (антропокосмического) порядка - не имеют для Платона ровно никакого значения. Не потому ли этот пифагореец, плодовитейший писатель, не написал ни одного математического трактата, т.е. в сущности не занимался математическим творчеством. (С именем Платона связывают так называемые "Платоновы тела", описанные в "Тимее", открытые, впрочем, до него пифаго-

рейцами; пифагорейско-платоновская традиция приписывает также Платону – сам Платон об этом нигде не говорит – правило построения прямоугольника со сторонними рациональными числами: $a, \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$, где a – число четное). Верно, что геометрия в его Академии была непременным условием философского образования, но, как известно, условия какого-нибудь процесса далеко не совпадают с его сущностью и целями. Канонизация чисел и числовой реальности принципиально чужда Платону; для него математика – всегда подсобное средство, всегда применяется к чему-то, например, к конструированию космоса (в "Тимее"), к воспитанию (в "Государстве"), к эвристике последних постижений (в "Теэтете" и "Государстве").

Далее, даже взятый вне контекста (каковым он и берется в сочинении М.Е.Паева) фрагмент о "брачном числе" несет в себе неустранимое присутствие какой-то иной, внематематической реальности. Чтобы ее заметить, не требуется особого зрения. Автор не только математически теснит эту реальность, но вовсе ее вытесняет за пределы платоновского фрагмента. А если мы прочтем этот фрагмент в контексте, то подобная бескомпромиссность (вспомним, что у Платона все находится в органическом сцеплении) кажется не в меру категорической. Мощное (можно сказать, вопиющее) онтологическое, точнее социокосмическое, звучание фрагмента не исчезнет оттого, что мы назовем его метафорой, иносказанием или "шуткой" Платона. Здесь наиболее уязвимы позиции автора в его полемике с длительной платоноведческой традицией (историко-философской и историко-математической).

И еще одно замечание. Все доказательства М.Е.Паева, относящиеся к "брачному числу", – остроумны, проницательны и находчивы. Нельзя без восхищения наблюдать за движением мысли автора, когда он в громоздкий математический комплекс фрагмента подставляет предлагаемые им значения и тем самым проясняет его, транслирует на язык нашего научно-культурного общения. Но дело в том, что "брачное число" связано одной мыслью и даже предложением с числом совершенным (божественным), которое охватывает и математически выражает структуру божественно созданного сущего (космоса). Это число автор не подвергает математическому фундированию, не находит для него ни аксиоматических, ни дискурсивных аргументов. Это и понятно: его математизации мешает неотразимый теолого-космологический, а потому и нетранскрибируемый в понятиях математики смысл фразы, в которую это число включено. Однако он и здесь ищет какую-то скрытую математическую зависимость и, в сущности, конфессионально полагает, что во фразе "цикл божественно порож-

денного сущего" (θείῳ μὲν γενητῷ περίοδος) речь идет о зашифрованной числовой прогрессии. Это не убедительно даже в том случае, если вариант математического прочтения этой фразы является приемлемым в смысле выявления ее особого математического аспекта. Аспект - это еще не целостное образование. И поскольку, фигурально выражаясь, философия не делится без остатка на математику, следует полагать, что притязания автора на такого рода "деление без остатка" несостоятельны.

Что касается "Феодорова места" ("Теэтет" 147Д-148В), то о нем мы ограничимся краткими замечаниями. В системе рассуждений М.Е.Паева это место проблемно связано с фрагментом о "брачном числе" в "Государстве". А именно: если в "темном" месте "Государства" речь шла (по концепции автора) о преодолении кризиса, возникшего в математике в связи с открытием пифагорейцами несоизмеримости (иррациональности), то в "темном" месте "Теэтета" речь идет, как полагает автор, о математическом обосновании (доказательстве) самой несоизмеримости Феодором Киренским (учителем Платона). По краткому намеку из речи Теэтета о Феодоровом доказательстве несоизмеримости (самого доказательства в тексте Платона нет) М.Е.Паев воскрешает структуру и ход Феодорова метода, тот алгоритм, с помощью которого открытая ранее (до Феодора) несоизмеримость стороны и диагонали квадрата распространяется (через преобразование квадрата) на любые прямоугольники. Эта операция осуществлена М.Е.Паевым изящно, логически строго и текстологически убедительно (может быть, потому, что, оставаясь всецело на почве Феодоровской математической реальности, он не имел повода и мотивов оспаривать идеализм Платона). Мы воздержимся от ответа на вопрос: истинна концепция М.Е.Паева или ошибочна. Пусть это сделает читатель в меру своих интересов, познаний и склонностей ума и воображения. Напомним только, что подчас иной подход к проблеме (даже не разрешающий ее) стоит иных ее решений.

В этом случае речь вовсе не идет о провозглашении гносеологического релятивизма. Речь идет о другом: о необычайно сложной и с течением веков и тысячелетий все более осложняющейся многоплановости проблематики и идейного потенциала философии Платона. (Это же можно сказать и в отношении других выдающихся философов античности.) Мы не можем претендовать на воссоздание образа абсолютно полного, стерильно достоверного Платона и его философии в том смысле, что определенные содержательные нити, ведущие к выяснению обстоятельств, истоков и характера формирования его идей, оборваны, потеряны, может быть, навсегда. В этом отношении Платон "каков он на самом деле" был и останется навсегда философским

кентавром с двумя составляющими, одна из которых "Платон достоверный", а другая - "Платон возможный". Кроме того, каждое столетие, тысячелетие в исполнении одних авторов в определенных отношениях развивало, обогащало Платона, а в исполнении других авторов в других отношениях обедняло и искажало его. Мужественный и, не будет преувеличением сказать, героический пафос исканий М.Е.Паева состоит в попытке "пробиться" через века и тысячелетия к "Платону достоверному", однако он при этом недостаточно оценил весомость и неустранимость другой составляющей - "Платона возможного". Последний - это уже не только сам Платон. Это и то, в чем философская мысль пошла дальше и глубже Платона. Поэтому, если даже подход М.Е.Паева к проблеме истолкования текстов Платона не будет или не может быть принят как шаг к разгадке некоторых не математических тайн "Платона достоверного" (а такую позицию занимает один из научных редакторов книги и один из авторов этой вступительной статьи[ж]), несомненным является, что в расширении горизонтов видения "Платона возможного" научный вклад и подвижническая деятельность автора книги бесспорны.

В этом отношении уместным будет сказать о том, что есть истины, которые живут лишь тогда, когда их ищут; когда их находят, они умирают. Кто знает, не принадлежат ли волшебные истины платоновских творений к числу таковых. Сам Платон отождествлял теоретическое познание с Эросом - демонической страстью к знанию, не знающей конечного удовлетворения. Бесспорно то, что книга М.Е.Паева - весьма примечательное научное явление, несущее в себе зрелую и по-платоновски исступленную потребность в углублении и обновлении наших знаний. И как таковую, мы надеемся, ее ждет и специалист-антиковед, и просто мыслящий и ищущий читатель.

По мере работы над книгой М.Е.Паев печатал материалы своих исследований. В разное время им опубликовано шесть научных статей и тезисных выступлений (три в советских изданиях, три в международном "Журнале точных наук"). Выпускаемая издательством "Наукова думка" монография М.Е.Паева является в сущности их систематическим и обобщенным выражением. Издатели и редакторы книги, к сожалению, были лишены в силу понятных причин возможности уточнить в соответствии с современными требованиями сведения, относящиеся к ряду позиций, характеризующих некоторые литературные источники XVI-XVIII вв.

Д-р филос. наук Г.А.Заиченко,
канд. филос. наук А.В.Семушкин

[ж] А.В.Семушкин.

ЧАСТЬ I. ПЛАТОНОВСКОЕ ЧИСЛО

Возникновение проблемы

В начале восьмой книги диалога "Государство" Сократ рассматривает вопрос о причинах гибели аристократического государственного строя, который, с его точки зрения, является идеальным. Считая этот вопрос очень важным, Сократ обращается к Музам, но говорит, что "они станут отвечать... как будто всерьез, на самом же деле это будет с их стороны лишь шутка, и они будут поддразнивать нас, как детей" /28, 358/. Музы произносят целую речь, в которой говорят, что гибель этого государственного строя произойдет от неспособности его руководителей "установить путем рассуждения, основанного на ощущении, наилучшую пору" совершения браков, обеспечивающую рождение детей "с хорошими природными задатками и со счастливой участью" /28, 359/. Дети же, родившиеся от браков, совершенных не в эту пору, не смогут стать достойными руководителями аристократического государства, что приведет его к гибели. Музы говорят, что "решающее значение для лучшего или худшего качества рождений" имеет "геометрическое число", которое руководители государства должны знать для определения наилучшей поры совершения браков. Плутарх /114, 624 AB/ назвал это число "брачным", позднейшие комментаторы - "Платоновским".

Средняя часть речи Муз, начинающаяся словами "ἔστι δὲ θείῳ", туманна и изобилует непонятными арифметическими операциями. Эту часть ее не могли понять даже такие ученики Платона, как философ-энциклопедист Аристотель, в течение 20 лет работавший в Академии Платона, а также возглавлявшие Академию после Платона его ученики Спевсипп (племянник Платона) и Ксенократ.

Таким образом, в IУ в. до н.э. возникла проблема расшифровки туманной части речи Муз - фрагмента, находящегося в трехтомном издании греческого текста сочинений Платона Жана де Серре и Анри Этьена[1], в разделах BC страницы 546 второго тома, получившего поэтому название фрагмента 546 BC (по международной традиции

страницы этого издания, разделенные на пять первых букв латинского алфавита, цитируются во всех работах о Платоне).

Первым толкователем этой части речи Муз был Аристотель (384-322 гг. до н.э.). Поэтому мы начинаем обзор с рассмотрения его толкования. В начале своей речи Музы говорят, что даже наилучший государственный строй не может вечно оставаться неизменным, так как "всему, что возникло, бывает конец" [28, 358]. Аристотель полагал, что Платон словами "ἔστι δὲ μείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος", которыми начинается туманная часть речи Муз, говорит о промежутке времени, в течение которого происходит изменение государственного строя. Следующими же за ними словами: "ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος" Платон говорит о некотором числе, от которого зависит этот промежуток времени. Поэтому слово "περίοδος" Аристотель истолковал как "промежуток времени".

Аристотель полагал, что о числе, регулирующем этот промежуток времени, Платон говорит также во второй фразе туманной части речи Муз: "ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχηται τρεῖς αὐξησείς".

В соответствии с этим в сочинении "Политика" Аристотель эту фразу истолковал следующим образом: "ἐν δὲ τῇ πολιτείᾳ λέγεται μὲν περὶ τῶν μεταβολῶν ὑπὸ τοῦ Σωκράτους οὐ μέντοι λέγεται καλῶς. τῆς τε γὰρ ἀρίστης πολιτείας καὶ πρώτης οὔσης οὐ λέγει τὴν μεταβολὴν ἰδίως. φησὶ γὰρ αἴτιον εἶναι τὸ μὴ μένειν μηδὲν ἀλλ' ἔν τινι περιόδῳ μεταβάλλειν, ἀρχὴν δ' εἶναι τούτων ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται λέγων ὅταν ὁ τοῦ διαγράμματος ἀριθμὸς τούτου στερεὸς γένηται..." [46, 792].

В точном переводе это значит: "В "Государстве" Сократ говорит об изменениях, однако нехорошо говорит, так как он говорит не о собственном изменении, которое свойственно государству, бывшему наилучшим и главнейшим. Ибо, он говорит, причина изменения в том, что ничто не остается неизменным, но в течение некоторого промежутка времени изменяется, начальник же этих (промежутков времени. - М.П.) их увеличенный на треть базис, который, будучи соединен с пятеркой, дает две гармонии, говоря, если геометрическое число этого кубически рождается...".

Словом "говоря", которого нет в Платоновской фразе "ὧν ἐπίτριτος... αὐξησείς", Аристотель разделил эту фразу на две части, первая из которых заканчивается словом "παρέχεται".

Вследствие этого разделения часть этой фразы "ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται" получила смысл "их увеличенный на треть базис, соединенный с пятеркой, дает две

гармонии". Вторую часть этой фразы "τρὶς αὐξηθείς" Аристотель заменил словами "ὅταν ὁ τοῦ διαχράμματος ἀριθμὸς τούτου στερεὸς γένηται", значащими: "если геометрическое число этого (соединения, увеличенного на треть базиса с пятеркой. - М.П.) рождается кубически", полагая, что эта замена семантически равнозначна словам "τρὶς αὐξηθείς" = "трижды увеличенный", и является семантически правильным развернутым пояснением их ("трижды увеличенный" он истолковал как "кубический").

Аристотелевскому толкованию этой фразы благодаря непререкаемому авторитету Стагирита следовали с различными модификациями все без исключения позднейшие комментаторы фрагмента 546 ВС вплоть до наших дней.

Дальнейшее развитие концепция Аристотеля получила в толковании Плутарха (ок. 46-ок. 127). В сочинении "Об Изиде и Озирисе" он говорит: "В "Государстве" Платон представляет брак в геометрической форме. В самом деле, в прямоугольном треугольнике число три представляет одну из сторон прямого угла; число четыре - основание; число пять - гипотенузу, и ее квадрат равен сумме квадратов сторон, содержащих прямой угол. Следовательно, следует представлять себе сторону прямого угла как фигуранта самца, основание треугольника как фигуранта самки, и гипотенузу как продукт обоих. По тому же самому, должно рассматривать Озириса как первоначало, Изиду как сущность, которая получает воздействия, и Гора как следствие, которое происходит от соединения одного и второго. В самом деле, число три это первое нечетное число и совершенно. Четыре - это квадрат двойки, первого четного числа, и пятерка, составленная из двойки и тройки, содержит в себе вместе и ее отца и ее мать. Слово πέντε = пятерка происходит от слова παντᾶ = вселенная. Кроме того, пятерка, возведенная в квадрат, дает число, равное числу букв египетского алфавита, и числу лет жизни быка Аписа" [14, 624 AB].

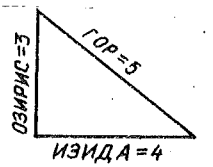


Рис. 1

Таким образом, пифагорейский прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 Плутарх рассматривал как треугольник жизни (рис. 1). Основоположником этой концепции был Филон Александрийский (21 или 28 до н.э. - 41 или 49 н.э.), так как, по сообщению

Ж.Бодена (1530-1596) [51, 223], он полагал, что брачным числом является сумма квадратов сторон пифагорейского прямоугольного треугольника: $3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$. Именно Филон Александрийский был первым, предложившим некоторое значение брачного числа в многовековой истории попыток определения его значения. Развитие, которое эта концепция получила у Плутарха, объясняется, вероятно, тем, что он был жрецом храма Аполлона в Дельфах. На воротах этого храма был неясный таинственный знак, который можно было толковать и как Ε (пять) и как Εἶ ("Ты еси"). Пифагорейцы толковали его как пятерку и толковали ее как символ брака - соединение женской двойки и мужской тройки. Четные числа, поскольку они делятся пополам, пифагорейцы считали женскими, нечетные - мужскими. Единицу пифагорейцы считали не числом, но началом, источником числа. Следовательно, первым женским числом была двойка, а первым мужским - тройка.

Следуя пифагорейцам, Плутарх также считал этот таинственный знак пятеркой и толковал ее как символ брака. Арифметическое соединение двойки и тройки в пятерку являлось представлением брака в арифметической форме. Приписываемая Плутархом Платону геометрическая форма представления его является геометрическим истолкованием аристотелевского увеличенного на треть базиса, соединенного с пятеркой, - истолкованием, основоположником которого был Филон Александрийский.

Если этот базис положить некоторой единицей, то увеличенным на треть базисом будет $1 + 1/3 = 4/3$, т.е. он будет равным отношению катетов четыре и три пифагорейского прямоугольного треугольника. А так как увеличенный на треть базис соединен с пятеркой, катеты же три и четыре геометрически соединены с пятеркой, то отсюда заключали, что увеличенный на треть базис, соединенный с пятеркой, это - геометрически соединенные с пятеркой катеты пифагорейского прямоугольного треугольника.

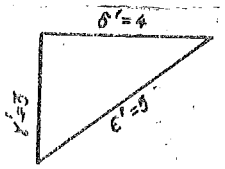


Рис. 2

Именно так представляет геометрически Прокл (410-485) аристотелевский увеличенный на треть базис, соединенный с пятеркой, изображая его катетами пифагорейского прямоугольного треугольника (рис. 2) [117, 41], который он называет "ζῳογονικόν τὸ τρί

γωνον" – "треугольник жизни" [117, 43_{10}], и говоря [117, 37_{5}] "ὁ ἐπίτριτος πυθμὴν γ' καὶ δ'" = "увеличенный на треть базис 3 и 4", Прокл в этом следует Плутарху, которого он называет "дедом, вождем наших учителей" [117, 64_{7}].

Пятерка была у пифагорейцев символом бога света – Аполлона. Египетский бог света – Гор, сын Озириса и Изиды, отождествлялся с Аполлоном. Отсюда проистекает отождествление Плутархом "мужского" катета три с Озирисом, "женского" с Изидой, а гипотенузы – пятерки с Гором.

Концепцию Аристотеля мы находим и у автора II в. н.э. Аристида Квинтилиана. В сочинении "О музыке" он говорит: "πλάτων φησὶν ἐπίτριτον πυθμένα πεντάδι συζυγέντα" [45, 152 Meibom], т.е.: "Платон говорит увеличенный на треть базис, соединенный с пятеркой". Аристид Квинтилиана приписывает этот увеличенный на треть базис, соединенный с пятеркой, Платону: "Платон говорит", не упоминая даже имени Аристотеля. Здесь сказался непререкаемый авторитет Аристотеля, толкование которого Аристид Квинтилиана считал непогрешимым.

Дальнейшее развитие концепции Аристотеля мы находит у Прокла Диадоха, который значительную часть его комментария к "Государству" посвятил речи Муз. Он говорит: "ἐπίτριτος πυθμὴν τῇ πεμπάδι σ[υζυγεὶς] χαρέκει τὰς δύο ἁρμονίας" [117, 39_{26}], т.е. "Увеличенный на треть базис, соединенный с пятеркой, дает две гармонии". Полагая, что после слов "τρὶς αὐξηθείς" Платон продолжает говорить об этих двух гармониях, и истолковывая его слова "ἰσομήκη μὲν τῇ, προμήκει δέ", как "ταυτομήκη ἁρμονία" и "προμήκη ἁρμονία", т.е. как "равнодлинная гармония" и "продолговатая гармония", Прокл дает следующее развитие толкованию Аристотеля: "ὁ ἐπίτριτος πυθμὴν τρὶς αὐξηθεὶς, πεμπάδι συζυγεὶς ἔσται ποιῶν τὰς δύο ἁρμονίας, τήν τε ταυτομήκη καὶ τὴν προμήκη" [117, 39_{18}], т.е.: "Увеличенный на треть базис, трижды увеличенный, соединенный с пятеркой, производит две гармонии – равнодлинную и продолговатую".

Прокл дал этим гармониям численные определения. Равнодлинную (ἰσομήκης или ταυτομήκη [117, 37_{20}; 39_{20}]) гармонию, которую он называет также "равной равное число раз": "ἰσάκις ἴση" [117, 37_{18}] (у В.Н.Карпова – "равно-равная"), он определил как площадь квадрата со стороной 100, т.е. определил ее значение равным 100 · 100 = 10000 = μύρια [117, 37_{17}]. Продолговатую (προμήκης [117, 37_{20}]) гармонию он определил как площадь прямоугольника со сторонами 100 и 75, т.е. определил ее значение равным

7500 = ζφ' [117, 37₁₈]. Продолговатую гармонию он определил также как сумму чисел 27 · 100 + 48 · 100 = 2700 + 4800 = 7500 [117, 38₅₋₈].

Благодаря огромному авторитету Прокла все без исключения позднейшие комментаторы полагают его толкование слов ἰσομήχη и κρομήχει истинным и его равнодлинную и продолговатую гармонии приписывают Платону, причем "равнодлинную" гармонию переименовали в "равностороннюю", или "квадратную", гармонию. Например, Гульч говорит: "То, что произведение, в частности квадрат, обозначается как гармония, не должно удивлять. Продолговатая гармония должна состоять из двух неравных сомножителей" [75, 46]. Джоветт пишет: "Две гармонии; первая квадратная..., вторая... продолговатая" [132, 546 С]. Адам говорит: "Гармония 3600² (квадратная. - М.П.) и гармония 4800 х 2700 (продолговатая. - М.П.)" [89, 205-206]. Этой общепринятой традиции следуют и А.Ф.Лосев [17, 320, 323], А.Н.Егунов [28, 358], А.А.Тахо-Годи [28, 638], приписывая квадратную или равностороннюю и продолговатую гармонии Платону и полагая, что: "Квадратную гармонию" Платон понимает как совершенную, определяющую собой устойчивое состояние "идеального общества", а "продолговатую гармонию" понимает как символ гибели идеального государства и идеального человека" [17, 323].

Начиная с эпохи Возрождения, усилия авторов, занимавшихся проблемой "Платоновского числа", сосредоточиваются на вычислении его значения. При этом, учитывая, что древние греки называли числом только конечное множество единиц (определение 2 седьмой книги "Начал" Евклида), все авторы полагали, что "брачное число" должно быть конечным.

Приводим некоторые значения его, предложенные различными авторами [58, 6-8, 10-11, 13-16]. Ученый компилятор Рафаэль Маффи (1452-1522) по прозвищу "Вольтерран" (родился в м. Вольтерра) в XXXV книге "Комментариев" (Рим, 1506) предложил число 1728, как куб суммы сторон пифагорейского прямоугольного треугольника (3 + + 4 + 5 = 12), рассматривая по Плутарху его катеты три и четыре, как увеличенный на треть базис, соединение их с гипотенузой, как соединение его с пятеркой, и, следуя Аристотелю, возвел это соединение в куб ("рождается кубически"). В XXXVI же книге "Комментариев", где Маффи комментирует "Политику" Аристотеля, он предложил число 20736 = 12⁴. По сообщению Барочи, Жак Лефевр из Этапля в Пикардии (1440 или 1455 - 1537) в его комментарии к V книге "Политики" Аристотеля предложил это же число 1728 также как куб суммы чисел 3 + 4 + 5 = 12. Также и Франциск Барочи предложил это же число 1728. Джеронимо Кардано (1501-1576) в сочинении

"О пропорциях" предложил число 8128 = $(2^7 - 1) \cdot 2^6$ – четвертый член последовательности совершенных чисел, определяющихся формулой $N_{сов.} = (2^{n+1} - 1) \cdot 2^n$, где $n = 1, 2, \ldots$; $n + 1$ – простое число ("Начала" Евклида, IX-36).

Марен Мерсенн (1588-1648) предложил число 729, полагая вслед за Аристотелем, что "брачное число" должно быть кубом ("рождается кубически"), и определяя этот куб как стократно увеличенный на треть базис: 100 (3 + 4), дополненный числом 29. Аристотелевским увеличенным на треть базисом Мерсенн полагал сумму катетов пифагорейского прямоугольного треугольника (3 + 4). Эрнст Шнейдер (1786-1856) в диссертации о "Платоновском числе" считал, что это число – период человеческого потомства и в нем есть два множителя 8 и 27, являющиеся конечными членами двух прогрессий (1 : 2 : : 4 : 8; 1 : 3 : 9 : 27), которыми философ II в. н.э. Адраст Афродисийский представлял данную Платоном в диалоге "Тимей" /29, 475, 668/ последовательность 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27, распологая ее в виде двух прогрессий по сторонам угла, в вершине которого он помещал единицу (рис. 3). Фридрих Фрис (1773-1843) в диссертации о

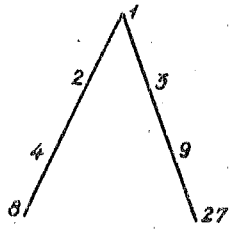


Рис. 3

"Платоновском числе" полагал, что оно равно числу 5040, которое он получил, умножая квадрат $12^2 = 144$ на 35 – сумму кубов двойки и тройки. Фридрих Шлейермахер (1768-1834), отправляясь от работы Шнейдера, полагал "брачное число" равным 46656, вычисляя его как квадрат 216 или как произведение членов прогрессии 8 : 12 : 18 : : 27. Александр Жозеф Венсан (1797-1868) рассматривал число 216 как катет три пифагорейского прямоугольного треугольника, увеличенный в 72 раза и определил "брачное число" как сумму сторон этого увеличенного треугольника – (3 + 4 + 5) x 72 = 864. Теодор-Анри Мартен (1813 – ?), следуя Венсану, также принимает "брачное число" равным 864. Эдуард Целлер (1814-1908), так же как Шнейдер, принимает "брачное число" равным периоду человеческого потомства, полагая, что его увеличенный на треть базис (который Целлер принимает равным 4/3) равен периоду божественного рождения, равному

по Целлеру 10000 годам. Отсюда период человеческого потомства – "брачное число" – равен 3/4 х 10000 = 7500 годам.

По мнению Шнейдера, Целлера, Зуземиля и позднейших комментаторов фрагмента 546 ВС, "божественное рождение", о котором Платон говорит в начале этого фрагмента: "θείῳ μὲν γεννητῷ..." – это космос. По их мнению, словами: "ἔστι ... περίοδος" он говорит о периоде – промежутке времени кругооборота этого божественного рождения – космоса. Словами же "ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος" он говорит о некотором совершенном числе, которым охватывается = измеряется этот период = промежуток времени. Словами же: "ἀνθρωπείῳ δὲ ἐν ᾧ πρώτῳ..." Платон говорит о человеческом потомстве и о некотором (брачном) числе, соответствующем его периоду.

Целлер и Зуземиль полагают, что промежутком времени, в течение которого происходит кругооборот божественного рождения космоса, является так называемый "мировой год", о котором Платон говорит в диалоге "Тимей" (39 D), т.е. промежуток времени, в течение которого Солнце, Луна и планеты возвращаются в исходное положение на небе. Из фрагментов в диалогах Платона "Федр" (248 С, 294 А) и "Тимей" (23 Е) они заключают, что продолжительность "мирового года" Платон принимал равной 10000 солнечным годам, и полагают, что он это число заимствовал у пифагорейцев. По мнению Целлера и Зуземиля, у них был свой мировой год, продолжительность которого они принимали равной 10000 солнечным годам, определяя ее двумя совершенными = священными числами – большой десяткой = 10 и малой десяткой = 4 (число 4 они называли малой десяткой, так как 1 + 2 + 3 + 4 = 10) : 10^4 = 10000. Ж.Унцикер следует Целлеру и принимает "брачное число" равным 7500. Поль Таннери принимает "брачное число" равным 2700. Бенедикт Ротлауф в своей докторской диссертации, следуя Целлеру и Унцикеру, также принимает "брачное число" равным 7500. Жан Дюпюи [58, 20, 44] вычисляет его как сумму кубов $3^3 + 4^3 + 5^3$ = 216, умноженную на 100: 216 х 100 = 21600. Фридрих Гульч вычисляет его как 36^2 х 100^2 = 12960000 [75, 45], отправляясь от числа 36, как от увеличенного на треть базиса, соединенного с пятеркой и трижды увеличенного, толкуя слова "τρὶς αὐξηθείς" = "трижды увеличенный", не по Аристотелю: "трижды" = "кубически", а как "увеличенный в три раза". Увеличенный на треть базис он принимает, так же как Мерсенн, равным 3 + 4 = 7, его соединение с пятеркой он полагает равным сумме 7 + 5 = 12, тройное увеличение этого соединения равным 12 х 3 = 36.

Полученное Гульчем значение "брачного числа" 12960000, равное произведению чисел Прокла 2700 и 4800, признано всеми позд-

нейшими комментаторами более обоснованным, чем все ранее предложенные значения его. Дальнейшие усилия сводились к всестороннему обоснованию этого числа.

Первым, кто после Гульча сделал попытку дальнейшего обоснования числа 12960000 был Джемс Адам. Он пришел к этому числу следующим образом: полагая увеличенный на треть базис не суммой тройки и четверки, как считали Мерсенн и Гульч, а произведением их: 3 x 4 = 12. Соединением его с пятеркой он полагает не сложение 12 с пятеркой, а умножение 12 на 5, т.е. 12 x 5 = 60. Тройным увеличением этого увеличенного на треть базиса, соединенного с пятеркой, он полагает троекратное умножение его самого на себя (рис.4).

$$\underbrace{60\cdot 60}_{1}\cdot\underbrace{60\cdot 60}_{2\quad 3}=60^4$$

Рис. 4

Таким образом он получает число Гульча: $12960000 = 60^4$. Дж.Адам пишет, что это число "производят две гармонии", т.е. что оно является и квадратной и продолговатой гармониями, другими словами, и квадратным и продолговатым числом. Квадратной гармонией или квадратным числом оно является потому, что может быть представлено квадратом (со стороной 3600). Продолговатой гармонией или продолговатым числом оно является потому, что может быть представлено продолговатым (т.е. с неравными сторонами) прямоугольником (со сторонами 2700 и 4800). Называя этот прямоугольник продолговатой гармонией, т.е. продолговатым числом, Дж.Адам ссылается на раздел 148 А так называемого "Феодорова места" в диалоге Платона "Теэтет" /39, 206-207/, в котором Платоном дано определение продолговатого числа. Эта ссылка является на самом деле грубой математической ошибкой, доказывающей, что Дж.Адам не понял принципиальной разницы между квадратным и продолговатым числами, указанной Платоном в 148 А. Продолговатым Платон называет число (числом древние греки называли только целое число), которое всегда (ἀεί) представляется прямоугольником с неравными целочисленными сторонами, т.е. прямоугольником, имеющим продолговатую форму. Таким образом, это число не может быть представлено прямоугольником с равными целочисленными сторонами, т.е. квадратом с целочисленными сторонами. Поэтому то, что квадратное число может быть представлено и квадратом с целочисленными сторонами и прямоугольником с неравными целочисленными сторонами, не значит, что оно является и квадратным и продолговатым числом - оно, несмотря на это, является только квадратным числом. Продолговатое число также может быть представлено квадратом, но стороны его будут не це-

лочисленными, а иррациональными. Стороны таких квадратов Платон называет δυνάμεις ("Теэтет" 148 В). Поэтому, полагая, что число 12960000 является и квадратной и продолговатой гармониями, т.е. квадратным и продолговатым числом, Дж.Адам допустил принципиальную математическую ошибку, которую, как мы полагаем, следуя ему, повторил и А.Ф.Лосев: "Получаемое число 48, умноженное на сто, и создает одну сторону продолговатого числа" [17, 324]. Однако первым, кто ее допустил, был Гульч, полагая, что квадратная и продолговатая гармонии должны быть равны друг другу и представляя продолговатую гармонию произведением двух неравных сомножителей: $700\sqrt{\frac{48}{7}} \times 2700\sqrt{\frac{48}{7}} = 4800 \times 2700 = 12960000$ [75, 49].

Представляя квадратную гармонию числом 10000, продолговатую гармонию числом 7500, Прокл этой ошибки не допустил, так как число 7500 не может быть представлено квадратом с целочисленными сторонами, а только квадратом с иррациональными сторонами.

Крупнейший французский платоновед Август Дье́, допуская ту же ошибку и полагая, что квадратная и продолговатая гармонии должны быть равны друг другу, выражаться одним и тем же числом, обвиняет Прокла, выражающего их двумя числами, в "дуализме". Его обвинение поддерживает допустивший ту же математическую ошибку швейцарский филолог А.Альверс [40, 13]. Но квадратная и продолговатая гармонии не могут быть равны друг другу. Поэтому их обвинение несправедливо.

Пытаясь согласовать стороны его квадратной и продолговатой гармоний с текстом Платона, Дж.Адам объясняет их так: "Одна из этих двух гармоний есть равная равному числу раз, т.е., таким образом, есть много раз 100, другими словами есть квадрат, каждая из сторон которого есть определенное число раз 100, т.е. 36 раз 100, ибо $3600^2 = 12960000$. Таким образом, определяя сторону его квадратной гармонии, Дж.Адам пользуется тем же числом 36, которое Гульч считал увеличенным на треть базисом, соединенным с пятеркой, и трижды увеличенным. Следуя Гульчу [75, 47-48] и полагая, что слова фрагмента 546 ВС "сто кубов тройки" также относятся к двум гармониям, и именно к продолговатой, Дж.Адам считает, что эти слова являются определением одной из сторон продолговатой гармонии, равной, таким образом, $100^3 = 2700$. Вторую сторону ее он определяет толкованием слов Платона "ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων βητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν" — как: "Сто квадратов рациональных диагоналей пятерки, без единицы каждый из них, иррациональных же без двойки". Так как квадрат иррациональной диагонали пятерки (т.е. диагонали квадра-

та со стороной пять) равен 50, то полагая квадратом иррациональной пятерки без двойки число 50 – 2 = 48, сто таких квадратов будут равны числу 4800, которое и является второй стороной продолговатой гармонии Дж.Адама, представленной прямоугольником 4800 х х 2700 = 12960000. Для большей убедительности этого определения второй стороны продолговатой гармонии Дж.Адам хочет показать, что не только сто квадратов иррациональных диагоналей пятерки без двойки, но и сто квадратов рациональных диагоналей пятерки без единицы определяют сторону 4800 продолговатой гармонии. Квадрат рациональной диагонали пятерки без единицы он определяет так: так как рациональной диагональю пятерки является семерка, то ее квадрат равен 49. Без единицы – 48. Сто таких квадратов равны 4800. Таким образом, квадрат рациональной диагонали пятерки без единицы оказывается равным квадрату иррациональной диагонали ее без двойки. Это равенство является на самом деле искусственным, следствием допущенной Дж.Адамом логической ошибки, которую не допускали историки математики (Гульч, Гюнтер, Выгодский и др.). Если квадратом иррациональной диагонали пятерки, у которого недостает двойки, считать число 50 – 2 = 48, т.е. число, у которого недостает двойки до квадрата истинной диагонали квадрата со стороной пять, то аналогично квадратом рациональной диагонали пятерки, у которой недостает единицы = квадратом рациональной диагонали пятерки без единицы, надо считать не число $48 = 7^2 - 1$, а число 49, у которого недостает единицы до квадрата 50 истинной диагонали этого квадрата. Так считали все историки математики и не могли считать иначе.

Следовательно, квадрат рациональной диагонали пятерки без единицы не равен квадрату иррациональной диагонали ее без двойки. Эта логическая ошибка Дж.Адама является уловкой с целью максимально согласовать сторону ее продолговатой гармонии, равную 4800, с текстом Платона.

Таким образом, "платоновская" рациональная диагональ пятерки без единицы – семерка (слово "платоновская" взято в кавычки не случайно. Ибо в действительности, как мы увидим дальше, Платон не говорит ни о рациональной, ни об иррациональной диагонали пятерки). Это квадратный корень из квадрата ее без единицы, т.е. из квадрата ее, у которого недостает единицы до квадрата 50 истинной диагонали квадрата со стороной пять, т.е. $\sqrt{50 - 1} = 7$. И аналогично "платоновская" иррациональная диагональ без двойки – это квадратный корень из квадрата ее без двойки, т.е. из квадрата ее, у которого недостает двойки до квадрата 50 истинной диагонали квадрата со стороной пять, т.е. $\sqrt{50 - 2} = \sqrt{48}$.

Числа 2700 и 4800, перемножением которых Дж.Адам получает свою продолговатую гармонию, это те же числа, сложением которых Прокл получает его продолговатую гармонию 7500. А.Альверс говорит, что эти числа можно без каких-либо сомнений заимствовать у Прокла [40, 13].

Вторым и последним после Гульча, кто пытался дать дальнейшее обоснование числу 12960000, был Август Дьé. А.Альверс считает данное им развитие обоснования Гульча окончательным решением вопроса о том, что это число действительно является истинным значением "Платоновского числа". Он говорит: "Только со времени Дьé однозначно установлено, что число 12960000, хотя впервые оно появилось у Гульча, является единственным платоновским "геометрическим числом" [40, 17]. А.Альверс пишет, что для установления этого надо было "устранить остатки дуализма" [40, 14] и эту задачу решил А.Дьé, найдя число 12960000 также в словах Платона: "*ἄνευρω πείῳ δὲ ἑνῷ χρώτῳ αὔξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι, τρεῖς ἀποστάσεις, τέτταρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι ἁμοιούντων τε καὶ ἀνομοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φθινόντων, πάντα προσήκοντα καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν*".

Точный перевод этих слов дан нами на с. 178-179, причем на основании приведенного нами ниже текстологического исследования ошибочное слово *ἀποστάσεις*, значащее "промежутки" или "расстояния", исправлено нами на истинное платоновское слово "*ἀποκαταστάσεις*", значащее "возвращения" (в прежнее состояние).

А.Дьё "решил" эту задачу следующим образом. Он полагает, что словом *δυνάμεναι*, значащим в точном переводе "могущественные", Платон говорит о гипотенузе, а словом *δυναστευόμεναι*, значащим в точном переводе "господствующие", - о катетах пифагорейского прямоугольного треугольника три, четыре, пять. Словом *αὔξήσεις*, значащим в точном переводе "увеличения", он говорит о некоторых перемножениях этих чисел. Словами *τέτταρας δὲ ὅρους*, значащими в точном переводе "четыре же границы", он говорит о четырех степенях произведений этих чисел. Словами *τρεῖς ἀποστάσεις* он говорит о трех промежутках между этими четырьмя степенями (рис. 5).

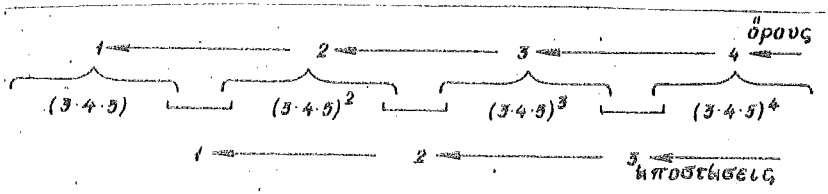


Рис. 5

Словами ὁμοιούντων, ἀνομοιούντων, αὐξόντων, φαινόντων, значащими в точном переводе "уподобляющих, расподобляющих, выращивающих, губящих", он говорит о телах. ὁμοιούντες – это тела, все три измерения которых одинаковы, т.е. это кубы, например 3 x 3 x 3. "ἀνομοιούντες" – это тела, все три измерения которых неодинаковы, например три, четыре, пять. Кроме того, Дьé, объединяя слова "ανομαούντων" и "αὐξοντων" и "ἀνομοιούντων" и "φαινόντων", находит у Платона тела "ἀνομοιούντες αὐξόντες" и "ανομοιούντες φαινόντες", т.е. тела, имеющие только два одинаковых измерения, "ἀνομοιούντες αὐξόντες" – это тела, у которых два одинаковых измерения меньше третьего; "ἀνομοιούντες φαινόντες" – это тела, у которых два одинаковых измерения больше третьего. Таким образом А.Дьé получает число 12960000 как четвертую степень произведения 3 x 4 x 5, рассматривая ее как четвертую границу (ὅρος). Следуя Адаму, он рассматривает также это произведение как увеличенный на треть базис, соединенный с пятеркой, а четвертую степень его $(3 \times 4 \times 5)^4$ как тройное увеличение его, полагая так же, как Адам, этим увеличением трехкратное умножение произведения 3 x 4 x 5 самого на себя. Полагая же число 12960000 значением двух гармоний и толкуя слова: "τὴν μέν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις" в смысле: "одна гармония образовывается таким образом, что некоторое число, умноженное само на себя, перемножается с квадратом числа 100", т.е. $x^2 \times 100^2 = 12960000$, откуда $x^2 = 36^2$, и рассматривая число 36^2 как (3 x 3 x 4) x (3 x 3 x 4), т.е. как число, образованное измерениями тел "αὐξόντες", а число 100^2 как (5 x 5 x 4) x (5 x 5 x 4), т.е. как число, образованное измерениями = числами тел "φαινόντες", он находит квадратную гармонию $36^2 \times 100^2$ также в области тел "αὐξόντες" и "φαινόντες". Кроме того, рассматривая произведение (3 x 4 x 5) x (3 x 4 x 5) x x (3 x 4 x 5) x (3 x 4 x 5) как число, образованное числами тел "ἀνομοιούντες", он находит число 12960000 также в области тел "ἀνομοιούντες". Получая же из ста квадратов иррациональных диагоналей пятерки без двойки число 4800 и это же число из ста квадратов рациональных диагоналей пятерки без единицы (т.е. повторяя ошибку Алама и др.), и полагая это число одной стороной прямоугольника, выражающего продолговатую гармонию, полагая, что о второй стороне его Платон говорит словами "сто кубов тройки", Дьé, как и его предшественники Гульч и Адам, получает продолговатую гармонию 12960000 перемножением чисел 2700 и 4800. Рассматривая же это произведение как (27 x 100) x (48 x 100) = (3 x 3 x x 3) x (5 x 5 x 4) x (4 x 4 x 3) x (5 x 5 x 4), т.е. как образованное числами тел "ὁμοιούντες" (3 x 3 x 3) и "φαινόντες"

(5 x 5 x 4) и (4 x 4 x 3), он находит продолговатую гармонию в области тел "ὁμοιούντες" и "φαινόντες".

Так как А.Дьѐ "обнаружил" число 12960000 в словах Платона: "αὐξήσεις δυνάμεναι τε καὶ δυναστευόμεναι, τρεῖς ἀποστάσεις, τέτταρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι ὁμοιούντων τε καὶ ἀνομοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φαινόντων", то А.Альверо полагает, что этим "обнаружением" он окончательно устранил "дуализм" и доказал, что число 12960000 действительно является истинным платоновским "брачным числом".

В туманной части речи Муз есть место, которое З.Гюнтер, Ф.Гульч, М.Я.Выгодский и другие считают самым ясным во всем фрагменте 546 ВС. Платон говорит в нем о рациональных и иррациональных диаметрах (= диагоналях) пятерки: "διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνός ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν...".

И древние и позднейшие комментаторы полагали, что пятеркой Платон называет в этих словах сторону квадрата, и он говорит о рациональной и иррациональной диагонали его. Это толкование платоновской пятерки мы находим уже в самом древнем, дошедшем до нашего времени, источнике о фрагменте 546 ВС (II или III в. н.э.) – Оксиринхском папирусе [133, 187], который, по мнению английских египтологов Гренфелла и Ганта, опубликовавших в 1922 г. 15-ю часть этого папируса, содержащую фрагмент 546 ВС, следует отнести скорее ко II, чем к III в. н.э. В имеющейся в этом папирусе глоссе к цитированному месту фрагмента 546 ВС изображен квадрат со стороной $\bar{\varepsilon}$ = пяти (рис. 6). Прокл истолковал цитированное место фраг-

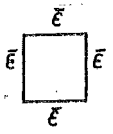


Рис. 6

мента 546 ВС так: "ἣ καὶ ὁ πλάτων εἶπεν τὸν ὀκτὼ καὶ τεττεράκοντα ἀριθμὸν εἶναι ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν μὲν πεμπάδος δεομένων ἑνός, ἀρρήτων δὲ δεομένων δυεῖν, ἐπειδὴ διπλάσιον ἡ διάμετρος δύναται τῆς πλευρᾶς" [117, 25 6–7], т.е.: "Также Платон говорит, существует число 48 из рациональных диагоналей пятерки, δεομένων единицы, иррациональных же δεομένων двойки, так как квадрат диагонали двойной квадрата стороны". Слова: "Так как квадрат диагонали двойной квадрата стороны" свидетельствуют, что Прокл также полагает пятерку стороной квадрата. Слово "δεομένων" он толкует в смысле недостатка (единицы у квадрата рациональной диагонали пятерки, равной семерке, до квадрата 50 истинной диагонали ее, и двойки у квадрата иррациональной диагонали пятерки до квад-

рата 50 истинной диагонали ее): "... τὸν ζ' ἀρῤῥόμενα, καὶ ἀπὸ τούτου τὸ τῶν μη', μονάδι ἔλαττον τοῦ ν'" [117, 38$_{20-21}$], т.е.: "взятая семеркой (рациональная диагональ. – М.П.), и квадрат на ней единицей меньше 50, "ἀῤῥήτου δὲ δύο μονάδι δι' ὧν ἑρμαίνει τὸν μη'" [117, 38$_{11-12}$], т.е.: "иррациональной же (диагонали и ее квадрат. – М.П.) двумя единицами, что означает 48". Полученное Проклом этим толкованием слов Платона число 48, которого в тексте Платона нет, он приписывает Платону: "Платон (! – М.П.) говорит существует число 48...".

Высоко ценя заслуги Прокла перед историей науки и вполне полагаясь на его толкование фрагмента 546 ВС (Гульч говорит о "заслугах, которые Прокл приобрел тщательным выбором источников и деятельностью строго исторического значения" [117, 394]), все позднейшие комментаторы фрагмента 546 ВС полагали утверждение Прокла, будто Платон говорит о числе 48, истинным. Гульч говорит (там же): "К общим предложениям пифагорейцев Прокл добавил выведенное из них Платоном (! – М.П.) объяснение числа 48". Данное Проклом толкование рациональной диагонали пятерки, как диагонали ее, у квадрата которой недостает единицы до квадрата 50 истинной диагонали ее (т.е. диагонали квадрата со стороной 5) и иррациональной диагонали пятерки, как диагонали ее, у квадрата которой недостает двойки до квадрата 50 истинной диагонали ее, было признано истинным всеми последующими комментаторами фрагмента 546 ВС. З.Гюнтер говорит: "Если в квадрате со стороной 5 провести диагональ, то она равна $\sqrt{50}$, т.е. иррациональна, если из этого числа 50 отнять единицу, то получают рациональное число $\sqrt{49} = 7$, если, напротив, отнять две единицы, то опять получают иррациональное число, именно $\sqrt{48}$. В этом смысл этого платоновского места" [65, 7]. М.Я.Выгодский говорит: "Это место Платона, как и все его "математические" высказывания, довольно темно и толкуется различно, но первое из его утверждений может иметь только тот смысл, что если сторона квадрата $a = 5$, то квадрат его диагонали $d^2 = 50$ на единицу превышает число 49, корень квадратный из которого рационален, т.е. $\sqrt{50 - 1}$, рационально. Второе утверждение Платона, может быть, выражает, что $50 - 2$ иррационально. Как бы то ни было (! – М.П.), в первом идет речь о приближенном выражении отношения диагонали к стороне и оно принимается равным 7 : 5" [10, 316].

М.Я.Выгодский, как и многие другие комментаторы этого места, полагает, что толкование рациональной диагонали пятерки в смысле $\sqrt{50 - 1}$ = семерке, а иррациональной диагонали ее в смысле $\sqrt{50 - 2} = \sqrt{48}$, принадлежит Проклу. Зуземиль [126, 372-373], Гульч [75, 48], Джоветт и Кемпбелл [109, 372], Дюпюи [58, 43], Адам [39, 207],

Альверс [40, 13], А.Ф.Лосев [17, 324] и другие – все без исключения комментаторы фрагмента 546 ВС полагают, что платоновская пятерка в этом фрагменте, в рассматриваемом месте его, – это сторона квадрата и что Платон говорит о рациональной диагонали его, равной семерке. Ф.Барочи [61, 42] истолковал слова "ἀρρήτων δὲ δυοῖν" как "две невыразимые диагонали" и полагал, что Платон говорит о двух невыразимых (иррациональных) диагоналях квадрата.

Прокл был также одним из первых (первым был, по-видимому, Плутарх), кто связал слова: "ἔστι δὲ θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος" с космосом, толкуя слово περίοδος в смысле периода или кругооборота космических сфер, полагая их "божественным рождением", о котором говорит Платон. И тот же Прокл был первым, кто дал словам "ἀνθρωπείῳ δὲ" толкование в смысле периода или кругооборота "человеческих рождений". Его комментарий к "Государству" [117], в котором специальный большой раздел посвящен фрагменту 546 ВС, был найден только в 1886 г. (Р.Шоэллем в библиотеке Ватикана. Рукопись была в плохом состоянии и потребовала больших усилий для реставрации ее) и опубликован только в 1901 г. (В.Кроллом при редакционном участии Ф.Гульча). Однако Э.Целлер мог пользоваться Базельским изданием комментариев Прокла к 1-й книге "Начал" Евклида, в которых Прокл также комментирует фрагмент 546 ВС. Не исключено, что комментаторы, следовавшие в главном концепции Э.Целлера и Ф.Зуземиля в толковании этих слов Платона, в том числе Б.Джоветт и Л.Кемпбелл [109, 367], А.Ф.Лосев [17, 320], А.Н.Егунов [28, 359], не подозревали, что начало этому толкованию было положено Плутархом и Проклом.

Целью нашего краткого обзора было показать, что, во-первых, аристотелевское толкование фразы: "ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν περιάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχηται τρὶς αὐξηθείς", приведшее к разбиению ее довольно большого "семантического комплекса" (Соколов, 1947), или, как мне кажется, точнее, ее "семантической цепочки" на два "смысловых отрезка" (Новиков, 1983) [21, 36], или на две "семантические цепочки": 1) "ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν περιάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχηται" и 2) "τρὶς αὐξηθείς", в результате чего первая цепочка оказалась составленной из трех "семантических звеньев": 1) "ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν" = "которых увеличенный на треть базис", 2) "περιάδι συζυγεὶς" = "соединенный с пятеркой", 3) "δύο ἁρμονίας παρέχηται" = "дает (или производит) две гармонии", – толкование, положенное, благодаря авторитету Аристотеля, знаменитыми древними комментаторами – Филоном Александрийским, Плутархом и Проклом Диадохом в основу их толкований этой фразы и развитое ими, – в течение почти двух с

половиной тысячелетий продолжало оставаться незыблемой основой всех последующих толкований этой фразы, вплоть до наших дней.

Во-вторых, что такой же красной нитью почти через два с половиной тысячелетия прошло аристотелевское толкование слова "περίοδος", как промежутка времени, с различными модификациями его, как периода или кругооборота божественного рождения, человеческого рождения и т.д.

В-третьих, что выделение Аристотелем слов "τρὶς αὐξηθείς" во второй смысловой отрезок, поясняющий первый смысловой отрезок: каким образом соединение увеличенного на треть базиса с пятеркой производит две гармонии - "если геометрическое число этого соединения рождается кубически", или в модификации позднейших комментаторов: если это соединение будет возведено в куб или будет умножено на три, или будет трижды умножено само на себя и т.д., привело: а) к мнению, что "геометрическое число" Платона является аристотелевским геометрическим числом соединения увеличенного на треть базиса с пятеркой и это "геометрическое число" "рождается" из этого соединения с помощью некоторой операции - либо возведения его в куб, либо умножения его на три, и т.п., смотря по тому, как понимать слова "τρὶς αὐξηθείς" = трижды увеличенный - то ли возведение в куб, то ли умножение на три, и т.д.; б) к мнению, что так как это "кубическое рождение" "геометрического числа" дает две гармонии, т.е. его "рождение" аналогично "рождению" двух гармоний, то обе гармонии являются этим "геометрическим числом", следовательно, должны быть равны друг другу (отсюда необходимость устранения "дуализма" этих гармоний); в) поставило "смысловой отрезок", или "семантический комплекс", или "семантическую цепочку", следующую за словами "τρὶς αὐξηθείς": "τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις... ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος", в прямую зависимость от слов "δύο ἁρμονίας", - превратило всю эту семантическую цепочку в пояснение слов "δύο ἁρμονίας". Превращение этой семантической цепочки в пояснение слов "δύο ἁρμονίας" привело Прокла к "открытию", что этими двумя гармониями являются равнодлинная и продолговатая гармонии - "открытию", ставшему благодаря огромному авторитету Прокла в течение почти 16-ти веков незыблемой основой толкований "семантического комплекса": "τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις... ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος".

В-четвертых, что данное Проклом толкование части этой "семантической цепочки": "... διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν ...", полагающее пятерку стороной квадрата (аналогично толкованию неизвестного древнего комментатора в Оксиринхском папирусе, восходящему, вероятно, к IV в.

до н.э.), полагающее, что Платон говорит о рациональной диагонали этого квадрата, у квадрата которой недостает единицы, и об иррациональной диагонали его, у квадрата которой недостает двойки, благодаря огромному авторитету Прокла, стало незыблемой основой всех последующих толкований этих слов Платона, вплоть до наших дней.

Для большей наглядности проследим влияние толкований Аристотеля на следующих примерах.

I. "...ἐπίτριτας πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς...". Ф.Шлейермахер говорит: "Четырехтретный корень (т.е. корень = базис, увеличенный на 1/3, минус единица и плюс 1/3 = 4/3. – М.П.), сопряженный с пятеркой" [107, 358]. В.Н.Карпов пишет: "Этот полночетвертной корень, по словам Муз (! – М.П.), слагается с пятерицею, помноженною на три, и дает две гармонии" [30, 403-404]. Ж.Дюпюи говорит: "Фундаментальные числа, в отношении четырех третьих, соединенные с пятеркой" [58, 22]. Дж.Адам пишет: "Увеличенный на треть базис, т.е. 3/4, соединен или сочетается браком с пятеркой" [39, 206]. А.В.Лосев пишет: "Из них отношение 4 : 3, в качестве базы, сопряженное с пятеркой" [17, 320].

II. "περίοδος". М.Мерсенн говорит: "Платон полагает, что мир обновляется потопами и большими пожарами, попеременно, через некоторое число лет, измеряющееся совершенным числом, которым является шесть" [88, 424]. Ф.Шлейермахер говорит: "Божественно рожденное имеет кругооборот, охватывающийся совершенным числом" [107, 357]. Ф.Зуземиль уверяет: "Так как божественно рожденное есть, как уже Плутарх заметил, космос, период жизни которого, таким образом, мировой год, и числом содержащихся в нем солнечных лет, должно быть, согласно изложенному, только число 10000" [126, 373]. Ж.Дюпюи полагает: "Платон верил в большой год, промежуток времени, после которого Солнце, Луна и планеты возвращаются в те же самые пункты неба. Продолжительность его неизвестна. Это очевидно тот период, о котором говорят Музы" [58, 22]. Б.Джоветт и Л.Кемпбелл говорят: "περίοδος – это время, в течение которого происходит кругооборот. Совершенное число – это число, которым охватывается период, в течение которого происходит кругооборот божественного рождения" [109, 367]. Дж.Адам полагает: "Совершенное число – это период, выражающий созревание вселенной, т.е. время, которое занимает ее созидание" [39, 204]. А.Ф.Лосев [17, 320] и А.Н.Егунов также полагают, что слово "περίοδος" выражает кругооборот божественного и человеческого потомства (совершающийся, естественно, в течение некоторого промежутка времени), например А.Н.Егунов, руководствовавшийся комментированным изданием

Б.Джоветта и Л.Кемпбелла, пишет: "Для божественного потомства существует кругооборот, охватываемый совершенным числом..." /28,359/.

Прослеженный нами вкратце более чем двухтысячелетний путь попыток расшифровать фрагмент 546 ВС, начатый Аристотелем, продолженный и поддержанный Филоном Александрийским, Плутархом, Проклом Диадохом, а также комментаторами всех последующих веков вплоть до наших дней, в итоге привел к всеобщему убеждению, что проблема расшифровки этого фрагмента неразрешима.

Текстологическая загадка

До нашего времени дошли две самые древние рукописи сочинений Платона. Одна из них хранится в Оксфордской Бодлеанской библиотеке, другая - в Парижской Национальной библиотеке. Известна точная дата написания Бодлеанской рукописи - 895 г. Точная дата написания Парижской рукописи неизвестна, но ее относят приблизительно к этому же времени. Каждая из них содержит только часть диалогов Платона. В Бодлеанской рукописи диалога "Государство" нет. Парижская рукопись содержит восемь диалогов (две тетралогии - седьмую и восьмую). Восьмая содержит "Государство". Эта рукопись, имевшая сначала индекс 94, а затем 2087, была впервые исследована в 1811 г. крупнейшим немецким филологом-классиком Иммануилом Беккером. К тому времени она имела индекс 1807, под которым хранится в Парижской Национальной библиотеке и ныне и общеизвестна как Parisinus Grec. 1807.

Она является копией рукописи, принадлежавшей выдающемуся деятелю культуры Византийской империи Константинопольскому патриарху Фотию, возглавившему в IX в. при покровительстве императора Цезаря Барда византийский Ренессанс (в 886 г. он был сослан взошедшим на престол своим бывшим воспитанником - императором Львом VI Мудрым, сыном императора Василия I, доверившего Фотию его воспитание).

Как самая древняя из дошедших до нашего времени греческих рукописей сочинений Платона, содержащих седьмую и восьмую тетралогии, подлинник которой принадлежал столь тонкому знатоку и ценителю старинных греческих рукописей, каким был патриарх Фотий, эта рукопись, получившая в издании Беккера индекс "А", вместе с Парижской рукописью XV в. (Parisinus Grec. 1808), получившей в этом издании индекс "В", содержащей остальные 28 диалогов = 7 тетралогий (всего до нас дошли 36 диалогов = 9 тетралогий Платона, считающихся подлинными, и несколько диалогов, подлинность которых считается сомнительной), была положена Беккером в основу его издания греческого текста сочинений Платона /103/, явившегося фун-

даментом всех последующих изданий греческого текста его сочинений в XIX-XX вв. И если И.Беккер, а также его соотечественник и современник, крупнейший немецкий филолог-классик, издатель греческого текста сочинений Платона Фридрих Аст [104] еще позволили себе в их изданиях заменить в фрагменте 546 BC слово "κρομύχη", содержащееся в рукописи "А", словом "κρομύχει", содержащемся в этом фрагменте почти во всех рукописях итальянских библиотек, то издатель начала XX в. греческого текста сочинений Платона английский филолог-классик Джон Бернет [113], издание которого считается теперь наиболее авторитетным и на нем основываются все новейшие работы о сочинениях Платона (с этого издания сделан и новейший русский перевод под редакцией А.Ф.Лосева и В.Ф.Асмуса), не позволил себе даже этого единственного отступления в фрагменте 546 BC от рукописи "А", и в его издании этот фрагмент содержит "κρομύχη". Вероятно, Бернет руководствовался также тем, что и греческая рукопись XII в. - Марч. Гр. IV, 1, хранящаяся в Венецианской Национальной библиотеке Италии "Марчиана", также содержит "κρομύχη".

Казалось бы, текстологическая основа фрагмента 546 BC в издании Бернета достаточно надежна и на этом издании можно, как на надежном фундаменте, основывать толкования его. Однако истинное положение дела с текстологической основой фрагмента 546 BC далеко не так благополучно, как это кажется на первый взгляд. Сомнение в этом благополучии возникает, как только мы обращаемся к изданиям XVI в. греческого текста сочинений Платона.

И в изданном в 1513 г. [94] знаменитым Венецианским книгопечатником Альдом Мануцием Старшим первом печатном издании princeps греческого текста сочинений Платона, посвященном им папе Льву X, и в Базельском издании 1566 г. [100] крупного книгопечатника того времени Генриха Петра, и в знаменитом Женевском издании 1578 г. Жана де Серре и Анри Этьена [101] мы находим существенные отличия в передаче фрагмента 546 BC по сравнению с рукописью Parisinus Grec. 1807. Эти отличия касаются важнейших смысловых вех этого фрагмента, вокруг которых концентрируется его семантика.

В изданиях XIX и XX вв. важнейшей смысловой вехой в этом фрагменте являются слова "τρεῖς ἀποστάσεις" = три промежутка или расстояния. На этих словах строят свои толкования почти все комментаторы. Издания же XVI в. содержат в этом фрагменте слова "τρεῖς ἀποκαταστάσεις" = три возвращения (в прежнее состояние), т.е. совершенно отличные по смыслу от слов "τρεῖς ἀποστάσεις". От издания Бернета издания XVI в. отличаются в передаче фрагмента 546 BC еще тремя важными смысловыми вехами. Так, в издании

Бернета слова: "προμήκη, παρέκεται, ἀριθμῶν", в изданиях же XVI в. слова: "προμήκει, παρέκηται, ἀριθμόν". Как было указано, в изданиях Беккера и Аста, а также Штальбаума [102] как и в изданиях XVI в. – "προμήκει", но так же, как в издании Бернета: "παρέκεται" и "ἀριθμῶν". Слова "παρέκεται" и "ἀριθμῶν" содержатся в фрагменте 546 BC также во всех остальных изданиях XIX и XX вв. греческого текста сочинений Платона.

Возникает естественный вопрос: откуда редактор издания 1513 г. Марк Музурос и другие филологи XVI в., издававшие греческий текст "Государства", взяли эти три слова – "ἀποκαταστάσεις, παρέκηται, ἀριθμόν"?

В августе 1978 г. с этим вопросом в отношении слова "ἀποκαταστάσεις" я обратился в библиотеку им. В.И.Ленина. Ответили мне исполнявшая обязанности заведующей отделом рукописей Л.В.Тиганова и старший библиотекарь М.В.Подмарькова. Они сообщили, что ответить на этот вопрос они не могут, но дали ценную информацию о том, что в глоссе к фрагменту 546 BC, имеющейся в Оксиринхском папирусе, содержится слово "ἀποστάσεις". В сносках к основному тексту фрагмента в 546 BC, в которых И.Бернет указал на разночтения в этом фрагменте, тех рукописях, которые послужили основой его издания, слова "ἀποκαταστάσεις" нет. Л.В.Тиганова и М.В.Подмарькова сделали отсюда совершенно верный вывод, что и основная рукопись Parisinus Grec. 1807 и все остальные рукописи, указанные И.Бернетом в перечне рукописей, которыми он пользовался, содержат слово "ἀποστάσεις" (в справедливости этого вывода в отношении рукописи Parisinus Grec. 1807 я смог убедиться непосредственно по рукописи, так как Парижская Национальная библиотека прислала по моей просьбе копию фрагмента 546 BC из рукописи Parisinus Grec. 1807). А так как наиболее древний источник – Оксиринхский папирус – также содержит слово "ἀποστάσεις", то они высказали предположение, что поскольку Марк Музурос "опирался, как известно, в своем издании на позднюю гуманистическую традицию Платона", то "возможно, что в данном случае перед нами один из примеров интерпретации платоновского текста учеными гуманистами".

Но их предположение не могло быть решением этого вопроса, решение которого тем более важно, что не только комментаторы XIX и XX вв. основывались на слове "ἀποστάσεις", но и Марсилио Фичино в своем латинском переводе сочинений Платона (Венеция, 1491) пишет "tres distantiae" = "три расстояния", и словом "ἀποστάσεις" пользуется также Прокл [117, 37 14].

Насколько важно решение этого вопроса, видно также из того, что, например, Дж.Адам полагает [39, 205], что эти три промежут-

ка или расстояния есть не что иное, как длина, ширина и высота, находящиеся между четырьмя пределами, строя, таким образом, на слове "ἀποστάσεις" свое толкование значительной части фрагмента 546 DC. Свое толкование он поясняет, полагая AB, BC, CD тремя промежутками, а точки A, B, C, D (рис. 7) – четырьмя пределами,

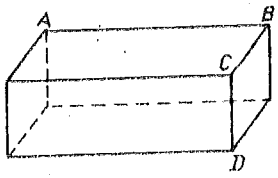


Рис. 7

между которыми находятся эти три промежутка. А.Ф.Лосев, присоединяясь к этому толкованию и развивая его, пишет: "Дж.Адам на основании обширного количества текстов разных авторов доказывает, что эти три промежутка нужно понимать как длину, ширину и высоту, другими словами, вся стихия человеческих рождений и созиданий мыслится Платоном как трехмерное тело, что никак не должно удивлять нас после всех наших разысканий" /17, 321/. На этом толковании слов "три промежутка" А.Ф.Лосев пришел к выводу, будто Платон говорит о "ступенях развития человеческого тела", будто он "представил нам человеческие порождения в виде некоего трехмерного тела", будто это является "числовым геометризмом" Платона, который "для нас и является самым важным", будто из этого "геометрического числового тела" "получаются две "гармонии", "одну из них он (Платон. – М.Н.) называет "квадратной", а другую – "продолговатой", и т.д. /17, 321-323/.

Однако трудно представить себе, чтобы такой добросовестный ученый, каким был грек из Крита – Марк Музурос, знаменитый член Новой Академии Альда Мануция, которому было доверено редактирование столь ответственного издания, как первое печатное издание греческого текста полного собрания сочинений Платона, возведенный в 1516 г. (в 1517 г. Музурос умер) папой Львом X в сан архиепископа Эмбазийского, мог позволить себе непростительный произвол: добавление четырех букв κατα в слово "ἀποστάσεις", превращающих это слово в слово "ἀποκαταστάσεις", имеющее совершенно другое значение. Л.В.Тиганова и М.В.Подмарькова писали: "Интересно посмотреть, как выглядит наш фрагмент в двух знаменитых списках Платона XV в. – в Venetus 184 (рукопись Виссариона Никейского) и Monacensis 237; обе они использованы в издании Беккера". Эти рукописи использованы не только в издании Беккера, но и в издании Бер-

нета, и так как он слова "ἀποκαταστάσεις" в сносках не приводит, то ясно, что его нет и в этих рукописях. Все же, так как английские филологи-классики Б.Джоветт и Л.Кемпбелл /108, 93/ и французский филолог-классик XX в. А.Аллен /42, 316/ полагают, что главной рукописью, на которую Музурос опирался в своем издании греческого текста сочинений Платона, была рукопись Виссариона Никейского *Venetus* (Марч, 184), хранящаяся в Венецианской библиотеке "Марчиана", то я обратился в эту библиотеку с просьбой сообщить, какое слово содержится в рукописях, которые она имеет: "ἀποστάσεις" или "ἀποκαταστάσεις". Библиотека сообщила, что самые древние рукописи, содержащие "Государство", которые она имеет, относятся к XII в. - Марч. Гр. Z 185 и Марч. Гр. IV, 1. В обоих содержится слово "ἀποστάσεις". Также сообщила, что и в рукописи XV в. Марч. Гр. Z 187 (эта рукопись также принадлежала Виссариону Никейскому) содержится "ἀποστάσεις". О рукописи же Марч. 184 ничего не сообщила. Так как в связи с этим возник вопрос, есть ли еще эта рукопись в библиотеке "Марчиана", я обратился за помощью к старшему научному сотруднику сектора Византии Института мировой литературы (ИМЛИ) АН СССР, профессору Б.Л.Фонкичу, так как прочел в Византийском временнике, что он занимается исследованиями Византийских рукописей и в связи с этим был в Италии. Он посоветовал обратиться к профессору Элпидио Миони - директору Института византийской и новогреческой литературы Падуанского университета, как к "лучшему и единственному специалисту по греческим рукописям в Венеции, хотя и живет в Падуе". Профессор Миони сообщил, что в рукописи Марч. Гр. Z 184 также содержится слово "ἀποστάσεις", что эта, принадлежавшая Виссариону Никейскому рукопись, написана Джиованни Розоссом в 1456-1458 гг. и является копией какой-то рукописи библиотеки Ватикана (какой именно, он не сообщил). Так как крупнейший исследователь XIX в. греческих рукописей сочинений Платона Мартин Шанц сообщает, что Музурос пользовался также рукописями Флорентийской библиотеки "Лаврентиана", основанной сыном Козимо Медичи - Лоренцо Медичи (Лоренцо Великолепным), то я обратился в эту библиотеку с просьбой сообщить, какое слово содержится в рукописях, которые она имеет: "ἀποστάσεις" или "ἀποκαταστάσεις". Библиотека сообщила, что рукопись Лавр. Плут. 85, 6, которую упоминает М.Шанц, содержит только I и II книги "Государства", рукопись же Лавр. Плут. 85, 9 содержит слово "ἀποστάσεις". Круг замыкался. Вопрос, откуда Музурос взял слово "ἀποκαταστάσεις", оказывался неразрешимым.

Оставалась единственная надежда на рукописи библиотеки Ватикана. Я узнал, что библиотека Ватикана имеет шесть греческих ру-

кописей сочинений Платона, содержащих "Государство": Ватик. Гр. 61; Ватик. Гр. 226; Ватик. Гр. 229; Ватик. Гр. 1029. 11; Ватик. Гр. 2196; Урб. Гр. 31.

Наугад попросил библиотеку Ватикана прислать копии фрагмента 546 ВС из рукописей Ватик. Гр. 226 и Ватик. Гр. 229. Рукопись Ватик. Гр. 226 есть в перечнях рукописей, приведенных в изданиях греческого текста сочинений Платона Беккера, Аста, Штальбаума, Шанца, Джоветта и Кемпбелла (издавших только "Государство" - в трех томах), Бернета. Рукописи же Ватик. Гр. 229 ни в одном из перечней нет.

Получив ответ из библиотеки Ватикана, я обнаружил, что рукопись Ватик. Гр. 226 содержала слово "ἀποστάσεις", а рукопись Ватик. Гр. 229 - слово "ἀποκαταστάσεις".

Таким образом, не случайно рукописи Ватик. Гр. 229 нет ни в одном из перечней рукописей, приведенных в изданиях XIX и XX вв. греческого текста сочинений Платона. По неизвестным причинам она ускользнула от внимания всех филологов-классиков XIX-XX вв., издававших греческий текст сочинений Платона.

