

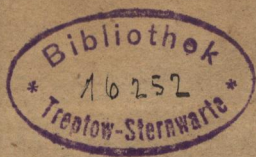


Jef. Gustav Lrn. Järling, Do. med. yttl. bryt 2. Ant. bryt. 2^o i Wimar

30. 1775 känd 26 f. Jästrow.

30. 1847 Sept. 22 i Wimar.

D 23



18

J. H. Meyer.

D 23

S. 27



СЕМЁНА ЕФИМОВИЧА БЕЛОЗЁРОВА

Mathematische Abhandlungen.

Erste Sammlung,

enthaltend:

- I. Die Durchschnittspunkte der gegenüber liegenden Seiten der Vielecke im Kreise, analytisch betrachtet.
 - II. Theorie der vollständigen magischen Quadrate, nebst Anhang.
 - III. Analysis der Bewegung der Doppel-Körper, auf festen Unterlagen, phoronomisch und dynamisch betrachtet.
-

Von

D. Johann Christian Daniel Hellerung,
practischem Arzte zu Wismar.

Rostock und Schwerin,
in Commission der Stillerschen Hofbuchhandlung,
1 8 2 3.

V o r r e d e.

Der geneigte Leser und Beurtheiler wird gebeten, diese erste Sammlung gleichsam als ein Probestück anzusehen, wodurch der Verf. zu erfahren wünscht: ob seine Waare den Beyfall des mathematischen Publikums erhalten werde. In diesem Falle könnte er noch einige ähnliche Sammlungen folgen lassen, wozu er Vorrath im Kopf und Pulte hat. Sollte einiges von dem, was der Verf. für neu und beachtenswerth ansah, dies nicht in dem Grade seyn, als er glaubte; so muß er zu einiger Entschuldigung anführen: daß er in einer kleinen Stadt an der nördlichen Gränze Deutschlands lebt, und bey Nachforschungen größtentheils auf seine eigne kleine Büchersammlung eingeschränkt ist.

Bei der ersten Abhandlung war es ihm auffallend, daß die so allgemein gefeyerte Auflösung (besonders die synthetische) des Problems „durch λ gegebene Punkte ein λ eck in einen gegebenen Kreis zu ziehen“ — doch nicht in ihrer wahren Ausdehnung erkannt gewesen zu seyn scheint. Wenigstens zeigen Klügel und Carnot, die doch beyde auch das geschichtliche dieses Problems geben, keine Spur

davon. Der Verf. würde nichts weiter hinzufügen, wenn er nicht noch eine Sündenbeichte über diese Abhandlung abzulegen hätte. Er muß es nemlich hier nur gestehen, daß sie sein jüngstes Erzeugniß ist: und mit einer Art Vorliebe, wie man sie den jüngsten Kindern wohl zu erzeigen pflegt, stellte er sie an die Spitze, indem er noch während des Druckes daran feilte. Dadurch ist es denn gekommen, daß in der Eile einige Kostflecke übersehen sind, die hier noch eine neue Politur, nemlich ein paar Zusätze und selbst eine Berichtigung nöthig machen.

Diese letztere, als die Hauptsache, folgt hier zuerst. Nemlich S. 17. §. 12. ist der zweite Absatz „Die nothwendig“ unrichtig, und muß so lauten:

„Die quadratische Gleichung, welche wir in §. 10. für t „gefunden haben, wird, wenn wir die Bedingungs-Gleichung „nicht berücksichtigen, zwei Werthe für t geben. Wenn wir „diese als richtig annehmen wollen, so müssen wir sie und die „daraus folgenden Werthe der übrigen t , in die Gleichung „(1) §. 6. setzen, und damit die in §. 7. angedeutete Rech- „nung anstellen. Dadurch würde man alsdann für den ersten „unserer Punkte dieselbe Bedingung erhalten, welche aus der „allgemeinen Bedingungs-Gleichung folgt.“

Die Folgerung bleibt übrigens richtig.

Zu S. 7. §. 4. am Ende, kann man setzen:

x und y können auch $= 0$ werden, wo man alsdann statt α^0 , β^0 , nur wieder α und β schreibt.

§. 9. §. 7. d. haben wir die etwas vage Vermuthung stehen lassen, weil sie eigentlich die Ursache war, wodurch wir zur Berechnung der 10seitigen Figuren, und damit zur Auffindung des Gesetzes für alle $4\lambda + 2$ seitige Figuren, angetrieben wurden.

Zu §. 11. §. 8. bemerke man:

sollte man über den rechten Factor noch zweifelhaft seyn, so kann man, anstatt $t = 0$, auch $t = \infty$ setzen: und der in den Resultaten beyder Voraussetzungen befindliche gemeinschaftliche Factor, wird die Bedingungs-Gleichung enthalten müssen.

Noch ist anzumerken vergessen:

Die in den §§. 13, 14, 15, 22, für den Kreis bewiesenen Lehrsätze, gelten auch für alle andere Kegelschnitte, auch §. 11. b. so weit dort von Tangenten an den Kreis die Rede ist. Denn in jeder Projection einer Ebene auf eine andere, bleiben gerade Linien immer gerade, und Berührungspuncte immer Berührungspuncte: und jeder Kegelschnitt kann als eine solche Projection des Kreises angesehen werden.

Auch die §. 40. angegebenen Druckfehler bittet der Verf. nicht zu übersehen, damit das ganze Sündenregister getilgt werde.

Der Gegenstand der zweiten Abhandlung ist freilich trivial. Aber da das Verfahren, diese magischen Quadrate zu bilden, noch unbewiesen war, und sich der Beweis so einfach und doch allgemein aus den Elementen der Zahlenlehre herleiten ließ; so hofft der Verf., daß die Leser wenigstens mit der Behandlung des Gegenstandes zu-

frieden seyn werden. Der kleine Anhang soll nach der Absicht des Verf. dazu dienen: manchem Verehrer des Gauß'schen Scharffsinnes in seinem vortrefflichen Beweise, diesen vielleicht zugänglicher und annehmlicher zu machen. Eine andere wird ihm kein billiger Leser zuvertrauen.

Bei der dritten Abhandlung war die Absicht des Verf. besonders dahin gerichtet: seine Aufgabe im Allgemeinen vollständig aufzulösen, so weit es ihm erlaubt war, ins innere Heiligthum der Mathematik zu bringen. Der ungelibtere Mathematiker wird daraus, wenn auch nicht für die Praxis, doch für den Geist einige Nahrung, vielleicht selbst Belehrung schöpfen können.

Wismar zu Ostern 1823.

Der Verfasser.

I.

Die

D u r c h s c h n i t t s - P u n c t e

der

gegenüber liegenden Seiten

2.

der

B i e l e c k e i m K r e i s e,

analytisch betrachtet.

I.

Wir nehmen hier den Ausdruck: Vieleck oder Polygon, in einem weiteren Sinne, als in der Geometrie; und verstehen unter einem λ eck, jede geradlinichte Figur von λ Seiten, welche zwischen λ Puncten, die auf dem Umfange eines Kreises liegen, auf folgende Weise gezogen sind:

Von einem ersten Puncte ziehe man zu irgend einem zweiten, eine gerade Linie; die folgende Linie ziehe man von diesem zweiten Punct, zu einem dritten; dann wieder von diesem dritten, zu einem vierten u. s. w.; bis man zuletzt den letzten Punct durch eine gerade Linie wieder mit dem ersten verbindet, und so die Figur schließt.

Man kann sich vorstellen, daß man eine solche Figur in Einem Zuge vollenden kann: und wir wollen die Seiten und Winkelpuncte in der Ordnung zählen, wie solche auf diese Weise ge- und bezogen werden müßten, wenn man eine Seite nebst ihrer Richtung, als die erste annimmt.

Wir werden künftig die Figuren dieser Art, zur Unterscheidung von den gewöhnlichen λ ecken, λ seitige nennen: unter welcher Benennung aber die gewöhnlichen λ ecke auch enthalten sind.

2.

Gegenüber liegende Seiten (diesen unbequemen Ausdruck werden wir künftig bloß mit den Anfangsbuchstaben: g. u. l. S.; und die Durchschnittspuncte der g. u. l. S., mit dem Beynamen: unsere Puncte, bezeichnen), finden eigentlich nur bey 2λ seitigen Figuren statt; wo man die x te und



$\lambda + x$ te Seite, die in den regelmässigen 2λ ecken parallel liegen, mit diesem Namen zu bezeichnen pflegt. Aber da wir hier nur von Figuren im Kreise reden; so können wir eine λ seitige Figur, auch als eine $\lambda + x$ seitige betrachten, wenn x nur nicht größer als λ ist. Denn man kann sich die x Seiten, als unendlich kleine, am Umfange des Kreises an x Winkelpuncten gelegene Seiten denken, deren Richtung durch die Tangenten des Kreises an diesen Puncten bestimmt wird. Daher erhellet denn: daß wir auch bey Figuren von einer ungeraden Seitenzahl, ihre g. u. l. S. auf verschiedene Weise betrachten können; je nachdem die Winkelpuncte bestimmt werden, an welchen die Tangenten die fehlenden Seiten ersetzen sollen.

Eben so wird man von denen auf dem Umfange des Kreises gelegenen Puncten einige als mehrfach ansehen, und diese mehrere Male beziehen können; indem man sich vorstellt, daß die Entfernung zwischen mehreren Puncten, unendlich klein geworden sey. So kann man z. B. bey $2x + 1$ Puncten, Einen als x fach ansehen, und eine $3x$ seitige Figur in den Kreis ziehen, die aus x Dreyecken bestehen würde, welche alle ihren Scheitel an dem x fachen Puncte haben.

3.

Die Leser werden die berühmte Aufgabe kennen: durch λ gegebene Puncte, ein λ eck in einen gegebenen Kreis zu ziehen.

La Grange gab bekanntlich zuerst davon eine analytische Auflösung, die auf eine quadratische Gleichung führt: und der junge Giordano di Ottajano fand darauf eine äußerst sinnreiche synthetische Auflösung dieser Aufgabe. In Rücksicht dieser letzteren werde ich mich auf: Klügels mathematisches Lexikon, Artikel Kreis, §. 115. seqq., beziehen.

Die eleganteste analytische Darstellung der Auflösung dieses Problems, habe ich in Schumachers Uebersetzung von Carnot *Géométrie de position*,

(Geometrie der Stellung. Altona 1810) gefunden: woselbst im Anhänge zum zweiten Theile, S. 369, diese Auflösung — welche von dem berühmten Gauß herrührt — mitgetheilt wird.

Da wir die folgenden Untersuchungen auf diese Auflösung stützen werden, so theilen wir sie hier mit, um den Lesern die Mühe des Nachsuchens zu ersparen. Sie ist folgende:

„Es sey der Halbmesser des Kreises, r , die Coordinaten der Winkelpuncte des Polygons:

$$\begin{aligned} r \cos \varphi, \quad r \sin \varphi \\ r \cos \varphi', \quad r \sin \varphi' \\ r \cos \varphi'', \quad r \sin \varphi'' \text{ \&c.} \end{aligned}$$

endlich die Coordinaten der gegebenen Puncte, durch welche die verlängerten Seiten des Polygons gehen, (welche respective den ersten und zweiten Winkelpunct, den zweiten und dritten u. s. w. verbinden)

$$\begin{aligned} a \cos A, \quad a \sin A \\ a' \cos A', \quad a' \sin A' \\ a'' \cos A'', \quad a'' \sin A'' \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Dann ist nach dem Grundsatz, daß, wenn drey Puncte, deren Coordinaten $x, y; x', y'; x'', y''$; sind, in einer geraden Linie liegen; die Bedingungs-Gleichung:

$$xy' + x'y'' + x''y - x'y - x''y' - xy'' = 0$$

Statt hat,

$$\left. \begin{aligned} rr \cos \varphi \sin \varphi' + ra \cos \varphi' \sin A + ar \cos A \sin \varphi \\ - rr \cos \varphi' \sin \varphi - ar \cos A \sin \varphi' - ra \cos \varphi \sin A \end{aligned} \right\} = 0$$

oder

$$r \sin (\varphi' - \varphi) - a \sin (\varphi' - A) + a \sin (\varphi - A) = 0$$

oder

$$r \cos \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = a \cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi - 2A)$$



Entwickelt man diese beyden Cofinus, dividirt dann mit $\cos \frac{1}{2} \Phi \cos \frac{1}{2} \Phi'$, und bezeichnet $\tan \frac{1}{2} \Phi$ mit t , $\tan \frac{1}{2} \Phi'$ mit t' ; und $\frac{a \sin A}{r - a \cos A} = \alpha$, $\frac{r + a \cos A}{r - a \cos A} = \beta$, so wird

$$\text{I. } t = \frac{1 - \alpha t'}{\alpha - \beta t'}.$$

Ganz auf ähnliche Art wird, wenn man $\tan \frac{1}{2} \Phi'' = t''$, $\frac{a' \sin A'}{r - a' \cos A'} = \alpha'$, $\frac{r + a' \cos A'}{r - a' \cos A'} = \beta'$ setzt,

$$\text{II. } t' = \frac{1 - \alpha' t''}{\alpha' - \beta' t''} \text{ u. s. w.}$$

Man sieht hieraus, daß man so viele Gleichungen erhält, als das Polygon Seiten hat, und daß man durch Verbindung derselben zuletzt auf eine quadratische Gleichung für t kommt.“

So schön sich diese Auflösung auch auf dem Papiere ausnimmt, so werden doch die Coefficienten, der Natur der Sache zufolge, bey einem Vieleck von einer größeren Seitenzahl, bald so zusammengesetzt; daß jedem Rechner die Lust vergehen würde, daraus ein Resultat zu ziehen. Diese Zusammensetzung wird sich aber, bey dem Gebrauch den wir von dieser Auflösung machen werden, sehr verringern.

4.

Zuerst wollen wir darauf aufmerksam machen, daß in den Voraussetzungen bey dieser Auflösung gar nichts enthalten ist, wodurch sie auf die gewöhnlichen Vielecke eingeschränkt würde; sondern daß sie auf alle vielseitige Figuren, wie wir solche in §. 1 und 2 bestimmt haben, anwendlich ist. Daß auch die synthetische Auflösung — die in allen Stücken mit der analytischen



übereinstimmt — auf unsere vielseitige Figuren anwendlich sey, werden wir weiter unten kürzlich zeigen. Der einzige Unterschied zwischen beyden Auflösungen, ist nur dieser: daß bey der analytischen eigentlich noch bewiesen werden mußte, daß t immer reelle Werthe erhalte, — statt dessen die synthetische Auflösung den Beweis der Möglichkeit, durch die Ausführung selbst, unnöthig macht.

Dann wird ebenfalls klar seyn, daß die analytische Auflösung auch auf unsere Durchschnittspuncte anwendlich ist: und daß wir darnach bey λ gegebenen Durchschnittspuncten der g. u. l. S. und einem gegebenen Kreise, eine 2λ seitige Figur würden in den Kreis ziehen können. Der einzige Unterschied würde nur darin bestehen, daß wir in der Auflösung des allgemeinen Problems, anstatt $\alpha^{\lambda+x}$, $\beta^{\lambda+y}$; wieder: α^x , β^y , schreiben müßten: wo $\lambda + x$ &c. keine Potenz-Zeichen, sondern bloße Indere sind. Denn unsere Puncte kommen zweymal, in der nemlichen Folge, vor. §. LIV

5.

Es ist uns aber hier nicht darum zu thun, bey gegebenen Durchschnittspuncten der g. u. l. S., und einem gegebenen Kreise, die Werthe von t &c. zu finden; sondern nur darum: allgemeine Bedingungs-Gleichungen zwischen den Coordinaten unserer Puncte, oder zwischen ihnen und dem Halbmesser des Kreises, aufzufinden, welche erfüllt werden müssen, bevor man eine 2λ seitige Figur in den Kreis ziehen kann.

So weiß man ja, daß bey dem gewöhnlichen Sechseck im Kreise, unsere drey Puncte in einer geraden Linie liegen müssen.

Solche Bedingungen allgemeiner aufzufinden, und den Weg dazu anzugeben, — ist der Vorwurf unserer folgenden Untersuchungen.

6.

Es ist aber klar, daß bey jedem unserer Puncte eine partielle Bedingungs-Gleichung statt findet.



Denn wenn man von einem Punkte A, zwey gerade an einen Kreis zieht, wovon ihn die erste in den Punkten C, D, und die zweite in den Punkten c, d, schneidet; so hat man die Gleichung $AC : Ac = Ad : AD$; diese würde, in unsere angenommene Zeichen übersetzt, für den ersten unserer Punkte, so aussehen:

$$\frac{(a \cos A - r \cos \varphi')^2 + (a \sin A - r \sin \varphi')^2}{(a \cos A - r \cos \varphi^\lambda)^2 + (a \sin A - r \sin \varphi^\lambda)^2} = \frac{(a \cos A - r \cos \varphi^{\lambda+1})^2 + (a \sin A - r \sin \varphi^{\lambda+1})^2}{(a \cos A - r \cos \varphi)^2 + (a \sin A - r \sin \varphi)^2}$$

aus welcher man ziehen kann:

$$(I) \dots (a^2 + r^2) \left\{ \begin{array}{l} \cos(A - \varphi) \\ + \cos(A - \varphi') \\ - \cos(A - \varphi^{\lambda+1}) \\ - \cos(A - \varphi^\lambda) \end{array} \right\}^{-2ar} \left\{ \begin{array}{l} \cos(A - \varphi) \cdot \cos(A - \varphi') \\ - \cos(A - \varphi^{\lambda+1}) \cdot \cos(A - \varphi^\lambda) \end{array} \right\} = 0$$

Die Gleichungen für die folgenden Durchschnitts-Punkte wird man erhalten, wenn man in (I) den Index bey a, A, φ , immer um die Einheit erhöht.

7.

Wenn wir uns nun vorstellen, daß wir bey der Auflösung des Problems in §. 3, auf unsere Punkte angewandt, die quadratische Endgleichung für t erhalten hätten, und diese zwey Werthe für t gäbe; so würden wir zugleich alle übrige t durch t ausdrücken können. Wir würden daher auch in der Gleichung (I) alle φ durch t ausdrücken, und so zwey Gleichungen für t erhalten können. Aus beyden würde man t eliminiren, und so eine Gleichung zwischen bekannten Größen als Bedingungs-Gleichung erhalten.

Diese Gleichung würde immer richtig seyn, da sie nach richtigen Principien abgeleitet ist; sie würde aber bloß für den ersten unserer Punkte richtig



seyn, da blos für diesen die nöthige Bedingung darin aufgenommen ist. Diese Gleichung würde aber eine gerade oder krumme Linie bestimmen, worin der erste unserer Punkte liegen müßte, wenn die übrigen willkürlich angenommen wären.

So wenig diese Rechnung ausführbar ist, so wird doch aus dieser allgemeinen Darstellung derselben, so viel hervorgehen:

a) Man wird bey einer 2λ seitigen Figur immer $\lambda - 1$ unserer Punkte willkürlich annehmen können.

b) Es wird nur Eine allgemeine Bedingungs-Gleichung zwischen unsern Punkten geben; da die partiellen Bedingungs-Gleichungen für jeden unserer Punkte, der Gleichung (I) ganz ähnlich sind.

c) Die Potenzen, worauf die Coordinaten unserer Punkte in der allgemeinen Gleichung erhoben sind, werden für alle Punkte symmetrisch seyn; da beym Kreise kein Grund abzusehen ist, warum einem Punkte mehr Werth beygelegt werden sollte, als einem anderen, und alle partielle Bedingungs-Gleichungen sich ähnlich sind.

d) Wenn es erlaubt ist, noch eine Vermuthung über die Form der allgemeinen Bedingungs-Gleichung zu wagen; so mag sie ihren Grund in folgender Ansicht finden.

Bei den 4λ seitigen Figuren wird man in einem Product von λ der Gleichung (I) analogen Gleichungen, die von allen ungeraden Seiten der Figur herkommen, schon alle unbekannte φ , gleichförmig haben. Eben so in einer andern Abtheilung, die von allen geraden Seiten der Figur herrührt. Wollte man nun aus jeder Abtheilung in Verbindung mit der quadratischen Endgleichung für t , eine Bedingungs-Gleichung ableiten; so würde man zwey solcher Gleichungen für zwey 2λ seitige Figuren erhalten, die zu gleicher Zeit in den Kreis beschrieben werden könnten. Man würde also, um die Gleichung für



die 4λ seitige Figur zu erhalten, alle partiellen Gleichungen zugleich anwenden müssen.

Hingegen bey den $4\lambda + 2$ seitigen Figuren wird man nicht zwey solcher gleichförmigen Abtheilungen machen können. Man muß $\lambda + 1$ Gleichungen, die der Gleichung (I) analog sind, zusammen nehmen, wenn man alle unbekannte φ haben will, und dann werden zwey von ihnen doppelt in dieser Abtheilung vorkommen. Man würde daher auch nach der daraus gezogenen Bedingungs = Gleichung keine $2\lambda + 2$ seitige Figur in den Kreis beschreiben können.

Meine Vermuthung ist nun diese: Gebraucht man bey diesen Figuren, die erste Abtheilung von $\lambda + 1$ Gleichungen, um die unbekannten φ daraus wegzuschaffen; so wird man die zweite Abtheilung von λ Gleichungen alsdann dazu anwenden können, um den Halbmesser aus der Bedingungs = Gleichung wegzuschaffen: wie wir denn auch wirklich finden, daß in die Bedingungs = Gleichung für die sechsseitigen Figuren der Halbmesser nicht eingeht. Daher vermuthe ich, daß dies bey allen $4\lambda + 2$ seitigen Figuren der Fall seyn wird.

8.

Wenn wir nun aus der Auflösung des Problems in §. 3, auf unsere Puncte angewandt, eine quadratische Endgleichung für z erhalten haben, so wird diese immer richtig seyn; da sie auf legitime Weise, aus richtigen Principien abgeleitet ist. Wir wissen aber, daß diese Gleichung nur dann richtig seyn kann, wenn eine Bedingungs = Gleichung erfüllt ist.

Die Endgleichung für z , muß daher diese allgemeine Bedingungs = Gleichung in sich enthalten.

Und da die Bedingungs = Gleichung unabhängig von den Werthen des z ist; so wird sie als ein Factor in der Endgleichung enthalten seyn.

Dieser Factor wird also auch noch in dem letzten Gliede der Endglei-

chung, welches wir erhalten, wenn wir $t = 0$ setzen, enthalten seyn. Daher werden wir, zur großen Erleichterung der Rechnung sogleich $t = 0$ setzen: und es wird nur noch darauf ankommen, den rechten Factor zu erkennen.

Wir können voraussetzen, daß er alle in Rechnung gebrachte α und β enthalten wird; da die Coordinaten unserer Punkte in der Bedingungs-Gleichung symmetrisch enthalten seyn werden. Aber wir werden auch als Hauptkennzeichen finden, daß er nie identisch auf beyden Seiten des Gleichheits-Zeichens erscheint, wo man ihn sonst aus der Gleichung wegschaffen würde. Schafft man diesen identischen Factor weg, so bleibt die Bedingungs-Gleichung übrig.

9.

Wir wollen nun, bevor wir zu den einzelnen Figuren übergehen, noch einige allgemeine Folgerungen aus dem bisher vorgetragenen ziehen.

a) Da die analytische Auflösung des Problems in §. 3, sich nach §. 4 auf alle λ seitige Figuren erstreckt; so wird auch, wenn diese Auflösung auf unsere Punkte angewandt wird, eine daraus gezogene Bedingungs-Gleichung für 2λ seitige Figuren, keiner Einschränkung auf eine gewisse Abtheilung dieser Figuren unterworfen seyn. Z. B. Wenn wir, was wirklich der Fall ist, für sechsseitige Figuren die Bedingung finden: daß die drey Durchschnittspunkte der g. ü. l. S. in einer geraden Linie liegen müssen; so gilt dies für alle sechsseitige Figuren, ohne Ausnahme. Wie denn auch schon Klügel a. a. O. Artikel: Kreis, §. 76, ein Beyspiel davon anführt, und mühsam beweiset. Dies ist ein wesentlicher Vortheil der analytischen Methode.

b) Wenn man zwischen λ unserer Durchschnitts-Punkte die Bedingungs-Gleichung erfüllt hat; so kann man allemal durch sie eine 2λ seitige geschlossene Figur in den Kreis beschreiben, obgleich man die erste Linie durch einen dieser Punkte willkürlich an den Kreis zieht.



Denn die quadratische Endgleichung für t , wird bey jedem Werth von t erfüllt; da die Bedingungs-Gleichung ein Factor derselben ist.

Zieht man die erste Linie als Tangente an den Kreis; so wird man auf diese Weise eine $2\lambda - 1$ seitige Figur in den Kreis beschreiben können. Dies leidet indeß bey den vierseitigen Figuren eine Ausnahme, wovon wir den Grund angeben werden, wenn wir von diesen Figuren handeln.

c) Hat man eine 2λ seitige Figur in den Kreis beschrieben, und die Durchschnittspuncte ihrer g. u. l. S. bestimmt; so werden diese ihrer Bedingungs-Gleichung Genüge leisten. Man kann daher nun die Figur weglöschen, und willkürlich eine erste Linie, durch einen dieser Puncte, an den Kreis ziehen, und die anderen Linien nach bekannten Regeln; so wird man doch immer eine geschlossene 2λ seitige Figur in den Kreis beschreiben.