Таким образом, почти 500-летняя загадка, на какой рукописи Музурос основал свое издание греческого текста "Государства" (и не только "Государства", но и некоторых других диалогов), совершенно неожиданно нашла свое разрешение.

В апреле 1981 г. библиотека Ватикана по моей просьбе отправила мне копии фрагмента 546 ВС из остальных четырех греческих рукописей, содержащих "Государство", которые она имеет: Ватик. Гр. 61, Ватик. Гр. 1029. 11, Ватик. Гр. 2196 и Урб. Гр. 31, которые я получил в мае. Оказалось, что слово "ἀποκαταστάσεις" содержат и рукописи Ватик. Гр. 2196 и Урб. Гр. 31. Этих рукописей также нет ни в одном из перечней рукописей в упомянутых изданиях греческого текста сочинений Платона. Рукописи же Ватик. Гр. 61 и Ватик. Гр. 1029. 11, так же как рукопись Ватик. Гр. 226, содержат "ἀποστάσεις".

Рукопись Ватик. Гр. 61 есть в перечнях рукописей в изданиях Беккера (индекс *m*) и Бернета. Рукопись же Ватик. Гр. 1029 (1 и 11) есть в перечне рукописей в издании Аста.

Картина постепенно прояснялась. Либо филологи-классики XIX и XX вв., издававшие греческий текст "Государства", не знали о существовании рукописей Ватик. Гр. 229, Ватик. Гр. 2196, Урб. Гр. 31, либо если и знали, то считали их некачественными, не придавали им значения и поэтому не пользовались ими и не включили их в перечни рукописей, которыми они пользовались. И мне представляется весьма вероятным, что мнению о низком качестве этих рукописей

весьма способствовали именно содержащиеся в них слова "ἀποκαταστάσεις, παρέκηται, ἀριθμόν ". Эти слова считали, несомненно, ошибкой переписчиков, так как не только в остальных трех рукописях библиотеки Ватикана, содержащих "Государство" (в рукописи Ват. Гр. 61 также "ἀποστάσεις " и "ἀριθμῶν ", но "παρέκηται"), но во всех, содержащих "Государство" рукописях других итальянских, Парижской, вообще всех европейских библиотек, в фрагменте 546 ВС содержатся слова "ἀποστάσεις, παρέκεται, ἀριθμῶν".

Поэтому если Бернет знал о существовании рукописей Ватик. Гр. 229, Ватик. Гр. 2196, Урб. Гр. 31, то, полагая слова "ἀποκαταστάσεις, παρέκηται, ἀριθμόν ", безусловно ошибочными, он не включил эти рукописи в перечень рукописей, которыми он пользовался, а эти слова не привел в сносках. Одно из этих трех слов - "ἀποκαταστάσεις " - привел в сноске Аст и даже указал, что это слово "γράφεται " = "написано", т.е. имеется в рукописи. Но это "γράφεται " весьма сомнительно, так как ни одной рукописи, содержащей это слово, он в перечне рукописей не привел. Вероятно, он взял это слово из изданий XVI в. и, полагая, что оно взято из рукописи, написал "γράφεται" [104, 442].

Возникает вопрос: почему же Музурос остановился на рукописях, содержащих "ἀποκαταστάσεις, παρέκηται, ἀριθμόν ", а не на рукописях, содержащих "ἀποστάσεις, παρεκεται, ἀριθμῶν "? Ведь он, несомненно, знал, что рукопись Виссариона Никейского Марч. Гр. Z 184, содержащая все диалоги Платона, изготовленная знаменитым каллиграфом XV в. Джиованни Розоссом, также содержит "ἀποστάσεις " (так же как и рукопись Марч. Гр. Z. 187).

Кардинал Виссарион Никейский (ок. 1403-1472) передал в конце жизни свою обширную библиотеку с большим собранием греческих рукописей (600 рукописей) Венеции, с условием превращения ее в публичную. На фондах его библиотеки была основана знаменитая Венецианская библиотека св. Марка. И хотя она была построена только в середине XVI в., Музурос имел, конечно, доступ к рукописям Виссариона Никейского сразу после передачи их Венеции. Почему же Музурос остановился все же не на рукописях библиотеки Ватикана, содержащих ἀποστάσεις, а на рукописях, содержащих ἀποκαταστάσεις?

По аналогии с точкой зрения филологов XIX-XX вв., полагавших, что самой надежной являлась самая древняя греческая рукопись сочинений Платона, бывшая в их распоряжении, можно было предположить, что такой же точкой зрения руководствовался и Музурос. Для проверки этого предположения я обратился в библиотеку Ватикана с просьбой сообщить, к какому веку или к каким векам относятся шесть рукописей, содержащих "Государство", которые она имеет. Библиоте-

ка Ватикана сообщила, что располагает такими данными только относительно двух рукописей: Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196, т.е. именно относительно единственных двух рукописей, содержащих все три слова: "ἀποκαταστάσεις, παρέκρηται и ἀριθμόν".

В документах, присланных мне библиотекой Ватикана, значится, что эти рукописи относятся к XIV в. Так как рукописи Виссариона Никейского относятся к XV в. и содержат слово ἀποστάσεις, то, вероятно, и рукописи библиотеки Ватикана, содержащие это слово, относятся к XV в. Музурос знал, конечно, к какому веку относятся эти рукописи. И так как рукописи Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196 относятся к XIV в., то можно не сомневаться, что рукописи Ватик. Гр. 61, Ватик. Гр. 226 и Ватик. Гр. 1029, 11, содержащие ἀποστάσεις, относятся к XV в. Ибо Музурос, несомненно, поступил точно так, как поступили филологи XIX и XX вв.: выбрал для своего издания "Государства" и некоторых других диалогов, содержащихся в рукописях XIV в., именно эти рукописи, как самые древние, которыми он располагал: Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196, содержащие именно три слова "ἀποκαταστάσεις, παρέκρηται и ἀριθμόν".

Но возникает следующий вопрос. Рукописи библиотеки "Марчиана": Марч. Гр. Z 185 и Марч. Гр. IV, 1 также содержат слово ἀποστάσεις и относятся к XII в. Почему же Музурос остановился не на этих рукописях, а на менее древних рукописях библиотеки Ватикана?

Полагаю, причина следующая. Эти рукописи Виссариону Никейскому не принадлежали. Переданные им Венеции фонды его библиотеки начали, вероятно, заметно расширяться только после постройки в 1536-1554 гг. знаменитым Венецианским архитектором Якопо Сансовино в центре Венеции, на площади св. Марка (Сан-Марко, 7) великолепного здания Венецианской публичной библиотеки, получившей название библиотеки св. Марка (ныне Венецианская Национальная библиотека "Марчиана"). К этому времени относится, вероятно, и приобретение этих двух рукописей XII в., отсутствовавших в фондах библиотеки Виссариона Никейского. Следовательно, Музурос этими рукописями не располагал и самыми древними рукописями, бывшими в его распоряжении, были именно рукописи XIV в. библиотеки Ватикана: Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196.

Оказалось возможным также установить, что он основал издание греческого текста "Государства" только на этих двух рукописях, рукописью же Урб. Гр. 31 не пользовался, хотя она и содержит слова ἀποκαταστάσεις и παρέκρηται и, вероятно, также относится к XIV в. Ибо эта рукопись содержит не ἀριθμόν, а ἀριθμῶν. Слово же ἀριθμόν, содержащееся в издании Музуроса и других изда-

ниях XУI в., содержится только в рукописях Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196. Следовательно, Музурос основал свое издание греческого текста "Государства" только на этих двух рукописях.

Библиотека в г. Урбино, родине Рафаэля, бывшим почти до конца XУ в. вотчиной влиятельного дома Монтефельтро, была основана в XУ в. герцогом Федериго Монтефельтро и располагала ценными фондами. Пополнение фондов библиотеки Ватикана было одной из забот римских пап. Библиотека Монтефельтро была приобретена папой Александром УII и в 1657 г. перевезена в Ватиканскую библиотеку, где ее фонды получили индекс Урб. Таким образом, во время Музуроса рукописи Урб. Гр. 31 в библиотеке Ватикана не было. Но он мог видеть ее в Урбино, где он, безусловно, был. Но слово ἀριφρᾶν, содержащееся в этой рукописи, доказывает, что если он и видел ее, то ею не пользовался.

Таким образом, можно считать установленным, что свое издание греческого текста "Государства" Музурос основал на двух рукописях XIУ в. - Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196. И не только "Государства".

Рукопись Ватик. Гр. 229, согласно присланным библиотекой Ватикана документам, содержит, кроме десяти книг "Государства", еще девять диалогов: Евтифрон, Критон, Апология Сократа, Федр, Парменид, Тимей Локр, Симпозиум, Федон, Горгий. Несколько диалогов, кроме "Государства", вероятно, четыре или пять, содержит и рукопись Ватик. Гр. 2196 (по объему эта рукопись, как следует из присланных документов, почти вдвое меньше, чем рукопись Ватик. Гр. 229, но какие она содержит диалоги, кроме "Государства", не указано). Таким образом, на рукописях XIУ в. Музурос мог основать издание греческого текста только десяти или пятнадцати диалогов. Издание греческого текста остальных диалогов он мог основать только на рукописях XУ в. Какие же это были рукописи? Может быть, это была содержащая все диалоги Платона рукопись Виссариона Никейского Марч. Гр. Z. 184? И тогда филологи XIX и XX вв. правы, утверждая, что главной основой его издания была именно эта рукопись. Однако сообщение профессора Миони, согласно которому рукопись Марч. Гр. Z. 184 является копией рукописи библиотеки Ватикана, позволяет утверждать, что на самом деле это не так.

Рукопись Марч. Гр. Z. 184, содержащая "Государство" и все остальные диалоги Платона, может быть копией только одной из рукописей библиотеки Ватикана, содержащих "Государство". Так как эта рукопись должна содержать и все остальные диалоги, то это позволяет установить, копией какой именно рукописи библиотеки Ватикана является рукопись Марч. Гр. Z. 184. Ибо единственной руко-

писью, содержащей "Государство" и все остальные диалоги Платона, является двухтомная рукопись XV в. Ватик. Гр. 1029. I и II.

Таким образом, Музурос в своем издании греческого текста сочинений Платона опирался на три рукописи: издание греческого текста "Государства" и еще десяти или пятнадцати диалогов он основал на рукописях XIV в. Ватик. Гр. 229 и 2196, издание же остальных диалогов он основал на рукописи XV в. Ватик. Гр. 1029. I и II. Это соответствует сообщению Альда Мануция, приведенному французским издателем сочинений Платона А.Ф.Дидо в его книге "Альд Мануций" [57], согласно которому Музурос пользовался несколькими рукописями.

Таким образом, оказывается, что именно Апостолическая библиотека Ватикана, занимающая ныне великолепное здание, построенное в 1588 г. выдающимся итальянским архитектором Доменико Фонтана, по поручению папы Сикста V, начавшая функционировать как публичная еще в 80-х годах XV в., в предоставленном ей папой Сикстом IV помещении под знаменитой Сикстинской капеллой, носящей его имя, украшенной гениальной росписью Микеланджело, была хранилищем рукописных сокровищ, которые послужили основой первого издания *princeps* греческого текста сочинений Платона.

Так как слова ἀποκαταστάσεις, παρέκρηται и ἀριαμόν Музуросом не вымышлены, а взяты из рукописей, то кроме их важнейшего значения для решения загадки о рукописях, на которых основано первое издание греческого текста сочинений Платона, эти слова ставят нас перед следующей фундаментальной текстологической проблемой: какие же слова были в платоновском подлиннике фрагмента 546 BC: ἀποστάσεις, παρέλεται, ἀριθμῶν или ἀποκαταστάσεις, παρέκρηται, ἀριαμόν? И перед этой же проблемой ставит нас слово προμήκει, содержащееся во всех рукописях библиотеки Ватикана, библиотек "Марчиана" и "Лаврентиана", кроме единственной рукописи библиотеки "Марчиана" Марч. Гр. IV, 1, содержащей προμήκη, и рукописи Parisinus Grec. 1807, также содержащей προμήκη. Какое же слово было в подлиннике Платона: προμήκει или προμήκη?

Если подлинник Платона содержал слово ἀποκαταστάσεις, то двухтысячелетняя история основанных на слове ἀποστάσεις толкований фрагмента 546 BC, включая толкование Прокла (Музурос не мог включить слово ἀποστάσεις в свое издание также потому, что он не мог знать о древности этого слова ни из комментария Прокла, содержащего его, открытого только в 1886 г., ни из Оксиринхского папируса, открытого только в начале XX в.), основана не на истинном слове Платона, а на его принципиальном искажении, явившемся либо результатом непростительной ошибки переписчиков (что мало-

вероятно), либо результатом непростительного произвола авторитетных комментаторов, считавших слова τρεῖς ἀποκαταστάσεις = "три возращения" несовместимыми со стоящими рядом словами "τέτταρας δὲ ὅρους" = "четыре же границы", считавших, что этим словам соответствуют слова "τρεῖς ἀποστάσεις" = "три промежутка или расстояния", так как между четырьмя границами должны быть три промежутка или расстояния, полагавших поэтому слово ἀποκαταστάσεις либо ошибкой переписчиков, либо недосмотром самого Платона, и "исправивших" в некоторых рукописях эту "ошибку" исключением из "ошибочного" слова "ἀποκαταστάσεις" четырех букв κατα , превратив его в слово "ἀποστάσεις", искажающее смысл этого места фрагмента 546 ВС. Благодаря авторитету комментаторов это ошибочное слово перешло в подавляющее большинство позднейших рукописей.

И является большим историческим счастьем, что сохранились до наших дней три рукописи: Ватик. Гр. 229, Ватик. Гр. 2196, Урб. Гр. 31, правильно воспроизводящие это важнейшее слово Платона.

Дальше мы увидим, что в подлиннике Платона было действительно слово ἀποκαταστάσεις.

Возникает вопрос: можно ли считать бо́льшую или меньшую древность дошедшей до нас рукописи критерием ее бо́льшей или меньшей точности в воспроизведении подлинника фрагмента 546 ВС? На этот вопрос можно ответить не колеблясь: ни в коем случае!

Промежуток времени, отделяющий от подлинника дошедшие до нас списки сочинений Платона, составляет почти 19 веков для списков XV в. и почти 13 веков для рукописи Parisinus Grec. 1807. Можно ли быть уверенным, что в течение этого большого промежутка времени ни один переписчик, следуя указанию какого-либо общепризнанного авторитета, не внес в какую-либо рукопись каких-либо "улучшений" в фрагмент 546 ВС, чтобы сделать этот темный фрагмент более ясным, более понятным?

Можно ли быть уверенным, что такие "улучшения", если они имели место, были внесены только в одну или несколько рукописей, а не абсолютно во все рукописи, так что уже в древности не осталось ни одной рукописи, точно воспроизводящей подлинник Платона? Можно ли, наконец, быть уверенным, что если все-таки в древности сохранились какие-либо рукописи, точно воспроизводившие подлинник фрагмента 546 ВС, и если после неоднократной в течение многих веков переписки этих правильных древних прототипов фрагмента 546 ВС до наших дней все-таки дошла рукопись, совершенно точно воспроизводящая подлинник фрагмента 546 ВС, то этой рукописью является именно рукопись IX в. Parisinus Grec. 1807, а не менее древние рукописи XIV в. Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196?

Уже сама постановка этого вопроса показывает, что такой уверенности быть не может. Наоборот, более предпочтительным является предположение, что рукописи Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196 восходят к более древнему и, может быть, более точно воспроизводящему подлинник фрагмента 546 ВС прототипу, чем рукопись Parisinus Grec. 1807. Ибо в этой рукописи, так же как и в дополняющей ее рукописи XV в. Parisinus Grec. 1808, диалоги Платона расположены в порядке, установленном автором I в. н.э. - ритором Фрасиллом.

Таким образом, как указал еще М.Шанц, прототипы рукописей, сохраняющих этот порядок расположения диалогов, не выходят за начало нашей эры /121, 46/. В рукописи же Ватик. Гр. 229 порядок расположения диалогов отличается от порядка расположения их, установленного Фрасиллом (так как библиотека Ватикана прислала данные только о порядке расположения диалогов в рукописи Ватик. Гр. 229, то я говорю только о порядке расположения их в этой рукописи. Но слова ἀποκαταστάσεις, παρέκηται, ἀριθμόν доказывают, что обе рукописи: Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196 происходят от одного и того же прототипа). Поэтому является весьма вероятным, что прототип рукописей XV в. Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196 более древний и более точно воспроизводящий подлинник фрагмента 546 ВС, чем прототип рукописи Parisinus Grec. 1807.

Таким образом, возникает текстологическая загадка: какие именно слова были в платоновском подлиннике фрагмента 546 ВС - ἀποστάσεις, παρέκεται, προμήκη, ἀριθμῶν или ἀποκαταστάσεις, παρέκηται, προμήκει, ἀριθμόν. Без решения этой текстологической загадки не приходится и говорить о возможности расшифровки фрагмента 546 ВС.

Если слова ἀποστάσεις, παρέκεται, προμήκη, ἀριθμῶν являются искажением подлинных слов Платона ἀποκαταστάσεις, παρέκηται, προμήκει, ἀριθμόν, то более двух тысячелетий пытались расшифровать не текст Платона, а текст, испорченный его комментаторами.

Если это действительно так (дальше мы увидим, что это действительно так), то как можно понять фрагмент 546 ВС не только в течение двух тысячелетий, но в течение любого, сколь угодно большого промежутка времени?

Но можно ли воскресить платоновский подлинник фрагмента 546 ВС через 2330 лет после смерти Платона? Вот в чем вопрос.

Математическим или нематематическим текстом является фрагмент 546 ВС?

Все без исключения комментаторы полагали, что фрагмент 546 ВС не является математическим текстом. Совершенное число, о котором в начале фрагмента 546 ВС говорит Платон, никто не считал имеющим какое-либо отношение к математической теории совершенных чисел, изложенной в "Началах" Евклида (Евклид, IX-36).

Французский математик-эллинист Ж.Дюпюи пишет: "Мы не верим, что число, о котором говорит Платон, является совершенным согласно определению арифметиков: оно имеет свойство охватывать период - это то, в чем состоит его совершенство" /58, 23/.

Б.Джоветт и Л.Кемпбелл пишут: "Совершенное число, охватывающее период, в течение которого божественное рождение совершает круг, может или не может соответствовать определению числа, равного сумме его делителей (Евклид, IX-36. - М.П.). Но Платон, вероятно, думал о более высоком и более сложном выражении, чем какой бы то ни было из простых членов, к которым относятся 6, 28, 496" (первые три члена последовательности совершенных чисел. - М.П.) /109, 367/.

И, действительно, нельзя же называть математическим текст, в котором говорится о каких-то таинственных трех промежутках, заполненных какими-то уподобляющими, расподобляющими, увеличивающими и исчезающими числами, - текст, в котором единственным "математическим" в кавычках, как пишет М.Я.Выгодский, высказыванием является высказывание о рациональной диагонали квадрата со стороной пять, у квадрата которой недостает единицы до квадрата истинной диагонали этого квадрата, и о иррациональной диагонали его, у квадрата которой недостает двойки до квадрата истинной диагонали его, даже если полагать, что рациональная диагональ понадобилась Платону для выражения приближенного отношения 7/5 диагонали квадрата к его стороне, а иррациональная диагональ для выражения иррациональности $\sqrt{48}$.

Нельзя же назвать математическим текст, в котором речь идет о каких-то таинственных двух гармониях, получающихся из какого-то "геометрически числового тела", текст, в котором речь идет о божественных и человеческих рождениях, о каких-то таинственных периодах их, в течение которых совершаются не менее таинственные кругообороты их, о каком-то таинственном, не имеющем ничего общего с математикой совершенном числе, охватывающем период божественных рождений.

А.Ф.Лосев пишет: "Конечно, всякий понимает, что те числа или

числовые гармонии, о которых говорил Платон, есть нечто чересчур сложное и непонятное, чересчур нагроможденное и нафантазированное". И он пытается оправдать Платона: "Однако это указывает только на то, что Платон чрезвычайно серьезно относился к математическому овладению действительностью и потому хотел представить дело в таком сложном и громоздком виде. Платон понимал всю сложность действительности и выражал ее так, как мог. Во всяком случае, попытки числовым образом представить себе жизнь общества, его расцвет или увядание, заслуживают с нашей стороны всяческого признания. И в этом деле наивен и глуп не Платон, но те его бесчисленные комментаторы и излагатели, которые изучали Платона с высоты птичьего полета и слишком высоко ценили свои грубые историко-философские методы" [17, 325]. Но можно ли назвать текст, содержащий "попытки числовым образом представить себе жизнь общества", основанные на "нафантазированных числовых гармониях", математическим?

Семантическая загадка

Итак, является ли данная Аристотелем разбивка фразы "ὧν ἐπίτριτος πυκμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται τρὶς αὐξηθείς" на два смысловых отрезка или две семантические цепочки: 1) "ὧν ἐπίτριτος πυκμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται" и 2) "τρὶς αὐξηθείς", лежавшая в основе всех толкований этой фразы более двух тысячелетий, вплоть до нашего времени, семантически единственно возможной?

Если разбивка этой фразы на эти две семантические цепочки является семантически единственно возможной, то тогда единственно семантически возможной является и разбивка смысловой цепочки "ὧν ἐπίτριτος πυκμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται" на семантические звенья: 1) "ὧν ἐπίτριτος πυκμὴν" = "которых увеличенный на треть базис", 2) "πεμπάδι συζυγεὶς" = "с пятеркой соединенный", 3) "δύο ἁρμονίας παρέχεται" = "две гармонии дает". И тогда второй смысловой отрезок – "τρὶς αὐξηθείς" = "трижды увеличенный" получает единственный смысл ответа на вопрос, каким образом этот увеличенный на треть базис, соединенный с пятеркой, дает две гармонии – он дает их "трижды увеличенный", т.е. будучи трижды увеличенным.

Следствием аристотелевской разбивки этой фразы на два смысловых отрезка является вопрос: о какой же операции Платон говорит словами "трижды увеличенный"? То ли это возведение в куб, то ли умножение на три, то ли еще что-нибудь. Аристотель ответил на

этот вопрос, заменив слова "трижды увеличенный" словами "если геометрическое число этого (соединения. - М.П.) рождается кубически", т.е. он говорит об операции возведения в куб соединения увеличенного на треть базиса с пятеркой, дающей две гармонии.

Его слова, что кубическое рождение геометрического числа этого соединения, увеличенного на треть базиса с пятеркой, дает две гармонии, т.е. что кубическое рождение этого геометрического числа есть не что иное, как рождение двух гармоний, явились основанием для толкований рождения этого геометрического числа, которое полагали "геометрическим числом" Платона, как рождение двух равных друг другу гармоний (отсюда необходимость устранения "дуализма" этих двух гармоний) путем операции некоторого тройного увеличения соединения увеличенного на треть базиса с пятеркой.

Это привело к вопросу о значении этого тройного увеличения. Некоторые комментаторы, как мы видели, отвечали на этот вопрос по примеру Аристотеля, полагая это тройное увеличение возведением в куб соединения увеличенного на треть базиса с пятеркой. Другие (Карпов, Гульч) полагали его умножением этого соединения на три. Третьи (Адам, Дье, Альверс) полагали его тройным умножением этого соединения самого на себя, т.е. возведением его в четвертую степень.

Следствием аристотелевской разбивки этой фразы на две семантические цепочки, явились и вопросы: что представляет собой увеличенный на треть базис, и что представляет собой его соединение с пятеркой? Мы уже отмечали, что и на эти вопросы давались различные ответы. Увеличенный на треть базис полагали и отношением 4/3, и просто двумя числами четыре и три, полагая их катетами пифагорейского прямоугольного треугольника три, четыре, пять, и суммой этих двух чисел, и произведением их. Соединением его с пятеркой полагали и сложение его с пятеркой, и умножение его на пятерку.

Таким образом, аристотелевская разбивка этой фразы на две семантические цепочки привела к тому, что толкование ее в течение более двух тысячелетий вращалось в порочном (скажем заранее) кругу.

Аристотелевская разбивка этой фразы на две семантические цепочки явилась следствием отнесения слова συζυγείς к слову πεμπάδι, вследствие чего слова "πεμπάδι συζυγείς" рассматривались Аристотелем как семантическое звено: "соединенный с пятеркой", а это семантическое звено явилось той основной "смысловой вехой", тем основным "опорным пунктом", "контекстным объединителем", который, "стягивая вокруг себя относящееся к нему содержание, фокусируя его" /21, 36/, привел к созданию слова от него семантического звена "...ἐπίτριτος συναμφὶν" (истолкованного позднейшими комментаторами как "увеличенный на треть базис"), отвечающего на во-

прос, что соединено с пятеркой – с ней соединен ἐπίτριτος κυβμὴν = "увеличенный на треть базис"; и справа от него – семантического звена "δύο ἁρμονίας παρέχεται " = "две гармонии дает", отвечающего на вопрос, каков результат этого соединения ἐπίτριτος κυβμὴν с пятеркой: две гармонии.

Следствием создания этих трех семантических звеньев явилось создание четвертого семантического звена – "τρὶς αὐξηθείς " = = "трижды увеличенный", которое Аристотель отделил от первых трех звеньев словом "λέγων" = "говоря", превратив его этим во вторую семантическую цепочку, отвечающую на вопрос, каким образом получается результат соединения ἐπίτριτος κυβμὴν с пятеркой – две гармонии: путем некоторого тройного увеличения этого соединения.

Создание в фразе " ὃν ἐπίτριτος κυβμὴν... αὐξηθείς " четвертого семантического звена и позволило Аристотелю отделить это звено от первых трех звеньев, введением между ним и первыми тремя звеньями поясняющего слова "λέγων" = "говоря", которого нет в тексте Платона, превращающего четвертое звено "τρὶς αὐξηθείς " во вторую семантическую цепочку фразы " ὃν ἐπίτριτος κυβμὴν... αὐξηθείς , замененную Аристотелем поясняющей ее расширенной семантической цепочкой: "если геометрическое число этого рождается кубически".

Слово "λέγων " явилось тем фиксатором, который зафиксировал разбиение фразы " ὃν ἐπίτριτος κυβμὴν... αὐξηθείς " на две семантические цепочки (есть и еще один фиксатор – запятая, поставленная Аристотелем после слова παρέχεται, которой в тексте Платона нет, но хотя В.Гардтгаузен говорит, что знаки препинания употреблялись уже в эпоху Аристотеля и имели очень важное значение, не допуская бессмысленной связи частей контекста /63; 396, 399/, мы основываемся не на этом фиксаторе, который некоторые комментаторы могут посчитать спорным, а на бесспорном фиксаторе – слове "λέγων".

Введение в фразу " ὃν ἐπίτριτος κυβμὴν... αὐξηθείς " после слова παρέχεται слова λέγων сделало разбиение этой фразы на аристотелевские семантические звенья единственно возможным. Но так как в тексте Платона ни этого слова, ни запятой после слова παρέχεται (упомянем все же и ее) нет, то мы оказываемся перед семантической загадкой, возможно ли разбиение этой фразы на другие семантические звенья, чем те, на которые ее разбил Аристотель? И если возможно, то на какие семантические звенья разбил ее Платон?

Для ответа на первый вопрос необходимо выяснить, является ли аристотелевское отнесение слова συζυγείς к предыдущему слову πεμπάδι , объединяющее эти слова в семантическое звено "πεμπάδι συζυγείς ", единственно возможным, или же слово "συζυγείς " может

быть отнесено также к следующим за ним словам "δύο ἁρμονίας" и объединено с ними в семантическое звено "συζυγεῖς δύο ἁρμονίας".

Слово "πεμπάδι" - это дательный падеж единственного числа существительного "πεμπάς" = пятерка. В учебнике С.И.Соболевского "Древнегреческий язык" читаем: "С дательным падежом соединяются некоторые глаголы, обозначающие общение, сближение, соприкосновение с кем..., при которых по-русски по большей части ставится выражение с предлогом "с". (Дательный сообщества)" [34, 260, § 987].

Слово "συζυγεῖς", следующее за словом πεμπάδι, это причастие глагола συζεύγνυμι, обозначающего общение, соприкосновение: "сопрягать, соединять, связывать, сочетать...". Поэтому соседство этого причастия с дательным падежом πεμπάδι может выражать соединение с пятеркой, с употреблением предлога "с": "соединенный с пятеркой". Следовательно, Аристотель, рассматривая в этом смысле слова πεμπάδι συζυγεῖς, соединяя их и образуя из них семантическое звено, не погрешил против греческого языка.

В образовавшемся вследствие создания этого семантического звена следующем за ним семантическом звене "δύο ἁρμονίας παρέχεται слово ἁρμονίας - это винительный падеж множественного числа слова ἁρμονία, которое может иметь значение "гармония". В синтаксическом отношении слово ἁρμονίας - это прямое дополнение. У С.И.Соболевского читаем: "Винительный падеж прямого дополнения ставится при переходных глаголах, как в русском и латинском языках" [34, 252, § 963]. Слово παρέχεται, при котором стоит это прямое дополнение, - это третье лицо единственного числа настоящего времени изъявительного наклонения страдательного залога глагола παρέχω, который может и в страдательной форме быть переходным. Поэтому слова "δύο ἁρμονίας παρέχεται" могут иметь значение: "две гармонии дает". Следовательно, Аристотель и здесь не погрешил против греческого языка.

Но в греческом языке дательный падеж может быть не только дательным сообщества. "Дательный падеж при глаголах εἰμί и γίγνομαι означает лицо, владеющее предметом, который выражен подлежащим (dativus possessivus - дательный владельца). По-латыни употребляется дательный падеж; по-русски выражение с предлогом "у": "у меня есть книга" [34, 262, § 991].

"В дательном падеже ставится имя владельца не только тогда, когда сказуемым бывают глаголы εἰμί и γίγνομαι, но и в других случаях, когда по-русски употребляется выражение с предлогом "у", равное по смыслу родительному падежу или притяжательному местоиме-

нию...". "В таких случаях греческий дательный падеж очень близок по смыслу к genetivus possessivus" /34, 263, § 992, § 1001/.

"Самое обычное употребление родительного падежа то, что он означает лицо или предмет, которому принадлежит что-либо в самом широком и различном смысле (genetivus possessivus - родительный принадлежности). Он соединяется с существительным или непосредственно (и тогда служит его определением)...". "В латинском языке ему соответствует genetivus possessivus, в русском - родительный падеж" /34, 265, § 1001/.

Таким образом, дательный падеж - в нашем случае πεμπάδι, может быть не только дательным сообщества, но и дательным владельца, владеющего предметом, который выражен подлежащим, в нашем случае существительным πυθμὴν, и может переводиться родительным падежом, определяющим существительное πυθμὴν. И если Платон вложил в дательный падеж πεμπάδι смысл дательного владельца, то к слову πεμπάδι надо относить не слово συνεχεῖς, а слово πυθμὴν и переводить группу слов "ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι" как "ἐπίτριτος πυθμὴν пятерки". В этом случае слова "ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι" объединяются в новое семантическое звено, которое разрушает все аристотелевские звенья семантической цепочки: "ὃν ἐπίτριτος... αὔξησεις".

Слова "ἐπίτριτος πυθμὴν", выделенные Аристотелем в отдельное семантическое звено, теряют значение некого соединенного с пятеркой, независимого от нее элемента, и попадают в зависимость от пятерки. Отрывом слова πεμπάδι от слова συνεχεῖς разрушается центральное аристотелевское семантическое звено: πεμπάδι συνεχεῖς. Слово συνεχεῖς оказывается отнесенным к словам δύο ἁρμονίας, образовывая вместе с ними новое семантическое звено: "συνεχεῖς δύο ἁρμονίας".

Так как винительный падеж ἁρμονίας оказывается теперь отнесенным к отглагольному прилагательному συνεχεῖς, то он становится винительным отношения /34, 257, § 977/ и должен переводиться творительным падежом. Вследствие этого, семантическое звено "συνεχεῖς δύο ἁρμονίας" получает смысл: "соединенный или связанный двумя гармониями". Причем не "с двумя гармониями", а именно "двумя гармониями", т.е. без предлога "с", так как этот творительный падеж отвечает не на вопрос: с чем соединен или связан, а на вопрос: чем соединен или связан. Поэтому предлог "с" здесь не нужен. Образование семантического звена: "συνεχεῖς δύο ἁρμονίας" отрывает слово παρέχεται от слова ἁρμονίας и относит его к словам τοῖς αὔξησεις. Объединение его с этими словами образует новое семантическое звено: "παρέχεται τοῖς αὔξησεις".

Таким образом, оказывается, что аристотелевское разбиение семантической цепочки: "ὧν ἐπίτριτος... αὐξηθείς " на семантические звенья является не единственно возможным. Полученное нами новое звено "παρέχεται τοῖς αὐξηθείς", имеющее глубокий смысл, который будет рассмотрен дальше, не допускает разбиения его на части, как это сделано Аристотелем введением после слова παρέχεται отсутствующего у Платона слова λέγων и отсутствующей у него запятой. Поэтому, хотя мы пока еще не можем считать окончательно установленным, что Платон разбил семантическую цепочку: " ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν... αὐξηθείς " на полученные нами семантические звенья, сразу видно, что эти звенья несравненно более соответствуют тексту Платона, чем звенья Аристотеля.

Аристотелевские же семантические звенья завязали эту цепочку в гордиев узел, разрубить который можно было только разрушив эти звенья.

Семантическое звено "ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι"

Слово "ὧν" значит "которых" или "их". Кто эти "которые" или "они" мы рассмотрим дальше. Что означают слова "ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι", т.е.: "ἐπίτριτος πυθμὴν пятерки"?

Слово ἐπίτριτος значит "увеличенный на треть". Таким образом, речь идет об увеличенном на треть "πυθμήν"е пятерки".

Что же такое "πυθμὴν пятерки"? Слово "πυθμὴν " имеет различные значения. В греческо-русском словаре, изданном в 1848 г., читаем: "πυθμήν , 1) глубина, основание, дно, подножие, 2) пень, корень, 3) коренное число" [13, 516]. В удостоенном Большой Петровской премии греческо-русском словаре А.Д.Вейсмана читаем: "πυθμήν, дно, основание, корень, пень, ствол; коренное число (в математике)" [9, 1108]. В древнегреческо-русском словаре И.Х.Дворецкого под редакцией С.И.Соболевского читаем: "πυθμήν , 1) дно, основание; 2) нижняя часть, низ; 3) стебель, ствол; 4) перен. род, порождение; 5) дверной крюк; 6) мат. корень числа" [15, Т. 2, 1440].

Так как речь идет о πυθμὴν'е числа - пятерки, то ясно, что он не может быть ни стеблем, ни пнем, ни дверным крюком, и т.д. Ясно, что он может быть только "основанием" или "дном" пятерки, которым является "корень" пятерки или, что то же, "коренное число" ее. А так как пифагорейцы термином "число" называли только целое число, единицу же они считали не числом, но началом, источником числа, то "корнем" = "коренным числом" пятерки может быть только целое число, большее единицы. Таким образом, пифагорейское

понятие "корень числа" или "коренное число" не равнозначно нашему понятию "корень (например, квадратный) числа", или нашему понятию "основание степени". "Основанием" или "дном" пятерки может быть, таким образом, только наименьшее целое число между единицей и пятеркой, т.е. двойка. Следовательно, ἀναμὴν пятерки – это не что иное, как целочисленная часть квадратного корня ее.

Что же такое "увеличенное на треть коренное число пятерки"? Ответ зависит от того, что понимать под этой третью. Если под ней понимать треть единицы, то "увеличенным на треть коренным числом пятерки" будет 2 + 1/3 = 7/3. Если же понимать, что эта треть – это треть увеличиваемого числа, т.е. двойки, то "увеличенным на треть коренным числом пятерки" будет 2 + 2/3 = 8/3. Обычно под этой третью понимают треть увеличиваемого числа.

В словаре И.Х.Дворецкого читаем: "ἐπίτριτος , содержащий целое с третью (1 + 1/3), ссудный процент в 1/3 суммы (33 1/3 %)" /15, Т. 1, 644/. Но является ли общепринятое понимание этой трети единственно возможным?

Таким образом, мы оказываемся перед терминологической проблемой: В каком смысле именно в этой фразе Платон употребил термин ἐπίτριτος – в смысле: "увеличенное на треть единицы", или в смысле: "увеличенное на треть увеличиваемого числа"?

Неоценимое значение второго и третьего семантических звеньев состоит в том, что они позволяют решить эту, на первый взгляд неразрешимую терминологическую проблему. Ибо эти звенья являются определениями "увеличенного на треть коренного числа пятерки".

Второе звено определяет его как "связанное двумя гармониями", а третье – "как бы представляет собой трижды увеличенное".

Аристотель истолковал слово "παρέχεται" в смысле "дает" или "доставляет" (дает или доставляет две гармонии). Слово "παρέχεται" – это третье лицо единственного числа настоящего времени изъявительного наклонения страдательного залога глагола "παρέχω". Этот глагол имеет различные значения: "доставлять", "давать", "предоставлять", "позволять", "показывать", "оказывать", "представлять собой" и другие. Значения "доставлять", "давать" он имеет и в действительном, и в страдательном залогах. Значение же "представлять собой" он имеет только в страдательном залоге. Так как значения "доставлять", "давать" он имеет в обоих залогах, то, истолковав слово "παρέχεται" в смысле "дает" или "доставляет", Аристотель не погрешил против греческого языка.

И так как слово "παρέχεται" в этом смысле равнозначно слову "παρέχει" – третье лицо единственного числа настоящего времени изъявительного наклонения действительного залога глагола πα-

ρέχω, то Прокл, следуя Аристотелю в толковании этого слова, употребляя аристотелевское παρέχεται [117, 37$_{24}$], употребляет также "παρέχει" [117, 39$_{26}$].

Но возникает вопрос, почему же Платон употребил именно страдательный, а не действительный залог? Ведь проще было употребить слово "παρέχει", как это сделал Прокл, а не "παρέχεται", причем на самом деле Платон употребил не аристотелевское "παρέχεται", использованное Аристотелем в его толковании фразы "ὃν ἐπίτριτος... αὐξηθείς", а еще более сложное слово "παρέχηται", содержащееся в рукописях Ватик. Гр. 229 и Ватик. Гр. 2196, замененное Аристотелем словом "παρέχεται", т.е. Платон употребил не изъявительное, а условное наклонение страдательного залога глагола "παρέχω".

Разумеется, Платон не случайно употребил именно страдательный, а не действительный залог, и не случайно употребил именно условное, а не изъявительное наклонение. Как мы увидим дальше, увеличенное на треть коренное число пятерки может быть кратко метафорически определено, как: "как бы представляет собой трижды увеличенное". И Платон, строго придерживавшийся лаконской краткости изложения, именно это краткое метафорическое определение дал увеличенному на треть коренному числу пятерки в третьем семантическом звене: "как бы представляет собой трижды увеличенное". Так как значение "представлять собой" глагол παρέχω имеет только в страдательном залоге, Платон и употребляет не действительный, а именно страдательный залог. Чтобы подчеркнуть метафорический, условный характер этого определения, он употребляет не изъявительное, а именно условное наклонение страдательного залога глагола παρέχω: "как бы представляет собой". Как мы увидим дальше, и определение "связанное двумя гармониями" (заметим, что это не аристотелевские и прокловские гармонии, толкованием которых занимались все комментаторы), и определение "как бы представляет собой трижды увеличенное", однозначно определяют увеличенное на треть коренное число пятерки, как 2 1/3, а не как 2 2/3 = 8/3.

И это точно согласуется с математическим смыслом увеличенного на треть коренного числа пятерки. В чем состоит этот смысл?

Пятерка – это неквадратное число, т.е. число, которое не может быть получено умножением числа самого на себя. Другими словами, сторона квадрата, площадь которого равна пяти единицам площади, не может быть выражена целым числом единиц длины.

В моей статье "Математическое место в диалоге Платона "Теэтет" [98] доказано, что еще в V в. до н.э. знаменитым математиком, учителем Платона, Феодором Киренским, было показано, что сторона квадрата, площадь которого выражается неквадратным числом, не мо-

жет быть выражена не только целым числом, но и отношением целых чисел, т.е. рациональным числом, а значит она иррациональна. Так как уже в V в. до н.э. знали, что сторона квадрата, площадь которого выражается неквадратным числом, не может быть точно выражена отношением целых чисел, то, естественно, для практических целей пытались выразить ее отношением целых чисел приближенно. Эти попытки привели к созданию первой в истории математики теории приближений.

Увеличенное на треть коренное число пятерки и есть не что иное, как приближенное выражение отношением целых чисел стороны квадрата, площадь которого равна неквадратному числу - пятерке. πυγμήν'ом, т.е. "основанием" или "коренным числом" пятерки Платон называет целое число - двойку, составляющую главную часть этого отношения. Но сам по себе этот πυγμήν не может считаться удовлетворительным, пригодным для целей практики, приближенным выражением стороны квадрата, площадь которого равна пятерке, так как квадрат двойки равен четверке.

Поэтому возникает вопрос, насколько нужно увеличить этот πυγμήν, чтобы получить удовлетворительное для практики приближенное значение стороны этого квадрата. И при этом получить это увеличение не с помощью проб, добавляя к двойке наугад какую-нибудь, говоря современным языком, правильную дробь, а затем умножая эту сумму саму на себя, а с помощью строгой математической теории приближенных вычислений, пригодной не только для пятерки, а для любого неквадратного числа. Пифагорейцы, естественно, стремились к открытию такой математической теории, так как были великолепными теоретиками.

Если принять, что Платон полагал треть в слове ἐπίτριτος "увеличенный на треть", равной трети увеличиваемого числа - двойки, т.е. 2/3, то приближенным выражением стороны этого квадрата будет 8/3. 8/3 в квадрате это 64/9 = 7 1/9. Можно ли считать отношение целых чисел, квадрат которого больше чем на 40 % больше пятерки, удовлетворительным для практики значением стороны этого квадрата? Разумеется нет. Если же Платон эту треть полагал равной 1/3 единицы, т.е. просто 1/3, то приближенным выражением стороны этого квадрата будет 7/3. Квадрат 7/3 это 49/9 = 5 4/9 = 5,44, что только на 9 % больше пятерки.

Обычная 25 сантиметровая логарифмическая линейка, которой многие пользуются и сегодня, дает для $\sqrt{5}$ приближенное значение 2,23, которое пригодно для большинства технических практических расчетов. Поэтому приближенное значение $\sqrt{5}$, равное 7/3 = 2,33, отличающееся от приближенного значения 2,23 меньше чем на 5 %, бы-

ло, безусловно, пригодно для практики в эпоху Платона, т.е. почти две с половиной тысячи лет назад. Пифагорейская теория приближенного вычисления квадратных корней, которую мы рассматриваем дальше, позволяла вычислять любые квадратные корни с любой точностью и немедленно давала для $\sqrt{5}$ более точное приближенное значение – 2 1/4. Причину, по которой Платон говорит не о 2 1/4, а о 2 1/3, мы рассмотрим ниже.

Таким образом, определения увеличенного на треть коренного числа пятерки, которыми являются два семантических звена: "связанное двумя гармониями" и "как бы представляет собой трижды увеличенное", соответствующие значению увеличенного на треть коренного числа пятерки, равному 7 1/3, полностью согласуются с математическим смыслом его. Заметим, что Платон в диалоге "Послезаконие" говорит, как установил немецкий математик и историк математики Отто Теплиц [136, 289], об увеличении числа на треть его самого. Но там он это увеличение выражает не термином "ἐπίτριτος", а термином "ἐπίτριτον" [137]. Надо полагать, что Платон не случайно употребляет в нашем случае не "ἐπίτριτον", а "ἐπίτριτος". Очевидно потому, что смысл этих терминов у него неодинаков.

Семантические же звенья "связанное двумя гармониями" и "как бы представляет собой трижды увеличенное" неопровержимо доказывают, что в нашем случае термин "ἐπίτριτος" он употребил в смысле: "увеличенный на треть единицы".

Таким образом, если этот термин употребляли и в смысле: "увеличенное на треть увеличиваемого", то это только доказывает, что в греческом языке нет ограничения понятия 1/3 в этом термине, т.е. что он бисемантичен и другие употребляли его не в том смысле, в каком употребил его в нашем случае Платон.

Понять определения увеличенного на треть коренного числа пятерки: "связанное двумя гармониями" и "как бы представляет собой трижды увеличенное" позволяет глава "О сторонних и диагональных числах" сочинения Теона Смирнского: "О математических вещах к чтению Платона". К рассмотрению ее мы и переходим.

Сочинение Теона Смирнского

В XVI в. в библиотеке св.Марка была обнаружена греческая рукопись XI или XII вв., получившая индекс 307 (А), имевшая заглавие: "θέωνος Σμυρναίου πλατωνικοῦ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν πλάτωνος ἀνάγνωσιν", т.е.: "Платоника Теона Смирнского о математических вещах к чтению Платона". Эта рукопись содержала две части этого сочинения, первая из которых посвящена пифагорей-

ской теории чисел, вторая – пифагорейской теории музыки. Впервые эта рукопись была издана в 1644 г. в Париже астрономом Измаилом Буйо. В предисловии он писал, что слышал от Исаака Возиуса о существовании третьей части этого сочинения, посвященной астрономии, которую Исаак Возиус видел в Миланской Амброзианской библиотеке. Буйо писал в предисловии, что намерен издать и третью часть. Но этому намерению не суждено было осуществиться. Астрономическая часть этого сочинения была обнаружена и в библиотеке св. Марка – рукопись XIУ или XУ вв. 303 (В). Впервые она была издана только в 1849 г. в Париже Т.А. Мартеном. В 1878 г. все три части этого сочинения были изданы в одной книге Эдуардом Гиллером /134/. На это издание опираются все работы о сочинении Теона Смирнского.

Пифагорейская теория чисел ко времени первого издания первых двух частей сочинения Теона Смирнского была известна из сочинения арифметика Никомаха из Герази (I в. до н.э. или I в. н.э.) "Введение в арифметику", впервые опубликованного в 1538 г. в Париже /90/. Но сочинение Теона Смирнского, излагая все то о пифагорейской теории чисел, что есть у Никомаха, содержит два дополнения, которых у Никомаха нет. Главным из них является глава "О сторонних и диагональных числах". Именно эта глава необходима для расшифровки фрагмента 546 ВС. Но она столь неясна, что никто не мог ее понять. О ее неясности писал известный историк математики XIX в. Г.Г.Ф. Нессельман /89, 228/.

В 1965 г. я предложил свой опыт ее расшифровки в статье "О приближенном вычислении квадратных корней в Древней Греции" /23, 219-233/, напечатанной в XУI выпуске сборника "Историко-математические исследования", издающегося Институтом истории естествознания и техники АН СССР. Но чрезмерная сжатость изложения, обусловленная разрешенным институтом крайне ограниченным размером статьи, сделала эту статью непонятной даже для математиков. В 1971, 1974, 1977 гг. расшифровка главы "О сторонних и диагональных числах" была опубликована на немецком языке в трех моих статьях в менее сжатом и более понятном изложении в издающемся в США и ФРГ Международном журнале "Архив истории точных наук" /95, 1-8/, /96, 174-185/, /97, 1-26/.

Но так как этот журнал недоступен большинству советских читателей, а понимание главы сочинения Теона Смирнского необходимо для расшифровки туманной части речи Муз, то мы даем здесь расшифровку этой главы в изложении, которое, как мы надеемся, будет понятно читателю, имеющему среднее образование.

Глава "О сторонних и диагональных числах" сочинения Теона Смирнского "Изложение математических вещей, нужных для чтения

Платона". Текст Теона Смирнского гласит [134, 42_{10}-44_{17}]:
"ὥσπερ δὲ τριγωνικοὺς καὶ τετραγωνικοὺς καὶ πενταγωνικοὺς καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ σχήματα λόγους ἔχουσι δυνάμει οἱ ἀριθμοί, οὕτως καὶ πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους εὕροιμεν ἂν κατὰ τοὺς σπερματικοὺς λόγους ἐμφανιζομένους τοῖς ἀριθμοῖς. ἐκ γὰρ τούτων ῥυθμίζεται τὰ σχήματα. ὥσπερ οὖν πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνωτάτω καὶ σπερματικὸν λόγον ἡ μονὰς ἄρχει, οὕτως καὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται. οἷον ἐκτίθενται δύο μονάδες, ὧν τὴν μὲν νῶμεν εἶναι διάμετρον, τὴν δὲ πλευράν, ἐπειδὴ τὴν μονάδα, πάντων οὖσαν ἀρχήν, δεῖ δυνάμει καὶ πλευρὰν εἶναι καὶ διάμετρον. καὶ προστίθεται τῇ μὲν πλευρᾷ διάμετρος, τῇ δὲ διαμέτρῳ δύο πλευραί, ἐπειδὴ ὅσον ἡ πλευρὰ δίς δύναται, ἡ διάμετρος ἅπαξ. ἐγένετο οὖν μείζων μὲν ἡ διάμετρος, ἐλάττων δὲ ἡ πλευρά. καὶ ἐπί μὲν τῆς πρώτης πλευρᾶς τε καὶ διαμέτρου εἴη ἂν τὸ ἀπὸ τῆς μονάδος διαμέτρου τετράγωνον μονάδι μιᾷ ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος πλευρᾶς τετραγώνου· ἐν ἰσότητι γὰρ αἱ μονάδες· τὸ δ' ἓν τοῦ ἑνὸς μονάδι ἔλαττον ἢ διπλάσιον. προσνῶμεν δὴ τῇ μὲν πλευρᾷ διάμετρον, τουτέστι τῇ μονάδι μονάδα· ἔσται ἡ πλευρὰ ἄρα δύο μονάδων· τῇ δὲ διαμέτρῳ προσνῶμεν δύο πλευράς, τουτέστι τῇ μονάδι δύο μονάδας· ἔσται ἡ διάμετρος μονάδων τριῶν· καὶ τὸ μὲν ἀπὸ δυάδος πλευρᾶς τετράγωνον δ', τὸ δ' ἀπὸ τῆς τριάδος διαμέτρου τετράγωνον θ· τὸ θ' ἄρα μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς β' πλευρᾶς. πάλιν προσνῶμεν τῇ μὲν β' πλευρᾷ διάμετρον τὴν τριάδα· ἔσται ἡ πλευρά ε· τῇ δὲ τριάδι διαμέτρῳ β' πλευράς, τουτέστι δίς τὰ β' ἔσται ς· ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ τῆς <ε'> πλευρᾶς τετράγωνον κε', τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ς'< διαμέτρου> μθ' μονάδι ἔλασσον ἢ διπλάσιον τοῦ κε' ἄρα τὸ μθ'. πάλιν ἂν τῇ <ε'> πλευρᾷ προσνῇς τὴν ς' διάμετρον, ἔσται ιβ' κἂν τῇ ς' διαμέτρῳ προσνῇς δίς τὴν ε' πλευράν, ἔσται ις· καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ιβ' τετραγώνου τὸ ἀπὸ τῆς ις' μονάδι πλέον ἢ διπλάσιον. καὶ κατὰ τὸ ἑξῆς τῆς προσνήξης ὁμοίως γιγνομένης, ἔσται τὸ ἀνάλογον ἐναλλάξ· ποτὲ μὲν μονάδι ἔλαττον, ποτὲ δὲ μονάδι πλέον ἢ διπλάσιον

τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· καὶ δύναται αἱ τοιαῦται καὶ πλευραὶ καὶ διάμετροι".

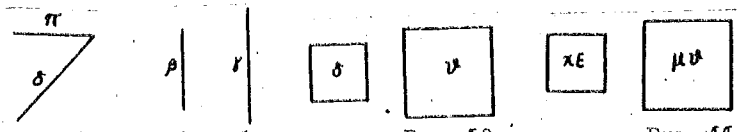


Рис. 8 Рис. 9 Рис. 10 Рис. 11

Впервые первую фразу этого текста перевел на современный (немецкий) язык Г.Г.Ф.Нессельман [89,228], но этой фразой он и закончил свой перевод, поскольку, как он пишет: "Дальнейшее изложение у Теона неясно, по крайней мере оно не способствует обоснованию картины".

Его перевод первой фразы гласит: "Так же как числа несут в себе свойства треугольников, квадратов, пятиугольников и т.д., так мы находим также отношение стороны и диагонали (квадрата) выраженным ими". Этот "перевод" доказывает, что Нессельман не понял не только дальнейшего изложения Теона, но не понял и "переведенную" им первую фразу. Вследствие непонимания ее, он неверно перевел слова "πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους", значащие "сторонние и диагональные отношения", словами "отношение стороны и диагонали" и пояснил в скобках этот "перевод" словом "квадрата", которого нет в тексте Теона.

Ошибка, допущенная Нессельманом в переводе этой фразы, искажает смысл не только этой фразы, но всей главы "О сторонних и диагональных числах". Ибо, как мы увидим дальше, Теон не случайно говорит о сторонних и диагональных отношениях во множественном числе, и не случайно в его тексте отсутствует слово "квадрата". Множественное число он употребил потому, что говорит об отношениях сторон и диагоналей множества прямоугольников (причем не друг к другу, а к отрезку, принятому за единицу), а не только квадрата.

Эта ошибка Нессельмана, благодаря его авторитету, имела роковые последствия. Следуя ему, все позднейшие историки математики XIX и XX вв. полагали, что в главе "О сторонних и диагональных числах" Теон говорит только о квадрате, а точнее – о приближенном вычислении отношения его диагонали к стороне. Так полагали немецкий историк математики М.Кантор [55, 408], французский историк математики П.Таннери [130, 86 и сл.], немецкий историк математики Ф.Гульч [См. в: 117, 394], датский историк математики Г.Г.Цейтен [36,51-52], советский историк математики М.Я.Выгодский [10,317-320], голландский историк математики Б.Л.Ван дер Варден [7,117] и др.

М.Я.Выгодский пишет /10, 317, прим. 2/: "На это место впервые, кажется, обратил внимание Нессельман. Он дал ему то единственное толкование, которое оно допускает (! - М.П.) и которое здесь изложено. Совершенно непонятно, почему Кантор, дающий такое же толкование, утверждает, что Нессельман истолковал Теона как-то иначе".

М.Я.Выгодский дал перевод не только первой фразы, но всего цитированного текста Теона (но имеющихся в тексте Теона рисунков 8-11, он не привел). Но хотя он и не заменил, подобно Нессельману, в первой фразе множественное число единственным, и не добавил слово "квадрата", все же, так же как Нессельман, он эту фразу не понял и, следуя ему, полагал, что Теон говорит только о квадрате.

Привожу перевод цитированного текста Теона Смирнского, данный М.Я.Выгодским: "Подобно тому как числа потенциально имеют отношения треугольные, четырехугольные, пятиугольные и отношения, соответствующие остальным фигурам, так мы могли бы найти также латеральные и диаметральные отношения, обнаруживающиеся у чисел в соответствии с семенными отношениями, ибо по ним соразмеряются фигуры. А так как над всеми фигурами согласно наивысшему и семенному отношению начальствует единица, то и отношение диаметра и отношение стороны отыскиваются в единице. Возьмем, например, две единицы; положим, что одна из них есть диаметр, другая же - сторона, ибо единица, будучи началом всего, должна потенциально быть и стороной и диаметром. И пусть к стороне прибавляется диаметр, а к диаметру две стороны, ибо сколько дважды дает в квадрате сторона, столько один раз диаметр. Теперь большее становится диаметром, а меньшее стороной. При первой стороне и диаметре квадрат единицы-диаметра на одну единицу меньше, чем дважды взятый квадрат единицы-стороны; ведь единицы находятся в равенстве, и единое на одну единицу меньше, чем двойное. Прибавим к стороне диаметр, т.е. к единице единицу; итак, сторона будет две единицы; к диаметру же прибавим две стороны, т.е. к единице две единицы; диаметр будет три единицы. Квадрат двойки-стороны 4, а квадрат тройки-диаметра 9, и 9 на единицу больше, чем дважды взятая сторона двух. Снова прибавляем к стороне 2 диаметр-тройку; сторона будет 5, а к тройке-диаметру две стороны, т.е. дважды 2. Будет 7. Квадрат стороны будет 25, а квадрат 7 будет 49. 49 на единицу меньше, чем двукратно взятое 25. Снова к стороне прибавь диаметр 7; будет 12; к диаметру 7 прибавь дважды взятую сторону 5; будет 17. И квадрат 17 на единицу полнее, чем двукратно взятый квадрат от 12. И от дальнейшего прибавления, происходящего таким образом,

будет происходить подобная же смена: двукратно взятый квадрат стороны то на единицу меньше, то на единицу больше, чем квадрат диаметра; при этом и эти стороны и диаметры рациональны (ῥηταί)" [10, 317-318].

Переведя этот текст, М.Я.Выгодский пишет: "Отбросив мистическую шелуху и метафизические обоснования, оставив в стороне таинственные "семенные отношения" и "начальственную роль" единицы..." и далее: "Теон Смирнский не дает никакого доказательства излагаемому им процессу (если не считать "глубокомысленных" метафизических доводов)" [10, 319]. Легче всего назвать все непонятное в этом тексте "мистической шелухой". Однако существенно то, что цитированный текст Теона Смирнского проникнут, как мы увидим дальше, глубоким математическим смыслом. Единственный имеющийся в нём элемент философского идеализма - философский принцип пифагорейцев "единица - начало всего", в математическом же отношении текст не содержит никакой мистики.

Теон Смирнский приводит следующее пифагорейское определение понятия "число": "ἀριθμός ἐστι σύστημα μονάδων, ἢ προποδισμὸς πλήθους ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενος καὶ ἀναποδισμὸς εἰς μονάδι καταλήγων" [134, 183], т.е.: "Число есть соединение единиц, или шагающее вперед множество, из единицы начинающееся и, отступая назад, единицей оканчивающееся".

И точно так, как пифагорейцы началом этого множества полагали единицу, они полагали единицу началом любых отрезков (следовательно, началом "всех фигур"), полагая единицей отрезок, принятый единицей = единичный отрезок.

Отсюда неточный перевод М.Я.Выгодского слов Теона "ὥσπερ οὖν πάντων τῶν σχημάτων... ἡ μονὰς ἄρχει..." словами "Так над всеми фигурами... начальствует единица". Правильный перевод этих слов следующий: "Совершенно как все фигуры... начинает единица...". Глагол ἄρχω значит и "начинать" и "начальствовать". Поэтому только зная математический смысл этих слов Теона, можно перевести слово ἄρχει именно в том смысле, в котором его употребил Теон: "начинает".

В эпоху эмпирической, т.е. опытной математики считали, что все отрезки соизмеримы, поскольку имеют общую меру, а значит, что их можно измерить одним и тем же отрезком (общей мерой их) - уложить эту общую меру в любом отрезке целое число раз, если она достаточно мала. Это наивное убеждение так называемого здравого смысла подтверждалось опытом, который вследствие неизбежных неточностей непосредственного измерения одного отрезка другим последовательными наложениями измеряющего отрезка на измеряемый

"доказывал", что всегда можно найти такой достаточно малый отрезок, который уложится целое число раз в любом отрезке. Таким образом, полагали, что существует такой малый отрезок, которым можно измерить все отрезки. Если этот отрезок положить равным единице, то эта единица "начинает" все отрезки, что согласовывается с философским принципом пифагорейцев: "единица - начало всего".

Но открытие пифагорейцами несоизмеримости привело этот основополагающий принцип их философии к крушению. Оказалось, что существуют такие отрезки, которые не имеют общей меры с другими отрезками - несоизмеримы с ними, т.е., что не существует такого малого отрезка, который уложится целое число раз как в этих, так и в любых других отрезках. Следовательно, убеждение, что существует такой малый отрезок - единица, которым можно измерить все отрезки, оказалось ошибочным, что являлось крушением главного принципа пифагорейской философии.

Но так называемый здравый смысл всегда оказывал ожесточенное сопротивление посягательствам на его убеждения. Так обстояло дело и в данном случае. О том, с каким трудом входила в сознание истинность этого поразительного, противоречащего здравому смыслу открытия, явившегося диалектическим скачком от математики эмпирической (назовем ее донаучной) к математике абстрактной (назовем ее научной), значение которого для дальнейшего развития математики нельзя переоценить, свидетельствуют следующие слова Аристотеля: "Отправным пунктом всех является удивление, что дело должно обстоять именно так... Так как каждому прежде всего кажется удивительным, что могло бы быть что-нибудь, чего нельзя было бы измерить даже самой маленькой общей мерой" /47, 983 а 13 и сл./.

О необыкновенном сопротивлении признанию существования несоизмеримых отрезков свидетельствует то, что более чем через сто лет после их открытия, атомисты Ксенократ и Эпикур, по свидетельству Прокла /117, 274/, отрицали существование их. Но и сами пифагорейцы, открывшие существование их, не могли примириться с крушением их философии.

И неоценимое значение их философского принципа "единица - начало всего" для дальнейшего развития их математики состояло в том, что попытки спасти его от крушения привели к новому диалектическому скачку пифагорейской математики - введению в нее понятия завершенной, т.е. актуальной бесконечности. Несоизмеримые отрезки были выражены актуально бесконечными множествами целых чисел, началом которых являлась единица и, таким образом, для пифагорейцев их философский принцип "единица - начало всего" - был в математическом отношении спасен.

Гениальность пифагорейцев тем более поразительна, что понятие "завершенная (актуальная) бесконечность" было недоступно даже для столь гениального ума, как Аристотель. Полемизируя в "Физике" по поводу этого понятия с пифагорейцами и Платоном, он говорит: "ἀλλ' ἀδύνατον τὸ ἐντελεχείᾳ ὂν ἄπειρον" /48, 204 а 28/, т.е.: "Но невозможно бесконечности быть завершенной".

Вследствие непреодолимых в ту эпоху трудностей логического обоснования этого понятия в "Началах" Евклида бесконечная величина употребляется как потенциально бесконечная (постулат 11)[2]. И даже более, чем через 2000 лет, "король математиков" Карл Фридрих Гаусс писал: "Употребление бесконечной величины как "завершенной" никогда не будет разрешено в математике" /Цит. по 84, 700/. Более того, конструктивисти и сегодня стоят на аристотелевской точке зрения и отрицают существование бесконечности как завершенной величины. Только великому гению Георга Кантора удалось дать логическое обоснование этому понятию, положенному им в основание его теории множеств, явившейся фундаментом новой математики.

Но хотя введение пифагорейцами бесконечности в математику как завершенной величины и не получило признания в античную эпоху и не оказало влияния на дальнейшее развитие античной математики, сам по себе факт введения пифагорейцами этого понятия в математику, пусть только на наглядной основе, без строгого логического обоснования, представляет огромный и, прежде всего, философский интерес. Ибо введение его в математику на заре ее развития как науки явилось начальным витком того диалектического спирального хода исторического развития математического мышления, который через 2000 лет привел к следующему витку на более высокой ступени – к великому открытию Георга Кантора.

И, кто знает, быть может, именно эта полемика Аристотеля с пифагорейцами и Платоном и была тем первым импульсом, который побудил Георга Кантора, учившегося у схоластиков и, несомненно, тщательно изучавшего Аристотеля, к попыткам логического обоснования понятия "завершенная бесконечность".

Почти вся туманная часть речи Муз посвящена преодолению в математическом отношении пифагорейцами крушения их философии, к которому привело открытие ими несоизмеримости. Как мы увидим дальше, введение ими в математику понятия "завершенная бесконечность", спасшего в математическом отношении от крушения их основополагающий философский принцип "единица – начало всего", Платон справедливо называет "главным творением человека".

Этому великому математическому достижению пифагорейцев и посвящена глава "О сторонних и диагональных числах" сочинения Теона

Смирнского "О математических вещах к чтению Платона", переименованного издателем Э.Гиллером в "Изложение математических вещей, полезных для чтения Платона". Поэтому мы обстоятельно рассмотрим эту главу и начнем с правильного перевода цитированных слов Теона. Он гласит: "Совершенно как числа потенциально имеют треугольные, четырехугольные, пятиугольные и соответствующие остальным фигурам отношения, так мы могли бы найти также сторонние и диагональные отношения[3], обнаруживающиеся у чисел по начальным[4] отношениям. Ибо по этим (т.е. по начальным отношениям. - М.П.) соразмеряются фигуры. Совершенно как все фигуры[5] согласно наивысшему и начальному[6] отношению начинает[7] единица, так отношение диагонали, также стороны, отыскивается единицей[8]. Например, выставляются на показ[9] две единицы, одной из которых мы полагаем быть (κάμεν εἶναι) диагональю[10], другой же стороной, так как единица, будучи началом всего, потенциально должна быть и стороной и диагональю. И прибавляется[11] к стороне диагональ, к диагонали же две стороны, так как сколь великий квадрат сторона составляет дважды, диагональ однажды[12]. Итак, диагональ родила[13] большее, сторона же меньшее. И у первой стороны и диагонали квадрат на единице диагонали одной единицей меньше двойного квадрата на единице стороне[14]. Ибо в равенстве единицы, квадрат же единица одной единицей меньше, чем двойной[15]. Прибавляем к стороне диагональ, это вот (τουτέστι) к единице единицу. Итак, сторона будет из двух единиц. К диагонали же прибавляем две стороны, это вот к единице две единицы. Будет диагональ из трех единиц. И квадрат на двойке стороне 4, квадрат же на тройке диагонали 9[16]. Итак, квадрат 9 единицей больше двойного квадрата на двойке стороне. Опять прибавляем к стороне 2 тройку диагональ. Сторона будет 5. К тройке же диагонали две стороны, это вот дважды два. Будет 7. Квадрат на стороне 5 25, квадрат же на диагонали 7 49. Итак, квадрат 49 единицей меньше двойного квадрата 25. Если опять к стороне 5 прибавляешь диагональ 7, будет 12. И если к диагонали 7 прибавляешь дважды сторону 5, будет 17. И квадрат на 17 единицей полнее двойного квадрата на 12. И от следующей одной за другой (ἑξῆς) прибавки, подобно происходящей, будет аналогичное попеременно; то единицей меньше, то единицей полнее квадрат на диагонали двойного квадрата на стороне. И рациональны такие и стороны и диагонали"[17].

Рассмотрим теперь этот текст.

Какой смысл имеют слова: "...числа потенциально имеют треугольные... и соответствующие остальным фигурам отношения"?

Из сообщений Никомаха и Теона известно, что пифагорейцы на-

зывали треугольными, четырехугольными, пятиугольными, вообще многоугольными числами числа, которые можно представить в виде точечных структур, в которых точками изображены единицы, представляющие числа в виде равносторонних треугольников, четырехугольников, пятиугольников, вообще равносторонних многоугольников. Например, число 28 пифагорейцы представляли в виде точечного равностороннего шестиугольника (рис. 12) /134, 40/ со сторонами в четыре точки и называли его шестиугольным. Отношение состоящей из четырех точек (четырех единиц) стороны к одной точке (единице) равно 4. Точечный равносторонний шестиугольник, представляющий число 28, соответствует равностороннему шестиугольнику, составленному из отрезков, отношение каждого из которых к единичному отрезку равно 4. Таким образом, шестиугольное число 28 имеет отношение сторон равностороннего шестиугольника, равные 4. Поэтому Теон говорит, что числа (целые числа) имеют отношения, соответствующие фигурам (сторонам равносторонних многоугольников. Напомним, что отношением отрезка греки называли его отношение к единичному отрезку, т.е. число, показывающее сколько раз единичный отрезок укладывается в данном отрезке).

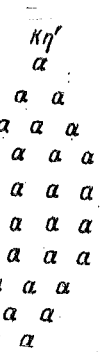


Рис. 12

Таким образом, фраза Теона: "...числа потенциально имеют треугольные... отношения" есть не что иное, как поставленная на голову фраза, что отношения сторон треугольников и т.д. к единичному отрезку можно выразить целыми числами. Далее Теон говорит, что аналогично ("совершенно как") у чисел (целых чисел) "обнаруживаются" "сторонние и диагональные отношения", т.е. отношения сторон и диагоналей прямоугольников к единичному отрезку, т.е. численные значения их по отношению к этому отрезку. Другими словами, переворачивая этот текст с головы на ноги, отношения сторон и диагоналей прямоугольников к единичному отрезку, т.е. численные значения их по отношению к этому отрезку, можно выразить целыми числами.

Весь дальнейший текст Теона посвящен тому, как "найти сторонние и диагональные отношения, обнаруживающиеся у чисел", т.е. как выразить целыми числами отношения сторон и диагоналей прямоугольников к единичному отрезку. Причем данный Теоном пример этого "нахождения" для простейшего прямоугольника - квадрата, показывает, что речь идет о сторонах и диагоналях любых прямоугольников, в том числе имеющих несоизмеримые сторону и диагональ.

Решение задачи о выражении целыми числами несоизмеримых сто-

рон и диагоналей прямоугольников и явилось преодолением в математическом отношении кризиса пифагорейской философии, к которому ее привело открытие несоизмеримости. Таким образом, глава "О сторонних и диагональных числах" посвящена именно преодолению этого кризиса.

Не понимая текста Теона, его философского и математического содержания, историки математики, занимавшиеся этим текстом, ограничивались рассмотрением приведенной Теоном процедуры построения сторонних и диагональных чисел для квадрата. Он пояснил ее рисунками 9, 10, 11. На рис. 9 изображены первое стороннее и первое диагональное числа. Они изображены отрезками, что еще раз показывает геометрический характер текста. Так как единицу пифагорейцы не считали числом, то первое стороннее число изображено отрезком, равным двойке ($\beta' = 2$), а первое диагональное число - отрезком, равным тройке ($\gamma' = 3$). На рис. 10 изображен квадрат $\varkappa' = 9$, который диагональ 3 производит с избытком единицы по сравнению с двойным квадратом стороны 2 ($9^2 = 2 \cdot 2^2 + 1$), и квадрат $\delta' = 4$ этой стороны. На рис. 11 изображен квадрат $\mu\varepsilon' = 49$, который диагональ 7 производит с недостатком единицы по сравнению с двойным квадратом стороны 5 ($7^2 = 2 \cdot 5^2 - 1$), и квадрат $\varkappa\varepsilon' = 25$ этой стороны. В своем комментарии к "Государству" [117, 27о] Прокл сообщает, что пифагорейцы называли квадраты 9 и 49 квадратами двойного определения (по избытку и по недостатку).

Если обозначить начальную сторону, равную единице, S_0, начальную диагональ, равную единице, D_0, то согласно этому частному пифагорейскому правилу построения сторонних и диагональных чисел для квадрата (параметр $a = 2$) следующая сторона будет: $S_1 = S_0 + D_0$, следующая диагональ $D_1 = D_0 + 2S_0$, затем $S_2 = S_1 + D_1$; $D_2 = D_1 + 2S_1$, вообще:

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}, \quad D_n = D_{n-1} + 2S_{n-1}, \text{ где } n = 1, 2, \ldots . \qquad (1)$$

Так как следующие сторону и диагональ дают операции над предыдущими стороной и диагональю, т.е. для получения новых стороны и диагонали мы возвращаемся к прежним стороне и диагонали, то процесс получения новых стороны и диагонали является возвратным, или, как принято говорить, рекуррентным (от латинского recurro-возвращаться).

Равенства (1) представляют теоретико-числовой интерес, так как дают все целочисленные решения неопределенного уравнения второй степени

$$D_n^2 - 2S_n^2 = \pm 1 \qquad (2)$$

(так как из (2) следует: $2S_n^2 = D_n^2 \mp 1$, откуда $2 = \frac{D_n^2}{S_n^2} \mp \frac{1}{S_n^2}$, то $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{D_n^2}{S_n^2} \mp \frac{1}{S_n^2}} = \frac{D_n}{S_n} \mp \frac{1}{x}$, где x с возрастанием n неограниченно возрастает и, таким образом, равенства (1) являются также приближенным методом извлечения $\sqrt{2}$, позволяющим вычислять приближенные значения $\sqrt{2}$ с любой точностью).

На теоретико-числовой интерес равенств (1), как дающих все целочисленные решения уравнения (2), обратил внимание Нессельман [89, 230] и отнес эти равенства к проблемам неопределенного анализа второй степени. Но первым, кто обратил внимание на эти равенства, был по-видимому не Нессельман, а знаменитый французский математик Пьер де Ферма, обративший внимание на изданное И.Буйо сочинение Теона Смирнского [59, 378-389].

Известный немецкий историк математики И.Э.Гофман [74, 63] полагает даже, что сообщенный Теоном процесс построения сторонних и диагональных чисел для параметра $a = 2$, мог явиться для Ферма источником важных идей, связанных с его знаменитым уравнением $ax^2 + 1 = y^2$, решенным в 1658 г. общими усилиями двух английских математиков - Валлиса и Броункера.

Но только этим теоретико-числовым интересом равенств (1) и ограничивали их математическое значение. Усилия историков математики были сосредоточены на попытках открыть, каким образом пифагорейцы пришли к равенствам (1). Рассматривая эти равенства только как решение уравнения (2), французский историк математики П.Таннери пришел к ошибочному мнению, ставшему традиционным, будто пифагорейцы занимались решением неопределенных уравнений второй степени.

В 1881 г. немецкий математик Гейлерман [70, 121-122], для которого текст Теона был также непонятен, как и для Нессельмана, заметил, что простой подстановкой в равенства (1) вместо параметра $a = 2$ любого целочисленного параметра $a > 2$ можно получить уравнение

$$D_n^2 - aS_n^2 = (1-a)^n \cdot (D^2 - aS^2), \quad \text{где} \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (2а)$$

При $S = D = 1$ уравнение (2а) переходит в уравнение

$$D_n^2 - aS_n^2 = (1-a)^{n+1}, \qquad (2б)$$

частным случаем которого при $a = 2$ является уравнение (2).

Уравнение (2а) Гейлерман получил следующим образом: Из равенств

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}, \qquad D_n = D_{n-1} + aS_{n-1}$$

следует

$$aS_n^2 = aS_{n-1}^2 + 2aS_{n-1}D_{n-1} + aD_{n-1}^2,$$

$$D_n^2 = D_{n-1}^2 + 2a\, S_{n-1} D_{n-1} + a^2 S_{n-1}^2,$$

откуда

$$D_n^2 - aS_n^2 = D_{n-1}^2 - aD_{n-1}^2 - aS_{n-1}^2 + a^2 S_{n-1}^2 = D_{n-1}^2(1-a) - aS_{n-1}^2(1-a) = (1-a)(D_{n-1}^2 - aS_{n-1}^2).$$

Полагая $D_{n-1}^2 - aS_{n-1}^2 = (1-a)(D_{n-2}^2 - aS_{n-2}^2)$ и т.д., получаем уравнение (2а).

Но для понимания текста Теона эта подстановка ничего не дала и не могла ничего дать. Поэтому вполне естественным является то, что вопрос, было ли найденное им обобщение равенств (1) известно греческим математикам, Гейлерман считал неразрешимым. Однако Гейлерман ошибался.

Этот вопрос разрешим. Но для решения его надо было понять текст Теона. И открытый мною истинный смысл его доказывает, что найденное Гейлерманом обобщение равенств (1) было известно пифагорейским математикам. Поэтому, несмотря на то что работа Гейлермана не была оставлена без внимания – ее подробно разбирает один из крупнейших историков науки XIX в. З.Гюнтер и называет ее остроумной [65, 93-98]) – она ни на йоту не поколебала его уверенности, так же как уверенности Таннери, Цейтена, Кантора, Гульча, и всех других, занимавшихся этим вопросом, в том числе и самого Гейлермана, в правильности, действительности ошибочной концепции Нессельмана, будто в главе "О сторонних и диагональных числах" сочинения Теона Смирнского "О математических вещах к чтению Платона" речь идет только о квадрате.

К открытию истинного смысла текста Теона могло привести только понимание геометрической природы пифагорейского правила, выражаемого равенствами (1).

Приведенная Теоном процедура построения сторонних и диагональных чисел для параметра 2 содержится также в 23 главе найденного Шоеллем в библиотеке Ватикана комментария Прокла к "Государству" [117, 24_{16}-25_6], в которой Прокл сообщает, что эта процедура принадлежит пифагорейцам [117, 25_{12}-13].

В 27 главе [117, 27_{11}-28_{10}] Прокл сообщает, что пифагорейцы изобрели изящную теорему (*θεώρημα γλαφυρόν*) о сторонах и диагоналях и приводит следующую формулировку ее (заимствованную, вероятно, из источника, которым он пользовался): "Диагональ, присоединенная к стороне, диагональю которой она является, рождает сторону, а сторона, прибавленная сама к себе и присоединенная к ее диагонали, рождает диагональ".

Равенство $S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$ можно выразить словами так: сле-

дующая сторона S_n равна предыдущей диагонали D_{n-1} с присоединенной к ней предыдущей стороной S_{n-1} ; равенство же $D_n = D_{n-1} + 2S_{n-1}$ можно выразить словами так: следующая диагональ D_n равна предыдущей стороне S_{n-1} , прибавленной к себе самой и присоединенной к предыдущей диагонали D_{n-1}.

Таким образом, изящная пифагорейская теорема о сторонах и диагоналях есть не что иное, как равенства (1).

В 27 главе Прокл сообщает, что пифагорейцы доказывали эту теорему с помощью десятого предложения II книги "Начал" Евклида, и приводит пифагорейское доказательство этой изящной теоремы (содержавшееся, вероятно, в источнике, которым он располагал).Но это доказательство противоречит тому, что в равенствах (1) пифагорейцы принимали первые сторону и диагональ равными друг другу. Это доказательство проводится с помощью последовательности возрастающих квадратов. Причем первой пифагорейской стороной полагается сторона первого квадрата, а первой пифагорейской диагональю полагается диагональ первого квадрата. Но сторона квадрата не равна его диагонали.

Так как нельзя предположить, что пифагорейцы принимали первые сторону и диагональ равными друг другу только на основании философского принципа "единица – начало всего", не имея математического обоснования возможности этого, то у них, несомненно, было два доказательства изящной теоремы: одно, сообщенное Проклом, и, как мы увидим во второй части этой монографии, очень важное, необходимое для расшифровки так называемого "Феодорова места" в диалоге Платона "Теэтет", и второе, очевидно отсутствовавшее в источнике, которым располагал Прокл, математически обосновывавшее возможность равенства первой стороны первой диагонали.

Приводим пифагорейское доказательство их изящной теоремы, сообщенное Проклом. Оно гласит: "Пусть будет сторона АВ и равная ей ВГ и диагональ (стороны. – М.П.) АВ ГΔ, двойная ей в квадрате. Согласно теореме (предложение II – 10 "Начал" Евклида. – М.П.) будет квадрат на АΔ вместе с квадратом на Δ Г двойным квадрата на АВ и квадрата на В Δ . У которых квадрат на Δ Г двойной квадрата на АВ. Следовательно, остающийся квадрат на АΔ двойной квадрата на ВΔ . Ибо если как целое против целого, так отнимаемое против отнимаемого, будет также остающееся против остающегося, как целое против целого. Следовательно, диагональ ГΔ , присоединенная к стороне ВГ, есть сторона, АВ же с присоединенной к ней ВГ и ее диагональю ГΔ ,есть диагональ.Так как ее квадрат двойной квадрата стороны ΔВ. К этому еще то же самое таким же образом".

Поясним это доказательство.

Пусть к произвольному прямолинейному отрезку АГ (рис. 13), разделенному в точке В пополам (АВ = ВГ), присоединяется прямолинейный отрезок ГД, являющийся диагональю квадрата, стороной которого является отрезок АВ = ВГ. Согласно десятому предложению

Рис. 13

второй книги "Начал" Евклида (для краткости будем в дальнейшем писать: Евкл. II-10, Евкл. II-9, Евкл. X-2, и т.д.), если какой-либо произвольный прямолинейный отрезок (АГ), продолженный каким-либо произвольным прямолинейным отрезком (ГД), разделен пополам (точка В), то справедливо равенство:

$$АД^2 + ДГ^2 = 2АВ^2 + 2ВД^2, \qquad (3)$$

т.е., как говорит Прокл: "Будет квадрат на АД вместе с квадратом на ДГ двойным квадрата на АВ и квадрата на ВД". Так как в нашем частном случае в этом равенстве ДГ – это диагональ, а АВ – сторона квадрата, то имеет место равенство

$$ДГ^2 = 2АВ^2, \qquad (4)$$

что Прокл и отмечает словами: "У которых (т.е. у АД, ДГ, АВ и ВД) квадрат на ДГ двойной квадрата на АВ". Если мы назовем сумму $АД^2 + ДГ^2$ целым, и равную ей сумму $2АВ^2 + 2ВД^2$ также целым, то отношение целого к целому, или, как говорит Прокл, "целое против целого", равно единице. Так как $ДГ^2$ равно $2АВ^2$, то и отношение $ДГ^2$ к $2АВ^2$ также равно единице, т.е. как целое против целого, так $ДГ^2$ против $2АВ^2$. Если мы будем отнимать $ДГ^2$ от целого $АД^2 + ДГ^2$, а $2АВ^2$ от целого $2АВ^2 + 2ВД^2$, то будет "как целое против целого, так отнимаемое против отнимаемого". И поэтому, говорит Прокл, будет также "остающееся против остающегося (т.е. $АД^2$ против $2ВД^2$. – М.П.), как целое против целого", т.е.:

$$АД^2 = 2ВД^2. \qquad (5)$$

Таким образом, для доказательства того, что $АД^2 = 2ВД^2$, Прокл пользуется аксиомой, справедливой не только для случая, когда "целые" равны друг другу, но при любых отношениях их.

Так как ГД + ВГ = ВД, т.е. ВД – это "диагональ ГД, присоединенная к стороне ВГ", а АД = АВ + ВГ + ГД, т.е. АД – это "АВ с присоединенной к ней ВГ и ее диагональю ГД", из равенства же (5) следует, что ВД – это сторона, а АД – диагональ квадрата, то с помощью этого рассуждения мы получили сторону и диаго-

наль большего квадрата, чем исходный со стороной АВ и диагональю ГΔ. Сторона ВΔ этого нового квадрата ВΔ = ГΔ + ВГ > ВГ = АВ, а его диагональ АΔ = АВ + ВГ + ГΔ > ГΔ.

Заключительные слова Прокла: "К этому еще то же самое" значат, что это же рассуждение надо применить к полученному большему квадрату, и таким же образом получить сторону и диагональ еще большего квадрата, и т.д.

Таким образом, Прокл сообщил, как пифагорейцы с помощью предложения Евкл. II-10 доказывали их изящную теорему: "Диагональ, присоединенная к стороне, диагональю которой она является, рождает сторону, а сторона, прибавленная сама к себе и присоединенная к ее диагонали, рождает диагональ".

Мы видим, что в последовательности сторон и диагоналей, которую дает это доказательство, первой стороной является сторона квадрата, а первой диагональю является диагональ его. Но сторона квадрата не равна его диагонали. В пифагорейской же последовательности сторон и диагоналей для параметра 2, приведенной и в главе "О сторонних и диагональных числах" сочинения Теона Смирнского, и в 23 главе комментария Прокла к "Государству", и в 27 главе этого комментария, в которой Прокл после сообщения о пифагорейском доказательстве их "изящной" теоремы о сторонах и диагоналях приводит также пифагорейскую процедуру построения сторон и диагоналей для параметра 2, первая сторона принимается равной первой диагонали.

Какая этому причина? Рассмотренное нами пифагорейское доказательство "изящной" теоремы, сообщенное Проклом, не может объяснить эту причину.

Как мы уже упоминали, историки математики пытались открыть происхождение пифагорейской процедуры построения сторон и диагоналей для параметра 2. Был предложен ряд гипотез. В том же 1886 году, в котором Р.Шоеллем был открыт в библиотеке Ватикана неизвестный ранее комментарий Прокла к "Государству", П. Берг /50, 135/ предложил гипотезу о происхождении этой процедуры (автором, сообщившим ее, он называет только Теона Смирнского, не упоминая о Прокле), полагающую, что в основании ее лежит последовательность возрастающих равнобедренных прямоугольных треугольников (она легко трансформируется в сообщенную Проклом последовательность возрастающих квадратов), которую Берг строит при помощи очень простого приема. Нет ли все же в его гипотезе влияния последовательности квадратов, сообщенной Проклом? Не был ли Берг знаком с Шоеллем? Гипотезу Берга приводит также М.Кантор /55, 408/ в своих "Лекциях по истории математики".

Рассмотрим ее и мы. Если в равнобедренном прямоугольном треугольнике АВГ (рис. 14) со сторонами АВ = АГ = S_{n-1} и гипотенузой ГВ = D_{n-1}, стороны удлинить на D_{n-1}, то в большем равнобедренном прямоугольном треугольнике АЕΔ стороны S_n = АΔ = АЕ будут равны $S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$, а гипотенуза D_n = ЕΔ = ЕО + OZ +

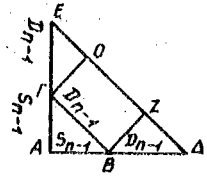


Рис. 14

+ $Z\Delta$ будет равна $D_n = D_{n-1} + 2S_{n-1}$ (так как OZ = ГВ, а вследствие равенства треугольников АГВ, В$Z\Delta$ и ГОЕ, ЕО = $Z\Delta$ = АГ = АВ).

Принимая треугольник АЕΔ начальным и повторяя эту процедуру, получим еще бо́льший треугольник со сторонами $S_{n+1} = S_n + D_n$ и гипотенузой $D_{n+1} = D_n + 2S_n$, и т.д.

Но эта последовательность треугольников также не может объяснить равенства первой стороны первой диагонали в пифагорейской последовательности сторон и диагоналей, как и последовательность квадратов, сообщенная Проклом, так как катет не равен гипотенузе. Кантор не обратил внимания на эту слабость гипотезы Берга, делающую ее несостоятельной.

Вторым, кто после Берга попытался открыть происхождение пифагорейской процедуры построения сторон и диагоналей для квадрата, был Ф.Гульч [77, 8 и сл.]. Так как он принимал редакционное участие в издании Г.Кроллом открытого Шоеллем комментария Прокла к "Государству", то был знаком с рассмотренным сообщением Прокла. В своей гипотезе он использовал это сообщение. Так как она излагается многими авторами, рассмотрим также и ее. Гульч предложил последовательность квадратов, которую он строит следующим образом (рис. 15). На рис. 15 СВ = АС; ВD = СЕ; $DG = CD$; $GJ = DF$ и т.д. Согласно предложению Евкл. II-10 $AD^2 + BD^2 = 2AC^2 + 2CD^2$. Так как $BD = CE$ и $2AC^2 = CE^2$, то $2AC^2 = BD^2$. Следовательно, $AD^2 = 2CD^2 = DF^2$ и $DF = AD = 2AC + BD = CE + 2AC$. Таким образом, сторона CD второго квадрата равна стороне АС первого квадрата с присоединенной диагональю СЕ, а диагональ DF второго квадрата равна диагонали СЕ первого квадрата с присоединенными двумя сторонами АС. Это же имеет место для 3-го, 4-го и следующих квадратов. Полагая $AC = S_0$; $CE = D_0$; $CD = S_1$; $DF = D_1$; и т.д., имеем: $S_1 = S_0 + D_0$; $D_1 = D_0 + 2S_0$; вообще

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}, \qquad D_n = D_{n-1} + 2S_{n-1}. \qquad (1)$$

Гульч полагал, что эта последовательность квадратов открывает происхождение пифагорейского правила (1). Но не приняв во внимание, что пифагорейцы принимали первые сторону и диагональ равными друг другу, которые они на основании их философского принципа "единица – начало всего" полагали равными единице, Гульч повторил ошибку Берга и его последовательность квадратов, так же как последовательность треугольников Берга, бессильна открыть происхождение пифагорейской последовательности сторон и диагоналей для квадрата.

В 1882 г. ошибку Берга и Гульча повторил английский автор Д.Г.Фаулер. Он опубликовал статью, в которой пытался открыть происхождение пифагорейского правила (1) с помощью построения последовательности квадратов (рис. 16), половина которого является

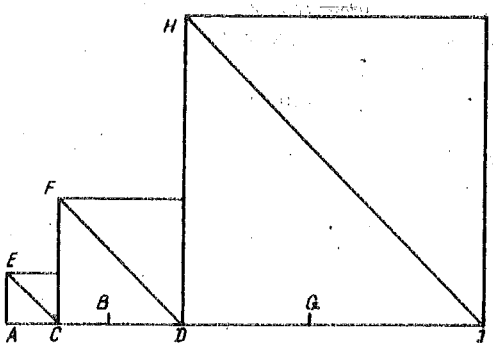


Рис. 15

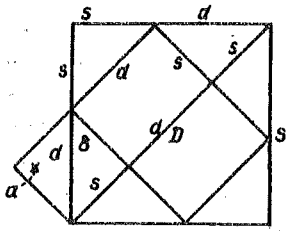


Рис. 16

построением Берга, но Фаулер Берга не упоминает, а ссылается на Прокла, пытаясь этой ссылкой исторически обосновать свое построение. Он начинает его малым квадратом a с диагональю d и стороной s. Присоединяя к диагонали d сторону s, он получает сторону большего квадрата $S = d + s$, с диагональю $D = d + 2s$ [60, 195].

Столь же бессильны открыть происхождение пифагорейского правила (1) гипотезы Е.С.Стаматиса [125, 108–121] и З.Геллера [72]. Гипотеза Геллера привела его к ошибочному, противоречащему тексту Теона утверждению: "Представление о начальном отношении "единицы" теряет теперь его значение" [72, 29].

Впервые попытался открыть причину, по которой пифагорейцы принимали первую сторону равной первой диагонали, М.Я.Выгодский в "Арифметике и алгебре в древнем мире" [10, 319–323]. Он пола-

гал, что предложение Евкл. II-10 не может объяснить происхождения равенств (1). По его мнению, оно могло служить только для доказательства, что эти равенства являются решением уравнения (2), когда они были уже ранее открыты другим путем. Исходя из мысли Цейтена, что "первоначально пропорциональность величин определялась древними греками... в непосредственной связи с процессом нахождения общей меры" [10, 321], М.Я.Выгодский предложил гипотезу о происхождении пифагорейского правила (1), в которой он пытался открыть причину приравнивания пифагорейцами первой стороны первой диагонали.

Б.Л.Ван дер Варден также отрицал возможность открытия происхождения пифагорейских равенств (1) с помощью предложения Евкл. II-10, рассматривая его только как средство доказательства, что эти равенства являются решением уравнения (2), когда они уже известны. И, вероятно, отправляясь от той же мысли Цейтена, предложил в "Пробуждающейся науке" [7, 177] точно ту же гипотезу о происхождении пифагорейского правила (1), что и М.Я.Выгодский.

Привожу ее в редакции Б.Л.Ван дер Вардена.

"Если a (рис. 17) есть сторона, а b – диагональ квадрата, то a можно один раз отнять от b. Остаток $b-a=AD=DE=EB=a^1$ можно снова отнять от $a=AB$. В остатке получится $b^1=AE$. Теперь a^1 и b^1 опять представляют сторону и диагональ меньшего квадрата и из $b^1=a-a^1$; $a^1=b-a$ следует $a=a^1+b^1$; $b=2a^1+b^1$". Продолжая антифайрезис (т.е. взаимное отнятие), разность между диагональю и стороной квадрата можно сделать очень малой. В квадрате с очень малой разностью между ними можно ею пренебречь и положить диагональ равной стороне. Полагая этот квадрат начальным, получаем последовательность возрастающих квадратов, заканчивающуюся исходным квадратом со стороной a, в каждом из которых сторона является суммой стороны и диагонали, а диагональ – суммой диагонали и двух сторон предыдущего меньшего квадрата. Полагая в начальном квадрате сторону и диагональ равными единице, получаем пифагорейские значения сторон и диагоналей.

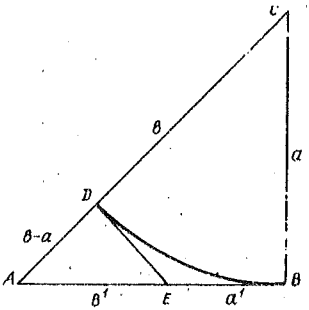


Рис. 17

Однако эта последовательность квадратов столь же бессильна открыть причину, по которой пифагорейцы полагали первые сторону и диагональ равными друг другу, как и последовательность треугольников Берга и последовательность квадратов Гульча.

Ибо пифагорейцы полагали первые сторону и диагональ равными друг другу не приближенно, а точно. И их последовательность сторон и диагоналей бесконечна, последовательность же М.Я.Выгодского – Б.Л.Ван дер Вардена конечна, ибо в ней есть последние сторона и диагональ – сторона и диагональ исходного квадрата со стороной a.

Но только открытие причины, по которой пифагорейцы полагали первые сторону и диагональ равными друг другу, могло привести к открытию происхождения пифагорейского правила, выражаемого равенствами (1), и к пониманию всей главы "О сторонних и диагональных числах".

Таким образом, глава "О сторонних и диагональных числах" сочинения Теона Смирнского "О математических вещах к чтению Платона", несмотря на многочисленные попытки понять ее, начавшиеся сразу после опубликования этого сочинения, несмотря на дополнительные данные, имеющиеся в комментарии Прокла, спустя более 300 лет после выхода в свет издания Буйо, оставалась столь же темной, как в 1644 г., включая и наиболее ясную часть ее – процедуру построения сторонних и диагональных чисел для параметра 2. Но только понимание этой главы могло открыть путь к решению проблемы – "Платоновское число".

Переходим к рассмотрению второго варианта пифагорейского доказательства их "изящной" теоремы, обосновывающего возможность равенства первой стороны первой диагонали.

Рассмотрим четыре примера, приведенные Теоном (эти же примеры приведенн Проклом [117, 28_{11}-29_4]), показывающие, что квадрат на диагонали то единицей меньше, то единицей больше двойного квадрата на стороне (табл. 1).

Таблица 1

n	Стороны S_{n-1}	Диагонали D_{n-1}	$2S^2_{n-1} - D^2_{n-1}$	$D^2_{n-1} - 2S^2_{n-1}$
1	1	1	$2 \cdot 1^2 - 1^2 = 1$	
2	2	3		$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$
3	5	7	$2 \cdot 5^2 - 7^2 = 1$	
4	12	17		$17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1$

Теон утверждает, что при продолжении процесса построения сторон и диагоналей разность $2S^2_{n-1} - D^2_{n-1}$ и $D^2_{n-1} - 2S^2_{n-1}$ всегда будет равна единице: "И от следующей одна за другой прибавки, подобно происходящей, будет аналогичное попеременно, то единицей меньше, то единицей полнее квадрат на диагонали двойного квадрата на

стороне". Это же утверждает Прокл [117, 29_4]: "καὶ ἀεὶ οὕτως", т.е. "И всегда так".

Обоснования этому утверждению они не дают. Как же они могли высказать его? Они взяли, несомненно, это утверждение из источника, бывшего в их распоряжении, в котором также не было обоснования его. Авторами его могли быть только творцы теории сторонних и диагональных чисел – пифагорейцы. Нельзя допустить, что великие греческие математики могли высказать это утверждение, не имея доказательства справедливости его. Поэтому возникает интереснейший вопрос, как же они доказывали справедливость его? Но можно ли ответить на этот, на первый взгляд неразрешимый вопрос? Оказывается, можно. Ответ на этот вопрос и будет открытием отсутствующего у Прокла второго варианта пифагорейского доказательства их "изящной" теоремы о сторонах и диагоналях и одновременно открытием происхождения пифагорейской последовательности сторон и диагоналей для параметра 2.

Чтобы ответить на этот вопрос, надо увидеть, что равенства

$$2 \times 1^2 - 1^2 = 3^2 - 2 \times 2^2, \qquad (6)$$

$$2 \times 5^2 - 7^2 = 17^2 - 2 \times 12^2, \qquad (7)$$

которые дает пифагорейская таблица 1, есть не что иное, как численно выраженное и алгебраически преобразованное предложение Евкл. II-10. Повторим его еще раз. Оно гласит:

Если к произвольной прямой AB присоединена произвольная прямая BD (рис. 18), то, если прямая AB разделена пополам, справедливо равенство

Рис. 18

$$AD^2 + BD^2 = 2AC^2 + 2CD^2. \qquad (8)$$

С помощью алгебраического преобразования это предложение можно представить в следующей форме:

$$BD^2 - 2AC^2 = 2CD^2 - AD^2. \qquad (9)$$

Отрезки CD и AD правой части этого равенства находятся в следующей взаимосвязи с отрезками AC и B его левой части (рис. 17):

$$A_1C_1 = CD = CB + BD = AC + BD, \qquad (10)$$

$$B_1D_1 = AD = AC + CB + BD = BD + 2AC. \qquad (11)$$

Рассмотрим равенство (9). Левая и правая части его являются

одной и той же разностью. Но если в левой части эта разность получается вычитанием двойного квадрата отрезка AC из квадрата отрезка BD, то в правой части, наоборот, она получается вычитанием квадрата отрезка AD, большего, чем BD, из двойного квадрата отрезка CD, бо́льшего, чем AC. В зависимости от того, что больше – квадрат отрезка BD или двойной квадрат отрезка AC (например, если $AC = BD = 1$, то больше двойной квадрат отрезка AC : $2 \cdot 1^2 > 1^2$), эта разность может быть положительной или отрицательной.

Но древние греки не знали отрицательных величин. Поэтому Теон и Прокл говорят только о положительной единице, выражающей эту разность: "То единицей меньше, то единицей полнее квадрат на диагонали двойного квадрата на стороне". Получения отрицательных разностей можно избежать соответствующим переносом членов равенства (8) из одной его части в другую. Например, если $AC = BD = 1$, то для получения положительной разности $2 \times 1^2 - 1^2 = 1$, алгебраическое преобразование равенства (8) должно быть таким:

$$2AC^2 - BD^2 = AD^2 - 2CD^2.$$

С помощью предложения Евкл. II-10 можно получить еще одно равенство, аналогичное равенству (9), левая и правая части которого остаются этой же самой разностью, если отрезки CD и AD правой

Рис. 19

части равенства (9) положить новыми начальными: $CD = A_1C_1$; $A = B_1D_1$ (рис. 19).

Предложение Евкл. II-10 тогда гласит:

$$A_1D_1^2 + B_1D_1^2 = 2A_1C_1^2 + 2C_1D_1^2. \qquad (8а)$$

Так как положительной была разность $AD^2 - 2CD^2 = B_1D_1^2 - 2A_1C_1^2$, то для того, чтобы сохранить ее положительной, надо из правой части равенства (8а) перенести в левую часть член $2A_1C_1^2$.

Таким образом, алгебраическое преобразование равенства (8а), при котором эта разность остается положительной в обеих частях преобразованного равенства (9а), будет следующим:

$$B_1D_1^2 - 2A_1C_1^2 = 2C_1D_1^2 - A_1D_1^2. \qquad (9а)$$

И если в левой части $2AC^2 - BD^2$ предыдущего равенства положительная разность получалась вычитанием квадрата отрезка BD из двойного квадрата отрезка AC, то теперь, наоборот, положитель-

ная разность в левой части равенства (9а) получается вычитанием двойного квадрата отрезка AC из квадрата отрезка BD. Таким образом, для сохранения этой разности положительной, надо каждое следующее, получающееся с помощью этой процедуры равенство (8б), (8в) и т.д. алгебраически преобразовывать в равенства (9б), (9в) и т.д. попеременным переносом из левой части в правую и из правой части в левую соответственно членов $B_n D_n^2$ и $A_n C_n^2$.

Новые отрезки C_1D_1 и A_1D_1 правой части равенства (9а) равны

$$A_2C_2 = C_1D_1 = A_1C_1 + B_1D_1, \qquad (10_1)$$

$$B_2D_2 = A_1D_1 - B_1D_1 + 2A_1C_1. \qquad (11_1)$$

Этот рекуррентный процесс можно продолжить и получить бесконечную последовательность аналогичных равенств, левые и правые части которых остаются одной и той же разностью.

Покажем теперь, что этот процесс приводит к пифагорейским численным равенствам (6) и (7) таблицы 1.

Так как в предложении Евкл. II-10 отрезки AB и BD произвольны, то произволен и отрезок $AC = AB/2$. Следовательно, и начальный отрезок AC и начальный отрезок BD можно положить равными любому числу, значит, их можно положить и равными друг другу.

Знали ли это пифагорейцы? Разумеется, знали. Поэтому Теон и говорит о "начальных отношениях" во множественном числе, т.е. о множестве начальных отношений: "...сторонние и диагональные отношения обнаруживающиеся... по начальным отношениям". Но среди множества начальных отношений есть наивысшее: "...все фигуры согласно наивысшему и начальному отношению начинает единица...". Этим "наивысшим и начальным" отношением пифагорейцы, согласно их философскому принципу "единица – начало всего", считали единицу. Поэтому они принимали начальные отрезки AC и BD равными единице.

Если начальные отрезки AC и BD положить равными единице, то отрезки CD и AD будут равны:

$$CD = AC + BD = 1 + 1 = 2; \qquad AD = BD + 2AC = 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

Предложение Евкл. II-10 тогда численно гласит

$$3^2 + 1^2 = 2 \times 1^2 + 2 \times 2^2$$

и после соответствующего алгебраического преобразования

$$2 \times 1^2 - 1^2 = 3^2 - 2 \times 2^2. \qquad (6)$$

Мы пришли к пифагорейскому равенству таблицы 1.

Если отрезки $CD = 2$ и $AD = 3$ правой части его положить новыми начальными: $A_1C_1 = CD = 2$; $B_1D_1 = AD = 3$, то новые отрезки C_1D_1 и A_1D_1 будут равны: $C_1D_1 = A_1C_1 + B_1D_1 = 2 + 3 = 5$; $A_1D_1 = B_1D_1 + 2A_1C_1 = 3 + 2 \times 2 = 7$.

Предложение Евкл. II-10 тогда численно гласит

$$7^2 + 3^2 = 2 \times 2^2 + 2 \times 5^2$$

и после соответствующего алгебраического преобразования

$$3^2 - 2 \times 2^2 = 2 \times 5^2 - 7^2. \qquad (6а)$$

Если отрезки $C_1D_1 = 5$ и $A_1D_1 = 7$ правой части равенства (6а) положить снова начальными: $A_2C_2 = C_1D_1 = 5$; $B_2D_2 = A_1D_1 = 7$; то новые отрезки C_2D_2 и A_2D_2 будут равны

$$C_2D_2 = A_2C_2 + B_2D_2 = 5 + 7 = 12,$$

$$A_2D_2 = B_2D_2 + 2A_2C_2 = 7 + 2 \times 5 = 17.$$

Предложение Евкл. II-10 тогда численно гласит

$$17^2 + 7^2 = 2 \times 5^2 + 2 \times 12^2$$

и после соответствующего алгебраического преобразования

$$2 \times 5^2 - 7^2 = 17^2 - 2 \times 12^2. \qquad (7)$$

Снова мы получили пифагорейское равенство таблицы 1.

Продолжая этот рекуррентный процесс, можно получить бесконечную последовательность равенств, аналогичных равенствам (6), (6а), (7), члены которых неограниченно возрастают, но левые и правые части их остаются одной и той же разностью, равной единице.

На этом геометрически-алгебраическом рассуждении пифагорейцы основывали утверждение о постоянстве разности, равной единице,

$$D_n^2 - 2S_n^2 \qquad \text{или} \qquad 2S_n^2 - D_n^2$$

при любых значениях n, дошедшее до нас в передачах Теона Смирнского и Прокла Диадоха. Оно обнаруживает, что они были знакомы с бесконечными рекуррентными сходящимися процессами. Геометрическая алгебра являлась и средством открытия этих процессов, и средством исследования их сходимости.

Если отрезки AC, A_1C_1, $A_2C_2, \ldots, A_nC_n$ обозначить $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$; а отрезки BD, B_1D_1, $B_2D_2, \ldots, B_nD_n$ обозначить $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n$, то равенства (10), $(10_I), \ldots, (10_n)$, (11), $(11_I), \ldots, (11_n)$, получают следующий вид:

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}, \qquad D_n = D_{n-1} + 2S_{n-1}, \qquad (1)$$

где $n = 1, 2 \ldots$

В таком виде представляется нам доказательство второго вари-

анта пифагорейского правила (1), в котором первые сторона и диагональ последовательности сторон и диагоналей для параметра 2 принимаются равными друг другу.

Мы видим, что сообщение источника или источников, бывших в распоряжении Прокла Диадоха, о том, что пифагорейцы доказывали их "изящную" теорему о сторонах и диагоналях с помощью предложения Евкл. II-10, относилось не только к первому варианту этой теоремы, в котором первая сторона последовательности сторон и диагоналей для параметра 2 принимается равной стороне, а первая диагональ принимается равной диагонали квадрата, но также ко второму варианту ее, в котором первая сторона принимается равной первой диагонали.

Мы видим, что в этом варианте "изящной" теоремы пифагорейцы принимали первые сторону и диагональ равными друг другу потому, что эти сторона и диагональ вовсе не были стороной и диагональю квадрата, как ошибочно полагали П.Берг, М.Кантор, Ф.Гульч, М.Я.Выгодский, Б.Л.Ван дер Варден, И.Э.Гофман, З.Геллер, Д.М.Фаулер и все другие исследователи, пытавшиеся открыть происхождение пифагорейского правила (1). Они принимали их равными потому, что в этом варианте их "изящной" теоремы первые сторона и диагональ являются отрезками AC и BD рис. 18, которые согласно предложению Евкл. II-10 являются произвольными и могут быть приняты равными друг другу.

Что касается первого варианта "изящной" пифагорейской теоремы о сторонах и диагоналях, в котором первые сторона и диагональ пифагорейской последовательности их равны стороне и диагонали первого квадрата последовательности их, то происхождение его не нуждается в обосновании ибо пифагорейское сообщение, как этот вариант был открыт, дошло до нас в приведенной выше передаче Прокла. Таким образом, предложение Евкл. II-10 явилось фундаментом, на котором пифагорейцы построили математическое обоснование их философского принципа "единица - начало всего".

Второй вариант "изящной" пифагорейской теоремы о сторонах и диагоналях приводит к вопросу, почему же пифагорейцы называли прямолинейные отрезки $A_n C_n$ и $B_n D_n$, лежащие на одной прямой (рис. 18), сторонами и диагоналями?

Можно ли ответить на этот, на первый взгляд неразрешимый, вопрос? Оказывается, можно.

Для этого надо увидеть, что если к двум отрезкам $A_n C_n$, $B_n D_n$ присоединить третий отрезок $A_n C_n$, то при любом n из этих трех отрезков можно составить равнобедренный треугольник.

Поразительная способность греков к конструктивному "умному

зрению" [4] привела их к великой и удивительно простой геометрической идее, впервые введшей в математику (наглядно) понятие "завершенная бесконечность", сделавшей "зримым" "рождение" стороны и диагонали квадрата из отрезков $A_n C_n$ и $B_n D_n$, позволившей вычислять отношение диагонали и стороны квадрата с любой точностью и позволившей выражать несоизмеримые сторону и диагональ квадрата (пока мы говорим только о квадрате, Теон же говорит не только о квадрате, но о любых прямоугольниках и, как мы увидим дальше, эта геометрическая идея была распространена пифагорейцами на любые прямоугольники) актуально бесконечными последовательностями целых чисел, спасшими в математическом отношении от крушения их философский принцип "единица - начало всего".

Так как эти актуально бесконечные последовательности целых чисел начинались с единицы, то отношение несоизмеримых стороны и диагонали квадрата (вообще любых прямоугольников) - "единицей отскивается". Мы рассмотрим эту геометрическую идею на простейшем примере квадрата.

Исходная форма предложения Евкл. II-10 следующая:

$$AD^2 + BD^2 = AC^2 + AC^2 + CD^2 + CD^2, \qquad (12)$$

и после алгебраического преобразования

$$AC^2 + AC^2 - BD^2 = AD^2 - CD^2 - CD^2. \qquad (13)$$

Левая и правая части равенства (13) содержат не по два отрезка, как в равенстве (9), а по три. Каковы бы ни были значения тройки начальных отрезков AC, AC, BD, из следующей тройки больших отрезкой CD, CD, AD можно составить треугольник.

Ибо $CD - CD = A_1C_1 - A_1C_1 = 0 < AD = B_1D_1$, а из равенства (10) следует $CD + CD = A_1C_1 + A_1C_1 = 2AC + 2BD > AD = 2AC + BD = B_1D_1$. Таким образом, разность двух равных отрезков CD, CD меньше, а сумма их больше третьего отрезка AD. А если разность двух отрезков меньше, а сумма их больше третьего отрезка, то из таких трех отрезков можно составить треугольник. Точно так, каковы бы ни были значения второй тройки отрезков $CD = A_1C_1$; $CD = A_1C_1$; $AD = B_1D_1$, из третьей тройки больших отрезков $C_1D_1 = A_2C_2$; $C_1D_1 = A_2C_2$; $A_1D_1 = B_2D_2$ можно составить треугольник, так как $C_1D_1 - C_1D_1 = 0 < A_1D_1 = B_2D_2$; а из равенства ($10_1$) следует: $C_1D_1 + C_1D_1 = A_2C_2 + A_2C_2 = 2A_1C_1 + 2B_1D_1 > A_1D_1 = 2A_1C_1 + B_1D_1 = B_2D_2$.

Вообще при любых значениях предыдущей тройки отрезков $A_{n-1}C_{n-1}$; $A_{n-1}C_{n-1}$; $B_{n-1}D_{n-1}$ из следующей тройки больших отрезков A_nC_n; A_nC_n; B_nD_n можно составить треугольник, так как значения каждой предыдущей тройки отрезков $A_{n-1}C_{n-1}$; $A_{n-1}C_{n-1}$; $B_{n-1}D_{n-1}$

мы полагаем новыми начальными значениями, из которых с помощью равенств (10_n), (11_n) получаем значения больших отрезков следующей тройки A_nC_n; A_nC_n; B_nD_n; из которых можно составить треугольник. Поэтому из каждой тройки отрезков, из которых можно составить треугольник, мы получаем новую тройку больших отрезков, из которых можно также составить треугольник.

Таким образом, мы получаем бесконечную последовательность неограниченно возрастающих троек отрезков, из каждой из которых можно составить равнобедренный треугольник, другими словами, мы получаем бесконечную последовательность равнобедренных треугольников с неограниченно возрастающими сторонами.

Рассмотрим ее.

Так как в первом, начальном равнобедренном треугольнике все стороны равны единице: $AC = AC = BD = 1$, то он не только равнобедренный, но и равносторонний. Следовательно, все углы его равны 60^0, т.е. он остроугольный. Стороны второго треугольника равны: $A_1C_1 = CD = AC + BD = 1 + 1 = 2$; $A_1C_1 = 2$; $B_1D_1 = AD = BD + 2AC = 1 + 2 \times 1 = 3$. Так как сумма квадратов двух равных сторон $A_1C_1 = 2^2 + 2^2 = 8$ меньше квадрата третьей стороны $B_1D_1 : 3^2 = 9$, то этот треугольник тупоугольный. Стороны третьего треугольника равны: $A_2C_2 = A_1C_1 + B_1D_1 = 2 + 3 = 5$; $B_2D_2 = B_1D_1 + 2A_1C_1 = 3 + 2 \times 2 = 7$. Так как сумма квадратов двух равных сторон A_2C_2; A_2C_2: $: 5^2 + 5^2 = 50$ больше квадрата третьей стороны $B_2D_2 : 7^2 = 49$, то этот треугольник остроугольный, и т.д.

Таким образом, эта бесконечная последовательность равнобедренных треугольников состоит из чередующихся остроугольных и тупоугольных треугольников, первым из которых является остроугольный треугольник. Стороны этих треугольников неограниченно возрастают, но в каждом равнобедренном остроугольном треугольнике разность между суммой квадратов двух равных сторон и квадратом третьей стороны, а в каждом равнобедренном тупоугольном треугольнике разность между квадратом третьей стороны и суммой квадратов двух равных сторон остается постоянной, равной единице. Другими словами, в остроугольных треугольниках квадрат третьей стороны на единицу меньше, а в тупоугольных треугольниках – на единицу больше суммы квадратов двух равных сторон.

Таким образом, квадрат третьей стороны с возрастанием сторон треугольников совершает гармонические колебания около суммы квадратов двух равных сторон с амплитудой, равной единице. Или, формулируя эти гармонические колебания с помощью отрицательных величин, – так как разность между квадратом третьей стороны и

суммой квадратов двух равных сторон становится то на единицу меньше, то на единицу больше нуля, то она совершает гармонические колебания около нуля, с амплитудой, равной единице.

Отношение остающейся постоянной, равной единице, разности между суммой $2A_nC_n^2$ квадратов равных сторон A_nC_n и квадратом $B_nD_n^2$ третьей стороны B_nD_n в остроугольных треугольниках к одной из сторон A_nC_n или B_nD_n, с возрастанием сторон A_nC_n и B_nD_n, становится все меньше. Точно так становится все меньше с возрастанием сторон A_nC_n и B_nD_n и отношение к одной из них этой же, равной единице, разности между квадратом $B_nD_n^2$ стороны $B_nD_n^2$ и суммой $2A_nC_n^2$ квадратов равных сторон A_nC_n в тупоугольных треугольниках.

Так как стороны A_nC_n и B_nD_n неограниченно возрастают, то это отношение с неограниченным возрастанием их становится меньше любой сколь угодно малой наперед заданной положительной величины, т.е. оно стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{A_nC_n \text{ или } B_nD_n} = 0. \qquad (14)$$

Равнобедренный прямоугольный треугольник со сторонами S, S, D можно определить как треугольник, в котором отношение разности $D^2-S^2-S^2$ или $S^2+S^2-D^2$ к одной из сторон S или D равно нулю: $\frac{D^2-2S^2}{S \text{ или } D}=0$, или $\frac{2S^2-D^2}{S \text{ или } D}=0$.

Рассмотренная бесконечная последовательность чередующихся остроугольных и тупоугольных равнобедренных треугольников стремится к треугольнику, который именно так определен. Следовательно, она стремится к равнобедренному прямоугольному треугольнику с бесконечно большими сторонами.

Равные друг другу отрезки A_nC_n стремятся к его катетам, а отрезки B_nD_n – к его гипотенузе. Катеты этого бесконечного равнобедренного прямоугольного треугольника являются сторонами бесконечно большого квадрата, а его гипотенуза – диагональю этого квадрата. Поэтому пифагорейцы называли отрезки A_nC_n "сторонами", а отрезки B_nD_n – "диагоналями".

Полемика Аристотеля с пифагорейцами и Платоном свидетельствует, что пифагорейцы и Платон считали бесконечность самостоятельной субстанцией, существующей не в потенции, т.е. в возможности, а в действительности. Аристотель говорит: "οἱ μέν, ὥσπερ οἱ Πυθαγόρειοι καὶ Πλάτων, καθ' αὑτό, οὐκ ὡς συμβεβηκός τινι ἑτέρῳ, ἀλλ' οὐσίαν αὐτὸ ὂν τὸ ἄπειρον" [48, 203 a 3]. В переводе В.П.Карпова это значит: "Одни, как пифагорейцы и Платон, рас-

сматривают бесконечное (τὸ ἄπειρον) само по себе, считая его не свойством чего-то другого, но самостоятельной сущностью..." /3, 109/.

Поэтому пифагорейцы считали бесконечно большой квадрат, так же, как конечный квадрат, существующим в действительности. Следовательно, они рассматривали конечный квадрат и бесконечно большой квадрат, как подобные фигуры. На этом подобии конечного и бесконечного, т.е. на этой взаимосвязи конечного с бесконечным, они и основали спасение от крушения вследствие открытия ими несоизмеримости, их философского принципа "единица – начало всего".

Сторона бесконечно большого квадрата определяется бесконечной последовательностью пифагорейских "сторон" $A_n C_n = A_{n-1} + B_{n-1} = S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$, а его диагональ – бесконечной последовательностью пифагорейских "диагоналей" $B_n D_n = B_{n-1} D_{n-1} + 2 A_{n-1} C_{n-1} = D_n = D_{n-1} + 2S_{n-1}$.

Структура этих последовательностей различна и ее различием определяется различие величин стороны и диагонали бесконечно большого квадрата. Но обе эти бесконечные последовательности начинаются с единицы и обе являются бесконечной последовательностью арифметических операций над ней. Таким образом, и сторона и диагональ бесконечно большого квадрата "единицей отмеривается" и, следовательно, соизмеримы, т.е. взаимно согласны (взаимно рациональны).

Так как "стороны" и "диагонали" остроугольных и тупоугольных треугольников неограниченно возрастают и стремятся к стороне и диагонали бесконечно большого квадрата вследствие увеличений их, то именно увеличения (αὐξήσεις) их "обнаружили", как говорит Платон (мы увидим это дальше), несоизмеримые сторону и диагональ бесконечно большого квадрата (следовательно, и подобного ему конечного квадрата) взаимно согласными, взаимно рациональными. Как мы увидим дальше, "увеличения" аналогичным путем "обнаружили" взаимно согласными, взаимно рациональными не только сторону и диагональ квадрата, но и несоизмеримые стороны и диагонали других прямоугольников.

Из подобия конечного квадрата бесконечно большому квадрату следует, что этими же бесконечными последовательностями пифагорейских "сторон" и "диагоналей" определяются и сторона и диагональ конечного квадрата, т.е. что они также "отмеривают единицей", следовательно, также становятся соизмеримыми, взаимно рациональными.

И бесконечная последовательность пифагорейских "сторон", и

бесконечная последовательность пифагорейских "диагоналей" есть не что иное, как канторовское актуально бесконечное трансфинитное число ω. И, таким образом, уничтожение несоизмеримости диагонали и стороны квадрата, их взаимная рациональность достигаются введением в математику актуально бесконечных трансфинитных чисел, что и было сделано пифагорейцами для спасения их философского принципа "единица - начало всего" (в математическом отношении) за 2000 лет до Георга Кантора, на основе их философской концепции о реальном существовании завершенной бесконечности.

Следовательно, понятие "несоизмеримость", т.е. "иррациональность" - не есть понятие абсолютное, а относительное, существующее только в определенной области - области потенциальной бесконечности. И значение расшифровки "Платоновского числа" состоит также в том, что этот удивительный платоновский фрагмент доказывает известность относительности этого понятия еще в V в до н.э.

Метафорически бесконечную последовательность пифагорейских "сторон" можно назвать "все вместе" стороны, а бесконечную последовательность пифагорейских "диагоналей" - "все вместе" диагонали. Именно так, как мы увидим дальше, называет метафорически бесконечную пифагорейскую последовательность "диагоналей" Платон.

Теперь становится понятным слово "потенциально" в фразе Теона Смирнского: "...так как единица, будучи началом всего, потенциально должна быть и стороной и диагональю". Это слово значит, что в действительности единица не есть и сторона и диагональ, как, игнорируя и не понимая слова "потенциально", пытались сделать единицу и стороной и диагональю в действительности М.Я.Выгодский и Б.Л.Ван дер Варден. Единица, говорит Теон, только в ее возможности (т.е. "потенциально") произвести и сторону и диагональ прямоугольника (в простейшем частном случае - квадрата) есть и сторона и диагональ. Поэтому она и полагается потенциально и стороной и диагональю, как источник, производящий и сторону и диагональ прямоугольника. Этого не поняли Берг, Гульч и все другие, полагавшие первую пифагорейскую "сторону" равной стороне, а первую пифагорейскую "диагональ" равной диагонали квадрата.

Таким образом, слово "потенциально" согласовывается со словами "единицей отыскивается" и, следовательно, текст Теона Смирнского соответствует второму варианту "изящной" пифагорейской теоремы о сторонах и диагоналях.

Представшее перед умственным взором создателей его грандиозное геометрическое зрелище несказанной красоты (θεώρημα - зрелище) - бесконечная последовательность неограниченно возрастающих равнобедренных остроугольных и тупоугольных треугольников, гармо-

ничеоки стремящихся к охватывающему вселенную бесконечному равнобедренному прямоугольному треугольнику, не могло не вызвать восхищения и должно было явиться мощным стимулом к попыткам создания аналогичного зрелища не только для квадрата, но и для других прямоугольников (во второй части этой монографии доказано, что в V в. до н.э. знаменитым математиком – пифагорейцем Феодором Киренским, учителем Платона, было доказано существование бесконечного множества прямоугольников с несоизмеримыми диагоналями и сторонами).

Текст Теона Смирнского доказывает, что эта задача была пифагорейцами решена. И доказывает это именно то место его, которое М.Я.Выгодский отнес к "метафизическим доводам". К рассмотрению этого места мы и переходим. Оно гласит: "И прибавляется к стороне диагональ, к диагонали же две стороны, так как сколь великий квадрат сторона составляет дважды, диагональ однажды".

Все историки математики, толковавшие эту фразу, рассматривали только первую часть ее: "И прибавляется к стороне диагональ, к диагонали же две стороны", являющуюся правилом $S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$, $D_n = D_{n-1} + 2S_{n-1}$. Вторую же часть ее: "так как сколь великий квадрат сторона составляет дважды, диагональ однажды", они оставляли без рассмотрения, полагая, несомненно, как и М.Я.Выгодский, что она является "метафизическим обоснованием", "глубокомысленным метафизическим доводом". На самом деле вторая часть этой фразы, так же как и первая часть ее, не содержит никакой метафизики.

К каким словам относятся слова: "так как сколь великий квадрат сторона составляет дважды, диагональ однажды"? К словам: "к диагонали же две стороны". Таким образом, к диагонали прибавляются две стороны, так как "сколь великий квадрат сторона составляет дважды, диагональ однажды". Что значат эти слова? Они значат, что квадрат стороны содержится в квадрате диагонали два раза. Таким образом, к диагонали прибавляются две стороны, так как квадрат стороны содержится в квадрате диагонали два раза. Следовательно, к диагонали прибавляется столько сторон, сколько раз квадрат стороны содержится в квадрате диагонали.

Фраза: "к диагонали же две стороны, так как сколь великий квадрат сторона составляет дважды, диагональ однажды", слишком замысловата. Эта фраза стоит на голове. Для того, чтобы ее понять, ее нужно перевернуть с головы на ноги. Поэтому так трудно извлечь скрытый в ней простой смысл, хотя она и не содержит никакой метафизики. Мы видим, что эта фраза содержит общее пифагорейское правило построения пифагорейских "сторон" и "диагоналей" для любого прямоугольника. Это общее правило Теон иллюстрирует на простейшем

примере квадрата. Именно поэтому "он" говорит: "Например, выставляются напоказ" (слово "он" взято в кавычки, так как есть основание полагать, что вся глава "О сторонних и диагональных числах" заимствована Теоном из бывшего в его распоряжении источника без понимания ее. В начале второй части своего сочинения, посвященной пифагорейской теории музыки, Теон Смирнский ссылается на перипатетика Адраста Афродисийского /134, 49/. Гульч /117, 393/ полагает, что сведения о пифагорейской теории чисел Теон Смирнский почерпнул также у Адраста, из его комментария к "Тимею" Платона. Надо полагать, что Адраст заимствовал главу "О сторонних и диагональных числах" из более раннего источника, может быть, у Гемина, также без понимания ее. Истинными авторами этой главы были, несомненно, пифагорейцы. По сообщению Ямвлиха, казначей их общины потерял все деньги общины, после чего пифагорейцы вынуждены были добывать средства к существованию преподаванием математики и написали учебник, ставший источником сведений о их некоторых математических достижениях. Вероятно, из этого учебника глава "О сторонних и диагональных числах", написанная пифагорейцами эзоповским языком, без каких-либо изменений и без понимания ее была заимствована историком математики IУ в. до н.э. Эвдемом Родосским, а из его труда переходила из труда в труд позднейших античных авторов также без понимания ее. И, таким образом, она оказалась в сочинении Теона Смирнского, благодаря которому дошла до нашего времени).

Покажем на трех примерах прямоугольников со сторонами 1, $\sqrt{2}$; 1, $\sqrt{3}$; 1, 2 (рис. 20), что это правило является общим.

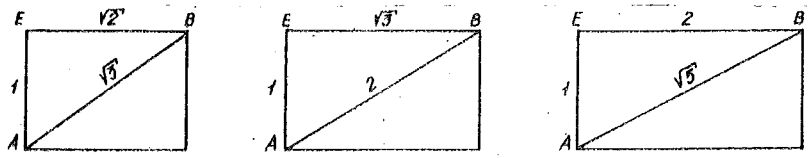


Рис. 20

В первом прямоугольнике квадрат стороны, равной единице, содержится в квадрате диагонали 3 раза: $\frac{\sqrt{3}^2}{1^2} = 3$. Квадрат стороны, равной $\sqrt{2}$, содержится в квадрате диагонали 3/2 раза: $\frac{\sqrt{3}^2}{\sqrt{2}^2} = \frac{3}{2}$.

Во втором прямоугольнике квадрат стороны, равной единице, содержится в квадрате диагонали 4 раза: $\frac{2^2}{1^2} = 4$, а квадрат стороны, равной $\sqrt{3}$, содержится в квадрате диагонали 4/3 раза: $\frac{2^2}{\sqrt{3}^2} = \frac{4}{3}$

В третьем прямоугольнике квадрат стороны, равной единице, содержится в квадрате диагонали 5 раз: $\frac{\sqrt{5}^2}{1^2} = 5$, а квадрат стороны, равной 2, содержится в квадрате диагонали 5/4 раза: $\frac{\sqrt{5}^2}{2^2} = \frac{5}{4}$.

Применим сначала открытое нами в тексте Теона общее пифагорейское правило построения сторон и диагоналей для любых прямоугольников к стороне прямоугольника, равной единице.

Согласно этому правилу к стороне нужно прибавлять диагональ, а к диагонали – столько сторон, сколько раз квадрат стороны содержится в квадрате диагонали.

Рассмотрим сначала прямоугольник № 1.

Так как в этом прямоугольнике квадрат стороны, равной единице, содержится в квадрате диагонали три раза, то к пифагорейской "диагонали" нужно прибавлять три пифагорейских "стороны".

Полагаем, согласно пифагорейскому философскому принципу "единица – начало всего", первую пифагорейскую "сторону" S_0 и первую пифагорейскую "диагональ" D_0 равными единице. Тогда вторая "сторона" S_1 будет равна первой "стороне" $S_0 = 1$, сложенной с первой "диагональю" $D_0 = 1$, т.е. $S_1 = S_0 + D_0 = 1 + 1 = 2$, а вторая "диагональ" D_1 будет равна первой "диагонали" $D_0 = 1$, сложенной с тремя первыми "сторонами" $S_0 = 1$, т.е. она будет равна $D_1 = D_0 + 3S_0 = 1 + 3 \times 1 = 4$; аналогично третья "сторона" S_2 будет равна второй "стороне" S_1, сложенной со второй "диагональю" D_1, т.е. она будет равна $S_2 = S_1 + D_1 = 2 + 4 = 6$, а третья "диагональ" D_2 будет равна второй "диагонали" D_1, сложенной с тремя вторыми "сторонами" S_1, т.е. она будет равна $D_2 = D_1 + 3S_1 = 4 + 3 \times 2 = 10$, и т.д. Вообще $S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$; $D_n = D_{n-1} + 3S_{n-1}$.

Сведем вычисление этих пифагорейских "сторон" и "диагоналей" в таблицу (табл. 2).

Мы видим, что разность $D^2_{n-1} - 3S^2_{n-1}$ определяется формулой

Таблица 2

n	"Стороны"	"Диагонали"	$\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}}$	$D^2_{n-1} - 3S^2_{n-1}$	$3S^2_{n-1} - D^2_{n-1}$
1	1	1	$\frac{1}{1}=1<\sqrt{3}$	$1^2-3\cdot1^2=-2$	+2
2	1+1=2	1+3·1=4	$\frac{4}{2}=2>3$	$4^2-3\cdot2^2=+4$	-4
3	2+4=6	4+3·2=10	$\frac{10}{6}=\frac{5}{3}<\sqrt{3}$	$10^2-3\cdot6^2=-8$	+8
4	6+10=16	10+3·6=28	$\frac{28}{16}=\frac{7}{4}>\sqrt{3}$	$28^2-3\cdot16^2=+16$	-16

Окончание табл. 2

n	"Стороны"	"Диагонали"	$\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}}$	$D_{n-1}^2-3S_{n-1}^2$	$3S_{n-1}^2-D_{n-1}^2$
5	16+28=44	28+3·16=76	$\frac{76}{44}=\frac{19}{11}<\sqrt{3}$	$76^2-3\cdot44^2=-32$	+32
6	44+76=120	76+3·44=208	$\frac{208}{120}=\frac{26}{15}>\sqrt{3}$	$208^2-3\cdot120^2=+64$	-64

$D_n^2-aS_n^2=(1-a)^{n-1}(D^2-aS^2)$, если положить $a=3$, $S=D=1$, $n=1,2,\ldots$

Таким образом, отношения пифагорейских "диагоналей" и "сторон" являются приближенными значениями $\sqrt{3}$. Эти значения есть не что иное, как бесконечная последовательность подходящих дробей, которую дает разложение $\sqrt{3}$ в двучленную лагранжеву цепную дробь:

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}$$

Рассмотрим прямоугольник № 2.

Так как в этом прямоугольнике квадрат стороны, равной единице, содержится в квадрате диагонали четыре раза, то к пифагорейской "диагонали" нужно прибавлять четыре пифагорейских "стороны". Опять полагаем первую "сторону" и первую "диагональ" равными единице. Тогда вторая "сторона" S_1 будет равна первой "стороне" $S_0=1$, сложенной с первой "диагональю" $D_0=1$, т.е. она будет равна $S_1=S_0+D_0=1+1=2$, а вторая "диагональ" D_1 будет равна первой "диагонали" $D_0=1$, сложенной с четырьмя первыми "сторонами" $S_0=1$, т.е. она будет равна $D_1=D_0+4S_0=1+4\times1=5$; аналогично третья "сторона" S_2 будет равна второй "стороне" S_1, сложенной со второй "диагональю" D_1, т.е. она будет равна $S_2=S_1+D_1=2+5=7$, а третья "диагональ" D_2 будет равна второй "диагонали" D_1, сложенной с четырьмя вторыми "сторонами" S_1, т.е. она будет равна $D_2=D_1+4S_1=5+4\times2=13$, и т.д. Вообще $S_n=S_{n-1}+D_{n-1}$; $D_n=D_{n-1}+4S_{n-1}$.

Сведем вычисление этих пифагорейских "сторон" и "диагоналей" в таблицу (табл. 3).

Таким образом, отношения пифагорейских "диагоналей" и "сторон" являются приближенными значениями $\sqrt{4}=2$ и, следовательно, это общее пифагорейское правило в отличие от лагранжевой цепной дроби представляет не только квадратные корни из неквадратных чисел (иррациональные квадратные корни), но и квадратные корни из квадратных чисел (рациональные квадратные корни) бесконечной последовательностью приближений, являясь единым алгоритмом, пред-

Таблица 3

n	"Стороны" S_{n-1}	"Диагонали" D_{n-1}	$\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}}$	$D_{n-1}^2-4S_{n-1}^2$	$4S_{n-1}^2-D_{n-1}^2$
1	1	1	$\frac{1}{1}=1<\sqrt{4}=2$	$1^2-4\cdot1^2=-3$	+3
2	1+1=2	1+4·1=5	$\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}>2$	$5^2-4\cdot2^2=+9$	−9
3	2+5=7	5+4·2=13	$\frac{13}{7}<2$	$13^2-4\cdot7^2=-27$	+27
4	7+13=20	13+4·7=41	$\frac{41}{20}>2$	$41^2-4\cdot20^2=+81$	−81
5	20+41=61	41+4·20=121	$\frac{121}{61}<2$	$121^2-4\cdot61^2=-243$	+243
6	61+121=182	121+4·61=365	$\frac{365}{182}>2$	$365^2-4\cdot182^2=+729$	−729

ставляющим эти два принципиально отличные типа квадратных корней бесконечными последовательностями рациональных приближений.

Полученные приближенные значения $\sqrt{4}=2$ также являются подходящими дробями бесконечной цепной дроби, но не регулярной лагранжевой цепной дроби, не позволяющей разложить $\sqrt{4}$, вообще квадратный корень из квадратного числа, в цепную дробь, а нерегулярной бесконечной цепной дроби:

$$\sqrt{N}=a+\cfrac{N-a^2}{2a+\cfrac{N-a^2}{2a+\dots}} \qquad (15)$$

Полагая $N=4$, $a=1$, разложим $\sqrt{4}$ в следующую нерегулярную одночленную бесконечную цепную дробь:

$$\sqrt{4}=1+\cfrac{4-1^2}{2\cdot1+\cfrac{4-1^2}{2\cdot1+\dots}}=1+\cfrac{4-1}{2+\cfrac{4-1}{2+\dots}}=1+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\dots}}.$$

Подходящие дроби ее следующие: 5/2, 13/7, 41/20, 121/61, 365/182...

Мы видим, что они совпадают с приближенными значениями $\sqrt{4}$, которые дает общее пифагорейское правило построения "сторон" и "диагоналей" для любых прямоугольников. Это правило является геометрической формой именно нерегулярной одночленной бесконечной цепной дроби (15), открытой пифагорейцами за две тысячи лет до того, как Бомбелли и Катальди открыли арифметическую форму ее.

Разложим в эту цепную дробь $\sqrt{3}$, полагая $a=1$. Подходящие дроби: 1, 2, 5/3, 7/4, 19/11, 26/15...

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{3-1^2}{2\cdot1+\cfrac{3-1^2}{2\cdot1+\dots}}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\dots}}$$

Мы видим, что они совпадают с подходящими дробями разложения $\sqrt{3}$ в лагранжеву цепную дробь. Но совпадение имеет место не всегда. Оно имеет место только в тех случаях, когда:

1. Период лагранжевой цепной дроби имеет не больше двух членов, а это имеет место тогда, и только тогда, когда число N, из которого извлекается квадратный корень, можно представить в форме $N=m^2+\frac{2m}{n}$, где m = или $\neq n$. Например, числа 2 и 3 можно представить в такой форме: $2 = 1^2 + \frac{2\cdot 1}{2}$, где $m = 1$, $n = 2$; $3 = 1^2+\frac{2\cdot 1}{1}$, где $m = n = 1$, и поэтому период лагранжевых цепных дробей $\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}$, $\sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dots}}$ имеет не больше двух членов, числа же 7 и 13 нельзя представить в такой форме: $7\neq 2^2+\frac{2\cdot 2}{1 \text{ или } 2}$, $13\neq 3^2+\frac{2\cdot 3}{1 \text{ или } 2}$ и поэтому периоды лагранжевых цепных дробей

$\sqrt{7}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}}$ $\sqrt{13}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\dots}}}}}$ имеют больше двух членов – 4 и 5 членов.

2. Число a в цепной дроби (15) равно числу a в лагранжевой цепной дроби:

$$\sqrt{N} = a+\frac{1}{x}. \qquad (16)$$

Рассмотрим теперь прямоугольник № 3.

Таблица вычисления пифагорейских "сторон" и "диагоналей" для этого прямоугольника следующая (табл. 4).

Таблица 4

n	"Стороны"	"Диагонали"	$\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}}$	$D^2_{n-1}-5S^2_{n-1}$	$5S^2_{n-1}-D^2_{n-1}$
1	1	1	$\frac{1}{1}=1<\sqrt{5}$	$1^2-5\cdot 1^2=-4$	+4
2	1+1=2	1+5·1=6	$\frac{6}{2}=3>\sqrt{5}$	$6^2-5\cdot 2^2=+16$	−16
3	2+6=8	6+5·2=16	$\frac{16}{8}=2<\sqrt{5}$	$16^2-5\cdot 8^2=-64$	+64
4	8+16=24	16+5·8=56	$\frac{56}{24}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}>\sqrt{5}$	$56^2-5\cdot 24^2=+256$	−256
5	24+56=80	56+5·24=176	$\frac{176}{80}=\frac{11}{5}<\sqrt{5}$	$176^2-5\cdot 80^2=-1024$	+1024

Мы получили последовательность приближенных значений $\sqrt{5}$, являющуюся последовательностью подходящих дробей разложения $\sqrt{5}$ в нерегулярную одночленную цепную дробь (15) при $a = 1$:

$\sqrt{5} = 1 + \cfrac{5-1^2}{2\cdot 1 + \cfrac{5-1^2}{2\cdot 1 + \dots}} = 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \dots}}$. Подходящие дроби: 1, 3, 2, 7/3, 11/5...

На приведенных примерах мы убедились, что это пифагорейское правило является общим и есть не что иное, как геометрическая форма нерегулярной одночленной бесконечной цепной дроби (15).

Покажем теперь в общем виде (для простоты при $a = 1$), что это правило есть не что иное, как геометрическая форма этой цепной дроби.

Запишем это правило в общей форме:

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}; \qquad D_n = D_{n-1} + NS_{n-1}, \tag{17}$$

где N – любое натуральное число. Имеем:

$$\frac{D_n}{S_n} = \frac{D_{n-1} + NS_{n-1}}{S_{n-1} + D_{n-1}} = \frac{D_{n-1} + S_{n-1} + NS_{n-1} - S_{n-1}}{S_{n-1} + D_{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{NS_{n-1} - S_{n-1}}{S_{n-1} + D_{n-1}} = 1 + \frac{S_{n-1}(N-1)}{S_{n-1} + D_{n-1}} = 1 + \frac{N-1}{\dfrac{S_{n-1} + D_{n-1}}{S_{n-1}}} = 1 + \frac{N-1}{1 + \dfrac{D_{n-1}}{S_{n-1}}}.$$

Заменяя отношение $\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}}$ значением, аналогичным полученному значению отношения $\frac{D_n}{S_n}$, получаем при $n \to \infty$ следующую бесконечную цепную дробь:

$$\frac{D_n}{S_n} = 1 + \cfrac{N-1}{2 + \cfrac{N-1}{2 + \dots}}, \tag{18}$$

которая есть не что иное, как частный случай цепной дроби (15) при $a = 1$. Применим теперь это общее пифагорейское правило к стороне прямоугольника не равной единице. В прямоугольнике № 1 эта сторона равна $\sqrt{2}$. Квадрат ее содержится в квадрате диагонали 3/2 раза. Поэтому к "диагонали" нужно прибавлять 3/2 "стороны".