Man darf nur keine im Kreise gültige Versetzungen in der Folge der Puncte machen, wovon wir weiter unten reden werden, und welches zuerst bey vier Puncten statt findet.

10.

Wir wollen nun zuerst von den vierseitigen Figuren im Kreise handeln. Die Gleichungen, aus welchen wir die Bedingungs-Gleichung ziehen müssen, werden nach §. 3 und 4, folgende seyn:

$$t = \frac{1 - \alpha t'}{\alpha - \beta t'}; \quad t' = \frac{1 - \alpha' t''}{\alpha' - \beta' t''};$$

$$t'' = \frac{1 - \alpha t'''}{\alpha - \beta t'''}; \quad t''' = \frac{1 - \alpha' t}{\alpha' - \beta' t};$$

Setzen wir $t = 0$, und suchen aus beyden Ketten den Werth von t'' ; so finden wir:

$$t'' = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha\alpha' - \beta'} = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha\alpha' - \beta}$$

oder:

$$(\alpha' - \alpha)(2\alpha\alpha' - \beta - \beta') = 0$$

wo also nach den Bemerkungen in §. 8, der zweite Factor die Bedingungs-Gleichung enthalten wird,

Wirklich finden wir auch, wenn wir aus obigen Gleichungen den vollständigen Werth von t suchen:

$$(2\alpha\alpha' - \beta - \beta')[(\alpha\beta' - \alpha'\beta)t^2 - (\beta' - \beta)t + \alpha' - \alpha] = 0$$

Wir wollen nun, der Kürze wegen, in der Folge die Coordinaten unserer Durchschnittspuncte auf die Art ausdrücken, daß wir

$$a \cos A = \alpha; \text{ und } a \sin A = b \text{ nennen \&c.}$$

Dann wird $\alpha = \frac{b}{r - a}$; und $\beta = \frac{r + a}{r - a}$; \&c. und unsere Bedingungs-

Gleichung verwandelt sich, in diese Zeichen übersezt, nach leichten Reductionen, in folgende: $r^2 = \alpha\alpha' + \beta\beta'$

welche für die Durchschnittspuncte der g. u. l. S. jeder vierseitigen Figur im Kreise gelten muß.

Nun sind aber zwischen vier Puncten auf dem Kreisumfange, drey verschiedene vierseitige Figuren gedenkbar, nemlich: das gewöhnliche Viereck, und dann die beyden Diagonalen mit je zweyen g. u. l. S. des gewöhnlichen Vierecks. Und je zweye dieser Figuren, haben zwey g. u. l. S., also auch ihren Durchschnittspunct, mit einander gemein. Daher haben diese drey Figuren zusammen nur drey verschiedene Durchschnittspuncte der g. u. l. S., und von je zweyen derselben gilt unsere Gleichung. Nennen wir daher die Coordinaten des dritten Durchschnittspunctes, α'', β'' ; so haben wir folgende Gleichungen:

$$(II) \dots r^2 = \alpha\alpha' + \beta\beta' = \alpha\alpha'' + \beta\beta'' = \alpha'\alpha'' + \beta'\beta''$$



als Bedingungs-Gleichungen für die Durchschnittspuncte der g. u. l. S. aller vierseitigen Figuren, die zwischen vier Puncten auf dem Kreise gedacht werden können.

Es wird kaum nöthig seyn, zu erinnern, daß man in diesen Gleichungen auf die $\pm$ Zeichen der Coordinaten gehörige Rücksicht nehmen muß.

Diese Gleichungen enthalten nun nicht allein alle Lehrlätze, welche Klügel a. a. O. Artikel: Kreis, S. 67 seqq. mühsam und dort doch nur unvollkommen für das Viereck erweist; sondern wir werden noch mehrer:s merkwürdige darin finden: daher wir sie etwas genauer betrachten wollen.

II.

Aus den Gleichungen (II) erhalten wir mit leichtet Mähe, folgende:

$$(III) \quad a'' = \frac{r^2(b' - b)}{ab' - a'b}; \quad b'' = \frac{r^2(a' - a)}{a'b - ab'}; \quad \frac{b''}{a''} = \frac{a' - a}{b - b'};$$

In diesen Gleichungen kann man den Index zweyer b vertauschen, wenn man nur den der zugehörigen a , auch vertauscht. Denn die Coordinaten sind in den Gleichungen (II) symmetrisch enthalten. Aus diesen Gleichungen erhellet nun folgendes:

a) Die dritte der Gleichungen (III) drückt den Werth der Tangente des Winkels aus, welchen die gerade durch den Mittelpunct und einen Durchschnittspunct, mit der Abscissenlinie macht. Aber die Tangente des Winkels, welchen eine gerade durch die andern beyden Durchschnittspuncte, mit der Abscissenlinie macht, ist $= \frac{b' - b}{a' - a}$; daher sieht man, daß die Linie durch

den Mittelpunct und einen Durchschnittspunct, auf die gerade durch die andern beyden Durchschnittspuncte, senkrecht stehen muß. Denn es ist:

$$-\frac{1}{x} = \tan(90^\circ + \text{arc.tang } x).$$

b) Legt man nun die Abscissenlinie durch einen Durchschnittspunct, z. B. den dritten; so wird $b'' = 0$; also $a' = a$; und $aa'' = a'a'' = r^2$; oder $a : r = r : a''$.

Daher erhellet: Wenn $a'' > r$, so muß die gerade durch die andern beyden Durchschnittspuncte, welche nun senkrecht auf der Abscissenlinie stehen wird, durch die beyden Puncte des Kreises gehen, worin die Tangenten von a'' an den Kreis gelegt, diesen berühren. Denn nur für diese beyden Puncte findet obgedachte Proportion statt. Ist $a'' < r$, so ziehe man durch die beyden Puncte, worin eine senkrechte durch a'' auf die Abscissenlinie den Kreis schneidet, zwey Tangenten an diesen; so wird $a = a'$ die Linie vom Mittelpunct bis an den Durchschnitt dieser beyden Tangenten seyn. Denn nur alsdann findet wieder obige Proportion statt.

Für $a'' = \infty$, wird $a = a' = 0$, die senkrechte, worin die andern beyden Durchschnittspuncte liegen, geht durch den Mittelpunct des Kreises. — Für $b'' = 0$, und $a' = a$, wird die erste der Gleichungen (II) geben: $r^2 - a^2 = b b'$; aber $r^2 - a^2$ ist = dem Quadrat der Ordinate des Kreises, wenn die Abscisse aus dem Mittelpunct $= a$ ist. Diese Ordinate ist also die mittlere Proportionallinie zwischen b und b' ; und es liegt also Einer unserer Durchschnittspuncte innerhalb des Kreises. Wir haben hiebey $a'' > r$ vorausgesetzt: wäre $a'' < r$; so würde $a > r$, und die andern beyden Durchschnittspuncte liegen außerhalb des Kreises.

c) Aus den Gleichungen (III) geht ferner hervor, daß bey allen vierseitigen-Figuren, welche man durch zwey gegebene Durchschnittspuncte der g. u. l. S. in den Kreis ziehen kann, — man wird sich erinnern, daß die erste Seite willkürlich ist — der dritte Durchschnittspunct unveränderlich ist.

Nimmt man die beyden gegebenen Durchschnittspuncte, welche die



Bedingungen in a) und b) erfüllen müssen, außerhalb des Kreises; so erhält man immer ein gewöhnliches Viereck, und der Durchschnittspunct der Diagonalen aller dieser Vierecke ist unveränderlich. Nimmt man einen der Durchschnittspuncte innerhalb des Kreises, so erhält man immer die Figur, welche aus zwey Diagonalen und zwey g. ü. l. S. des gewöhnlichen Vierecks besteht: und der Durchschnitt der beyden fehlenden Seiten, ist bey allen diesen vierseitigen Figuren, unveränderlich.

d) Nimmt man in den Gleichungen (II), a und b als gegeben an, und nennt a' oder $a'' = x$; b' oder $b'' = y$; so erhält man nur die Gleichung $y = \frac{-ax + r^2}{b}$; für die gerade, worin nach a) und b) die andern beyden Puncte liegen müssen. Man darf also einen Punct in dieser geraden willkürlich für den zweiten Durchschnittspunct annehmen; dann ist aber der dritte, aus den Gleichungen (III) bestimmt.

e) Auf diese Weise hätten wir also, für eine gegebene Lage und GröÙe des Kreises, und Einen Durchschnittspunct, — die Lage der andern beyden Puncte gefunden. Auch sieht man aus den Gleichungen (II), daß man zwey Puncte willkürlich annehmen, und daraus r bestimmen kann. Denn das verneinte in den Producten der Coordinaten, kann man immer durch Aenderung des Anfangspunctes derselben, heben; und dieser Anfangspunct ist zugleich der Mittelpunct des Kreises.

Man kann aber auch die drey Durchschnittspuncte der g. ü. l. S. willkürlich annehmen, wenn sie nur ein stumpfwinklichtes Dreieck bilden, — und daraus die Lage und GröÙe des Kreises bestimmen, worin man, durch je zweye von ihnen, geschlossene vierseitige Figuren ziehen kann.

Die gegebenen Puncte seyen: α, β, α' ; und bey β der stumpfe Winkel. Man ziehe aus diesen Winkelpuncten, die Perpendikel auf die g. ü. l. S.

des durch sie gebildeten Dreyeckes. Der Punct, worin sich die Perpendikel schneiden, wird nach a) der Mittelpunct = C des gesuchten Kreises seyn. Ueber die Linie Ca (oder Ca') als Durchmesser, beschreibe man einen Kreis, welcher die dem Winkel α (oder α') g. ü. l. Seite des Dreyeckes in zwey Puncten: D, d, schneiden muß, da das Dreyeck stumpfwinklicht ist. $CD = Cd$, wird nun der Halbmesser des gesuchten Kreises seyn. Denn wenn man sich die Figur entwirft, wird man leicht finden, daß nun nach b) zwischen dem Halbmesser und den Coordinaten der angenommenen Puncte, die Proportion $a : r = r : a''$ statt findet, so wie die Gleichung: $r^2 - a^2 = bb'$.

Ist der Winkel bey β ein rechter; so wird $r = 0$; es müßte nemlich alsdann nach b) $a'' = \infty$ seyn, wenn r einen endlichen Werth haben sollte. — Dies scheint mir ein nicht unwichtiger Beytrag zur Elementar-Geometrie zu seyn.

12.

Wir sehen nun auch den Grund, warum man durch unsere zwey Puncte (nach §. 9. b.) kein Dreyeck in den Kreis beschreiben kann; weil der eine unserer Puncte gerade in der Linie liegen muß, welche durch die Puncte geht, worin zwey Tangenten von dem andern Puncte den Kreis berühren. Man würde demnach nur eine gerade Linie, als ein unendlich schmales Viereck in den Kreis ziehen.

Die quadratische Gleichung, welche wir in §. 10 für z gefunden haben, wird zwey unmögliche Werthe für z geben, wenn die Bedingungs-Gleichung nicht erfüllt wird, denn sonst wäre ja gar keine Bedingungs-Gleichung nothwendig. Wir können daher hier und überhaupt mit Gewißheit den Satz annehmen:

Wenn unsere λ Puncte ihre Bedingungs-Gleichung nicht erfüllen; so wird man durch dieselben auch keine 2λ seitige geschlossene Figur in den Kreis ziehen können.



13.

Wir gehen nun zu den sechsseitigen Figuren im Kreise über.

Hier haben wir nach §. 3 und 4, folgende Gleichungen, woraus wir die Bedingungs = Gleichung ziehen müssen:

$$t = \frac{1 - \alpha t'}{\alpha - \beta t'}; \quad t' = \frac{1 - \alpha' t''}{\alpha' - \beta' t''}; \quad t'' = \frac{1 - \alpha'' t'''}{\alpha'' - \beta'' t'''};$$

$$t''' = \frac{1 - \alpha t^{IV}}{\alpha - \beta t^{IV}}; \quad t^{IV} = \frac{1 - \alpha' t^V}{\alpha' - \beta' t^V}; \quad t^V = \frac{1 - \alpha'' t}{\alpha'' - \beta'' t};$$

Setzen wir $t = 0$, und suchen aus beyden Reihen den Werth von t''' ; so erhalten wir:

$$t''' = \frac{\alpha \alpha' - \alpha \alpha'' + \alpha' \alpha'' - \beta'}{\alpha \alpha' \alpha'' - \alpha'' \beta' - \beta'' (\alpha - \alpha')} = \frac{\alpha \alpha' - \alpha \alpha'' + \alpha' \alpha'' - \beta'}{\alpha \alpha' \alpha'' - \alpha \beta' - \beta (\alpha'' - \alpha')}$$

wo der Zähler wieder identisch ist. Wir nehmen also blos die Nenner, und ziehen daraus die Gleichung:

$$\beta (\alpha'' - \alpha') - \beta' (\alpha'' - \alpha) + \beta'' (\alpha' - \alpha) = 0$$

Nehmen wir für $\alpha, \beta, \&c.$ die schon in §. 10 gebrauchten Werthe; so erhalten wir:

$$(r + \alpha) [b''(r - \alpha') - b'(r - \alpha''),] - (r + \alpha') [b''(r - \alpha) - b(r - \alpha'')] \\ + (r + \alpha'') [b'(r - \alpha) - b(r - \alpha')] = 0$$

Entwickelt man diese Gleichung, so wird man finden, daß sich alle in r^2 multiplicirte Glieder identisch aufheben: eben so auch alle Glieder, die nicht mit r multiplicirt sind. Die übrigen geben:

$$2r [b(\alpha'' - \alpha') - b'(\alpha'' - \alpha) + b''(\alpha' - \alpha)] = 0$$

worin also der eingeklammerte Factor die Bedingungs = Gleichung enthalten muß. Addirt man dazu:

$$+ \alpha' b' - \alpha' b' = 0$$

so erhält man daraus:

$$(b'' - b') (\alpha' - \alpha) - (b' - b) (\alpha'' - \alpha') = 0$$

Diese Gleichung zeigt deutlich: daß unsere drey Punkte bey jeder sechsseitigen Figur im Kreise, in einer geraden Linie liegen müssen.

14.

Wenn man in einem Kreise ein Viereck beschreibt, dazu die Diagonalen und die vier Tangenten an den Winkelpuncten zieht; so hat man 10 gerade Linien. Diese werden: $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ Durchschnittspuncte unter sich haben. Von diesen gehen an jedem Winkelpuncte: $1 + 2 + 3 = 6$, in Einen Durchschnittspunct zusammen, und es bleiben noch: $45 - 24 = 21$ andere übrig.

Wir können nun beweisen:

daß von diesen 21 Durchschnittspuncten, viere, zu drey verschiedenen Malen; und außerdem noch dreye, zu 16 verschiedenen Malen, in Einer geraden Linie liegen müssen.

Denn das Viereck mit den Diagonalen bildet drey vierseitige Figuren. Jede vierseitige Figur kann man zu sechs verschiedenen Malen als eine sechsseitige Figur ansehen, mit Hülfe zweyer Tangenten an zwey Winkelpuncten; denn man kann 6 Veränderungen in diesen Winkelpuncten machen. Das gäbe also 18 sechsseitige Figuren. Aber bey jeder vierseitigen Figur, werden zwey Veränderungen der Winkelpuncte, doch immer die g. u. l. S. der vierseitigen Figur, auch als g. u. l. S. der sechsseitigen Figur geben; (z. B. wenn man beym gewöhnlichen Viereck die Tangenten an beyde Enden einer oder der andern Diagonale legt, und wenn man in den anderen vierseitigen Figuren, die beyden Tangenten, an die beyden Enden einer oder der anderen fehlenden Seite des gewöhnlichen Vierecks legt); daher geben diese beyden sechsseitigen Figuren zusammen, nur 4 unserer Puncte in einer geraden Linie. Wir wür-



den also hiernach zu dreyen Malen, 4 Puncte; und zu 12 Malen, drey Puncte in einer geraden erhalten. Aber bey dem Viereck mit den Diagonalen kann man sich auch noch 4 Dreyecke im Kreise vorstellen, von denen jedes, mit Hülfe dreyer Tangenten, als eine sechsseitige Figur betrachtet werden kann. Daher werden die in dem Lehrsatze angegebenen Zahlen die richtigen seyn.

Da die ausgezogene Figur zu vielen Raum einnimmt; so lasse ich sie weg. Jeder Liebhaber von Curiositäten wird sie sich leicht selbst entwerfen können.

Wenn von diesen 10 Linien, zwey parallel liegen; so fällt ihr Durchschnitt ins Unendliche: und die andern beyden Puncte, welche mit jenem in einer geraden Linie liegen sollen, liegen nun in einer geraden, welche auch mit den beyden ersten parallel ist.

Fallen zwey Puncte von den dreyen, welche in einer geraden liegen sollen, ins Unendliche; so muß auch der dritte ins Unendliche fallen: alle g. u. l. S. dieser sechsseitigen Figur müssen dann parallel seyn.

15.

Wenn man die 6 Puncte am Umfange des Kreises, auf alle mögliche Weise zusammen zieht; so erhält man: $5 + 4 \dots + 1 = 15$ Linien. Nimmt man dazu die 6 Tangenten an den Winkelpuncten; so haben diese 21 Linien unter sich: $1 + 2 + 3 \dots + 20 = 210$ Durchschnittspuncte. Von diesen gehen an jedem Winkelpuncte: $1 + 2 \dots + 5 = 15$ in Einen Durchschnitt zusammen, und es bleiben noch: $210 - 90 = 120$ andere Durchschnittspuncte übrig. Rechnet man nun alle durch diese Linien im Kreise gebildeten Dreyecke, vier- und fünffseitige Figuren, (die man alle durch Hülfe einiger Tangenten als sechsseitige betrachten kann), nebst den eigentlichen sechsseitigen Figuren die hiedurch gebildet werden, zusammen; so erhält man eine so große Menge von diesen Puncten, die zu dreyen und viere in einer geraden



Dann fällt bey'm Kreise auch die umgekehrte Anordnung der Puncte, und damit noch die Hälfte aller gewöhnlichen Versetzungen weg: d. h. man kann jede Figur in umgekehrter Ordnung der Puncte ziehen, ohne sie zu verändern.

Von der Anzahl der gewöhnlichen Versetzungen, bleibt uns also im Kreise nur der 2te Theil. Daher wird unsere Behauptung richtig seyn.

$$\text{So ist also die fragliche Anzahl, für 3 Puncte} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{für 4 Puncte} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 4} = 3$$

wie wir schon gesehen haben.

$$\text{Für 5 Puncte wird sie seyn: } \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5}{10} = 12$$

$$\text{und für 6 Puncte: } \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6}{12} = 60$$

Die Figuren, welche man auf diese Weise zwischen 4 Puncten ziehen kann, werden nicht alle wesentlich von einander verschieden seyn.

Manche werden schon dadurch entstehen, daß man eine andere Figur, wenn die Puncte alle in gleichem Abstände von einander stehen, durch Umdrehung um den Mittelpunct oder um eine Ase in eine andere Lage zwischen anderen Puncten bringen kann; z. B. das gewöhnliche Quadrat kann man durch Umlegung zwischen den Puncten nicht in eine andere Lage bringen; aber die Figur, welche aus den beyden Diagonalen und zwey g. ü. l. E. des Quadrates besteht, kann man durch Umdrehung um den Mittelpunct, oder eine Diagonale in eine zweite Lage zwischen den 4 Puncten bringen. Und diese beyden Veränderungen machen mit dem Quadrat die drey Figuren aus, welche zwischen 4 Puncten möglich sind.



Wollten wir diese drey Figuren nun mit unseren Buchstaben ausdrücken; so würden wir schreiben können: 1. *abcd*

2. *abdc*

wo die vorgesezte Zahl die Anzahl der Veränderungen anzeigt, welche man mit der daneben stehenden, durch Buchstaben ausgedrückten Figur, zwischen den regulär gelegten Puncten machen kann; ohne die Figur selbst zu verändern. Vom letzten Buchstaben zieht man wieder nach *a*, um die Figur zu vollenden.

So wird nun folgendes verständlich seyn: Zwischen fünf Puncten auf dem Kreise, sind folgende 12 fünffseitige Figuren möglich:

1. *abcde*

5. *abced*

5. *abecd*

1. *acebd*

Zwischen 6 Puncten hat man folgende 60 sechsseitige Figuren:

1. *abcdef*

6. *abcdfe*

12. *abcefd*

3. *abcfed*

6. *abdcfe*

6. *abdfce*

6. *abdfec*

6. *abecfd*

6. *abedfc*

2. *abefcd*

3. *abfdec*

3. *acebfd*



Die dritte Figur, welche man zuerst 6 mal durch Umdrehung um den Mittelpunkt, und dann noch 6 mal auf dieselbe Art, wenn man sie zuvor um eine Ase gedreht hat, verändern kann, ist diejenige, von welcher Klügel a. a: O. Artikel: Kreis, p. 133 unsere allgemeine Bedingungs = Gleichung, auf eine beschwerliche Art beweiset. -

Die letzte Figur ist dadurch merkwürdig, daß sie alle ihre Durchschnittpuncte der g. u. l. S. an sich trägt. Nämlich die Durchschnitte der Linien:

ac und *bf*

ce -- *fd*

eb -- *da*

müssen immer in gerader Linie liegen.

Auch die Figur: *abedfc* muß durch Umdrehung verändert werden. Die Veränderungen der übrigen Figuren können durch bloße Umdrehung um den Mittelpunkt bewirkt werden.

17.

Nach dieser Darstellung, können wir nun unsern, in §. 15 am Ende, ausgesprochenen Lehrsatz beweisen.

Wir haben nämlich zwischen denen daselbst bezeichneten Linien, folgende Figuren im Kreise, die man als sechsseitige ansehen kann:

$$a) \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ Dreiecke, wovon jedes mit Hülfe dreier Tangen-}$$

ten an den Winkelpuncten eine sechsseitige Figur bildet.

$$b) \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15 \text{ Vierecke. Von diesen liefert jedes die in §. 14}$$

berechnete Anzahl, wenn wir dort die 4 Dreiecke abrechnen. Jedes Viereck giebt also zu dreien Malen, 4 Puncte; und zu 12 Malen, 3 Puncte in einer geraden.



Zusammen geben sie also: 45 mal, 4 Punkte; und 180 mal, 3 Punkte, in einer geraden.

$$c) \frac{6 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5} = 6 \text{ Fünfecke. Jedes enthält 12 fünfseitige Figuren.}$$

Jede fünfseitige Figur kann fünfmal, durch Hülfe einer Tangente, als eine sechsseitige betrachtet werden. Dies giebt also für die Fünfecke, die Summe von $6 \cdot 12 \cdot 5 = 360$ sechsseitigen Figuren.

d) 60 eigentliche sechsseitige Figuren.

Rechnen wir nun alles zusammen, so erhalten wir $20 + 180 + 360 + 60 = 620$ mal, drey Punkte; und 45 mal, vier Punkte in einer geraden: wie wir im Lehrsaß ausgesagt haben.

Es kann hiebey auch nicht weiter, als bey den 4 seitigen Figuren zwischen denselben 4 Punkten, der Fall eintreten: daß zwey verschiedene, als 6 seitig zu betrachtende Figuren, zwey paar g. u. l. S. gemeinschaftlich hätten. Denn wenn eine eigentlich 4 seitige Figur, mit einer andern, eigentlich 3 oder 4 seitigen, drey Winkelpuncte gemein hat; so können diese beyden Figuren, als 6 seitige, nur 4 auf einander folgende Seiten gemein haben. Ebenso, wenn die 4 seitige Figur mit einer fünfseitigen, 4 Winkelpuncte gemein hat: und wenn eine 5 seitige, mit einer eigentlich 6 seitigen, 5 Winkelpuncte gemein hat. Auch bey zweyen eigentlich 6 seitigen Figuren, die 4 Seiten gemein haben, werden diese nicht in derselben Folge gezählt; da die zwey verbindenden Seiten nicht in beyden Figuren, zu zwey gleichliegenden Seiten gehen können. Auch wird jede 5 seitige Figur, wenn die Tangente an einen anderen Winkelpunct gelegt wird, nur zwey g. u. l. S. mit der vorigen gemein haben.

Uebrigens scheint dem Verf. die Aufgabe noch nicht aufgelöst zu seyn:

λ Punkte so anzuordnen, daß sie möglichst oft zu dreyen oder viere in einer geraden liegen; und die Anzahl dieser Linien zu bestimmen.



Seine Kenntniß der Combinations - Lehre reicht nicht so weit: und er würde früher, die Resultate unseres Beweises kaum für möglich gehalten haben.

18.

Wir wollen hier noch einen Lehrsatz, von den sechsseitigen Figuren im Kreise, aufstellen, den wir zwar ohne Figuren nicht ausführlich beweisen können; wovon wir jedoch hinreichende Gründe angeben werden: wornach sodann jeder Leser, welcher Vergnügen daran findet, sich den ausführlichen Beweis selbst zusammen setzen kann.

Wenn man durch Einen Punct drey gerade an den Kreis zieht, welche diesen in 6 Puncten schneiden; so wollen wir diese Linien, *gegebene* nennen. Man ziehe nun zwischen diesen 6 Puncten, eine beliebige sechsseitige Figur, jedoch mit der Bedingung: daß die erste Seite der Figur, von einer gegebenen zu einer anderen gegebenen; die zweite Seite, von dieser anderen gegebenen zu der dritten; die dritte Seite der Figur wieder zur ersten gegebenen geht; &c. in derselben Folge.

So wird allemal das Product der drey ungeraden Seiten der Figur, dem Product der drey geraden Seiten derselben gleich seyn.

Diese Figuren sind:

a) Wenn der gegebene Punct innerhalb des Kreises liegt, die Figuren: *abcdef*; und *abfdec*;

b) wenn er außerhalb liegt, die Figuren: *abcfed*; *abdfec*; und: *acebfd*;

Der Grund liegt darin: bey jedem Dreyeck, in welchem die drey Winkel *a, b, c*, durch drey Linien, welche durch Einen Punct gehen, in die analog liegenden Theile: *a', a''*; *b', b''*; *c', c''*; getheilt werden; hat man die Gleichung: $\frac{a' b' c'}{a'' b'' c''} = 1$.



$$\sin a' \cdot \sin b' \cdot \sin c' = \sin a'' \cdot \sin b'' \cdot \sin c''$$

Nun kann man aber in einer, nach der gegebenen Vorschrift gezogenen, sechsseitigen Figur, die Seiten derselben, und die anderen zwischen den 6 Puncten gezogenen Linien, als solche sinus von a' , b' , c' , und a'' , b'' , c'' , betrachten: und die nicht zur sechsseitigen Figur gehörigen Linien, werden aus dem Product dreier solcher Gleichungen verschwinden, und bloß die im Lehrsatze ausgedrückte Gleichung zurückbleiben.

19.

Jetzt wollen wir die achtsseitigen Figuren im Kreise betrachten.

Zu den Gleichungen, woraus wir die Bedingungs-Gleichung ziehen sollen, können wir die zu Anfange des §. 13, für die sechsseitigen Figuren, angegebenen, benutzen. Zur ersten Reihe derselben, füge man noch die Gleichung:

$$t''' = \frac{1 - \alpha''' t^{iv}}{\alpha''' - \beta''' t^{iv}}$$

und in der untern Reihe erhöhe man den Index bey den α und β , um die Einheit; und bey den t , um zwey; und schreibe noch die Gleichung:

$$t^{iv} = \frac{1 - \alpha t^v}{\alpha - \beta t^v}$$

als erstes Glied der Reihe. Auf diese Weise wird man alle erforderlichen Gleichungen haben.

Auch den doppelten Werth, den wir in §. 13 für t''' gefunden haben, können wir benutzen. Der erste Werth daselbst, bleibt $= t'''$; und der zweite wird $= t^v$, wenn wir darin jeden Index (auch 0), um die Einheit erhöhen.

Nun findet man leicht, den uns nöthigen doppelten Werth von t^{iv} ; worin die Zähler wieder, bis auf das Zeichen, identisch sind, und aus den Nennern wird man folgende Bedingungs-Gleichung ziehen:



$$2\alpha\alpha'a''a''' - \beta \begin{bmatrix} a'a'' \\ +a''a''' \\ -a'a''' \end{bmatrix} - \beta' \begin{bmatrix} a'a'' \\ +a''a''' \\ -a'a''' \end{bmatrix} - \beta'' \begin{bmatrix} a'a'' \\ +a''a''' \\ -a'a''' \end{bmatrix} - \beta''' \begin{bmatrix} a'a'' \\ +a''a''' \\ -a'a''' \end{bmatrix} + \beta\beta'' + \beta'\beta''' = 0$$

woraus man, wenn man sie in r, a, b , übersetzt, und nach r ordnet, erhält;

$$(IV) \quad r^4 - r^2 \begin{bmatrix} + (aa' + bb') & - (aa'' + bb'') \\ + (a'a'' + b'b'') & - (a'a''' + b'b''') \\ + a''a''' + b''b''' & - (a'a''' + b'b''') \\ + (a'''a + b'''b) \end{bmatrix} + (aa' + bb').(a''a''' + b''b''') = 0$$

Nennt man $a''' = x$; $b''' = y$; $\frac{b}{a} = \tau$; $\frac{b'}{a'} = \tau'$; &c. so findet sich:

$$y = x \frac{\begin{bmatrix} r^2(a - a' + a'') \\ -aa'a''(1 + \tau\tau' - 1 - \tau\tau'' + 1 + \tau'\tau'') \end{bmatrix} + r^2 \begin{bmatrix} aa'(1 + \tau\tau') \\ -aa''(1 + \tau\tau'') \\ +a'a''(1 + \tau'\tau'') - r^2 \end{bmatrix}}{aa'a''(\tau - \tau' + \tau'' + \tau'\tau'') - r^2(a\tau - a'\tau' + a''\tau'')} \dots (V)$$

welches die Gleichung der geraden Linie ist, worin bey jeder achseitigen Figur im Kreise der vierte unserer Punkte liegen muß; wenn die drey übrigen, und der Halbmesser des Kreises gegeben sind.

Für $r = 0$; stände die Linie senkrecht auf die gerade, welche mit der Abscissenlinie den Winkel macht, dessen Tangente = $\tan(\text{arc. tang } \tau - \text{arc. tang } \tau' + \text{arc. tang } \tau'')$ ist; und geht durch den Mittelpunkt.

Legt man die Abscissenlinie durch einen der gegebenen Punkte; so wird in der Gleichung (V), ein $\tau = 0$; dadurch wird sie sich sehr vereinfachen.

20.

Nehmen wir die beyden ersten unserer Punkte so an, als ob wir durch sie eine vierseitige Figur in den Kreis beschreiben wollten; so wird (nach §. 10), $aa' + bb' = r^2$

Dadurch verwandelt sich die Gleichung (IV) in diese:

$$(VI) \quad r^2[(a''' - a'')(a' - a) + (b''' - b'')(b' - b)] - (ab' - a'b)(a''b''' - a'''b'') = 0$$



Die Gleichung einer senkrechten, durch den Mittelpunct, auf die gerade durch unsere ersten beyden Puncte, wird seyn :

$$y = \frac{x(a' - a)}{-(b' - b)}$$

Nimmt man die andern beyden Puncte in dieser Linie; so wird: $b'' = \frac{a''(a' - a)}{-(b' - b)}$;

und: $b''' = \frac{a'''(a' - a)}{-(b' - b)}$; und: $b''' - b'' = \frac{(a''' - a'')(a' - a)}{-(b' - b)}$;

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (VI), so wird sie erfüllt: und man kann auf diese Weise stets eine achtseitige Figur in den gegebenen Kreis beschreiben; wöben die erste Linie willkürlich bleibt. Man darf aber dabey keine, im Kreise gültige, Versetzung in der Folge der Puncte machen (cf. S. 16); denn das Product zweyer a in der erst gefundenen Bedingungs-Gleichung, hat ein anderes Zeichen, wenn sie zu zwey auf einander folgenden Puncten gehören, als wenn sie zu Puncten gehören, die einen andern zwischen sich haben.

Wenn man in der Gleichung (IV) alle a einander gleich, und $= r$ setzt; so verwandelt sie sich in: $b b' b'' b''' = 0$. Nimmt man daher einen unserer Puncte im Umfange eines beliebigen Kreises an, und die übrigen drey, in der Tangente durch diesen Punct; so wird die Gleichung erfüllt. Denn wenn man die Abscissen-Are durch den im Umfange liegenden Punct gehen läßt; so wird ein $b = 0$, und jedes $a = r$.

Von den achtseitigen Figuren, die man auf diese Weise, durch unsere in einer geraden Linie liegenden Puncte, in den Kreis ziehen kann; werden aber alsdann mehrere Seiten unendlich klein. Sieht man den im Umfange liegenden Punct, als ersten Durchschnittspunct an; so wird man auf diese Weise eine fünffseitige Figur in den Kreis ziehen: und die drey letzten Seiten

der achseitigen Figur werden unendlich klein. Sieht man diesen Punct hingegen als zweiten, dritten oder vierten Durchschnittspunct an; so wird man durch unsere Puncte, drey-, vier- oder fünfseitige Figuren in den Kreis ziehen. Denn nachdem die Reihe zuerst an den besagten Punct gewesen ist, so werden alle folgende Seiten der Figur unendlich klein, bis die Reihe wieder an diesen Punct kömmt. Alsdann ist aber kein zweiter Punct, für die durch ihn in den Kreis zu ziehende Seite der Figur gegeben: man kann also durch ihn die Figur schließen, und die nachfolgenden Seiten, werden alle wieder unendlich klein.

Es ist aber a priori einleuchtend, daß man auf ähnliche Weise, wenn man λ Puncte in die Tangente eines Kreises, und Einen davon in den Berührungspunct legt; alsdann immer geschlossene Figuren, bis zur $\lambda + 1$ seitigen, in den Kreis ziehen wird: wenn man die λ Puncte, als Durchschnittspuncte der g. u. l. S. einer 2λ seitigen Figur betrachtet. Daher ist unser bey den achteitigen Figuren gefundenes Resultat, nur ein Beweis: daß die Rechnung bis dahin richtig geführt sey.

Setzt man in unserer Gleichung (IV), jedes $a = mr$; und ein b , z. B. $b''' = 0$; so verwandelt sie sich in:

$$(m^4 - 2m^2 + 1)r^4 + (m^2 - 1)(bb' - bb'' + b'b'')r^2 = 0$$

oder: $(m^2 - 1)r^2 = -bb' + bb'' - b'b''$

Man kann also bey einem gegebenen Kreise, unsere vier Puncte immer in einer gegebenen geraden Linie annehmen; wenn man nur einen dieser Puncte, zugleich in der senkrechten auf diese Linie, durch den Mittelpunct des Kreises (welche dann die Aye der Abscissen ist), annimmt: und in der letzten Gleichung, zwey b willkürlich, und das dritte durch die Gleichung bestimmt. Bey den $4\lambda + 2$ seitigen Figuren werden wir keine solche Einschränkung finden, wie wir bald sehen werden.

Nimmt man zwey unserer Puncte in gleichen Entfernungen auf der Ase der Abscissen, und die andern beyden, in der Ase der Ordinaten; so sey für die ersten: $a''' = mr$; $a'' = -mr$; $b''' = b'' = 0$; und für die anderen: $a' = a = 0$;

Alsdann verwandelt sich die Gleichung (IV) in folgende:

$$(m^2 + 1)r^4 - (m^2 + 1)bb'r^2 = 0; \text{ oder: } r^2 = bb';$$

daß also r alsdann die mittlere Proportional-Linie, zwischen den beyden Ordinaten der beyden andern Puncte seyn muß.

In der Gleichung (IV) kann man auch alle unsere Puncte als gegeben ansehen, und daraus r bestimmen. Dann wird aber der Anfangs-Punct der Coordinaten so angenommen werden müssen, daß r mögliche Werthe erhält. Es sind daher unendlich viele Kreise für die gegebenen Puncte möglich; aber für einen auch gegebenen Mittelpunct nur Einer (oder höchstens zweye, wenn r^2 in der Gleichung sollte zwey bejahte Werthe haben können), oder gar keiner: — ebenso wie bey den vierseitigen Figuren nur Ein Kreis möglich ist, oder gar keiner.

Dagegen war bey den sechsseitigen Figuren, Lage und GröÙe des Kreises gleichgültig. Und wenn unsere im §. 8 d) geäußerte Vermuthung, was sehr wahrscheinlich ist, sich bestätigt; so wird dies auch bey allen $4\lambda + 2$ seitigen Figuren der Fall seyn.

21.

Wir wenden uns nun zu den zehnseitigen Figuren im Kreise.

Um hier die Bedingungs-Gleichung zwischen unsern Puncten zu finden, können wir wieder von dem im §. 13 gefundenen doppelten Werthe von t''' Gebrauch machen. Der erste dieser beyden Werthe bleibt $= t'''$, und wir wollen ihn mit: $\frac{B}{C}$ bezeichnen. Der zweite dieser Werthe wird, wenn wir



jeden Index (auch den = 0) um zwei erhöhen, = t^{VII} ; und wir wollen ihn mit: $\frac{B''}{C''}$ bezeichnen. Wir müssen nun aus den Gleichungen:

$$t''' = \frac{B}{C}; \quad t^{IV} = \frac{1 - \alpha''' t'''}{\alpha''' - \beta''' t'''}; \quad t^V = \frac{1 - \alpha^{IV} t^{IV}}{\alpha^{IV} - \beta^{IV} t^{IV}};$$

$$\text{und } t^V = \frac{1 - \alpha t^{VI}}{\alpha - \beta t^{VI}}; \quad t^{VI} = \frac{1 - \alpha' \frac{B''}{C''}}{\alpha' - \beta' \frac{B''}{C''}};$$

den doppelten Werth von t^V suchen: und finden so:

$$\frac{(\alpha''' - \alpha^{IV})C - (\beta''' - \alpha''' \alpha^{IV})B}{-(\beta^{IV} - \alpha''' \alpha^{IV})C + (\alpha''' \beta^{IV} - \beta''' \alpha^{IV})B} = \frac{(\alpha' - \alpha)C'' - (\beta' - \alpha \alpha')B''}{-(\beta - \alpha \alpha')C'' - (\alpha \beta' - \alpha' \beta)B''}$$

Und da wir wissen, daß die Zähler und auch ihr Zeichen, identisch sind; so erhalten wir daraus die Bedingungs-Gleichung:

$$(\beta - \alpha \alpha')C'' + (\alpha \beta' - \alpha' \beta)B'' - (\beta^{IV} - \alpha''' \alpha^{IV})C + (\alpha''' \beta^{IV} - \alpha^{IV} \beta''')B = 0$$

Ordnen wir diese zuerst nach den β ; so erhalten wir daraus:

$$\left. \begin{aligned} &\beta \begin{bmatrix} + \alpha'' \alpha''' \alpha^{IV} \\ - \alpha' \alpha'' \alpha''' \\ + \alpha' \alpha'' \alpha^{IV} \\ - \alpha' \alpha''' \alpha^{IV} \end{bmatrix} + \beta' \begin{bmatrix} + \alpha \alpha'' \alpha''' \\ - \alpha \alpha'' \alpha^{IV} \\ + \alpha \alpha''' \alpha^{IV} \\ - \alpha'' \alpha''' \alpha^{IV} \end{bmatrix} + \beta'' \begin{bmatrix} - \alpha \alpha' \alpha''' \\ + \alpha \alpha' \alpha^{IV} \\ + \alpha' \alpha''' \alpha^{IV} \\ - \alpha \alpha''' \alpha^{IV} \end{bmatrix} + \beta''' \begin{bmatrix} + \alpha \alpha' \alpha' \\ - \alpha \alpha' \alpha^{IV} \\ + \alpha \alpha'' \alpha^{IV} \\ - \alpha' \alpha' \alpha^{IV} \end{bmatrix} \\ &+ \beta^{IV} \begin{bmatrix} + \alpha \alpha' \alpha''' \\ - \alpha \alpha'' \alpha''' \\ + \alpha' \alpha'' \alpha''' \\ - \alpha \alpha' \alpha'' \end{bmatrix} + \beta \beta'' (\alpha''' - \alpha^{IV}) + \beta \beta''' (\alpha' - \alpha') + \beta'' \beta''' (\alpha^{IV} - \alpha) \\ &+ \beta' \beta^{IV} (\alpha'' - \alpha''') + \beta'' \beta^{IV} (\alpha - \alpha') \end{aligned} \right\} = 0$$

und wenn wir diese Gleichung in r, a, b , &c. übersetzen; so erhalten wir:



Hier bedeutet b^x b^y b^z ; daß jedes Glied der darauf folgenden eingeklammerten Größe, mit drey b multiplicirt werden soll, deren Index sowohl unter sich, als von dem der beyden a , welche jedes Glied enthält, verschieden ist.

Ordnet man diese Gleichung nach den Potenzen von r ; so finden sich alle Glieder, die in eine gerade Potenz von r multiplicirt sind, identisch $= 0$; und die übrigen geben, wenn sie noch mit r dividirt werden, folgende Bedingungs-Gleichung für die Durchschnitts-Puncte der g. u. l. S. der zehnsseitigen Figuren:

$$(VII) \quad 2r^2 \left[\begin{array}{l} b(a^{1v}-a''' + a'' - a') \\ + b'(a - a^{1v} + a''' - a'') \\ + b''(a' - a + a^{1v} - a''') \\ + b'''(a'' - a' + a - a^{1v}) \\ + b^{1v}(a''' - a'' + a' - a) \end{array} \right] + 2b^x b^y b^z \left[\begin{array}{l} a^{1v} - a \\ - a''' + a \\ + a'' - a \\ - a' + a \\ - a^{1v} + a' \\ + a''' - a' \\ - a'' + a' \\ + a^{1v} - a'' \\ - a''' + a'' \\ - a^{1v} + a''' \end{array} \right] + \left. \begin{array}{l} + b a'' a''' (a' - a^{1v}) \\ + b' a''' a^{1v} (a'' - a) \\ + b'' a^{1v} a (a''' - a') \\ + b''' a a' (a^{1v} - a'') \\ + b^{1v} a' a'' (a - a''') \end{array} \right\} = 0$$

Hieraus findet sich wieder, wenn alle Durchschnitts-Puncte und der Anfangspunct der Coordinaten gegeben sind; Ein möglicher, oder zwey unmögliche Werthe für r . Nennt man dagegen ein $a = x$, und das dazu gehörige $b = y$; so findet sich für diesen Punct wieder die Gleichung einer geraden Linie, worin er liegen muß, wenn r , und die übrigen, nebst dem Anfangspunct der Coordinaten gegeben sind.



22.

Es ist aber auch klar, daß die Gleichung (VII) unabhängig von r erfüllt wird, wenn man alle unsere Punkte in Einer geraden Linie annimmt. Denn man braucht nur die Abscissen-Abstände auf diese Linie zu nehmen; so werden alle a einander gleich, und jedes Glied der Gleichung $= 0$, was auch r für eine Größe, und welche Lage der Mittelpunkt des Kreises auch habe.

So bestätigt sich also, unsere im §. 7 d) geäußerte Vermuthung (welche wir vor der Berechnung der Bedingungs-Gleichung der 10 seitigen Figuren gewagt hatten), wenigstens zum guten Theil, bey diesen Figuren. Denn daß unsere Punkte in Einer geraden Linie liegen müssen, ist nicht begründet; da die Gleichung (VII) auch bey ungleichen Werthen der a , Einen möglichen Werth für r geben kann.

Man könnte aber nach diesem Resultate eine neue Vermuthung aufstellen, welche, wenn man den Gang der Rechnung betrachtet, beinahe an Gewißheit gränzt, nemlich:

daß man in jeden gegebenen Kreis, immer geschlossene $4\lambda + 2$ seitige Figuren beschreiben könne, wenn man $2\lambda + 1$ Punkte in Einer geraden Linie annimmt, und sie als Durchschnittspuncte der g. u. l. C. betrachtet.

Wirklich hat uns auch eine gezeichnete Figur genau ergeben, daß man durch 7 unserer Punkte, die in einer geraden Linie angenommen waren, eine 14 seitige geschlossene Figur in den Kreis ziehen kann. Man nehme dabey den Maasstab nur nicht zu klein.



Bei den 10 seitigen Figuren versteht sich dies, nach obigem Beweise, von selbst: doch haben wir uns auch davon durch eine Probe überzeugt.

So hätten wir also unsern Satz durch Induction bestätigt. Der vollständige Beweis dieses Satzes, würde auf Betrachtungen gegründet werden müssen, wie eine Bedingungs = Gleichung für $4\lambda + 2$ seitige Figuren, aus einer vorhergehenden für $4(\lambda - 1) + 2$ seitige Figuren entsteht; und scheint mir, bei der complicirten Form, unter welcher wir diese Gleichungen erhalten, in keine geringe Weitläufigkeiten zu führen.

23.

Wir wollen daher, für jetzt, diesen Beweis auf sich beruhen lassen, und nur noch einiges anmerken, was sich aus dem Gange der bisher geführten Rechnung ergibt: wenn gleich dabei, zur völligen Ueberzeugung, auch noch weitläufige Beweise nöthig wären. Diese würden sich wohl bei dem Beweise des Satzes im vorhergehenden §. nebenher finden. Und wenn das mathematische Publikum Gefallen an diesen Untersuchungen zeigt, und meine Kräfte hinreichen; so gebe ich den Voratz nicht auf: mich bei größerer Muße mit dem Beweise zu beschäftigen, und ihn, wenn es ohne zu große Weitläufigkeit geschehen kann, bekannt zu machen. Doch würde es mich sehr freuen, wenn ein anderer mir darin zuvorkäme.

Es scheint nun folgendes noch aus dem Gange der bisher geführten Rechnung, mit Sicherheit hervorzugehen:

a) Die Linie, worin, bei gegebener Lage und Größe des Kreises, und den übrigen gegebenen Durchschnittspuncten der g. u. l. S. einer 2λ seitigen Figur, Ein noch zu bestimmender Durchschnittspunct liegen muß; wird immer eine gerade seyn.

b) Bey allen 4λ seitigen Figuren fallen alle mit ungeraden Potenzen von r multiplicirte Glieder, aus der Bedingungs-Gleichung weg, und sind identisch $= 0$; hingegen, bey allen $4\lambda + 2$ seitigen Figuren ist dies mit denen, in gerade Potenzen von r multiplicirten Gliedern der Fall; und man kann die Bedingungs-Gleichung mit r dividiren.

c) Daher sind in der Bedingungs-Gleichung immer nur gerade Potenzen von r enthalten. Und zwar steigt, bey den 4λ seitigen Figuren, r^2 auf die λ te; und bey den $4\lambda + 2$ seitigen, auf die $\lambda - 1$ te Potenz.

Wenn also in der Bedingungs-Gleichung alle Wurzeln von r^2 bejahrt wären; so würden bey gegebenen Durchschnittspuncten der g. u. l. S., und einem gegebenen Anfangspunct der Coordinaten, λ oder $\lambda - 1$ Kreise um diesen letzten Punct möglich seyn, worin man 4λ oder $4\lambda + 2$ seitige Figuren durch die gegebenen Puncte ziehen könnte.

Höchstwahrscheinlich ist aber nur immer Ein Kreis, oder gar keiner, um den gegebenen Mittelpunct möglich: Es sey denn, daß alle $2\lambda + 1$ Durchschnittspuncte in Einer geraden Linie liegen; alsdann nemlich ist Lage und Größe des Kreises gleichgültig.

d) Bey allen 2λ seitigen Figuren, sind die Zähler des doppelten Werthes von 2λ , identisch. Aber bey den 4λ seitigen Figuren, sind die Zeichen der Glieder in beyden Zählern, entgegengesetzte: hingegen bey den $4\lambda + 2$ seitigen Figuren, sind auch die Zeichen gleich.

Daher rührt der Unterschied in der Form der Bedingungs-Gleichungen, für die Durchschnittspuncte dieser beyden Klassen von Figuren. Bey den 4λ seitigen, findet sich in dieser Gleichung stets das doppelte Product aller α , und diese verschiedenen α sind überhaupt in jedem Gliede, als Factoren, in gerader Anzahl enthalten. Hingegen hebt sich, in der Bedingungs-



Gleichung für $4\lambda + 2$ seitige Figuren, das Product aller α auf, und diese sind überhaupt, in jedem Gliede, als Factoren, in ungerader Anzahl enthalten; daher ist hier eine Klasse von Gliedern weniger, und r^2 um eine Potenz niedriger.

e) Alle α und β sind in den Bedingungs-Gleichungen nur in der ersten Potenz enthalten. Auch ist kein α mit seinem zugehörigen β multiplicirt. Daraus folgt eben die [unter a) dieses §.] bemerkte gerade Linie.

f) Die Symmetrie für die Coordinaten der einzelnen Durchschnittspuncte, ist, trotz der anscheinenden Verschiedenheit der Zeichen, in den Gleichungen sichtbar, und bedarf keiner Auseinandersetzung. — Nur darf man in der Folge der Durchschnittspuncte auf einander, keine im Kreise gültige Versetzung machen, wenn man durch dieselben, Figuren in den Kreis beschreiben will. Man kann daher zwar bey einem beliebigen Puncte anfangen, auch rückwärts so gut als vorwärts sie zählen; man darf aber, aus der Ordnung, worin man sie zuerst gezählt hat, nicht überspringen. (cf. §. 16). Wenn aber alle $2\lambda + 1$ Durchschnittspuncte in Einer geraden Linie liegen; so ist jede Ordnung gleichgültig; wenn sie nur zweymal in derselben Ordnung gebraucht werden.

24.

Für jetzt bleibt uns noch übrig: darzuthun, daß die synthetische Auflösung des Problems in §. 3, auch auf alle λ seitige Figuren anwendlich sey. Da dies hier aber nicht Hauptsache ist; so werden wir uns kurz fassen, uns auf Klügels mathematisches Wörterbuch beziehen, und an dem Beispiele, welches er (Artikel: Kreis, §. 120) für das Viereck giebt, zeigen, daß sein Verfahren auch auf die anderen vierseitigen Figuren anwendlich sey.

Dazu ist nun nichts weiter nöthig, als daß man sich eine ähnliche Figur, wie die Klügelsche Fig. 42. entwirft. Man lasse die Linien MN

und OP darin stehen, und ziehe die Diagonalen zwischen ihnen: vertausche aber die Stellen der Buchstaben O und P. Man nenne nun den gegebenen Punkt in der Linie ON, welches jetzt eine Diagonale seyn wird, wieder B. u. s. w. daß alle Punkte, die in Einer Linie liegen, in beyden Figuren einerley Bezeichnung erhalten. Dann wird man das ganze Verfahren bey der Auflösung, auf die neue Figur anwenden, und im §. 120 bey Klügel dieselben Worte beybehalten können.