Снова полагая первые "сторону" и "диагональ" равными единице, получаем следующие значения "сторон" и "диагоналей" (табл. 5).

Мы видим, что теперь отношения пифагорейских "диагоналей" и "сторон" не дают приближенных значений $\sqrt{3}$, как это было в таблице 2. Для того чтобы получить приближенные значения $\sqrt{3}$, надо умножать отношения пифагорейских "диагоналей" и "сторон" на величину стороны прямоугольника, равной $\sqrt{2}$. Причина очень проста. Она состоит в том, что отношение пифагорейской "диагонали" D_n к пифагорейской "стороне" S_n является приближенным значением отношения диагонали прямоугольника к одной из его сторон, и именно к

Таблица 5

n	"Стороны" S_{n-1}	"Диагонали" D_{n-1}	$\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}}$	$\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}}\sqrt{2}$	$D_{n-1}^2 - \frac{3}{2}S_{n-1}^2$
1	1	1	$\frac{1}{1}=1$	$1\cdot\sqrt{2}<\sqrt{3}$	$1^2-\frac{3}{2}\cdot 1^2=-\frac{1}{2}$
2	$1+1=2$	$1+\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2\cdot 2}=\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}\cdot\sqrt{2}>\sqrt{3}$	$\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot 2^2=+\frac{1}{4}$
3	$2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cdot 2=\frac{11}{2}$	$\frac{11}{2}:\frac{9}{2}=\frac{11}{9}$	$\frac{11}{9}\cdot\sqrt{2}<\sqrt{3}$	$\left(\frac{11}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^2=-\frac{1}{8}$
4	$\frac{9}{2}+\frac{11}{2}=\frac{20}{2}$	$\frac{11}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{49}{4}$	$\frac{49}{4}:\frac{20}{2}=\frac{49}{40}$	$\frac{49}{40}\cdot\sqrt{2}>\sqrt{3}$	$\left(\frac{49}{4}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{20}{2}\right)^2=+\frac{1}{16}$
5	$\frac{20}{2}+\frac{49}{4}=\frac{89}{4}$	$\frac{49}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{20}{2}=\frac{109}{4}$	$\frac{109}{4}:\frac{89}{4}=\frac{109}{89}$	$\frac{109}{89}\cdot\sqrt{2}<\sqrt{3}$	$\left(\frac{109}{4}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{89}{4}\right)^2=-\frac{1}{32}$

той, с помощью которой мы вычисляем "диагональ" D_n, т.е. квадрат которой содержится в квадрате диагонали прямоугольника столько раз, сколько "сторон" S_{n-1} мы прибавляем к "диагонали" D_{n-1} для получения "диагонали" D_n.

Если квадрат диагонали прямоугольника выражается натуральным числом N, то диагональ будет $\sqrt{N}$. Следовательно, $\frac{D_n}{S_n}\approx\frac{\sqrt{N}}{a}$, где a – значение стороны прямоугольника, с помощью которой вычисляется "диагональ" D_n. Отсюда $\sqrt{N}\approx\frac{D_n}{S_n}\cdot a$. Следовательно, чтобы получить приближенное значение величины диагонали прямоугольника, т.е. $\sqrt{N}$, надо отношение $\frac{D_n}{S_n}$ умножить на a. Если $a=1$, то $\sqrt{N}\approx\frac{D_n}{S_n}$, что мы и видели в таблицах 2-4.

Если же значение a стороны прямоугольника, к которой ищется отношение диагонали, не равно 1, то для получения приближенного значения его диагонали, т.е. $\sqrt{N}$, надо умножать отношение пифагорейской "диагонали" D_n к пифагорейской "стороне" S_n на a, что мы и видим в таблице 5.

Обратим внимание на следующее. Из приведенных примеров ясно, что слова "сторона" и "диагональ" в фразе Теона: "И прибавляется к стороне диагональ, к диагонали же две стороны, так как сколь великий квадрат сторона составляет дважды, диагональ однажды" употребляются в двух различных смыслах.

В первой половине этой фразы: "И прибавляется к стороне диагональ, к диагонали же две стороны" эти слова употребляются в смысле пифагорейских "стороны" и "диагонали", определяющихся предложением Евкл. II-10, начальные значения которых могут быть равны друг другу и принимались пифагорейцами равными единице. Во второй

же половине ее: "так как сколь великий квадрат сторона составляет дважды, диагональ однажды" - сторона и диагональ - это уже не пифагорейские "сторона" и "диагональ", а сторона и диагональ прямоугольника.

Во второй половине этой фразы говорится, что к пифагорейской "диагонали" нужно прибавлять столько пифагорейских "сторон", сколько раз квадрат стороны прямоугольника содержится в квадрате его диагонали. При этом величина стороны прямоугольника не оговаривается. Следовательно, она может быть какой угодно. Таким образом, это общее пифагорейское правило говорит, что независимо от величины стороны прямоугольника к пифагорейской "диагонали" нужно прибавлять столько пифагорейских "сторон", сколько раз квадрат стороны прямоугольника содержится в квадрате его диагонали.

Если сторону прямоугольника обозначить a, квадрат его диагонали N, то в самом общем виде это пифагорейское правило запишется так:

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}; \quad D_n = D_{n-1} + \frac{N}{a^2} S_{n-1}. \tag{19}$$

Обозначим приближенное значение $\frac{D_n}{S_n} a$ корня из N через x_n, т.е. $x_n = \frac{D_n}{S_n} a$, $x_{n-1} = \frac{D_{n-1}}{S_{n-1}} a$. Тогда $\frac{D_n}{S_n} = \frac{x_n}{a}$, $\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{x_{n-1}}{a}$. Из равенств $S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$, $D_n = D_{n-1} + 1 + \frac{N}{a^2} S_{n-1}$ следует:

$$x_n = \frac{D_n}{S_n} a = \frac{D_{n-1} + \frac{N}{a^2} S_{n-1}}{S_{n-1} + D_{n-1}} \cdot a = \frac{\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}} + \frac{N}{a^2}}{\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}} + 1} a =$$

$$= \frac{\frac{x_{n-1}}{a} + \frac{N}{a^2}}{\frac{x_{n-1}}{a} + 1} a. \tag{20}$$

Из равенства (20) следует, что чем меньше a^2 отличается от N, тем сильнее сходимость процесса извлечения квадратного корня. Следовательно, самая слабая сходимость при $a = 1$. Из этого же равенства следует, что сходимость не зависит от начальных значений S_0 и D_0. Следовательно, из всех приближенных значений $\sqrt{N}$ одной и той же точности наименьшими числами будут выражаться те, которые получаются при $S_0 = D_0 = 1$. В этом смысле пифагорейские приближения квадратного корня, начинающиеся с единицы, являются наилучшими. Таким образом, пифагорейский философский принцип "единица - начало всего" имеет и этот математический смысл.

Для наглядности покажем на примере прямоугольника № 3, что при $a = 2$ сходимость сильнее, чем при $a = 1$. Квадрат стороны $a = 2$ содержится в квадрате диагонали $N = 5$ 5/4 раза. Следова-

тельно, к пифагорейской "диагонали" нужно прибавлять 5/4 пифагорейских "стороны". Снова сведем вычисление пифагорейских "сторон" и "диагоналей" в таблицу (табл. 6).

При $a = 1$ (табл. 4) пятое приближение $\sqrt{5}$ равно 11/5 = 2,2000, при $a = 2$ (табл. 6) пятое приближение $\sqrt{5}$ равно 682/305 = 2,2360.

Таблица 6

n	"Стороны" S_{n-1}	"Диагонали" D_{n-1}	$\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}}$	$\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}} \cdot 2$	$D^2_{n-1} - \frac{5}{4} S^2_{n-1}$
1	1	1	$\frac{1}{1} = 1$	$1 \cdot 2 = 2 < \sqrt{5}$	$1^2 - \frac{5}{4} 1^2 = -\frac{1}{4}$
2	$1+1=2$	$1+\frac{5}{4}\cdot 1 = \frac{9}{4}$	$\frac{9}{4} : 2 = \frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}\cdot 2 = \frac{9}{4} > \sqrt{5}$	$\left(\frac{9}{4}\right)^2 - \frac{5}{4} 2^2 = +\frac{1}{16}$
3	$2+\frac{9}{4} = \frac{17}{4}$	$\frac{9}{4}+\frac{5}{4}\cdot 2 = \frac{19}{4}$	$\frac{19}{4} : \frac{17}{4} = \frac{19}{17}$	$\frac{19}{17}\cdot 2 = \frac{38}{17} < \sqrt{5}$	$\left(\frac{19}{4}\right)^2 - \frac{5}{4}\left(\frac{17}{4}\right)^2 = -\frac{1}{64}$
4	$\frac{17}{4}+\frac{19}{4} = \frac{36}{4}$	$\frac{19}{4}+\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{4} = \frac{161}{16}$	$\frac{161}{16} : \frac{36}{4} = \frac{161}{144}$	$\frac{161}{144}\cdot 2 = \frac{161}{72} > \sqrt{5}$	$\left(\frac{161}{16}\right)^2 - \frac{5}{4}\left(\frac{36}{4}\right)^2 = +\frac{1}{256}$
5	$\frac{36}{4}+\frac{161}{16} = \frac{305}{16}$	$\frac{161}{16}+\frac{5}{4}\cdot\frac{36}{4} = \frac{341}{16}$	$\frac{341}{16} : \frac{305}{16} = \frac{341}{305}$	$\frac{341}{305}\cdot 2 = \frac{682}{305} < \sqrt{5}$	$\left(\frac{341}{16}\right)^2 - \frac{5}{4}\left(\frac{305}{16}\right)^2 = -\frac{1}{1024}$

Первые четыре верных десятичных знака $\sqrt{5}$ следующие: $\sqrt{5} = 2,2366...$ Таким образом, при значении стороны a прямоугольника, к которой ищется приближенное отношение его диагонали, равном единице, пятое приближенное значение $\sqrt{5}$ верно с точностью только до первого десятичного знака, а при значении стороны a, равном двойке, оно верно с точностью до третьего десятичного знака.

Заметим, что тщательное изучение семантической структуры текста третьего предложения "Измерения круга" Архимеда, в котором им вычислены его знаменитые пределы π: $3\ 1/7 > \pi > 310/71$, доказывает наличие в этом тексте указания, которого никто не видел более двух тысяч лет, что квадратные корни в нем были приближенно вычислены Архимедом именно этим исконным греческим способом приближенного вычисления квадратных корней, с соответствующим выбором численного значения стороны прямоугольника, т.е. с выбором ее численного значения, обеспечивающего нужную, достаточно быструю сходимость процесса приближенного извлечения квадратного корня.

Однако цель нашего исследования - расшифровка туманной части речи Муз, одним из аспектов которой является этот общий математический метод пифагорейцев.

Нам надо было бы теперь ответить на вопрос, каким образом пифагорейцы пришли к этому замечательному общему методу, т.е. каким образом они распространили рассмотренный нами геометрический ме-

тод построения пифагорейских "сторон" и "диагоналей" для квадрата на другие прямоугольники.

Но так как мы уже получили табл. 4, Музы же говорят, как мы увидим дальше, о полученном в этой таблице приближенном значении 7/3 квадратного корня из 5, то мы ответим на этот вопрос немного позже, а теперь, забегая несколько вперед, рассмотрим первые 4 "стороны" и первые 4 "диагонали" этой таблицы таким образом, чтобы подготовиться к пониманию туманной части речи Муз.

Что такое значения "сторон" и "диагоналей"? Это границы их. Первой границей являются их значения 1, 1; второй границей являются их значения 2, 6; третьей - 8, 16 и четвертой - 24, 56.

Первое увеличение "стороны", равное 1, и "диагонали", равное 5, дает вторую границу их - 2, 6 - и связывает первую границу со второй. Оно возвращает также новое количество 2, полученное от сложения первой "стороны" и первой "диагонали" в прежнее качество - "стороны", а новое количество 6, полученное от сложения первой "диагонали" и первых пяти "сторон" в прежнее качество - "диагонали".

Второе увеличение "стороны", равное 8 - 2 = 6, и "диагонали", равное 16 - 6 = 10, дает третью границу их - 8, 16 - и связывает вторую границу с третьей.

Оно возвращает второй раз новое количество, полученное от сложения "стороны" и "диагонали", в прежнее качество - "стороны", новое количество, полученное от сложения "диагонали" и пяти "сторон", в прежнее качество - "диагонали", и связывает первое возвращение со вторым.

Третье увеличение "стороны", равное 24 - 8 = 16, и "диагонали", равное 56 - 16 = 40, дает четвертую границу их - 24, 56 - и связывает третью границу с четвертой.

Оно в третий раз возвращает новое количество, полученное от сложения "стороны" и "диагонали", в прежнее качество - "стороны", новое количество, полученное от сложения "диагонали" и пяти "сторон", в прежнее качество - "диагонали", и связывает второе возвращение с третьим.

Таким образом, три увеличения связывают три возвращения и четыре границы. Эти возвращения новых количеств в прежнее качество есть не что иное, как переход количества в качество.

В первой границе 1, 1 "сторона" уподобляется первой единице, следовательно, не уподобляется второй единице или расподобляется от нее. "Диагональ" же уподобляется второй единице, следовательно, не уподобляется первой единице или расподобляется от нее.

Метафорически можно сказать, что первая граница уподобляет

"сторону" первой единице и расподобляет ее от второй единицы, "диагональ" же она уподобляет второй единице и расподобляет ее от первой единицы. Следовательно, метафорически первую границу можно назвать уподобляющей и расподобляющей.

Во второй границе 2, 6 "сторон" и "диагоналей" сумма 1 + 1 = 2 "стороны" и "диагонали" первой границы уподобляется "стороне", следовательно, не уподобляется "диагонали" или расподобляется от нее. Сумма же 1 + 5 x 1 = 6 "диагонали" и пяти "сторон" первой границы уподобляется "диагонали", следовательно, не уподобляется "стороне" или расподобляется от нее.

Метафорически можно сказать, что вторая граница уподобляет сумму "стороны" и "диагонали" первой границы "стороне" и расподобляет ее от "диагонали", сумму же "диагонали" и пяти "сторон" первой границы она уподобляет "диагонали" и расподобляет ее от "стороны". Следовательно, метафорически можно также вторую границу назвать уподобляющей и расподобляющей.

Аналогично третья и четвертая границы. Таким образом, все четыре границы можно метафорически назвать уподобляющими и расподобляющими.

В сумме 1 + 1 = 2 "стороны" и "диагонали" первой границы увеличивается или выращивается "сторона", "диагональ" же становится в этой сумме частью новой "стороны", следовательно, как "диагональ" она в этой сумме уничтожается или губится.

В сумме 1 + 5 x 1 = 6 "диагонали" и пяти "сторон" первой границы увеличивается или выращивается "диагональ", "сторона" же становится в этой сумме частью новой "диагонали", следовательно, как "сторона" она в этой сумме уничтожается или губится.

Метафорически можно сказать, что первая граница увеличивает или выращивает "сторону" и уничтожает или губит "диагональ", увеличивает или выращивает "диагональ" и уничтожает или губит "сторону". Таким образом, метафорически можно первую границу назвать также увеличивающей или выращивающей и уничтожающей или губящей.

В сумме 2 + 6 = 8 "стороны" и "диагонали" второй границы увеличивается или выращивается "сторона", "диагональ" же становится в этой сумме частью новой "стороны", следовательно, как "диагональ" она в этой сумме уничтожается или губится.

В сумме 6 + 5 x 2 = 16 "диагонали" и пяти "сторон" второй границы увеличивается или выращивается "диагональ", "сторона" же становится в этой сумме частью новой "диагонали", следовательно, как "сторона" она в этой сумме уничтожается или губится.

Метафорически можно сказать, что и вторая граница увеличивает или выращивает "сторону" и уничтожает или губит "диагональ",

увеличивает или выращивает "диагональ" и уничтожает или губит "сторону". Следовательно, метафорически можно также и вторую границу назвать увеличивающей или выращивающей и уничтожающей или губящей.

Аналогично третья и четвертая границы. Таким образом, все четыре границы можно метафорически назвать уподобляющими и расподобляющими, увеличивающими или выращивающими и уничтожающими или губящими.

Мы переходим к ответу на вопрос, каким образом пифагорейцы распространили их геометрический метод получения "сторон" и "диагоналей" для квадрата на любые прямоугольники.

Для ответа на него надо увидеть, что к пифагорейским "сторонам" и "диагоналям" для квадрата приводит не только предложение Евкл. II-10, но и его обращение – предложение Евкл. II-9. Оно гласит: если прямая AB (рис. 21) разделена пополам ($AC = CB$) и D –

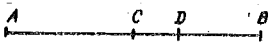


Рис. 21

произвольная точка на отрезке CB, то справедливо равенство:

$$AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2. \qquad (21)$$

Это равенство по виду совпадает с равенством (8). Но в отличие от рис. 18 на рис. 21 $CD \neq AC + BD$, $AD \neq BD + 2AC$.

На рис. 21 имеют место следующие соотношения отрезков AC, CD, BD и AD:

$$AC = CB = CD + BD; \qquad (22)$$

$$AD = AC + CD = CD + BD + CD = BD + 2CD. \qquad (23)$$

В соответствии с этими соотношениями алгебраическое преобразование равенства (21), аналогичное алгебраическому преобразованию (9) равенства (8), должно быть следующим:

$$DB^2 - 2CD^2 = 2AC^2 - AD^2. \qquad (24)$$

Задаваясь произвольными отрезками BD и CD левой части равенства (24), мы получаем с помощью равенств (22) и (23), аналогичных равенствам (10) и (11), большие отрезки AC и AD правой части равенства (24). Следовательно, рассуждение, проведенное нами для равенства (9), остается в силе и для равенства (24), только отрезки BD и AC левой части равенства (9) заменяются отрезками BD и CD левой части равенства (24), а отрезки CD и AD правой части равенства (9) заменяются отрезками AC и AD правой части равенства (24).

Таким образом, полученные нами с помощью предложения Евкл. II-10 пифагорейские "стороны" и "диагонали" для квадрата можно совершенно аналогично получить с помощью его обращения – предложения Евкл. II-9.

Знали ли это пифагорейцы? Разумеется, знали. Так как пифагорейское правило построения "сторон" и "диагоналей" для квадрата было основано на предложении Евкл. II-10 и к этому же правилу приводит предложение Евкл. II-9, то естественно, что общее пифагорейское правило (19) построения "сторон" и "диагоналей" для любых прямоугольников должно было быть основано на обобщении либо предложения Евкл. II-10, либо предложения Евкл. II-9.

Поэтому возникает вопрос, какое предложение следует обобщить, чтобы распространить пифагорейский метод получения "сторон" и "диагоналей" для квадрата на любые прямоугольники, – предложение Евкл. II-10 или предложение Евкл. II-9?

Для того чтобы ответить на него, надо четко представлять себе задачу, которую надо решить. Равенство (13), с помощью которого мы построили пифагорейские "стороны" и "диагонали" для квадрата, содержит в левой части произвольные начальные отрезки AC, AC, BD, из которых мы с помощью рис. 18 получили бо́льшие отрезки CD, CD и AD его правой части, из которых при любых значениях отрезков AC, AC и BD можно составить треугольник. Полагая эти отрезки новыми начальными, мы с помощью того же рисунка получили следующую тройку еще бо́льших отрезков, из которой также можно составить треугольник.

Таким образом, мы получили бесконечную последовательность неограниченно возрастающих равнобедренных треугольников. И так как в каждом треугольнике разность между суммой квадратов двух равных сторон и квадратом третьей стороны, или наоборот, оставалась постоянной, то эта бесконечная последовательность неограниченно возрастающих равнобедренных треугольников стремилась к бесконечно большому равнобедренному прямоугольному треугольнику. А так как отношение двух сторон этих треугольников было постоянным, равным отношению сторон квадрата, то эти пифагорейские "стороны" и "диагонали" были "сторонами" и "диагоналями" для квадрата, и их отношения позволяли приближенно вычислять с любой точностью отношение диагонали квадрата к его стороне.

Следовательно, чтобы распространить этот метод построения "сторон" и "диагоналей" на любые прямоугольники, надо:

1. Найти равенство, соответствующее равенству (13), левая и правая части которого содержали бы по три отрезка, и отрезками левой части его можно было бы задаваться произвольно. Причем в

каждой из этих двух троек отрезков два отрезка находились бы в одном и том же отношении, равном отношению сторон прямоугольника, для которого строятся пифагорейские "стороны" и "диагонали", разность же между суммой квадратов отрезков, находящихся в обеих частях равенства в одном и том же отношении, и квадратом третьего отрезка, была бы по абсолютной величине в обеих частях равенства одинаковой.

2. Найти алгоритм, который позволил бы, если три отрезка правой части этого равенства положить новыми начальными, т.е. положить их новыми отрезками левой части этого равенства, получить из них новые три отрезка правой части этого равенства, которые сохранили бы указанные в пункте 1. свойства, и, кроме того, удовлетворял бы следующим условиям:

Если полученные с его помощью новые три отрезка правой части этого равенства опять положить новыми начальными, т.е. опять перенести их из правой части равенства в левую часть, и из этих новых трех отрезков левой части равенства опять получить с помощью этого алгоритма новые три отрезка правой части равенства, то эти новые три отрезка опять сохранили бы указанные в пункте 1. свойства и, если эту процедуру получения новых троек отрезков продолжить, было бы следующее:

а) каждая получаемая таким образом новая тройка отрезков сохраняла бы свойства, указанные в пункте 1., и из каждой, получаемой таким образом новой тройки отрезков, начиная с некоторой тройки, можно было бы составить треугольник;

б) отрезки троек отрезков правой части равенства, начиная с некоторой тройки, были бы больше отрезков троек отрезков левой части равенства, и при продолжении процедуры получения новых троек отрезков отрезки новых троек неограниченно возрастали бы.

Как видим, задача нахождения такого алгоритма очень сложная и, на первый взгляд, может даже показаться неразрешимой.

Но общее пифагорейское правило (19) построения "сторон" и "диагоналей" для любых прямоугольников доказывает, что пифагорейцы ее решили, и решили геометрическим путем.

Ниже мы переходим к вопросу о восстановлении их решения.

Чтобы ответить на вопрос, какое предложение следует обобщить: Евкл. II-10 или Евкл. II-9, обобщим оба эти предложения.

Сначала обобщим предложение Евкл. II-10.

В этом предложении, так же как в предложении Евкл. II-9, точка C (рис. 18 и 21) делит прямую AB пополам. Следовательно, чтобы обобщить эти предложения, надо, чтобы точка C делила прямую AB на произвольные части.

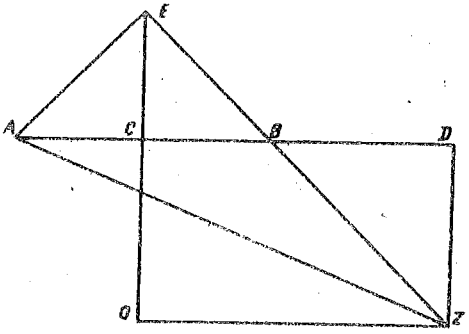


Рис. 22

Евклид доказывает предложение II-10 с помощью рис. 22, где $AC = CB$, $EC \perp AB$, $\angle AEB = d$, отрезок BD – произволен. Из рис. 22 имеем:

$$AZ^2 = AE^2 + EZ^2 = AC^2 + CE^2 + OE^2 + OZ^2 = AD^2 + DZ^2. \qquad (25)$$

Так как $AC = CB$, CE же общая, а $\angle ECA = \angle ECB = d$, то $\Delta AEC = \Delta BEC$, следовательно, $AE = BE$, $\angle EAB = \angle EBA = 1/2d$, $AC = CE = CB$ и $\angle BEC = \angle CBE = 1/2d$. Следовательно, $\angle BEC = \angle EZO$ и $OE = OZ = CD$. Так как $\angle EZO = 1/2d$, то $\angle DZB = 1/2d$, следовательно, $DZ = DB$, откуда

$$AC^2 + AC^2 + CD^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$$

или $$2AC^2 + 2CD^2 = AD^2 + DB^2. \qquad (8)$$

Применим теперь это рассуждение Евклида к случаю, когда точка C делит прямую AB на произвольные части. Тогда рис. 22 пре-

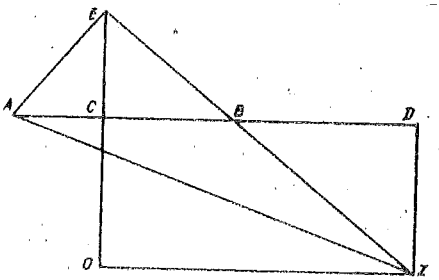


Рис. 23

вратится в рис. 23, в котором прямоугольный треугольник AEB не равнобедренный, разносторонний. Так как теперь $AC \neq CB$, то $AE \neq BE$. Обозначим K отношение катетов BE и AE:

$$BE / AE = K. \qquad (26)$$

Из подобия треугольников BEA, AEC, BEC, ZEO, ZDB имеем: $BE/AE = CE/AC = OZ/OE = DB/DZ = K$, откуда $CE = K \cdot AC$, $OE = OZ/K = CD/K$, $DZ = DB/K$. Евклидово равенство (25) остается в силе и для рис. 23.

Подставляя в него полученные значения CE, OE, DZ и CD вместо OZ, получаем следующее обобщение предложения Евкл. II-10:

$$AC^2 + (K \cdot AC)^2 + \left(\frac{CD}{K}\right)^2 + CD^2 = AD^2 + \left(\frac{DB}{K}\right)^2. \qquad (27)$$

Если $K = 1$, т.е. если прямоугольный треугольник AEB равнобедренный, то равенство (27) переходит в евклидово равенство (12), являющееся простейшим частным случаем равенства (27).

Для решения нашей задачи преобразуем алгебраически равенство (27) так же, как мы преобразовывали равенство (12):

$$\left(\frac{CD}{K}\right)^2 + CD^2 - \left(\frac{DB}{K}\right)^2 = AD^2 - AC^2 - (K \cdot AC)^2. \qquad (28)$$

Равенство (28) соответствует равенству (13). Левая и правая части его содержат по три отрезка, причем отрезками CD и DB, следовательно, отрезками CD/K и DB/K можно задаваться произвольно.

В каждой из этих двух троек отрезков два отрезка находятся в одном и том же отношении, равном отношению сторон прямоугольника, для которого строятся пифагорейские "стороны" и "диагонали". Отношением сторон этого прямоугольника является отношение катетов $BE/AE = K$ прямоугольного треугольника AEB. В левой части равенства (28) в этом отношении находятся два отрезка CD и CD/K; $CD : CD/K = K$. В правой части равенства (28) в этом отношении находятся два отрезка $K \times AC$ и AC, $K \times AC : AC = K$. Разность же между суммой квадратов этих отрезков и квадратом третьего отрезка в обеих частях равенства (28) по абсолютной величине остается постоянной.

Таким образом, нахождением равенства (28) мы выполнили условие (1), необходимое для решения нашей задачи.

Для того чтобы выполнить второе условие, надо прежде всего найти алгоритм, позволяющий получать из отрезков левой части равенства (28) отрезки правой части его.

В простейшем случае $K = 1$ этот алгоритм следовал непосредственно из рис. 18: равенства (10) и (11). Но если $K \neq 1$, то взаимосвязь между отрезками левой и правой части равенства (28) усложняется. Ниже речь пойдет о характере этой связи.

Чтобы найти алгоритм перехода от отрезков левой части равенства (28) к отрезкам правой части его, надо увидеть, что его дает подобие треугольников AEC и BEC, так как из их подобия следуют пропорции: $BE/AE = CE/AC = K$ и $CE/AC = CB/CE$. Следовательно, $K^2 =$

$= CE^2/AC^2 = CE/AC \times CE/AC = CE/AC \times CB/CE = CB/AC$. Из рисунка же 23 следует, что $CB = CD - DB$. Следовательно,

$$K^2 = CB/AC = \frac{CD - DB}{AC}. \qquad (29)$$

Соотношение (29) и позволяет получать из отрезков CD/K, CD и DB/K левой части равенства (28) отрезки $AC, K \times AC, AD$ его правой части:

$$AC = \frac{CD - DB}{K^2}, \qquad (30)$$

$$K \times AC = \frac{CD - DB}{K} = \frac{1}{K}(CD - DB). \qquad (31)$$

$AD = AC + CD = \frac{CD - DB}{K^2} + CD = \frac{CD + K^2 CD - DB}{K^2} = \frac{CD(K^2+1) - DB}{K^2}$. А так как $K^2 + 1 = \frac{BE^2}{AE^2} + 1 = \frac{BE^2 + AE^2}{AE^2} = \frac{AB^2}{AE^2}$, то $AD = \frac{\frac{AB^2}{AE^2} \cdot CD - DB}{K^2} = \frac{1}{K^2}\left(\frac{AB^2}{AE^2} \cdot CD - DB\right)$. (32)

Равенства (30), (31), (32) являются алгоритмом, позволяющим получать из отрезков левой части равенства (28) отрезки его правой части.

Посмотрим теперь, удовлетворяет ли этот алгоритм, к которому приводит обобщение предложения Евкл. II-10, пункту б) условия 2, согласно которому "отрезки троек отрезков правой части равенства, начиная с некоторой тройки, были бы больше отрезков троек отрезков левой части равенства", и пункту а) условия 2., согласно которому "из каждой, получаемой таким образом новой тройки отрезков, начиная с некоторой тройки, можно было бы составить треугольник".

При одном взгляде на равенства (30), (31), (32) видно, что этот алгоритм не удовлетворяет пунктам б) и а) условия 2., так как в этих равенствах фигурирует не сумма, а разность отрезков CD и DB. Поэтому отрезки AC и $K \times AC$ правой части равенства (28), полученные с помощью этого алгоритма, не возрастают по сравнению с отрезками CD/K и CD левой части его.

Покажем это на примере прямоугольного треугольника AEB с катетами $AE = 1$, $BE = 2$ или, что то же, на примере прямоугольника со сторонами 1 и 2.

В этом примере $K = BE/AE = 2/1 = 2$, $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, $\frac{AB^2}{AE^2} = 5/1^2 = 5$.

Так как отрезками CD/K и DB/K левой части равенства (28) можно задаваться произвольно, то положим их равными единице: $CD/K = DB/K = 1$. Следовательно, $CD = K \times CD/K = 2 \times 1 = 2$.

Тогда алгоритм (30), (31), (32) дает следующие значения отрезков AC, $K \times AC$, AD:

$$AC = \frac{CD - DB}{K^2} = \frac{\frac{CD}{K} - \frac{DB}{K}}{K} = 1/2 \times (1-1) = 0;$$

$$K \times AC = 2 \times 0 = 0;$$

$$AD = \frac{1}{K^2}\left(\frac{AB^2}{AE^2} \cdot CD - DB\right) = \frac{1}{K}\left(\frac{AB^2}{AE^2}\,\frac{CD}{K} - \frac{DB}{K}\right) = \frac{1}{2} \times (5 \times 1 - 1) = 2.$$

Мы видим, что отрезки AC и $K \times AC$ равны нулю. Отрезок же $AD = 2$, хотя и больше соответственного отрезка $DB/K = 1$, но треугольника из него составить нельзя.

Таким образом, обобщение предложения Евкл. II-10 не может дать необходимой бесконечной последовательности треугольников со всевозрастающими сторонами, требуемой пунктами а) и б) условия 2.

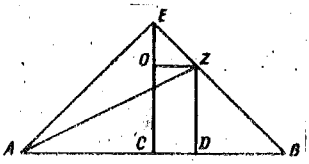


Рис. 24

Обобщим теперь предложение Евкл. II-9.

Евклид доказывает его с помощью рис. 24, где $AC = CB$, $EC \perp AB$, $OZ \perp EC$, $\angle AEB = \alpha$, точка D делит отрезок CB на любые части. Из рис. 24 имеем

$$AZ^2 = AE^2 + EZ^2 = AC^2 + CE^2 + OE^2 + OZ^2 = AD^2 + DZ^2. \qquad (25)$$

Так как AC = CB, CE же общая, а $\angle ECA = \angle ECB = \alpha$, то $\Delta AEC = \Delta BEC$, следовательно, AE = BE, $\angle EAB = \angle EBA = 1/2\,\alpha$, AC = CE = CB и $\angle BEC = \angle CBE = 1/2\,\alpha$. Следовательно, $\angle BEC = \angle EZO$ и OE = $OZ = CD$. Так как $\angle EZO = 1/2\,\alpha$, то $\angle DZB = 1/2\,\alpha$, следовательно, $DZ = DB$, откуда

$$AC^2 + AC^2 + CD^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2 \quad \text{или}$$

$$2AC^2 + 2CD^2 = AD^2 + DB^2. \qquad (21)$$

Применим теперь это рассуждение Евклида к случаю, когда точка C делит прямую AB на произвольные части. Тогда рис. 24 превратится в рис. 25, в котором прямоугольный треугольник AEB не равнобедренный, а разносторонний. Так как теперь $AC \neq CB$, то $AE \neq BE$. Опять обозначим отношение катетов BE и AE, – $BE/AE = K$ (26). Из подобия треугольников AEC, BEC, ZEO, ZDB имеем: $BE/AE = CE/AC = OZ/OE = DB/DZ = K$, откуда $CE = K \times AC$, $OE = OZ/K = CD/K$, $DZ = DB/K$.

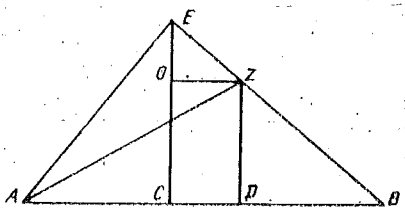


Рис. 25.

Евклидово равенство (25) остается в силе и для рис. 25. Поставв-

ляя в него полученные значения CE, OE, DZ и CD вместо OZ, получаем следующее обобщение предложения Евкл. II-9:

$$AC^2+(K\cdot AC)^2+\left(\frac{CD}{K}\right)^2+CD^2=AD^2+\left(\frac{DB}{K}\right)^2.$$

Таким образом, равенство (27) является обобщением как предложения Евкл. II-10, так и предложения Евкл. II-9.

Как и раньше, преобразуем алгебраически равенство (27) в равенство (28) и найдем алгоритм перехода от отрезков левой части равенства (28) к отрезкам его правой части. В простейшем случае $K = 1$ этот алгоритм следовал непосредственно из рис. 21: равенства (22) и (23). Но если $K = 1$, то взаимосвязь между отрезками левой и правой части равенства (28) усложняется. Непосредственно рис. 25 ее не дает. Но ее позволяет найти подобие треугольников AEC и BEC, из которого следуют пропорции: BE/AE = CE/AC = K и CE/AC = CB/CE, откуда $K^2 = CE^2/AC^2 = CE/AC$, CE/AC = CE/AC, CB/CE = = CB/AC.

Из рисунка же 25 следует, что $CB = CD + DB$. Следовательно,

$$K^2 = CB/AC = \frac{CD+DB}{AC}; \tag{33}$$

Мы видим, что если на рис. 23, соответствующем обобщению предложения Евкл. II-10, отрезок CB равнялся разности отрезков CD и DB, то на рис. 25, соответствующем обобщению предложения Евкл. II-9, отрезок CB равняется сумме отрезков CD и DB.

Это принципиальное отличие рис. 18 и 21, 22 и 24, 23 и 25, т.е. предложений Евкл. II-10 и Евкл. II-9[18] и их обобщения, и дает возможность найти алгоритм перехода от отрезков левой части равенства (28) к отрезкам его правой части, удовлетворяющий пунктам а) и б) условия 2., и решить, таким образом, нашу задачу.

Из соотношения (33) имеем:

$$AC = \frac{CD+DB}{K^2}; \tag{34}$$

$$K\times AC = \frac{CD+DB}{K} = \frac{1}{K}(CD+DB); \tag{35}$$

$$AD = AC+CD = \frac{CD+DB}{K^2}+CD = \frac{CD+K^2\cdot CD+DB}{K^2} = \frac{CD(K^2+1)+DB}{K^2}.$$

А так как $K^2+1 = \frac{BE^2}{AE^2}+1 = \frac{AB^2}{AE^2}$, то

$$AD = \frac{\frac{AB^2}{AE^2}\cdot CD+DB}{K^2} = \frac{1}{K^2}\left(\frac{AB^2}{AE^2}CD+DB\right). \tag{36}$$

Равенства (34), (35), (36) и являются алгоритмом перехода от отрезков левой части равенства (28) к отрезкам его правой части,

удовлетворяющим всем требованиям условия 2., включая его пункты а) и б).

Покажем это на прежнем примере прямоугольного треугольника AEB с катетами $AE=1$, $BE=2$, $K=2:1=2$; $AB^2=5$, $AB^2/AE^2=5/1^2=5$.

Снова полагаем отрезки CD/K и DB/K левой части равенства (28) равными единице. Тогда алгоритм, определяемый равенствами (34), (35), (36), дает следующие значения отрезков AC, $K\times AC$, AD правой части равенства (28):

$$AC=\frac{CD+DB}{K^2}=\frac{\frac{CD}{K}+\frac{DB}{K}}{K}=\frac{1+1}{2}=1;$$

$$K\times AC=2\times 1=2;$$

$$AD=\frac{1}{K^2}\left(\frac{AB^2}{AE^2}CD+DB\right)=\frac{1}{K}\left(\frac{AB^2}{AE^2}\frac{CD}{K}+\frac{DB}{K}\right)=\frac{1}{2}(5\cdot 1+1)=3.$$

Посмотрим, удовлетворяют ли полученные нами с помощью этого алгоритма отрезки AC, $K\times AC$, AD правой части равенства (28) всем требованиям условия 2., включая пункты а) и б).

Отношение отрезков $K\times AC$ и AC равно $K=2$, т.е. они находятся в таком же отношении, в каком находятся отрезки CD и CD/K левой части равенства (28), и это отношение равно отношению $K=2$ сторон прямоугольника, для которого строятся пифагорейские "стороны" и "диагонали". Разность между суммой квадратов этих отрезков и квадратом третьего отрезка DB/K левой части равенства (28) равна: $CD^2+\left(\frac{CD}{K}\right)^2-\left(\frac{DB}{K}\right)^2=2^2+1^2-1^2=4$. Разность же между суммой квадратов находящихся в таком же отношении отрезков $K\times AC$ и AC, и квадратом соответственного отрезку DB/K отрезка AD правой части равенства (28) равна: $(K\times AC)^2+AC^2-AD^2=2^2+1^2-3^2=-4$. Таким образом, эта разность по абсолютной величине в обоих частях равенства (28) остается одинаковой.

Согласно пункту б) условия 2. "отрезки троек правой части равенства, начиная с некоторой тройки, "должны быть "больше отрезков левой части равенства..."

Так как отрезки $AC=1$ и $K\times AC=2$ правой части равенства (28) равны соответственным отрезкам $CD/K=1$ и $CD=2$ его левой части, то пункт б) условия 2. пока не выполняется. Но, может быть, этот пункт условия 2. начнет выполняться с некоторой следующей тройки отрезков, полученной с помощью этого алгоритма. Вычислим с его помощью третью тройку отрезков.

Для этого положим отрезки AC, $K\times AC$, AD правой части равенства (28) новыми начальными, т.е. положим их новыми отрезками левой части равенства (28):

$$AC = 1 = C_1D_1/K; \quad K \times AC = 2 = C_1D_1; \quad AD = 3 = D_1B_1/K.$$

С помощью алгоритма, определяемого равенствами (34), (35), (36), получаем из них новые отрезки правой части равенства (28):

$$A_1C_1 = \frac{C_1D_1 + D_1B_1}{K^2} = \frac{\frac{C_1D_1}{K} + \frac{D_1B_1}{K}}{K} = \frac{1+3}{2} = 2;$$

$$K \times A_1C_1 = 2 \times 2 = 4;$$

$$A_1D_1 = \frac{1}{K}\left(\frac{AB^2}{AE^2} \cdot \frac{C_1D_1}{K} + \frac{D_1B_1}{K}\right) = \frac{1}{2}(5 \cdot 1 + 3) = 4.$$

Мы видим, что теперь три новых, полученных с помощью этого алгоритма, отрезка правой части равенства (28): 2, 4, 4 – больше соответственных отрезков 1, 2, 3 левой части его и, таким образом, начиная с тройки отрезков 2, 4, 4, начинает выполняться пункт б) условия 2.

Так как $4 + 2 > 4$, $4 - 2 < 4$, то из этих трех отрезков можно составить треугольник. Следовательно, начиная с этой тройки отрезков, начинает выполняться и требование пункта а) условия 2., согласно которому "из каждой, получаемой таким образом новой тройки отрезков, начиная с некоторой тройки, можно было бы составить треугольник".

Разность квадратов $2^2 + 4^2 - 4^2 = 4$ опять равна 4, т.е. она остается постоянной. Следовательно, выполняется это требование условия 1.

Для того чтобы еще более наглядно убедиться в том, что алгоритм, определяемый равенствами (34), (35), (36), удовлетворяет всем требованиям условий 1. и 2., вычислим с его помощью еще одну тройку отрезков.

Для этого положим новые отрезки $A_1C_1 = 2$, $K \times A_1C_1 = 4$, $A_1D_1 = 4$ правой части равенства (28) новыми начальными, т.е. полагаем их новыми отрезками левой части равенства (28):

$$A_1C_1 = 2 = C_2D_2/K; \quad K \times A_1C_1 = 4 = C_2D_2; \quad A_1D_1 = 4 = D_2B_2/K.$$

С помощью алгоритма (34), (35), (36) получаем из них новые отрезки правой части равенства (28):

$$A_2C_2 = \frac{C_2D_2 + D_2B_2}{K^2} = \frac{\frac{C_2D_2}{K} + \frac{D_2B_2}{K}}{K} = \frac{2+4}{2} = 3;$$

$$K \times A_2C_2 = 2 \times 3 = 6;$$

$$A_2D_2 = \frac{1}{K}\left(\frac{AB^2}{AE^2} \cdot \frac{C_2D_2}{K} + \frac{D_2B_2}{K}\right) = \frac{1}{2}(5 \cdot 2 + 4) = 7.$$

Опять три полученных новых отрезка 3, 6, 7 больше соответственных предыдущих трех отрезков 2, 4, 4 и из них также можно

составить треугольник, так как $6 + 3 > 7$, $6 - 3 < 7$. Разность же квадратов $7^2 - 3^2 - 6^2 = 4$ остается постоянной, равной 4.

При этом, так как в предыдущем треугольнике со сторонами 2, 4, 4 сумма квадратов сторон 2 и 4 больше квадрата третьей стороны 4, то он остроугольный. Следующий же за ним треугольник со сторонами 3, 6, 7 - тупоугольный, так как в нем, наоборот, квадрат стороны 7 больше суммы квадратов сторон 3 и 6.

Как следует из равенства (28), это чередование является постоянным - если в одной тройке отрезков сумма квадратов двух отрезков, находящихся в постоянном отношении K, больше квадрата третьего отрезка, то в следующей тройке отрезков будет наоборот - квадрат третьего отрезка будет больше суммы квадратов отрезков, находящихся в постоянном отношении K.

Таким образом, с помощью алгоритма (34), (35), (36) мы получаем бесконечную последовательность чередующихся остроугольных и тупоугольных треугольников со все возрастающими сторонами, в каждом из которых отношение двух сторон остается постоянным, равным отношению K (в рассмотренном случае $K = 2$) сторон исходного прямоугольного треугольника или, что то же, исходного прямоугольника, разность же между суммой квадратов сторон, находящихся в отношении K, и квадратом третьей стороны или, наоборот, остается постоянной.

Эта разность, которую обозначим D, определяется отношением K сторон исходного прямоугольника и начальными значениями отрезков C_0D_0/K, C_0D_0 и D_0B_0/K:

$$D = \left(\frac{C_0D_0}{K}\right)^2 + \left(K\frac{C_0D_0}{K}\right)^2 - \left(\frac{D_0B_0}{K}\right)^2, \qquad (37)$$

или

$$D = \left(\frac{D_0B_0}{K}\right)^2 - \left(\frac{C_0D_0}{K}\right)^2 - \left(K\frac{C_0D_0}{K}\right)^2. \qquad (37а)$$

Если $C_0D_0/K = D_0B_0/K = 1$, то $D = 1^2 + (K\times 1)^2 - 1^2 = K^2$.

Так как в рассмотренном случае $K = 2$, то разность D равнялась $2^2 = 4$. В случае же квадрата $K = 1 : 1 = 1$. Поэтому $D = K^2 = 1^2 = 1$.

Если обозначить $D_nB_n/K = y$, $C_nD_n/K = x$, то разность $D = \left(\frac{D_nB_n}{K}\right)^2 - \left(\frac{C_nD_n}{K}\right)^2 - \left(K\frac{C_nD_n}{K}\right)^2$ принимает вид $D = y^2 - x^2 - (Kx)^2$.

В частном случае квадрата $K = 1$, $D = 1$. Поэтому в этом простейшем частном случае разность D принимает вид

$$D = y^2 - 2x^2 = 1.$$

Поэтому частный случай квадрата привел Нессельмана, Гейлермана, Таннери, Цейтена и других историков математики к ошибочно-

му мнению, будто пифагорейцы занимались решением неопределенных уравнений второй степени.

Так как в бесконечной последовательности чередующихся остроугольных и тупоугольных треугольников разность D остается постоянной, стороны их неограниченно возрастают, а отношение двух сторон остается постоянным, равным отношению катетов BE и AE исходного прямоугольного треугольника AEB, то эти треугольники стремятся к бесконечно большому прямоугольному треугольнику, подобному исходному конечному прямоугольному треугольнику AEB. Гипотенуза и катеты этого бесконечно большого прямоугольного треугольника являются диагональю и сторонами бесконечно большого прямоугольника, подобного конечному прямоугольнику, диагональю которого является гипотенуза AB прямоугольного треугольника AEB, а сторонами – катеты AE и BE.

Стороны $\frac{D_n B_n}{K}$ этих треугольников стремятся к диагонали бесконечно большого прямоугольника, стороны же $\frac{C_n D_n}{K}$ и $C_n D_n$ – к его сторонам. Поэтому пифагорейцы называли стороны $\frac{D_n B_n}{K}$ этих треугольников "диагоналями", стороны же $\frac{C_n D_n}{K}$ и $C_n D_n$ "сторонами".

Так как отношение сторон $C_n D_n$ треугольников к сторонам $\frac{C_n D_n}{K}$ равно K и в этом же отношении находятся стороны BE и AE конечного прямоугольника, то стороны $C_n D_n$ стремятся к стороне бесконечно большого прямоугольника, соответствующей стороне BE конечного прямоугольника, а стороны $\frac{C_n D_n}{K}$ стремятся к стороне бесконечно большого прямоугольника, соответствующей стороне AE конечного прямоугольника.

Отношения $\frac{D_n B_n}{K} : \frac{C_n D_n}{K} = \frac{D_n B_n}{C_n D_n}$ являются приближенными значениями отношения диагонали бесконечно большого прямоугольника к его стороне, соответствующей стороне AE конечного прямоугольника, или, так как конечный прямоугольник подобен бесконечно большому прямоугольнику, – приближенными значениями отношения его диагонали AB к стороне AE.

Отношения же $\frac{D_n B_n}{K} : C_n D_n = \frac{1}{K}\left(\frac{D_n B_n}{C_n D_n}\right)$ являются приближенными значениями отношения диагонали бесконечно большого прямоугольника к его стороне, соответствующей стороне BE конечного прямоугольника, или, так как конечный прямоугольник подобен бесконечно большому прямоугольнику, – приближенными значениями отношения его диагонали AB к стороне BE.

Вычислим эти отношения в рассмотренном примере. С помощью ал-

горитма (34), (35), (36) найдем еще одну тройку отрезков. Снова переносим отрезки $A_2C_2 = 3$, $K \times A_2C_2 = 6$, $A_2D_2 = 7$ из правой части равенства (28) в его левую часть, т.е. полагаем:

$$\frac{C_3D_3}{K} = A_2C_2 = 3; \quad C_3D_3 = K \cdot A_2C_2 = 6; \quad \frac{D_3B_3}{K} = A_2D_2 = 7.$$

С помощью алгоритма (34), (35), (36) получаем из них новые отрезки правой части равенства (28):

$$\frac{C_4D_4}{K} = A_3C_3 = \frac{C_3D_3 + D_3B_3}{K^2} = \frac{\frac{C_3D_3}{K} + \frac{D_3B_3}{K}}{K} = \frac{3+7}{2} = 5;$$

$$C_4D_4 = K \times A_3C_3 = 2 \times 5 = 10;$$

$$\frac{D_4B_4}{K} = A_3D_3 = \frac{1}{K}\left(\frac{AB^2}{AE^2} - \frac{C_3D_3}{K} + \frac{D_3B_3}{K}\right) = \frac{1}{2}(5-3+7) = 11.$$

Вычислим отношения $\frac{D_nB_n}{C_nD_n}$ и $\frac{1}{K}\left(\frac{D_nB_n}{C_nD_n}\right)$. Полагаем $\frac{C_0D_0}{K} = \frac{D_0B_0}{K} = 1$. Так как $K = 2$, то $C_0D_0 = 1 \times 2 = 2$. Снова сведем вычисления в таблицу (табл. 7).

Таблица 7

n	"Стороны" $\frac{C_{n-1}D_{n-1}}{K}$	"Стороны" $C_{n-1}D_{n-1}$	"Диагонали" $\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K}$	$\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{C_{n-1}D_{n-1}}$	$\frac{1}{K}\left(\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{C_{n-1}D_{n-1}}\right)$	$\left(\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K}\right)^2 - \left(\frac{C_{n-1}D_{n-1}}{K}\right)^2 C_{n-1}D_{n-1}^2$
1	1	$1 \cdot 2 = 2$	1	$\frac{1}{1} = 1 < \sqrt{5}$	$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$	$1^2 - 1^2 - 2^2 = -4$
2	1	2	3	$\frac{3}{1} = 3 > \sqrt{5}$	$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$	$3^2 - 1^2 - 2^2 = +4$
3	2	4	4	$\frac{4}{2} = 2 < \sqrt{5}$	$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$	$4^2 - 2^2 - 4^2 = -4$
4	3	6	7	$\frac{7}{3} > \sqrt{5}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{6}$	$7^2 - 3^2 - 6^2 = +4$
5	5	10	11	$\frac{11}{5} < \sqrt{5}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{5} = \frac{11}{10}$	$11^2 - 5^2 - 10^2 = -4$

Отношения "диагоналей" $\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K}$ к "сторонам" $\frac{C_{n-1}D_{n-1}}{K}$ равны: 1, 3, 2, 7/3, 11/5..., т.е. это те же отношения, которые мы получили в таблице 4 с помощью общего пифагорейского правила построения "сторон" и "диагоналей".

Отношения же "диагоналей" $\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K}$ к "сторонам" $C_{n-1}D_{n-1}$ равны: 1/2, 3/2, 1, 7/6, 11/10..., т.е. они вдвое меньше, что естественно, так как "стороны" $\frac{C_{n-1}D_{n-1}}{K}$ вдвое меньше "сторон" $C_{n-1}D_{n-1}$.

Отношения "сторон" $\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K}$ к "сторонам" $\frac{C_{n-1}B_{n-1}}{K}$ являются приближенными значениями отношения диагонали AB прямоугольного треугольника AEB к катету AE : $\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K} : \frac{C_{n-1}D_{n-1}}{K} \approx AB/AE$, откуда $AB \approx \frac{D_{n-1}B_{n-1}}{C_{n-1}D_{n-1}} \times AE$.

Так как катет AE или, что то же, сторона прямоугольника, равен единице, то отношения $\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{C_{n-1}D_{n-1}}$ приближенно равны гипотенузе AB, т.е. квадратному корню из ее квадрата AB^2, который мы обозначим K. Отношения же "сторон" $\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K}$ к "сторонам" $C_{n-1}D_{n-1}$ являются приближенными значениями отношения гипотенузы AB прямоугольного треугольника AEB к катету BE : $\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K} : C_{n-1}D_{n-1} \approx AB/BE$, откуда $AB \approx \frac{1}{K}\left(\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{C_{n-1}D_{n-1}}\right) \times BE$. Так как $BE = 2$, то для получения приближенных значений гипотенузы AB, т.е. приближенных значений $\sqrt{K}$, надо отношения $\frac{1}{K}\left(\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{C_{n-1}D_{n-1}}\right)$ умножить на 2.

Чем же объясняется это совпадение приближенных значений $\sqrt{5}$ таблицы 7, даваемых алгоритмом (34), (35), (36), с приближенными значениями $\sqrt{5}$, даваемыми общим пифагорейским правилом построения "сторон" и "диагоналей" в случае прямоугольника со сторонами 1 и 2?

Присмотримся к равенствам:

$$\frac{C_n D_n}{K} = A_{n-1}C_{n-1} = \frac{\frac{C_{n-1}D_{n-1}}{K} + \frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K}}{K} \qquad (34^0)$$

и

$$\frac{D_n B_n}{K} = A_{n-1}D_{n-1} = \frac{1}{K}\left(\frac{AB^2}{AE^2}\cdot\frac{C_{n-1}D_{n-1}}{K} + \frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K}\right). \qquad (36^0)$$

В обоих равенствах отрезок $\frac{C_{n-1}D_{n-1}}{K}$ является "стороной", а отрезок $\frac{D_{n-1}B_{n-1}}{K}$ "диагональю".

Обозначим S_n отрезок $\frac{C_n D_n}{K}$ и D_n отрезок $\frac{D_n B_n}{K}$.

Тогда равенства (34^0) и (36^0) принимают вид:

$$S_n = \frac{1}{K}\left(S_{n-1} + D_{n-1}\right), \qquad (34^0)$$

$$D_n = \frac{1}{K}\left(\frac{AB^2}{AE^2}S_{n-1} + D_{n-1}\right). \qquad (36^0)$$

Что же такое отношение $\frac{AB^2}{AE^2}$? AB^2 – это квадрат гипотенузы AB прямоугольного треугольника AEB или, что то же, квадрат диагонали AB прямоугольника со сторонами AE и $BE \times AE^2$ – это квадрат катета AE или одной из сторон этого прямоугольника. Таким

образом, отношение $\frac{AB^2}{AE^2}$ – это не что иное, как отношение квадрата диагонали исходного прямоугольника к квадрату одной из его сторон, которое показывает, сколько раз квадрат этой стороны содержится в квадрате диагонали. Следовательно, скобка $\left(D_{n-1} + \frac{AB^2}{AE^2} S_{n-1}\right)$ говорит, что к пифагорейской "диагонали" D_{n-1} прибавляется столько пифагорейских "сторон" S_{n-1}, сколько раз квадрат стороны AE прямоугольника содержится в квадрате его диагонали AB. Скобка же $\left(S_{n-1} + D_{n-1}\right)$ говорит, что к пифагорейской "стороне" S_{n-1} прибавляется пифагорейская "диагональ" D_{n-1}.

А это и есть общее пифагорейское правило построения "сторон" и "диагоналей" для любого прямоугольника, являющееся жемчужиной пифагорейской теории чисел, происхождение которого нами, таким образом, открыто.

Равенства (34^0) и (36^0), содержащие множитель 1/К, есть не что иное, как исходная форма этого правила, в которой оно пифагорейцами было открыто с помощью обобщения предложения Евкл. II-9 (это лишний раз подтверждает, что вся вторая книга "Начал" Евклида восходит генетически к пифагорейцам).

Равенства же (19), в которых множитель 1/К отсутствует, есть не что иное, как трансформация исходной формы его. Причину этой трансформации мы рассмотрим дальше.

Естественно, что приближенные значения $\sqrt{5}$, даваемые равенствами (19) и равенствами (34^0) и (36^0), одни и те же, но вследствие отсутствия множителя 1/К значения пифагорейских "сторон" и "диагоналей", дающих приближенные значения $\sqrt{5}$, в таблице 4 больше, чем в таблице 7. В таблице 4 они равны: 1, 1; 2, 6; 8, 16; 24, 56; 80, 176... В таблице же 7 они соответственно равны: 1, 1; 1, 3; 2, 4; 3, 7; 5, 11... Начальные значения пифагорейских "стороны" и "диагонали" в обоих таблицах равны единице. Отношения же следующих "сторон" и "диагоналей" таблицы 4 к соответственным "сторонам" и "диагоналям" таблицы 7 равны:

а) отношения "сторон": 2 : 1 = 2; 8 : 2 = 4; 24 : 3 = 8; 80 : 5 = = 16...

б) отношения "диагоналей": 6 : 3 = 2; 16 : 4 = 4; 56 : 7 = 8; 176 : 11 = 16...

Мы видим, что отношения значений "сторон" и "диагоналей" таблицы 4 к соответственным значениям "сторон" и "диагоналей" таблицы 7 составляют одну и ту же геометрическую прогрессию 2 : 4 : 8 : : 16... со знаменателем 2 = K.

Как мы увидим дальше, фрагмент 546 ВС посвящен двум жемчужинам пифагорейской теории чисел. И, главным образом, именно упомя-

нутой выше жемчужине, в основе которой, как мы видели, лежит стремление выразить вселенную несказанной красоты геометрической формой бесконечной нерегулярной одночленной цепной дроби. Нельзя переоценить ее роль в развитии математики и в истории культуры.

Во второй части исследования мы увидим, что именно эта драгоценнейшая жемчужина пифагорейской теории чисел лежит в основании открытия пифагорейцами несоизмеримости, т.е. в основании диалектического скачка от математики эмпирической к математике абстрактной.

Семантика текста третьего предложения "Измерения круга" доказывает, что именно эта жемчужина пифагорейской теории чисел является тем методом приближенного извлечения квадратных корней, который Архимед положил в основу этого предложения.

Следовательно, на этой жемчужине пифагорейской теории чисел было основано и Птолемеево значение π : $\pi \approx 377/120$, лежащее в основании Альмагеста. Ибо несомненно, что это значение π было получено Птолемеем вычислением длины окружности с радиусом 60 с помощью архимедовых пределов π и поэтому Птолемей не сообщает метод, которым оно было им получено:
120 x 22/7 = 377 1/7; 120 x 223/71 = 376 64/71. Отсюда более точным и простым значением длины окружности с радиусом 60 является число 377, откуда $\pi \approx 377/120$.

Если катет $AE = 1$, а AB^2 обозначить N, то равенство (36^0) принимает вид $D_n = \frac{1}{K}(D_{n-1} + NS_{n-1})$, совпадающий (за исключением множителя 1/K) с равенством (17).

Если катет AE не равен единице и AE^2 обозначить a^2, то равенство (36^0) принимает вид $D_n = \frac{1}{K}\left(D_{n-1} + \frac{N}{a^2} S_{n-1}\right)$, совпадающий (за исключением множителя $1/K$) с равенством (19).

Выясним причину, по которой пифагорейцы трансформировали равенства (34^0) и (36^0) в равенства (19).

Если отношение $BE/AE = K$ сторон прямоугольника рационально, то значения пифагорейских "сторон" S_n и "диагоналей" D_n, которые дает алгоритм (34^0), (36^0), принимая начальные значения их равными единице, только рациональны. Если же отношение $BE/AE = K$ сторон прямоугольника иррационально, например $K = \sqrt{2}$, то значения "сторон" S_n и "диагоналей" D_n, которые дает этот алгоритм, не только рациональны, но и иррациональны. Покажем это на примере прямоугольника со сторонами $AE = 1$ и $BE = \sqrt{2}$ (рис. 20).
В этом случае $K = BE/AE = \sqrt{2}$, $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 = N = 3$,
$AE^2 = a^2 = 1^2$.

Полагаем $S_0 = D_0 = 1$. Тогда алгоритм (34^0), (36^0) дает сле-

дующие значения "сторон" S_1, S_2, S_3... и "диагоналей" D_1, D_2, D_3,...:

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+1) = \frac{2}{\sqrt{2}}; \qquad D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3}{1^2}\cdot 1\right) = \frac{4}{\sqrt{2}};$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}\right) = 3; \qquad D_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{3}{1^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 5;$$

$$S_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(3+5) = \frac{8}{\sqrt{2}}; \qquad D_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(5 + \frac{3}{1^2}\cdot 3\right) = \frac{14}{\sqrt{2}}.$$

Мы видим, что если "стороны" $S_0 = 1$, $S_2 = 3$... и "диагонали" $D_0 = 1$, $D_2 = 5$... рациональны, то "стороны" $S_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$, $S_3 = \frac{8}{\sqrt{2}}\cdots$ и "диагонали" $D_1 = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $D_3 = \frac{4}{\sqrt{2}}\cdots$ иррациональны.

Но пифагорейцы стремились к получению только рациональных "сторон" и "диагоналей".

Так как иррациональность "сторон" и "диагоналей" получалась вследствие наличия в алгоритме (34^0), (36^0) множителя 1/К, то для того, чтобы избавиться от иррациональности их, надо было умножить равенства (34^0), (36^0) на K.

Это и было сделано пифагорейцами, в результате чего из исходного алгоритма (34^0), (36^0) получился замечательно простой трансформированный алгоритм (19), который с полным основанием может быть назван чудо-алгоритмом (этот чудо-алгоритм является еще одним блестящим свидетельством справедливости положения, высказанного одним из основателей советской школы истории математики С.А.Яновской, согласно которому история математики - это история алгоритмов).

Возникает вопрос, почему же в этом чудо-алгоритме есть только два равенства: (34^0), (36^0) из трех равенств: (34^0), (35^0), (36^0)?

Ответ состоит в том, что сторона остроугольного или тупоугольного треугольника, определяемая равенством (35^0), равна $K\cdot S_n$, т.е. стороне треугольника, определяемой равенством (34^0), умноженной на K. Поэтому если сторона треугольника S_n рациональна, то при иррациональных K сторона $K\cdot S_n$ иррациональна. Таким образом, при иррациональных K умножение равенств (34^0) и (36^0) на K не позволяет избавиться от иррациональности стороны $K\cdot S_n$.

Поэтому пифагорейцы вынуждены были для получения только рациональных "сторон" и диагоналей" перейти от трех отрезков S_n, $K\cdot S_n$ и D_n к двум отрезкам S_n и D_n, определяющимся равенствами (34^0) и (36^0).

Для большей наглядности покажем необходимость избавления от

"сторон" $K \cdot S_n$ для получения только рациональных "сторон" и "диагоналей" и механизм этого избавления на примере построения "сторон" и "диагоналей" для прямоугольника со сторонами $AE = 1$ и $BE = \sqrt{2}$, в котором $K = BE/AE = \sqrt{2}$, $AB^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 = 3$, $a^2 = AE^2 = 1$.

Полагаем первые "сторону" S_0 и "диагональ" D_0 равными единице. Тогда "сторона" $K \cdot S_0 = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$. В этой тройке отрезков "сторона" 1 и "диагональ" 1 рациональны, "сторона" же $\sqrt{2}$ – иррациональна. Уже из этой первой тройки отрезков можно составить треугольник: $1 + 1 = 2 > \sqrt{2}$, $1 - 1 = 0 < \sqrt{2}$. Разность квадратов: $S_0^2 + (K \cdot S_0)^2 - D_0^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 - 1^2 = 2$.

С помощью алгоритма $S_n = \frac{1}{K}(S_{n-1} + D_{n-1})$ (34°), $K \cdot S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$ (35°), $D_n = \frac{1}{K}\left(D_{n-1} + \frac{N}{a^2} S_{n-1}\right)$ (36°) из первой тройки отрезков ($n = 1$) получаем вторую тройку отрезков: $S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+1) = \frac{2}{\sqrt{2}}$; $K \cdot S_1 = 1 + 1 = 2$; $D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3}{1^2} \cdot 1\right) = \frac{4}{\sqrt{2}}$.

В этой тройке отрезков "сторона" S_1 и "диагональ" D_1 иррациональны, "сторона" же $K \cdot S_1$ – рациональна. Из этой тройки отрезков также можно составить треугольник: $2 + 2/\sqrt{2} > 4/\sqrt{2}$, $2 - 2/\sqrt{2} < 4/\sqrt{2}$. Разность квадратов: $D_1^2 - S_1^2 - (K \cdot S_1)^2 = 8 - 2 - 4 = 2$ опять равна 2.

Умножая все три стороны этого треугольника на К, можно получить пропорциональный ему, т.е. подобный ему, больший треугольник, в котором "сторона" $S_1^0 = K \cdot S_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2$ и "диагональ" $D_1^0 = K \cdot D_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = 4$ будут избавлены от иррациональности, так как они содержат один и тот же множитель 1/К, "сторона" же $(K \cdot S_1)^0$ от умножения рациональной "стороны" $K \cdot S_1 = 2$ на K станет иррациональной: $(K \cdot S_1)^0 = 2 \cdot \sqrt{2}$.

Поэтому избавить все три стороны треугольника от иррациональности невозможно и приходится довольствоваться избавлением от иррациональности только "сторони" S_n и "диагонали" D_n.

Разность квадратов $D_1^{0^2} - S_1^{0^2} - (K \cdot S_1)^{0^2} = 4^2 - 2^2 - (2 \cdot \sqrt{2})^2 = 16 - 4 - 8 = 4$, равна уже не 2, а 4, т.е. возросла в геометрической прогрессии со знаменателем $2 = K^2 = \sqrt{2}$.

Из этого увеличенного второго треугольника с помощью алгоритма (34°), (35°), (36°) получаем третий треугольник со сторонами:

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+4) = \frac{6}{\sqrt{2}}, \quad K \cdot S_2 = 6, \quad D_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4 + \frac{3}{1^2} 2\right) = \frac{10}{\sqrt{2}}.$$

В этом треугольнике ($n = 3$) "сторона" $S_2 = \frac{6}{\sqrt{2}}$ и "диагональ" $D_2 = \frac{10}{\sqrt{2}}$ иррациональны, "сторона" же $K \cdot S_2 = 6$ – рациональна.

Из третьего треугольника, умножая все стороны его на K, по-

лучаем пропорциональный ему, т.е. подобный ему, второй увеличенный треугольник:

$$S_2^0 = K \cdot S_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = 6, (K \cdot S_2)^0 = 6 \cdot \sqrt{2}, \quad D_2^0 = K \cdot D_2 = \sqrt{2} \frac{10}{\sqrt{2}} = 10.$$

В этом треугольнике "сторона" $S_2^0 = 6$ и "диагональ" $D_2 = 10$ избавлены от иррациональности, "сторона" же $(K \cdot S_2)^0$ от умножения "стороны" $K \cdot S_2$ на K из рациональной ($K \cdot S_2 = 6$) стала иррациональной ($K \cdot KS_2 = 6$). $\sqrt{2}$. Разность квадратов: $S_2^{0^2} + (K \cdot S_2)^{0^2} - D_2^{0^2} = 6^2 + (6 \cdot \sqrt{2})^2 - 10^2 = 36 + 72 - 100 = 8$, снова не равна 2, но вновь возросла в геометрической прогрессии с знаменателем $K^2 = \sqrt{2}^2 = 2$.

Продолжая эту процедуру, получаем из исходной бесконечной последовательности остроугольных и тупоугольных треугольников с неограниченно возрастающими сторонами трансформированную из нее бесконечную последовательность больших, но подобных исходным треугольникам, треугольников, стремящуюся поэтому к тому же бесконечно большому треугольнику, к которому стремится исходная последовательность треугольников.

Следовательно, отношения "диагоналей" и "сторон" этих больших треугольников дают те же приближенные значения $\sqrt{N}$, что и отношения "диагоналей" и "сторон" исходных треугольников.

Но только значения "диагоналей" и "сторон" выражаются большими числами, отношения которых к значениям соответствующих "диагоналей" и "сторон" исходной последовательности треугольников составляют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным K.

Разность между квадратом одной "стороны" и суммой квадратов "сторон", находящихся в отношении, равном K, или наоборот, уже не остается постоянной, но возрастает в геометрической прогрессии со знаменателем, равным K.

Ибо если $D_n^2 - S_n^2 - (K \cdot S_n)^2 = D$, то $(K \cdot D_n)^2 - (K \cdot S_n)^2 - [K \cdot (K \cdot S_n)]^2 = K^2 D_n^2 - K^2 S_n^2 - K^2 (K \cdot S_n)^2 = K^2 [D_n^2 - S_n^2 - (K \cdot S_n)^2] = K^2 \cdot D$.

Заметим, что сумма квадратов "сторон" $S_n^2 + (K \cdot S_n)^2$ равна $N \cdot S_n^2$. Ибо $S_n^2 + (K \cdot S_n)^2 = S_n^2 (1 + K^2)$, но $1 + K^2 = 1 + \frac{BE^2}{AE^2} = \frac{AE^2 + BE^2}{AE^2} = \frac{AB^2}{AE^2} = N$. Откуда $S_n^2 + (K \cdot S_n)^2 = NS_n^2$.