Auch darin ist die synthetische Auflösung der analytischen gleich; daß sie für jeden Fall eine doppelte Auflösung giebt.

So ziehe man in Klügels Fig. 40, die Linien, AF und BE, welche mit CE das zweite Dreieck geben.

In Fig. 41. ziehe man CT und BT; so wird man von A aus eine gerade durch die andern beyden Durchschnittspuncte obgedachter Linien mit dem Kreise, legen können.

In Fig. 42. ziehe man AU durch den Kreis, dann BU, von C nach den andern Durchschnitt der Linie BU, nahe bey O; und von D nach den andern Durchschnitt der Linie CO, nahe bey P; so werden die zweiten Durchschnitte der Linien AU und DP in einen Punct treffen.

Der Grund liegt darin, daß der brauchbare Durchschnitt des Hilfskreises mit dem gegebenen, zweymal, auf jeder Seite der Sehne, welche den bestimmten Winkel fassen soll, anwendlich ist. In Fig. 41. kann man den Winkel HVL an die andere Seite des Mittelpunctes legen.

25.

Da nun die analytische Auflösung des Problems in §. 3. in allen Stücken mit der synthetischen übereinstimmt; so ist es auch wahrschein-



lich, daß man auch die Bedingungs = Gleichung, welche uns in dieser Abhandlung beschäftigt hat, auf eine allgemeine Weise werde construiren können. Dadurch würden denn auch die Nicht = Analytiker der unerträglichen Weitschweifigkeit in den eingeschränkten Beweisen für das Vier- und Sechseck überhoben seyn können. Der Verf. fühlt sich aber in der Synthesis nicht stark genug, um einen solchen Versuch wagen zu können: und überläßt dies anderen Kräften.

Als Zusatz wollen wir noch bemerken: wenn man für die Coordinaten unserer Punkte, die in §. 3. gebrauchte Bezeichnungsart wieder einführt; so haben unsere Bedingungs = Gleichungen folgende Formen. Die für vierseitige Figg. wird $r^2 = aa' \cos(A' - A)$;

Für 6seitige Figg. $aa' \sin(A' - A) + a'a'' \sin(A'' - A') + aa'' \sin(A - A'') = 0$

Für 8seitige Figg. erhalten die in r^2 multiplicirten Glieder dieselbe Form wie bey den 4seitigen, und die Summe der beyden letzten Glieder der Gleichung (IV) ist $= a a' a'' a''' \cos(A''' - A'' + A' - A)$

Bei den 10seitigen Figg. kann man in der Gleichung (VII) allen Gliedern folgende Form geben: $2r^2 a a' \sin(A' - A) + aa'a''a''' [\cos A' \cdot \cos A'' \cdot \sin(A - A''') + 2 \sin A'' \cdot \sin A''' \cdot \sin(A - A') + 2 \sin A \cdot \sin A' \cdot \sin(A'' - A''')]]$

Bei den 4λ seitigen Figg. werden also alle Glieder, Unterschiede der Cosinus, und bey den 4λ + 2seitigen, Unterschiede der Sinus enthalten.

Verbesserungen.

- ©. 19. §. 5. statt: einem* Kreise l. einen Kreis.
- ©. 21. §. 4. st. 560 l. 620.
- ©. 25. §. 9. st. 562 l. 620.
- ©. 31. §. 9. v. u. st. §. 8. l. §. 7.
- ©. 32. in der letzten Gleichung st. $(\alpha' - \alpha')$ l. $(\alpha' - \alpha'')$.

II.

T h e o r i e

der

vollständigen magischen Quadrate.

Einleitung.

Die Seiten eines Quadrates $= P$, von denen wir uns zweye als horizontal, und die andern beyden als vertikal gelegen, denken wollen, theile man in λ gleiche Theile. Durch die Theilungspuncte ziehe man gerade Linien, mit den Seiten von P parallel; so wird P dadurch in λ^2 kleine Quadrate, oder Zellen abgetheilt werden.

Die λ Zellen, welche zwischen zwey zunächst gelegenen horizontalen Theilungslinien enthalten sind, wollen wir zusammen: einen Balken nennen. Eben so die λ Zellen, zwischen zwey nächsten vertikalen Theilungslinien: eine Säule. Die Balken zählen wir von oben herab, und die Säulen, von der linken zur rechten.

Die Reihe von Zellen, welche durch eine gerade Linie, die durch ihre Winkelpuncte geht, und mit einer Diagonale parallel liegt, durchschnitten werden; nennen wir einen Sparren. Und zwey parallele Sparren, welche zusammen λ Zellen enthalten, von denen jede in einem andern Balken und einer andern Säule liegt; nennen wir: eine Sparrenkoppel: unter welchem Ausdruck wir stets die Zellen, welche in einer Diagonale liegen, mit begreifen, bey welchen die Anzahl der Zellen im zweiten Sparren $= 0$ wird. Die Sparren und Koppeln, welche mit der Diagonale, die von oben herab, von der linken zur rechten gezogen ist, parallel sind; wollen wir Sparren und Koppeln erster Art nennen: die anderen — zweiter Art.



Die gewöhnliche Art ein magisches Quadrat, welches wir stets mit Q bezeichnen wollen, zu bilden, besteht nun darin:

Man schreibt in die Zellen von P, die Glieder einer arithmetischen Reihe, z. B. die natürlichen Zahlen, in der Ordnung, wie die Zellen in den Balken, und wie diese selbst auf einander folgen. Dann theilt man ein zweites Quadrat, auf gleiche Art wie P, in Zellen; und verlangt nun: daß man die Glieder der Reihe aus P, so in das zweite Quadrat schreibe, daß hier die Summe aller Glieder, welche in Einem Balken, in Einer Säule oder in Einer Diagonale liegen, stets dieselbe = S bleibt. Hat man dies bewirkt; so nennt man das zweite Quadrat, ein magisches.

Von diesen Q wird ausführlich gehandelt, in: „de quadratis magicis Commentatio, auctore Mollweide, Lipsiae 1816.“

Von diesen Q sind die meisten keiner allgemeineren Darstellung fähig, als Mollweide von ihnen giebt.

Wenn aber verlangt wird: daß nicht allein jede Säule und jeder Balken, sondern auch jede Sparrenkoppel, die gleiche Summe = S geben soll; so nennen wir dies Q: vollständig. Und die Theorie solcher Q läßt sich allgemeiner aus den Elementen der Theorie der Zahlen herleiten, und soll uns in dieser Abhandlung beschäftigen.

Mollweide führt von diesen Q nur ein Beispiel in der Vorrede an, welches von Moschopolus herrührt; ohne die Theorie davon zu geben. Auch hat er sie, so viel ich weiß, nicht nachgeliefert; obgleich er darüber Versprechungen in der Vorrede seiner Abhandlung macht.

Auch ein paar andere unvollständige Q, die Mollweide ausführlich, aber zu eingeschränkt, betrachtet, und von denen er bey dem einen (nach der Methode der Ostindier, pag. 45 seiner Abhandlung) auch keine Theorie giebt; lassen sich ganz einfach aus unserer Theorie der vollständigen Q herleiten.

Zur Bezeichnung der einzelnen Zellen von P und Q, wollen wir die Zahl des Balkens, worin eine Zelle liegt, zuerst schreiben, nachher die Zahl der Säule, und zwischen beyden einen vertikalen Strich ziehen. So bedeutet: $m + 1 | n + 1$; die Zelle im $m + 1$ ten Balken, die zugleich in der $n + 1$ ten Säule liegt.

Die Aufgabe, welche der Vorwurf dieser Abhandlung ist, wird nun darin bestehen:

Die Function von m und n zu bestimmen, wornach ein Glied, welches in P die Zelle $m + 1 | n + 1$ einnimmt, in Q gesetzt werden muß; damit hier jeder Balken, jede Säule und jede Sparrenkoppel, die gleiche Summe = S gebe.

A u f l ö s u n g:

1.

Wir wollen zuerst den Werth von S finden. Um dabey so allgemein als thunlich zu verfahren, so wollen wir annehmen, daß P mit den Gliedern zweyer arithmetischen Reihen, die ein gemeinschaftliches Anfangsglied = A haben, in der Art angefüllt sey: daß zwey zunächst gelegene Glieder Eines Balkens, den Unterschied = f ; und zwey solche Glieder Einer Säule, den Unterschied = g geben.

Die Glieder des ersten Balkens von P, werden dann folgende seyn:

$A; A + f; \dots A + xf; \dots A + (\lambda - 1)f$; deren Summe = $\frac{1}{2}\lambda(2A + (\lambda - 1)f)$

Die Glieder des zweiten Balkens sind:

$A + g; A + g + f; \dots A + g + gf; \dots A + g + (\lambda - 1)f$;

die Summe = $\frac{1}{2}\lambda(2(A + g) + (\lambda - 1)f)$

Die Glieder des $m + 1$ ten Balkens sind:

$A + mg; A + mg + f; \dots A + mg + xf; \dots A + mg + (\lambda - 1)f$;

deren Summe = $\frac{1}{2}\lambda(2(A + mg) + (\lambda - 1)f)$



Die Glieder des letzten Balkens sind:

$$A + (\lambda - 1)g; A + (\lambda - 1)g + f; \dots A + (\lambda - 1)g + \omega f; \dots A + (\lambda - 1)(g + f);$$

$$\text{deren Summe} = \frac{1}{2}\lambda(2A + (\lambda - 1)(2g + f))$$

$$\text{Die Summe dieser Summen ist} = \frac{1}{2}\lambda^2(2A + (\lambda - 1)(f + g))$$

und da die Balken, Säulen und Sparrenkoppeln jeder Art in der Anzahl $= \lambda$ vorhanden sind; so wird seyn:

$$S = \lambda A + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)(f + g)$$

Nehmen wir λ ungerade, oder $= 2\mu + 1$; so wird:

$S = (2\mu + 1)(A + (f + g)\mu)$ = der Summe der Glieder des mittlern, oder $\mu + 1$ ten Balkens; oder der $\mu + 1$ ten Säule. Denn man erhält die Summe der Glieder einer Säule, wenn man in dem Ausdruck für die Summe des gleichnamigen Balkens, f mit g vertauscht.

Setzt man hier, $A = -\mu(f + g)$; so wird $S = 0$, so wie das mittlere Glied: Man erhält dann $2\mu(\mu + 1)$ paar gleiche, aber entgegengesetzte Glieder.

Uebrigens kann A auch jeden anderen verneinten Werth haben, so wie auch f , oder g ; auch können diese Größen gebrochene Werthe erhalten.

2.

Wir können nun leicht erweisen, daß je λ Glieder von P , wenn sie nur in lauter verschiedenen Säulen und Balken liegen, doch stets die Summe $= S$ geben werden.

Denn wenn wir annehmen, daß die unbestimmten Glieder des vorhergehenden §:

$$A + xf; A + g + yf; \dots A + mg + zf; \dots A + (\lambda - 1)g + \omega f;$$

alle in verschiedenen Säulen liegen; so werden auch die Werthe der Größen: $x, y, \dots z, \dots \omega$; alle verschieden seyn: und zusammengekommen werden sie die Reihe: $0, 1, 2, 3, \dots \lambda - 1$

bilden, deren Summe, wenn sie mit f multiplicirt wird, $\equiv \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)f$; Rechnet man dazu die bestimmten Theile der unbestimmten Glieder, nemlich:

$$A; A + g; \dots A + mg; \dots A + (\lambda - 1)g;$$

deren Summe $= \lambda A + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)g$ ist; so wird die Summe aller unbestimmten Glieder $\equiv \lambda A + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)(f + g) = S$.

3.

Wenn wir es also so einrichten könnten, daß die Glieder, welche in Q einen Balken, eine Säule, oder eine Sparrenkoppel bilden, in P in lauter verschiedenen Balken und Säulen gelegen hätten; so würde dies Q vollständig seyn.

Und da der in §. 2 geführte Beweis, ganz und gar nicht von der Ordnung abhängt, in welcher die unbestimmten Glieder auf einander folgen; so ist klar: daß man die Balken von P unter sich, und ebenso die Säulen unter sich, auf alle mögliche Art versetzen — und dadurch ein sogenanntes secundäres Quadrat bilden — könne; ohne hiedurch seiner Eigenschaft — daraus, auf die gedachte Art, ein vollständiges Q zu bilden — im mindesten Abbruch zu thun. Wir können daher die Benennung P , nun auch auf das secundäre Quadrat anwenden.

Man sieht auch leicht, daß alle Zellen, welche mit der Zelle $B | D$ in Einer Sparrenkoppel liegen, unter dem Ausdruck: $B + x | D \pm x$ enthalten seyn müssen: wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Koppel, erster oder zweiter Art ist. Da aber dieser Ausdruck, sowohl für die Balken als die Säulen, nur λ verschiedene Werthe, von 1 bis λ , geben soll; so verstehen wir darunter blos die nachbleibenden Reste, wenn der Ausdruck mit λ dividirt wird: wobey der Rest $= 0 = \lambda$ ist.

Die Summe der Glieder jeder Sparrenkoppel von P , ist $= S$; da sie alle in verschiedenen Balken und Säulen liegen; welches auch bey allen mög-

lichen Versetzungen der Balken unter sich, und der Säulen unter sich, der Fall bleibt.

4.

Wir wollen nun zuerst für die Function von m und n , wornach die Glieder von P in Q gesetzt werden sollen, eine lineäre Form annehmen, und sie so bestimmen: daß das Glied, welches in P die Zelle: $m + 1 \mid n + 1$ einnimmt; in Q , die Zelle: $B + mb + n\beta \mid D + md + nd$; erhalte.

Bei diesem Ausdruck ist natürlich immer nur, sowohl bei den Balken als Säulen, der Rest seiner Division durch λ zu verstehen.

Wir müssen nun, wenn Q vollständig werden soll, folgende Bedingungen erfüllen:

- a) Es dürfen nicht zwei Glieder eines Balkens, oder einer Säule, von P ; in Q in einem Balken, einer Säule, oder einer Sparrenkoppel liegen.
- b) Wenn wir die Glieder aus P in der Ordnung nehmen, wie sie in den Balken von P , und wie diese selbst auf einander folgten; so darf keine Zelle von Q , welche ein Glied aus P einnehmen soll, schon von einem vorhergehenden Gliede aus P , besetzt seyn.
- c) Auch muß man in einzelnen Fällen, die Zelle, welche das erste Glied des ersten Balkens von P , in Q einnehmen soll, welche $= B \mid D$ ist, bestimmen.

Wir haben aber 6 unbekannte Größen: $B, b, \beta, D, d, \delta$; welche so bestimmt werden müssen, daß diese Bedingungen erfüllt werden.

5.

Nach der Bestimmung im vorhergehenden §, werden nun die Glieder der Zellen des $m + 1$ ten Balkens von P , in Q folgende Zellen erhalten:

das erste Glied, erhält die Zeile:	$B + mb \mid D + md$
das zweite	$B + mb + \beta \mid D + md + d$
das $x + 1$ te	$B + mb + x\beta \mid D + md + xd$
das λ te	$B + mb + (\lambda - 1)\beta \mid D + md + (\lambda - 1)d$

Sollen nun die Bezeichnungen für die Balken in dieser Reihe, lauter verschiedene Balken darstellen; so ist dazu erforderlich, daß die Reste, welche bey ihrer Division durch λ nachbleiben, alle von einander verschieden sind. Wenn aber zwey solcher Glieder, z. B. das $x + 1$ te, und das auf ähnliche Art zu bildende $x' + 1$ te, in Rücksicht der Balken, gleiche Reste geben; so muß ihr Unterschied, welcher $= (x' - x)\beta$ ist, entweder $= 0$, oder ein Multipulum von λ seyn. Wenn wir daher durch z irgend eine ganze bejahnte oder verneinte Zahl bezeichnen, die auch $= 0$ werden kann, so darf, wenn obige Balkenreihe lauter verschiedene Balken darstellen soll, die Gleichung:

$$(x' - x)\beta = z \cdot \lambda$$

nicht statt finden.

Eben so wenig darf für obige Säulenreihe, die Gleichung:

$$(x' - x)d = z\lambda$$

statt finden.

Ist nun λ eine Primzahl, so können diese beyden Gleichungen nicht bestehen, wenn β und $d < \lambda$ sind, ohne jedoch $= 0$ zu seyn. Denn $(x' - x)$ kann höchstens den Werth $\pm(\lambda - 1)$ erhalten.

Ist aber λ keine Primzahl; so dürfen die Größen β und d keine Factoren von λ enthalten. Denn $x' - x$ kann alle Werthe von ± 1 bis $\pm(\lambda - 1)$ bekommen, und enthält also gewiß periodisch den andern Factor von λ : wo alsdann die Gleichungen statt fänden.

Gegentheils, wenn β und d keinen Factor von λ enthalten, so können



obige Gleichungen nicht bestehen; weil auf der einen Seite des Gleichheitszeichens ein Factor stehen würde, der sich auf der anderen Seite nicht befände.

6.

Die Zellen, welche die Glieder der $n+1$ ten Säule von P, in Q, nach §. 4, einnehmen sollen, erhalten wir, wenn wir in den Reihen des vorhergehenden §, m mit n , auch b und β , so wie d und δ mit einander, vertauschen. Und es erhellet dann eben so wie dort: daß weder die Gleichung:

$(x' - x)b = z\lambda$; noch diese: $(x' - x)d = z\lambda$; statt finden darf. Es darf also auch weder b noch d einen Factor von λ enthalten, noch $= 0$ seyn; wenn alle Glieder einer Säule von P, in alle Balken und Säulen von Q vertheilt werden sollen. Und gegentheils, wenn b und d diese Bedingung erfüllen; so werden alle Glieder einer Säule von P, in lauter verschiedenen Balken und Säulen von Q liegen.

7.

Sollen zwey Glieder aus Einem Balken von P, in Q nicht in Einer Sparrenkoppel liegen; so dürfen zwey Glieder aus der in §. 5 gegebenen Reihe, nicht unter der Form stehen, welche wir in §. 3 für zwey Glieder gefunden haben, die in Einer Sparrenkoppel liegen. Es dürfen also die beyden Gleichungen:

$$B + mb + x'\beta = B + mb + x\beta + y;$$

$$\text{und: } D + md + x'\delta = D + md + x\delta \pm y;$$

welche immer nur in Ansehung der Reste ihrer Division durch λ gelten, nicht zu gleicher Zeit statt finden. Wäre dies der Fall; so würde daraus mit leichter Mühe folgen:

$$(x' - x)(\beta \pm \delta) = z\lambda$$

Es darf also auch $\beta \pm \delta$ weder $= 0$ seyn, noch einen Factor von λ enthalten.

Auf eben die Art würde man für die Glieder Einer Säule von P, die Gleichung:

$$(x' - x)(b \pm d) = z\lambda$$



seyn, mit der Zelle, welche (nach S. 4.) das Glied der Zelle: $m + 1 \mid n + 1$ von P, in Q einnimmt; so würde leicht daraus folgen:

$$\left. \begin{array}{l} (m' - m)b + (n' - n)\beta = z\lambda \\ \text{und: } (m' - m)d + (n' - n)\delta = z\lambda \\ \text{also auch: } (m' - m)(b \pm d) + (n' - n)(\beta \pm \delta) = z\lambda \end{array} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

welche Gleichung also nicht statt finden darf. (z kann natürlich in jeder dieser Gleichungen einen anderen Werth haben.) $m' - m$ und $n' - n$ können hier jeden Werth von 0 bis $\pm(\lambda - 1)$ haben; nur dürfen sie nicht beyde zu gleicher Zeit = 0 seyn. Denn alsdann wäre nicht von zweyen verschiedenen Gliedern, sondern nur von Einem die Rede.

Die letzte der Gleichungen (I) ist aber im Allgemeinen allemal in ganzen Zahlen aufzulösen, wenn man $m' - m$ und $n' - n$ (oder nöthigen Falls $n - n'$) als die unbekannten Größen, und z als gegeben ansieht: wobey denn, wenn $b \pm d$, und $\beta \pm \delta$, einen gemeinschaftlichen Factor enthalten, auch z diesen Factor enthalten muß. Dies ist aus der Theorie der unbestimmten Gleichungen vom ersten Grade bekannt.

Es wird also hier blos darauf ankommen, ob wir Bedingungen zwischen den Größen b, β, d, δ auffinden können, wodurch die Gleichung, für die angegebenen Gränzen von $m' - m$ und $n' - n$, unauflöslich wird. Dies wird der Fall seyn können, wenn β ein Multiplum oder Submultiplum von b , und δ auch ein Multiplum oder Submultiplum von d ist.

Denn wenn wir zuerst $\beta = \beta'b$; und $\delta = \delta'd$ setzen; so wird die erste der Gleichungen (I) sich mit b , und die zweite mit d müssen dividiren lassen: und wir werden statt ihrer, die beyden folgenden erhalten:

$$\begin{array}{l} (m' - m) + (n' - n)\beta' = z\lambda \\ \text{und: } (m' - m) + (n' - n)\delta' = z\lambda \end{array}$$

Diese geben, addendo: $2(m' - m) + (n' - n)(\beta' + \delta') = 2\lambda$

und subtrahendo: $(n' - n)(\beta' - \delta') = 2\lambda$

Nimmt man nun in dieser letzten Gleichung, β' und δ' so an, daß $\beta' - \delta'$ nicht $= 0$, und auch keinen Factor von λ enthält; so kann die Gleichung nicht anders erfüllt werden, als wenn $n' - n = 0$ ist. Aber wenn man diesen Werth, in die addendo erhaltene Gleichung setzt; so giebt sie:

$$2(m' - m) = 2\lambda$$

Ist λ nun eine ungerade Zahl; so kann diese Gleichung nicht aufgelöst werden. Denn $m' - m$ darf nicht $= 0$ seyn, und kann die Größe von λ nicht erreichen; daher könnte z nur $= \pm 1$ seyn. Alsdann müßte aber eine ungerade Zahl, einer geraden gleich seyn, welches unmöglich ist.

Ist hingegen $\lambda = 2\mu$; so sind die Gleichungen (I) allemal auflöslich, wenn $m' - m = \mu = n' - n$ wird; weil β, b, δ, d , alle ungerade seyn müssen.

Man würde also, wenn man nach unserer Methode ein Q von $(2\mu)^2$ Zellen anfertigen wollte, außerdem daß man die Bedingungs-Gleichung wegen der Sparrenkoppeln nicht befriedigen kann, auch schon besetzte Zellen in Q vorfinden, sobald man zu der zweiten Hälfte der Glieder von P kommt. Wollte man das Glied der Zelle: $\mu + 1 \mid 1$ von P in eine noch leere Zelle von Q schreiben; in deren Säule und Balken noch kein Anfangsglied eines Balkens von P steht; so könnte man Q ganz ausfüllen. Aber es werden dann bloß die Balken, oder bloß die Säulen von Q die richtige Summe $= 8$ geben, wie dies leicht zu zeigen wäre.

Wir wollen aber zu unsern Gleichungen zurückkehren. Man würde ein ähnliches Resultat wie oben erhalten, wenn man $b = b'/\beta$, und $d = d'/\delta$ setzt; und es würde sich bloß dadurch von dem ersten unterscheiden, daß in dem einen das für die Säulen gilt, was in dem anderen für die Balken ausgesagt wird. Da man aber bey jedem P , die Ausdrücke: Balken und Säulen mit einander



vertauschen kann (wenn man es zur Hälfte umdrehet); so behalten wir blös die erste Annahme.

Wir werden also: $\beta = \beta' b$; und: $\delta = \delta' d$; setzen müssen; so daß $\beta' - \delta'$ nicht $= 0$, und auch keinen Factor von $\lambda = 2\mu + 1$ enthält.

10.

Wenn wir nun alle Bedingungen, welche wir aufgefunden haben, um ein vollständiges Q zu bilden, zusammen zählen; so sind dies folgende:

- a) λ darf nicht unter Einer der Formen: $\lambda = 2\mu$; oder: $\lambda = 3\mu$ stehen.
- b) Die Größen, welche nicht $= 0$ seyn, und auch keine Factoren von λ enthalten dürfen, sind folgende:

$\beta' b$, $\delta' d$, (nach §. 5.); b , d , (nach §. 6.); $\beta' b \pm \delta' d$; und $b \pm d$; (nach §. 7.) und $\beta' - \delta'$ (nach §. 9).

Hat man diese Bedingungen erfüllt; so kann man das Glied der Zelle: $m + 1 \mid n + 1$ von P, nach Q in die Zelle:

$$B + (m + n\beta')b \mid D + (m + n\delta')d$$

setzen, und wenn man dies Verfahren auf alle Glieder von P angewandt hat; so wird Q vollständig seyn.

Die Zelle: $B \mid D$ für das erste Glied von P in Q, bleibt unbestimmt.

Um die Bedingungen zu vereinfachen, können wir $\delta' = -\beta'$ setzen, und wieder β statt β' schreiben. Dann erhalten wir für die Auflösung unserer Aufgabe folgende Vorschrift:

Wenn λ nicht $= 2\mu$ oder $= 3\mu$ ist, und von den Größen: β , b , d , $b \pm d$, keine $= 0$ ist, noch einen Factor von λ enthält; so setze man das Glied, welches in P die Zelle: $m + 1 \mid n + 1$ einnimmt, nach Q in die Zelle:

$$B + (m + n\beta)b \mid D + (m - n\beta)d$$



so wird Q vollständig seyn, wenn man alle Glieder von P auf diese Weise behandelt.