Докажем теперь в общем виде, что если тройки отрезков S_n, $K \cdot S_n$, D_n неограниченно возрастают, то при достаточно больших n из каждой тройки отрезков можно составить треугольник.

Необходимое и достаточное для составления треугольника из отрезков a_n, b_n, c_n условие: $a_n + b_n > c_n$, а $a_n - b_n < c_n$ можно представить в следующей форме: $a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2 > c_n^2$, $a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2 < c_n^2$ или $2a_n b_n > c_n^2 - a_n^2 - b_n^2$; $2a_n b_n > a_n^2 + b_n^2 - c_n^2$.

Если $\left| a_n^2 - b_n^2 - c_n^2 \right| = const$ и отрезки a_n, b_n, c_n неограниченно возрастают, тогда условия $2a_n b_n > \left| a_n^2 + b_n^2 - c_n^2 \right|$ при достаточно больших n удовлетворяется.

Докажем, что отрезки S_n, $K \times S_n$, D_n при $n \to \infty$ неограниченно возрастают. Доказательство этого дает вычисление с помощью равенства (34°), (35°), (36°) отрезков

$$\frac{C_{n+2} D_{n+2}}{K}, \qquad C_{n+2} D_{n+2}, \qquad \frac{D_{n+2} B_{n+2}}{K}.$$

Проведем это вычисление:

$$\frac{C_{n+2} D_{n+2}}{K} = A_{n+1} C_{n+1} = \frac{1}{K}\left(\frac{C_{n+1} D_{n+1}}{K} + \frac{D_{n+1} B_{n+1}}{K}\right) = \frac{1}{K}\left(A_n C_n + A_n D_n\right) =$$

$$= \frac{1}{K}\left(A_n C_n + A_n C_n + C_n D_n\right) = \frac{1}{K}\left(2A_n C_n + C_n D_n\right) = \frac{C_n D_n}{K} + \frac{2A_n C_n}{K} > \frac{C_n D_n}{K} =$$

$$= A_{n-1} C_{n-1},$$

$$C_{n+2} D_{n+2} = C_n D_n + 2A_n C_n > C_n D_n.$$

$$\frac{D_{n+1} B_{n+2}}{K} = A_{n+1} D_{n+1} = A_{n+1} C_{n+1} + C_{n+1} D_{n+1} = \frac{2A_n C_n}{K} + \frac{C_n D_n}{K} + K \cdot A_n C_n =$$

$$= \frac{A_n C_n}{K}(K^2+2) + \frac{C_n D_n}{K} = \frac{\frac{C_n D_n + D_n B_n}{K^2}}{K}(K^2+2) + \frac{C_n D_n}{K} = \frac{C_n D_n + D_n B_n}{K^3}(K^2+2) +$$

$$+ \frac{C_n D_n}{K} = \frac{C_n D_n + D_n B_n}{K} + \frac{2}{K^3}(C_n D_n + D_n B_n) + \frac{C_n D_n}{K} = \frac{1}{K}\Big[(C_n D_n + D_n B_n +$$

$$+ \frac{2}{K^2}(C_n D_n + D_n B_n)\Big] + \frac{C_n D_n}{K} = \frac{C_n D_n}{K} + \frac{D_n B_n}{K} + \frac{2}{K^3}(C_n D_n + D_n B_n) +$$

$$+ \frac{C_n D_n}{K} = \frac{D_n B_n}{K} + 2\frac{C_n D_n}{K} + \frac{2}{K^3}(C_n D_n + D_n B_n) > \frac{D_n B_n}{K}.$$

Таким образом, неограниченность увеличения отрезков $\frac{C_n D_n}{K}$, $C_n D_n$, $\frac{D_n B_n}{K}$ при $n \to \infty$ доказана.

Заметим еще, что каждый из начальных отрезков $\frac{CD}{K}$ и $\frac{DB}{K}$ можно полагать равным любому числу, в частности единице, так как произвольное положение точки D (рис. 25) позволяет принимать отношение DB/CD или, что одно и то же, отношение $DB/K : CD/K$ равным p/q, где p и q – любые целые положительные числа.

Мы рассмотрели общий пифагорейский алгоритм (19) построения "сторон" и "диагоналей" для любого прямоугольника как с древней, так и с современной точек зрения.

Именно этот общий алгоритм поясняет переданная Теоном Смирнским пифагорейская фигура (рис. 8), на которой изображены $\varkappa$ ($=\varkappa\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}$) = "сторона" и δ ($=\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$) = "диагональ".

Мы видим, что на этой фигуре изображены только две стороны треугольника. И теперь, в свете этого общего алгоритма, становится понятным, почему на ней изображены только две стороны треугольника, третья же сторона отсутствует.

Отсутствие третьей стороны объясняется словами Теона: "И рациональны такие и стороны и диагонали". Поэтому на этой фигуре изображены только рациональные стороны треугольников: $\frac{C_n D_n}{K}$ и $\frac{D_n B_n}{K}$, иррациональная же сторона $C_n D_n$ отсутствует.

Мы рассмотрим смысл, содержащийся в еще не рассмотренных нами местах этого текста, несколько дальше, теперь же обратим внимание на то, что пифагорейские бесконечно большие прямоугольные треугольники, которые мы, следуя терминологии Кантора, назовем трансфинитными, замечательны во многих отношениях.

Во-первых, они получаются введением в математику зримым геометрическим путем предельного перехода.

Во-вторых, на основе его, в них впервые, за две тысячи лет до Кеплера, появляется бесконечно удаленная точка, которой является вершина прямого угла трансфинитного прямоугольного треугольника.

В-третьих, в них впервые, за две тысячи лет до "Оснований геометрии" Гильберта, появляется актуально бесконечная (трансфинитная) прямая, которой является сторона трансфинитного прямоугольного треугольника.

В-четвертых, в них впервые, за две тысячи лет до Кантора, обобщено понятие потенциально бесконечного целого положительного числа до актуально бесконечного, выражающегося бесконечной последовательностью неограниченно возрастающих целых положительных чисел, определяющей численное значение стороны трансфинитного прямоугольного треугольника. Эта актуально бесконечная последовательность неограниченно возрастающих целых положительных чисел есть не что иное, как канторовское трансфинитное число ω.

В-пятых, в них впервые появляется "эвристический прием, позволяющий находить свойства одного объекта по свойствам другого, если первый объект получается предельным переходом из второго" /32, 273/, названный Б.А.Розенфельдом "общим принципом непрерывности". Первым объектом является трансфинитный прямоугольный треугольник, получающийся предельным переходом из второго объекта - бесконечной последовательности косоугольных треугольников.

В-шестых, в них впервые, за две тысячи лет до Карно, появля-

ется принцип, названный им "принципом корреляции", так как "при предельном переходе рассматриваемые соотношения не изменяются, а числовые величины переходят в их предельные значения" /32, 280/.

Рассмотренные последовательности косоугольных треугольников удовлетворяют данному Карно определению "коррелятивных систем" (фигур) как "всяких таких систем, которые можно отнести к одной и той же исходной системе, причем всех их можно рассматривать как различные состояния одной и той же изменяемой системы, преобразуемой нечувствительными ступенями".

"Коррелятивными системами" (фигурами), которые можно отнести к одной и той же исходной системе, являются тройки отрезков: $\frac{C_n D_n}{K}$, $C_n D_n$, $\frac{D_n B_n}{K}$.

Всех их можно отнести к одной и той же исходной системе – первой тройке отрезков. Эта тройка отрезков является "изменяемой системой, преобразуемой нечувствительными ступенями", и все последующие тройки отрезков можно рассматривать как различные состояния этой изменяемой системы.

Система остроугольных и система тупоугольных треугольников являются примером двух систем величин, находящихся в "прямой корреляции", так как к этим двум системам величин применяется "в точности то же самое рассуждение".

В-седьмых, как мы видели, отношения пифагорейских "диагоналей" и соответствующих "сторон" являются подходящими дробями бесконечных нерегулярных одночленных цепных дробей, открытых пифагорейцами в геометрической форме за две тысячи лет до открытия Бомбелли и Катальди арифметической формы их.

Обнаруженный нами общий пифагорейский алгоритм (34°), (36°) или, что то же, (19), позволяет вскрыть глубокий смысл, содержащийся в переданных Теоном Смирнским словах пифагорейцев: "Сторонние и диагональные отношения обнаруживаются у чисел по начальным отношениям. Ибо по этим соразмеряются фигуры".

Во-первых, еще раз обратим внимание на то, что в этой фразе слова "начальные отношения" употреблены во множественном числе. Следовательно, пифагорейцы знали, что "начальных отношений" может быть множество.

Для того же, чтобы понять, что такое "начальные отношения", переверпем эту фразу с головы на ноги. Освобожденная от идеалистической формы, эта фраза звучит так: "Отношения сторон и диагоналей прямоугольников к единичному отрезку выражаются целыми числами и определяются начальными отношениями к единичному отрезку "сторон" и "диагоналей" (т.е. отношениями к единичному отрезку

начальных пифагорейских "стороны" и "диагонали", которые могут быть какими угодно, а не только равными единице, и поэтому "начальных отношений" множество. Цитированная пифагорейская фраза стоит на голове также потому, что слово "отношения" употреблено в ней в двух различных смыслах: "сторонние и диагональные отношения" - это отношения к единичному отрезку сторон и диагоналей прямоугольников. "Начальные же отношения" - это уже не отношения к единичному отрезку сторон и диагоналей прямоугольников, а отношения к нему начальных пифагорейских "стороны" и "диагонали", которых может быть бесконечное множество. Употребление слова "отношение" в двух различных смыслах полностью исключает возможность понимания этой фразы без открытия общего пифагорейского алгоритма (34°), (36°). Неудивительно, что она оставалась непонятой веками). Ибо по этим (по начальным отношениям) соразмеряются фигуры".

Эти фигуры - бесконечная последовательность фигур, состоящих из двух отрезков - рациональных "стороны" и "диагонали", в которую развертывается пифагорейская фигура, приведенная на рисунке 8, если данные на ней сокращенные обозначения - π(λευρά) = "сторона" и δ(ιάμετρος) = "диагональ" заменить последовательностью численных значений "сторон" и "диагоналей".

Размеры этих фигур определяются отношениями начальных "стороны" и "диагонали" к единичному отрезку, т.е. эти фигуры "соразмеряются" (друг с другом) "по начальным отношениям".

Замечательно, что пифагорейское определение: "Фигуры соразмеряются по начальным отношениям" - есть не что иное, как предтеча определения Карно "коррелятивных систем" (фигур) как "систем, которые можно отнести к одной и той же системе, причем всех их можно рассматривать как различные состояния одной и той же изменяемой системы, преобразуемой нечувствительными ступенями".

Слова же пифагорейцев: "Совершенно как все фигуры согласно наивысшему и начальному отношению начинает единица, так отношение диагонали, также стороны, отыскивается единицей" свидетельствуют, как мы уже упоминали, о концепции пифагорейцев, основанной на их основополагающем философском принципе "единица - начало всего", что среди множества "начальных отношений" пифагорейских "сторон" и "диагоналей" к единичному отрезку есть наивысшее, которым является единица, которой и следует "отыскивать" отношения сторон и диагоналей прямоугольников к единичному отрезку.

На этом мы заканчиваем рассмотрение главы "О сторонних и диагональных числах" сочинения платоника Теона Смирнского "О математических вещах к чтению Платона".

Рассмотрение ее воскресило замечательную теоретико-числовую математическую теорию пифагорейцев, созданную, вероятно, в V в. до н.э., так называемом "золотом веке" древнегреческой математики и, надо полагать, знаменитым древнегреческим математиком - учителем Платона - пифагорейцем Феодором Киренским.

Об этой, забытой уже в IV в. до н.э. математической теории, бывшей неизвестной уже Аристотелю, о которой Платон знал, вероятно, от Феодора Киренского, он главным образом и говорит в знаменитом фрагменте 546 BC, к рассмотрению которого мы переходим.

Подлинник фрагмента 546 BC

Мы воскрешаем искаженный еще в IV в. до н.э. платоновский подлинник фрагмента 546 BC, заменяя ошибочные слова, введенные не понимавшими этот текст Платона комментаторами: "ἀποστάσεις, παρέκεται, προμήκη, ἀριαμῶν", подлинными словами Платона: "ἀποκαταστάσεις, παρέκηται, προμήκει, ἀριαμόν".

Предлагаемый нами аутентичный платоновский текст фрагмента 546 BC гласит: *ἔστι δέ θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος, ἀνθρωπείῳ δὲ ἐν ᾧ πρώτῳ αὐξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι, τρεῖς ἀποκαταστάσεις, τέτταρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι ὁμοιούντων τε καὶ ἀνομοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φθινόντων, πάντα προσήγορα καὶ ῥητὰ πρός ἄλληλα ἀπέφηναν· ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχηται τρίς αὐξησείς, τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις, τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ προμήκει δέ, ἑκατὸν μὲν ἀριθμὸν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δέ δυοῖν, ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος. σύμπας δέ οὗτος ἀριθμὸς γεωμετρικός, τοιούτου κύριος, ἀμείνόνων τε καὶ χειρόνων γενέσεων..."*

Образцы переводов фрагмента 546 BC

1. Перевод Ф.Шлейермахера [107, 357-358]:

"Es hat aber das göttliche Erzeugte einen Umlauf, welchen eine vollkommene Zahl umfasst, das menschliche aber eine Zahl, in welcher, als der ersten, Vermehrungen - hervorgebrachte und hervorbringende - nachdem sie drei Zwischenräume und vier Glieder von teils ähnlich und unähnlich, teils überschüssig und abgängig machenden Zahlen empfangen haben, Alles gegen einander messbar und ausdrückbar darstellen; wovon dann die vierdrit-

tige Wurzel mit der Fünf zusammengespannt, dreimal vermehrt, zwei Harmonien darstellt, die eine gleichvielmal gleiche, hundert ebenso viel mal; die andere gleichlängig zwar der länglichten, aber von hundert Zahlen von den aussprechbaren Durchmessern der Fünf jeder um Eins verkürzt, unaussprechbaren aber Zwei und von hundert Würfeln der Drei. Diese gesammte geometrische Zahl entscheidet hierüber, über bessere und schlechtere Zeugungen; ..."

Это значит: "Имеет же божественное рожденное кругооборот /слово Umlauf можно перевести также как "обращение" (планет)/, который охватывает совершенное число, человеческое же (рожденное, имеет. - М.П.) число, в котором, как в первом, увеличения - порожденные и порождающие - после того как они приняли три промежутка (или расстояния) и четыре члена чисел, частью подобное и неподобное, частью избыточное и недостающее делающих, Все друг против друга измеримым и выразимым представляют; от чего затем четырехтретный корень, сопряженный с пятеркой, трижды увеличенный, представляет две гармонии, одна равная равное число раз, сто раз таким же образом; другая хотя равная по длине продолговатому, однако из ста чисел из выразимых диаметров пятерки, каждый укороченный на единицу, невыразимых же двойку и из ста кубов тройки. Все в целом это геометрическое число решает об этом, о лучших и худших рождениях".

2. Перевод Ф.Зуземиля /126, 371-372/:

"Es hat aber das göttlich Erzeugte eine Umlaufzeit, welche von einer vollkommenen Zahl umfasst wird, dass menschlich Erzeugte aber eine durch eine solche Zahl umfasste, welche die erste ist, innerhal derer vermögende und vermochte Vervielfachungen, nachdem sie drei Abstände und vier Glieder gewonnen haben, welche letzteren aus verähnlichenden und verunähnlichenden und mehrenden und mindernden Zahlen bestehen, diese alle als gleich benennlich und rational gegen einander haben erscheinen lassen, und zwar so, dass ihr kleinstes Grundverhältnis in ganzen Zahlen drei zu vier ist, welches denn durch Zusammenjochung mit der Fünf, so bald es nämlich eine dreifache Vermehrung erfahren hat, zwei Proportionalzahlen erzeugt, die eine gleichmal gkeich, hundert eben so oftmal, die andere zwar von gleicher Länge mit ihr, aber oblong, bestehend aus hundert rationalen Quadraten der Fünf, wenn man von einem jeden Eins, irrationalen, wenn man Zwei abzieht, und aus hundert Kuben der Drei".

Это значит: "Имеет же божественно рожденное время кругооборота, которое охватывается совершенным числом, человечески же рожденное (имеет время кругооборота. - М.П.) посредством такого чис-

ла охватываемое, которое есть первое, внутри которого имеющие силу и возможность увеличения, после того как они приняли три расстояния и четыре члена, из которых последние (четыре члена. - М.П.) состоят из уподобляющих и неуподобляющих и увеличивающих и уменьшающих чисел, эти все (числа. - М.П.) как одинаково называемые и рациональные друг против друга явили, и притом так, что их наименьшее фундаментальное соотношение в целых числах есть три к четырем, которое же посредством сопряжения с пятеркой, как скоро это указанное (сопряжение фундаментального соотношения трех к четырем с пятеркой. - М.П.) испытало трехкратное увеличение, производит два пропорциональных числа, одно равное равное число раз, сто раз именно так, второе хотя равной длины с ним, но продолговатое, состоящее из ста рациональных квадратов пятерки, если из каждого (квадрата. - М.П.) отнимают единицу, иррациональных (квадратов пятерки. - М.П.) если (из каждого отнимают. - М.П.) двойку, и из ста кубов тройки".

Гульч пишет /75, 43/, что его перевод отличается от оригинала только тем, что распутывает данную Платоном искусственную конструкцию переплетения технических терминов и устраняет их величайшую краткость, затрудняющие понимание, и переводит слова: "ἀνθρωπείῳ δέ... ἀπέφηναν" так:

"Für das menschlich Erzeugte ist als Periode eine Zahl massgebend, in welcher zunächst als Faktoren enthalten sing die Glieder der beiden (geometrischen) Reihen 1 2 4 8 und 1 3 9 27, welche Glieder (gemäss der Natur der geometrischen Reihe) derartig aufsteigen, dass jedes (innere) Glied sowohl das Produkt des vorhergenden Gliedes mit der Verhältniszahl der Reihe, als den Quotient des nächstfolgenden Gliedes, dividiert durch dieselbe Verhältniszahl, darstellt. Jede dieser beiden Reihen, bestehend aus vier Gliedern und drei Differenzen, kann sowohl als zunehmende, wie als abnehmende betrachtet werden, so zwar, dass in beiden in beiden Fällen die Differenzen zwischen je zwei benachbarten Gliedern gleich sind, während die Proportionen, je nachdem die Reihe steigt oder fällt, ungleich (nämlich reziprok zu einander) sind. Die erwähten Faktoren sind sämtlich rational und, soweit nicht Primzahlen, ihrerseits aus gleichen Faktoren zusammengesetzt, so dass ihre zweite, bez. dritte Wurzel ebenfalls eine rationale Zahle ist".

Это значит: "Для человечески рожденного мерилом как период служит число, в котором прежде всего содержатся как сомножители члены обоих (геометрических) прогрессий 1 2 4 8 и 1 3 9 27, члены которых (в соответствии с природой геометрической прогрессии) повышаются (в смысле "увеличиваются". - М.П.) таким образом, что

каждый (внутренний) член представляет собой как произведение предыдущего члена и знаменателя прогрессии, так и частное от деления следующего члена на знаменатель прогрессии. Каждая из этих двух прогрессий, состоящая из четырех членов и трех разностей, может рассматриваться как возрастающая и убывающая, и притом так, что в обоих случаях (в случае возрастания и в случае убывания. - М.П.) разности между двумя соседними членами равны, в то время как пропорции, в зависимости от того, возрастает прогрессия или убывает, неравны (а именно обратны друг к другу) (пропорциями Гульч называет отношения двух соседних членов этих прогрессий в порядке их возрастающей или убывающей нумерации. В случае возрастания эти "пропорции", например, в прогрессии 1 2 4 8 равны: 1 : 2 = 2 : 4 = = 4 : 8 = 1/2. В случае убывания они, наоборот, равны: 8 : 4 = = 4 : 2 = 2 : 1 = 2. Таким образом, эти "пропорции" обратны друг другу. Но и разности между двумя соседними членами этих прогрессий, в порядке их возрастающей или убывающей нумерации, не равны друг другу, обратны: 1 - 2 = -1, 2 - 1 = 1; 2 - 4 = -2, 4 - 2 = 2; 4 - 8 = -4, 8 - 4 = 4. Называя эти разности равными, Гульч допустил ошибку. - М.П.). Все упомянутые сомножители рациональны и, насколько они не простые числа, состоят со своей стороны из равных сомножителей, так что их второй или третий корень равным образом есть рациональное число (т.е. $\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt[3]{27}=3$. - М.П.)".

П.Таннери пишет, что он перевел этот текст Платона приблизительно ("à peu pres") и не претендует на совершенную понятность и скрупулезное следование оригиналу. Вот его перевод:

"Comme pour ce qui est divinement engendre, il y a pour la generation humaine une periode comprise sous le premier nombre parfait, forme en sommant dans trois progressions semblambles, suivant la raison double, quatre termes ter se trouveront toujours deux a deux, avec leurs moyens, proportionnels uo non, leur somme ou leur difference, dans des rapports simples et facilement enoncables; si l'on fait cette triple serie d'operations sur le produit des nombres du groupe 3, 4, 5, le resultat pourra recevoir deux dispositions harmoniques, l'une suivant trois facteurs egaux, qui sera repetee cent fois, l'autre dont les facteurs seront des multiples successifs de 5, diminues chacun d'une unite, et des diagonales successives de 5, diminuees chacune de deux unites. Cent fois le cube de trois forme ainsi l'ensemble de ce nombre geometrique qui ..." /Цит. по: 58, 15-16/.

Это значит: "Как для того, которое есть божественно рожденное, для человеческого потомства есть период, содержащийся в первом совершенном числе, образуемом суммарно в трех сходных (подоб-

ных) прогрессиях, соблюдающих двойное отношение (или двойную пропорцию), четыре члена, которые всегда находятся попарно, с их средними, пропорциональными или нет, их суммой или их разностью, в простых и легко высказываемых отношениях; если представляют эту тройную серию операций как производимую числами группы 3, 4, 5, результатом будет возможность получения двух гармонических размещений, одно, содержащее три равных множителя, которое будет повторяться сто раз, другое, множители которого будут последовательными кратными пятерки, каждый, уменьшенный на единицу, и последовательными диагоналями пятерки, каждая, уменьшенная на две единицы. Сто кубов тройки составляют совокупность этого геометрического "числа, которое..."

Цитируем перевод Ж.Дюпюи [58, 21-22], который он называет дословным ("mot parmot"), получивший высокую оценку Гюнтера, Гульча, Гейберга: "Il y a pour ce qui est divin et engendre une periode qu'un nombre parfait embrasse; mais pour les races humaines il y a un premier nombre dans lequel des puissances generatrices et engendrees, comprenant trois intervalles, et quatre termes de ceux qui rendent semblable ou dissemblable, qui augmentent ou diminuent, ne presentent les unes par rapport aux autres que des rapports simples et exprimables.

Parmi ces termes, les nombres fondamentaux du rapport quatre tiers, joints au quinaire, eleves au cube, presentent deux harmonies, l'une carree multipliee par autant de fois cent, l'autre de meme longueur et formant un nombre oblong dont le cote allonge egale cent fois les carres des diagonales exprimables du quinaire, chacun de ces carres etant augmente d'une unite; les deux diagonales sont en effet inexprimables. Il faut prendre cent fois les cubes des trois nombres [3, 4, 5]. C'est ce nombre geometrique tout entier qui..."

Это значит: "Есть для того, которое есть божественное и рожденное, период, который охватывает совершенное число, в котором степени порождающие и порожденные, содержащие три промежутка и четыре члена [Дюпюи поясняет (с.27), что слово terme он употребляет в смысле "член". - М.П.] от тех, которые рождают подобное и неподобное, которые увеличивают и уменьшают, одни не представляют отношения, другие, что от отношений простых и выразимых.

Среди этих членов фундаментальные числа в отношении четыре третьих, сложенные с пятеричным, возведенные в куб, представляют две гармонии, одна квадратная, сто, умноженное столько же раз, другая, такой же длины образующая продолговатое число, удлиненная сторона которой равна ста квадратам из выразимых диагоналей пяте-

ричного, каждый из этих квадратов будучи увеличенным на одну единицу (т.е. если каждый из этих квадратов будет увеличен на одну единицу. - М.П.); две диагонали в самом деле невыразимы. Надо брать сто кубов трех чисел /3, 4, 5/. Это есть это все в целом геометрическое число, которое..."

Цитируем перевод Дж.Адама /39, 204-208/: "For a divine creature, there is a period comprehended by a number which is final, and for a human creature the number is the first in which root-and-square increases, comprehending three distances and four limits, of elements that make like and unlike and wax and wane, render all things conversable and rational with one another; of which, 4, 3 married with 5, yields two harmonies when thrice increased, the one equal an equal number of times, so many times 100, the other of equal length one way, but oblong:- on the one side, of 100 squares of rational diameters of five diminished by one each, or if of irrational diameters, by two: on the other of one hundred cubes of three. This whole number, a number measuring the earth, is lord of better and worse births".

Это значит: "Для божественного творения есть период, охватываемый числом, которое является решающим, а для человеческого творения есть первое число, в котором корень и квадрат увеличиваются, охватывая три промежутка (или расстояния) и четыре предела, которое делает подобное и неподобное и увеличение и уменьшение элементов, представляет все вещи выразимыми и взаимно рациональными; которого 4, 3, соединенные браком с пятеркой, производят две гармонии, когда трижды увеличены, одна равная равное число раз, столько много раз 100, другая, с одной стороны равной длины, но продолговатая: - с одной стороны 100 квадратов рациональных диаметров пятерки, каждый уменьшенный на единицу, или если иррациональных диаметров, на двойку: с другой стороны сто кубов тройки. Все в целом это число, число, измеряющее земной шар, повелитель лучших и худших рождений".

Подлинный перевод фрагмента 546 ВС

Как мы отмечали, каждое слово в этом фрагменте является результатом тщательного выбора его Платоном, в каждое слово его он вложил совершенно определенный однозначный смысл. Поэтому, так как смысл, вложенный Платоном в фрагмент 546 ВС, однозначен, то и истинный перевод его однозначен, т.е. существует только один истинный перевод его. Сначала мы приводим впервые открытый нами после двух тысяч лет ложных толкований и многих веков ложных переводов фрагмента

546 ВС, единственный истинный перевод его, а затем обосновываем его истинность тщательным анализом каждого слова Платона.

Поскольку, как мы отмечали, В.Гардтгаузен сообщает, что знаки препинания были у древних греков средством устранения возможности бессмысленной связи частей текста, то мы сохраняем знаки препинания греческого текста по изданию Бернета.

Истинный перевод фрагмента 546 ВС гласит: "Есть же у божественного рожденного очередь (περίοδος = очередь = последовательность. - М.П.) которую обнимает (охватывает) совершенное число, у человеческого же (рожденного = сотворенного. - М.П.) в главном (ἐν ᾧ πρώτῳ) увеличения (αὐξήσεις) могущественные и господствующие (δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι), три возвращения (τρεῖς ἀποκαταστάσεις), четыре же границы (τέτταρας δέ ὅρους) связывающие (глагол λαμβάνω , причастием которого является слово λαβοῦσαι, имеет здесь значение "связывать". - М.П.) уподобляющих и расподобляющих и выращивающих и губящих, все согласным и рациональным друг против друга обнаружили (ἀπέφηναν) (т.е. увеличения "обнаружили" все согласным и рациональным друг против друга. - М.П.): которых (увеличений. - М.П.) увеличенное на треть коренное число пятерки связанное двумя гармониями как бы представляет собой трижды увеличенное, одно (τὴν μὲν) (увеличение. - М.П.) само на себя умноженное (ἴσην ἰσάκις), сто раз столько (ἑκατὸν τοσαυτάκις), другое же (τὴν δέ) равное по длине (ἴσμηκη) этим путем (τῇ) продолговатому (προμήκει) (дательный падеж. Ошибка в слове προμήκει , у Бернета ошибочно προμήκη , повлекла за собой и ошибку в знаке препинания - у Бернета после слова τῇ запятая, противоречащая смыслу текста. Мы эту ошибочную запятую устранили. - М.П.), (которое. - М.П.) с одной стороны (μὲν) сто число (ἑκατὸν μὲν ἀριθμὸν) (т.е. сто раз число. - М.П.) из рациональных диагоналей пятерки, желающих единицы каждая из них (δεομένων ἑνὸς ἑκάστων) (глагол δέω , страдательным причастием которого является слово δεομένων , имеет здесь значение "желать". - М.П.), иррациональных же (диагоналей, желающих. - М.П.) двойки (ἀρρήτων δὲ δυοῖν), с другой стороны (δὲ) сто кубов тройки. Все же в целом это число геометрическое, глава такого (τοιούτου κύριος), лучших и худших рождений (ἀμείνόνων τε καὶ κείρόνων γενέσεων).

Расшифровка фрагмента 546 ВС

Мы начинаем расшифровку фрагмента 546 ВС расшифровкой так называемой шарады: фразы "... ἐπίτριτος πύθμὴν πεμπάδι συζυγείς δύο ἁρμονίας παρέκηται τρίς αὐξηθείς"

Обратимся к таблице 4 получения пифагорейских "сторон" и "диагоналей" для параметра 5. Отношение 56/24 пифагорейской "диагонали" 56 к пифагорейской "стороне" 24, равное 7/3 = 2 1/3 – это увеличенное на треть коренное число пятерки, т.е. это отношение является первым полученным нами семантическим звеном – "ἐπίτριτος πυκμὴν πεμπάδι" – этой фразы.

Чтобы расшифровать полученное нами второе семантическое звено ее – συζυγεὶς δύο ἁρμονίας" = "связанное двумя гармониями", надо знать, что греческое слово "ἁρμονία" многозначно и имеет также значение связь.

Рассмотрим, что представляют собой пифагорейская "сторона" 24 и пифагорейская "диагональ" 56.

Каждая из них является суммой, состоящей из двух слагаемых: пифагорейская "сторона" 24 = 8 + 16, пифагорейская "диагональ" 56 = 16 + 40.

Но что такое сумма?

Сумма – это слагаемые, связанные знаком +. Следовательно, сумма – это связь. По гречески же связь – это гармония. Следовательно, сумма – это гармония.

Таким образом, пифагорейская "сторона" 24 и пифагорейская "диагональ" 56 – это две гармонии. Отношение этих двух гармоний связывает их в единое целое 56/24 = 2 1/3 = увеличенное на треть коренное число пятерки. Следовательно, увеличенное на треть коренное число пятерки связано в единое целое отношением двух гармоний. Ради краткости слова "в единое целое" и "отношением" можно опустить и кратко метафорически сказать: "увеличенное на треть коренное число пятерки связано двумя гармониями".

Слова "связано двумя гармониями" – это полученное нами второе семантическое звено фразы: "...ἐπίτριτος πυκμὴν... αὐξηθεὶς". И, таким образом, это семантическое звено ее, так же как и первое семантическое звено, нами расшифровано и имеет точный однозначный математический смысл. Отношение 56/24 этих двух гармоний является однозначным определением увеличенного на треть коренного числа пятерки, в котором 1/3 – это треть единицы, а не треть увеличиваемого числа – двойки.

Таким образом, второе семантическое звено – "связанное двумя гармониями" – фразы: "... ἐπίτριτος πυκμὴν... αὐξηθεὶς" является точным однозначным метафорическим определением первого семантического звена ее: "увеличенное на треть коренное число пятерки" и однозначно определяет эту треть как треть единицы, а не как треть двойки.

Чтобы расшифровать полученное нами третье семантическое зве-

но - "παρέχηται τρὶς αὐξήσεις" = "как бы представляет собой трижды увеличенное" - этой фразы, надо обратить внимание на то, что каждая из двух гармоний - 24 и 56, отношение которых является увеличенным на треть коренным числом пятерки, является результатом трех увеличений начальной пифагорейской "стороны" и начальной пифагорейской "диагонали", равных единице.

Таким образом, гармония 24 представляет собой трижды увеличенную начальную пифагорейскую "сторону", равную единице, а гармония 56 представляет собой трижды увеличенную начальную пифагорейскую "диагональ", равную единице.

Для краткости можно слова "начальную пифагорейскую "сторону", равную единице" и слова "начальную пифагорейскую "диагональ", равную единице" опустить, и кратко метафорически, подчеркивая метафоричность этого выражения словом "как бы", сказать: "гармония 24 как бы представляет собой трижды увеличенную, и гармония 56 как бы представляет собой трижды увеличенную".

Следовательно, можно точно так кратко метафорически сказать, что и отношение 56/24 = 2 1/3 этих двух гармоний как бы представляет собой трижды увеличенное.

Отношение этих двух гармоний - это увеличенное на треть коренное число пятерки - 2 1/3. Следовательно, можно кратко метафорически сказать, что увеличенное на треть коренное число пятерки как бы представляет собой трижды увеличенное. Именно это метафорическое выражение употребляет Платон, и поэтому, чтобы подчеркнуть метафоричность его, он употребляет условное - παρέχηται, а не изъявительное - παρέχεται, наклонение страдательного залога глагола παρέχω.

Слова "как бы представляет собой трижды увеличенное" - это полученное нами третье семантическое звено фразы: "... ἐπίτριτος συμμὴν... αὐξήσεις -". И, таким образом, это семантическое звено ее нами также расшифровано и имеет точный однозначный математический смысл.

Слова "как бы представляет собой трижды увеличенное" однозначно определяют первое семантическое звено этой фразы - "увеличенное на треть коренное число пятерки", как 2 1/3.

Следовательно, третье семантическое звено фразы: "... ἐπίτριτος συμμὴν... αὐξήσεις " является вторым однозначным метафорическим определением первого семантического звена ее - "увеличенное на треть коренное число пятерки", которое определяет эту треть как треть единицы.

Мы видим, что перед нами математический текст, кратко метафорически, но предельно точно формулированный.

Возникает вопрос. Если в таблице 4 вычислить еще две "стороны" и две "диагонали" после "стороны" 24 и "диагонали" 56, то они будут равны: 1) "Сторона" = 24 + 56 = 80, "диагональ" = 56 + 5 x x 24 = 176, 2) "Сторона" = 80 + 176 = 256, "диагональ" = 176 + 5 x x 80 = 576.

Отношение 576/256 = 9/4 = 2 1/4 является значительно более точным приближенным значением корня из пяти, чем 2 1/3 : $(9/4)^2$ = = 81/16 = 5 1/16, $(7/3)^2$ = 49/9 = 5 4/9.

Почему же Платон остановился на приближенном значении корня из пяти, равном 2 1/3, и не сделал еще два шага, не представлявших никакой трудности, немедленно дающих более точное приближенное значение корня из пяти, равное 2 1/4, получающееся не подбором, а с помощью той же строгой теории, что и приближение 2 1/3?

Г.Фрейденталь писал мне, что он не верит в то, что древние греки могли пользоваться приближением 2 1/3, когда очевидно более точное приближение 2 1/4. Это неверие показывает только, что великолепный теоретик Г.Фрейденталь, как мы полагаем, в данном случае ошибался.

Для чего нужна та или иная точность приближенных вычислений?

Для того, чтобы эта точность удовлетворяла требованиям практики.

Если точность 2 1/3 корня из пяти удовлетворяла требованиям практики, то для чего нужно было излишне точное приближенное значение 2 1/4 корня из пяти? Точность для точности так же не нужна, как искусство для искусства.

Знал ли Платон о приближении 2 1/4? Разумеется, знал. Его число 5040 доказывает, что такими числами, как 256 и 576, он свободно оперировал. Но введение излишне точного приближения 2 1/4 корня из пяти в его классический труд было бы тем, что семь древнегреческих мудрецов называли "сверх меры", Платон же строго придерживался их изречения: "Ничего сверх меры".

Какая дробь менее сложна: с большими числителем и знаменателем, или с меньшими числителем и знаменателем? Разумеется, с меньшими числителем и знаменателем.

Так почему же Платон должен был ввести в свой классический труд, в угоду ненужной точности, более сложную дробь 9/4, с большими числителем и знаменателем, когда требованиям практики того времени удовлетворяла менее сложная дробь 7/3, с меньшими числителем и знаменателем, точность которой 2,33 менее чем на 5 % меньше точности 2,23, которую дает стандартная 25-сантиметровая логарифмическая линейка?

Приближенное значение 7/3 корня из пяти обеспечивало необходимую для практических потребностей того времени точность корня из пяти наименьшими числами, т.е. для практических целей это приближение корня из пяти являлось наилучшим. Именно это практически наилучшее приближение корня из пяти и ввел Платон в свой классический труд.

Через сто лет после Платона угломерные астрономические инструменты и землемерная техника того времени позволили Эратосфену вычислить окружность земного шара с точностью около 17 % – ~46500 км вместо ~40000 км. И мы справедливо считаем эту точность для того времени поразительной. Так почему же точность 5 % корня из пяти, в значительно более раннюю эпоху, мы должны считать менее поразительной?

То, что Платон в своем классическом труде остановился на менее точном, чем 2 1/4, приближении 2 1/3 корня из пяти, показывает, что он не был, подобно Фрейденталю, только чистым теоретиком, но был и великолепным практиком.

И, таким образом, это менее точное, чем 2 1/4, приближенное значение корня из пяти открывает еще одну грань творчества Платона. Следовательно, шарады: "... ἐπίτριτος πυθμήν...αὐξηθείς" – больше не существует. В этой фразе мы оставили пока без рассмотрения первое слово ее: ὧν ("которых").

Обратимся теперь к этому слову.

Оно имеет очень важное значение, так как является связующим звеном между этой фразой и предыдущим текстом фрагмента 546 ВС. Для понимания связи между этой фразой и предыдущим текстом фрагмента 546 ВС очень важное значение имеет также греческий знак препинания: точка над строкой после слова "ἀπέφηναν" ("обнаружили", т.е. увеличения "обнаружили").

Эта точка, так называемый "колон", соответствующая по значению нашей точке с запятой и двоеточию, в данном случае соответствует двоеточию, т.е. означает "а именно". Таким образом, этот знак препинания указывает, о каких именно увеличениях говорит Платон: о тех, которых (ὧν) увеличенное на треть коренное число пятерки, связанное двумя гармониями, представляет собой трижды увеличенное.

Какие же увеличения дают увеличенное на треть коренное число пятерки, связанное двумя гармониями, представляющее собой трижды увеличенное? Или иначе: "которых увеличенное на треть коренное число пятерки, связанное двумя гармониями, представляет собой трижды увеличенное"?

Мы видели, что это увеличение пифагорейских "сторон" и "диагоналей". Таким образом, связующие звенья: знак препинания "колон" и слово ὃν между фразой: "...ἐπίτριτος πυθμὴν... αὐξηθείς" и предыдущей частью фрагмента 546 BC устанавливают, что увеличения ("αὐξήσεις"), о которых Платон говорит в начале фрагмента 546 BC - это увеличения пифагорейских "сторон" и "диагоналей".

Почему же он называет эти увеличения "могущественными"?

Ответ дает он сам: потому что они "все согласным и рациональным друг против друга обнаружили" ("αὐξήσεις...πάντα προσήγορα καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν").

Что же увеличения пифагорейских "сторон" и "диагоналей" "обнаружили" "согласным и рациональным друг против друга"?

Мы видели, что актуально бесконечные последовательности пифагорейских "сторон" и "диагоналей", которые дают увеличения их, выразили трансфинитными целыми числами несоизмеримые стороны и диагонали прямоугольников, т.е. уничтожили их несоизмеримость ("обнаружили" их "согласными и рациональными друг против друга").

Поэтому Платон называет увеличения пифагорейских "сторон" и "диагоналей" "могущественными".

Выразив несоизмеримые стороны и диагонали прямоугольников трансфинитными целыми числами, бесконечные последовательности пифагорейских "сторон" и "диагоналей" спасли в математическом отношении от крушения главный философский принцип пифагорейцев "единица - начало всего". А так как бесконечные последовательности пифагорейских "сторон" и "диагоналей" возникают вследствие увеличений их, то именно увеличения их спасли в математическом отношении от крушения главный философский принцип пифагорейцев "единица - начало всего".

Поэтому Платон называет увеличения пифагорейских "сторон" и "диагоналей", которые он для краткости называет метафорически просто увеличениями, главным рождением (творением) человека: "ἀνθρωπείῳ δὲ ἐν ᾧ πρώτῳ αὐξήσεις" = У человеческого же (рожденного = сотворенного, - М.П.) в главном (ἐν ᾧ πρώτῳ) увеличения (αὐξήσεις).

Таким образом, почти весь фрагмент 546 BC, начиная от слова ἀνθρωπείῳ, Платон посвятил проблеме преодоления пифагорейцами кризиса их философии, явившегося следствием открытия ими несоизмеримости.

Почему же он называет увеличения не только "могущественными" (δυνάμεναί), но и "господствующими" (δυναστευόμεναι)?

Чтобы ответить на этот вопрос, вычислим с помощью равенств

(34^0) и (36^0) пифагорейские "стороны" и "диагонали" для параметра $N = 5$ ($AE = 1$, $BE = 2$, $K = 2 : 1 = 2$).

Полагаем начальные "сторону" S_0 и "диагональ" D_0 равными единице. Тогда:

$$S_1 = \frac{1}{K}(S_0 + D_0) = \frac{1}{2}(1+1) = 1,$$

$$D_1 = \frac{1}{K}\left(D_0 + \frac{N}{AE^2} S_0\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{1^2} 1\right) = 3,$$

$$S_2 = \frac{1}{K}(S_1 + D_1) = \frac{1}{2}(1+3) = 2,$$

$$D_2 = \frac{1}{K}\left(D_1 + \frac{N}{AE^2} S_1\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{1^2} 1\right) = 4,$$

$$S_3 = \frac{1}{K}(S_2 + D_2) = \frac{1}{2}(2+4) = 3,$$

$$D_3 = \frac{1}{K}\left(D_2 + \frac{N}{AE^2} S_2\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{5}{1^2} 2\right) = 7.$$

Увеличения "сторон" равны: $S_1 - S_0 = 1 - 1 = 0$, $S_2 - S_1 = 2 - 1 = 1$, $S_3 - S_2 = 3 - 2 = 1$; увеличения "диагоналей" равны: $D_1 - D_0 = 3 - 1 = 2$, $D_2 - D_1 = 4 - 3 = 1$, $D_3 - D_2 = 7 - 4 = 3$.

Соответственные же увеличения "сторон" и "диагоналей", которые дают равенства (19), равны (табл. 4): $S_1 - S_0 = 2 - 1 = 1$, $S_2 - S_1 = 8 - 2 = 6$, $S_3 - S_2 = 24 - 8 = 16$; $D_1 - D_0 = 6 - 1 = 5$, $D_2 - D_1 = 16 - 6 = 10$, $D_3 - D_2 = 56 - 16 = 40$.

Таким образом, мы имеем два рода увеличений "сторон" S_n и "диагоналей" D_n. Один род дают равенства (34^0) и (36^0), другой – равенства (19).

Оба рода увеличений дают для параметра $N = 5$ "сторону" S_3 и "диагональ" D_3, отношение которых является увеличенным на треть коренным числом пятерки:

$$1)\ \frac{D_3}{S_3} = 7/3 = 2\ 1/3;$$

$$2)\ \frac{D_3}{S_3} = 56/24 = 2\ 1/3.$$

При рациональных K оба рода увеличений дают бесконечные последовательности только рациональных "сторон" S_n и только рациональных "диагоналей" D_n, уничтожающих несоизмеримость диагоналей и сторон прямоугольников, т.е. при рациональных K оба рода увеличений "обнаруживают" несоизмеримые стороны и диагонали прямоугольников "согласными и рациональными друг против друга".

Поэтому возникает вопрос: о каком роде увеличений говорит Платон, – о том, который дают равенства (34^0) и (36^0), или о том, который дают равенства (19)? Ответом на этот, на первый взгляд неразрешимый, вопрос, является слово "господствующие".

Увеличения, которые дают равенства (19), содержат в себе и увеличения, которые дают равенства (34^0) и (36^0).

Метафорически можно кратко сказать, что увеличения, которые дают равенства (19), "господствуют" над увеличениями, которые дают равенства (34^0) и (36^0). Они "господствуют" над увеличениями, которые дают равенства (34^0) и (36^0) также потому (и это главное), что дают (как мы видели на примере $N = 3$) последовательности только рациональных "сторон" S_n и "диагоналей" D_n не только при рациональных, но и при иррациональных K.

Поэтому словом "господствующие" Платон указывает, что он говорит об увеличениях, которые дают равенства (19), дающие бесконечные последовательности только рациональных "сторон" S_n и только рациональных "диагоналей" D_n не только при рациональных, но и при иррациональных K.

Следовательно, слово "господствующие" чрезвычайно важно, так как оно свидетельствует о том, что Платону были известны не только трансформированные пифагорейские равенства (19), но и исходные пифагорейские равенства (34^0) и (36^0). Следовательно, ему был известен весь исходный пифагорейский алгоритм (34), (35), (36).

Таким образом, оба слова: "*δυνάμεναί*" = "могущественные" и "*δυναστευόμεναι*" = "господствующие" – имеют точный однозначный математический смысл, кратко метафорически, но предельно точно сформулированный.

В точном однозначном соответствии с математическим смыслом этих слов находятся чрезвычайно важные слова: "*τρεῖς ἀποκαταστάσεις*" = "три возвращения" (в прежнее состояние), свидетельствующие, что речь идет о возвратном (= рекуррентном) процессе.

Этим рекуррентным процессом является рекуррентный процесс построения пифагорейских "сторон" и "диагоналей", который Платон показывает на частном примере – примере построения трех "сторон" и трех "диагоналей" (три возвращения) для параметра 5 (увеличенное на треть коренное число пятерки).

Мы видели, что в этом частном примере три увеличения "сторон" и "диагоналей" связывают три возвращения "сторон" и "диагоналей" в прежнее состояние и четыре границы их. Для еще большей наглядности покажем это в табл. 8.

Мы видели, что все эти четыре границы можно метафорически назвать уподобляющими и расподобляющими, и увеличивающими или выращивающими, и уничтожающими или губящими.

Все это точно соответствует словам Платона: "*αὐξήσεις..., τρεῖς ἀποκαταστάσεις, τέτταρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι ὁμοιούντων τε καὶ ἀνομοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φθινόντων,*" = "Увеличения...

Таблица 8

n	"Сторона" S_n	"Диагональ" D_n	Номер границы	Увеличение "стороны"	Увеличение "диагонали"	Номер увеличения
0	1	1	1			
	Первое возвращение					
1	1+1=2	1+5·1=6	2	2-1=1	6-1=5	1
	Второе возвращение					
2	2+6=8	6+5·2=16	3	8-2=6	16-6=10	2
	Третье возвращение					
3	8+16=24	16+5·8=56	4	24-8=16	56-16=40	3

"три возвращения, четыре же границы, связывающие уподобляющих и расподобляющих и увеличивающих (или выращивающих) и уничтожающих (или губящих)".

Возникает вопрос. В каком именно смысле употребил Платон слова αὐξόντων и φαινόντων : "увеличивающих" и "уничтожающих" или "выращивающих" и "губящих"?

Можно ли ответить на этот, на первый взгляд неразрешимый, вопрос? Оказывается, можно. Ибо Платон так однозначно и предельно точно построил этот удивительный метафорический текст, что он содержит все необходимое для его полной ясности. Надо только быть очень внимательным к каждому слову Платона.

Для ответа на этот вопрос надо увидеть, что слова "ὁμοιούντων", "ἀνομοιούντων", т.е. "уподобляющих", "расподобляющих", - по значению противоположности, т.е. являются антонимами. Следовательно, аналогично и слова "αὐξόντων", "φαινόντων" должны быть антонимами. Слова же "увеличивающих", "уничтожающих" не являются антонимами.

Антонимом слова "увеличивающих" является слово "уменьшающих". Но мы видели, что границы не уменьшают "стороны" и "диагонали", а уничтожают или губят их.

В точном соответствии с этим глагол φαίνω не имеет значения "уменьшать". Это значение имеют глаголы "μειόω" и "ἐλασσόω". Платон же не случайно употребляет не эти глаголы, а именно глагол "φαίνω" не имеющий значения "уменьшать". Причина этому в том, что, как мы видели, границы не уменьшают "стороны" и "диагонали", а уничтожают или губят их.

Для правильного перевода слов: "αὐξόντων", "φαινόντων" надо увидеть также то, что все четыре слова: "ὁμοιούντων", "ἀνομοιούντων", "αὐξόντων", "φαινόντων" являются причастиями активной формы. Следовательно, точно так, как два первых активных

причастия: "ὁμοιούντων", "ἀνομοιούντων" = "уподобляющих", "расподобляющих" имеют транзитивное значение, так аналогично и два вторых активных причастия: "αὐξούντων", "φθινούντων" должны иметь транзитивное значение. Поэтому перевод А.Ф.Лосева слов "αὐξόντων", "φθινόντων" словами "растущих", "исчезающих" является, по-видимому, не совсем точным.

Транзитивное значение этих четырех причастий находится в точном соответствии с рассмотренным нами транзитивным значением четырех границ: уподобляющих, расподобляющих, увеличивающих (или выращивающих), уничтожающих (или губящих).

Транзитивные значения глагола "αὔξω" следующие: "увеличивать", "выращивать". Глагол "φθίνω" обычно употребляют в интранзитивных значениях: "исчезать", "убывать". Но он имеет и транзитивные значения: "уничтожать", "губить". В этих значениях он равнозначен глаголу "φθίω".

Какое же из транзитивных значений глагола "φθίνω" является антонимом одного из транзитивных значений глагола "αὔξω"? Слово "уничтожать" не является антонимом ни слова "увеличивать", ни слова "выращивать". Слово же "губить" можно рассматривать как антоним слова "выращивать".

Это так называемые контекстные антонимы, которые Платон употребляет в этом удивительном тексте за две тысячи лет до того, как они стали лингвистической категорией.

Таким образом, правильным переводом слов "αὐξούντων", "φθινούντων" являются слова "выращивающих", "губящих", математически равнозначные словам "увеличивающих", "уничтожающих". Но для правильного перевода их надо учитывать не только математический, но и лингвистический аспект.

Мы видим, как точно каждое рассмотренное нами слово этого поистине замечательного метафорического текста Платона соответствует великой пифагорейской теории о сторонних и диагональных числах.

Обратим теперь внимание на то, что все четыре границы являются "выращивающими" и "губящими". Следовательно, "выращивающей" и "губящей" является и четвертая граница. А это значит, что Платон не считает ее последней границей "сторон" и "диагоналей".

Следовательно, эти четыре границы являются только показом общей теории о сторонних и диагональных числах на частном примере построения их для параметра 5. Показ общей теории на частном примере обычен для Платона.

Обратимся теперь к чрезвычайно важному слову "πάντα" – "Все". Почему Платон говорит, что увеличения "Все" обнаружили согласным

и рациональным друг против друга? Чем было это "Все", которое не было согласным и рациональным друг против друга?

Им были "Все" открытые пифагорейцами несоизмеримые стороны и диагонали прямоугольников, т.е. "Все" бесчисленное множество их.

Таким образом, словом "Все" Платон говорит, что увеличения "обнаружили" согласными и рациональными друг против друга не только несоизмеримые сторону и диагональ прямоугольника со сторонами 1 и 2, который он приводит как пример, но все бесчисленное множество несоизмеримых сторон и диагоналей прямоугольников.

Таким образом, словом "πάντα" - "Все" он говорит о пифагорейском алгоритме (19), дающем увеличения, которые для любых прямоугольников, как с рациональным, так и с иррациональным K, создают бесконечные последовательности только рациональных пифагорейских "сторон" S_n и только рациональных пифагорейских "диагоналей" D_n, "обнаруживающие" несоизмеримые стороны и диагонали их "согласными и рациональными друг против друга".

Слова: "Увеличения... три возвращения, четыре же границы связывающие" - не противоречат слову "πάντα" - "Все". Ибо Платон не говорит, что увеличения только три возвращения и четыре границы связывают. Эти три возвращения и четыре границы он приводит как показ общей теории на этом частном примере, о чем, как мы видели, согласно с этим свидетельствует то, что четвертую границу он считает также выращивающей и губящей, т.е. не последней, а дающей четвертое возвращение к новой пифагорейской "стороне" и новой пифагорейской "диагонали".

Таким образом, словами: "Увеличения... три возвращения, четыре же границы связывающие..." и словами: "которых (увеличений. - М.П.) увеличенное на треть коренное число пятерки связанное двумя гармониями как бы представляет собой трижды увеличенное", Платон говорит об одних и тех же трех увеличениях пифагорейских "сторон" и "диагоналей" для прямоугольника со сторонами 1 и 2, которые он привел как пример построения пифагорейских "сторон" и "диагоналей" для показа общей теории.

Ошибка Прокла

Если не знать, что словами: "которых увеличенное на треть коренное число пятерки связанное двумя гармониями как бы представляет собой трижды увеличенное" Платон поясняет, о каких увеличениях он говорит, что эти две гармонии являются только пояснением этих увеличений - они являются результатом трех увеличений и их отношение является увеличенным на треть коренным числом пятерки, то совер-

шенно невозможно догадаться, что в следующей фразе словами: "τὴν μὲν... τὴν δὲ " Платон говорит не о двух гармониях, а о двух увеличениях.

До этого тем более нельзя догадаться, что в греческом языке слово "ἡ αὔξησις " = "увеличение" и слово "ἡ ἁρμονία" = "гармония" - женского рода. Слово же "τὴν " - это винительный падеж единственного числа женского рода, и поэтому грамматически может относиться и к слову "αὔξησις " и к слову "ἁρμονία". А так как фраза "τὴν μὲν... τὴν δέ... " следует непосредственно за фразой "ὧν ἐπίτριτος..." и отделена от слов " δύο ἁρμονίας" = "двумя гармониями" только двумя словами: "τρὶς αὐξηθείς ", то кажется само собой разумеющимся, что словами " τὴν μὲν... τὴν δέ... " Платон продолжает говорить об этих двух гармониях.

Конечно нелегко догадаться, что словами "τὴν μὲν... τὴν δέ... " Платон говорит не о гармониях, а продолжает говорить об увеличениях. Например, Прокл допустил ошибку, полагая, что словами "τὴν μὲν... τὴν δὲ... " Платон говорит о двух гармониях. Поэтому он ошибочно истолковал слово "ἰσομήκη " словами "ταυτομήκη ἁρμονία", т.е. "равнодлинная гармония", а слово "προμήκει " словами "προμήκη ἁρμονία ", т.е. "продолговатая гармония".

Мы видели, что эта ошибка Прокла благодаря его огромному авторитету оказалась роковой и красной нитью прошла через почти полтора тысячелетия, вплоть до наших дней.

В действительности Платон, пояснив словами: " ὧν ἐπίτριτος συνωμὴν... αὐξηθείς ", о каких увеличениях он говорит, словами "τὴν μὲν... τὴν δὲ... " продолжает говорить об этих увеличениях.

И здесь возникает следующий вопрос. Слово "τὴν " - это винительный падеж единственного числа члена женского рода. Поэтому Платон словами "τὴν μὲν " говорит об одном (не о многих), а словами "τὴν δέ " о другом (не о других) увеличении. В приведенном же им примере - шесть увеличений - три увеличения "стороны" и три увеличения "диагонали".

О каких же двух из этих шести увеличений он говорит? Ответ на этот вопрос является еще одной блестящей иллюстрацией однозначности смысла, вложенного Платоном в этот замечательный метафорический текст.

Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо знать, что словами "одно", "другое", Платон называет противоположности. Противоположными увеличениями являются увеличение "стороны" и соответствующей "диагонали". А так как первым является "сторона", "диагональ" же - вторым, то "одно" - это увеличение "стороны", "другое" - это увеличение "диагонали".

Для того чтобы ответить на вопрос, о каком именно увеличении "стороны" и соответствующем ему увеличении "диагонали" говорит Платон, надо обратить внимание на слова: "другое же равное по длине этим путем продолговатому (числу. – М.П.)". "Этот путь" – это арифметические действия, указанные Платоном, которые надо произвести над "другим", т.е. над увеличением "диагонали". "Этим путем" "другое", т.е. увеличение "диагонали", должно стать равным "по длине" продолговатому числу, которое "с одной стороны сто (раз. – М.П.) число из рациональных диагоналей пятерки... с другой стороны сто кубов тройки". Таким образом, это продолговатое число равно: $100 \times 3^3 = 2700$.

"Этот путь", т.е. арифметические действия, которые надо произвести над "другим", т.е. над увеличением "диагонали", – это те же арифметические действия, которые надо произвести над "одним", т.е. над увеличением "стороны", указанные Платоном словами: "ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις", т.е. "само на себя умноженное, сто раз столько". Указание этих арифметических действий, которые надо произвести над "одним", т.е. над увеличением "стороны", является метафорическим указанием "этого пути", т.е. арифметических действий, которые надо произвести над "другим", т.е. над увеличением "диагонали".

Для того чтобы ответить на вопрос, о какой паре увеличений "стороны" и "диагонали" из трех пар их: 1, 5; 6, 10; 16, 40 говорит Платон, произведем указанные им арифметические действия над всеми тремя увеличениями "диагонали". Та пара увеличений, в которой эти арифметические действия сделают увеличение "другого", т.е. "диагонали", равным "по длине" продолговатому числу 2700, и будет той парой увеличений, о которой говорит Платон. Если этим свойством обладают все три увеличения "диагонали", или два увеличения ее, то смысл, вложенный Платоном в этот текст, не однозначен, и ответить на вопрос, какую пару увеличений он имеет в виду, невозможно.

Обратим внимание на то, что продолговатое число 2700 Платон представляет как 100×3^3, т.е. представляет его прямоугольником 100×27, стороны которого целочисленны. Аналогично и увеличение "диагонали" после умножения его самого на себя и на сто, должно быть представлено прямоугольником, стороны которого целочисленны, равным "по длине" прямоугольнику 100×27.

Начнем наше испытание с третьей пары увеличений: 16, 40. Умножим увеличение 40 "диагонали" само на себя. Будет: $40 \times 40 = 1600$. Сто раз столько. Будет: $1600 \times 100 = 160000 = 2^8 \times 5^4$.

Продолговатое же число 2700 равно $2^2 \times 3^3 \times 5^2$. Поэтому целочисленные стороны прямоугольников, представляющих эти числа, которые могут быть у них одинаковыми, следующие: $2^2 = 4$; $5^2 = 25$ и $2^2 \times 5^2 = 100$.

Рассмотрим эти прямоугольники.

Прямоугольники 40000 х 4 = 160000 и 675 х 4 = 2700 имеют одинаковую сторону, равную четырем. В обоих прямоугольниках эта сторона является шириной. Следовательно, они равны по ширине. Но они должны быть равны не по ширине, а по длине. Прямоугольники 6400 х х 25 = 160000 и 108 х 25 = 2700 имеют одинаковую сторону, равную 25. В обоих прямоугольниках эта сторона также является шириной. Следовательно, они также равны по ширине. Но они должны быть равны не по ширине, а по длине.

Ширина 100 прямоугольника 1600 х 100 равна длине 100 прямоугольника 100 х 27. Но длина прямоугольника 100 х 27 должна быть равна не ширине прямоугольника 1600 х 100, а его длине. Таким образом, ни один из рассмотренных нами прямоугольников, представляющих число 160000, не равен по длине прямоугольнику 100 х 27, т.е. ни один из них не обладает свойством, указанным Платоном. Поэтому увеличение 40 "диагонали" должно быть исключено.

Испытаем теперь увеличение 10 "диагонали".

Умножим его само на себя. Будет 10 х 10 = 100. Сто раз столько. Будет 100 х 100 = 10000 = $2^4 \times 5^4$. Поэтому целочисленные стороны прямоугольников, представляющих числа 10000 и 2700, которые могут быть у них одинаковыми, следующие: $2^2 = 4$; $5^2 = 25$ и $2^2 \times 5^2 = 100$.

Рассмотрим эти прямоугольники.

Прямоугольники 2500 х 4 = 10000 и 675 х 4 = 2700 имеют одинаковую сторону, равную четырем. В обоих прямоугольниках эта сторона является шириной. Следовательно, они равны по ширине. Но они должны быть равны не по ширине, а по длине. Прямоугольники 400 х х 25 = 10000 и 108 х 25 = 2700 имеют одинаковую сторону, равную 25. В обоих прямоугольниках эта сторона является шириной. Следовательно, они также равны по ширине. Но они должны быть равны не по ширине, а по длине.

Все стороны прямоугольника 100 х 100 = 10000 равны, т.е. он равносторонний (квадрат). И все его стороны равны длине прямоугольника 100 х 27. Но так как каждая сторона прямоугольника 100 х 100 может быть названа и длиной и шириной, то он не имеет ни длины, ни ширины. А так как прямоугольник, получающийся от умножения "другого", т.е. увеличения "диагонали", самого на себя и

на сто, должен быть равен прямоугольнику 100 х 27 "по длине", то этот прямоугольник должен иметь длину, следовательно, и ширину. Так как прямоугольник 100 х 100 не имеет ни длины, ни ширины, то он также не обладает свойством, указанным Платоном. Таким образом, увеличение 10 "диагонали" также должно быть исключено.

Остается увеличение 5 "диагонали". Но, может быть, и оно не обладает нужным свойством? Испытаем его.

Умножим его само на себя. Будет: 5 х 5 = 25. Сто раз столько. Будет: 25 х 100 = 2500. Это число можно представить прямоугольником 100 х 25, равным по длине прямоугольнику 100 х 27. Следовательно, увеличение 5 "диагонали" является единственным из трех увеличений: 5, 10, 40 "диагонали", обладающим указанным Платоном свойством. И таким образом, этот удивительный метафорический текст Платона и в этом случае имеет вполне определенный, однозначный смысл.

Возникает вопрос, какой смысл имеют эти простейшие, на первый взгляд бессмысленные, арифметические операции с увеличением 5 "диагонали"?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо обратить внимание на частицу μέν после слова "ἰσομήκη" (ἰσομήκη μέν τῇ) и на частицу δέ после слова "προμήκει" (προμήκει δέ). Эти частицы показывают, что речь идет о противоположностях, т.е. что "другое" = увеличение 5 "диагонали", равно "этим путем" "по длине" его противоположности: продолговатому числу 2700.

Но увеличение 5 "диагонали" "этим путем" становится числом 2500 = 50^2, т.е. квадратным числом. Следовательно, Платон говорит, что, во-первых, рациональное квадратное число 2500 и рациональное продолговатое число 2700 в одном и том же отношении – в отношении одноименной стороны представляющих их прямоугольников – квадратов (все стороны квадрата одноименны) являются противоположностями: сторона 50 квадрата – рациональна, сторона 2700 квадрата – иррациональна[19].

Во-вторых, что в этом одном и том же отношении – в отношении одноименной стороны представляющих их прямоугольников: длины 100 прямоугольников 100 х 25 и 100 х 27 – они являются одним и тем же (длина 100 прямоугольника 100 х 25 ничем не отличается от длины 100 прямоугольника 100 х 27), т.е. диалектически переходят друг в друга.

Таким образом, эти простейшие арифметические операции имеют глубокий философский смысл: показ диалектического перехода.

В.И.Ленин обращает внимание на гегелевскую /69, 232-233/ интерпретацию Платона в "Софисте", которая в русском переводе гла-

сит: "Трудное и истинное заключается в том, чтобы показать, что то, что́ есть иное, есть то же самое, – а то, что́ есть то же самое, есть иное, и именно в одном и том же отношении" /1, 253/. Так как, по словам Диогена Лаэрция, "Платон – инициатор диалектики, 3-ей философской науки" /2, 204/, то он, естественно, показывал диалектические переходы на примерах, и мы видим, что для показа диалектических переходов он использовывал также математические противоположности.

Обратимся теперь к словам "προμήκει δέ, ἑκατὸν μὲν ἀριθμὸν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος...ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος" – "Продолговатому (числу. – М.П.), (которое. – М.П.) с одной стороны сто (раз. – М.П.) число из рациональных диагоналей пятерки... с другой стороны сто кубов тройки". Итак, это продолговатое число, которое с другой стороны есть сто кубов тройки, т.е. оно равно $100 \times 3^3 = 2700$, с одной стороны есть сто раз число из рациональных диагоналей пятерки.

Почему Платон говорит "сто число из рациональных диагоналей пятерки", т.е. "сто (раз. – М.П.) число из рациональных диагоналей пятерки", употребляя слово "число" в единственном числе? Вероятно, потому, что слова "число из рациональных диагоналей пятерки" были у пифагорейцев определением некоторого вполне определенного числа, и поэтому Платон, сохраняя это определение, говорит "сто (раз. – М.П.) число из рациональных диагоналей пятерки".

Что же это за число?

Так как сто раз число из рациональных диагоналей пятерки равно 2700, то один раз число из рациональных диагоналей пятерки или "число из рациональных диагоналей пятерки" равно $2700 : 100 = 27$. Это открывает еще одну грубейшую ошибку Прокла, ошибочно полагавшего, что Платон говорит о числе 48, – ошибку, ставшую, как мы видели, благодаря его огромному авторитету, роковой, – красной нитью прошедшую почти через полтора тысячелетия, сохраняющуюся и в наши дни.

Таким образом, возникает труднейший вопрос, как найти те рациональные диагонали пятерки, которые составляют число 27?

Вычисленные нами в табл. 4 рациональные диагонали пятерки следующие: 6, 16, 56. 56 больше 27, а сумма $6 + 16 = 22$ меньше 27. Следовательно, Платон говорит не об этих рациональных "диагоналях" пятерки. Но, может быть, он говорит о рациональных "диагоналях" пятерки, которые дает алгоритм, определяемый равенствами (34^0) и (36^0)? Проверим это.

Вычисленные нами с помощью этого алгоритма рациональные "диагонали" пятерки следующие: $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $D_3 = 7$. Сумма их: 3 +

+ 4 + 7 = 14 меньше 27. Вычислим еще две "стороны" и две "диагонали":

$$S_4 = \frac{1}{K}(S_3 + D_3) = \frac{1}{2}(3+7) = 5,$$

$$D_4 = \frac{1}{K}\left(D_3 + \frac{N}{AE^2} S_3\right) = \frac{1}{2}\left(7 + \frac{5}{1^2} 3\right) = 11,$$

$$S_5 = \frac{1}{K}(S_4 + D_4) = \frac{1}{2}(5+11) = 8,$$

$$D_5 = \frac{1}{K}\left(D_4 + \frac{N}{AE^2} S_4\right) = \frac{1}{2}\left(11 + \frac{5}{1^2} 5\right) = 18.$$

Сумма 14 + 11 = 25 меньше 27, а сумма 14 + 11 + 18 = 43 больше 27. Следовательно, Платон говорит и не об этих рациональных "диагоналях" пятерки.

О каких же рациональных "диагоналях" пятерки он говорит? Можно ли ответить на этот труднейший, на первый взгляд неразрешимый, вопрос? Оказывается, можно.

Удивительность этого замечательного метафорического текста Платона состоит также в том, что он дает точный однозначный ответ и на этот вопрос. Ответом на него являются слова: "*δεομένων ἑνὸς ἑκάστων*", правильный перевод которых гласит: "желающих единицы каждая из них". Таким образом, рациональные "диагонали" пятерки, о которых говорит Платон, это те, каждая из которых "желает" единицы.

Что же это за "диагонали"? Можно ли найти их?

Ответить на этот вопрос позволяет сообщение Прокла, что пифагорейцы и Платон говорили о рациональной диагонали рациональной стороны не прямо, а об их квадратах [117, 27_{6-11}]: "*ἐπενόησαν οὕτω λέγειν οἱ πυθαγόρειοι καὶ Πλάτων, τῆς πλευρᾶς οὔσης ῥητῆς τὴν διάμετρον ῥητὴν οὐχ ἁπλῶς, ἀλλ' ἐν οἷς δύναται τετραγώνοις, τοῦ διπλασίου λόγου, ὃν δεῖ τὴν διάμετρον ποιεῖν, ἢ μονάδι [δέ]ουσαν ἢ μονάδι πλεονάζουσαν· πλεονάζουσαν μὲν ὡς τοῦ $\bar{\alpha}$ τὸν $\bar{\delta}$, δέουσαν δὲ ὡς τοῦ $\overline{\kappa\epsilon}$ τὸν $\overline{\mu\theta}$*".

Это значит: "Пифагорейцы и Платон придумали так говорить о рациональной диагонали рациональной стороны, – не прямо (*οὐχ ἁπλῶς*), но в квадратах, которые они составляют, двойного определения, которое должно производить диагональ или с недостатком, или с избытком единицы. С избытком как 9 четырех, с недостатком как 49 двадцати пяти".