11.

Die Ausfüllung von Q geschieht sehr leicht, wenn man für β , b , d , kleine Zahlen annimmt: z. B. $\beta = b = 1$; $d = \pm 2$. Hier kommen die Glieder jedes Balkens von P, so nach einander in Q zu stehen, wie der Springer im Schach die Felder bedecken würde, wenn er immer nach Einer Richtung spränge. Wenn ein Glied von P nach irgend einer Richtung über das Quadrat Q hinausfällt; so bedenke man nur immer, daß man es, bey der Zahl der Balken und Säulen, blos mit Resten der Division durch λ zu thun hat: und zum Beyspiel der Balken $-\alpha = \lambda - \alpha$; so wie der Balken $\lambda + \alpha = \alpha$ ist; dann wird man nicht irren. Beym Anfange jedes neuen Balkens von P, kömmt aber ein neuer, leicht zu fassender Ansaß: Wenn wir obige Werthe für β und b nehmen, und $d = 2$ setzen; so erhält das letzte oder λ te Glied des $m + 1$ ten Balkens von P, oder das Glied der Zelle: $m + 1 \mid \lambda - 1 + 1$; in Q die Zelle: $B + m + \lambda - 1 \mid D + 2m - 2(\lambda - 1)$ Das folgende Glied, oder das Glied der Zelle: $(m + 1) + 1 \mid 0 + 1$ von P, erhält dann in Q die Zelle: $B + m + 1 \mid D + 2m + 2$. Zieht man den ersten Ausdruck von dem zweiten ab; so sieht man, daß das erste Glied eines neuen Balkens von P, um $-\lambda + 2$, oder um $+ 2$ Balken, und um $+ 2\lambda = 0$ Säulen weiter zu stehen kömmt; als das letzte Glied des vorhergehenden Balkens. Diesen einzelnen Fall *) hat Moschopulus bemerkt, der unnötiger Weise das erste Glied bestimmt.

12.

Um doch auch ein Beyspiel nach unserer Methode zu geben; so wollen wir auch das Quadrat von 7 wählen.

*) oder vielleicht den wo $d = -2$; ich kann jetzt nicht nachsehen.



Dabey wollen wir nach §. 1, $A = 11$; $f = 1$; $g = 10$; setzen, und nun die Balken und Säulen, aber jeden Theil für sich, zusammen würfeln, daß sie als secundäres P, so zu stehen kommen:

22	27	23	24	26	21	25
52	57	53	54	56	51	55
32	37	33	34	36	31	35
62	67	63	64	66	61	65
72	77	73	74	76	71	75
42	47	43	44	46	41	45
12	17	13	14	16	11	15

Wir haben so ein Beyspiel gewählt, damit, wie man sieht, in jedem Balken die erste Ziffer, und in jeder Säule die letzte Ziffer, unveränderlich sey. In dem daraus zu bildenden Q, dürfen also die Glieder, welche in irgend einem Balken, einer Säule, oder einer Sparrenkoppel zusammen liegen, weder eine erste noch eine letzte Ziffer gemein haben: und daran wird man gleich die Richtigkeit erkennen.

Nimmt man nun 3 , B. $B = 1$; $b = 2$; $d = 3$; so werden diese Größen ihre Bedingungen (nach §. 10) erfüllen; und das vollständige Q wird nun so aussehen:

47	73	64	36	51	25	12
24	16	41	75	62	37	53
31	55	22	17	43	74	66
72	67	33	54	26	11	45
13	44	76	61	35	52	27
56	21	15	42	77	63	34
65	32	57	23	14	46	71

Die Stelle des ersten Gliedes ist willkürlich: wir haben es in $3 \mid 3$ gesetzt. Jedes folgende Glied eines Balkens von P , liegt in Q um 2 Balken und 4 Säulen weiter, als das vorhergehende. Und das erste Glied eines neuen Balkens von P , liegt um 4 Balken und 0 Säulen weiter, als das letzte Glied des vorhergehenden Balkens.

Auch die Glieder, welche in irgend einer Sparrenkoppel von P liegen, werden trotz der Versetzungen, welche wir mit den Balken und Säulen vorgenommen haben, weder eine erste noch eine letzte Ziffer gemeinschaftlich haben: woraus die Richtigkeit unserer Behauptung (in §. 3, am Ende) augenscheinlich wird. — Dies sind wahre demonstrationes ad oculos.

13.

Man könnte veranlaßt werden, zu glauben, daß man durch Annahme einer höheren Function von m und n , als wir in §. 4 gesetzt haben, andere Bedingungs - Gleichungen erhalten, und vielleicht gar auch die Quadrate der mit 2 und 3 zusammengesetzten Zahlen, vollständig machen könnte. Darum wollen wir diesen Fall untersuchen.

Wir wollen annehmen, daß das Glied der Zelle $m + 1 \mid n + 1$ von P , in Q die Zelle: $a + b m^\alpha + c m^\beta n^\gamma + d n^\delta \mid a' + b' m^\alpha + \dots$ erhalten solle. Dann würde in der Balkenreihe des §. 5 der Unterschied des $x' + 1$ ten und $x + 1$ ten Gliedes folgender seyn: $c m^\beta (x'^\gamma - x^\gamma) + d (x'^\delta - x^\delta)$; aber diese Größe läßt sich mit $(x' - x)$ dividiren, und der veränderliche Quotient darf nie einen Factor von λ enthalten. Aber m kann auch $= 0$ werden, und würde auch, wenn λ keine Primzahl ist, zu Zeiten den anderen Factor von λ enthalten; daher bleibt bloß das letzte Glied dieses Unterschiedes übrig, worin also d keinen Factor von λ enthalten darf. Eben so würde man aus der Säulenreihe von §. 5 finden, daß auch d' ; und (aus §. 6) daß auch b und b' ; und (aus §. 7) daß auch $b \pm b'$, und $d \pm d'$ keinen Factor von λ enthalten darf.



Aber auch, wenn man diese Bedingungen erfüllt; würde man doch kein Q zu Stande bringen; denn die, mit den constanten Größen noch verbunden bleibenden, veränderlichen Größen, können und werden sehr wahrscheinlich zu Zeiten einen Factor von λ enthalten.

Die Bedingungs-Gleichungen in §. 9 würden folgende Form erhalten:

$$(m'\alpha - m\alpha) b + (m'\beta n'\gamma - m\beta n\gamma) c + (n'\delta - n\delta) d = 2\lambda$$

und die zweite wird dieser gleich, wenn man b', c', d' ; statt b, c, d schreibt.

Wir wollen hier blos den Fall betrachten, wenn λ gerade und $= 2\mu$ ist. Setzt man $m' - m = n' - n = \mu$; so lassen sich alle Glieder mit μ dividiren, und rechter Hand wird der Werth $= 2$.

Aber da b, b', d, d' alle ungerade seyn müssen; so bleibt in der Summe und Differenz beider Gleichungen blos das Glied: $(c' \pm c) ()$, worin die leere Klammer eine Reihe von Producten der potenzirten Größen μ, m, n , andeuten soll. Diese müßte, so wie der erste Factor, immer ungerade seyn. Aber m und n sind unabhängig von einander, und können jeden Werth von 0 bis $\mu - 1$ erhalten. Daher ist es nicht ausführbar, die Reihe immer ungerade zu erhalten.

Man würde also immer schon besetzte Zellen in Q vorfinden, wenn man nach unserer Methode ein Q von der Wurzel $= 2\mu$ machen wollte.

Wollte man noch mehrere Potenzen von m und n in die Function setzen; so würde es blos die Folge haben, daß alsdann in den Bedingungs-Gleichungen noch mehrere veränderliche Größen, mit den constanten verbunden bleiben würden; die auch keinen Factor von λ enthalten dürften: welches alle Bestimmung der constanten Größen überflüssig machen würde.

Daher wird es bey der lineären Function des §. 4 sein Bewenden haben müssen.



14.

Wir wollen nun ein paar andere Methoden, unvollständige Q der ungeraden λ zu bilden, welche von Mollweide nicht in das gehörige Licht gesetzt sind, aus unserm Verfahren ableiten.

Da nach §. 3 die Sparrenkoppeln jeder Art, auch bey allen Versehungen der Balken und Säulen unter sich, immer die richtige Summe = S geben; und bey ungeraden $\lambda = 2\mu + 1$; nach §. 1 auch der Balken und die Säule, in welchen das Glied befindlich ist, welches im ursprünglichen P das mittelste war, stets die Summe = S geben; so kann man verlangen:

wenn $\lambda = 2\mu + 1$, ein Q zu bilden, worin die Glieder der Sparrenkoppeln der einen (ersten) Art von P, die Balken; und die der zweiten Art, die Säulen bilden, und worin auch die Summe der Glieder in jeder Diagonale = S sey.

A u f l ö s u n g:

Die Zellen der Glieder, welche in P (auch dem secundären) in Einer Sparrenkoppel liegen, stehen unter der Form: $m + x + 1 \mid n \pm x + 1$; (cf. §. 3) und erhalten (nach §. 4) in Q die Zellen:

$$B + (m + x)b + (n \pm x)\beta \mid D + (m + x)d + (n \pm x)\delta$$

Soll nun bey dem obern Zeichen, und veränderlichem x , der Balken hier unverändert bleiben; so muß: $(b + \beta)x = 0$ seyn. Also: $\beta = -b$;

Soll hier ferner bey dem untern Zeichen, die Säule unveränderlich bleiben; so muß: $(d - \delta)x = 0$ seyn; also: $d = \delta$;

Und das Glied der Zelle: $m + 1 \mid n + 1$ von P, erhält in Q die Zelle:
 $B + (m - n)b \mid D + (m + n)d$;

Hier bleiben b und d willkürlich, außer daß sie den Bedingungs-Gleichungen in §. 9 Genüge leisten müssen. Dies geschieht aber allemal, wie man



leicht sieht, wenn sie nur keine Factoren von λ enthalten, und λ ungerade ist. Deswegen ist auch diese Methode auf die Q, worin $\lambda = 2\mu$ ist, nicht anwendlich.

Setzt man nun in diesem Ausdruck für die Zellen: $b = d$; und m unveränderlich; so sieht man (bey veränderlichem n), daß alle Glieder, welche in P in Einem Balken lagen, in Q in Einer Sparrenkoppel zweiter Art liegen werden.

Setzt man $n = \text{constans}$, und m veränderlich; so erhellet eben so: daß alle Glieder, welche in P in Einer Säule lagen, in Q in Einer Sparrenkoppel erster Art liegen werden.

Nun wird man noch B und D so bestimmen müssen, daß das mittelfte Glied des ursprünglichen P, auch in Q in die mittelfte Zelle zu liegen komme.

Gesetzt: dies Glied nehme im secundären P, die Zelle: $m+1 \mid n+1$ ein; so wird es in Q die Zelle: $B + (m-n)b \mid D + (m+n)b$; erhalten. Soll diese nun die mittelfte werden; so muß sie $= \mu + 1 \mid \mu + 1$ seyn. Daraus folgt: $B = \mu + 1 - (m-n)b$; $D = \mu + 1 - (m+n)b$;

Z. B. wenn man $b = d = 2$ setzt; so ist in dem in §. 12 aufgeführten secundären P, $\mu = 3$; und das ursprünglich mittelfte Glied ist $= 44$; und liegt in der Zelle: $6 \mid 4$; also ist: $m = 5$; $n = 3$; daher wird $B = 0 = 7$; und $D = -12 = +2$; und das erste Glied von P, oder die 22, muß in Q die Zelle: $7 \mid 2$ erhalten, wenn die Diagonalen auch die richtige Summe $= 8$ geben sollen. Jedes nachfolgende Glied eines Balkens aus P, kommt in Q, um 2 Balken höher, und 2 Säulen weiter zu liegen, als das vorhergehende: und das erste Glied eines folgenden Balkens von P, liegt um 0 Balken, und 3 Säulen weiter in Q, als das letzte Glied des vorhergehenden Balkens. Hiernach wird sich jeder Leser leicht das Q selbst ausfüllen können.



15.

Verlangt man: daß außer den Balken und Säulen, nur die Sparrenkoppeln Einer Art die Summe $= S$ geben sollen; (wie dies bey der Methode der Ostindier der Fall ist, die Mollweide pag. 45 seiner Abhandlung anführt); so ist dies durch unsere Methode sehr leicht zu erhalten.

Wir haben nemlich nichts weiter nöthig, als daß wir in der ersten allgemeineren Auflösung unsers Problems im §. 10, alle constante Größen ihre übrigen Bedingungen erfüllen lassen: und nur Eine von den Bedingungen, welche (nach §. 7) die Sparrenkoppeln erfordern, in der Art aufheben; daß Ein Werth von Einer der folgenden Größen $\beta' b \pm \delta' d$; $b \pm d$; einen Factor von λ enthält.

So erhalten wir, wenn wir das Beyspiel des §. 12 wieder vornehmen, und: $\beta' = 1$; $b = 2$; $\delta' = 3$; $d = 4$; setzen; für: $\beta' b + \delta' d$ den Werth $= 2 \cdot 7$; und die übrigen nöthigen Bedingungen werden erfüllt.

Will man nun aus dem dortigen secundären P, ein Q wie hier verlangt wird, bilden; so bleibt das erste Glied willkürlich. Ein folgendes Glied jedes Balkens von P, kommt in Q, um 2 Balken und $- 2$ Säulen, von dem vorhergehenden zu liegen: und das erste Glied eines folgenden Balkens von P, liegt in Q, um 4 Balken und 2 Säulen weiter, als das letzte Glied des vorhergehenden Balkens von P.

Für Leser, welche die demonstrationes ad oculos lieben, will ich doch das ausgefüllte Q hersehen, worin das erste Glied $= 22$, willkürlich in die Zelle: $2 \mid 3$ gesetzt ist.



62	37	53	24	16	41	75
31	55	22	17	43	74	66
54	26	11	45	72	67	33
27	13	44	76	61	35	52
15	42	77	63	34	56	21
46	71	65	32	57	23	14
73	64	36	51	25	12	47

16.

Obgleich wir im §. 7 gefunden haben, daß für $\lambda = 3\mu$ kein vollständiges Q , in welchem auch alle Sparrenkoppeln die Summe = S geben, statt findet; so können wir doch beweisen:

Wenn $\lambda = 3(2\mu + 1)$ ist; so wird in einem nach unserer Methode gebildeten Q , der dritte Theil aller Sparrenkoppeln die richtige Summe = S geben.

Dies erhellet aus folgender Darstellung:

Die beyden Glieder, welche in P die Zellen: $m + 1 \mid n + 1$; und: $m' + 1 \mid n' + 1$; einnehmen; stehen (nach §. 10 am Ende) in Q in den Zellen:

$$B + (m + n\beta)b \mid D + (m - n\beta)d$$

$$\text{und: } B + (m' + n'\beta)b \mid D + (m' - n'\beta)d$$

Sollen beide Glieder in Q in Einer Sparrenkoppel liegen; so muß (nach §. 3):

$$B + (m' + n'\beta)b = B + (m + n\beta)b + x + 3z(2\mu + 1)$$

$$\text{und: } D + (m' - n'\beta)d = D + (m - n\beta)d \pm x + 3z(2\mu + 1)$$

seyn; wo z in jeder Gleichung eine andere Zahl bedeuten kann.

Daraus folgt nach einigen leichten Reductionen:

$$(IV) \dots (m' - m)(b \mp d) = -\beta(n' - n)(b \pm d) + 3z(2\mu + 1)$$

Wo das obere Zeichen für die Sparrenkoppeln erster Art gilt.

Wir wollen nun zuerst diese betrachten.

Wir wissen, daß b und d , von der Form: $3x \pm 1$ seyn müssen; daher wird nothwendig Eine, und nur Eine der Größen: $b \pm d$, den Factor $= 3$ enthalten. Wir nehmen zuerst an, daß $b + d$ diesen Factor enthalte, und setzen: $b - d = p$; und: $b + d = 3q$; worin also p und q keinen Factor von $2\mu + 1$ enthalten.

Da nun im zweiten Theile der Gleichung (IV) alles mit 3 dividirt werden kann; so muß auch nothwendig $(m' - m)$ den Factor $= 3$ enthalten. Und wenn wir $m' - m = 3x$ setzen; so wird die Gleichung (IV) sich in folgende umwandeln:

$$xp = -\beta q(n' - n) + x(2\mu + 1) \quad . \quad . \quad (V)$$

worin der größte Werth von $x = \pm 2\mu$ ist; da $m' - m$ höchstens nur $= 6\mu + 2$ seyn kann.

In dieser Gleichung kann $n' - n$ nicht anders $= 0$ werden, als wenn $x = 0$, also $m' - m$ auch $= 0$ wird, welches für zwey verschiedene Zellen von P nicht statt finden kann. Daraus folgt also: daß in Einer Sparrenkoppel dieser Art, nicht zwey Glieder aus Einer Säule von P zu finden sind. Hingegen, wenn $x = 0$ ist, kann man die Gleichung befriedigen, wenn man: $n' - n = 2\mu + 1$; setzt. Wenn also in einer Sparrenkoppel z. B. das Ate Glied aus einem Balken von P steht; so steht auch das $A + 2\mu + 1$ te, und das $A + 2(2\mu + 1)$ te darin, und nicht mehrere: denn $A + 3(2\mu + 1)$ ist wieder $= A$, und auf andere Art kann die Gleichung (V) nicht befriedigt werden, da $n' - n$ höchstens $= \pm(\lambda - 1)$ seyn kann.

Da drey Glieder aus jedem Balken von P, von welchem überhaupt Glieder in einer dieser Koppeln vorkommen, darin zu finden sind; so müssen aus $2\mu + 1$ verschiedenen Balken von P, Glieder darin vorkommen: und wenn Glieder aus dem Balken z darin befindlich sind; so werden auch Glieder



aus dem Balken: $x + 3x$ darin stehen. Daher erhellet, daß x in der Gleichung (V) alle Werthe von 0 bis 2μ erhalten kann; denn der Balken $x + 3(2\mu + 1)$, ist wieder $= x$, und die Reihe der Balken geht hier wieder von neuem an.

Ist nun der $\frac{1}{2}(\lambda + 1)$ te als der mittlere Balken des ursprünglichen P, dessen Glieder auch die Summe $= S$ geben, in der Reihe $x + 3x$ enthalten; so sind auch die Balken: $\frac{1}{2}(\lambda + 1) + 3y$; und $\frac{1}{2}(\lambda + 1) - 3y$ darin enthalten, wo y jeden Werth von 1 bis μ haben kann. Aber die 3 Glieder aus dem Balken: $\frac{1}{2}(\lambda + 1) + 3y$ von P, sind jedes um $3yg$ größer, und die aus dem Balken: $\frac{1}{2}(\lambda + 1) - 3y$; um eben so viel kleiner als die Glieder des mittleren Balkens, die mit ihnen in gleichen Säulen liegen. Zusammen ist also ihre Summe gleich, der Summe der 6 gleichliegenden Glieder im mittlern Balken. Da dies nun von allen Balken der Reihe gilt, und die Glieder aus diesen Balken alle in verschiedenen Säulen liegen; so ist die Summe aller Glieder dieser Koppel, gleich der Summe aller Glieder des mittleren Balkens von P, $= S$. Hätte man die Balken des ursprünglichen P unter sich versetzt; so müßte dies in Rücksicht auf den mittleren Balken symmetrisch geschehen seyn: sonst würde unser Beweis nicht mehr anzuwenden seyn.

Da nun alle Glieder aller Balken von P, in den Sparrenkoppeln Einer Art von Q vorkommen; so muß es $2\mu + 1$ dieser Koppeln geben, worin Glieder des mittleren Balkens vorkommen, und auf welche unser Beweis anwendlich ist.

Auf ähnliche Art kann man nun leicht erweisen, daß in jeder Koppel zweiter Art von Q, je drei Glieder aus Einer Säule, und nur Ein Glied aus jedem Balken von P enthalten sind: und daß die $2\mu + 1$ Koppeln dieser Art, in welchen Glieder der mittlern Säule des primären P vorkommen, gleichfalls die richtige Summe $= S$ geben müssen.



Enthält $b - d$ den Factor $= 3$; so sind in den Koppeln erster Art je drey Glieder aus Einer Säule von P enthalten &c. &c.

Sollen hieby die Diagonalen von Q, die richtige Summe geben; so muß die mittlere Zelle $= \frac{1}{2}(\lambda + 1) \mid \frac{1}{2}(\lambda + 1)$ durch ein Glied von P ausgefüllt werden, welches dort die Zelle: $\frac{1}{2}(\lambda + 1) + 3x \mid \frac{1}{2}(\lambda + 1) + 3y$ einnahm, wo x und y alle Werthe von 0 bis $\pm\mu$ haben können. Dies Glied würde, wenn wir $\lambda = 2\lambda' + 1$ setzen, in Q die Zelle:

$B + (\lambda' + 3x)b + (\lambda' + 3y)\beta b \mid D + (\lambda' + 3x)d - (\lambda' + 3y)\beta d$ erhalten; soll dies nun $= \lambda' + 1 \mid \lambda' + 1$ seyn; so wird

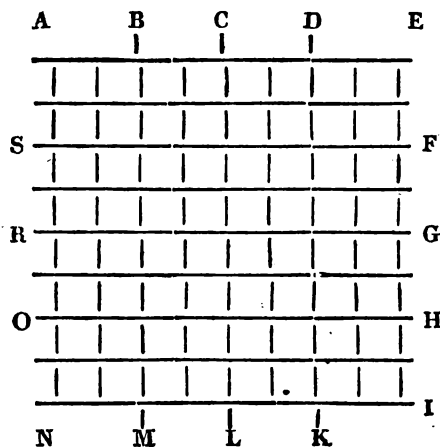
$$B = 1 + \lambda'(1 - b - \beta b) - 3b(x + \beta y); \text{ und } D = 1 + \lambda'(1 - d + \beta d) - 3d(x - \beta y).$$

Durch diese Gleichungen werden $(2\mu + 1)^2$ verschiedene brauchbare Werthe von B, mit den zugehörigen von D, für die Stelle des ersten Gliedes von P in Q bestimmt. Denn x kann $2\mu + 1$ Werthe erhalten, und für jeden giebt es wieder $2\mu + 1$ Werthe von y ; wovon jeder ein anderes Glied in die Mitte bringen, also auch einen anderen Werth von B mit D zusammen geben wird.

17.

Da sich auch die Methode, die magischen Quadrate, deren Wurzel $= 4\lambda$ ist, anzufertigen, sehr leicht dahin abändern läßt: daß außer den gleichen Summen der Säulen und Balken, sich auch noch λ Sparrenkoppeln jeder Art, zusammen also 2λ , oder der 4te Theil aller Koppeln darin finden müssen, welche die gleiche Summe geben; so wollen wir davon mit wenigem reden: besonders da diese Methode auch auf die Quadrate der Wurzel $= 4\lambda + 2$ anwendlich ist, welche auch 2λ solcher Koppeln geben müssen.

Zum Beispiel diene das beigefügte Quadrat von der Wurzel $= 8$. Die Methode ist nun diese:



Man ziehe durch die Sparren von P, ein Parallelogramm: $BHKS = p$; dessen Mittelpunkt, der Durchschnittspunct der Diagonalen des Quadrates ist. Ein gleiches Parallelogramm: $DFMO = p'$; wird man symmetrisch gegen die andere Diagonale so legen können, wie p gegen die erste lag. Man schreibe nun die Glieder vom ursprünglichen P, die von einer Seite von p und p' durchstrichen werden, in umgekehrter Ordnung in die parallele Seite desselben in Q: z. B. die Glieder, welche in P von B nach H liegen, schreibe man in Q von K nach S, et vice versa. Wenn alle Seiten von p und p' so behandelt sind; so setze man die nicht von ihnen ergriffenen Glieder von P, in dieselben Zellen von Q, welche sie in P einnahmen. — Damit ist das verlangte magische Quadrat der Wurzel 8 beendigt.

18.

Die Figur macht den Beweis beinahe entbehrlich. Von jedem Parallelogramm p , werden in jedem Balken und jeder Säule von P, zwei Glieder ergriffen; und diese alle kommen in die ex diametro entgegengesetzte Zelle von

Q, also in die conjugirten Balken und Säulen *). Z. B. das Glied der Zelle: $m + 1 \mid n + 1$ von P, bekommt in diesem Fall in Q die Zelle: $4\lambda - m \mid 4\lambda - n$; et vice versa. Aber wegen der symmetrischen Lage von p' , wird alsdann von ihm auch die Zelle: $m + 1 \mid 4\lambda - n$ von P ergriffen, und ihr Glied bekommt in Q die Zelle: $4\lambda - m \mid n + 1$; et vice versa.

Wenn man aber die Hälfte aller Glieder eines Balkens in den conjugirten, und die in gleichen Säulen liegenden Glieder dieses letzten Balkens in den ersten setzt; so muß jeder Balken die Summe = S geben. Eben das gilt für die Säulen. Daher werden bey diesem Verfahren alle Balken und Säulen der Wurzel = 8, die richtige Summe = S geben. Was die Sparrenkoppeln anlangt; so sieht man, daß die von p und p' ergriffenen Glieder von P, welche in Einer Koppel lagen, auch in Q in Einer Koppel bleiben. Z. B. die Koppel BH, OM; bildet in Q die Koppel: KS; FD et vice versa. Nun geben aber alle Koppeln von P die Summe = S; und jede Seite von p bildet mit einer anderen von p' eine Koppel; daher müssen also 4 Koppeln die richtige Summe geben.