Таким образом, Платон мог квадрат диагонали называть метафорически для краткости просто диагональю. Пример, данный Проклом, разъясняет, что означает это двойное определение квадратов, которые составляют рациональная сторона и рациональная диагональ.

Что означают слова: "С избытком как 9 четырех"? Они означают,

что квадрат диагонали 3, равный 9, на единицу больше (имеет избыток единицы) двойного квадрата 4, т.е. 4 х 2 = 8, стороны, равной 2.

Что означают слова: "С недостатком как 49 двадцати пяти"? Они означают, что квадрат диагонали 7, равный 49, на единицу меньше (имеет недостаток единицы) двойного квадрата 25, т.е. 25 х 2 = = 50, стороны 5.

Для того чтобы стать равным двойному квадрату 8 стороны 2, квадрат 9 диагонали 3 нуждается в уменьшении на единицу. Для того чтобы стать равным двойному квадрату 50 стороны 5, квадрат 49 диагонали 7 нуждается в увеличении на единицу. Вместо того чтобы длинно говорить: "квадрат диагонали нуждается в уменьшении на единицу, квадрат диагонали нуждается в увеличении на единицу", можно в обоих случаях кратко метафорически сказать: "квадрат диагонали желает единицы". Именно так говорит Платон.

Значение "нуждаться" глагол δέω имеет и в действительном, и в страдательном залоге. Значение же "желать" он имеет только в страдательном залоге. Поэтому Платон употребляет не действительный, а именно страдательный залог глагола δέω: "δεομένων", т.е. "желающих".

Таким образом, одним словом "δεομένων" Платон охватил оба определения ("двойное определение") квадрата диагонали, - и "δέουσαν" и "πλεονάζουσαν", т.е. и "с недостатком" и "с избытком" (единицы).

Следовательно, вскрыта еще одна грубейшая принципиальная ошибка Прокла, ошибочно истолковавшего слово "δεομένων" в смысле недостатка: единицы у квадрата рациональных "диагоналей" пятерки и двойки у квадрата иррациональных "диагоналей" ее, - ошибка, повторявшаяся, как мы видели, благодаря огромному авторитету Прокла всеми последующими комментаторами фрагмента 546 ВС, вплоть до наших дней, т.е. почти полтора тысячелетия.

Таким образом, словами "рациональных диагоналей пятерки, желающих единицы каждая из них", Платон метафорически говорит о рациональных диагоналях пятерки, квадрата которых "желают" единицы.

Что же это за диагонали? Можно ли ответить на этот вопрос? Оказывается, можно.

Ответить на него позволяет то, что в алгоритме (34), (35), (36) при $S_0 = D_0 = 1$ для каждого параметра N существует только единственное число n, которое постоянно "желают" квадраты "диагоналей", строящихся для этого параметра.

Это число n, т.е. постоянная в алгоритме (34), (35), (36) разность D между суммой $S_n^2 + (K \cdot S_n)^2$ квадратов "сторон" S_n и

$K \cdot S_n$ и квадратом D_n^2 "диагонали" D_n, или наоборот, равно [если $S_n^2 + (K \cdot S_n)^2 > D_n^2$]: $n = D = S_n^2 + (K \cdot S_n)^2 - D_n^2$. При $S_0 = D_0 = 1$, $n = D = S_0^2 + (K \cdot S_0)^2 - D_0^2 = 1^2 + (K \cdot 1)^2 - 1^2 = (K \cdot 1)^2 = K^2$.

Для параметра $N = 2$, т.е. для квадрата ($AE = 1$, $BE = 1$, $K = \frac{BE}{AE} = \frac{1}{1} = 1$, $N = AB^2 = AE^2 + BE^2 = 1^2 + 1^2 = 2$), это число $n = D = K^2 = 1^2 = 1$.

Так как при $K = 1$ алгоритм (34), (35), (36) совпадает с алгоритмом (19), а это единственный частный случай совпадения этих алгоритмов, то в этом единственном частном случае число n, т.е. разность D, остается постоянным, равным единице, и в алгоритме (19).

Для параметра $N = 3$, т.е. для прямоугольника № 1 (рис. 20) ($AE = 1$, $BE = \sqrt{2}$, $K = \frac{BE}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$, $N = AB^2 = AE^2 + BE^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 = 3$), число n, т.е. разность D, равно $K^2 = \sqrt{2}^2 = 2$ (что мы и видели, вычисляя эту разность для S_1 и D_1).

Для параметра $N = 4$, т.е. для прямоугольника № 2 (рис. 20) ($AE = 1$, $BE = \sqrt{3}$, $K = \frac{BE}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, $N = AB^2 = AE^2 + BE^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4$), число $n = D = K^2 = \sqrt{3}^2 = 3$.

Для параметра $N = 5$, т.е. для прямоугольника № 3 (рис. 20) ($AE = 1$, $BE = 2$, $K = \frac{BE}{AE} = \frac{2}{1} = 2$, $N = AB^2 = AE^2 + BE^2 = 1^2 + 2^2 = 5$), число $n = D = K^2 = 2^2 = 4$ (что мы и видели в табл. 7).

Если сторона AE прямоугольника, для которого строятся пифагорейские "стороны" и "диагонали", равна единице, то $K = BE/AE = BE/1 = BE$, и $BE^2 = K^2$. Следовательно, $N = AB^2 = AE^2 + BE^2 = 1^2 + K^2 = 1 + K^2$. А так как $K^2 = n$, то $N = 1 + K^2 = 1 + n$, и $n = N - 1$.

Таким образом, постоянное число n, которое "желают" квадраты "диагоналей" в алгоритме (34), (35), (36), при $AE = 1$ и $S_0 = D_0 = 1$, всегда на единицу меньше параметра, для которого строятся "диагонали". Поэтому указанием числа – единицы и двойки, которое "желают" "диагонали", Платон точно указал параметры, для которых строятся "диагонали", о которых он говорит.

Для рациональных "диагоналей", "желающих" единицы, этот параметр N – двойка, для иррациональных "диагоналей", "желающих" двойки, этот параметр N – тройка. Снова перед нами удивительные однозначность и точность этого замечательного метафорического текста.

Иррациональные "диагонали", "желающие" двойки, строящиеся для параметра N – тройка, еще раз неопровержимо доказывают, что

Платону был известен не только замечательный пифагорейский алгоритм (19), но и во всем его объеме замечательный исходный пифагорейский алгоритм (34), (35), (36), и доказывают также то, что одна из сторон прямоугольника № 1, для которого строились "диагонали", о которых говорит Платон, принималась равной единице. Следовательно, вскрывается еще одна грубейшая принципиальная ошибка Прокла, и не только Прокла, ибо мы находим ее уже в документе V или III в. н.э. - Оксиринхском папирусе (рис. 6).

Надо полагать, что автор глоссы в этом папирусе к фрагменту 546 ВС заимствовал эту ошибку из более раннего источника. Надо полагать, что авторами ее были первые комментаторы (IV в. до н.э.) фрагмента 546 ВС, не знавшие математической теории, о которой говорит Платон, и поэтому игнорировавшие важнейшее обстоятельство, что он употребляет слово "διάμετρος" = "диагональ" во множественном числе: "διαμέτρων", следовательно, говорит не об одной диагонали (они полагали, что Платон говорит о диагонали квадрата со стороной, равной пятерке), а о многих диагоналях.

Не зная этой математической теории, они ошибочно полагали, что словом "πεμπάδος" Платон говорит о стороне квадрата, равной пятерке, и, вероятно, так же как Прокл, ошибочно полагали, что словами "διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων" он говорит о рациональной диагонали этого квадрата, у квадрата которой недостает единицы до квадрата истинной диагонали его, словами же "ἀρρήτων δὲ δυοῖν" - об иррациональной диагонали его, у квадрата которой недостает двойки до квадрата истинной диагонали его.

Эта грубейшая ошибка в толковании слов "διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν", казавшихся Гульчу, Гюнтеру, Выгодскому и другим самыми ясными и понятными в фрагменте 546 ВС, красной нитью прошла почти через два с половиной тысячелетия, вплоть до наших дней.

В действительности же пятерка, о которой говорит Платон, это вовсе не сторона квадрата, а диагонали пятерки, о которых он говорит, это вовсе не диагонали пятерки. Рациональные диагонали, "желающие" единицы, - это диагонали двойки, иррациональные же диагонали, "желающие" двойки, - это диагонали тройки.

Таким образом, мы снова оказываемся перед труднейшей, и на первый взгляд неразрешимой, терминологической проблемой.

Почему же Платон называет рациональные диагонали для параметра два, т.е. рациональные диагонали двойки, и иррациональные диагонали для параметра три, т.е. иррациональные диагонали тройки, - диагоналями пятерки?

Можно ли понять, т.е. воскресить эту древнюю пифагорейскую математическую терминологию, забытую уже в IУ в. до н.э., бывшую неизвестной уже Аристотелю? Оказывается, можно.

Ответить на этот вопрос позволяет упоминавшееся нами пифагорейское толкование таинственного знака на воротах храма Аполлона в Дельфах. Мы упоминали, что этот таинственный неясный знак, который можно было толковать и как Ε (= 5) и как Ει (= "Ты еси"), пифагорейцы толковали как пятерку и полагали ее числом брака: женской двойки и мужской тройки.

Чтобы понять этот брак, надо знать греческую мифологию. У древних греков числа были божественным рождением, их олицетворением являлись боги. Например, числа 4, 7 олицетворялись богом Аполлоном. Таким образом, женская двойка и мужская тройка были членами божественного (святого) семейства.

Так как Плутарх полагает пятерку египетским богом света Гором, сыном Озириса и Изиды, и так как греческий бог света Аполлон отождествлялся с египетским богом света Гором ("Афинагор считает Аполлона тождественным с египетским Гором" [16, 532]), то можно предположить, что пифагорейцы олицетворяли пятерку с греческим богом света Аполлоном. А так как Аполлон был сыном Зевса и Латоны, то можно предположить, что пифагорейцы олицетворяли двойку, т.е. первое женское число, Латоной (аналогично отождествлению Плутархом четверки, как квадрата двойки, с Изидой), а тройку, т.е. первое мужское число, – Зевсом (аналогично отождествлению Плутархом тройки с Озирисом).

Для понимания этой пифагорейской математической терминологии важнейшее значение имеют слова Плутарха: "Пятерка, составленная из двойки и тройки, содержит в себе вместе и ее отца и ее мать". Так, несомненно, рассматривали пятерку пифагорейцы, полагая, что она "содержит в себе вместе и ее отца и ее мать", – и тройку и двойку, т.е. что Аполлон = пятерка содержит в себе вместе и его отца – Зевса и его мать – Латону, т.е. и тройку и двойку. Поэтому диагонали и двойки и тройки могли считаться диагоналями пятерки. И то, что Платон называет и диагонали двойки и диагонали тройки диагоналями пятерки, является важнейшим свидетельством того, что дело обстояло именно так.

Таким образом, источником этой математической терминологии пифагорейцев является греческая мифология. Несомненно, что не только словом "πεμπάδος" ("пятерки"), т.е. родительным падежом существительного "πεμπάς" ("пятерка"), но и словом "πεμπάδι" ("пятерки"), т.е. дательным падежом существительного "πεμπάς", упо-

требленным в смысле родительного падежа "πεμπάδος", Платон говорит о пятерке, как об Аполлоне.

Возникает вопрос, зачем ему понадобился дательный падеж "πεμπάδι" вместо родительного падежа "πεμπάδος"? Ответ дает табл. 4, относящаяся к слову "πεμπάδι". В этой таблице "диагонали" пятерки вычислены, полагая пятерку единым целым, в котором исчезли составляющие его части - двойка и тройка.

Следовательно, словом "πεμπάδι" Платон говорит о пятерке = Аполлоне, не как о составленном из двух частей, т.е. содержащем и его отца и его мать, а как о едином целом, в котором эти части существуют как нераздельное целое - бог Аполлон. Чтобы указать различие смыслов, в которых он говорит о пятерке = Аполлоне в этих двух случаях, Платон и употребляет в одном случае дательный падеж в смысле родительного, в другом случае - родительный падеж, используя семантические возможности греческого языка для достижения предельной краткости метафорического указания того, что словами "πεμπάδι" и "πεμπάδος" он говорит об Аполлоне в различных смыслах.

Таким образом, двумя словами: "πεμπάδι" и "πεμπάδος" Платон охватил диагонали, производимые всеми тремя членами "святого семейства": Аполлоном, Зевсом и Латоной.

То, что пифагорейцы приписывали бесконечные последовательности (ряды) диагоналей двойки, тройки и пятерки Аполлону (надо полагать, также диагоналей четверки, семерки и некоторых других параметров), наводит на мысль, не были ли "аполлоновские ряды", "исходящие из одной и той же аполлоновской монады", о которых говорит Прокл [16, 516]: "Существует много рядов, исходящих из одной и той же аполлоновской монады", рядами пифагорейских "диагоналей", а "аполлоновская монада" - пифагорейской монадой (μονάς) = единицей, являвшейся у пифагорейцев "началом всего". Эта мысль подкрепляется также словами Прокла [16, 518], заимствованными им, несомненно, так же как и цитированные выше слова, из более раннего источника: "Всякий аполлоновский ряд зависит от демиургического водительства Зевса".

Для параметра тройки эти слова точно совпадают с тем, что последовательности диагоналей, строящихся для этого параметра, определяются тройкой, т.е. "зависят от демиургического водительства Зевса" = тройки. "Демиургическое водительство" Зевса могло относиться и к рядам диагоналей для параметров двойки и пятерки, как главы "святого семейства". Оно могло относиться и ко всем другим "аполлоновским рядам", как отца Аполлона и царя богов.

Если высказанная нами мысль соответствует истине (цитированные же слова Прокла, заимствованные им, несомненно, из более раннего источника, подтверждают, на наш взгляд, ее соответствие истине), то фрагмент 546 ВС имеет еще то важнейшее историческое значение, что он освещает один из глубинных пластов зари человеческой культуры.

Открытие поразительного факта, что Платон диагоналями пятерки называет диагонали двойки и тройки, позволяет открыть те диагонали, которые составляют число 27. Оказывается, что это те самые три пифагорейские "диагонали" двойки - 3, 7, 17 - сумма которых равна 27, которые дошли до нас в передачах Теона Смирнского и Прокла.

Возникает вопрос, почему же в число "диагоналей" двойки не вошла начальная "диагональ", равная единице?

Ответ очевиден. Ведь "диагонали" двойки - это те "диагонали", которые зависят от двойки, т.е. определяются двойкой. Начальная же "диагональ", равная единице, не зависит от двойки. Для любого параметра она принималась пифагорейцами равной единице. Поэтому "диагонали" двойки, т.е. "диагонали", зависящие от двойки, начинаются с "диагонали", равной тройке. Три первые "диагонали" двойки 3, 7, 17 и составляют число 27.

Возникает вопрос, почему же пифагорейцы привели именно эти три первые "диагонали", составляющие число 27? Почему они именно после вычисления этих трех "диагоналей" говорят (полагаю, что Теон Смирнский воспроизводит слова более раннего источника, передающего слова пифагорейцев): "И от следующей одной за другой прибавки...", не вычисляя больше ни одной "диагонали"?

Можно предположить, что они остановились на первых трех "диагоналях", сумма которых равна 27, так как числу 27 придавалось особое значение /17, 317-318/. Поэтому число 27, составленное из этих трех "диагоналей" двойки (= пятерки), т.е. это аполлоновское число (считавшееся, быть может, даже священным), получило, вероятно, специальное наименование, специальный термин: "число из рациональных диагоналей пятерки", который, следуя пифагорейцам, и употребляет Платон, почему он и говорит не "сто чисел", а "сто (раз. - М.П.) число".

Так как сумма 27 этих трех "диагоналей" равна кубу их количества - тройки, то их сумму можно назвать также кубом их количества. Это открывает, что во втором определении продолговатого числа 2700: "с другой стороны сто кубов тройки", Платон, так же как в первом определении его: "с одной стороны сто (раз. - М.П.) число из рациональных диагоналей пятерки", говорит о диагоналях, лежащ

жащих в основании этого числа. В первом определении он говорит о сумме 27, составленной из этих диагоналей, взятой сто раз. Во втором определении он говорит о кубе 27 количества этих диагоналей - тройки, взятом сто раз.

Таким образом, второе определение продолговатого числа 2700 указывает количество диагоналей, лежащих в его основании, - три диагонали, т.е. является уточняющим дополнением к первому определению его. И снова перед нами удивительные точность и однозначность этого замечательного метафорического текста.

Таким образом, термин "диагональ" в фразе "сто (раз. - М.П.) число из рациональных диагоналей пятерки, желающих единицы каждая из них"; Платон употребляет в двух различных смыслах. Диагонали, составляющие число 27, - это диагонали в прямом смысле. Диагонали же, желающие единицы, - это диагонали в метафорическом смысле: квадраты их.

Употребление термина "диагональ" в этой фразе в двух различных смыслах поставило ее на голову, превратило ее в невразумительный пассаж, который совершенно невозможно понять тем, кто не знает эту математическую теорию и математическую терминологию пифагорейцев.

Но Платон писал фрагмент 546 ВС для тех, кто великолепно знал и эту математическую теорию и математическую терминологию пифагорейцев, о чем свидетельствует надпись на входе в его Академию: "μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω" ("Негеометр да не войдет").

Словами: "ἀρρήτων δὲ δυοῖν", т.е. "иррациональных же двойки" Платон говорит о иррациональных диагоналях только в метафорическом смысле: о квадратах их, желающих двойки. Таким образом, этими словами он только точно указывает, о каких именно иррациональных диагоналях он говорит: об иррациональных диагоналях тройки.

Так как число, составленное из иррациональных диагоналей пятерки (тройки) в прямом смысле, т.е. в том же прямом смысле, в котором Платон говорит о рациональных диагоналях пятерки (двойки), составляющих число 27, не может быть рациональным, то слова "сто (раз. - М.П.) число", т.е. сто раз 27, относятся только к рациональным диагоналям пятерки (двойки) и не имеют никакого отношения к словам "иррациональных же двойки".

Поэтому слово "ἑκατόν" ("сто") не имеет никакого отношения к иррациональным диагоналям пятерки, что открывает еще одну ошибку Адама, Дье, Альверса, и др., относящих слово "ἑκατόν" также к словам "ἀρρήτων δὲ δυοῖν".

Об иррациональных диагоналях пятерки (тройки) Платон говорит для того, чтобы указать принципиальное отличие между диагоналями,

производимыми членами "святого семейства" – двойкой и тройкой. Член этого семейства – двойка производит только рациональные диагонали (желающие единицы). Член же этого семейства – тройка производит и рациональные диагонали (желающие двойки) и иррациональные диагонали (также желающие двойки).

Так как между рациональными диагоналями, желающими единицы, и рациональными диагоналями, желающими двойки, нет принципиального отличия – и те и другие диагонали рациональны, то для указания принципиального отличия между диагоналями, производимыми членами "святого семейства" – двойки и тройки, Платон говорит только об иррациональных диагоналях, производимых тройкой.

Таким образом, ни о ста квадратах, без единицы каждый, из рациональных диагоналей пятерки, ни о ста квадратах, без двух каждый, из иррациональных диагоналей пятерки Платон не говорит. Эти квадраты являются только вымыслом комментаторов, не понимавших фрагмент 546 ВС.

Возникает вопрос, зачем понадобилось Платону умножать "число из рациональных диагоналей пятерки" на сто? Другими словами, зачем ему понадобилось продолговатое число 2700?

Ответ очевиден. Причина та же, по которой он умножал квадратное число 25 на сто: показ диалектического перехода квадратного числа в продолговатое. Продолговатое число 27 можно представить продолговатым прямоугольником с целочисленными сторонами: 9 x 3. Квадратное число 25 также можно представить продолговатым прямоугольником со стороной (длиной или шириной), равной одноименной стороне прямоугольника 9 x 3. Прямоугольник, равный ему по длине: 9 x 25/9. Прямоугольник, равный ему по ширине: 3 x 25/3.

Но сторона 25/9 или 25/3 этих прямоугольников не целочисленна, т.е. сложна. Платон же стремился к простоте, стремился показать этот диалектический переход на прямоугольниках, стороны которых были бы числами (целочисленны), так как числами считались только целые числа. Этой простоты он и достиг с помощью простейшей арифметической операции: умножая квадратное число 25 и продолговатое число 27 на сто. Стороны прямоугольников 100 x 25 и 100 x 27 целочисленны и эти прямоугольники имеют равную одноименную сторону – длину 100. Почему же Платон умножил числа 25 и 27 на сто, а не на более простое число 10?

Ответ очевиден. Потому что он получил бы числа 250 и 270, оба являющиеся продолговатыми, т.е. не являющиеся противоположностями, следовательно, числа, непригодные для показа диалектического перехода квадратного числа в продолговатое. Поэтому наиболее простой

арифметической операцией, переводящей числа 25 и 27 в числа, пригодные для показа этого диалектического перехода, было умножение их на сто, что и было сделано Платоном.

Мы видим, что теперь перед нами не только удивительные точность и однозначность, но и остроумие этого замечательного метафорического текста.

Мы переходим к словам " ἔστι δὲ θείᾳ μὲν γεννητῇ περίοδος ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος" = "Есть же у божественного рожденного очередь (= последовательность. - М.П.) которую обнимает (или охватывает) совершенное число".

О каком божественном рождении говорит Платон? Мы видели, что все без исключения комментаторы фрагмента 546 ВС, как древние, так и современные, следуют Плутарху и полагают, что этим божественным рождением является космос.

Но мы видели, что Плутарх, так же как Аристотель, Филон Александрийский, Прокл и все другие древние комментаторы фрагмента 546 ВС, вопреки мнению Зуземиля [126, 370], полагавшего, что фрагмент 546 ВС был совершенно ясен Аристотелю, и не только Аристотелю, но и Никомаху, Плутарху, Ямвлиху, Проклу и Аристиду Квинтилиану, на самом деле ничего не понимали в нем.

Так как же можно, опираясь только на огромный авторитет Плутарха, повторять его слова, будто божественное рождение, о котором Платон говорит в фрагменте 546 ВС, - это космос? Мы имеем немало исторических примеров, когда авторитет вредил истине. Приведем три из них.

Априорное утверждение Аристотеля, будто все тела падают с одинаковой скоростью, считалось истинным почти две тысячи лет, пока Галилей не обнаружил его ошибочность.

Две тысячи лет считалось истинным априорное утверждение Аристотеля, будто организмы могут зарождаться из гнили, пока Левенгук не обнаружил его ошибочность.

Ошибка Эйлера, приписавшего знаменитое уравнение Ферма $ax^2 + 1 = y^2$, где x и y целые числа, a - целое, но не точный квадрат, "англичанину Пеллю", "была увековечена и до сих пор это уравнение носит имя "уравнение Пелля" по меткому замечанию Е.Ландау: "потому что Пелль никогда им не занимался" [18, 140]. Подобные примеры можно умножить.

Авторитет Плутарха, как он ни огромен, не является доказательством того, что божественное рождение, о котором говорит Платон в фрагменте 546 ВС, - это космос. Поэтому не имеющий никакой научной обоснованности взгляд, что если Плутарх это сказал, то

это соответствует истине, должен быть самым решительным образом отвергнут.

Какие есть основания полагать, что божественное рождение, о котором говорит Платон в фрагменте 546 ВС, – это космос, а не числа, также считавшиеся у древних греков божественным рождением?

Никаких.

Мы видели, что фрагмент 546 ВС со слов "ἀνθρωπείῳ δὲ" первой фразы его посвящен пифагорейской теории чисел. Какие же есть основания полагать, что первые несколько слов от этой же первой фразы его "ἔστι δὲ θείῳ μὲν..." до "ἀνθρωπίῳ δὲ", посвящены не этой теории, а космосу?

Никаких.

Наоборот, частицы μὲν и δὲ показывают, что божественное и человеческое рождения противополагаются друг другу. Противополагать же друг другу можно только однородное. Например, белое можно противополагать черному только потому, что белое и черное – это цвет, т.е. однородны. Нельзя же противополагать белое, скажем, дереву или камню.

Так как мы видели, что человеческое рождение (творение), о котором говорит Платон в фрагменте 546 ВС, – это увеличения, "обнаруживающие" бесконечные последовательности (т.е. бесконечные "очереди") сторонних и диагональных чисел, то этим бесконечным очередям сторонних и диагональных чисел Платон противополагает бесконечную очередь же (т.е. однородное), бесконечную последовательность совершенных чисел (Евкл. IX-36), являющуюся совершенным божественным рождением (творением), определяющуюся формулой $N_{сов} = (2^{n+1} - 1) \cdot 2^n$, где $= 1, 2, \ldots, n+1$ – простое число.

Каждый член этой последовательности содержит все предыдущие члены ее, т.е. охватывает или обнимает их. Таким образом, эту последовательность обнимает или охватывает совершенное число. Следовательно, правильный перевод слов "ἔστι δὲ θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος" гласит: "Есть же у божественного рожденного очередь (= последовательность. – М.П.), которую обнимает (или охватывает) совершенное число".

Мы переходим к последней фразе фрагмента 546 ВС: "σύμπας δὲ οὗτος ἀριθμὸς γεωμετρικός, τοιούτου κύριος, ἀμείνόνων τε καὶ χειρόνων γενέσεων" = "Все же в целом это число геометрическое, глава такого, лучших и худших рождений".

Чтобы понять эти слова, надо прежде всего обратить внимание на слово "οὗτος" = "это", слово "σύμπας" = "все в целом", и на частицу "δε" = "же". Слова "это число" показывают, что Платон

продолжает говорить о числе из рациональных диагоналей пятерки (= двойки).

Слова "все в целом" и частица "же" показывают, что раньше Платон говорил об этом числе не как обо "всем в целом", т.е. что число 27, получившее специальный термин: "число из рациональных диагоналей пятерки", является этим числом не "всем в целом", что это только частное число из рациональных диагоналей пятерки. Слова "все в целом" и частица "же" показывают, что и словами "сто (раз. - М.П.) число из рациональных диагоналей пятерки" (= 2700) Платон говорит об этом числе не как обо "всем в целом". Частица "же" и слова "все в целом" показывают, что только теперь Платон говорит о числе из рациональных диагоналей пятерки (= двойки), как обо "всем в целом".

Чтобы понять, что же такое это число "все в целом", надо обратить внимание на то, что слово "σύμπας" значит также "все вместе". Что же такое это число "все вместе"?

Можно ли ответить на этот, на первый взгляд неразрешимый, вопрос? Оказывается, можно.

Ответить на него позволяет слово "γενέσεων" - "рождений", "главой" которых является это "все вместе" "геометрическое" число.

Снова мы встречаемся с математической терминологией пифагорейцев, преданной забвению еще в IУ в. до н.э., бывшей неизвестной уже Аристотелю. Можно ли восстановить понимание ее и в этом случае?

Восстановить понимание ее позволяет важнейшее слово "ἐγένετο" = "родило" в цитированном тексте Теона Смирнского, которое так легкомысленно игнорировал и извратил М.Я.Выгодский. Это слово соответствует платоновскому слову "γενέσεων" = "рождений" и означает, что пифагорейские "стороны" и "диагонали" "рождаются".

Так как частное число 27 составлено из пифагорейских "диагоналей", то и "все в целом", или "все вместе", число составлено из них. А так как пифагорейские "диагонали" "рождаются", то, следовательно, об этих "рождениях" и говорит Платон. "Главой" этих "рождений" является "все в целом", или "все вместе", число. Таким образом, это число "все вместе" является "главой" бесконечной последовательности этих "рождений", т.е. "главой" бесконечной последовательности пифагорейских "диагоналей".

Что же это за число? Чтобы ответить на этот вопрос, надо обратить внимание на смысловое построение фразы: "все же вместе это число геометрическое". Семантически эта фраза говорит о том, что не "все вместе" это число не "геометрическое".

Что же такое это число не "все вместе"? Не "всем вместе" этим числом является число 27.

Почему же оно не "геометрическое"? Потому что оно является арифметической, т.е. не геометрической, суммой: 27 = 3 + 7 + 17.

Частное "число из рациональных диагоналей пятерки" (двойки) составляют три диагонали. Следовательно "все вместе" число из рациональных диагоналей пятерки составляет бесконечная последовательность их, т.е. бесконечное множество их.

Арифметическая сумма трех рациональных диагоналей пятерки существует, она равна 27. Арифметической же суммы бесконечного множества рациональных диагоналей пятерки не существует: арифметическая сумма их больше любого сколь угодно большого наперед заданного числа.

Если арифметическую сумму этих диагоналей назвать арифметическим числом, то частное "число из рациональных диагоналей пятерки" существует как арифметическое число, "все" же "вместе" "число из рациональных диагоналей пятерки" как арифметическое число не существует. Оно существует только как бесконечная последовательность = бесконечное множество геометрических "диагоналей" пятерки (двойки), которое естественно назвать "геометрическим числом", что Платон и указывает словами: "все же вместе" это число геометрическое", противополагая этими словами это "геометрическое число" арифметическому числу 27, составленному из не "всех вместе" рациональных диагоналей пятерки.

Так как бесконечное множество рациональных диагоналей пятерки, т.е. это "геометрическое число", охватывает все эти "рождения", то естественно это "геометрическое число" назвать "главой" всех этих "рождений".

Отношение каждой пифагорейской рациональной "диагонали" пятерки к соответствующей пифагорейской "стороне" является приближенным значением $\sqrt{2}$. Отношение каждой "диагонали" к соответствующей "стороне" дает более точное ("лучшее") приближенное значение $\sqrt{2}$ по сравнению с приближенным значением $\sqrt{2}$, которое дает отношение предыдущей "диагонали" к соответствующей "стороне". Поэтому каждая "диагональ", т.е. каждое "рождение", является "лучшим" "рождением" по сравнению с предыдущим "рождением", т.е. с предыдущей "диагональю".

Отношение каждой "диагонали" к соответствующей "стороне" дает менее точное ("худшее") приближенное значение $\sqrt{2}$ по сравнению с приближенным значением $\sqrt{2}$, которое дает отношение следующей "диагонали" к соответствующей "стороне". Поэтому каждая "диагональ", т.е. каждое "рождение", является "худшим" "рождением" по

сравнению со следующим "рождением", т.е. с со следующей "диагональю".

Таким образом, каждая "диагональ", т.е. каждое "рождение", является и "лучшим", и "худшим" "рождением". Следовательно, это "геометрическое число", т.е. бесконечное множество пифагорейских "диагоналей" пятерки (= двойки), является "главой" "лучших" и "худших" "рождений", что и указывает Платон.

Снова перед нами удивительные точность и однозначность этого замечательного метафорического текста. Каждая пифагорейская "диагональ" состоит из единиц. Следовательно, бесконечное множество их является бесконечным множеством единиц.

Таким образом, именование Платоном бесконечного множества рациональных "диагоналей" пятерки "числом", есть не что иное, как пифагорейское определение числа как "соединения единиц, или шагающего вперед множества..."

Чрезвычайно важно обратить внимание на то, что в этом определении, во-первых, соединение единиц рассматривается не как арифметическая сумма их, выражающаяся каким-либо конечным числом, а именно как множество единиц, во-вторых, что это множество единиц рассматривается "шагающим вперед", т.е. увеличивающимся, без каких-либо ограничений этого "шагания вперед", т.е. в этом определении числа составляющее его множество единиц является бесконечным.

Таким образом, таинственное "геометрическое число" Платона - это бесконечное множество рациональных диагоналей пятерки, т.е. это число есть не что иное, как канторовское трансфинитное число ω.

Следовательно "геометрическое число", о котором говорит Платон, не имеет никакого отношения к определению наилучшей поры совершения браков.

Платон великолепно понимал, что даже если предположить, что такая пора существует, она не может быть определена каким-либо числом. Поэтому он и назвал речь Муз шуткой, "поддразнивающей нас, как детей".

И вот уже более двух тысячелетий эта шутка Платона действительно поддразнивает, как детей, историков науки, побуждая их найти "геометрическое число", которое Платон якобы считал определяющим наилучшую пору совершения браков, - несуществующее число, которое Плутарх, ошибочно полагая, будто Платон всерьез говорит о числе, являющемся главой лучших и худших рождений, ошибочно назвал "брачным числом Платона", ошибочное название, которое, следуя Плутарху, увековечили историки науки последующих веков.

Но эту шутку Муз Платон всерьез использовал для того, чтобы увековечить два главнейших математических открытия пифагорейцев.

Вследствие исключительной важности их, он вложил сообщение о них в уста Муз. Поэтому он и говорит: "Признаться, Музы отвечают нам правильно" /28, 359/. Таким образом, о "геометрическом числе", являющемся "главой лучших и худших рождений", Платон говорит и в шутку, и всерьез.

В шутку, как о числе, определяющем наилучшую пору совершения браков, всерьез, как о геометрическом трансфинитном числе, опасном в математическом отношении от крушения главный философский принцип пифагорейцев "единица - начало всего".

Поэтому глубоко ошибаются те комментаторы речи Муз, которые полагают, что Платон пародирует в ней ученость и эта речь не имеет никакого научного значения.

В действительности мы должны быть благодарны Платону за то, что в речи Муз он сохранил для нас два великих математических открытия пифагорейцев.

Мы видим, что решение этой проблемы доказало ошибочность мнения всех комментаторов фрагмента 546 ВС, будто этот текст не является математическим, доказало, что этот текст является математическим, метафорически, но предельно точно сформулированным, и является неопровержимым свидетельством великолепного знания Платоном высших математических достижений пифагорейцев.

ЧАСТЬ II. ФЕОДОРОВО МЕСТО

Возникновение проблемы

В диалоге "Теэтет" есть место (147*D* – 148 B), получившее в специальной литературе название "Феодорово место", в котором афинский юноша Теэтет, ученик знаменитого математика Феодора Киренского, рассказывает Сократу об уроке Феодора и о том, что ему пришло на ум после этого урока.

Тому, что сообщил на этом уроке Феодор, Теэтет отвел только очень краткое сообщение в начале своего рассказа. Остальную часть рассказа он посвятил его собственному достижению – классификации чисел, которая пришла ему на ум после урока Феодора, т.е. разбиению их на два класса: квадратные и продолговатые числа. Так как в начале рассказа Теэтет сообщил, что Феодор посвятил свой урок сделанному им открытию несоизмеримости ряда отрезков (которые Теэтет назвал в конце его рассказа – 148 B – сторонами квадратов, площади которых выражаются неквадратными числами) с отрезком, принятым за единицу, или, в современной терминологии, доказательству иррациональности ряда квадратных корней, то это место диалога уже в древности привлекло пристальное внимание.

Но чрезмерная краткость сообщения Теэтета об уроке Феодора так затруднила его понимание, что ни древние, ни позднейшие комментаторы не могли понять его и почти два с половиной тысячелетия оно оставалось непонятным.

Таким образом, в IУ в. до н.э. возникла знаменитая проблема расшифровки места диалога "Теэтет", находящегося в трехтомном издании греческого текста сочинений Платона Жана де Серре и Анри Этьена в разделах *D*, E страницы 147 и в разделах A, B страницы 148 первого тома, получившего поэтому название фрагмента 147*D* – 148 B.

В древности "Феодоровым местом" занимались: Аристотель [47, 1019б33], Плутарх [115, 367 E], Александр Афродисийский [41, 394₃₄], неизвестный комментатор II или III в. н.э. (школы Гая, как полагают Дильс и Шубарт) [44, 18-22], Папп [131, 63-73], Прокл [116, 6; 10] и др.

Древние полагали, что слова περί и πέρι в начале этого места Платон употребляет в одном и том же смысле. Слова "τρίποδος" и "πεντέποδος" они относили к слову "δυνάμεών", полагая, что этими словами Платон говорит о "δύνάμις τρίπους" и "πεντέπους". Толкуя термин "δύνάμις" в смысле "квадрат", они полагали, что словами "τρίποδος" и "πεντέποδος" Платон говорит о трехфутовом и пятифутовом квадратах, т.е. о квадратах площадью три и пять квадратных футов. Толкование древних с некоторыми модификациями сохранялось более двух тысячелетий.

В эпоху Возрождения Марсилио Фичино [93, 137] в данном им латинском переводе этого места и комментариях к нему, присоединяясь к древним в отнесении слов "τρίποδος" и "πεντέποδος" к "δυνάμεών" и, так же, как древние, толкуя термин "δύνάμις" в смысле "квадрат", в отличие от них полагал, что этими словами Платон говорит не о двух квадратах, а об одном квадрате площадью 3 x 5 = 15 кв. футов.

В начале XIX в. Л.Ф.Гейндорф [71, 17-36] подверг толкование Фичино критике и с некоторой модификацией вернулся к толкованию древних. Так же, как древние и Фичино, он отнес слова "τρίποδος" и "πεντέποδος" к "δυνάμεών", но, возвращаясь к древним, в отличие от Фичино он полагал, что словами "τρίποδος" и "πεντέποδος" Платон говорит не об одном, а о двух квадратах. В отличие от древних и Фичино он истолковал слово "δύνάμις" не в смысле "квадрат", а в смысле "сторона квадрата, площадь которого выражается неквадратным числом", толкуя, таким образом, "δύνάμις τρίπους" и "πεντέπους" как стороны квадратов площадью три и пять квадратных футов.

Толкованию древних в модификации Гейндорфа следовали: Ф.Шлейермахер [106, 197], В.Кузен [91, 50], П.Таннери [129, 92 и сл.], Б.Л.Ван дер Варден [7, 198], А.Ф.Лосев [17, 398] и др.

Некоторые авторы XIX и XX вв. следовали толкованию древних в его первоначальном виде: Г.Штальбаум [105, 62], Г.Шмидт [123, 89-90], А.Дье [110, 164], В.Р.Кнорр [81, 65-69] и др.

В конце XIX в. и особенно в XX в. интерес к открытию Феодора, являющемуся одним из величайших математических открытий древ-

ности, значение которого для дальнейшего развития математики нельзя переоценить, настолько возрос, что привел к длинному ряду попыток реставрации его метода доказательства иррациональности.

Реконструкции его предложили: Г.Шмидт /122, 441/, Ф.Гульч /76, 370-384/, Г.Фогт /138, 97-115/, Г.Г.Цейтен /144, 405-429/, Т.Л.Хизс /68, 204-205/, Г.Г.Харди и Е.М.Райт /67, 42 и сл./, И.Г.Андергуб /43, 159-222/, Б.Л.Ван дер Варден /139, 696-700/, З.Геллер /72, 1-58/, И.Э.Гофман /74, 59-66/, И.Р.Шафаревич /5, 259/, А.Вассерштейн /140, 165-179/, Ж.Итар /79, 33-39/, А.Сабо /127, 303-358/, М.Браун /53, 359-379/, В.Р.Кнорр /81, 181-193/ и др.

Некоторые авторы высказывали гипотезы о методе Феодора без попыток реставрации его: Г.Ганкель /66, 102-103/, М.Б.Кантор /54, 154/, П.Таннери /129, 91-98/, Е.Заке /120, 52, 57/, О.Тёплиц /136, 290/, Е.С.Стаматис /124/ и др.

И древние, и позднейшие комментаторы считали начало рассказа Теэтета сообщением о том, что Феодор доказал иррациональность 12 квадратных корней: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$. Никто не видел в его рассказе сообщения о методе Феодора. Г.Фогт пишет /138, 105/: "Платон этот ход доказательства (Феодора. – М.П.) не передал и даже не намекнул на него..."

Мы полагаем, что и древние, и позднейшие комментаторы не понимали этот знаменитый текст Платона и неправильно толковали его.

По нашему мнению, истинный смысл указанного текста означает:

1) Теэтет сообщает об открытии Феодором иррациональности не 12 квадратных корней, а бесчисленного множества их.

2) В его рассказе есть краткое сообщение о методе Феодора, позволяющее реставрировать его.

3) Традиция, полагающая слова περί и πέρι имеющими один и тот же смысл, ошибочна.

4) Традиция, относящая слова "τρίποδος" и "πεντέποδος" к слову "δυνάμεών", ошибочна.

5) Термин "δύνᾰμις" Платон употребляет не в смысле "квадрат", а в смысле, указанном им в конце "Феодорова места" (148 В).

Предпосылки правильного перевода начала рассказа Теэтета

При расшифровке фрагмента 546 ВС мы видели, какое огромное значение Платон придавал деталям: не только каждому слову, но каждому семантическому оттенку.

Между тем комментаторы, как древние, так и позднейшие, как

это ни невероятно, так же, как при переводах фрагмента 546 BC, позволяли себе не придавать значения семантическим оттенкам фрагмента 147D – 148 B.

Сначала мы приводим наиболее трудное место фрагмента 147D – 148 B – начало рассказа Теэтета, содержащее сообщение об уроке Феодора: от слов περὶ δυνάμεών... до слова ἐφαίνοντο (в оригинале), затем приводим некоторые переводы его и вскрываем их ошибочность, после чего предлагаем свой перевод.

По изданию Бернета [111, 147D] начало рассказа Теэтета гласит: "Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος περὶ καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἔφαίνοντο..."

Ф.Шлейермахер перевел эти слова так: "Феодор начертил нам нечто о сторонах четырехугольников, в то время как он нам об этой (стороне четырехугольника. – М.П.) 3- и 5-футового (четырехугольника. – М.П.) доказал, что они как длина не измеримы были бы однофутовой (стороной четырехугольника. – М.П.). И так он шел через каждую (сторону четырехугольника. – М.П.) порознь до семнадцатифутовой, на этой он остановился. Нам пришло в голову нечто такое, так как казалось, что бесчисленное множество сторон должно быть..."

Перевод Г.Шмидта: "Феодор начертил нам нечто о квадратах, причем он сперва о трехфутовом и пятифутовом доказал, что они по длине не измеримы посредством однофутового квадрата, и точно так затем об остальных, беря каждый порознь, до семнадцатифутового, на этом он остановился. Нам же пришла мысль, так как число квадратов очевидно бесконечно велико было..."

Перевод А.Дьѐ (на который опирается Ж.Итар в его реконструкции): "Феодор, который присутствует здесь, сделал перед нами построения относительно некоторых степеней, показывая, что эти (степени. – М.П.) о трех футах и о пяти футах, рассматриваемые по их длине, нисколько не соизмеримы с этой однофутовой (степенью. – М.П.), и продолжая таким образом исследовать одну за одной, до этой (степени. – М.П.) о 17-ти футах; тут он, я не знаю почему, остановился. Нам пришло на ум таким образом, число степеней, явившееся бесконечным..."

Перевод В.Р.Кнорра [81, 62-63]: "Феодор доказал перед нами посредством чертежей, кое-что относительно степеней, в частности относительно трехфутовой степени и пятифутовой степени, доказывая, что эти несоизмеримы по длине с однофутовой степенью, – и выбирая каждую степень отдельно, этим путем до семнадцатифутовой степени.

Но на этой по некоторой причине он натолкнулся на трудность. Теперь вот что пришло нам в голову: после того, как мы осознали, что степени неограничены в числе..."

Перевод З.Геллера (который он называет дословным) [72, 13]: "Феодор здесь чертил нам нечто о квадратах, причем он относительно квадрата с тремя и пятью квадратными футами (площади) показал, что они по длине не измеримы с единичным квадратом и (относительно следующих) каждый по отдельности точно так брал до (квадрата. – М.П.) с 17 квадратными футами. На этом он как-то перестал".

Перевод Б.Л.Ван дер Вардена (так же, как Геллер, он закончил его переводом слова "ἐγέσχετο"). Русский перевод слов Ван дер Вардена, исполненный И.Н.Веселовским [7, 198], неточен. Поэтому мы переводим слова Б.Л.Ван дер Вардена с немецкого текста, проверенного автором [Цит. по 27, 234]: "Здесь наш Феодор начертил (или написал) кое-что, относящееся к сторонам квадратов (περί δυνάμεών τι ἔγραφε), и показал (ἀποφαίνωι) относительно трехфутовой и пятифутовой, что они не по длине соизмеримы с однофутовой. Так он выбирал каждую порознь до семнадцатифутовой. Здесь он был как-то остановлен (или перестал)". "Трехфутовые и пятифутовые" это стороны квадратов, площадь которых составляет "три и пять квадратных футов".

Перевод А.Ф.Лосева [17, 398]: "Относительно динамических прямых нечто выразил для нас этот Феодор, относительно образующих фигуры в 3 и 5 футов, – разъясняя, что они не соизмеримы с той, которая образует фигуру в 1 кв. фут. Так он брал по каждой отдельной прямой вплоть до семнадцатифутовой, а примерно на этой последней остановился. Поэтому нам пришло на ум нечто подобное, поскольку упомянутых динамических прямых оказалось бесчисленное множество..."

Перевод Т.В.Васильевой*: "Вот Феодор объяснял нам на чертежах нечто о сторонах квадрата, площадь которого выражена продолговатым числом, налагая их на трехфутовый и пятифутовый отрезки со-

---

* Автор книги в рукописи называет перевод Т.В.Васильевой "вторым переводом А.Ф.Лосева" на том основании, что он лично и через посредников предпринимал энергичные усилия с целью принятия своего перевода, который он предложил А.Ф.Лосеву. Однако, во-первых, поскольку опубликованный перевод фигурирует под фамилией Т.В.Васильевой, во-вторых, поскольку нет полного совпадения предложенного М.Е.Паевым перевода и перевода Т.В.Васильевой и, в-третьих, поскольку нет достоверной информации в отношении того, редактировал ли А.Ф.Лосев предложенный М.Е.Паевым перевод – то ответственные редакторы не сочли возможным назвать этот перевод вторым переводом А.Ф.Лосева (Примеч. отв. редакторов).

ответственно и доказывая, что по длине они несоизмеримы с одно-футовым отрезком; и так перебирая эти отрезки один за другим, он дошел до семнадцатифутового. Тут его что-то остановило. Поскольку такого рода отрезков оказалось бесчисленное множество, нам пришло в голову..." [27, 232].

Мы видим, что перевод Т.В.Васильевой начала рассказа Теэтета принципиально отличается от перевода А.Ф.Лосева, опубликованного годом раньше (перевод А.Ф.Лосева опубликован в 1969 г., а перевод Т.В.Васильевой - в 1970 г.). Так как история второго перевода может представить некоторый интерес, то вкратце сообщаю ее.

Сообщение Прокла об "изящной" пифагорейской теореме о сторонах и диагоналях привело меня весной 1966 г. к открытию пифагорейского доказательства несоизмеримости диагонали и стороны квадрата. Открытие его привело меня к пересмотру традиционного перевода начала рассказа Теэтета. Я увидел, что если слово "πέρι" перевести не традиционным словом "относительно", а словом "около", то начало рассказа Теэтета описывает построение, аналогичное построению для проведения пифагорейского доказательства несоизмеримости диагонали и стороны квадрата. Поэтому возник естественный вопрос: не является ли метод Феодора доказательств несоизмеримости обобщением пифагорейского доказательства несоизмеримости диагонали и стороны квадрата?

В конце декабря 1966 г. я был в служебной командировке в Москве и сообщил новый перевод начала рассказа Теэтета профессору МГУ историку математики И.Г.Башмаковой. Был предпоследний день 1966 г., и это было первое сообщение об этом переводе. И.Г.Башмакова сказала, что, по ее мнению, этот перевод "не вздор", но так как она не филолог, и тем более не филолог-классик, то она написала письмо заведующей кафедрой классической филологии МГУ, проф. А.А.Тахо-Годи, в котором просила рассмотреть мой перевод начала рассказа Теэтета и установить, правилен ли он филологически.

Второго января 1967 г. я встретился с А.А.Тахо-Годи у нее на квартире, вручив ей письмо от И.Г.Башмаковой и мой перевод начала рассказа Теэтета. Но ни в 1967, ни в 1968 году никаких сообщений от А.А.Тахо-Годи я не получил.

В январе 1967 г. мне удалось обобщить открытое мной пифагорейское доказательство несоизмеримости диагонали и стороны квадрата. Оказалось, что открытый мной перевод начала рассказа Теэтета точно соответствует этому обобщению. Это привело меня к убеждению, что открытый мной перевод начала рассказа Теэтета является истинным переводом его, традиционные же переводы ошибочны.

В августе 1968 г. я был в служебной командировке в Москве и обратился в редакцию литературы по истории философии издательства "Мысль" с просьбой сообщить, как обстоит дело с изданием нового русского перевода "Теэтета". Второй издательский редактор второго тома нового русского издания сочинений Платона, в котором помещен новый перевод "Теэтета" (переводчик – Т.В.Васильева), М.И.Иткин сообщил, что новый русский перевод "Теэтета" уже сверстан и дал мне издательский оттиск его. Взгляд на перевод "Феодорова места" показал, что мой перевод не принят во внимание и опять будет опубликован вариант ошибочного традиционного перевода его.

Я сказал М.И.Иткину, что перевод Т.В.Васильевой является продолжением старой ошибочной традиции, что мной найден правильный перевод, который и должен быть опубликован*.

Терминологическая проблема

При всем отличии приведенных переводов все они относят слова "τρίποδος" и "πεντέποδος" к слову "δυνάμεων" и полагают, что этими словами Платон говорит либо о квадратах площадью три и пять квадратных футов, толкуя слово "δύναμις" в смысле "квадрат" (Шмидт, Дье, называющие квадрат "степенью", Кнорр, также называющий квадрат "степенью", Геллер), либо о сторонах квадратов площадью три и пять квадратных футов, толкуя слово "δύναμις" в смысле "сторона квадрата, площадь которого выражается неквадратным числом" (Шлейермахер, Ван дер Варден, А.Ф.Лосев, называющий стороны этих квадратов "динамическими прямыми").

В греческом языке не было терминов "линейный фут", "квадратный фут". Слово "πούς" ("фут") могло означать и линейный, и квадратный фут. Поэтому слова "τρίποδος", "πεντέποδος" могли значить и "трехфутовая линия", "пятифутовая линия", и "трехфутовая площадь", "пятифутовая площадь". Причем "трехфутовая линия", "пятифутовая линия" – это не сторона квадрата, площадь которого равна трем или пяти квадратным футам, как противоестественно толкует Ван дер Варден слова "трехфутовая и пятифутовая сторона квадрата", а линия длиной три и пять футов. И, таким образом, мы оказываемся перед следующей, имеющей фундаментальное значение для расшифровки фрагмента 147D – 148 B терминологической проблемой.

В каком смысле Платон употребил в этом тексте слова "τρίποδος" и "πεντέποδος" – в смысле трехфутовой и пятифутовой площади или в смысле трехфутовой и пятифутовой линии?

---

* См. примечание ответственных редакторов к с. 159

Ответить на вопрос позволяет знаменитая сцена с рабом в диалоге Платона "Менон" [112, 82В-85В]. В этой сцене Платон употребляет слова "*δίποδος*" (83 d_5), "*τρίποδος*" (83 e_{10}), "*τετράποδος*" (83 d_5; 85 b_3), "*ὀκτώποδος*" (83 d_4, 84 a_5). Причем слово "*τετράποδος*" он употребляет и в смысле "четырехфутовая линия" (83 d_5), и в смысле "четырехфутовая площадь" (85 b_3).

Как же он различает, где слово "*τετράποδος*" означает линию, где оно означает площадь? Указанием на это является член при этом прилагательном, субстантивирующий его.

В греческом языке линия (*ἡ γραμμή*) – женского рода, площадь (*τό χωρίον*) – среднего рода. Поэтому словом "*τῆς τετράποδος*" (83 d_5) Платон говорит о четырехфутовой линии, словом же "*τοῦ τετράποδος*" (85 b_3) он говорит о четырехфутовой площади, т.е. площади в четыре квадратных фута.

Точно так словами "*τῆς δίποδος*" (83 d_5), "*τῆς τρίποδος*" (83 e_{10}) он говорит о двухфутовой и трехфутовой линиях, словом же "*τοῦ ὀκτώποδος*" (83 d_4; 84 a_5) он говорит о восьмифутовой площади, т.е. площади в восемь квадратных футов.

Поэтому если Платон в "Теэтете" членом "*τῆς*" (родительный падеж члена "*ἡ*" женского рода) субстантивирует прилагательные "*τρίποδος*" и "*πεντέποδος*" в том же смысле, в котором он в "Меноне" субстантивирует этим членом прилагательные "*δίποδος*", "*τρίποδος*" и "*τετράποδος*", то слова "*τῆς τρίποδος*" и "*τῆς πεντέποδος*" означают не площади в три и пять квадратных футов, а линии длиной три и пять футов.

Возникает вопрос, можно ли установить, в одном и том же смысле субстантивирует Платон членом "*τῆς*" прилагательные "*δίποδος*", "*τρίποδος*" и "*τετράποδος*" в "Меноне" и прилагательные "*τρίποδος*" и "*πεντέποδος*" в "Теэтете", или в различных смыслах?

Ответить на вопрос позволяет определение термина "*δύνᾰμις*", данное Теэтетом в конце "Феодорова места" (148 АВ). Оно гласит: "*ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις ὡς μήκει οὐ συμμέτρους ἐκείνας, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται.*"

В точном переводе это значит: "Линии, какие делают квадратом равностороннее и квадратное число, мы назвали длиной, какие же (линии. – М.П.) (делают квадратом. – М.П.) разнодлинное (= разностороннее = продолговатое. – М.П.) (число. – М.П.) (мы назвали. – М.П.) "*δυνάμεις*", как по длине не соизмеримые тем (= с теми. – М.П.), ранее упомянутым, которые квадратным числам квадраты делают (т.е. которые квадратные числа представляют квадратами. – М.П.)".

Перед нами точное и ясное определение термина "*δύνᾰμις*",

которым Платон точно указывает, в каком именно смысле он употребляет этот термин именно в "Феодоровом месте".

Можно ли не верить Платону? Можно ли, найдя в каком-нибудь другом его диалоге другое определение этого термина, например, в смысле "квадрат", не верить Платону, что в "Теэтете" он употребляет этот термин не в смысле "квадрат", а в смысле линии, представляющей квадратом продолговатое число, т.е., в современной терминологии, в смысле квадратного корня из неквадратного числа? (Заметим, что представление квадратом любого продолговатого числа не представляло никаких трудностей, так как преобразовать неравносторонний прямоугольник, представляющий какое-либо продолговатое число, в квадрат можно было с помощью принадлежащей пифагорейцам теоремы о средней пропорциональной - Евкл. II-14, открытой ими задолго до открытия ими несоизмеримости. Но до открытия несоизмеримости стороны таких квадратов считались соизмеримыми со сторонами квадратов, представляющих квадратные числа.)

Разумеется, нельзя.

Но, как это ни невероятно, и в наше время находятся ученые, например, А.Сабо[20], В.Р.Кнорр, которые не верят Платону и пытаются обосновать свои ошибочные толкования "Феодорова места" определением термина "δύνᾰμις" в смысле "квадрат", данным Платоном в других диалогах (например, в "Тимее" - 32 А, 54 В, в "Государстве" - 587 D).

Но разве древнегреческие комментаторы "Феодорова места" не знали, что в "Теэтете" Платон дал определение термина "δύνᾰμις" не в смысле "квадрат", а в смысле "сторона квадрата, площадь которого выражается продолговатым числом"? Разумеется, знали.

Так неужели они столь не уважали Платона, что игнорировали его определение термина "δύνᾰμις", данное им непосредственно в "Феодоровом месте", и проявили столь недопустимый произвол, как замена этого определения термина "δύνᾰμις" определением "δύνᾰμις" ("квадрат"), данным Платоном в других диалогах, не имеющих ничего общего с "Феодоровым местом"?

Дело не в неуважении к Платону. Причина этого произвола очень глубока. Ею является математический абсурд, к которому приводило древних определение термина "δύνᾰμις" в смысле "сторона квадрата, площадь которого выражается продолговатым числом". Существительное "ἡ δύνᾰμις" так же, как существительное "ἡ γραμμή", - женского рода. Поэтому член "τῆς" при прилагательных "τρίποδος" и "πεντέποδος" может субстантивировать их как в смысле "ἡ γραμμή" ("линия"), так и в смысле "ἡ δύνᾰμις".

Древние субстантивировали членом "τῆς" прилагательные "τρί-

ποδος" и "πεντέποδος" в смысле "δύνᾰμις" и относили их поэтому к слову "δυνάμεῶν".

Знали ли древние, что в "Меноне" Платон членом "τῆς" субстантивирует прилагательные "δίποδος", "τρίποδος" и "τετράποδος" в смысле линии? Разумеется, знали.

Так почему же в "Теэтете" они субстантивировали членом "τῆς" прилагательные "τρίποδος" и "πεντέποδος" не в смысле трехфутовой и пятифутовой линии (γραμμή), а в смысле трехфутовой и пятифутовой "δύνᾰμις"? Причиной этому было их толкование слова πέρι в смысловом звене "τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος" в смысле слова περί ("о", "об", "относительно") в смысловом звене "περί δυνάμεῶν...".

При таком толковании слова πέρι слова: "τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ" получают смысл: "Относительно трехфутовой и пятифутовой доказывая, что по длине не соизмеримы с однофутовой".

Если трехфутовая и пятифутовая - это линии, то получается, что трехфутовая и пятифутовая линии несоизмеримы с однофутовой линией. Но это - математический абсурд.

Так как Платон не мог вложить в свой текст математический абсурд, то древние пытались, естественно, найти выход из этого математического тупика.

Так как член "τῆς" может субстантивировать прилагательные "τρίποδος" и "πεντέποδος" не только в смысле "γραμμή", но и в смысле "δύνᾰμις", то древние и пытались найти выход из этого математического тупика субстантивированием прилагательных "τρίποδος" и "πεντέποδος" не в смысле "γραμμή", а в смысле "δύνᾰμις" и относили поэтому эти прилагательные к слову "δυνάμεῶν". Но если принять, что "δύνᾰμις" - это сторона квадрата, то получается, что Платон говорит о "τῆς τρίποδος δύνᾰμις" и о "τῆς πεντέποδος δύνᾰμις", т.е. о трехфутовой и пятифутовой стороне квадрата.

Что же такое трехфутовая и пятифутовая сторона квадрата? Естественно, что это сторона квадрата длиной три и пять футов. Она соизмерима со стороной однофутового квадрата. Платон же говорит, что "δύνᾰμις" несоизмерима с ней. И, таким образом, и толкование слов "τρίποδος" и "πεντέποδος" в смысле трехфутовой и пятифутовой γραμμή, т.е. линии, и в смысле трехфутовой и пятифутовой "δύνᾰμις", полагая "δύνᾰμις" стороной квадрата, приводили древних к одному и тому же математическому абсурду, т.е. древние оказывались в порочном круге.

Б.Л.Ван дер Варден попытался найти выход из этого порочного

круга толкованием слов "трехфутовая и пятифутовая сторона квадрата" в смысле "сторона квадрата площадью три и пять квадратных футов". Но на самом деле этот выход из него является иллюзорным, так как естественным пониманием слов "трехфутовая и пятифутовая сторона квадрата" является то, что это сторона квадрата длиной три и пять футов.

Древние попытались найти выход из этого порочного круга отказом от платоновского определения термина "δύναμις" как "стороны квадрата" и заменой его платоновским определением термина "δύναμις" в смысле "квадрат", данном им в других диалогах.

Трехфутовые и пятифутовые квадраты, т.е. квадраты площадью три и пять квадратных футов, "по длине", т.е. не по площади, а по их стороне, действительно несоизмеримы со стороной однофутового квадрата, т.е. квадрата площадью в один квадратный фут. И, таким образом, древние полагали, что отказом от платоновского определения термина "δύναμις", данного Платоном в "Теэтете", они вышли из этого порочного круга.

В действительности же древние отказом от определения термина "δύναμις", данного Платоном в "Теэтете", из этого порочного круга не вышли, так же, как не вышел из него Б.Л.Ван дер Варден своим противоестественным толкованием слов "трехфутовая и пятифутовая сторона квадрата".

Отказом от определения термина "δύναμις", данного Платоном в "Теэтете", которым он точно указывает, в каком именно смысле он употребляет этот термин именно в фрагменте 147D – 148 B, древние только поставили себя в один ряд с последующими интерпретаторами: Геллером, Сабо́, Кнорром и др.

Выход из затруднительного положения

Оказывается, выход из этой ситуации есть и найти его можно. Для этого необходимо принять во внимание то огромное значение, которое Платон придавал семантическим деталям, это столь же важно для расшифровки фрагмента 147D – 148 B, как и для расшифровки фрагмента 546 BC.

В связи с тем что комментаторы оставили без внимания важнейшее указание Платона, которым является анастрофа в слове πέρι в семантическом звене "τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος", они обрекли себя на блуждания в потемках. Этой анастрофой Платон указывает, что слово πέρι в этом семантическом звене имеет не то значение, которое слово περί имеет в семантическом звене "περί

δυνάμεών... " Следовательно, слово πέρι имеет не то значение "о", "об", "относительно", которое имеет слово περί.

Древние же комментаторы фрагмента 147D – 148 B, не обращая внимания на эту анастрофу, толковали слово πέρι в том же смысле "о", "об", "относительно", который имеет слово περί.

Повторяя эту принципиальную ошибку древних, в приведенных переводах переводят слово πέρι в значении "о" или "об" Шлейермахер и Шмидт, в значении "относительно" – Дьѐ, Кнорр, Геллер, Ван дер Варден, А.Ф.Лосев.

В каком же значении употребил Платон слово πέρι ? В данном случае слово πέρι – это предлог, относящийся к родительному падежу: τῆς τρίποδος, τῆς πεντέποδος. С родительным падежом этот предлог имеет значения и прямые, и переносные. Его прямые значения с этим падежом: "около", "вокруг" (о месте). Его переносные значения с этим падежом: "о", "об", "относительно", "из-за", "по причине". Из переносных значений в данном случае имеют смысл только значения "о", "об", "относительно". Значения "из-за", "по причине" в данном случае бессмысленны.

Но так как значения "о", "об", "относительно" приводят к математическому абсурду, то анастрофой в слове πέρι Платон указывает, что этот предлог с родительным падежом: " τῆς τρίποδος ", " τῆς πεντέποδος " он употребляет не в переносном, а в прямом значении: "около" или "вокруг". Оба эти значения могут быть рассматриваемы в смысле "около". Значение же "около", как мы увидим дальше, имеет точный и очень глубокий математический смысл, разрывающий порочный круг, в котором мы оказываемся, переводя слово πέρι словами "о", "об", "относительно".

Значение "около" слова πέρι уничтожает математический абсурд, к которому, при переводе этого слова словами "о", "об", "относительно" приводит естественный перевод слов " τῆς τρίποδος " и " τῆς πεντέποδος " словами "трехфутовой и пятифутовой линии", т.е. перевод их в том же значении, в котором Платон употребляет слова τῆς τρίποδος и т.д. в "Меноне". Следовательно, анастрофой в слове πέρι Платон указывает, что это слово он употребляет не в значении "о", "об", "относительно", в котором он употребляет слово περί в семантическом звене: "περί δυνάμεών... ", а в значении "около" и что слова "τῆς τρίποδος... πεντέποδος " он употребляет в том же значении, как и " τῆς τρίποδος", "τῆς δίποδος", "τῆς τετράποδος" в "Меноне".

Таким образом, правильный перевод слов: " τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀκοφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετρα τῇ ποδιαίᾳ " гласит: "Около трехфутовой линии также пятифутовой до-

казывая, что по длине (δυνάμεις , т.е. линии, представляющие квадратами, т.е. квадрирующие продолговатые числа. - М.П.) не соизмеримы с однофутовой линией". Эти слова не содержат никакого математического абсурда и находятся в точном соответствии с определением термина "δύναμις", данным Платоном именно в "Феодоровом месте" (148 АВ).

Следовательно, правильный перевод этих слов разрывает, наконец, порочный круг, к которому приводил неправильный перевод их, и показывает, как глубоко ошибались комментаторы Платона, игнорируя данное им именно в "Теэтете" определение термина "δύναμις". Мы видим, что правильный перевод этих слов Платона содержит точное, хотя и очень краткое, указание на метод, которым Феодор доказывал несоизмеримость, т.е. иррациональность.

Это указание Платона состоит в том, что Феодор проводил свои доказательства около трехфутовой, также пятифутовой, линий. Это указание открывает, таким образом, что слово "ἔγραφε", которое может иметь значения и "начертил", и "написал", Платон употребил во вполне определенном, однозначном смысле, - не "начертил", а "написал".

Так как если бы он это слово употребил в смысле "начертил", то это значило бы, что черчением каких-то фигур около трехфутовой и пятифутовой линий можно было доказать существование несоизмеримости с однофутовой линией каких-то δυνάμεων . Но доказать существование несоизмеримости черчением каких бы то ни было фигур нельзя. В этом была ошибка Андергуба, полагавшего, что черчением предложенной им веерообразной фигуры можно было наглядно доказать существование несоизмеримости. Ибо доказать существование несоизмеримости нельзя.

Существование несоизмеримости можно только доказать, и не черчением каких бы то ни было фигур, а только строгим логическим рассуждением. Логическое же рассуждение можно передать только записью, а не черчением каких-то фигур.

Таким образом, открытие правильного перевода слов Платона: "τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων]" открывает также правильный перевод слова "ἔγραφε": "написал".

Возникает вопрос. Можно ли открыть, что именно написал Феодор около трехфутовой и пятифутовой линий, чтобы доказать несоизмеримость каких-то, и каких именно, δυνάμεων (т.е. линий, квадрирующих продолговатые числа)? Можно ли ответить на этот, на первый взгляд неразрешимый, вопрос? Оказывается, можно.

Ответ на него мы дадим несколько дальше. Теперь же дадим правильный перевод следующих слов Платона после слова "ποδιαίᾳ":

"καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος" ("И таким образом каждую поодиночке выбирая до семнадцатифутовой"). Возникают вопросы: что такое - "каждая поодиночке", и что такое "семнадцатифутовая"?

Так как членом "τῆς" Платон субстантивирует прилагательные "τρίποδος" и "πεντέποδος" в смысле линий, то ясно, что аналогично он и прилагательное "ἑπτακαιδεκάποδος" членом "τῆς" субстантивирует в смысле линии. Следовательно, "семнадцатифутовая" - это линия длиной 17 футов.

Что же такое "каждая поодиночке"? На первый взгляд может показаться, что это каждая поодиночке линия: длиной три фута, пять футов и т.д. На самом деле это не так. Ведь Феодор около этих линий что-то писал для доказательства несоизмеримости. Несоизмеримости чего? Ясно, что не этих линий, так как они соизмеримы с линией длиной в один фут. Следовательно, эти линии были только вспомогательным средством для доказательства несоизмеримости.

Несоизмеримости чего? Ясно, что "δυνάμεων", т.е. линий, квадрирующих (т.е. представляющих квадратами) продолговатые числа, доказательства несоизмеримости которых с однофутовой линией и писал Феодор около вспомогательных линий длиной три, пять и т.д. футов. Дальше мы увидим, что этими "δυνάμεσιν" были линии, квадрирующие продолговатые числа, которыми выражались длины вспомогательных линий, которые чертил Феодор.

Именно потому, что длины вспомогательных линий, которые чертил Феодор, выражались продолговатыми числами, Платон после вспомогательной линии длиной три фута, т.е. длина которой выражается продолговатым числом, следующей вспомогательной линией называет линию длиной пять футов, т.е. длина которой также выражается продолговатым числом, а не следующую после трехфутовой четырехфутовую линию, т.е. линию, длина которой выражается квадратным числом.

Урок Феодора был посвящен доказательству несоизмеримости "δυνάμεων" с линией длиной в один фут. О двух "δυνάμεσιν", соответствующих вспомогательным линиям длиной три и пять футов, и говорит Платон до слова "κοβιαίᾳ", говоря о трехфутовой и пятифутовой линиях только как о вспомогательном средстве для доказательства несоизмеримости этих "δυνάμεων" с линией длиной в один фут.

Естественно, что аналогично и после слова "κοβιαίᾳ" Платон продолжает говорить о "δυνάμεσιν", и аналогично указанию трех- и пятифутовой линий только как вспомогательного средства для доказательства несоизмеримости соответствующих им "δυνάμεων" с линией длиной в один фут указывает и семнадцатифутовую линию, т.е.

линию, длина которой также выражается продолговатым числом, только как вспомогательное средство для доказательства несоизмеримости соответствующей ей "δυνάμεως" с линией длиной в один фут.

Таким образом, хотя прилагательное "ἑκάστην" согласуется в роде и с "γραμμή" и с "δύνᾱμις", оно относится не к "γραμμή", а к "δυνάμει". Следовательно, "каждая поодиночке" – это не линии длиной три, пять и т.д. футов, а соответствующие этим линиям "δυνάμεις".

Возникает вопрос, зачем Платону при его стремлении к краткости понадобилось говорить о двух вспомогательных линиях до слова "ποδιαίᾳ", трех- и пятифутовой, и в третий раз еще об одной вспомогательной линии – семнадцатифутовой, после слова "ποδιαίᾳ"? Разве недостаточно было вместо трех вспомогательных линий ограничиться указанием только одной вспомогательной линии – трехфутовой?