Jede Seite von p muß aber mit einer anderen von p' eine Koppel bilden. Denn wenn die eine Seite von p , x Zellen bestreicht; so bestreicht die anliegende, $4\lambda - x$ Zellen. Nun giebt es aber in jedem Quadrat nur 4 Sparren von x , und eben so viele von $4\lambda - x$ Zellen, diese werden also alle von p und p' bestrichen. Aber wenn ein Sparren x Zellen hat; so muß der zu seiner Koppel gehörige, $4\lambda - x$ Zellen haben. Es müssen also alle Seiten von p und p' , Koppeln bilden.

*) Conjugirte Balken und Säulen sind solche, die von den beiden äußern gleichen Abstand haben: und bekanntlich muß die Summe ihrer Glieder = $2S$ seyn, wenn S immer die Summe aller Glieder von P, durch die Wurzel dividirt, anzeigt.



Zwey Zellen, die in Einem Balken B liegen, sollen die Säulen C und D einnehmen. Die Zellen der Sparren, worin diese beyden Zellen liegen, müssen, wenn diese Sparren sich durchkreuzen sollen, unter dem Ausdruck: $B \pm x \mid C \pm x; B \pm y \mid D \mp y$; enthalten seyn. Sollen beyde Sparren eine Zelle gemeinschaftlich haben; so wird: $x = y = \frac{1}{2}(C - D)$ seyn. Es müssen also C und D zugleich gerade oder ungerade seyn; denn der Zusatz: $\frac{1}{2}(z \cdot 4\lambda)$ oder: $\frac{1}{2}z(4\lambda + 2)$; zur Gleichung, macht dabey keine Aenderung.

Aber wenn die parallelen Seiten von p in Einem Balken $= B$; die Säulen $1 + a$ und $1 + b$ einnehmen; so werden die kreuzenden Seiten von p' in diesem Balken die Säulen: $4\lambda - a$ und $4\lambda - b$ einnehmen. Wenn also a und b zugleich gerade oder ungerade sind; so sind $4\lambda - a$ und $4\lambda - b$ auch zugleich gerade oder ungerade; aber $1 + a$ und $1 + b$ zu gleicher Zeit ungerade oder gerade; daher der Unterschied zwischen ihnen und $4\lambda - a$; $4\lambda - b$ immer ungerade, und die sich kreuzenden Seiten von p und p' können keine Zelle gemeinschaftlich haben. Nun sind aber die parallelen Seiten der Parallelogramme nach der Construction von der Diagonale auf beyden Seiten gleichweit entfernt; daher muß der Unterschied ihrer Säulen in Einem Balken, oder: $a - b$ immer gerade, d. h. a und b zugleich gerade oder ungerade seyn. p' kann also keine Zelle gemeinschaftlich, weder mit p noch mit einem andern Parallelogramm haben, welches in dem Balken B , die Zellen $B \mid 1 + a \pm 2y$ und $B \mid 1 + b \mp 2y$ hat.

19.

Wenn p und p' mit ihren Winkeln nach der Mitte zu rücken; so gehen zuletzt beyde in Ein Quadrat: $CGLR$ zusammen; wodurch also nur zwey Glieder in jedem Balken und jeder Säule versehen werden. Eben so wenn die Winkel nach außen rücken; so fallen p und p' zuletzt in die Diagonalen, die

man als Parallelogramme ansehen kann, in denen der Abstand zweyer parallelen Seiten $= 0$ ist. Wenn man daher die Glieder in jeder Diagonale nach umgekehrter Ordnung schreibt; (z. B. die von A nach I lagen, schreibt man von I nach A;) so werden dadurch auch nur zwey Glieder in jedem Balken und jeder Säule versetzt.

Man kann daher statt p und p' auch die Glieder des Quadrats und der beyden Diagonalen auf ebengedachte Art unter sich versetzen, und dadurch ein magisches Quadrat der Wurzel $= 8$ erhalten, welches außer den gleichen Summen der Balken, Säulen und Diagonalen, auch noch für die beyden Sparrenkoppeln, welche das Quadrat bildet, eine gleiche Summe geben.

20.

Allgemeiner wird nun folgendes klar seyn:

Wenn in der Wurzel 4λ , λ gerade ist; so bilde man $\frac{1}{2}\lambda$ Paare solcher symmetrischen Parallelogramme, wie p und p' , mit der (in S. 18. am Ende bemerkten) Bedingung, daß sie keine Zelle unter einander gemeinschaftlich haben, — und versetze die darin liegenden Glieder auf die bemerkte Art in Q. Die in P nicht von den Parallelogrammen ergriffenen Glieder, schreibe man eben so in Q, wie sie in P stehen. Damit wird das verlangte magische Quadrat vollendet seyn.

Anstatt Eines Paares der Parallelogramme, kann man auch das Quadrat und die Diagonalen zusammen gebrauchen.

Ist λ ungerade so nehme man $\frac{1}{2}(\lambda - 1)$ Paare von Parallelogrammen. Dadurch wird man in jeden Balken &c. $2\lambda - 2$ Glieder versetzen. Für die noch fehlenden zwey Glieder nehme man entweder das Quadrat, oder die beyden Diagonalen; so wird das magische Quadrat vollendet werden, wenn man die übrigen Glieder von P, nach ihrer Ordnung in Q schreibt.



Bei der Wurzel 4 wird man bloß das Quadrat, oder bloß die Diagonalen versehen.

Wenn die Wurzel aber von der Form: $8\mu + 2$; oder $8\mu + 6$ ist; so wird man auch μ Paare von Parallelogrammen nehmen können, und im letztern Falle noch die Diagonalen oder das Quadrat dazu; aber das noch fehlende Glied kann man nicht anders erhalten, als daß man immer zwey von den Parallelogrammen nicht ergriffene Glieder, die bey den conjugirten Balken in gleichen Säulen, und bey den conjugirten Säulen in gleichen Balken liegen, mit einander vertauscht; so daß in jeden Balken und jede Säule Ein neues Glied kommt. Z. B. das magische Quadrat von 6, kann man so darstellen:

1	2	34	33	35	6
7	29	9	10	26	30
24	14	15	22	17	19
18	23	21	16	20	13
25	11	28	27	8	12
36	32	4	3	5	31

worin die mit einem Punct bezeichneten Glieder im Quadrat, die richtige Summe geben werden.

Für die Quadrate, deren Wurzel $= 4\lambda$ ist, kann man dies Verfahren, wenn man stets die Diagonalen versehen, analytisch so ausdrücken: Wenn in P die Zelle eines Gliedes unter einer der beyden Formen: $1 + x$ | $1 + 4y + x$; und: $4\lambda - x$ | $4(\lambda - y) - x$; steht; so setze man dies Glied nach Q in die Zelle von der anderen Form: eben so, wenn diese beyden Formen sind: $1 + x$ | $4y - x$; und: $4\lambda - x$ | $4(\lambda - y) + x + 1$; die anderen Glieder von P, setze man nach Q in dieselben Zellen, die sie in P hatten.

A n h a n g.

(Cf. die Vorrede.)

Wenn k und p zwei Primzahlen sind; so ist bekanntlich der Rest von $\frac{k^{\frac{1}{2}(p-1)}}{p}$ und von $\frac{p^{\frac{1}{2}(k-1)}}{k}$; $= \pm 1$. Der Beweis aber über die Gleichheit oder Ungleichheit dieser Reste, nach den verschiedenen Formen der Zahlen k und p , fand früher unübersteigliche Hindernisse: bis ihn zuletzt Gauß aus Elementar-Begriffen der Zahlenlehre, auf eine überraschende Art führte. Dieser schöne Beweis nun, läßt sich an Einer Stelle noch etwas kürzer und einfacher darstellen: und ich hoffe, mich keiner schiefen Beurtheilung aussetzen, wenn ich davon hier die Mittheilung mache. Ich bedaure aber, dabei nicht die Original-Schrift von Gauß benutzen zu können; sondern nehme die Bezeichnung aus Legendre theorie des nombres. Paris 1808: wobey ich hoffe, daß Legendre (der bey dieser Veranlassung in gerechte Bewunderung über Gauß ausbricht) die Zeichen nicht verändert haben wird. Dasselbst steht pag. 390 die Gleichung:

$$(I) \dots \mu = E\left(\frac{k}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{p}\right) \dots + E\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}\right);$$

worin $E\left(\frac{xk}{p}\right)$ das größte Ganze, welches in $\frac{xk}{p}$ enthalten ist, bedeutet: ohne den Rest zu betrachten. Die Anzahl der Glieder ist $= p'$; und der Werth des letzten Gliedes $= k'$, wenn $p = 2p' + 1$; und $k = 2k' + 1$; gesetzt wird, und $k < p$ ist. Dies vorausgesetzt: Nun ist allgemein:

$$E\left(\frac{xp}{k}\right) \cdot \frac{k}{p} < x; \text{ und: } \left(E\left(\frac{xp}{k}\right) + 1\right) \cdot \frac{k}{p} > x;$$

so lange $x < k$ ist. Wenn man nun für x die Reihe der natürlichen Zahlen



setzt; so ist klar: Wenn der Zahlen-Coefficient eines Gliedes der Gleichung (I);
 $= E\left(\frac{p}{k}\right)$ ist; so ist das Glied < 1 ; also noch $= 0$, und das folgende
 Glied ist $= 1$ oder größer. Eben so: wenn der Coefficient $= E\left(\frac{2p}{k}\right)$ ist;
 so ist das Glied noch kleiner als 2, und das folgende $= 2$, oder größer &c.

In der Gleichung (I) findet sich also

$$\left. \begin{array}{l} \text{von solchen Gliedern die } > 0 \text{ sind, eine Anzahl } = p' - E\left(\frac{p}{k}\right) \\ \dots\dots\dots > 1 \dots\dots\dots = p' - E\left(\frac{2p}{k}\right) \\ \dots\dots\dots > 2 \dots\dots\dots = p' - E\left(\frac{3p}{k}\right) \\ \dots\dots\dots > k' - 1 \dots\dots\dots = p' - E\left(\frac{k'p}{k}\right) \end{array} \right\} \dots\dots (II)$$

Wenn man nun den Werth jedes Gliedes das > 0 ist, zuerst $= 1$ setzt;
 nachher den Werth jedes Gliedes das > 1 ist, nochmal $= 1$ setzt, bis man zu-
 letzt für den Werth jedes Gliedes das $> k' - 1$ ist, noch $= 1$ setzt; so muß
 man den Werth aller Glieder erhalten: da sie nur ganze Zahlen bilden, und
 das letzte Glied der Reihe (I), nur um die Einheit größer ist, als $k' - 1$. Der
 Werth aller Glieder von (I) ist also = der Summe von (II) =

$$p'k' - E\left(\frac{p}{k}\right) - E\left(\frac{2p}{k}\right) \dots\dots - E\left(\frac{k'p}{k}\right) = \mu;$$

$$\text{Aber: } \nu = E\left(\frac{p}{k}\right) + E\left(\frac{2p}{k}\right) \dots\dots + E\left(\frac{k'p}{k}\right);$$

daher: $\mu + \nu = p'k'$; Q. E. D.

III.

A n a l y s i s

der

Bewegung des doppelten Kegels

und

aller andern so zu nennenden

Doppel-Körper, .

auf festen Unterlagen,

phoronomisch und dynamisch betrachtet.

E i n l e i t u n g.

I.

Die anscheinend paradoxe steigende Bewegung, welche ein doppelter, mit seinen Grundflächen zusammengefügtter Regel unter gewissen Umständen zeigt, ist bekannt genug, und im Allgemeinen sehr leicht zu erklären; demungeachtet scheint mir die Analyse, wodurch alle ähnliche Erscheinungen auch bey andern Körpern umfassend erörtert werden, Interesse genug zu haben, um damit eine kleine Abhandlung zu füllen: wenn gleich die Praxis dabey leer ausgehn sollte.

Die erste Veranlassung zu dieser Abhandlung gab eine andere von Brünings, welche in Hindenburg Archiv für Mathem. II. 7. steht, worin die Erscheinungen bey der Bewegung des Doppel-Regels ziemlich oberflächlich untersucht, und was die Hauptsache ist, ganz unrichtig dargestellt werden. Um diese Beschuldigung zu beweisen, wird die einzige Bemerkung hinreichen, daß der Verfasser seine Resultate alle in der Voraussetzung gewinnt: daß die Unterstützungs-Puncte des Regels mit dem Schwerpuncte desselben in seiner Axe, stets in Einer und derselben Vertikalebene liegen. Nun ist aber an sich klar, daß alsdann durch die Schwere des Regels wenigstens keine drehende Bewegung desselben erfolgen könnte; aber aus dem Folgenden wird auch sogleich erhellen, daß unter diesen Umständen auch keine gleitende oder fortschreitende Bewegung des Regels durch seine Schwere statt findet, weil der Schwer-



punct bey dieser Bewegung auch nicht sinken kann, welches doch nach dem Satz der virtuellen Geschwindigkeiten alsdann geschehen müßte.

Hiernach werde ich also aller speciellen Widerlegung und Vergleichung der Resultate überhoben seyn können. Doch werden wir noch im Verfolg aus der offenbaren Ungereimtheit eines Resultats, was aus der Brüningschen Voraussetzung richtig gefolgert ist, die Unrichtigkeit dieser kürzlich zeigen können.

Brünings führt noch an, daß Kraft in den Comm. Nov. Petrop. T. VI. und Kononow in den Actt. Nov. Petrop. 1789. T. VII. das Daseyn und die Größe der drehenden Kraft beym Doppel-Regel erwiesen hätten, und diese Beweise werden aller Wahrscheinlichkeit nach richtig seyn. Obgleich mir nun die Petersburger Acten und Commentarien nicht zugänglich waren; so hoffe ich doch durch die Allgemeinheit der folgenden Analyse gegen jede Collision mit diesen Vorgängern, welche nur vom Regel gehandelt haben, gesichert zu seyn. Andere Schriften über diesen Gegenstand kenne ich nicht, und Murhard führt in seiner Literatur der mathematischen Wissenschaften auch blos den Kononow an.

2.

Doppel-Körper wollen wir, nach der Analogie von Doppel-Regel, solche Körper nennen, welche durch Umdrehung entstanden sind, und durch eine Ebene, senkrecht auf ihre Umdrehungs-Axe, in zwey gleiche und ähnliche, auch in Rücksicht auf die theilende Ebene gleichliegende Hälften getheilt werden können. Wenn die beyden Hälften keinen unmittelbaren Zusammenhang haben; so denkt man sich solche durch eine feste Umdrehungs-Axe vereinigt.

Bey der nachfolgenden Untersuchung nehmen wir übrigens auf beyden Seiten der theilenden Ebene alles als gleich an, sowohl in Rück-

sicht des als homogen betrachteten Doppel-Körpers, als seiner Unter-
stützung, und der auf ihn wirkenden Kräfte. Daraus folgt:

- 1) Der Schwerpunct des Doppel-Körpers befindet sich im Mittel-
puncte seiner Figur, und liegt stets in der theilenden Ebene.
- 2) Die Umdrehungs-Axe des Doppel-Körpers bleibt bey seiner Be-
wegung stets senkrecht auf die gedachte Ebene, und jeder Punct
der Axe wird einerley Linie beschreiben.
- 3) Wenn die Lage der theilenden Ebene gegeben ist; so ist die Lage
des ganzen Doppel-Körpers, durch die Lage eines Punctes seiner
Umdrehungs-Axe, gegeben.
- 4) Wir werden nur den Zustand und die Veränderung der Größen
an Einer Seite der theilenden Ebene in Betrachtung zu ziehen
nöthig haben.
- 5) Die Lage der theilenden Ebene wird unveränderlich seyn.

Wir wollen nun die Lage der Puncte im Raum, auf rechtwink-
lichte Coordinaten beziehen, die wir, wie gewöhnlich, mit x , y , z be-
zeichnen, deren Anfangspunct wir in dem Durchschnittspunct der Axe des
Doppel-Körpers mit der theilenden Ebene, in einer ersten Lage dessel-
ben, setzen. Und zwar soll die Axe der z in der entgegengesetzten Rich-
tung der aus allen Kräften, die auf den Körper wirken, zusammenge-
setzten Kraft liegen; z wird also, wenn, wie gewöhnlich, nur die
Schwere auf den Körper wirkt, vertikal, also die Ebene x , y horizontal
seyn.

Die Ebene y , z , sey diejenige, wodurch der Doppel-Körper be-
ständig in gleiche Hälften getheilt wird: und der Schwerpunct des Dop-
pel-Körpers beschreibe bey der Bewegung desselben, in dieser Ebene
eine Linie, deren Coordinaten wir nach der Richtung der y , mit β ; und



auch der Richtung der z , mit γ bezeichnen wollen; so werden wir für diese Linie die Gl (diese Abkürzung wollen wir uns in der Folge, statt: Gleichung; so wie Gl, statt: Gleichungen, erlauben) $\gamma = f(\beta)$, annehmen können: wo f ein Functions-Zeichen ist.

Für die Linie, durch deren Umdrehung um die Ase x , der Doppel-Körper entsteht, wollen wir die Gl: $y = X$, annehmen, worin X eine Function von x ist.

Es ist leicht einzusehen, daß die Ordinaten der beyden eben betrachteten Linien, wenn Verwirrungen und selbst Ungereimtheiten vermieden werden sollen, nur Einförmige Functionen ihrer Abscissen seyn dürfen: daher wird die angenommene Form ihrer Gl nothwendig. Wenn daher X Wurzelgrößen enthält; so geben die verschiedenen Zeichen dieser Größen, die verschiedenen Zweige Einer Linie, und aus jedem Zweige wird ein anderer Doppel-Körper gebildet. Eben so muß, wenn $f(\beta)$ Wurzelgrößen enthält, jeder Zweig besonders betrachtet werden.

Bei der Gl: $y = X$, ist aber noch folgendes zu bemerken: Wenn X lauter gerade, oder lauter ungerade Potenzen von x enthält; so wird die ganze Linie durch die Ase y in zwey gleiche Theile getheilt, und durch Umdrehung der Linie um die Ase x , kann der ganze Doppel-Körper entstehen. Enthält aber X , gerade und ungerade Potenzen von x mit einander vermischt; so kann nur der auf Einer Seite der Ase y befindliche Theil der Linie, zur Bildung des Doppel-Körpers angewandt werden, wodurch also nur die eine Hälfte desselben entsteht: dies kann man dadurch ausdrücken, daß x in der Gl: $y = X$, nicht das Zeichen ändern darf. Wenn man auf diese Art z. B. die + Hälfte des Körpers gefunden hat; so findet man die Gleichung der Linie, wodurch die — Hälfte desselben gebildet wird, dadurch; daß man in X entweder

bey den geraden oder den ungeraden Potenzen von x , das $\pm$ in $\mp$ verwandelt, und die Bedingung hinzufügt, daß x blos verneinte Werthe erhalten, also auch nicht das Zeichen ändern soll.

Wenn nun bey der Bewegung des Doppel-Körpers, in irgend einer Lage desselben, β und γ die Coordinaten seines Schwerpunkts sind; so wird die Gl für seine halbe oder ganze Oberfläche, (nach der eben vorhergehenden Bemerkung) in dieser Lage, folgende seyn:

$$(1) \dots (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = X^2$$

denn x ist bey dieser Bewegung nicht weiter veränderlich. So ist z. B.

1) Für den Doppel-Kegel, welcher durch Umdrehung der Linie: $y = t(h - x)$, um die Ase x entsteht: $X^2 = t^2 \cdot (h - x)^2$.

Diese Gl, worin x das Zeichen nicht ändern darf, gilt also nur für die eine Hälfte des Doppel-Kegels, der aber noch über seine Scheitel hinaus, bis ins Unendliche verlängert, gedacht werden muß. Nimmt man x innerhalb der Gränzen 0 und $+h$; so entsteht daraus die eine Hälfte des gewöhnlichen, mit seinen Grundflächen zusammengefügtten Doppel-Kegels.

Hingegen, nimmt man x innerhalb der Gränzen 0 und $-\infty$; so entsteht die eine Hälfte eines Doppel-Kegels, dessen Spitzen weggeschnitten sind, und der mit seinen kleinern Grundflächen zusammengefügt ist. Und von $x = +h$, bis $x = +\infty$; entsteht durch Umdrehung, der zweite ganze Kegel, der zu dem Theil des ersten gehört, wo x zwischen 0 und $+h$ galt.

Setzt man $h = 0$; so gilt sie für den eigentlichen, mit den Scheiteln vereinigten Doppel-Kegel, und x kann das Zeichen ändern.

Setzt man: $t = 0$; $h = \infty$; und: $t \cdot h = r$; so gilt die Gl für den Cylinder, dessen Halbmesser der Grundfläche $= r$ ist. Bey diesem ist also: $X^2 = \text{const.} = r^2$.



2) Eine Linie zweiter Ordnung, die in der Ebene x, y liegt, habe die große Ase $= a$, und den Parameter $= b$. Die Coordinaten des Anfangspunctes dieser Ase, seyen: h , (nach der Richtung der x), und h' , nach der Richtung der y ; die Ase a , mache mit der Ase x , den Winkel $= \lambda$; so wird man für diese Linie folgende Gl haben;

$$y \text{ oder } X = h' + \frac{(x-h) \cdot (a-b) \cdot \sin \lambda \cdot \cos \lambda + \frac{1}{2} ab \cdot \sin \lambda \pm (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4} ab \cdot \sin^2 \lambda + a \cdot (x-h) \cdot \cos \lambda - (x-h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{a \cdot \cos^2 \lambda + b \cdot \sin^2 \lambda}$$

in welcher Gl aber die doppelten Zeichen zweyen ganz verschiedenen Doppel-Körpern angehören werden, die durch Umdrehung jedes Zweiges dieser Linie um die Ase $= x$ entstehen würden. Wenn man in dieser Gl, a verneint nimmt; so gilt sie bekanntlich für die Hyperbel, und wenn $a = \infty$ ist, für die Parabel. Setzt man darin: $a = b = 2r$; so gilt sie für einen Kreis vom Halbmesser $= r$; außerdem für Ellipsen.

Es bedeute π , den halben Umfang des Kreises. Wenn man in der Gl für X , $\lambda = 0$ setzt; so wird sie geben:

$$\left. \begin{aligned} X &= h' \pm \left(b \cdot (x-h) - \frac{b}{a} \cdot (x-h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \\ \text{und für } \lambda &= \frac{1}{2}\pi, \text{ wird sie geben:} \\ X &= h' + \frac{1}{2}a \pm \left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{a}{b} \cdot (x-h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned} \right\} \dots (1)^*$$

Für $\lambda = \pi$, wird man in der ersten dieser Gl: $h - x$, für: $x - h$, setzen; und wenn $\lambda = \frac{3}{2}\pi$ ist, wird man in der zweiten dieser Gl: $X = h' - \frac{1}{2}a \pm$ &c. setzen.

Wenn man in der ersten der Gl (1)*, $h = -\frac{1}{2}a$, setzt; so wird sie geben: $X = h' \pm \left(-\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{1}{4}a^2 - x^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$; alsdann gilt sie für den

ganzen Doppel-Körper, und x kann das Zeichen ändern: eben so, wenn in der zweiten der Gl (1)*, $h = 0$, ist.

Dies mag zu den Beispielen hinreichen.

3.

11) Wenn nun für eine nächstfolgende Lage des bewegten Doppel-Körpers, diejenigen Punkte des Raumes gefunden werden sollen, in welchen seine Oberfläche in den beiden Lagen sich schneidet; so werden die Coordinaten: x, y, z , für alle diese Punkte unverändert bleiben, und es werden in der Gl (1), nur die Coordinaten des Schwerpunktes sich ändern.

Differenziert man aber die Gl (1), in dieser Voraussetzung; so erhält man:

$$(2) \quad (y - \beta) + (z - \gamma) \cdot \frac{dy}{d\beta} = 0; \text{ oder: } \frac{dy}{d\beta} = \frac{\beta - y}{z - \gamma};$$

Das System der beiden Gl, (1) und (2), stellt bei gegebenen: β, γ und $\frac{dy}{d\beta}$, die Curve dar, worin die gesuchten Punkte liegen: nemlich die von Monge sogenannte charakteristische Curve. (Cf. Lacroix *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Tom. I. §. 338 und 339. Auf dieses vortreffliche Werk, welches zu Paris 1797 seqq. erschienen ist, wird der Verf. sich in der nachfolgenden Untersuchung hauptsächlich beziehen. Und wenn es auch einigen Anschein von Unschicklichkeit haben sollte, daß in einer zunächst für deutsche Leser geschriebenen Abhandlung, stets Bezug auf ein in französischer Sprache geschriebenes Werk genommen ist; so hält der Verf. sich doch dadurch hinreichend gerechtfertiget, daß ihm in der That kein deutsches Buch bekannt ist, worin die neuern Fortschritte der Analysis so vollständig und klar dargestellt wären, als in dem genannten Werk von Lacroix. Bekanntlich ist aber auch zu Berlin



1799 eine Uebersetzung dieses Werkes, wenigstens des ersten Theiles desselben erschienen.) *).