Ответ ясен. О трехфутовой и пятифутовой линиях Платон говорит для того, чтобы указать, что Феодор четырехфутовую линию не чертил, т.е. что он чертил только линии, длина которых выражалась продолговатым числом, а о семнадцатифутовой линии он говорит для того, чтобы указать, что все свои доказательства несоизмеримости Феодор проводил с помощью черчения аналогичных вспомогательных линий, т.е. чтобы указать, что все свои доказательства несоизмеримости Феодор проводил одним и тем же методом. Снова перед нами удивительные краткость, точность и однозначность этого замечательного текста Платона.

Таким образом, цитированные слова Платона значат: "И таким образом (т.е. таким же образом, как Феодор выбирал две первые "δυνάμεις". – М.П.), каждую поодиночке выбирая (т.е. каждую "δύναμιν" поодиночке выбирая. – М.П.) (дошел. – М.П.) до семнадцатифутовой линии (т.е. до семнадцатифутовой вспомогательной линии. – М.П.)".

Семантическая проблема

Проанализируем семантически слово "до". Оно бисемантично, т.е. может значить и "включительно" и "не включительно". Большей частью его употребляют в смысле "не включительно". Например, когда говорят: "дошел до такой-то улицы", то каждому ясно, что слово "до" эту улицу не включает. Когда говорят: "прочел до такой-то страницы", то каждому ясно, что слово "до" эту страницу не включает. Когда в приказе пишут: "отпуск предоставляется до 20-го числа", то если не оговорено "включительно", каждому ясно, что слово "до" 20-е число не включает и 20-го числа надо выйти на работу.

Случаи, когда само собой разумеется, что слово "до" значит

"включительно", более редки. Например, "работал до изнеможения", - каждому ясно, что слово "до" включает изнеможение. "Смеялся до упаду", - само собой разумеется, что слово "до" включает упад, т.е. падение. "Язык до Киева доведет", - само собой разумеется, что слово "до" включает Киев.

Таким образом, слова "до семнадцатифутовой" могут и включать семнадцатифутовую линию, и не включать ее.

Решение вопроса, включает слово "μέχρι" ("до") семнадцатифутовую линию или не включает, чрезвычайно важно, так как решение его связано с решением вопроса, каким был метод, которым Феодор доказывал несоизмеримость. Следовательно, мы оказываемся перед семантической проблемой: включает слово "μέχρι" ("до") семнадцатифутовую линию или не включает?

Смысл, в котором он употребил здесь слово "μέχρι" ("до"), он точно указал словом "πως" в фразе, следующей после слова "ἑπτακαιδεκάποδος", т.е. "семнадцатифутовой": "ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο".

Что значат эти слова? Как правильно перевести их? Являются ли правильными приведенные выше переводы этих слов Шлейермахера: "На этой он остановился", Шмидта: "На этом он остановился", Дьѐ: "Тут он, я не знаю почему, остановился", Кнорра: "Но на этой по некоторой причине натолкнулся на трудность", Геллера: "На этом он как-то перестал", Ван дер Вардена: "На этой он был как-то остановлен (или перестал)", А.Ф.Лосева: "А примерно на этой последней остановился", Т.В.Васильевой: "Тут его что-то остановило"?

Для ответа на эти вопросы снова важнейшую роль играет семантическая деталь, которой в данном случае является отсутствие ударения в слове "πως".

Слово "πως" - это наречие, которое может быть вопросительным: "как?", "каким образом?", и тогда это слово имеет облеченное ударение: "πῶς", и неопределенным энклитическим, и тогда это слово не имеет ударения: "πως", и может иметь значения: "каким-нибудь образом", "как-нибудь", "некоторым образом", "как-то", "случайно", "почти".

Так как в рассматриваемой фразе слово "πως" не имеет ударения, то оно является энклитикой. И, следовательно, "наклоняется" назад, к предшествующему слову "ταύτῃ".

Гениальность Платона как семантика в данном случае проявилась в том, что это вполне определенное свойство энклитики он использовал для точного однозначного указания неопределенным наречием πως, в каком именно смысле он употребил слово "μέχρι" ("до") в предшествующей фразе. Так как слово "πως" "наклоняется"

назад, тесно примыкает к слову "ταύτῃ", то группа слов "ἐν δὲ ταύτῃ πως" образует нераздельное семантическое звено: "ἐν δὲ ταύτῃ πως". Следовательно, слово "πως" может иметь только такие значения, которые определяют его как часть этого семантического звена.

И семантическое чутье Платона в этом случае проявилось в том, что есть только единственное значение слова "πως", которое определяет его как часть этого семантического звена. Этим единственным значением его является значение "почти".

И, таким образом, единственным правильным переводом семантического звена: "ἐν δὲ ταύτῃ πως" является перевод его словами: "на этой почти", т.е. "почти на этой". А это значит, что Феодор "почти" дошел до семнадцатифутовой линии, т.е. не дошел до нее.

И, таким образом, неопределенным энклитическим наречием "πως" Платон вполне определенно, точно, однозначно указал, что слово "μέχρι" ("до") не включает семнадцатифутовую линию.

Этот неожиданный результат, являющийся следствием семантического анализа фразы: "ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο", опрокидывающий прочно укоренившиеся с глубокой древности и в истории философии и в истории математики традиционные представления, будто Феодор прекратил свои доказательства точно на $\sqrt{17}$, имеет важнейшее значение для открытия метода, которым он доказывал несоизмеримость.

Крупнейший (ныне покойный) немецкий историк математики И.Э.Гофман в октябре 1972 г. писал мне, что главным в проблеме о методе, которым Феодор доказывал несоизмеримость, он считает решение вопроса, почему он остановился точно на $\sqrt{17}$. Такого же мнения придерживались и другие историки математики, занимавшиеся этой проблемой. Правильный же перевод этой фразы Платона доказывает, что этот вопрос не только не является главным, но его вовсе не существует, так как Феодор прекратил свои доказательства вовсе не на $\sqrt{17}$.

В отношении важнейшего слова "πως" ошибка всех историков математики, занимавшихся этой проблемой, заключается в том, что они или не знали, что в этой фразе "πως" это энклитика, или игнорировали это и относили слово "πως", "наклоняли" его (сознательно или несознательно, скорее несознательно, но от этого дело не меняется) к слову "ἐνέσχετο", незаконно превращая энклитику "πως" в проклитику.

Г.Фогт в своем толковании относит "πως" к "ἐνέσχετο", превращая слова "πως ἐνέσχετο" в незаконное семантическое звено [138, 140].

Переводом слова "πως" словами "как-то" (Ван дер Варден, Гел-

лер), "по некоторой причине" (Кнорр) эти историки математики, так же, как Фогт, "наклоняют", как мы сейчас увидим, слово "πως" (сознательно или несознательно) не к "ταύτῃ", а к "ἐνέσχετω". Некоторые историки философии и филологи-классики, как Шлейермахер и Шмидт, попросту не переводят слово "πως". Шлейермахер: "на этой он остановился", Шмидт: "на этом он остановился". А.Ф.Лосев перевел слово "πως" словом "примерно" (в смысле "приблизительно"). Это слово соответствует тому, что "πως" - это энклитика, "наклоняет" "πως" к "ταύτῃ".

Но перевод энклитики "πως" словом "примерно", т.е. "приблизительно", в количественном отношении ошибочен. А.Д.Вейсман в списке значений энклитики "πως" значения "примерно", "приблизительно" не приводит. В пояснении же к этому списку он значение "почти" приравнивает к значению "примерно" в смысле "приблизительно": "сказал почти или примерно так". Но он приравнивает значения слов "почти" и "примерно" не в количественном отношении. А.Ф.Лосев же приравнивает значения этих слов именно в количественном отношении. Слово "примерно", "приблизительно" в количественном отношении может означать примерное, т.е. приблизительное, равенство так, что одна величина может быть и немного меньше, и немного больше другой, т.е. слово "примерно", т.е. "приблизительно", может означать количественное приблизительное равенство и по недостатку, и по избытку. Слово же "почти" означает только "меньше", т.е. означает приблизительное количественное равенство только по недостатку.

В толковом словаре В.Даля [14, 372] читаем: "Почитай, почти, почесть, почесь - нар. без малого, едва не, чуть-не, немногого недостает". Следовательно, В.Даль не приравнивает слово "почти" к слову "примерно". В толковом словаре Д.Н.Ушакова [35, 681] читаем: "почти, нареч. Так, что немного недостает до чего-н.". "При словах, обозначающих количество, меру: около какого-н. количества, без малого". Таким образом, при словах, обозначающих количество, меру, Д.Н.Ушаков дает значение слова "почти", т.е. "около какого-н. количества" в смысле недостатка до этого количества: "без малого".

В нашем же случае энклитика "πως" ("почти") стоит именно при словах, обозначающих количество: "ἐν δὲ ταύτῃ", т.е. "на этой", "на семнадцатифутовой линии". Поэтому в нашем случае энклитика "πως" ("почти") означает только недостаток до этого количества, т.е. до семнадцатифутовой линии.

Греко-российский словарь, составленный Грацинским, дает следующие значения энклитики "πως": "как-нибудь", "каким-нибудь образом", "как-то", "почти", "случайно" [12, 1032]. Греческо-русский

словарь 1848 года дает следующие значения энклитики "πως": "как-нибудь", "каким-нибудь образом", "как-то" [13, 525].

Таким образом, греческо-русские словари (в том числе словарь И.Х.Дворецкого [15, 1447]) значения "примерно" слова "πως" не дают. Русские же толковые словари дают значение слова "почти" в количественном отношении – в смысле недостатка.

В докторской диссертации филолог-классик Ева Закс правильно отнесла энклитику "πως" к "ταύτῃ" и объединила "πως" со словами "ἐν τάυτῃ" написанием этих трех слов и частицы "δὲ" в виде группы "ἐν δὲ ταύτῃ πως" [120, 57], вместо группы "πως ἐνέσχετο" Г.Фогта. Но она не учла того, что только написание этих трех слов и частицы "δὲ" в виде отдельной группы не относит энклитику "πως" к "ταύτῃ".

Энклитику "πως" относит к "ταύτῃ", т.е. объединяет ее с "ἐν δὲ ταύτῃ" в семантическое звено, не написание этой группы, а значение энклитики "πως". Ева Закс истолковала ее в значении "случайно", т.е. в том же значении, в котором ее истолковал Г.Фогт [138, 110].

Но это значение относит энклитику "πως" независимо от воли Евы Закс не к слову "ταύτῃ", а к слову "ἐνέσχετο", т.е. "наклоняет" ее не назад к "ταύτῃ", а вперед к "ἐνέσχετο", незаконно превращая энклитику "πως" в проклитику.

И, таким образом, прекрасный филолог-классик, но не семантик, Ева Закс ошибочным толкованием энклитики "πως" в значении "случайно" невольно повторила ошибку Г.Фогта, которую она пыталась исправить написанием группы "ἐν δὲ ταύτῃ πως".

Проанализируем, может ли неопределенное наречие "πως" "наклоняться" к "ταύτῃ" в значениях: "каким-нибудь образом", "как-нибудь", "некоторым образом", "как-то", "случайно"? Если может, то семантическое звено "ἐν δὲ ταύτῃ πως" читается так: "На этой (семнадцатифутовой линии) каким-нибудь образом, или как-нибудь, или некоторым образом, или как-то, или случайно".

Что значат эти слова? Очевидно то, что "на этой" каким-нибудь образом, или как-нибудь, или некоторым образом, или как-то, или случайно, что-то случилось, что-то произошло, т.е. произошел какой-то процесс. Какой же процесс произошел "на этой" каким-нибудь образом, как-нибудь, некоторым образом, как-то, случайно?

Есть ли ответ на этот вопрос в фразе: "ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο"? Да, есть. Ответом на него является слово "ἐνέσχετο", т.е. глагол.

Согласно новейшему академическому определению глагола [33, 582]: "Глагол – это часть речи, обозначающая процесс...", "Значе-

ние процесса свойственно всем глаголам, независимо от их лексического значения". Слово "ἐνέσχετο" - это третье лицо единственного числа имперфекта страдательного залога глагола "ἐνέχω". Это слово и обозначает процесс, происшедший "на этой" (т.е. на семнадцати футовой линии).

Шлейермахер, Шмидт, Дьѐ перевели слово "ἐνέσχετο", т.е. обозначили этот процесс, словом "остановился". Геллер - словом "перестал". Ван дер Варден - словом "остановился" или "перестал". Кнорр - словами "натолкнулся на трудность". А.Ф.Лосев - словами "остановился", "остановило". Дальше мы увидим, что все эти переводы неточны.

Что означают слова: "каким-нибудь образом", "как-нибудь", "некоторым образом", "как-то", "случайно"? Они означают, каким образом (или способом) произошел этот процесс, происшедший "на этой", т.е. на семнадцатифутовой, линии: каким-нибудь образом, как-нибудь, некоторым образом, как-то, случайно. К чему же относятся эти слова: к линии, на которой произошел процесс, или к процессу, который произошел на ней? Так как они обозначают, каким образом произошел процесс, то ясно, что они относятся к процессу, который произошел на линии, а не к линии, на которой он произошел. А так как этот процесс обозначается словом "ἐνέσχετο", то наречия: "каким-нибудь образом", "как-нибудь", "некоторым образом", "как-то", "случайно", являющиеся, согласно новейшей академической классификации наречий /33, 704/, собственно характеризующими наречиями образа действия, относятся к слову "ἐνέσχετο", а не к слову "ταύτῃ", т.е. "наклоняются" вперед к слову "ἐνέσχετο", а не назад к слову "ταύτῃ".

И, таким образом, значения: "каким-нибудь образом", "как-нибудь", "некоторым образом", "как-то", "случайно" неопределенного наречия "πως" незаконно превращают энклитику "πως" в проклитику. Следовательно, правильным ответом на поставленный вопрос: Может ли неопределенное наречие "πως" в значениях: "каким-нибудь образом", "как-нибудь", "некоторым образом", "как-то", "случайно" "наклонятъся" к слову "ταύτῃ", является следующий: Нет, не может.

Остается единственное значение неопределенного наречия "πως": наречие "почти", относящееся, согласно академической 1960 г. классификации наречий /11, 605/, к количественной группе качественных наречий. Если неопределенное наречие "πως" в значении "почти" может "наклонятъся" к "ταύτῃ", то семантическое звено: "ἐν δὲ ταύτῃ πως" читается так: "На этой (семнадцатифутовой линии) почти", или, что то же: "Почти на этой" (семнадцатифутовой линии).

Что значат эти слова? Очевидно, то, что "почти на этой" что-то случилось, что-то произошло, т.е. "почти на этой" произошел какой-то процесс. Этот процесс называет слово "ἐνέσχετο".

К чему же относится слово "почти"? К этому процессу, т.е. к слову "ἐνέσχετο", или к семнадцатифутовой линии, т.е. к слову "ταύτῃ"? Так как слово "почти" отвечает не на вопрос, каким образом произошел этот процесс, а на вопрос, где произошел этот процесс, то ясно, что оно относится не к этому процессу, а к линии, где он произошел, и указывает, что этой линией является не семнадцатифутовая линия, а "почти" семнадцатифутовая линия.

Таким образом, значение "почти" неопределенного наречия "πως" является единственным значением его, которое "наклоняется" назад к слову "ταύτῃ", а не вперед к слову "ἐνέσχετο", т.е. является единственным значением его, соответствующим тому, что "πως" - это энклитика, а не проклитика.

Что же такое указание линии, на которой произошел этот процесс? Это указание меры той линии, на которой он произошел, что соответствует тому, что слово "почти" относится к количественной группе качественных наречий, или, согласно новейшей академической классификации наречий /33/, является наречием степени или меры. Причем слово "почти" Платон употребляет в его точном смысле: "немного недостает до чего-н.", т.е. этим словом он точно указывает меру линии, на которой произошел этот процесс, как меньшую, чем семнадцатифутовая линия.

Поэтому приравнивание слова "почти" по значению к слову "примерно", "приблизительно" является в данном случае грубейшей принципиальной ошибкой, искажающей смысл слов Платона. Слова "примерно" или "приблизительно" могут значить, что последняя линия, которую чертил Феодор, была и меньше, и больше семнадцатифутовой. Слово же "почти" в его точном смысле: "немного недостает до чего-н." точно указывает, что эта линия была не больше, а меньше семнадцатифутовой.

Указание Платона словом "πως", что процесс, обозначенный глаголом "ἐνέσχετο", произошел не на семнадцатифутовой линии, а "почти" на семнадцатифутовой линии, т.е. на линии, меньшей, чем семнадцатифутовая, является точным указанием того, что слово "μέχρι" ("до") не включает семнадцатифутовую линию, - указанием чрезвычайно важным для открытия метода, которым Феодор доказывал несоизмеримость.

Незнание или непринятие во внимание того, что слово "μέχρι" бисемантично, неумение произвести семантический анализ фразы:

"ἐν δὲ τούτῳ πως ἐνέσχετο" или непонимание важности его привели ко всеобщей уверенности, что Феодор прекратил свои доказательства точно на $\sqrt{17}$. Эта ошибочная всеобщая уверенность привела уже в древности к попыткам найти причину, по которой он прекратил свои доказательства точно на $\sqrt{17}$. Неизвестный древний комментатор [44] предложил даже три гипотезы, одна другой смехотворнее, как заметил уже Г.Фогт.

Но и позднейшие комментаторы, как упомянуто выше, считали, что главным в проблеме о методе, которым Феодор доказывал несоизмеримость, является вопрос, почему он остановился точно на $\sqrt{17}$. Были предложены самые различные гипотезы. Но так как Платон указал, что Феодор прекратил свои доказательства не на семнадцатифутовой линии, то все эти гипотезы, основанные на непонимании слов Платона, беспредметны.

Но возникают следующие вопросы. Что вынудило Феодора прекратить свои доказательства "почти на этой", т.е. почти на семнадцатифутовой линии? Почему Платон длину последней линии, которую чертил Феодор, не указал точно, а ограничился указанием ее длины, как "почти" семнадцатифутовой, т.е. меньшей, чем 17 футов?

Можно ли ответить на эти, на первый взгляд неразрешимые, вопросы? Оказывается, можно. Ответить на них позволяют археологические данные, которые позволяют ответить и на вопрос, о каком именно процессе, происшедшем "почти" на семнадцатифутовой линии, говорит Платон словом "ἐνέσχετο", т.е. позволяют правильно перевести это слово.

Археологические данные

В конце XIX в. турецкий султан разрешил немецкому археологу К.Хуману произвести раскопки древнегреческого города Приены в Малой Азии (основанного во II в. до н.э.) у реки Меандр на мысе Микале. Работа по раскопкам этого города была не только трудной, но и опасной, так как вредные испарения территории, заболоченной часто менявшей русло рекой Меандр, грозили болезнями. По этой причине для К.Хумана эта экспедиция окончилась трагически: не доведя раскопок до конца, он тяжело заболел и умер.

Работу по раскопкам Приены продолжил его сотрудник Т.Виганд, возглавивший экспедицию после смерти К.Хумана. В 1904 г. совместно с Г.Шрадером он опубликовал результаты экспедиции в книге "Приена" [142], содержащей подробное описание этого города.

Были раскопаны руины города с прямоугольной сеткой улиц (вероятно, после неоднократных перестроек) по системе знаменитого

афинского архитектора Гипподама (V в. до н.э.). Продольные улицы шли уступами и пересекались шестнадцатью поперечными улицами-лестницами, шедшими от подошвы горы Микале к вершине и разделявшими город на равные прямоугольные кварталы.

Для нашего исследования важно то, что наряду с руинами других интереснейших зданий (храмы Афины Паллады и Зевса Олимпийского, и др.) были раскопаны руины двух гимнасиев, в одном из которых была раскопана экседра (зал) для духовного воспитания греческих юношей, называвшаяся эфебеем ("ἔφηβος" - юноша).

В книге приведен план с размерами раскопанной части этого гимнасия (он был раскопан не полностью), включая эфебей, и аксонометрия эфебея, с указанием местоположения учителя. Особенно важно то, что размеры эфебея: длина - 9,49 м, ширина - 6,5 м, местоположение учителя и сообщение римского архитектора I в. до н.э. Витрувия, современника Юлия Цезаря и Августа, написавшего капитальное сочинение о греческой архитектуре: "Десять книг об архитектуре" (есть русский перевод), о том, что эфебей был оборудован скамьями, стоявшими у стен /8, 108/, позволяют вычислить бывшие до сих пор (насколько я знаю) неизвестными размеры учебной песчаной площадки, игравшей в греческих гимнасиях роль классной доски.

После произведенной Солоном реформы по унификации мер и весов обыкновенный аттический фут был равен 297 мм = 29,7 см = = 0,297 м /6, 329/. Таким образом, в эпоху Платона длина эфебея в аттических футах была равна - 9,49 : 0,297 = 32 фута, ширина - 6,5 : 0,297 = 22 фута. Вычисление, которое мы приводим ниже, показывает, что длина учебной песчаной площадки была равна 16 футам ~4,75 м, т.е. половине длины эфебея, что естественно.

Таким образом, максимальная длина линий, которые мог чертить Феодор, была равна 16 футам. Более длинных линий он не мог чертить, так как был стеснен длиной учебной песчаной площадки. Это позволяет правильно перевести слово "ἐνέσχετο".

Глагол "ἐνέχω" значений "останавливаться", "переставать", "наталкиваться" не имеет. Поэтому все приведенные выше переводы слова "ἐνέσχετο" ошибочны. Среди значений глагола "ἐνέχω", которые дает словарь А.Д.Вейсмана /9, 435/, есть значения: "находиться (в каких-л. узах)", "быть связанным чем-л."; среди значений, которые дает словарь И.Х.Дворецкого /15, т.1, 542/, есть значения: "связанный или скованный"; среди значений, которые дает словарь Грацинского /12, 419/, есть значение "быть стесненным" (в словаре - "быть стеснену").

Так как Феодор был стеснен длиной учебной песчаной площадки,

то этому соответствует значение глагола "ἐνέχω", которое дает словарь Грацинского: "быть стесненным". Следовательно, правильный перевод слова "ἐνέσχετο": "был стеснен". Поэтому Платон и употребляет глагол "ἐνέχω" в страдательном залоге. Феодор был стеснен не на пятнадцатифутовой линии, так как до конца учебной песчаной площадки оставался еще целый фут, и не на семнадцатифутовой линии, так как он ее не мог чертить, а именно на "почти" семнадцатифутовой линии, т.е. на шестнадцатифутовой линии.

Почему же Платон говорит: "до семнадцатифутовой линии; почти на этой был стеснен", а не: "до шестнадцатифутовой линии; на этой был стеснен". (т.е. без слова "почти", точно указывая линию, на которой Феодор был стеснен длиной учебной песчаной площадки)? Ответ очевиден. Если бы он сказал: "до шестнадцатифутовой", то можно было бы подумать, что Феодор чертил не только линии, длина которых выражалась продолговатыми числами, но и линии, длина которых выражалась квадратными числами.

Таким образом, слова: "до шестнадцатифутовой" могли бы ввести в заблуждение. Словами же "до семнадцатифутовой" Платон подчеркивает, что длина линий, которые чертил Феодор, выражалась продолговатыми числами. А так как семнадцатифутовую линию Феодор не мог чертить, то словами: "почти на этой (на семнадцатифутовой линии. - М.П.) был стеснен" Платон точно указал, что длина последней линии, которую чертил Феодор, была равна 16-ти футам.

Возникает вопрос. Зачем ему понадобилось говорить о семнадцатифутовой линии, которую Феодор не мог чертить? Ведь он мог точно указать длину последней линии, которую чертил Феодор, не косвенным путем: словами "до семнадцатифутовой; почти на этой был стеснен", а прямым путем, указав, что длина последней линии, которую чертил Феодор, была равна 15-ти футам. Ответ очевиден. Если бы Платон сказал, что длина последней линии, которую чертил Феодор, была равна 15-ти футам, то можно было бы подумать, что метод Феодора позволял доказать несоизмеримость с однофутовой линией только таких линий, квадрирующих продолговатые числа, которые квадрировали только такие продолговатые числа, величина которых не превышала длину учебной песчаной площадки.

Платону же надо было указать, что метод Феодора позволял доказать несоизмеримость с однофутовой линией бесконечного множества линий, квадрирующих любые продолговатые числа ("ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο"). Поэтому он и говорит о линии длиной 17 футов, превышающей длину учебной песчаной площадки, которую Феодор не мог чертить, указывая этим, что для метода Феодо-

ра длина линий, которые он чертил, не имела значения, и если бы он не был стеснен длиной учебной песчаной площадки, то продолжал бы доказательства. Таким образом, словами: "до семнадцатифутовой; почти на этой был стеснен" Платон достиг четырех целей:

1. Указал, что Феодор чертил только такие линии, длина которых выражалась продолговатыми числами.

2. Указал, что так как Феодор был стеснен почти на семнадцатифутовой линии, то на пятнадцатифутовой линии он еще не был стеснен, т.е. что длина учебной песчаной площадки была больше 15-ти футов. А так как словами: "почти на этой (семнадцатифутовой линии. - М.П.) был стеснен" он указал, что длина учебной песчаной площадки была меньше 17-ти футов, то, так как длина учебной песчаной площадки была целочисленной, Платон точно указал, что длина ее была равна 16-ти футам.

3. Указал, что длина последней линии, которую чертил Феодор, была равна 15-ти футам.

4. Указал, что метод Феодора не зависел от длины линий, которые он чертил, т.е. был не частным, а общим, позволявшим доказать несоизмеримость с однофутовой линией бесконечного множества линий, квадрирующих любые продолговатые числа.

Так как с помощью евклидового антифайрезиса (Евкл. X-2) нельзя доказать бесконечность множества таких линий, т.е., в нашей терминологии, бесконечность множества иррациональных квадратных корней, то метод Феодора был основан не на предложении Евкл. X-2. Следовательно, правильный перевод начала рассказа Теэтета обнаруживает ошибку Г.Г.Цейтена, полагавшего, что метод Феодора был основан на предложении Евкл. X-2, - ошибку, которую повторили Б.Л.Ван дер Варден, З.Геллер, И.Э.Гофман и др.

А так как Феодор проводил свои доказательства около линий длиной три, пять и т.д. футов, то его метод не был и доказательством от противного, как ошибочно полагали Г.Фогт, Ж.Итар, В.Кнорр и др.

Возникает вопрос, какова причина точного соответствия словам Платона длины учебной песчаной площадки эфебея в Приене? Ведь эфебей, в котором Феодор проводил свои доказательства, был не в Приене, а в Афинах, эфебей же в Приене был даже не в самой Греции, а в ее малоазиатской колонии. Не является ли это точное соответствие случайным?

Можно ли ответить на этот вопрос? Полагаю, можно. Считаю, что ответить на него позволяет тот факт, что сеть улиц колониального древнегреческого города Приены была системы афинского архи-

тектора Гипподама. Гипподам же был современником Феодора Киренского - оба жили в V в. до н.э. Поэтому весьма вероятно, что в V в. до н.э. в афинских гимнасиях экседры для духовного воспитания греческих юношей строились, как мы бы теперь сказали, по типовому проекту, созданному Гипподамом.

А так как влияние Гипподама на строительство (или перестройку) Приены доказывает сеть улиц его системы, то весьма вероятно, что, во-первых, Приена перестраивалась по системе Гипподама в V в. до н.э. и при его непосредственном участии, во-вторых, экседры для духовного воспитания греческих юношей - "эфебеи" строились в Приене по образцу афинских. И поэтому точное соответствие длины учебной песчаной площадки эфебея в Приене длине учебной песчаной площадки эфебея в Афинах является закономерным, а не случайным. Точное указание Платоном длины (16 футов) учебной песчаной площадки эфебея, в котором учил Феодор, имеет еще то немаловажное значение, что показывает, как велико было влияние Афин на застройку древнегреческих колониальных городов, и даже в таких деталях, как строительство эфебеев.

Приводим вычисление размеров учебной песчаной площадки эфебея в Приене, следовательно, и в Афинах (рис. 26). Учитывая, что проход между скамьями и учебной песчаной площадкой должен был

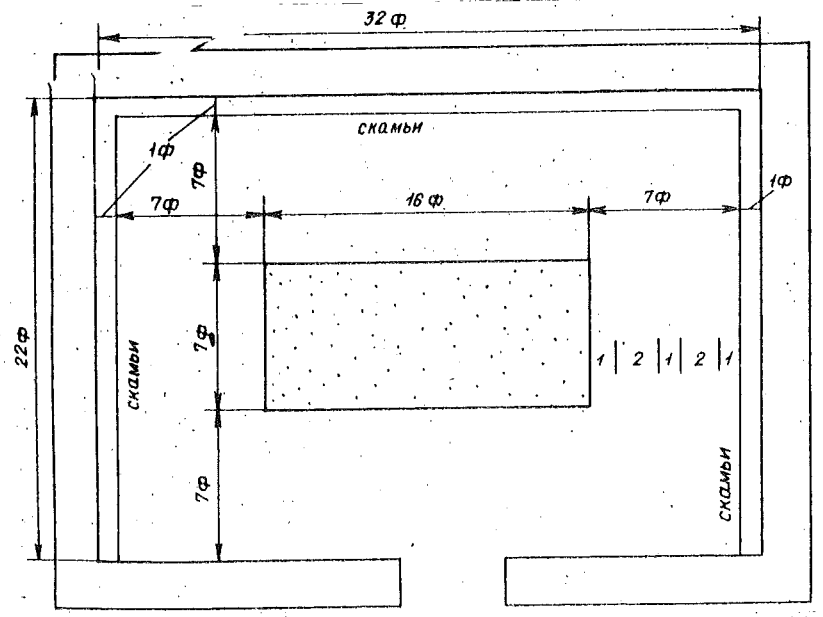


Рис. 26

обеспечивать возможность встречного движения, и принимая ширину в плечах греческого юноши 2 фута, расстояние между идущими 1 фут, расстояние между идущим и учебной песчаной площадкой 1 фут, расстояние между идущим и скамьей 1 фут, ширину скамьи 1 фут, получаем величину прохода между скамьями и учебной песчаной площадкой: 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7 футов ~ 2,1 м. Следовательно, проход между скамьями и учебной песчаной площадкой был в пределах нормативной ширины коридоров учебных заведений согласно действующим в СССР Строительным Нормам и Правилам (СНиП).

Длина учебной песчаной площадки, следовательно, была равна: 32 - 1 - 7 - 7 - 1 = 16 футов (рис. 26).

Так как учитель был обращен ко входу в эфебей спиной, то со стороны входа в эфебей не было скамей. Поэтому ширина учебной песчаной площадки была равна: 22 - 7 - 7 - 1 = 7 футов, т.е. почти половине ее длины, что естественно.

Возможно, что со стороны входа в эфебей проход между стеной и учебной песчаной площадкой был не 7, а 6 футов ~1,8 м (что является минимальной шириной коридоров учебных заведений, допускавшейся СНиПом). Тогда ширина учебной песчаной площадки была равна: 22 - 6 - 7 - 1 = 8 футов. В этом случае отношение ширины учебной песчаной площадки к ее длине было равно отношению ее длины к длине эфебея, равному 1/2. Это простое отношение могло быть простым модулем, определявшим размеры учебной песчаной площадки.

Правильный перевод начала рассказа Теэтета

Мы можем теперь правильно перевести начало рассказа Теэтета, сообщающее об уроке Феодора. Правильный перевод его гласит: "О линиях, представляющих квадратами (квадрирующих) продолговатые числа, написал нам нечто присутствующий здесь Феодор, около трехфутовой (вспомогательной. - М.П.) линии, также пятифутовой доказывая, что по длине (они, т.е. линии, квадрирующие продолговатые числа. - М.П.) несоизмеримы с линией, длиной в один фут.

И таким образом (т.е. таким же образом. - М.П.) каждую (линию, квадрирующую продолговатое число. - М.П.) поодиночке выбирая (дошел. - М.П.) до семнадцатифутовой (вспомогательной. - М.П.) линии; почти на этой был стеснен. Так как обнаружилось бесконечное (бесчисленное) множество линий, несоизмеримых с однофутовой линией, то нам (Теэтету и его другу - юноше Сократу. - М.П.) пришло на ум нечто такое..."

На этом Теэтет закончил сообщение об уроке Феодора и дальней-

ший рассказ посвятил произведенному им разбиению чисел на два класса: квадратные и продолговатые числа.

Обратимся теперь к цели этого рассказа. Поводом к нему послужило следующее. Теэтет говорит Сократу [111, 147 C]: "ἀτὰρ κυνδυνεύεις ἐρωτᾶν οἷον καὶ αὐτοῖς ἤναγκος εἴσῃλυε διαλεγομένοις, ἐμοί τε καὶ τῷ σῷ ὁμονύμῳ τούτῳ Σωκράτει". В точном переводе это значит: "Однако ты рискуешь спрашивать (т.е. спрашиваешь. – М.П.) о том, что также нам самим недавно пришло на ум, беседуя, мне и твоему тезке этому Сократу". Сократ спрашивает: "Что же это такое, Теэтет?" И Теэтет начинает свой рассказ.

Таким образом, цель этого рассказа – отчет Сократу о том, что Теэтету после урока Феодора пришло на ум во время беседы с его другом, юношей Сократом, т.е. этот рассказ – это отчет о собственных достижениях Теэтета. Поэтому урок Феодора в этом рассказе – это только фон, только вспомогательное сообщение, нужное Теэтету для того, чтобы были понятными его собственные достижения. Поэтому Теэтет говорит об уроке Феодора очень кратко, не как о главном, а как о вспомогательном.

Так как этот рассказ является отчетом о его собственных достижениях, то Теэтет называет линии, несоизмеримость которых с однофутовой линией доказал Феодор, именем, которое он сам (Теэтет) дал им: "δυνάμεις", т.е. линии, квадрирующие продолговатые числа, по длине несоизмеримые с теми линиями, которые квадрируют квадратные числа. В 148 A Теэтет говорит, что этим именем назвал эти линии он сам: "ὡρισάμεθα", т.е. "мы (Теэтет и его друг – юноша Сократ. – М.П.) определили" (это понятие, т.е. "δύνᾰμις". – М.П.). Так как термин "δυνάμεις", которым Теэтет называет эти линии, принадлежит ему – он так гордился им, что сообщил о нем Сократу как о своем большом достижении, то возникает вопрос: Как же называл эти линии Феодор?

Можно ли ответить на этот, на первый взгляд неразрешимый, вопрос? Вопрос этот очень важен, так как то, как называл эти линии Феодор, связано с методом, которым он доказывал несоизмеримость их с однофутовой линией. Поэтому, чтобы ответить на этот вопрос, надо открыть метод, которым он доказывал несоизмеримость. И, таким образом, мы оказываемся перед труднейшей историко-математической проблемой.

Можно ли решить эту труднейшую, на первый взгляд неразрешимую, историко-математическую проблему, над решением которой безуспешно бились историки математики древности, XIX в., безуспешно бились и бьются историки математики XX в.? Оказывается, можно.

Решить ее помогает адекватный перевод начала рассказа Теэтета и сохранившееся благодаря историческому счастью сообщение пифагорейцев о первом варианте их "изящной" теоремы о сторонах и диагоналях, дошедшее до нас в передаче Прокла. Это сообщение пифагорейцев позволяет выявить, что несоизмеримость была ими открыта благодаря открытию несоизмеримости диагонали и стороны квадрата (вопреки мнению Геллера, полагавшего, что несоизмеримость была открыта исследованиями, относившимися не к квадрату, а к звездообразному пятиугольнику).

Правильный же перевод начала рассказа Теэтета позволяет понять, что метод Феодора доказательства несоизмеримости был обобщением метода, которым пифагорейцами была открыта несоизмеримость диагонали и стороны квадрата, распространением этого метода на любые прямоугольники с несоизмеримыми диагональю и стороной.

Это является ответом на вопрос, почему Феодор начинает свои доказательства несоизмеримости не доказательством несоизмеримости диагонали и стороны квадрата. Он начинает их с прямоугольника, следующего за квадратом (со сторонами 1 и $\sqrt{2}$, квадрат $1^2 + \sqrt{2}^2 = 3$, диагонали которого выражаются числом 3, следующим после числа 2, которым выражается квадрат $1^2 + 1^2 = 2$ диагонали квадрата со стороной 1), так как несоизмеримость диагонали и стороны квадрата была открыта до него.

Так как Эвдем сообщает, что несоизмеримость была открыта Пифагором, то им была открыта именно несоизмеримость диагонали и стороны квадрата. Таким образом, это открытие было сделано в VI в. до н.э.

Пифагорейское открытие несоизмеримости диагонали и стороны квадрата

Из сообщения Прокла мы знаем, что первый вариант их изящной теоремы о сторонах и диагоналях пифагорейцы основали на частном случае принадлежащего им предложения Евкл. II-10, в котором они отрезок ГД полагали диагональю, а отрезок АВ = ВГ – стороной квадрата (рис. 13).

Естественно, что они рассматривали и аналогичный частный случай принадлежащего им обращения предложения Евкл. II-10 – предложение Евкл. II-9. Этот частный случай предложения Евкл. II-9 и приводит к открытию несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

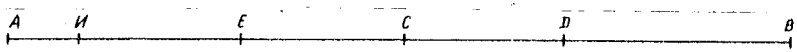


Рис. 27

В более привычных обозначениях (рис. 21 и 27, где $AC = CB$), чем обозначения на рис. 13, предложение Евкл. II-9 гласит:

$$AD^2 + BD^2 = 2AC^2 + 2CD^2. \qquad (21)$$

Если положить отрезок AD диагональю, а отрезок AC – стороной квадрата, то в равенстве (21) $AD^2 = 2AC^2$. Следовательно, $BD^2 = 2CD^2$. Это значит, что и отрезки DB и CD являются диагональю и стороной квадрата.

Будем теперь искать наибольшую общую меру отрезков AD и AC, т.е. диагонали и стороны квадрата, методом взаимного отнятия, так называемым антифайрезисом (Евкл. X-2).

Сторону AC квадрата можно отнять от его диагонали AD один раз. Остатком будет отрезок CD. Для того чтобы продолжить антифайрезис, надо остаток CD отнять от стороны AC квадрата столько раз, сколько возможно.

Так как $AC = CB$ и так как отрезок DB является диагональю квадрата, стороной которого является остаток CD, то отнять остаток CD от стороны AC столько раз, сколько возможно, позволяет равный ей отрезок CB. Так как сторону квадрата можно отнять от его диагонали один раз, то остаток CD можно отнять от отрезка DB один раз. Следовательно, остаток CD можно отнять от отрезка CB, следовательно, и от равного ему отрезка AC, т.е. стороны AC квадрата, два раза. Следовательно, мы можем отложить остаток CD на стороне AC квадрата два раза. Произведем это действие отрезками EC и HE (рис. 27), полагая их равными отрезку CD. В остатке будет отрезок AH, являющийся вторым остатком.

Чтобы продолжить антифайрезис, надо второй остаток AH отнять от первого остатка CD столько раз, сколько возможно. Как это сделать? Это позволяет сделать предложение Евкл. II-9.

Так как первый остаток $EC = CD$ – это сторона, а отрезок $AE = DB$ – это диагональ нового, меньшего, чем первоначальный, квадрата, то мы можем продолжить антифайрезис следующим образом.

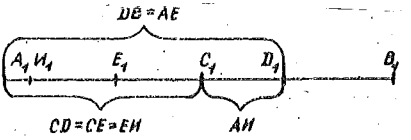


Рис. 28

Назовем первый остаток CD стороной A_1C_1 меньшего квадрата, чем первоначальный, а отрезок $AE = DB$ – диагональю A_1D_1 этого меньшего квадрата (рис. 28).

Тогда второй остаток AH будет равен отрезку C_1D_1. Будем искать теперь с помощью антифайрезиса общую наибольшую меру стороны A_1C_1 и диагонали A_1D_1 этого меньшего квадрата.

Отнимем сторону A_1C_1 от диагонали A_1D_1 один раз. Остатком

будет отрезок C_1D_1. Этот первый остаток во втором квадрате со стороной A_1C_1 равен второму остатку AH в первом квадрате со стороной AC. Для того чтобы отнять его от стороны A_1C_1, присоединим к стороне A_1C_1 равный ей отрезок C_1B_1.

Тогда, согласно предложению Евкл. II-9, имеем:

$$A_1D_1^2 + D_1B_1^2 = 2A_1C_1^2 + 2C_1D_1^2. \qquad (21)$$

А так как $A_1D_1^2 = DB^2 = 2A_1C_1^2 = 2CD^2$, то $D_1B_1^2 = 2C_1D_1^2$. Следовательно, отрезки D_1B_1 и C_1D_1 снова являются диагональю и стороной третьего, еще меньшего квадрата.

И, таким образом, аналогично предыдущему, отрезок C_1D_1 можно отнять от отрезка D_1B_1 один раз, а от отрезка C_1B_1, равного стороне A_1C_1 квадрата, опять два раза, т.е. второй остаток AH можно отнять от первого остатка CD опять два раза, с остатком меньшим, чем второй остаток AH.

Этот рекуррентный процесс можно продолжить и получить бесконечную последовательность остатков CD, $C_1D_1, \ldots, C_nD_n$, в которой каждый следующий меньший остаток C_nD_n будет укладываться в предыдущем большем остатке $C_{n-1}D_{n-1}$ два раза, с остатком меньшим, чем остаток C_nD_n. Следовательно, следующий остаток C_nD_n никогда не уложится в предыдущем остатке $C_{n-1}D_{n-1}$ целое число раз без остатка. А это значит, что первоначальные отрезки AC и AD, т.е. сторона и диагональ квадрата, не имеют общей меры, т.е. несоизмеримы.

Таким образом, мы воспроизводим пифагорейский ход мыслей о существовании несоизмеримости (мы видим, что это доказательство несоизмеримости диагонали и стороны квадрата есть не что иное, как геометрическое разложение $\sqrt{2}$ в лагранжеву цепную дробь $2 = 1 + \frac{1}{2+\ldots}$).

Открытие метода Феодора

Обратим теперь внимание на то, что построение, приведенное на рис. 27, имеет сходство с построением, описанным Платоном.

Если положить сторону $AC = CB$ квадрата равной одному футу, то для доказательства несоизмеримости диагонали AD квадрата с его стороной AC мы начертили линию AB, длина которой равна двум футам. Платон же говорит, что для своих доказательств несоизмеримости Феодор также чертил подобные линии, только он начинал с черчения не двухфутовой, а трехфутовой линии.

Для доказательства несоизмеримости диагонали и стороны квадрата мы около начерченной нами двухфутовой линии что-то написали.

Платон же говорит, что и Феодор для его доказательств несоизмеримости около начерченных им трехфутовой, пятифутовой и т.д. линий что-то написал.

Поэтому возникает естественная мысль, что метод Феодора был расширением открытого Пифагором метода доказательства несоизмеримости диагонали и стороны квадрата -- распространением его на любые прямоугольники с несоизмеримыми диагональю и стороной. И, таким образом, мы снова оказываемся перед труднейшей историко-математической проблемой.

Каким же образом удалось Феодору обнаружить, что кроме квадрата существует бесчисленное множество других прямоугольников с несоизмеримыми диагональю и стороной? Каким образом ему удалось распространить открытый Пифагором метод доказательства несоизмеримости диагонали и стороны квадрата на любой прямоугольник с несоизмеримыми диагональю и стороной? Другими словами, что именно написал Феодор около начерченной им линии длиной три фута, пять футов и т.д.?

Можно ли воспроизвести эту, впервые решенную Феодором, математическую проблему? Оказывается, можно.

Так как предложение Евкл. II-9 пригодно только для открытия несоизмеримости диагонали и стороны квадрата, то естественно, что для распространения доказательства Пифагора на другие прямоугольники надо было прежде всего найти обобщение предложения Евкл. II-9. И мы видели, что обобщение его пифагорейцами было действительно найдено (и надо полагать, именно пифагорейцем Феодором Киренским).

Обобщение его гласит: Если прямая AB разделена в точках C и D на три произвольные части (рис. 25), то имеет место равенство

$$AD^2+\left(\frac{DB}{K}\right)^2 = AC^2+(K\cdot AC)^2+\left(\frac{CD}{K}\right)^2+CD^2. \qquad (27)$$

Если $K = 1$, то предложение (27) переходит в предложение Евкл. II-9. Предложение (27) можно представить в четырехчленной форме

$$AD^2+\frac{1}{K^2}DB^2=(1+K^2)\,AC^2+\left(1+\frac{1}{K^2}\right)CD^2. \qquad (27а)$$

И так как $K^2=\frac{CB}{AC}$, $\frac{1}{K^2}=\frac{AC}{CB}$, то $1+K^2=1+\frac{CB}{AC}=\frac{AC+CB}{AC}=\frac{AB}{AC}$,

$$1+\frac{1}{K^2}=(1+K^2)\cdot\left(\frac{1}{K^2}\right)=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{CB}=\frac{AB}{CB}.$$

Следовательно, предложение (27) можно представить также в следующей форме:

$$\frac{AC}{CB}DB^2+AD^2=\frac{AB}{AC}AC^2+\frac{AB}{CB}CD^2. \qquad (27б)$$

Если прямая AB разделена пополам, т.е. если $AC = CB$, то $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{CB} = 2$.

И если, аналогично тому как поступали пифагорейцы в предложении Евкл. II-10, положить

$$AD^2 = \frac{AB}{AC} AC^2, \qquad (27в)$$

то, если $\frac{AB}{AC} = 2$, будет $AD^2 = 2AC^2$, т.е. опять AC является стороной, а AD – диагональю квадрата.

Для того же чтобы AC и AD являлись стороной и диагональю другого прямоугольника, надо, чтобы отношение $\frac{AB}{AC}$, являющееся произвольным, было равно не двойке, а другому числу.

Если положить отношение $\frac{AB}{AC}$ равным 3, то $AD^2 = 3AC^2$, и если опять положить отрезок AC равным одному футу, то $AD^2 = 3 \cdot 1^2 = 3$, т.е. отрезок $AD = \sqrt{3}$ будет диагональю прямоугольника со сторонами 1 и $\sqrt{2}$ (рис. 20): $1^2 + \sqrt{2}^2 = 3$, линия же $AB = 3AC$ будет равна трем футам, а линия $CB = AB - AC$ будет равна $3 - 1 =$ двум футам (рис. 29).

Рис. 29

Для того чтобы распространить пифагорово доказательство несоизмеримости диагонали и стороны квадрата на этот прямоугольник, надо опять искать наибольшую общую меру диагонали AD этого прямоугольника и его стороны AC методом евклидового взаимного отнятия отрезков (евклидового антифайрезиса) (Евкл. X-2).

Остатком от отнятия стороны AC от диагонали AD является отрезок CD. Так как если в равенстве (27б) $AD^2 = \frac{AB}{AC} AC^2$, то и $\frac{AC}{CB} DB^2 = \frac{AB}{CB} CD^2$, следовательно, если $\frac{DB^2}{CD^2} = \frac{AB \cdot CB}{CB \cdot AC} = \frac{AB}{AC}$, то

$$DB^2 = \frac{AB}{AC} CD^2. \qquad (27д)$$

Но поскольку мы положили $\frac{AB}{AC}$ равным трем, то $DB^2 = 3CD^2$.

Следовательно, отрезки CD и DB являются стороной и диагональю прямоугольника, подобного исходному прямоугольнику со стороной AC и диагональю AD. Для того чтобы продолжить евклидов антифайрезис, надо остаток CD отнять от стороны AC столько раз, сколько возможно.

Так как диагональ AD меньше двух (если бы она была равна двойке, то квадрат ее был бы равен четверке, а он равен тройке), то остаток CD от отнятия $AC = 1$ от AD меньше единицы. Следовательно, его можно отнять от стороны $AC = 1$ и продолжить антифайрезис. Дальнейшее продолжение евклидового антифайрезиса позволяет то, что отрезки CD и DB являются стороной и диагональю прямоугольника, подобного начальному, а отрезок AC в два раза меньше, чем отрезок CB.

С помощью рассуждения, аналогичного приведенному выше для квадрата 21, можно обнаружить, что каждый следующий меньший остаток $C_n D_n$ укладывается в предыдущем большем остатке $C_{n-1} D_{n-1}$ попеременно или один раз с остатком, меньшим, чем остаток $C_n D_n$, или два раза с остатком, меньшим, чем остаток $C_n D_n$, и этот процесс получения таких остатков $C_n D_n$ и $C_{n-1} D_{n-1}$ бесконечен, т.е. что остаток $C_n D_n$ никогда не уложится в остатке $C_{n-1} D_{n-1}$ целое число раз без остатка. А это значит, что сторона AC и диагональ AD несоизмеримы.

Аналогично предыдущему этот антифайрезис, доказывающий их несоизмеримость, есть не что иное, как геометрическое разложение $\sqrt{3}$ в лагранжеву цепную дробь, только в случае квадрата она была одночленной, в случае же семейства прямоугольников, подобных прямоугольнику со сторонами 1 и $\sqrt{2}$, она является двучленной.

Таким образом, с помощью обобщения (27б) предложения Евкл. II-9 и евклидового антифайрезиса мы распространили пифагорово доказательство несоизмеримости диагонали и стороны квадрата еще на одно семейство прямоугольников: подобных прямоугольнику со сторонами 1 и $\sqrt{2}$.

Но возможности евклидового антифайрезиса, т.е. метода нахождения наибольшей общей меры двух отрезков, в распространении пифагорова доказательства несоизмеримости диагонали и стороны квадрата на другие прямоугольники, с помощью обобщения (27б) предложения Евкл. II-9, только этим семейством прямоугольников и ограничиваются.

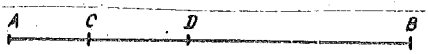


Рис. 30

Если в равенстве (27в) положить $\frac{AB}{AC} = 5$, то $AD^2 = 5AC^2$.

И если опять положить отрезок AC равным одному футу, то $AD^2 = 5 \cdot 1^2 = 5$, т.е. отрезок $AD = \sqrt{5}$ будет диагональю прямоугольника со сторонами 1 и 2 (рис. 20), линия же $AB = 5AC$ будет равна пяти футам, а линия $CB = AB - AC$ – четырем футам (рис. 30).

Для того чтобы распространить пифагорово доказательство несоизмеримости диагонали и стороны квадрата на этот прямоугольник, надо опять искать наибольшую общую меру диагонали AD этого прямоугольника с его стороной AC методом евклидового антифайрезиса (Евкл. X-2). Снова остатком от отнятия стороны AC от диагонали AD является отрезок CD.

Но при одном взгляде на рис. 30 видно, что дальнейшее продолжение евклидового антифайрезиса невозможно, так как остаток CD больше стороны AC и поэтому его нельзя отнять от AC. Это происходит потому, что диагональ AD прямоугольника со сторонами 1 и 2 больше двойки. Больше же двойки она потому, что если бы она была равна двойке, то ее квадрат был бы равен четверке, а он равен пятерке.

Но текст Платона доказывает, что Феодор доказал несоизмеримость диагонали со стороной не только в семействе прямоугольников, подобных прямоугольнику со сторонами 1 и $\sqrt{2}$, но доказал, что существует бесчисленное множество других семейств прямоугольников с несоизмеримыми диагональю и стороной.

И так как для доказательства этого он чертил единообразные вспомогательные линии длиной 3, 5 и т.д. футов, то ясно, что его метод доказательства был единообразным для любого прямоугольника, в том числе и для семейства прямоугольников, подобных прямоугольнику со сторонами 1 и $\sqrt{2}$. Вспомогательные линии, которые он чертил, свидетельствуют, кроме того, что его метод не был методом доказательства от противного.

Поэтому можно предположить, что его метод был также антифайрезисом. А так как евклидов антифайрезис позволяет с помощью обобщения (27б) предложения Евкл. II-9 доказать несоизмеримость диагонали и стороны только в семействе прямоугольников, подобных прямоугольнику со сторонами 1 и $\sqrt{2}$ (в своей прекрасной работе /139, 696-700/ Б.Л.Ван дер Варден показал, как можно с помощью евклидового антифайрезиса доказать иррациональность не только $\sqrt{3}$, но и $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ и т.д. Но его метод не соответствует описанию Платона и не позволяет доказать бесконечность множества иррациональных квадратных корней. Поэтому он не является методом Феодора), то ясно, что Феодор в своих доказательствах евклидовым антифайрезисом не пользовался, что им был открыт какой-то другой антифайрезис.

И так как единообразие линий, которые он чертил, доказывает, что его метод был единообразным для всех его доказательств, то ясно, что он не пользовался евклидовым антифайрезисом и для доказательства несоизмеримости диагонали и стороны также в семействе прямоугольников, подобных прямоугольнику со сторонами 1 и $\sqrt{2}$.

То же, что он начинает свои доказательства именно с этого семейства прямоугольников, а не с семейства квадратов, доказывает, что до него была открыта только несоизмеримость диагонали и стороны квадрата, т.е. что до него никто не пошел дальше открытия Пифагора, что до него никто не обобщил предложение Евкл. II-9 и не пользовался евклидовым антифайрезисом для доказательства с помощью этого обобщения несоизмеримости диагонали и стороны в семействе прямоугольников, подобных прямоугольнику со сторонами 1 и $\sqrt{2}$.

Следовательно, чтобы обнаружить, что кроме семейства квадратов существует бесчисленное множество других семейств прямоугольников с несоизмеримыми диагональю и стороной, только обобщение предложения Евкл. II-9 и евклидов антифайрезис оказались недостаточными. Надо было еще открыть новый метод нахождения общей меры двух отрезков, который позволил бы преодолеть ограниченность евклидового антифайрезиса, позволил бы с помощью обобщения (27б) предложения Евкл. II-9 искать общую меру диагонали и стороны не только в семействе прямоугольников, подобных прямоугольнику со сторонами 1 и $\sqrt{2}$, но и в семействах других прямоугольников.

Таким образом, чтобы распространить открытие Пифагора на другие семейства прямоугольников, надо было решить две труднейшие математические проблемы:

1. Найти обобщение (расширение) предложения Евкл. II-9.
2. Найти обобщение (расширение) евклидового антифайрезиса.

Для решения этих проблем нужен был могучий математический талант. Им оказался только талант знаменитого математика древности, учителя Платона, пифагорейца Феодора Киренского, позволивший ему сразу от открытой Пифагором несоизмеримости диагонали и стороны квадрата перейти к открытию бесчисленного множества семейств прямоугольников с несоизмеримыми диагональю и стороной. Поэтому не случайно в течение века после открытия Пифагором несоизмеримости диагонали и стороны квадрата никто не мог продвинуться дальше в открытии существования несоизмеримых отрезков.

Мы снова оказываемся перед труднейшей историко-математической проблемой. Каким же образом удалось Феодору Киренскому обобщить евклидов антифайрезис? Каким образом ему удалось найти расширение его? Расширение, которое для восстановления исторической справедливости должно быть названо алгоритмом Феодора.

Переходим к рассмотрению этого алгоритма[22]. Прямоугольники, соответствующие равенству (27в), изображены на рис. 31. Во избежание недоразумений заметим, что отрезок CD на рис. 31 не равен от-

резку CD на рис. 25, так как на рис. 31 этот отрезок является геометрической разностью между отрезками AD и AC, а на рис. 25 он является арифметической разностью между ними.

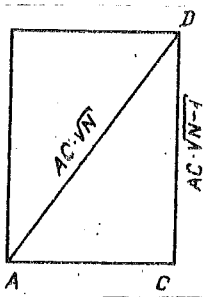


Рис. 31

Так как в равенстве (27в) отношение $\frac{AB}{AC}$ произвольно, то полагаем $\frac{AB}{AC}=N$, где N – произвольное натуральное число, большее единицы.

Тогда равенство (27в) принимает следующий вид: $AD^2=N\cdot AC^2$, откуда $AD=AC\cdot\sqrt{N}$. Из рис. 31 имеем $CD^2=AD^2-AC^2=N\cdot AC^2=AC^2=$ $=AC^2(N-1)$, откуда $CD=AC\cdot\sqrt{N-1}$.

Мы видели, что в частном случае равенства (27б), в котором мы полагаем $AD^2=\frac{AB}{AC}AC^2$, также $DB^2=\frac{AB}{AC}CD^2$, т.е. отрезки DB и CD снова являются диагональю и стороной прямоугольника, подобного начальному прямоугольнику с диагональю AD и стороной AC.

Таким образом, этот частный случай равенства (27б) имеет то же свойство, которое имеет аналогичный частный случай предложений Евкл. II-9, 10. На этом замечательном свойстве предложения (27б) и основан антифайрезис, который доказывает несоизмеримость отрезков AD и AC, если натуральное число N, выражающее отношение $\frac{AB}{AC}$, является неквадратным.

Из равенств (27в) и (27д) следует: $\frac{AD^2}{AC^2}=\frac{AB}{AC}$; $\frac{DB^2}{CD^2}=\frac{AB}{AC}$, откуда

$$\frac{AD}{AC}=\frac{DB}{CD}=\sqrt{\frac{AB}{AC}}. \qquad (37)$$

Перед нами особый род деления отрезков в постоянном отношении, т.е. особый род антифайрезиса. Арифметическую природу его обнаруживает следующее рассуждение.

Полагаем отрезок AC равным единице, тогда $\frac{AB}{AC}=N=\frac{AB}{1}$ и $AB=$ $=N\cdot 1=N$, $\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{1}=\sqrt{\frac{AB}{1}}$ и $AD=\sqrt{AB}=\sqrt{N}$.

Полагаем отрезок AD равным $a+x$, где a – натуральное число (1, 2,...). Тогда отрезок CD будет равен: $CD=a+x-1$, отрезок DB будет равен: $DB=N-a-x$ (рис. 25). Следовательно, равенство (37) принимает следующий вид:

$$\frac{a+x}{1}=\frac{N-a-x}{a+x-1}, \qquad (37а)$$

откуда

$$x=\frac{N-a^2}{2a+x} \qquad (37б)$$

и

$$AD=\sqrt{AB}=\sqrt{N}=a+x=a+\cfrac{N-a^2}{2a+\cfrac{N-a^2}{2a+\dots}} \qquad (38)$$

Перед нами нерегулярная одночленная бесконечная цепная дробь. Рассмотрим глубже ее геометрическую сущность.

Для нахождения наибольшей общей меры диагонали AD и стороны AC прямоугольника нужно отнимать AC от AD столько раз, сколько возможно. Но мы видели, что предложение (27), обобщающее предложение Евкл. II-9, позволяет отнимать остаток CD от стороны AC только в двух случаях: в случае семейства квадратов и в случае семейства прямоугольников, подобных прямоугольнику со сторонами 1 и $\sqrt{2}$.

Следовательно, во всех других случаях предложение (27), обобщающее предложение Евкл. II-9, не позволяет применить евклидов антифайрезис для доказательства несоизмеримости диагонали AD и стороны AC прямоугольника.

Но особый род деления отрезков в постоянном отношении, выражаемый равенством (37), это особый род бесконечного антифайрезиса, арифметическую природу которого выражает нерегулярная одночленная бесконечная цепная дробь (38), в то время как арифметическую природу бесконечного евклидового антифайрезиса, доказывающего несоизмеримость (алгоритм Евклида), выражает, как мы видели, регулярная бесконечная, в простейших случаях одно- и двучленная, вообще многочленная, лагранжева цепная дробь.

И, таким образом, мы снова оказываемся перед труднейшей историко-математической проблемой. Какой же род антифайрезиса выражают равенство (37) и цепная дробь (38)? Разрешима ли эта проблема?

Решить ее позволяет следующее рассуждение. Нахождение общей меры двух отрезков можно производить не только взаимным отнятием остатков, но также взаимным отнятием их частей. Однако этот метод нахождения общей меры двух отрезков в отличие от евклидового антифайрезиса не является методом нахождения наибольшей общей меры их.

Но для решения вопроса, имеют ли два отрезка общую меру или нет, не обязательно искать именно наибольшую общую меру их. Если может быть доказано, что эти отрезки не имеют никакой общей меры, то они несоизмеримы. Именно на этом рассуждении основан алгоритм Феодора Киренского.

Так как мы положили $\frac{AB}{AC} = N$, $AC = 1$, то (рис. 25)

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AB - AC}{AC} = N-1. \qquad (39)$$

Из рис. 25 и равенства (39) имеем $CB = CD + DB = (N-1)AC$, откуда

$$AC = \frac{CD + DB}{N-1}. \qquad (40)$$

Таким образом, остаток CD разделен на $N-1$ равных частей, каждая из которых меньше, чем AC. Следовательно, такую часть CD можно отнять от AC. Следовательно, можно продолжить антифайрезис независимо от величины остатка CD.

Так как мы не знаем, сколько раз часть $\frac{CD}{N-1}$ остатка CD можно отнять от AC, то мы не будем этим интересоваться. Но так как мы знаем, что один раз часть $\frac{CD}{N-1}$ остатка CD от AC отнять можно, то мы в отличие от евклидового антифайрезиса и будем отнимать часть $\frac{CD}{N-1}$ остатка CD от AC только один раз. Остатком будет $\frac{DB}{N-1}$.

Назовем остаток CD первым начальным остатком $O_{1н}$, его часть $\frac{CD}{N-1}$ – первым остатком O_1, остаток $\frac{DB}{N-1}$ – вторым остатком O_2.

Будем теперь искать общую меру остатков O_1 и O_2. Их отношение $\frac{O_2}{O_1} = \frac{DB}{N-1} : \frac{CD}{N-1} = \frac{DB}{CD}$.

Следовательно, в соответствии с равенством (37) остатки O_2 и O_1 находятся в таком же отношении, в каком находятся первоначальные отрезки AD и AC. В результате, круг оказывается замкнутым.

Продолжим антифайрезис еще на один шаг. Для этого вернемся к началу рассуждения.

Положим первый остаток O_1 новым начальным отрезком A_1C_1, второй остаток O_2 – новым начальным отрезком A_1D_1. Таким обра-

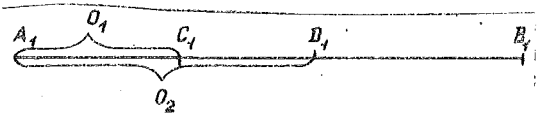


Рис. 32

зом, прямая AB (рис. 25) заменяется прямой A_1B_1, разделенной в точках C_1 и D_1 на три части (рис. 32).

Тогда предложение (27б) запишется так:

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} D_1B_1^2 + A_1D_1^2 = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} A_1C_1^2 + \frac{A_1B_1}{C_1B_1} C_1D_1^2 . \qquad (27е)$$

Опять полагаем $A_1D_1^2 = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} A_1C_1^2$, откуда аналогично предыдущему получаем

$$\frac{A_1D_1}{A_1C_1} = \frac{D_1B_1}{C_1D_1} = \sqrt{\frac{A_1B_1}{A_1C_1}} . \qquad (37в)$$

Но $\frac{A_1D_1}{A_1C_1} = \frac{O_2}{O_1} = \frac{DB}{CD} = \sqrt{\frac{AB}{AC}}$. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{AB}{AC} = N$.

Опять отнимем первый остаток $O_1 = A_1C_1$ от второго остатка $O_2 = A_1D_1$ только один раз. Остаток C_1D_1 назовем вторым начальным остатком $O_{2н}$.

Чтобы отнять его от первого остатка $O_1 = A_1C_1$, повторим прежнее рассуждение. Имеем

$$\frac{C_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_1B_1 - A_1C_1}{A_1C_1} = N-1, \qquad (39а)$$

$C_1B_1 = C_1D_1 + D_1B_1 = (N-1)\,A_1C_1$, откуда

$$A_1C_1 = \frac{C_1D_1 + D_1B_1}{N-1}. \qquad (40а)$$

Таким образом, остаток C_1D_1 разделен на $N-1$ равных частей, каждая из которых меньше, чем A_1C_1.

Отнимем теперь часть $\frac{C_1D_1}{N-1}$ остатка C_1D_1 от A_1C_1 опять только один раз. Остатком будет $\frac{D_1B_1}{N-1}$.

Назовем часть $\frac{C_1D_1}{N-1}$ второго начального остатка $O_{2н} = C_1D_1$ третьим остатком O_3, а $\frac{D_1B_1}{N-1}$ – четвертым остатком O_4. Этот рекуррентный процесс может быть продолжен.

Таким образом, мы получаем бесконечную последовательность неограниченно уменьшающихся остатков O_n и O_{n+1}, отношение $\frac{O_{n+1}}{O_n}$ которых остается постоянным, равным отношению $\frac{AD}{AC}$ начальных отрезков AD и AC.

Если натуральное число N, выражающее отрезок AB, квадратное, то отрезок $AD = \sqrt{AB}$ целочислен. Следовательно, в этом случае отрезок $AC = 1$ укладывается в отрезке AD целое число раз без остатка. Значит, в этом случае и остаток O_n всегда укладывается в остатке O_{n+1} целое число раз без остатка (мы видим, что в отличие от евклидового антифайрезиса в этом антифайрезисе следующий остаток O_{n+1} больше предыдущего остатка O_n).

Это значит, что в этом антифайрезисе в отличие от антифайрезиса Евклида, служащего для нахождения наибольшей общей меры двух отрезков, только лишь бесконечность процесса не является доказательством несоизмеримости. Но если натуральное число N, выражающее отрезок AB, неквадратное, то отрезок AD не целочислен.

Следовательно, отрезок $AC = 1$ не укладывается в отрезке $AD = \sqrt{AB}$ целое число раз без остатка. А так как отношение $\frac{O_{n+1}}{O_n}$ остатков O_{n+1} и O_n равно отношению $\frac{AD}{AC}$ начальных отрезков AD и AC, то и остаток O_n никогда не уложится в остатке O_{n+1} целое число раз без остатка. А это является доказательством того, что отрезки AD и AC, т.е. диагональ и сторона прямоугольника, несоизмеримы.

Обратимся теперь к рис. 25 и 31. Положим отрезок AC, т.е.

одну из сторон прямоугольника, равным одному футу. Чтобы доказать, что отрезок AD, т.е. диагональ этого прямоугольника, несоизмерим с отрезком AC, если площадь квадрата, стороной которого является диагональ AD (эта площадь известна – по теореме Пифагора она равна сумме квадратов сторон этого прямоугольника), выражается неквадратным натуральным числом N (следовательно, сторона этого квадрата, т.е. диагональ прямоугольника, является квадратным корнем из этого неквадратного числа N), нужно чертить линию AB, длина которой выражается этим же неквадратным числом N линейных футов.

Около этой линии ("около трехфутовой линии, также пятифутовой") нужно писать доказательство несоизмеримости диагонали AD с однофутовой стороной AC ("γράφε" – "написал").

Линия AB является вспомогательной. Доказательством же несоизмеримости является то, что написано около нее. Эта вспомогательная линия точно соответствует вспомогательным линиям, описанным Платоном. То же, что около этой вспомогательной линии нужно писать доказательство несоизмеримости, точно соответствует слову Платона "написал".

Платон говорит, что Феодор обнаружил бесконечность множества отрезков, несоизмеримых с однофутовой линией. Равенства (27б), (27в), (27д) доказывают несоизмеримость с однофутовой линией диагонали любого прямоугольника, если его диагональ является стороной квадрата, площадь которого выражается неквадратным натуральным числом.

Из открытого пифагорейцами предложения о средней пропорциональной (Евкл. II-14), позволяющего преобразовать любой прямоугольник в квадрат, было известно, что существует бесчисленное множество таких квадратов. Следовательно, эти равенства обнаружили существование бесчисленного множества сторон квадратов, несоизмеримых с однофутовой линией.

Таким образом, открытый нами метод доказательства несоизмеримости точно соответствует словам Платона. А это значит, что впервые этот метод был открыт знаменитым математиком древности, учителем Платона – Феодором Киренским.

Феодор говорил Сократу о необыкновенной одаренности Теэтета. Такому ученику не нужно было рассмотренное нами громоздкое доказательство. Достаточно было равенств (27б), (27в), (27д). Поэтому возникает вопрос, почему же Феодор не ограничился общей формой этих равенств и демонстрировал доказательства на численных примерах $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{15}$?

Полагаю, истина заключается в том, что Феодор был не только

знаменитым математиком, но и знаменитым педагогом. Недаром именно у него учился Платон. Как великолепный педагог для большей наглядности он демонстрировал свой общий метод доказательства несоизмеримости на возможно большем числе численных примеров.

Разумеется, если бы его метод доказательства несоизмеримости не был пригоден для любого прямоугольника, диагональ которого является стороной квадрата, площадь которого выражается неквадратным числом, то никакое число численных примеров не могло бы обнаружить бесконечность множества диагоналей прямоугольников, несоизмеримых с однофутовой линией.

Но так как его метод был пригоден для любого такого прямоугольника, то, продемонстрировав его на том количестве численных примеров, которое допускала длина учебной песчаной площадки, Феодор мог сказать Теэтету: и таким же образом можно продолжать бесконечно. И поэтому Теэтет мог сказать Сократу: "Обнаружилось бесконечное множество "δυνάμεσιν", т.е. сторон квадратов, несоизмеримых по длине с однофутовой линией.