Eliminirt man aber β und γ aus diesen beyden Gl, vermöge der Gl $\gamma = f(\beta)$; so erhält man die Gl der ringförmigen Grenzoberfläche, worin alle charakteristischen Curven enthalten sind, und welche den Körper in jeder seiner Lagen, mit einer solchen Curve berührt. (Cf. Lacroix l. c. Tom. I. §. 358). Hieraus folget sogleich, daß der Doppel-Körper bey seiner Bewegung jede in der Grenzoberfläche willkürlich gezogene Curve, welche alle charakteristischen Curven schneidet, beständig berühren muß; und umgekehrt, wenn der Doppel-Körper eine solche Curve beständig berührt; so beschreibt sein Schwerpunct die Linie, welche zu der Grenzoberfläche, worin die Stütz-Curve liegt, gehört — wie leicht einzusehen ist.

(2) Die Gl (2), ist die Gl einer Ebene, welche durch den Punct geht, dessen Coordinaten β und γ sind, und welche dort auf der Tangente der Linie: $\gamma = f(\beta)$, senkrecht steht. Denn die Gl dieser Tangente ist:

$z - \gamma = \frac{d\gamma}{d\beta} \cdot (\gamma - \beta)$, und die Gl der hierauf senkrechten Ebene, findet sich (aus Lacroix l. c. Tom. I. §. 501) mit der Gl (2) identisch.

Die charakteristische Curve liegt also in dieser Ebene durch den Schwerpunct des Körpers, und senkrecht auf die Ebene y, z . Diese Curve ist also einerley mit der Erzeugungs-Linie des Doppel-Körpers, für welche wir die Gl: $y = X$, hatten.

3) Aus den Gl: (1) und (2), lassen sich sehr leicht die beyden folgenden ziehen:

*) Anmerk. Diese Abhandlung ist im Jahr 1815 ausgearbeitet.

$$(3) \dots \beta - y = \frac{X \cdot \frac{dy}{d\beta}}{\left(1 + \frac{dy^2}{d\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \text{ und } z - y = \frac{X}{\left(1 + \frac{dy^2}{d\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

in welchen die Coordinaten x , y und z , für alle Punkte der charakteristischen Curve gelten können, und β , y , $\frac{dy}{d\beta}$, sich auf die jedesmalige Lage des Schwerpunktes beziehen.

Da nun der Doppel-Körper in jeder Lage nur die charakteristische Curve mit der Grenzoberfläche gemeinschaftlich hat; so wird er, wenn er bei seiner Bewegung durch irgend eine willkürlich in der Grenzoberfläche gezogene feste Linie unterstützt wird, eigentlich an einem Punkte seiner charakteristischen Curve unterstützt. Wenn wir nun in den Gl (3), die Coordinaten: x , y , z , auf diesen Stützpunkt beziehen; so wird: $\beta - y$, gleich der Entfernung des Schwerpunktes von einer durch die Stützpunkte gelegten vertikalen Ebene seyn, und also auch dem statischen Moment der Kraft, womit der Doppel-Körper sich um die Stützpunkte zu drehen strebt, proportional seyn.

Dies Moment ist also immer proportional: dem Producte aus der Entfernung des Stützpunktes von der Ase des Doppel-Körpers ($= X$), — in den Sinus des Winkels, den der Weg seines Schwerpunktes mit der Ase der y macht, (dessen Tangente $= \frac{dy}{d\beta}$ ist).

Dies Moment ist also $= 0$,

- 1) wenn $X = 0$ ist, d. h. wenn der Stützpunkt in der Ase des Doppel-Körpers, am Scheitel desselben liegt, wie gehörig.
- 2) wenn $\frac{dy}{d\beta} = 0$ ist; denn alsdann würde auch der Schwerpunkt,



bey der Bewegung des Körpers, anfangen eine horizontale gerade Linie zu beschreiben; er würde also nicht sinken. Diese Bewegung kann daher, nach dem Satz der virtuellen Geschwindigkeiten, nicht durch die Schwere des sich in Ruhe befindenden Doppel-Körpers erzeugt werden.

Daraus folgt also: Wenn der Schwerpunkt des Doppel-Körpers sich in der Vertikalebene durch die Stützpunkte befindet, wo $\beta - \gamma = 0$ ist; so wird der Doppel-Körper sich gar nicht zu bewegen anfangen, es sey denn, daß die Stützpunkte sich in der Are des Doppel-Körpers befänden, wo alsdann der Körper nicht mehr getragen würde. Dies erhellet auch sogleich aus der Gl (2), in welcher, $\beta - \gamma$, und $\frac{dy}{d\beta}$, zu gleicher Zeit, und $z - \gamma$, blos für den Scheitel $= 0$ werden.

Dies wäre denn der in der Einleitung angezeigte Beweis dieses Satzes.

Wenn blos die Schwere in den Doppel-Körper wirkt; so wird man in den Gl (3), $\gamma > z$, also von der Quadrat-Wurzel, nur den dazu passenden Werth nehmen müssen, wenn der Körper von der Unterstüzung getragen werden soll. Um die jedesmalige Erhöhung des Schwerpunktes über den Stützpunkt zu finden, muß man, nach den Gl (3), die Entfernung des Stützpunktes von der Are des Doppel-Körpers, mit dem Cosinus des Winkels multipliciren, den der jedesmalige Weg des Schwerpunktes, mit der Are γ macht.

4) Bezeichnet man die Masse des Doppel-Körpers mit $2M$, und die nach entgegengesetzter Richtung der z in ihn wirkende beschleunigende Kraft mit g , und zerlegt seine bewegende Kraft aus dem Schwerpunkt in zwey andere, wovon die Eine in der Ebene durch die jedesmaligen Stützpunkte und den Schwerpunkt liegt, (welches auch die Ebene der charakteristischen Curve ist), und die zweite senkrecht auf dieser Ebene steht; so findet sich diese letztere

Kraft sehr leicht $= 2Mg \cdot \sin \text{Arc} \left(\text{tg} = \frac{dy}{d\beta} \right) = \frac{2Mg \cdot (\beta - y)}{X}$, aus der ersten der Gl (3). Diese Kraft stellt die relative Schwere des Doppelkörpers dar. Die erstere der zerlegten Kräfte, ist $= 2Mg \cdot \cos \text{Arc} \left(\text{tg} = \frac{dy}{d\beta} \right)$, $= \frac{2Mg(\gamma - z)}{X}$. Zerlegt man diese Kraft wieder in zwei andere, deren Richtungen vom Schwerpunct nach den Stützpunkten gehen; so ist jede dieser letztern Kräfte $= \frac{Mg(\gamma + z) : (X^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{X^2}$; und wenn man

diese wieder vom Stützpunkt aus nach der Richtung der Normale der charakteristischen Curve daselbst, und nach der Richtung der Umdrehungs-Axe des Doppelkörpers zerlegt; so verhalten sich diese drei Kräfte, wie die Seiten des Dreiecks, dessen Winkelpuncte vom Schwerpunct, dem Stützpunkte, und dem Durchschnittspunct der Normale mit der Umdrehungs-Axe gebildet werden. Aber die Kräfte nach der Richtung der Umdrehungs-Axe sind von beyden Stützpunkten gleich und entgegengesetzt, heben sich also auf, und die Normale steht auf der Oberfläche des Doppelkörpers senkrecht, und ihre Länge bis an die Umdrehungs-Axe ist $= X \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}}$, (wenn wir $\frac{dX}{dx}$ mit X' bezeichnen, wie wir in der Folge immer thun werden).

Die Kraft nach der Richtung der Normale, ist also:

$$= Mg \frac{(\gamma - z) \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}}}{X}, \text{ oder } = Mg \cdot \left(\frac{1 + X'^2}{1 + \frac{dy^2}{d\beta^2}} \right)^{\frac{1}{2}};$$

Der Doppel-Körper mag sich aber auf Linien oder Oberflächen bewegen; so wird das Differenzial der Unterlage am Stützpunkt doch stets in der Ober-



fläche des Doppel-Körpers liegen müssen. Die gedachte Normale steht also auch auf der Unterlage am Stütz-Puncte senkrecht: und die Kraft nach ihrer Richtung, giebt den senkrechten Druck zu erkennen, den die Unterlage von der Schwere des Doppel-Körpers erfährt, welchem Druck die Reibung proportional ist, wenn man den von der Geschwindigkeit der Bewegung und der Krümmung des Weges des Doppel-Körpers entstehenden Druck gegen die Unterlagen, außer Acht läßt.

5) Um aber die weitem dynamisch-mechanischen Fragen, welche bey der Bewegung der Doppel-Körper vorkommen, beantworten zu können; so müssen wir zuvor einige geometrisch-phoronomische Aufgaben auflösen, welche diese Bewegungsart darbietet.

Diese letztern Aufgaben werden sich der Hauptsache nach unter folgende Abtheilungen begreifen lassen:

1. Wenn die Gl für den Doppel-Körper und den Weg des Schwerpunctes gegeben sind, daraus die Unterlagen zu bestimmen, bey welchen jene Gl bestehen können.

2. Umgekehrt: Wenn die Bedingungen der Unterstützung gegeben sind, daraus

a) bey gegebenem Doppel-Körper, die Gl für den Weg des Schwerpunctes, oder

b) wenn die Gl für den Weg des Schwerpunctes gegeben ist, die Gl für den Doppel-Körper zu bestimmen.

3. Bey einem gegebenen Doppel-Körper, aus einer gegebenen Gl zwischen den jedesmaligen Coordinaten des Stützpunktes oder deren Differenzialien, und der dazu gehörigen Neigung der Linie des Schwerpunctes, (deren Tangente $= \frac{dy}{d\beta}$ ist), — sowohl die Unterlagen, als die Linie des

Schwerpunktes zu bestimmen, bey welchen jene Relation statt finden kann.

4. Da durch die Reibung des Doppel-Körpers an seinen Stützpunkten, die Bewegung desselben sich gewöhnlich in ein völliges Rollen auf seinen Unterlagen verwandelt; so kann man die Anzahl der Umdrehungen suchen, welche ein gegebener Doppel-Körper machen muß, indem er über eine gegebene Unterlage wegrollt. Dazu wird es nöthig seyn: die Gl der Curve zu finden, welche alle Berührungspuncte der Unterlage mit dem Doppel-Körper auf der Oberfläche desselben darstellt.

Q) Wir wollen nun jede Abtheilung insbesondere betrachten. Zuvor aber müssen wir noch folgende allgemeine Bemerkungen hier einschalten:

a) Wenn die Gl (1), nach dem im vorhergehenden §. gesagten, nur für die eine Hälfte des Doppel-Körpers gilt; so kann sie seine Zusammensetzung in der Ebene y, z , wenn die beyden Hälften des Doppel-Körpers in unmittelbarer Berührung stehen, nicht angeben: und die in der Folge zu findenden Gl, werden für solche Körper nur so lange richtig seyn, als diese nicht blos mit ihrer Zusammensetzung, d. h. blos mit Puncten die in der Ebene y, z liegen, auf ihren Unterlagen ruhen; also nur bis dahin, daß x , als Abscisse des Berührungspunctes, $= 0$ wird, und nicht weiter. Es muß nemlich immer ein Differenzial der Unterlage von der Oberfläche des Körpers berührt werden.

b) Wenn die Endpuncte der Linie $y = X$, nicht an die Ase der x stoßen; so werden bey der Umdrehung um diese Ase, die End-Ordinaten Ebenen beschreiben, welche mit der Ebene y, z parallel gehen, und den Doppel-Körper begränzen. Diese Ebenen sind aber nicht in der Gl (1) für den Doppel-Körper enthalten, und die zu findenden Gl werden also auch keine Ausdehnung auf die Berührung in diesen Ebenen gestatten, und nur so lange gelten, bis x



als Abscisse des Berührungspunctes, gleich der ersten oder letzten Abscisse der Linie $y = X$, wird, und nicht weiter für die letzten Werthe selbst; wo kein Differenzial der Unterlage mehr von der Oberfläche des Körpers berührt wird, sondern nur ein Punct.

c) Da es im Allgemeinen möglich ist, daß eine Oberfläche und eine Curve, oder auch zwei Oberflächen, sich an einer Stelle berühren, und an andern Stellen schneiden können, — der Doppel-Körper aber seine Unterlage bloß berühren, und nicht schneiden soll; so werden wir im Allgemeinen bey den nachfolgenden Untersuchungen voraussetzen: daß von der berührten Oberfläche oder Curve, nur das jedesmal berührte Differenzial derselben vorhanden ist, und daß also die andern Theile derselben der Berührung nicht hinderlich sind. Ist aber in der Wirklichkeit eine feste Unterlage gegeben; so wird man, um sich von der Möglichkeit der Bewegung des Doppel-Körpers auf dieser Unterlage zu überzeugen, zuvor untersuchen müssen: ob der Doppel-Körper, in irgend einer seiner Lagen auch noch andere Puncte als die Berührungspuncte mit der Unterlage gemein habe, — in welchem Falle diese Lage des Körpers nicht statt finden kann. Doch wird man auch hier darauf Rücksicht nehmen müssen, daß für solche Doppel-Körper, bey denen x das Zeichen nicht ändern darf, die anderweitigen Durchschnittpuncte auch dasselbe Zeichen für ihr x haben müssen, wenn sie die Bewegung hindern sollen.

4.

Wir wollen nun die Aufgabe auflösen:

Aus den gegebenen Gl: $y = f(\beta)$, und $y = X$, die Unterlagen zu bestimmen, bey welchen jene Gl bestehen können.

1) Wenn man aus der Gl: $y = f(\beta)$, und denen nun auch gegebenen Gl: (1) und (2), die Größen, β und $\dot{y}$, eliminirt; so wird man nach dem vorhergehenden §., die Gl der Grenz-Oberfläche erhalten, in welcher alle

Unterlagen liegen müssen, da sie alle charakteristischen Curven enthält. Nun ist es aber nur nöthig, in der jedesmaligen charakteristischen Curve, einen Punct, wogegen der Doppel-Körper bey seiner Bewegung drückt, indem er auf einem Differenzial der Unterlage ruht, als fest zu betrachten. Daher kann man jede in der Grenz-Oberfläche liegende Curve, sie sey regelmäßig oder unregelmäßig, continuirlich oder discontinuirllich, als Unterlage oder Stütze für den gegebenen Weg des Schwerpunctes gebrauchen, wenn sie nur alle charakteristischen Curven in den gedachten Puncten schneidet.

Man wird also noch gemachte Bedingungen für die gesuchte Stütze erfüllen können, wovon die natürlichste diese ist: daß diese Linie auf einer gegebenen Oberfläche liegen soll. Der Durchschnitt der Grenz-Oberfläche, mit der gegebenen, wird alsdann die gesuchte Stütze seyn.

2) Wenn die Stütze in einer, der Ebene y, z parallelen Ebene liegen soll, deren Gl also: $x = \text{const.} = a$, ist; so werden die Stütze, und die der Linie: $y = f(\beta)$ ganz gleiche Linie, welche der Punct der Ase des Doppel-Körpers beschreibt, der in der Ebene: $x = a$ liegt, — sogenannte *curvae aequidistantes* seyn, deren Abstand von einander $= A$ ist, wenn für $x = a$, $X = A$ wird.

Denn der Durchschnitt der Ebene: $x = a$, mit dem Doppel-Körper, giebt den Kreis vom Halbmesser $= A$, dessen Umfang stets die Stütze berührt, und dessen Mittelpunkt eine gleiche Linie als der Schwerpunct beschreibt. (Cf. auch Lacroix l. c. Tom. I. §. 290.)

3) Wir wollen nun zuerst einige Beispiele betrachten, und weil die Eliminationen bald beschwerlich werden, nachher ein allgemeines Verfahren angeben, wodurch man für jeden augenblicklichen Zustand des Körpers, alles ihn betreffende leicht erhalten kann.

Wenn der Schwerpunct die gerade Linie beschreiben soll, deren Gl:



$y = m\beta + n$ ist; so ist $\frac{dy}{d\beta} = m =$ der Tangente der Neigung dieser Linie gegen den Horizont. Und die Gl. (2) mit der Gl $y = m\beta + n$ verbunden, giebt: $y - \beta = \frac{m}{1+m^2} \cdot (my - z + n)$, und $z - y = \frac{-1}{1+m^2} (my - z + n)$.

Wenn man diese Werthe in die Gl. (1) setzt; so verwandelt sich diese in:

$$(my - z + n)^2 = (1 + m^2) \cdot X^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welches die Gl der Grenzoberfläche für den betrachteten Fall ist. Setzt man hierin z. B. $m = 0$; so wird der Doppel-Körper, dem das X zukömmt, auf jedem Puncte der in den beyden Oberflächen: $-z + n = \pm X$, gezogenen willkührlichen Curven, wenn er dagegen drückt, ruhig liegen bleiben, ohne von denen auf ihn wirkenden Kräften bewegt zu werden. Wenn wir aber blos mit schweren Körpern uns beschäftigen; so dürfen wir die Stütz-Curve nur in der Oberfläche nehmen, worin für ein gegebenes x , z am niedrigsten liegt.

Für den Regel des §. 2 verwandelt sich die Gl (4) in:

$$(my - z + n)^2 = (1 + m^2) t^2 \cdot (h - x)^2$$

welche Gl zweyen Ebenen gehört, welche mit einander den Winkel machen, dessen Cosinus $= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ ist. (Cf. Lacroix l.c. §. 304). Dieser Cosinus gehört einem Bogen, welcher zweymal so groß ist, als derjenige, dem die Tangente $= t$ gehört, wie gehörig.

Nehmen wir an, daß blos die Schwere in den Regel wirken soll; so können wir die Stützhlinie nur in der untern Ebene anbringen, und werden also in der Quadratwurzel der Gl (4) nur das + Zeichen gebrauchen, wenn wir x in den Gränzen 0 und $+h$ nehmen: wodurch entsteht:

$$z = my + n - t(h - x) \cdot \sqrt{1 + m^2} \quad . \quad . \quad . \quad (4)^*$$

Denkt man sich aber den Regel über den Scheitel hinaus verlängert; so



müßte alsdann die Wurzel das entgegengesetzte Zeichen bekommen, wenn der Regel an dieser Verlängerung unterstützt werden soll: und so auch, wenn x von 0 bis $-\infty$ gilt.

4) Soll nun die Stützl Linie, welche den Regel beständig berührt; zugleich in einer auf der Ebene x, y senkrechten Ebene liegen, welche mit der Ebene x, z den Winkel φ macht, und durch den Punct geht, dessen Coordinaten x' und y' sind; so wird die Gl dieser Ebene seyn:

$$y - y' = \operatorname{tg} \varphi \cdot (x - x').$$

Eliminirt man y aus den beyden letzten Gl; so erhält man:

$$z = m \cdot x \cdot \operatorname{tg} \varphi - t(h - x) \sqrt{1 + m^2} + n - m(x' \cdot \operatorname{tg} \varphi - y')$$

und die gerade Stützl Linie, welcher diese beyden Gl gehören, macht mit der Ebene x, y den Winkel, dessen Tangente

$$= \operatorname{tg} \vartheta = \frac{dz}{dx} \cdot \cos \varphi = m \cdot \sin \varphi + t \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{1 + m^2} \dots (5)$$

(Cf. Lacroix l. c. §. 303).

Aus diesen Gl, welche also für den gewöhnlichen Doppel-Regel gehören, wird man leicht, wenn x und Einer von den beyden Winkeln φ oder ϑ willkürlich angenommen ist, den andern Winkel nebst y und z für die Unterlage bestimmen.

Soll die Stützl Linie in der Ebene x, y liegen; so ist $\vartheta = 0$, und wir erhalten alsdann aus der Gl (5) die folgende: $m = \frac{t}{(\operatorname{tg} \varphi^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}$, welches

unmöglich wird, wenn $\operatorname{tg} \varphi < t$, wie gehörig, weil dann die beyden Stützl Linien einen größern Winkel mit einander bilden, als die Seiten des Regels, welche gestützt werden sollen. Die Stützl Linie kann alsdann nur an den über den Scheitel hinaus verlängerten Regel treffen, und eine senkrechte Ebene



durch die Stütze würde aus diesem eine Hyperbel mit horizontaler Asymptote schneiden, welche keine horizontale Tangente hat.

Brünings findet für diesen Fall, statt unserer Gl., die Gl.: $m = \frac{t}{\operatorname{tg} \varphi}$,

welches nach dem eben gezeigten unmöglich richtig seyn kann, wie wir dies in der Einleitung erwähnt haben.

Oberflächlich betrachtet, könnte folgende Darstellung den Brünings'schen Ausdruck zu rechtfertigen scheinen: Wenn man sich den Kegelschnitt in der Lage denkt, daß sein Schwerpunkt senkrecht über den Durchschnitt der horizontalen Stütze (wohin wir, der Kürze wegen, den Anfangspunkt der Coordinaten setzen wollen), steht; so sind die Coordinaten des Schwerpunktes, $\beta' = 0$, $\gamma' = h \cdot t$. Denkt man sich den Kegelschnitt darauf in der Lage, daß er nur noch mit dem Scheitel auf der Stütze ruht; so sind die Coordinaten des Schwerpunktes, $\beta'' = h \cdot \operatorname{tg} \varphi$ und $\gamma'' = 0$. Hat der Schwerpunkt nun bey dieser Bewegung eine gerade Linie beschrieben; so ist die Tangente der

Neigung dieser Linie gegen den Horizont $= \frac{\gamma'' - \gamma'}{\beta'' - \beta'} = \frac{-t}{\operatorname{tg} \varphi}$ wie Brünings

sie angiebt. Aber man muß bedenken, daß der Kegelschnitt zu den Körpern gehört, deren im vorigen §, unter der ersten Schlußbemerkung gedacht ist. Er wird in der ersten Lage nicht von der Stütze berührt, sondern diese schneidet nur den Umfang seiner Grundfläche in Einem Punkte, um welchen anfänglich der Schwerpunkt einen Kreisbogen beschreiben wird, bis die Oberfläche des Kegels von der Stütze berührt wird.

Das doppelte Zeichen der Gl.: $m = \frac{t}{(\operatorname{tg} \varphi^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}$ erhält dadurch seine Be-

deutung, daß der Kegelschnitt sich sowohl diesseits als jenseits des Scheitels stützen kann.

Wenn der Regel durch seine Schwere nicht zur Bewegung getrieben werden soll; so muß in der Gl (5), $m = 0$, also $\operatorname{tg} \vartheta = t \cdot \cos \varphi$ seyn, und umgekehrt. Ist hingegen $\operatorname{tg} \vartheta > < t \cdot \cos \varphi$; so wird sich der Regel rück- oder vorwärts, (nach der Richtung der y gerechnet) bewegen, und das Moment der Drehung wird (nach §. 3) $= t \cdot (h - x') \frac{m}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$ seyn, wenn

x' die Entfernung des Stützpunktes von der Ebene y, z ist. — Für den Cylinder ist $t = 0$, $h = \infty$, und $t \cdot h =$ dem Halbmesser der Grundfläche.

Noch ist zu bemerken, daß die Gl. (5) unabhängig von h ist.

5) Soll die Stützlinie, indem der Schwerpunkt des Regels die Linie $y = m\beta + n$ beschreibt, eine Linie der zweiten Ordnung seyn; so wird man dies dadurch erreichen, daß man diese Linie zugleich auf einer Oberfläche der zweiten Ordnung, z. B. eines anderen Regels liegen läßt. Wir wollen nun annehmen, daß bey diesem die Coordinaten seines Scheitels: a, b, c sind, daß seine Ase mit der Ebene x, y den Winkel $= \omega$, und die Projection dieser Ase auf die Ebene x, y , mit der Ase x , den Winkel $= \psi$ macht, daß ferner das Verhältniß: $\frac{\text{rad. der Grundfläche}}{\text{Ase}} = \tau$ ist; so wird die Gl für diesen

zweiten Regel:

$$[(x-a)\sin\psi - (y-b)\cos\psi]^2 + [(x-a)\cos\psi.\sin\omega + (y-b)\sin\psi.\sin\omega - (z-c)\cos\omega]^2 \\ = [(x-a)\cos\psi.\cos\omega + (y-b)\sin\psi.\cos\omega + (z-c)\sin\omega]^2 \cdot \tau^2 \dots (6)$$

welche mit der Gl (4)* für die Grenzebene verbunden, die gesuchte Linie darstellt. Setzt man in der Gl (6), $\tau = 0$; so verwandelt sich der zweite Regel in seine Ase, und die Wurzeln der beyden Quadrate vor dem Gleichheitszeichen, jedes $= 0$ gesetzt, geben die Gl für diese Ase. Setzt man $\tau = \infty$; so verwandelt sich der Regel in eine Ebene, senkrecht auf seine Ase durch den



Scheitel. Das Quadrat hinter dem Gleichheitszeichen wird nun $= 0$ seyn, und die Gl dieser Ebene geben.

Setzt man die Tangente des Winkels dieser Ebene, mit der Grenzebene

der Gl (4)* $= \frac{1}{u}$; so wird (nach Lacroix l. c. §. 304.)

$$u = \frac{\operatorname{tg} \omega - m \cdot \sin \psi - t \cdot \cos \psi \cdot r(1 + m^2)}{\left[(m \cdot \cos \psi - t \cdot \sin \psi \cdot r(1 + m^2))^2 + (\cos \psi + t \cdot \operatorname{tg} \omega \cdot r(1 + m^2))^2 + (\sin \psi + m \cdot \operatorname{tg} \omega)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \dots (7)$$

= der Tangente des Winkels den die Axe des zweiten Kegels mit der Grenzebene macht. Setzt man $u = 0$; so stimmt der Zähler von (7) $= 0$ gesetzt, ganz mit der Gl (5) überein, wie gehörig.