Теперь, когда мы знаем размеры учебной песчаной площадки "эфебея" гимнасия в Афинах, в котором учил Феодор, мы можем воссоздать картину этого знаменитого урока Феодора, на котором впервые было сообщено о величайшем, после пифагорова открытия несоизмеримости, математическом открытии древности: о распространении открытия Пифагора на любые прямоугольники, диагональ которых является стороной квадрата, площадь которого выражается неквадратным числом.

Так как длина первой вспомогательной линии, которую чертил Феодор, была равна трем футам, а последней – 15 футам, длина же вспомогательных линий, которые он чертил, выражалась неквадратным числом футов, то Феодор начертил 11 вспомогательных линий, длина которых была равна: 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 футов. Ширина же учебной песчаной площадки была не более 7 футов, т.е. равна 2,1 м.

Если бы Феодор чертил эти 11 линий параллельно друг другу, то между ними было бы 10 промежутков, равных 210 : 10 = 21 см каждый. Мог ли он стоять в таком промежутке? Разумеется, нет.

Но он мог из одной позиции чертить несколько параллельных линий, что было неудобно, но возможно. Но около каждой линии он должен был писать доказательство несоизмеримости диагонали прямоугольника, являющейся квадратным корнем из длины этой вспомогательной линии, с линией, длиной один фут. Мог ли он писать это доказательство в промежутке между линиями, равном 21 см? Разумеется, не мог.

Поэтому вырисовывается следующая картина этого урока Феодора.

Феодор стоял в центре учебной песчаной площадки. На скамьях у стен сидели ученики.

Начертив вспомогательную линию длиной три фута, Феодор написал около нее три численных равенства, доказывающих несоизмеримость с линией, длиной один фут, диагонали прямоугольника, являющейся стороной квадрата, площадь которого выражается числом квадратных футов, равным длине этой линии, т.е. тремя квадратными футами, полагая первое из этих трех равенств, т.е. равенство (27б), уже известным из предыдущих уроков, значение же его он объяснил именно на этом уроке, – двумя равенствами, т.е. равенствами (27в) и (27д):

$$\frac{1}{2}DB^2 + AD^2 = \frac{3}{1}AC^2 + \frac{3}{2}CD^2,$$

$$AD^2 = \frac{3}{1}AC^2,$$

$$DB^2 = \frac{3}{1}CD^2.$$

Так как второе и третье равенства выражают особый род деления двух отрезков в постоянном отношении, т.е. особый род бесконечного антифайрезиса, то талантливому юноше Теэтету этих равенств было достаточно, чтобы понять, что если AD^2 выражается неквадратным числом, то отрезки AD и AC несоизмеримы.

После этого Феодор шел вдоль трехфутовой линии и удлинил ее до пятифутовой линии (ясно, что в этих словах слово "до" включает пятифутовую линию), с соответствующим изменением чисел в написанных равенствах. И, продолжая таким же образом, он удлинял каждую из начерченных им линий, с соответствующим изменением, после каждого удлинения, чисел в написанных им равенствах, и закончил удлинение их пятнадцатифутовой линией.

Длина же учебной песчаной площадки стеснила его не на этой, а на шестнадцатифутовой линии, которую ему не надо было чертить. Ему надо было чертить семнадцатифутовую линию, которую ему не позволяла чертить шестнадцатифутовая длина учебной песчаной площадки. Поэтому Платон и говорит, что Феодор был стеснен почти на семнадцатифутовой линии.

Воссозданная нами картина этого урока Феодора позволяет ответить на возникавший у историков математики вопрос, каким образом Феодор смог в течение одного урока провести 12 доказательств несоизмеримости (12 – это ошибка, но и 11 достаточно много).

Если бы Феодор около каждой удлиненной им линии полностью писал три соответствующих ей численных равенства, то ему нужно было писать эти равенства 33 раза. А так как продолжительность древ-

негреческого школьного урока, вероятно, не намного отличалась от продолжительности современного школьного урока, равной 45 мин, то даже если бы она была равна 60 мин, на написание каждого равенства у Феодора было меньше двух минут. А так как черчение трехфутовой линии и 10-кратное удлинение ее до пятнадцатифутовой линии должно было отнять не меньше 20-25 мин, то на написание 33 равенств у Феодора оставалось около 40 мин.

Следовательно, на написание одного равенства оставалось около минуты. А если учесть, что писание на песке было более трудоемким, чем на классной доске, то ясно, что если бы Феодор писал эти 33 равенства, то он не смог бы даже в течение 60-ти минутного урока провести 11 доказательств несоизмеримости.

Но ему не нужно было писать эти равенства заново для каждой новой линии. Достаточно было написать только один раз три равенства - для трехфутовой линии. Для всех же остальных линий можно было только менять цифры в этих трех равенствах, в соответствии с каждой новой линией. Таким образом, Феодору нужно было только 10 раз менять 6 цифр, соответствующих трехфутовой линии.

На изменение одной цифры (в греческой алфавитной системе) вполне достаточно 10 с. Следовательно, на 10-ти кратное изменение 6 цифр достаточно 10 х 60 = 600 с = 10 мин. Таким образом, даже при 45-минутном уроке на черчение трехфутовой линии и 10-кратное удлинение ее до пятнадцатифутовой линии оставалось 35 мин, что более чем достаточно. Следовательно, этим путем Феодор мог, не торопять, провести в течение одного урока 11 доказательств несоизмеримости.

Хотя этот подсчет времени является ориентировочным, он важен, так как доказывает, что именно открытый Феодором антифайрезис позволил ему провести в течение одного урока 11 доказательств несоизмеримости.

Обратим теперь внимание на следующее. Всеобщая уверенность в том, что Феодор прекратил свои доказательства точно на $\sqrt{17}$, привела ко всеобщей уверенности, что его метод доказательства несоизмеримости (в современной терминологии иррациональности) не позволял идти дальше и поэтому Феодор доказал иррациональность только 12 квадратных корней: $\sqrt{3}$ ... $\sqrt{17}$.

Бесконечность же множества их доказал Теэтет.

Схолия к предложению Евкл. X-9 (Euclides. Elementa / Ed. J.L. Heiberg. - Vol. V.- P.450) говорит: «"Эта теорема открытие Теэтета и Платон упоминает ее в "Теэтете"». Эта ошибка древнего схолиаста была увековечена присвоением предложению Евкл. X-9 названия "Теорема Теэтета". Но еще Ганкель /66, 103, прим. 2/ пи-

сал: "Это место Платона не допускает толкования, что учителю Платона пифагорейцу Феодору Киренскому не была известна общая теорема".

Г.Фогт [138, 110] также отстаивал эту точку зрения и писал: "Среди математиков и историков математики Ганкель является единственным, на общность взгляда которого с нашей точкой зрения мы можем сослаться. Однако все остальные, останавливавшиеся на этом вопросе, Бретшнейдер, Кантор, Гульч, Гюнтер, Юнге, Таннери, Альман, Лориа, единодушно сообщают, что "Феодор доказал иррациональность квадратных корней от $\sqrt{3}$ до $\sqrt{17}$". То, что он на $\sqrt{17}$ случайно остановился, они не принимают во внимание и, таким образом, посредством формально правильных слов насаждают заблуждение по существу, что не сам Феодор, но только Теэтет открыл всеобщую иррациональность".

Хотя Ганкель и Фогт были совершенно правы в том, что не Теэтет, а сам Феодор доказал бесконечность множества иррациональных квадратных корней, их мнение не было принято во внимание, и в истории математики и поныне господствует ошибочная точка зрения, будто не Феодор, а Теэтет доказал бесконечность множества иррациональных квадратных корней.

Их мнение не было принято во внимание, несомненно, потому, что оно не было подкреплено неопровержимым доказательством и поэтому не могло изменить всеобщую точку зрения, в основании которой лежало общее убеждение, восходящее еще к античности, будто Платон говорит, что Феодор Киренский остановился точно на $\sqrt{17}$. Чтобы изменить эту всеобщую точку зрения, надо было неопровержимо доказать, что это общее убеждение является ошибочным.

Мы можем теперь ответить на вопрос, как же сам Феодор, а не Теэтет, называл обнаруженные им линии, несоизмеримые с однофутовой линией.

Ясно, что он называл их не сторонами квадратов, линейно несоизмеримыми с линией, длиной один фут, как назвал их Теэтет ("δυνάμεις"), а диагоналями прямоугольников, являющимися сторонами квадратов, площади которых выражаются неквадратными числами.

Таким образом, произведенное нами исследование позволяет точно установить, какова заслуга Феодора Киренского и какова заслуга Теэтета в открытии существования других несоизмеримых отрезков, кроме открытой Пифагором несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

Наше исследование точно устанавливает, что открытие существования бесконечного множества отрезков, несоизмеримых с отрезком,

длиной один фут, принадлежит не Теэтету, а его учителю, знаменитому математику древности, учителю Платона – Феодору Киренскому.

Какую же роль сыграл афинский юноша Теэтет в открытии существования этих отрезков? Ответ ясен: никакой. В чем же состоит его заслуга? Что он сделал?

Его заслуга состоит в том, что он назвал диагонали этих прямоугольников сторонами квадратов, несоизмеримыми по длине (так как в квадратах они соизмеримы) с однофутовой линией: "δυνάμεις".

Классификация чисел, т.е. разбиение их на два класса – квадратные и продолговатые числа, о которой Теэтет рассказал Сократу, как о своем большом достижении, пришла ему на ум во время беседы с его другом – юношей Сократом.

В ту пору Теэтету не было 17 лет. В Афинах достигших 17-летнего возраста называли "ἔφηβος". Сократ же называет Теэтета "παῖς", что может значить и "мальчик", и "отрок", и "юноша" (не достигший 17-летнего возраста). Вероятно, Теэтету было в ту пору лет 15-16.

История математики свидетельствует, что даже наиболее рано созревшие математические гении (Гаусс, Галуа, Абель) пришли к своим великим идеям в возрасте не ранее 18 лет. Так, в вечер накануне смерти Галуа писал своему другу Шевалье, что его открытие у него "в голове уже скоро год". Следовательно, он пришел к нему в возрасте 19-20 лет (и, несомненно, в результате длительных, многодневных, а может быть, и многомесячных размышлений).

Могло ли 15-16-летнему мальчику Теэтету (а в этом юном возрасте разница в три-четыре года имеет огромное значение для духовного созревания) прийти на ум во время товарищеской беседы великое математическое открытие, требующее длительных напряженных размышлений? Полагаю, что это абсолютно исключено, даже если Теэтет обладал выдающимися математическими способностями.

Наше исследование доказывает, что он этого открытия не сделал. Более того, нет никаких оснований полагать, что Теэтет и в более позднем возрасте стал выдающимся математиком. Во всяком случае, диалог Платона об этом не свидетельствует.

Диалог начинается с того, что Теэтета в тяжелом состоянии привезли в Мегарскую гавань из Коринфского лагеря по пути в Афины.

А.Ф.Лосев и А.А.Тахо-Годи полагают: "Здесь, видимо, идет речь об одном из эпизодов многолетней Коринфской войны, когда в 369 г. афиняне, союзники Спарты, послали свои войска во главе с Ификра-

том на Истм против фиванцев" /27, 559/. Так как встреча Теэтета с Сократом произошла незадолго до смерти Сократа, выпившего в 399 г. по приговору суда яд цикуты, а Теэтету в ту пору было 15-16 лет, то в 369 г. ему было 45-46 лет. Если бы он стал выдающимся математиком, то в этом возрасте у него должны были быть большие математические заслуги. Но о математических заслугах Теэтета в зрелом возрасте Платон не говорит. Он говорит, что "многие высоко превозносят его военные доблести". Платон говорит только о математическом даровании юного Теэтета. Но даже выдающиеся математические способности в юности не значат, что обладатель их станет математиком, и тем более выдающимся математиком.

И надо полагать, что К.Рейдемейстер не ошибся, полагая, что "Теэтет математик только легенда, которая кристаллизовалась вокруг Теэтета диалога Платона" /118, 24/.

Для того чтобы закончить наше исследование, надо ответить еще на один вопрос. Что побудило Пифагора к исследованиям, приведшим к открытию существования несоизмеримых отрезков, - положения, о существовании которого никто не подозревал?

Ответить на этот вопрос позволяет следующее. Пифагорейцами было открыто, что не существует квадрата, равного двойному квадрату. Этот факт, имеющий место только в системе рациональных чисел, т.е. только в системе соизмеримых отрезков, к открытию которого привело необыкновенно простое рассуждение (принадлежавшее, по всей вероятности, Пифагору), доказавшее, что если бы существовал квадрат, равный двойному квадрату, то существовало бы число, являющееся и четным и нечетным, что невозможно, - до открытия существования несоизмеримых отрезков считался незыблемой истиной.

Но вот геометрический гений Пифагора открывает теорему, - столь обыденную школьную теорему Пифагора, частный случай которой для равнобедренного прямоугольного треугольника неопровержимо доказывает, что существует квадрат, равный двойному квадрату, т.е. опровергает незыблемую истину, что такого квадрата не существует. Открытие этого невероятного факта не могло не привести к смятению О существовании несоизмеримых отрезков никто не подозревал, то же что не существует числа, которое является и четным и нечетным, было очевидно каждому. Следовательно, каждому было очевидно, что не существует квадрата, равного двойному квадрату.

Поэтому открытый Пифагором факт существования квадрата, равного двойному квадрату, противоречивший считавшейся незыблемой истине, что такого квадрата не существует, мог рассматриваться только как необъяснимый парадокс.

Отрицая существование несоизмеримых отрезков, Ксенократ и Эпикур считали, несомненно, такой квадрат парадоксом, не осознавая значение невозможности решения уравнения $p^2 = 2q^2$ в целых числах, даже после открытия Пифагором значения ее. Этот парадокс неизбежно приводил к вопросу, что же представляет собой сторона квадрата, равного двойному квадрату.

Она не могла быть не только целочисленной, но не могла выражаться и отношением целых чисел, так как в обоих этих случаях существовало бы число, являющееся и четным и нечетным, что невозможно.

Очевидно, в стороне квадрата, равного двойному квадрату, была какая-то тайна - тайна, порождавшая смятение. Поэтому сторона квадрата, равного двойному квадрату, была названа "ἄρρητον", т.е. "ужасная", "неприличная", "непозволительная". Но человеческий разум всегда находил разрешение парадоксов, к которым приводило его изучение тайн мира и его познания.

Научный парадокс приводил к сомнению в непогрешимости общепринятой научной системы. Разрешение его приводило к открытию новой, более общей научной системы, в большинстве случаев не уничтожавшей старую научную систему, но включавшей ее в новую, более общую научную систему как частный случай. Так было и с открытием несоизмеримости.

Вопрос, что представляет собой сторона квадрата, равного двойному квадрату, побуждал к поискам разрешения этого парадокса. И великому гению Пифагора удалось разрешить его, открыв существование несоизмеримых отрезков, что явилось началом новой эры в математике.

Могут сказать, что теорема Пифагора была известна задолго до Пифагора - еще в Вавилоне (но вавилонские очень точные приближенные значения $\sqrt{2}$, с помощью которых была приближенно вычислена диагональ квадрата, и вавилонские таблицы пифагоровых троек чисел не могут рассматриваться как доказательство того, что вавилонские математики располагали доказательством теоремы Пифагора. Они могли прийти к ней без доказательства, интуитивно, в результате наблюдений над числами).

Но предложение о невозможности существования квадрата, равного двойному квадрату, побудившее Пифагора после открытия его великой теоремы к исследованиям, открывшим существование несоизмеримых отрезков, опирается на элементарную теорию делимости, "наличие которой в вавилонской математике ничем не засвидетельствовано" /19, 8/ (заметим, что А.П.Юшкевич, следуя традиции, назвал это

предложение "арифметическим доказательством иррациональности" /Там же/, т.е. несоизмеримости).

Традиционный ход мыслей, приводящий к названию этого предложения "доказательством иррациональности", чрезвычайно прост. Рассуждают так: поскольку предположение, что сторона двойного квадрата рациональна, приводит к абсурду – к утверждению, что одно и то же число может быть и четным и нечетным, то она иррациональна, т.е. несоизмерима со стороной исходного вдвое меньшего квадрата. Но этот столь простой непосредственный переход от рационального к иррациональному, т.е. от соизмеримого к несоизмеримому, на самом деле искажает историческую истину.

До открытия несоизмеримости греки не могли так рассуждать. Ибо это столь простое рассуждение в неявной форме предполагает знание того, что существует такое удивительное явление, как иррациональность, т.е. несоизмеримость. Греки (до его открытия) не знали этого.

И поэтому само по себе предложение, что не существует квадрата, равного двойному квадрату, т.е. что уравнение $p^2 = 2q^2$ не имеет решений в целых числах, не могло являться объяснением возможности существования открытого Пифагором квадрата, равного двойному квадрату. Напротив, это предложение являлось доказательством невозможности существования этого квадрата, т.е. могло только поставить вопрос о парадоксальности существования этого квадрата – вопрос, побуждавший к поискам разрешения этого парадокса.

К осознанию значения невозможности решений в целых числах уравнения $p^2 = 2q^2$ могло привести только открытие явления несоизмеримости прямым наглядным путем, т.е. путем антифайрезиса, что удалось только великому гению Пифагора.

Предложенный нами перевод начала рассказа Теэтета свидетельствует, что Феодор открыл бесконечность множества несоизмеримых отрезков не косвенным путем – доказательством от противного, а прямым наглядным путем – антифайрезисом.

И только этот прямой наглядный путь, которым является антифайрезис, мог привести, и действительно привел, к открытию несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

Таким образом, знание, что уравнение $p^2 = 2q^2$ не имеет решений в целых числах, – это еще не осознание того, что существует иррациональность, т.е. несоизмеримость. Поэтому вполне прав О.Нейгебауер, когда он пишет: "И даже если только из-за неполноты нашего знания источников мы предполагаем, что вавилоняне не знали, что уравнение $p^2 = 2q^2$ не имеет решений в целых числах, то и тог-

да остается несомненным, что последствия этого результата не были осознаны" /19, 62/.

Все же, вероятнее всего, предположение о невозможности существования квадрата, равного двойному квадрату, вавилонянам не было известно. Поэтому квадрат, равный двойному квадрату, о существовании которого они знали из теоремы Пифагора, не был для них парадоксальным, и его сторона считалась ими рациональной, соизмеримой со стороной вдвое меньшего квадрата.

Таким образом, известность теоремы Пифагора в Вавилоне нисколько не умаляет величия Пифагора, впервые доказавшего ее и впервые осознавшего ее великое значение. И, несомненно, именно вследствие осознания значения ее Пифагор, открывший эту теорему, принес в жертву богам, как повествует предание, по одной версии – быка, по другой – гекатомбу, т.е. сто быков.

ПРИМЕЧАНИЯ

1 Ошибочно считается, что издателем его был Генрих Стефан и в 1578 г. оно вышло в свет в Париже. Это издание обнаружено мной в отделе редкой книги библиотеки им. В.И.Ленина. Оказалось, что издателями его были Жан де Серре (1540–1598) и Анри Этьен (1528–1598). Генрих Стефан был соиздателем и вложил в это издание огромный труд. В 1578 г. оно вышло в свет не в Париже, а в Женеве. Комментарии принадлежат Иоанну Серрану.

2 Итальянский историк математики С.Мараккиа [84, 68–76] пытается доказать, что Евклид выражениями "εὐθεῖα ἄπειρος", т.е. "неограниченная прямая", и "ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε", т.е. "неограниченная в направлении Е" ("Начала", I–12 и I–22), говорит об актуальной бесконечности прямой и полупрямой. Он утверждает, что эти два предложения являются исключением в "Началах" и основаны не на втором постулате, а на отсутствующих в "Началах" постулатах, принадлежащих Евдоксу Кносскому, рассматривавшему будто бы прямую в ее актуальной бесконечности. Термин "неограниченная", т.е. "бесконечная", прямая не значит, что бесконечность прямой является завершенной. Поэтому утверждение Мараккиа этим термином не подтверждается.

3 М.Я.Выгодский перевел слова "πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους" словами "латеральные и диаметральные отношения". Слово πλευρά значит и "бок" и "сторона". Слово διάμετρος значит и "диаметр" и "диагональ". Теон говорит об отношениях сторон и диагоналей прямоугольников к отрезку, принятому единицей. Поэтому правильный перевод слов πλευρικοὺς λόγους – "отношения сторон", т.е. "сторонние отношения", а не латеральные, т.е. латинизированное "боковые" отношения. Правильный же перевод слов "διαμετρικοὺς λόγους" – "отношения диагоналей", т.е. "диагональные", а не "диаметральные" отношения. Перевод М.Я.Выгодского создает неверное представление, будто речь идет о круге, в то время как на самом деле речь идет о прямоугольниках. Словом "боковые" неправильно перевел слово πλευρικοὺς и И.Н.Веселовский в его переводе "Пробуждающейся науки" Ван дер Вардена [7, 175].

4 М.Я.Выгодский перевел слово σπερματικοὺς словом "семенными". Однако слово σπέρμα значит не только "семя", но и "начало".

5 У М.Я.Выгодского "над всеми фигурами".

6 У М.Я.Выгодского "семенному".

7 У М.Я.Выгодского "начальствует".

8 У Теона сказано "отношение диагонали, также стороны" и поэтому он употребил глагол εὑρίσκεται, т.е. "отыскивается", в единственном числе: "отношение отыскивается". М.Я.Выгодский почему-то перевел этот глагол множественным числом: "отыскиваются", так как он дважды употребил слово "отношение": "отношение диаметра (правильно – диагонали. – М.П.) и отношение стороны". Он неточно перевел также слова "ἐν τῇ μονάδι" словами "в единице". Предс-

лог ἐν с дательным падежом: "τῇ μονάδι" может отвечать и на вопрос: где? – в чем? (в чем отыскивается? – в единице), и на вопрос об орудии, средстве: чем? и тогда дательный падеж может переводиться творительным падежом: чем отыскивается? – единицей.

9 Глагол "ἐκτίθημι" значит здесь "выставлять напоказ". Значения "брать", этот глагол не имеет. Поэтому перевод М.Я.Выгодского слова ἐκτίθεται словом "возьмем" неточен. Слова οἷον ("например") и ἐκτίθεται ("выставляются напоказ") очень важны для понимания того, что приведенный Теоном численный пример построения сторон и диагоналей является только показом общей теории на простейшем частном случае квадрата.

10 У М.Я.Выгодского "диаметр".

11 Слово προστίθεται значит "прибавляется", а не "пусть прибавляется", как переводит М.Я.Выгодский.

12 Слова: "ἐπειδὴ ὅσον ἡ πλευρὰ δὶς δύναται, ἡ διάμετρος ἅπαξ" М.Я.Выгодский перевел словами: "Так как сколько дважды дает в квадрате сторона, столько один раз диаметр". Этот перевод, арифметизуя текст Теона, существенно изменяет его геометрический смысл. В тексте Теона речь идет о квадратах, построенных на стороне и диагонали (в данном случае квадрата).

13 Чрезвычайно важное слово "ἐγένετο" значит "родила", являющееся следом необходимой для понимания фрагмента 546 ВС пифагорейской математической терминологии, М.Я.Выгодский перевел словом "становится".

14 М.Я.Выгодский перевел это место словами: "При первой стороне и диаметре квадрат единицы-диаметра на одну единицу меньше, чем дважды взятый квадрат единицы-стороны".

15 М.Я.Выгодский перевел это место словами: "Ведь единицы находятся в равенстве, и единое на одну единицу меньше, чем двойное". На самом деле слова Теона: "ἐν ἰσότητι γὰρ αἱ μονάδες· τὸ δ' ἓν τοῦ ἑνὸς μονάδι ἔλαττον ἢ διπλάσιον", правильный перевод которых дан выше, имеют чисто геометрический смысл. Единицей Теон называет отрезок, принятый единицей. И говорит, что отрезки, принятые единицей для стороны и диагонали, должны быть равны друг другу. Это имеет глубокий математический смысл, так как единицей может быть принят любой отрезок. Поэтому отрезок, принятый единицей для стороны, мог бы быть и неравным отрезку, принятому единицей для диагонали. И именно потому, что эти единицы "в равенстве", квадрат на отрезке, принятом единицей для диагонали = "квадрат единица" (т.е. в единицах площади – τὸ δ' ἓν), "одной единицей (площади. – М.П.) меньше, чем двойной" (квадрат на отрезке, принятом единицей для стороны).

16 И опять М.Я.Выгодский не замечает геометрического духа этого текста, арифметизуя его переводом этих слов: "Квадрат двойки-стороны 4, а квадрат тройки-диаметра 9".

17 М.Я.Выгодский перевел это место так: "И от дальнейшего прибавления, происходящего таким образом, будет происходить подобная же смена: двукратно взятый квадрат стороны то на единицу меньше, то на единицу больше, чем квадрат диаметра".

18 Это отличие доказывает ошибочность традиционного мнения об отсутствии принципиальной разницы между этими предложениями (см., напр., Taisbak C.M. Coloured quadrangles. – Copenhagen, 1982. – P.18).

19 Чтобы сделать ясным, что Платон называл квадратным числом и что он называл продолговатым числом, мы приводим его определения этих чисел в оригинале и даем точный перевод их (перевод этих определений, данный во втором томе новейшего издания русского пе-

ревода сочинений Платона [27, 232-233], ошибочен). Платоновские определения этих чисел гласят [111, 147 E - 148 A]: "Τὸν ἀριθμὸν πάντα ὅσα διεμάρανεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν, τὸν οὖν μετὰξύ τούτων, ὃν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλειονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτῶν περιαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν". Это значит: "Все числа мы разделили надвое: то (число. - М.П.) (которое. - М.П.) возможно (δυνάμενον) произвести умножением (числа. - М.П.) самого на себя (ἴσον ἰσάκις), уподобляющееся фигуре квадрата, мы назвали квадратным и равносторонним... То же (число. - М.П.) среди тех (чисел. - М.П.), которых (ὃν) (т.е. к которым относятся. - М.П.) тройка и пятерка и все (числа. - М.П.), которые невозможно (ἀδύνατος) произвести умножением числа самого на себя, но которое производит или большее (число. - М.П.) (взятое. - М.П.) меньшее число раз (чем оно само. - М.П.), или меньшее (число. - М.П.) (взятое. - М.П.) большее число раз (чем оно само. - М.П.), (которое. - М.П.) всегда большая и меньшая сторона охватывает, уподобляющееся продолговатой фигуре, мы назвали продолговатым".

Перед нами точное однозначное определение квадратного и продолговатого чисел. Квадратное число - это число, которое может быть получено умножением (целого) числа самого на себя. Продолговатое число - это число, которое не может быть получено умножением числа самого на себя, а только умножением большего числа на меньшее, или меньшего числа на большее. Отсюда следует.

Во-первых, так как от умножения целого числа на целое число (равное или не равное умножаемому числу) получается целое число, то и квадратное, и продолговатое число является целым числом, т.е. оба они рациональны.

Во-вторых, если умножаемое само на себя целое число является четным, то произведение, т.е. квадратное число, может быть получено не только умножением этого четного числа самого на себя, но и умножением некоторого большего числа на меньшее или меньшего на большее.

Например, 16 = 4 x 4 = 2 x 8 = 8 x 2; 36 = 6 x 6 = 2 x 18 = = 18 x 2 = 3 x 12 = 12 x 3 = 4 x 9 = 9 x 4. Но то, что числа 16 и 36 могут быть получены и умножением числа самого на себя, и умножением большего числа на меньшее или меньшего числа на большее, не значит, что эти числа являются и квадратными, и продолговатыми. Так как продолговатое число не может быть получено умножением числа самого на себя, то эти числа являются только квадратными. Поэтому и число 12 960 000 = 3600 x 3600 является только квадратным, хотя и может быть получено перемножением неравных чисел 4800 и 2700, а не и квадратным, и продолговатым, как ошибочно считают Гульч, Адам, Дье, Альверс и другие авторы.

В-третьих, так как квадратное число получается умножением целого числа самого на себя, то оно всегда может быть представлено квадратом с целочисленными сторонами. В тех же случаях, когда оно получается умножением четного числа самого на себя, оно может быть представлено не только квадратом с целочисленными сторонами, но и продолговатым прямоугольником с целочисленными сторонами.

В-четвертых, так как продолговатое число не может быть получено умножением целого числа самого на себя, то оно не может быть представлено квадратом с целочисленными сторонами. В V в. до н.э. знаменитый математик Феодор Киренский доказал, что любое продолговатое число не может быть представлено не только квадратом с целочисленными сторонами, но и квадратом, стороны которого выражаются отношением целых чисел, т.е. квадратом с рациональными сторонами. Он доказал, что стороны квадратов, представляющих продолговатые числа, несоизмеримы с прямолинейным отрезком, принятым единицей.

В-пятых, так как стороны квадратов, представляющих квадратные числа, несоизмеримы со сторонами квадратов, представляющих продолговатые числа, то в отношении сторон представляющих их квадратов квадратное и продолговатое числа являются противоположностями.

Эти математические противоположности Платон использует в фрагменте 546 ВС, в котором он указывает противоположность квадратного и продолговатого чисел в отношении стороны представляющих их квадратов, частицами μὲν, δὲ – для показа диалектического перехода.

Заметим, что по отношению к названным Платоном продолговатым числам три и пять он употребляет единицу в определении "меньшее (число. – М.П.) взятое большее число раз" (т.е. в данном случае – единица, взятая три и пять раз) не в смысле μονός (умственная неделимая единица, которую древние греки не считали числом), а в смысле числительного ἕν (один), т.е. в том же смысле, в котором он употребляет единицу словом ἑνός в фрагменте 546 ВС (δεομένων ἑνὸς).

20 Арпад Сабо́ истолковал математический термин δύναμις в смысле "квадратная цена прямоугольника" ("Quadratwert eines Rechtecks"). Впервые это толкование он ввел в 1963 г. в статье "Der mathematische Begriff δύναμις und das sogenannte geometrische Mittel" (Maia, N.S.XV, 1963, 219-256). В 1966 г. он повторил его в статье "Theaitetos und das Problem der Irrationalität in der griechischen Mathematikgeschichte" (Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungaricae. – 1966, 14. – S.310-311). В 1969 г. он повторил его в книге "Anfänge der griechischen Mathematik" (Budapest, 1969. – S. 46). Это толкование основано на его толковании метаматического термина δύναμις в диалоге Платона "Теэтет" в смысле "квадрат". В статье "Theaitetos..." он пишет: "Иногда переводят математический термин δύναμις именно в обсуждаемом месте диалога Платона "Теэтет", как "сторона квадрата", или "квадратный корень". В моей вышеупомянутой статье ("Der mathematische Begriff..." – М.П.) я показал, что этот перевод совершенно необоснован. Математическое выражение δύναμις никогда не имело другого смысла, кроме как "квадратная цена" или "квадрат". Если это слово переводят как "квадратный корень" или "сторона квадрата", то это только доказательство того, как поверхностно и небрежно обсуждалось до сих пор в специальной литературе математическое место в диалоге "Теэтет" (S. 311).

Полагаю, что аргументы А.Сабо́ – выражение неправильного отношения к этому тексту Платона: они игнорируют данное в нем Платоном точное определение математического термина δύναμις, которым он пользуется именно в этом тексте как синонимом стороны квадрата, представляющего продолговатое число. Неадекватное прочтение А.Сабо́ этого текста Платона проявилось также в искажении слов "ἀριθμὸν... δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι" словами "ἀριθμὸς δυνάμενος ἴσος ἰσάκις γίγνεσθαι" (Там же, 310), приведшем к неверному переводу этих слов Платона. А.Сабо́ перевел их так: "Число, которое в состоянии быть равным равное число раз". Правильный же перевод их гласит: "Число... (которое. – М.П.) возможно произвести умножением (числа. – М.П.) самого на себя". Замена слов ἴσον ἰσάκις словами ἴσος ἰσάκις изменяет смысл слов Платона. Слова ἴσος ἰσάκις значат: "равное равное число раз". Слова же ἴσον ἰσάκις значат: "само на себя помноженное".

Пытаясь обосновать свое толкование математического термина δύναμις как "квадратной цены прямоугольника", А.Сабо́ ссылается на место из Ксенофонта (Там же), в котором глагол δύναμαι употребляется в значении "стоить": "δαρεικὸς δύναται ἑπτὰ ὀβολοὺς καὶ ἡμιωβόλιον" = "сигл (персидская монета. – М.П.) стоит (δύναται) 7 1/2 оболов". Это место из Ксенофонта и является от-

правным пунктом толкования А.Сабо́ математического термина δύνᾰμις в смысле "квадратная цена прямоугольника".

Он ставит вопрос (Там же): "Как пришло то слово, которое в повседневном языке употреблялось совсем в другом смысле (δύνᾰμις = сила, способность, могущество), к странному значению δύνᾰμις = "квадрат" в специальном математическом языке". Сославшись на сообщение Симпликия о квадратурах Антифонта и Гиппократа (эту ссылку нужно проверить), А.Сабо́ утверждает, что в математике употреблялся термин δύνασθαι и этот глагол имел в математике специальное значение: "стоить", "цениться", "составлять" (цену). Причем под "ценой" всегда подразумевалась "квадратная цена".

"Можно также наблюдать", говорит он (Там же), "что термин δύνασθαι первоначально употреблялся в математике при преобразовании площадей. Если прямоугольник превращался в равновеликий ему квадрат, то о стороне найденного квадрата говорили, что она в квадрате равноценна - "gleichwertig" предыдущему прямоугольнику (ἴσον δύναται)".

На переводе слов ἴσον δύναται словом "gleichwertig", т.е. "равноценна", и основал А.Сабо́ свое толкование термина δύνᾰμις как "квадратной цены прямоугольника", т.е. что площадь прямоугольника равноценна площади равновеликого ему квадрата, подобно тому как деньги одного рода пересчитываются в деньги другого рода, т.е. "равноценны" им. Как, например, у Ксенофонта персидский сигл пересчитывается в 7 1/2 афинских оболов ("равноценен" им).

Поэтому А.Сабо́ полагает (Там же), что "математический термин δύνᾰμις должен был быть заимствован из финансового языка. И так же, как в финансовом языке, слово δύνᾰμις имело в общем значение "стоимость", "цена" (А.Сабо́ ссылается на одно место из "Ликурга" и одно место из "Солона" у Плутарха. - М.Н.), так это самое слово получило в геометрии смысл "квадратная цена прямоугольника", потом в общем "квадратная цена" и, наконец, "квадрат".

Вся эта концепция А.Сабо́ основана на переводе слова δύναται в словах ἴσον δύναται словом сто́ит", вследствие чего эти слова получили у него смысл "равно сто́ит", т.е. "равноценна" ("gleichwertig").

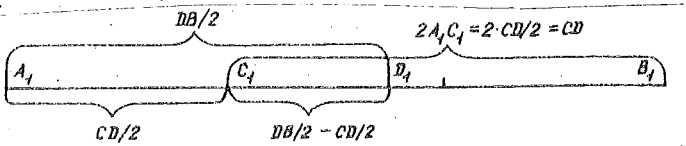
Перевод слова δύναται словом сто́ит" А.Сабо заимствовал из перевода этого слова "сто́ит" в цитированном месте из Ксенофонта. Но этот механический перенос перевода этого слова в цитированном месте из Ксенофонта в математику является, как мы полагаем, совершенно необоснованным. Он пытается подтвердить правильность своего утверждения о том, что будто глагол δύνασθαι употреблялся в математике при преобразовании площадей, и именно в ценностном смысле - "цениться", "сто́ить", ссылкой на книгу Т.Л.Хизса "Архимед". Он цитирует слова Хизса (Archimedes. - P.CLXI): "The verb δύνασθαι (with or without ἴσον) has the sense of being δυνάμει ἴσα ... thus the square (on a straight line) is equal to the rectangle ..; (εὐθεῖα) ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό ...",т.е.: "Глагол δύνασθαι (с или без ἴσον) имеет смысл быть равным в квадрате... таким образом, квадрат (на прямой линии) равен прямоугольнику ..; (прямая) составляет квадрат (δύναται) равный (ἴσον) прямоугольнику..." Мы видим, что Хизс вовсе не говорит, будто глагол δύνασθαι употреблялся в математике в ценностном значении. Он вовсе не говорит, что слова ἴσον δύναται означают равноценность. Этими словами он говорит только о равенстве квадрата, построенного на прямой, прямоугольнику. Утверждение А.Сабо́, будто глагол δύνασθαι употреблялся в математике в смысле цены или стоимости, ссылкой на это место из Хизса не подтверждается.

В "Теэтете" Платон дал точное определение математического термина "δύνᾰμις ", которым он пользуется именно в Феодоровом месте. Игнорировать это определение, как это делает А.Сабо́, пытаясь обосновать предлагаемое им толкование математического термина

δύνᾰμις, нельзя. Свое отношение к работам А.Сабо по истории древнегреческой математики я выразил в двух рефератах, напечатанных в международном реферативном журнале "Центральблашн фюр математик".

21 Для большей ясности, приводим это рассуждение.

Ищем наибольшую общую меру отрезков AD и AC, т.е. диагонали $AD = \sqrt{3}$ и стороны $AC = 1$ прямоугольника со сторонами 1 и $\sqrt{2}$ (рис. 29). Если бы отрезок $AC = 1$ укладывался в отрезке $AD = \sqrt{3}$ 2 раза, то отрезок AD равнялся бы двойке и его квадрат был бы равен 4, но он равен 3. Поэтому AC укладывается в AD только один раз, с остатком, меньшим, чем AC. Отнимем AC от AD. Остатком будет отрезок CD. Для того чтобы отнять первый остаток CD от стороны AC, заметим, что AC вдвое меньше, чем CB. А так как $CB = CD + DB$, то $AC = \frac{CD + DB}{2} = \frac{CD}{2} + \frac{DB}{2}$. Следовательно, остатком от отнятия первого остатка $CD = \frac{CD}{2} + \frac{CD}{2}$ от стороны AC будет: $AC - CD = \frac{CD}{2} + \frac{DB}{2} - \frac{CD}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{DB}{2} - \frac{CD}{2}$. Из равенств (27б) и (27д) следует: $\frac{DB}{CD} = \frac{AD}{AC}$, т.е. CD содержится в DB столько раз, сколько раз AC содержится в AD. А так как AC содержится в AD один раз, с остатком, меньшим, чем AC, то и CD содержится в DB один раз, с остатком, меньшим, чем CD. А так как $\frac{DB}{2} : \frac{CD}{2} = \frac{DB}{CD}$, то и $\frac{CD}{2}$ содержится в $\frac{DB}{2}$ один раз, с остатком, меньшим, чем $\frac{CD}{2}$. Таким образом, $\frac{CD}{2}$ можно отнять от $\frac{DB}{2}$ один раз, следовательно, от $AC = \frac{CD}{2} + \frac{DB}{2}$ два раза, с остатком, меньшим, чем $\frac{CD}{2}$. Но два раза $\frac{CD}{2}$ это один раз CD. Следовательно, как мы уже видели, первый остаток CD можно отнять от стороны AC один раз, с остатком, меньшим, чем CD. Вторым остатком является $\frac{DB}{2} - \frac{CD}{2}$. Для того чтобы отнять второй остаток $\frac{DB}{2} - \frac{CD}{2}$ от первого остатка CD столько раз, сколько возможно, положим отрезок $\frac{CD}{2}$ новым начальным отрезком A_1C_1, а отрезок $\frac{DB}{2}$ – новым начальным отрезком A_1D_1 (рис. А).



А

Тогда вторым остатком $\frac{DB}{2} - \frac{CD}{2}$ будет отрезок C_1D_1. Для того чтобы продолжить антифайрезис, присоединим к половине первого остатка $\frac{CD}{2} = A_1C_1$ вдвое больший отрезок $\frac{CD}{2}2 = CD = 2A_1C_1$. Тогда прямая $A_1B_1 = A_1C_1 + 2A_1C_1 = 3A_1C_1$. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = 3$. Так как прямая A_1B_1 разделена в точках C_1 и D_1 на три части, имеем:

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} D_1B_1^2 + A_1D_1^2 = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} A_1C_1^2 + \frac{A_1B_1}{C_1B_1} C_1D_1^2,$$

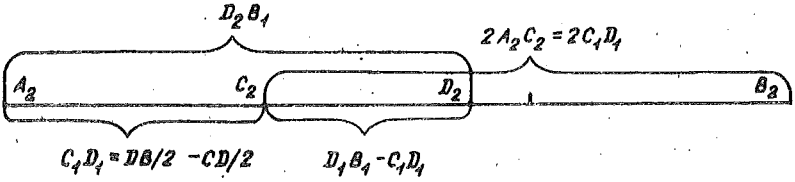
или

$$\frac{CD}{2 \cdot CD} D_1B_1^2 + \left(\frac{DB}{2}\right)^2 = 3\left(\frac{CD}{2}\right)^2 + \frac{3A_1C_1}{2A_1C_1} C_1D_1^2,$$

или $\frac{1}{2} D_1B_1^2 + \frac{DB^2}{4} = 3\frac{CD^2}{4} + \frac{3}{2} C_1D_1^2$.

Так как $DB^2 = 3CD^2$, то $\frac{DB^2}{4} = 3\frac{CD^2}{4}$, или $\left(\frac{DB}{2}\right)^2 = 3\left(\frac{CD}{2}\right)^2$, или

$A_1D_1^2 = 3A_1C_1^2$. Следовательно, $\frac{A_1C_1}{C_1B_1}D_1B_1^2 = \frac{A_1B_1}{C_1B_1}C_1D_1^2$, откуда $\frac{D_1B_1^2}{C_1D_1^2} = \frac{A_1B_1\cdot C_1B_1}{C_1B_1\cdot A_1C_1} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} = 3$. Так как и $\frac{A_1D_1^2}{A_1C_1^2} = 3$, то $\frac{D_1B_1^2}{C_1D_1^2} = \frac{A_1D_1^2}{A_1C_1^2}$. Следовательно, $\frac{D_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_1D_1}{A_1C_1}$. А так как $\frac{A_1D_1}{A_1C_1} = \frac{DB\cdot CD}{2\cdot CD} = \frac{DB}{CD} = \frac{AD}{AC}$, то A_1C_1 можно уложить в A_1D_1 один раз, следовательно, и C_1D_1 можно уложить в D_1B_1 один раз, т.е. отнять от D_1B_1 один раз. Таким образом, второй остаток C_1D_1 можно отнять от отрезка D_1B_1 один раз, а от отрезка $C_1B_1 = C_1D_1 + D_1B_1 = 2A_1C_1$, т.е. от первого остатка CD, два раза. Следовательно, третьим остатком будет $CD - 2C_1D_1 = C_1D_1 + D_1B_1 - C_1D_1 - C_1D_1 = D_1B_1 - C_1D_1$. Для того чтобы отнять третий остаток $D_1B_1 - C_1D_1$ от второго остатка $C_1D_1 = \frac{DB}{2} - \frac{CD}{2}$ столько раз, сколько возможно, положим второй остаток $C_1D_1 = \frac{DB}{2} - \frac{CD}{2}$ новым начальным отрезком A_2C_2, а отрезок D_1B_1 – новым начальным отрезком A_2D_2 (рис. Б).



Б

Тогда третьим остатком $D_1B_1 - C_1D_1$ будет отрезок C_2D_2. Для того чтобы продолжить антифайрезис, присоединим к новому начальному отрезку A_2C_2 вдвое больший отрезок $2A_2C_2 = C_2B_2$. Тогда $A_2B_2 = A_2C_2 + 2A_2C_2 = 3A_2C_2$. Следовательно, $\frac{A_2B_2}{A_2C_2} = 3$. Так как прямая A_2B_2 разделена в точках C_2 и D_2 на три части, имеем:

$$\frac{A_2C_2}{C_2B_2}D_2B_2^2 + A_2D_2^2 = \frac{A_2B_2}{A_2C_2}A_2C_2^2 + \frac{A_2B_2}{C_2B_2}C_2D_2^2,$$

или

$$\frac{A_2C_2}{2A_2C_2}D_2B_2^2 + D_1B_1^2 = \frac{3A_2C_2}{A_2C_2}C_1D_1^2 + \frac{3A_2C_2}{2A_2C_2}C_2D_2^2,$$

или

$$\frac{1}{2}D_2B_2^2 + D_1B_1^2 = 3C_1D_1^2 + \frac{3}{2}C_2D_2^2.$$

Так как $D_1B_1^2 = 3C_1D_1^2$, т.е. $A_2D_2^2 = 3A_2C_2^2$, то $\frac{A_2C_2}{C_2B_2}D_2B_2^2 = \frac{A_2B_2}{C_2B_2}C_2D_2^2$, откуда $\frac{D_2B_2^2}{C_2D_2^2} = \frac{A_2B_2\cdot C_2B_2}{C_2B_2\cdot A_2C_2} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} = 3$. Следовательно, $\frac{D_2B_2^2}{C_2D_2^2} = \frac{D_1B_1^2}{C_1D_1^2}$ и $\frac{D_2B_2}{C_2D_2} = \frac{D_1B_1}{C_1D_1}$. Но $\frac{D_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_1D_1}{A_1C_1} = \frac{DB}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{D_2B_2}{C_2D_2}$. Следовательно, третий остаток C_2D_2 можно отнять от отрезка D_2B_2 один раз. Для того чтобы отнять третий остаток C_2D_2 от второго остатка $C_1D_1 = A_2C_2$ столько раз, сколько возможно, заметим опять, что $C_1D_1 = A_2C_2$ вдвое меньше, чем C_2B_2. А так как $C_2B_2 = C_2D_2 + D_2B_2$, то $C_1D_1 = A_2C_2 = \frac{C_2B_2 + D_2B_2}{2} = \frac{C_2B_2}{2} + \frac{D_2B_2}{2}$. Следовательно, остатком от отнятия третьего остатка $C_2D_2 = \frac{C_2D_2}{2} + \frac{C_2D_2}{2}$ от второго остатка $C_1D_1 = A_2C_2$ будет $A_2C_2 - C_2D_2 = \frac{C_2D_2}{2} + \frac{D_2B_2}{2} - \frac{C_2D_2}{2} - \frac{C_2D_2}{2} = \frac{D_2B_2}{2} - \frac{C_2D_2}{2}$. Так как $\frac{D_2B_2}{C_2D_2} = \frac{AD}{AC}$, то C_2D_2 содержится в D_2B_2 столько целочисленных раз, сколько целочисленных раз AC содержится в AD, т.е. один раз. Следовательно, C_2D_2 можно отнять от $\frac{D_2B_2}{2}$ один раз. А так как $\frac{D_2B_2}{2} : \frac{C_2D_2}{2} = \frac{D_2B_2}{C_2D_2}$, то и $\frac{C_2D_2}{2}$ можно

отнять от $\frac{D_2 B_2}{2}$ один раз. Следовательно, от $A_2 C_2 = \frac{C_2 D_2}{2} + \frac{D_2 B_2}{2}$ два раза. Но два раза $\frac{C_2 D_2}{2}$ это один раз $C_2 D_2$. Следовательно, третий остаток $C_2 D_2$ можно отнять от второго остатка $C_1 D_1 = A_2 C_2$ один раз, с остатком, меньшим, чем $C_2 D_2$. Мы видим, что вернулись к началу рассуждения.

Этот рекуррентный процесс можно продолжить и получить бесконечную последовательность остатков $C_n D_n$, укладывающихся в предыдущих остатках $C_{n-1} D_{n-1}$ попеременно или один или два раза, с остатком, меньшим, чем $C_n D_n$. Так как остаток $C_n D_n$ никогда не уложится в остатке $C_{n-1} D_{n-1}$ целое число раз без остатка, то начальные отрезки AD и AC, т.е. диагональ $AD = \sqrt{3}$ и сторона $AC = 1$ прямоугольника со сторонами 1 и $\sqrt{2}$, несоизмеримы.

Мы видим, что это доказательство их несоизмеримости есть не что иное, как геометрическое разложение $\sqrt{3}$ в двучленную лагранжеву цепную дробь.

22 Впервые исследование /М.Е.Паева/ об антифайрезисе Феодора было опубликовано в 1969 г. в XIII томе Трудов Днепропетровского сельскохозяйственного института /24, 67-71/ и через 13 лет - в 1982 г. вторично, на немецком языке в Международном печатном органе "Архив истории точных наук" /98, 87-99/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ленин В.И. Конспект книги Гегеля "Лекции по истории философии" // Полн. собр. соч. - Т. 29. - С. 253.
2. Ленин В.И. Конспект книги Гегеля "Наука логики" // Там же. - С. 204.
3. Аристотель. Физика / Пер. В.П.Карпова // Аристотель. Сочинения : В 4 т. - М. : Мысль, 1981. - Т. 3.
4. Ахутин А.В. Проблема эксперимента в античной науке // Тр. XIII Междунар. конгр. по истории науки. Секции 3, 4. - М. : Наука, 1974.
5. Башмакова И.Г. Лекции по истории математики в Древней Греции // Историко-математические исследования. - М. : Изд-во АН СССР, 1950. - Вып. 11.
6. Энциклопедич. словарь / Брокгауз А.Ф. и Ефрон И.А. - Спб., 1897. - Т. 20, полутом 39. - С. 329.
7. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука / Пер И.Н.Веселовского. - М. : Физматгиз, 1959.
8. Витрувий. Десять книг об архитектуре / Пер. Ф.А.Петровского. - М. : Всесоюз. акад. архитектуры, 1936. - Т. 1.
9. Вейсман А.Д. Греческо-русский словарь. - Спб., 1899.
10. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. - М. : Наука, 1967.
11. Грамматика русского языка. - М. : Изд-во АН СССР, 1960. - Т.1.
12. Греко-российский словарь / Сост. Грацинский. - М., 1878.
13. Греческо-русский словарь. - М., 1848. - Ч. 2.
14. Даль В. Толковый словарь живого великорусского языка. - М., 1955. - Т. 3.
15. Дворецкий И.Х. Древнегреческо-русский словарь / Под ред. С.И.Соболевского. - М., 1958.
16. Лосев А.Ф. Античная мифология в ее историческом развитии. - М. : Учпедгиз, 1957.
17. Лосев А.Ф. История античной эстетики : Софисты. Сократ. Платон. - М. : Искусство, 1969.
18. Лузин Н.Н. Предисловие к письмам Л.Эйлера к Х.Гольдбаху // Историко-математические исследования. - М. : Наука, 1965. - Вып. 16.
19. Нейгебауер О. Точные науки в древности / Пер. Е.В.Гохмана / Под ред. и с предисл. А.П.Юшкевича. - М. : Наука, 1968.
20. Николай Коперник : К 100-летию со дня рождения. - М. : Наука, 1973.
21. Новиков А.И. Семантика текста и ее формализация. - М. : Наука, 1983.
22. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Пер. А.Н.Крылова. - М.; Л. : ГОНТИ, 1936.
23. Паев М.Е. О приближенном вычислении квадратных корней в Древней Греции // Историко-математические исследования. - М. : Наука, 1965. - Вып. 16.
24. Паев М.Е. Прямое доказательство иррациональности квадратного

корня из любого целого неквадратного числа // Тр. Днепропетровск. с/х ин-та. - Днепропетровск, 1969. - Т. 13. - С.67-71.
25. Наев М.Е. О двух математических местах в сочинениях Платона // Тр. XIII Междунар. конгр. по истории науки. Секции 3, 4. - М. : Наука, 1974.
26. Платон. Протагор / Пер. В.С.Соловьева // Платон. Сочинения : В 3 т. - М. : Мысль, 1968. - Т. 1 / Под ред. А.Ф.Лосева.
27. Платон. Теэтет / Пер. Т.В.Васильевой // Платон. Сочинения : В 3 т. - М. : Мысль, 1970. - Т. 2 / Под ред. А.Ф.Лосева.
28. Платон. Государство / Пер. А.Н.Егунова // Платон. Сочинения : В 3 т. - М. : Мысль, 1971. - Т. 3, ч. 1 / Под ред. В.Ф.Асмуса.
29. Платон. Тимей / Пер. С.С.Аверинцева // Платон. Сочинения : В 3 т. - М. : Мысль, 1971. - Т. 3, ч. 1 / Под ред. А.Ф.Асмуса.
30. Платон. Политика или Государство / Пер. В.Н.Карпова // Сочинения Платона. - Спб, 1863. - Ч. 3. - С. 403-404.
31. Платон и его эпоха. - М. : Наука, 1979.
32. Розенфельд Б.А. Аналитический принцип непрерывности в геометрии // Историко-математические исследования. - М. : Наука, 1965. - Вып. 16.
33. Русская грамматика. - М. : Ин-т русского языка АН СССР, 1980.- Т. 1.
34. Соболевский С.И. Древнегреческий язык. - М. : Изд-во АН СССР, 1948.
35. Толковый словарь / Под ред. Б.М.Волина и Д.Н.Ушакова. - М., 1939. - Т. 3.
36. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века / Пер. П.С.Юшкевича. - М. : ГОНТИ, 1938.
37. Adam J. The nuptial number of Plato. - London, 1891.
38. Adam J. The arithmetical solution of Plato's number // The classical review. - London, 1902. Vol. 16. - P. 17-23.
39. Adam J. The Republic of Plato / Ed. by J.Adam. - Cambridge, 1963. - Vol.2. - P. 204-208.
40. Ahlvers A. Zahl und Klang bei Platon: Interpretationsversuche zur Hochzeitszahl im "Staat" etc.-Bern; Stuttgart, 1952. - S. 11-20.
41. Alexandri Aphrodisiensis in Aristotelis Metaphysica commentaria / Ed. M.Hayduck. - Berolini, 1891.
42. Alline H. Histoire du texte de Platon. - Paris, 1915.
43. Anderhub J.H. Genetrix Irrationalium, Joco-Seria aus den Papieren eines reisenden Kaufmanns. - Wiesbaden; Biebrich, 1941.
44. Anonymer Kommentar zu Platons Theaetet (Papyrus 9782) / Unter Mitwirk. von J.L.Heiberg bearb. von H.Diels und W.Schubart. - Berlin, 1905.
45. Aristidis Quintiliani de musica libri tres / Ed. R.P.Winnington-Ingram. - Lipsiae, 1963. - P. 124 (P. 152 Meibom).
46. Aristoteles' Werke / Herausg. von F. Susemihl. - Bd. VI. - Der "Politik" erster Teil: Text und Übersetzung. - Leipzig, 1879.
47. Aristotelis Metaphysica / Rec. H. Bonitz. - Bonnae, 1848. - Pars 1.
48. Aristotelis opera / Ed. Academia regia Borusica. - Vol. primum. Aristoteles graece ex / Rec. I. Bekkeri. - Berolini, 1831.
49. Becker O. ΠΑΡΑΜΗΚΕΠΙΠΕΔΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ Die Zahlen von der Form n.n.(n+1) bei Nikomachos von Gerasa (Mit einem Anhang über die Platonische Hochzeitszahl) // Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Mathematik. Abt. B: Studien.- Berlin, 1938. - B. 4.-H. 3.
50. Bergh P. Seiten und Diametralzahlen bei den Griechen // Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-lit. Abt. - Leipzig, 1886.

51. Bodin J. De methodo historiae. - Basileae, 1576.
52. Bodin J. La Republique. - Liv. 4, Ch. 2. - Paris, 1577.
53. Brown M. Theaetetus: Knowledge as Continued Learning // Journal of the History of Philosophy. - 1969. - N 7.
54. Cantor M.B. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. - Leipzig, 1880. - B. 1.
55. Cantor M.B. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. - Leipzig, 1894. - B. 1.
56. Cardano G. De proportionibus. (Theor. COXV). - Basileae, 1570.
57. Didot A.F. Alde Manuce. - Paris, 1875.
58. Dupuis J. Le nombre géométrique de Platon. - Paris, 1881.
59. Fermat de P. Oeuvres / Ed. P. Tannery - Ch. Henry. - Paris, 1891. - T. 1.
60. Fowler D.H. Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan Theory of Ratio // Archive for History of Exact Sciences. - 1982. - Vol. 26. - N 3. - P. 193-209.
61. Francisci Barocii Jacobi Filii Patritii Veneti commentarius in locum Platonis obscurissimum, et hactennus a nemine recte expositum in principio Dialogi octavide Rep. ubi sermo habetur de numero Geometrico, de quo proverbium est, quod numero Platonis nihil obscurius. - Bononiae, 1547, 1566.
62. Fries F. Platons Zahl. - Heidelberg, 1823.
63. Gardthausen V.Griechische Palaeographie. - Leipzig, 1913.
64. Gow J. The nuptial number // Journal of philosophy. - 1883. - N 12.
65. Günther S.Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden // Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-lit. Abd. - Leipzig, 1882.
66. Hankel H. Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. - Leipzig, 1874.
67. Hardy G.H., Wright E.M. An Introduction to the Theory of Numbers. - Oxford, 1938.
68. Heath Th. L. A History of Greek Mathematics. - Oxford, 1921. - Vol. 1.
69. Hegel G.W.F. Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie.- Stuttgart, 1928. - B. 2.
70. Heilermann. Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerten der irrationalen Quadratwurzeln // Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-lit. Abt. - Leipzig, 1881.
71. L.F. Heindorfii ad Eichstaedtium epistola critica in Platonis Theaetetum (scripta 1803) // Nova acta societatis latinae Jenensis / Ed. Eichstaedt. - 1806. - Vol. 1.
72. Heller S. Ein Beitrag zur Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Dialog "Theaetet" // Centaurus. - 1956. - Vol. 5. - N 1.- S. 1-58.
73. Hermann C.F. De numero Platonis disputatio. - Marburg, 1839.
74. Hofmann J.E. Ergänzende Bemerkungen zum "geometrischen" Irrationalitätsbeweis der alten Griechen // Centaurus. - 1956. - Vol. 5. - N 1.
75. Hultsch F. Die geometrische Zahl in Platon's: VIII Buche vom Staate // Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-lit. Abt. - Leipzig, 1882. - S. 41-60.
76. Hultsch F. Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes // Nachr. Königl. Gesellsch. d. Wiss. - Göttingen, 1893. - N 10.
77. Hultsch F. Die pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalzahlen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen // Bibl. Math.,Zeitschr. f. Gesch. d. math.: Wissenschaften, herausg. von G. Eneström. - Leipzig, 1900.
78. Hunziker J. Argumenta dialogorum // Platonisopera, t. III/ Ed. A.F.Didot. - Parisiis, 1873. - P. 109.

79. Itard J. Les Livres arithmetiques d' Euclide. - Paris, 1961.
80. Jamblichus chalcidensis in Nicomachi Geraseni arithmeticam introductionem, et de Fato / Ed. S. Tennulius. - Arnheim,1668. - P. 115-117.
81. Knorr W.R. The evolution of the euclidean elements. - Dodrecht (Holland); Boston - (USA), 1975.
82. La République de Platon / Ed. Brocas et Humblot. - Paris,1762.
83. Maffei R. Commentarii (Tab. XXXV). - Roma, 1506.
84. Maracchia S. La fama "immeritata" di Enopide di Chio Archimede. - Paris, 1978.
85. Martin Th.H. Histoire de l'arithmétique, le nombre nuptial et le nombre parfait de Platon: Explication d'une énigme mathématique qui se trouve au commencement du VIIIe livre de la République. - Paris, 1857.
86. Melanchton Ph. Declamatio de periodis imperiorum.-Strasbourg, 1559. T. 3.
87. Mengenlehre // Kleine Enzyklopädie. Mathematik. - Leipzig, 1970.
88. Mersenne M. Traité de l'harmonie universelle. - Paris, 1627.- Tome 2 (Théorém XIII).
89. Nesselmann G.H.F. Die Algebra der Griechen. - Berlin, 1842.
90. Nicomachi Geraseni Pythagorei Εἰσαγωγὴ ἀριθμητική.- Paris, 1538.
91. Oeuvres de Platon / Trad par V.Cousin. - Paris, 1824.- T.2.
92. Oeuvres de Platon / Trad. par V. Cousin. - Paris,1834.-T.10.
93. Omnia Divini Platonis opera / Tralat. M. Ficini. Liber XXXI / Ed. Froben. - Basileae, 1551.
94. Omnia Platonis opera / Ed. Aldus Manutius (Rec. Marcus Musurus). - Venetiis, 1513.
95. Paiow M. Die Mathematische Staatsstelle. I // Archive for History of Exact Sciences, 1971. Vol. 8. - N 1/2. P. 1-8.
96. Paiow M. Die Mathematische Staatsstelle. II // Archive for History of Exact Sciences. 1974. Vol. 12. - N 2. P.174-185.
97. Paiow M. Die Mathematische Staatsstelle. III // Archive for History of Exact Sciences. 1977. Vol. 18. - N 1. P.1-26.
98. Paiow M.E. Die Mathematische Theaetetsstelle // Archive for History of Exact Sciences. - 1982. Vol. 27. - N 1. P. 87-99.
99. Pensées de Platon / Rec.et trad.J.V.Le Clerc. - Paris,1819.
100. Platonis omnia opera / Ed. H. Petrus. - Basileae, 1566.
101. Platonis opera quae exstant omnia, ex nova Ioannis Serrani interpretatione etc / Ed. J. de Serres, H. Estienne, exudebat H. Stephanus. - Geneve, 1578.
102. Platonis quae supersunt opera / Rec. G. Stallbaum. - Lipsiae, 1823. - Tom. 5.
103. Platonis Dialogi graece et latine / Rec. I. Bekkeri. - Berolini, 1816-1818.
104. Platonis quae extant opera / Rec. F. Astius. - Lipsiae,1822.
105. Platonis opera omnia / Rec. G. Stallbaum. - Lipsiae, 1869. - Vol. 8, sect. 1.
106. Platons Werke / Von F. Schleiermacher. - Berlin, 1805. B. 1. Teil 2.
107. Plato's Staat / Uebersetzt von F. Schleiermacher. - Berlin, 1870.
108. Plato's Republic / Ed. by B. Jowett and L. Campbell. - Oxford, 1894. - Vol. 2.
109. Plato's Republic / Ed. by B. Jowett and L. Campbell. - Oxford, 1894. - Vol. 3.
110. Platon. Oeuvres completes. T. 8, 2 partie (Théétète, texte etabli et traduit /Par A. Diès). - Paris, 1924.
111. Plato. Theaetetus, Platonis opera / Rec. I. Burnet. - Oxonii, 1962. - T. 1.

112. Plato. Meno, Platonis opera / Rec. I. Burnet. - Oxonii, 1962. T. 3.
113. Plato. Respublica, Platonis opera / Rec. I. Burnet. - Oxonii, 1962. - T. 4.
114. Plutarchi Chaeronensis opuscula varia. De Iside et Osiride liber / Interpr. X. Augustano, ed. H. Estienne. - Geneve, 1572.
115. Plutarch. Moralia / Ed. G.Bernardakis. - Leipzig, 1889. T. 2.
116. Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii / Rec. G. Fridlein. - Lipsiae, 1873.
117. Procli Diadochi in Platonis Rem Publicam commentarii / Ed. G. Kroll. - Lipsiae, 1901. - Vol. 2.
118. Reidemeister K. Das exakte Denken der Griechen. - Hamburg, 1949.
119. Rettig G.F. De numero Platonis. - Bern, 1835; Prolegomena ad Platonis Republicam. - Bern, 1845.
120. Sachs E. De Theaeteto Atheniensi mathematico//Dissertation.- Berlin, 1914.
121. Schanz M. Studien zur Geschichte des Platonischen Textes. - Würzburg, 1874.
122. Scmiidt H. Kritischer Kommentar zu Platos Theätet. - Leipzig, 1877.
123. Schmidt H. Exegetischer Kommentar zu Platos Theätet. - Leipzig, 1880.
124. Stamatis E.S. Ueber die mathematische Stelle des Theaetetus von Platon. - Athens, 1957; Praktika tes Akademias Athenon. - Athens, 1956.
125. Stamatis E.S. ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Ἀθῆναι: Athens. - 1976.
126. Susemihl F.Die genetische Entwicklung der Platonischen Philosophie. - Leipzig,1857.-B.2;Susemihl F,Aristoteles' Werke:B.7 (Anmerkungen zum achten Buche der "Politik").- Leipzig,1879.- S. 369-378.
127. Szabó A. Theaitetos und das Problem der Irrationalität in der griechischen Mathematikgeschichte // Acta Antiqua Acad. Sci. Hungaricae. - 1966. - N 14.
128. Tannery P. Le nombre nuptial dans Platon // Revue philosophique de la France et de l'étranger / Dirigée par Th. Ribot. - Paris, 1876.
129. Tannery P. Sur la langue mathématique de Platon. Mémoir. scientifiq. / Publies par J.L.Heiberg et H.G.Zeuthen. - Touluse; Paris, 1912. T. 2.
130. Tannery P.Du Rôle de la musique grecque dans le developpement de la mathématique pure. Mémoir. scientifiq. / Publies par J.L.Heiberg et H.G.Zeuthen. - Touluse; Paris, 1915. - T. 3.
131. The commentary of Pappus on book X of Euclid's elements. Arabic text and transl. by W.Thomson; with introductory remarks and a glossary of technical terms by G.Junge and W.Thomson. - Cambridge; Mass., 1930.
132. The Dialogues of Plato / Transl. into English by B.Jowett. - Oxford, 1953. - Vol.2.
133. The Oxyrhynchus papyri. P. XV / Ed. by B.P.Grenfell and A.S.Hunt. - London, 1922.
134. Theonis Smyrnaei philosophi platonici expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium / Rec.E.Hiller. -Lonsiae, 1878.
135. Theonis Smyrnaei Platonici expositio eorum, quae in mathematicis ad Platonis lectionem utilia sunt / Ed. Bullialdus. - Paris, 1644.
136. Toeplitz O. Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit von Conrad Müller // Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math., Astronom. u. Phys., Abt. B: Studien. - Leipzig. - 1933. - B. 2.

137. Toeplitz O. Die mathematische Epinomisstelle // Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math., Astronom. u. Phys., Abt. B: Studien Leipzig, 1933. - B. 2. - S. 343-344.
138. Vogt H. Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrh. // Bibl. Math., Zeitschr. f. Gesch. d. math. Wiss., herausg. von G. Eneström. - Leipzig, 1909-1910. - S. 97-155.
139. Van der Waerden B.L. Die Arithmetik der Pythagoreer. Die Theorie des Irrationalen // Math. Ann. - 1949. - B. 120. - H. 4.
140. Wasserstein A. Theaetetus and the History of the Theory of Numbers // Classical Quarterly. - 1958. - N 52.
141. Weber O. De numero Platonis. - Cassel, 1862.
142. Wiegand Th., Schrader H. Priene. - Berlin, 1904.
143. Zeller E. Die Philosophie der Griechen. - Tübingen, 1859. - B. II.
144. Zeuthen H.G. Sur la constitution des livres arithmétiques des Eléments d' Euclide et leur rapport à la question de l' irrationalité // Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og det Medlemmers Arbejder. - Aaret, 1910.

ОГЛАВЛЕНИЕ

М.Е.ПАЕВ – ТОЛКОВАТЕЛЬ ПЛАТОНОВСКИХ ТЕКСТОВ (Заиченко Г.А., Семушкин А.В.) 3

ЧАСТЬ I. ПЛАТОНОВСКОЕ ЧИСЛО. 13

Возникновение проблемы 13
Текстологическая загадка 31
Загадка фрагмента 546 ВС 43
Семантическая загадка 44
Семантическое звено "δν ἐπίτριτος πνθμὴν περιπάδι" 49
Сочинение Теона Смирнского 53
Подлинник фрагмента 546 ВС 118
Образцы переводов фрагмента 546 ВС 118
Подлинный перевод фрагмента 546 ВС 123
Расшифровка фрагмента 546 ВС 124
Ошибка Прокла. 134

ЧАСТЬ II. ФЕОДОРОВО МЕСТО 155

Возникновение проблемы 155
Исторический обзор 156
Предпосылки правильного перевода начала рассказа Теэтета 157
Терминологическая проблема 161
Выход из затруднительного положения. 165
Семантическая проблема 169
Археологические данные 176
Правильный перевод начала рассказа-Теэтета 181
Пифагорейское открытие несоизмеримости диагонали и стороны квадрата 183
Открытие метода Феодора. 185

ПРИМЕЧАНИЯ 205

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 213

Монография

Михаил Евсеевич Паев

РЕШЕНИЕ ДВУХ АНТИЧНЫХ ПРОБЛЕМ

Утверждено к печати постановлением
бюро Редакционно-издательского совета АН УССР

Редактор А.С.Грожин
Обложка художника Л.В.Максимчук
Художественный редактор И.Е.Писарева
Технические редакторы Т.К.Валицкая, Л.Н.Муравцева
Корректоры С.И.Кримец, Н.А.Стрелец

ИБ № 8684

Подп. в печ. 25.11.87. БФ 26135. Формат 60x84/16. Бум. офс. № 1.
Офс. печ. Усл.печ.л. 12,79. Усл. кр.-отт. 12,91. Уч.-изд. л.
14,06. Тираж 860 экз. Заказ 7-377. Цена 2 р. 90 к.

Оригинал-макет подготовлен в издательстве "Наукова думка". 252601
Киев 4, ул. Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги. 252004 Киев 4, ул. Репина, 4.