$u = r$ gesetzt, giebt die Parabeln; $u > r$, die Ellipsen, und $u < r$, die Hyperbeln, welche als Stütze dienen können, wenn der Schwerpunct des Doppel-Kegels die Linie: $y = m\beta + n$ beschreibt.

Uebrigens werden alle mögliche Linien, welche in der Ebene der Gl (4)* beschrieben werden können, auch als Stütze angesehen werden können.

6) Soll der Schwerpunct des Doppel-Körpers, dem das X der ersten der Gl (1)* gehört (wenn man $h' = 0$ setzt), die Linie: $y = m\beta + n$, beschreiben; so verwandelt sich die Gl (4), in:

$$(8) \quad \dots (my - z + n)^2 = (1 + m^2) \cdot b \cdot (x - h) \cdot \left(1 - \frac{x - h}{a} \right)$$

Die Grenzoberfläche ist also in diesem Fall von der zweiten Ordnung, und die in ihr liegende Stütze muß wenigstens von eben der Ordnung seyn, wenn sie nicht in einer der Ebene y, z parallelen Ebene liegt: in welchem Falle ihre Gl seyn wird: $z = my + \text{const}$, wie aus der Gl (8) folgt, wenn man darin $x = \text{const}$ setzt, und wie (nach Nr. 2 dieses §.) seyn muß.

Wenn man in der Gl (8), $a = b = -2h = 2r$ setzt; so wird sich der

Doppel-Körper in eine Kugel vom Halbmesser $= r$, und die Gl (8) in: $(my - z + n)^2 = (1 + m^2) \cdot (r^2 - x^2)$, verwandeln. Dies ist die Gl eines Cylinders, dessen Halbmesser der Grundfläche $= r$ ist, und dessen Axe die Gl: $x = 0$, und $z = my + n$, gehören, wie dies vorauszu sehen war.

Soll die Stütze Linie zugleich in einer auf der Ebene x, y senkrechten Ebene liegen; so wird ihr außer der Gl (8), noch die Gl: $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi + l$, zukommen, wenn der Winkel dieser Ebene mit der Ebene x, z ; $= \varphi$ ist. Eliminiert man y aus diesen beyden Gl; so wird die Tangente des Winkels, $(= \vartheta)$, den die Tangente der Stütze Linie, an dem Puncte dessen Coordinaten

x', y', z' , sind, mit der Ebene x, y macht, $= \frac{dz'}{dx'} \cdot \cos \varphi$ seyn. Also:

$$\operatorname{tg} \vartheta = m \cdot \sin \varphi \pm \cos \varphi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x' - h}{a} \right) \cdot \left[\frac{(1 + m^2) \cdot b}{(x' - h) \cdot \left(1 - \frac{(x' - h)}{a} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

welches sich für die ganze Kugel, in: $\operatorname{tg} \vartheta = m \cdot \sin \varphi \mp x' \cdot \cos \varphi \cdot \left(\frac{1 + m^2}{r^2 - x'^2} \right)^{\frac{1}{2}}$,

und für den parabolischen Abschnitt, in:

$$\operatorname{tg} \vartheta = m \cdot \sin \varphi \pm \frac{1}{2} (\cos \varphi) \cdot \left(\frac{b(1 + m^2)}{x' - h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

verwandelt. In dieser letzten Gl wird man x' und h verneint nehmen, also $h - x$, statt $x - h$ setzen, wenn man den Abschnitt vom Scheitel der Parabel bis zur Ebene y, z betrachten will. [Cf. S. 2, Gl (1)*].

Wenn blos die Schwere in den Doppel-Körper wirkt; so ist von den doppelten Zeichen der Quadrat-Wurzeln, nur das untere zu gebrauchen; bey welchem z den kleinsten positiven, oder größten negativen Werth hat.

Wenn der Doppel-Körper nicht von der Schwere bewegt werden soll; so wird man in (9), $m = 0$ setzen. Soll die Stütze Linie in der Ebene x, y



liegen; so ist $\vartheta = 0$. Die Gl der Stützlinie folgt alsdann aus der Gl (8), wenn man darin $z = 0$ setzt.

Für den Ort, wo der Doppel-Körper zwischen den Stützlinien hindurch fällt, wird $m = \infty$ seyn. Dadurch erhält man aus (9):

$$x - h = \frac{1}{2}a \left(1 \pm \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{a \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi} \right)^{\frac{1}{2}}} \right);$$

z. B. für die ganze Kugel: $x' = r \cdot \sin \varphi$,

und für den parabolischen Körper: $x' = h \pm \frac{b}{4 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi}$,

wo das obere oder untere Zeichen gilt, nachdem man $x' - h$, oder $h - x'$ in die Gl für diesen Körper gesetzt hat.

Wenn x' aus der Gl: $x' = h \pm \frac{b}{4 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi}$, einen verneinten Werth erhält; so wird der parabolische Körper gar nicht durchfallen: denn x darf in der Gl für diesen Körper nicht das Zeichen ändern.

7) Soll der Schwerpunkt des Doppel-Körpers, dem die zweyte der Gl (1)* zukömmt, wenn man darin: $h' + \frac{1}{2}a = 0$, setzt, die Linie: $y = m \cdot \beta + n$, beschreiben; so verwandelt sich die Gl (4), in:

$$(my - z + n)^2 = (1 + m^2) \cdot \left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{a}{b} \cdot (x - h)^2 \right)$$

Diese Gl ist also nicht auf die Parabel anwendlich, da man bey ihr im Endlichen nicht: $h + \frac{1}{2}a = 0$, haben kann.

Soll die Stützlinie hier auch in der Ebene: $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi + l$, liegen; so erhalten wir für ϑ , die Gl:

$$\operatorname{tg} \vartheta = m \cdot \sin \varphi \pm \frac{a}{b} \cdot (x - h) \cdot \cos \varphi \cdot \left(\frac{1 + m^2}{\frac{1}{4}a^2 - \frac{a}{b} (x - h)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Für die ganze Kugel ist $a = b = 2r$, und $h = 0$; daher wird:

$$\operatorname{tg} \varphi = m \cdot \sin \varphi \pm x \cdot \cos \varphi \cdot \left(\frac{1 + m^2}{r^2 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

welches mit dem vorhergefundenen Werth übereinstimmt.

Die Stellen, wo der Doppel-Körper ruht, und durchweg fällt, werden eben so gefunden, wie vorher. So ist für die letztere:

$$x = h \pm \frac{b}{2 \cdot \left(\cotg^2 \varphi + \frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}, \text{ welches für den hyperbolischen}$$

Körper unmöglich wird, wenn $\operatorname{tg}^2 \varphi > \frac{a}{b}$ ist, wie gehörig.

Eben so leicht, nur mit mehr Weitläufigkeit im Schreiben, würde man die Fälle behandeln können, wo die Ase der Erzeugungslinie des Doppel-Körpers, mit der Ase der x , jeden beliebigen Winkel macht.

8) Soll der Schwerpunkt des Doppel-Körpers einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt die Coordinaten b und c hat, und dessen Halbmesser $= \rho$ ist; so ist die Gl dieses Kreises: $(\beta - b)^2 + (y - c)^2 = \rho^2$; also: $\frac{dy}{d\beta} = \frac{b - \beta}{y - c}$; und die Gl (2) giebt: $\frac{\beta - y}{z - y} = \frac{b - \beta}{y - c}$; welche mit der Gl für den Kreis verglichen:

$$y - \beta = (y - b) \cdot \left(1 - \frac{\rho}{[(y - b)^2 + (z - c)^2]^{\frac{1}{2}}} \right); \text{ und}$$

$$z - y = (z - c) \cdot \left(1 - \frac{\rho}{[(y - b)^2 + (z - c)^2]^{\frac{1}{2}}} \right);$$

giebt. Wenn diese Werthe von $y - \beta$, und $z - y$, in die Gl (1) für den Doppel-Körper substituirt werden; so erhält man:



$$(y - b)^2 + (z - c)^2 = (\rho \pm X)^2 \quad (10)$$

wodurch die ringförmige Grenzoberfläche dargestellt wird.

Diese Gl theilt sich durch das doppelte Zeichen in zwey andere, wovon die eine für die äußere, und die andere für die innere Grenzoberfläche gilt, welche aber ihre Eigenschaft als äußere oder innere Fläche auch vertauschen können, wenn X das Zeichen ändert, welches geschehen kann, ohne daß x das Zeichen ändert.

Für den Doppel-Regel ist $X = t \cdot (h - x)$. Nimmt man in der Gl (10) das untere Zeichen, und setzt: $\rho = t \cdot h$; so wird sie: $(y - b)^2 + (z - c)^2 = t^2 \cdot x^2$, und gilt für einen Regel dessen Scheitel in der Ebene y, z , die Coordinaten b und c hat, und dessen Axe mit der Axe der x parallel geht, und übrigens dem Doppel-Regel gleich ist: wie dies Resultat denn auch mit einiger Aufmerksamkeit vorauszusehen war.

Da die Gl (10), wenn X dem Doppel-Regel angehört, allgemein für zwey Regel gilt, deren Axe der Axe der x parallel geht; so werden die Stüßlinien, wenn sie in einer Ebene liegen sollen, von der zweyten Ordnung seyn.

Wenn aber die Stüßlinie in der Ebene: $x = a$, liegen soll; so wird X , durch diese Substitution von x , auch $= \text{const} = A$, werden, welchem Doppel-Körper es auch angehöre: dadurch wird aber die Gl (10) in einen Kreis vom Halbmesser: $\rho \pm A$, verwandelt, wie auch (nach Nr. 2 dieses §) seyn muß.

Wirkt blos die Schwere in den Doppel-Körper, dessen Schwerpunct den Kreis beschreiben soll; so muß bey der Beschreibung der obern Hälfte desselben, die innere; und außerdem, die äußere Grenzoberfläche die Stüßlinien enthalten.

Wenn man in die Gl. (10), für X , den aus den Gl (1)* gegebenen Werth setzen wollte, worin man das b von dem in der Gl (10) explicite ent-

haltenen b , gehörig zu unterscheiden hätte, z. B. durch den Accent; so würde sie von der vierten Ordnung werden, wenn man nicht die Größe h' so bestimmt; daß die außerhalb des Wurzelzeichens fallenden beständigen Größen $= 0$ werden. Z. B. für die erste der Gl (1)*, wird man: $\rho \pm h' = 0$, setzen, je nachdem man die äußere oder innere Grenzoberfläche betrachten will, und so für diese die Gl: $(y-b)^2 + (z-c)^2 = b' \cdot (x-h) \cdot \left(1 - \frac{x-h}{a}\right)$, erhalten, in welcher alle Stüßlinien liegen müssen.

9) Soll der Schwerpunkt andere Linien der zweiten Ordnung beschreiben; so wird die Grenzoberfläche diese Ordnung überschreiten. Z. B. wenn der Schwerpunkt die Parabel beschreiben soll, deren Gl: $y^2 = m\beta$, ist; so müßte man y , aus den beyden Gl:

$$y^3 + my\left(\frac{1}{2}m - y\right) - \frac{1}{2}m^2 \cdot z = 0, \text{ und:}$$

$$\left(y - \frac{y^2}{m}\right)^2 + (z - y')^2 = X^2, \text{ eliminiren.}$$

Sollte der Schwerpunkt die Linie: $y = l\beta^2 + m\beta + n$, beschreiben; so müßte man β aus den Gl:

$$y - \beta + (z - l\beta^2 - m\beta - n) \cdot (2l\beta + m) = 0, \text{ und:}$$

$$(y - \beta)^2 + (z - l\beta^2 - m\beta - n)^2 = X^2,$$

eliminiren, um die Gl der Grenzoberfläche zu finden.

10) Wenn nun auch die Eliminationen leicht beschwerlich werden; so wird man doch aus der Gl (4), die den jedesmaligen Stüßpunct betreffenden Größen leicht bestimmen können. Man kann nemlich für jeden Augenblick annehmen: daß der Doppel-Körper sich auf der Tangente der Stüßlinie am Berührungspunct, (welche Tangente in der Ebene: $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi + l$, liegen soll), — stütze: und daß sein Schwerpunkt die Tangente seiner Linie an dem Orte wo er sich befindet, (dessen Coordinaten: β' und y' seyn sollen) — beschreibe.



Man wird also annehmen können, daß der Schwerpunkt sich in diesem Augenblick auf der geraden Linie bewege, deren Gl: $y - y' = (\beta - \beta') \cdot \frac{dy'}{d\beta'}$, ist. Man wird daher in der Gl (4), $m = \frac{dy'}{d\beta'}$, $n = y' - \beta' \cdot \frac{dy'}{d\beta'}$, setzen, und die Gl: $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dx'}{dx} \cdot \operatorname{cof} \varphi$, (cf. Nr. 4 und 6 dieses §.) wird hiernach geben:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy'}{d\beta'} \cdot \sin \varphi \pm \left(1 + \frac{dy'^2}{d\beta'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{cof} \varphi \cdot \frac{dX}{dx}; \quad \dots (11)$$

worin sich x auf den Stützpunkt bezieht, und φ und ϑ , auf die Tangente der Stütze selbst.

Bezeichnet man $\frac{dX}{dx}$ hier und im ganzen Verfolg dieser Abhandlung, mit X' ; so werden wir für die Stellen, wo der Doppel-Körper nicht von der Schwere bewegt wird, und wo also: $\frac{dy'}{d\beta'} = 0$, ist, immer die Gl haben: $\operatorname{tg} \vartheta = \pm X' \cdot \operatorname{cof} \varphi$; woraus man von den dreien Größen x , φ , ϑ , Eine bestimmen kann.

Für die Stellen, wo der Doppel-Körper durch die Stütze hindurch fällt, wird immer: $\frac{dy'}{d\beta'} = \infty$, seyn. Daraus folgt die Gl: $\operatorname{tg} \varphi = \mp X'$, und man sieht leicht a priori, daß diese Stellen unabhängig von ϑ seyn müssen, auch daß $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{dy}{dx}$ der Erzeugungslinie des Doppel-Körpers seyn müsse, wo dieser durchfallen soll.

Wenn die Stütze in der Ebene x, y liegen soll; so ist: $\operatorname{tg} \vartheta = 0$,

daher muß alsdann: $\operatorname{tg} \varphi = \mp X' \cdot \left(1 + \frac{d\beta'^2}{dy'^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, seyn. Also für $\frac{dy'}{d\beta'} = 0$, $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, wie gehörig. Wenn aber zugleich $X' = 0$, also $X = \text{const.}$, welches beym Cylinder der Fall ist; so bleibt φ unbestimmt.

Da wir in diesem §. die Gl: $y = f(\beta)$ als gegeben annehmen; so wird für ein gegebenes β' , auch y' und $\frac{dy'}{d\beta'}$ gegeben seyn. Daher sind in der Gl (11), nur x , φ und ϑ unbekannt. Für ein willkürlich an der Oberfläche des Doppel-Körpers (dessen Lage auch schon durch β' und y' bestimmt ist), angenommenes x , welches dem Stützpunkt gehören soll; finden sich aus den Gl (3), die dazu gehörigen y und z , so wie auch die Momente der Drehung und Reibung: und in der Gl (11) kann man von den beiden Winkeln, φ und ϑ , noch den einen willkürlich annehmen, oder auch als eine einförmige Function von x gegeben seyn lassen, und so den andern bestimmen. Wenn aber die Gl einer Oberfläche gegeben ist, worin die Stützhlinie liegen soll; so finden sich aus dieser Gl, und den beiden Gl (3), die Coordinaten des Stützpunktes. Nun muß die Tangente der Stützhlinie an diesem Punkte, in der Berührungsebene sowohl der Oberfläche als des Doppel-Körpers an diesem Punkte liegen, und daraus findet sich die Gl dieser Tangente nach einem ganz gleichen Verfahren, als wir weiter hin für einen ähnlichen Fall (§. 6. 1.) noch gebrauchen werden.

Auf diese Art wird man also alles, was den Stützpunkt angeht, für jeden Augenblick bestimmen können.

Für die Linie der zweiten Ordnung im §. 2, deren Arc mit x den Winkel $= \lambda$, macht, erhält man:



$$X' = \frac{(a-b) \cdot \sin \lambda \cdot \cos \lambda}{a \cdot \cos^2 \lambda + b \cdot \sin^2 \lambda} \\ + \frac{\left(\frac{1}{4}ab\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (a \cdot \cos \lambda - 2(x-h))}{(a \cdot \cos^2 \lambda + b \cdot \sin^2 \lambda) \cdot \left(-(x-h)^2 + a(x-h) \cdot \cos \lambda + \frac{1}{4}ab \cdot \sin^2 \lambda\right)^{\frac{1}{2}}}$$

5.

Wir wollen jetzt aus den Bedingungen der Unterstüßung für einen gegebenen Doppel-Körper, den Weg des Schwerpuncts desselben finden.

1) Hier wird das Verfahren verschieden seyn, je nachdem entweder eine Oberfläche, oder eine Curve gegeben ist, welche der Doppel-Körper beständig auf seinem Wege berühren soll. Und wir werden, um die Gl für den Weg des Schwerpuncts zu finden, ganz dasselbe Verfahren anwenden können, welches Lacroix (l. c. Tom. I. §. 341) gebraucht, um dort die Relation zwischen m und $\varphi(m)$, zu finden.

Wir wollen daher zuerst in diesem §. voraussetzen:

Es sey die Gl einer Oberfläche gegeben, welche der Doppel-Körper bey seiner Bewegung beständig berühren soll.

2) An den Berührungs-Puncten müssen der Doppel-Körper und die gegebene Oberfläche beständig einerley Berührungs-Ebene haben. Läßt man nun die Coordinaten x' , y' , z' sich auf die Berührungs-Puncte beziehen, und

setzt die Differenzial-Coëfficienten: $\frac{dz'}{dx'} = P$, $\frac{dz'}{dy'} = Q$, bey der Ober-

fläche; und $\frac{dz'}{dx'} = p$, $\frac{dz'}{dy'} = q$, beym Doppel-Körper; so werden die

Gl für die Berührungs-Ebenen:



- a) für die Oberfläche: $z - z' = P \cdot (x - x') + Q \cdot (y - y')$; } (cf. Lacroix
 b) für den Doppel-Körper: $z - z' = p \cdot (x - x') + q \cdot (y - y')$; } l. c. Tom. I.
 §. 322.)

Da nun beyde Gl für dieselbe Ebene gelten sollen; so wird man: $p = P$; und: $q = Q$; haben. Vereinigt man mit diesen beyden Gl, noch die Gl für die Oberfläche und den Doppel-Körper, welche beyde gleichfalls in jedem Berührungs-Punct statt finden müssen; so kann man aus diesen vier Gl die drey Coordinaten: x, y, z , eliminiren, und so die Gl zwischen β und γ bestimmen.

Eliminirt man aber aus den Gl: $p = P$; $q = Q$; und der Gl (1) für den Doppel-Körper, die Größen β und γ ; so erhält man eine neue Gl zwischen x, y und z , welche mit der gegebenen vereinigt, die Curve darstellt, worin alle Berührungs-Puncte liegen. Da diese letzte Elimination leicht im Allgemeinen bewirkt werden kann; so wollen wir uns zuerst mit ihr beschäftigen.

3) Da aus der Gl (1), $p = \frac{X \cdot X'}{z - \gamma}$, und: $q = \frac{\beta - y}{z - \gamma}$; ($= \frac{d\gamma}{d\beta}$ nach der Gl (2)); so erhält man aus $p = P$, die Gl: $z - \gamma = \frac{X \cdot X'}{P}$, und daher aus $q = Q$, die Gl: $\beta - y = \frac{Q \cdot X \cdot X'}{P}$. Wenn man diese Werthe in die Gl (1) substituirt; so erhält man: $X' = \frac{P}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}} \dots (12)$ welches die neue Gl zwischen x, y und z ist. Hieraus folgt noch: $\beta - y = \frac{Q \cdot X}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}}$, und: $z - \gamma = \frac{X}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Aus der Gl (12) erhellet noch, daß alle Doppel-Körper, welche durch Umbrehung der krummen oder geraden Linie: $y = a + X$, um die Ase



der x entstanden sind, einerseits Oberfläche in Einer und derselben Linie berühren werden, welchen Werth auch a habe.

4) Wir wollen nun zuvörderst einige besondere Geschlechter von Oberflächen als gegeben ansehen, welche allgemeine Resultate liefern.

Es bedeute $\varphi(x)$ eine Function von x , und $\varphi'(x) = \frac{d \cdot \varphi(x)}{dx}$.

Soll nun der Doppel-Körper sich auf einer Oberfläche bewegen, welche durch Umdrehung der Linie: $y = \varphi(x)$, um eine Ase, welche mit der Ase x parallel geht, und deren Gl: $y = b$; und: $z = c$, sind, entstanden ist; so wird die Gl dieser Oberfläche seyn: $(y - b)^2 + (z - c)^2 = \varphi(x)^2$;

Die Gl: $p = P$, und $q = Q$, geben hier: $\frac{\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}{z - c} = \frac{X \cdot X'}{z - \gamma}$

und: $\frac{y - b}{z - c} = \frac{y - \beta}{z - \gamma}$. Substituirt man die hieraus gezogenen Werthe

von $y - \beta$, und $z - \gamma$, in die Gl (1); so erhält man mit Zuziehung der Gl der Oberfläche, folgende: $X' = \pm \varphi'(x)$, welche als Gl einer Oberfläche betrachtet, nur für Ebenen, welche mit y, z parallel sind, gelten kann. Die Wurzeln dieser Gl, sind die Entfernung dieser Ebenen von y, z . Es sey z. B. $x = a$ eine solche Wurzel, und es folge daraus: $X = A$, und $X' = A'$; und man suche nun aus den Gl: $p = P$, $q = Q$, die Werthe von y und z , und substituire sie in die Gl (1); so erhält man für den Weg des Schwerpunktes folgende Gl:

$$(\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2 = \frac{(\varphi(a) \cdot \varphi'(a) - A \cdot A')^2}{A'^2} = (\varphi(a) \pm A)^2,$$

weil $A' = \pm \varphi'(a)$ ist. Der Schwerpunkt beschreibt also einen Kreis, dessen Halbmesser = der Summe oder Differenz (nachdem nemlich der Doppel-Körper die äußere oder innere Fläche der Oberfläche berührt,) der beiden Ordi-

naten der Erzeugungslinien am Berührungspuncte ist: wie auch an sich klar ist. Eben so ist auch an sich klar, daß für die äußere Berührung, die Summe der Ordinaten: $X + \varphi(x)$, ein Größtes, (und wenn mehrere Größte da sind, ein Allergrößtes) seyn muß, woraus: $X' = -\varphi'(x)$ folgt. Eben so muß für die innere Berührung die Differenz: $\mp \varphi(x) \pm X$, ein Kleinstes oder Allerkleinstes seyn, woraus: $\varphi'(x) = X'$, folgt.

Wenn die zu berührende Oberfläche, die Gl: $z = my + \varphi(x)$; hat, worunter alle solche Oberflächen enthalten sind, welche aus der Bewegung einer mit sich selbst und mit der Ebene y, z parallel bleibenden geraden Linie entstehen können; so folgt aus der Gl: $Q = q = \frac{dy}{d\beta}$, sogleich: $dy = m \cdot d\beta$,

also: $y = m\beta + \text{const.}$, für den Weg des Schwerpuncts, welcher also in diesem Fall eine mit der Erzeugungslinie der Oberfläche parallele Linie beschreibt. Auch wird die zweite Gl der Berührungscurve wieder: $x = \text{const.}$ geben: woraus (nach §. 4. 2) folgt, daß $y = m\beta + \text{const.}$ seyn muß.

5) Wenn die Gl der Oberfläche: $z = \varphi(y)$, ist; so ist: $P = 0$, also auch p , oder: $X \cdot X' = 0$.

Es muß also entweder $X = \text{const.}$ seyn, welches beim Cylinder der Fall ist, welcher in der That alle solche Oberflächen in allen ihren Puncten berühren kann; oder man erhält wieder die Wurzel: $x = a$, als neue Gl für die Berührungslinie, welche also wieder in einer der Ebene y, z parallelen Ebene liegt. Die Linie des Schwerpunctes ist (nach §. 4. 2) eine aequidistans der Linie: $z = \varphi(y)$. Man sieht auch leicht, daß für die Berührungspuncte, X ein Größtes oder Kleinstes, also $X' = 0$ seyn muß.

Daher können auch solche Doppelkörper, welche, wie der Kegel, kein größtes X haben, sich nicht auf solchen Oberflächen bewegen. Denn die Berührung mit der Kante in der Ebene y, z wird nicht gerechnet. - (Cf. §. 3. Schlußbemerkung 1.)



6) Wenn die Gl der zu berührenden Oberfläche: $z = \varphi(x)$, ist; so ist: $Q = q = 0$, also: $y - \beta = 0$. Aus $p = P$, folgt: $\varphi'(x) = \frac{X \cdot X'}{z \pm y}$; diese Werthe von $y - \beta$, und: $z - \gamma$, in die Gl (1) substituiert, geben wieder die Gl: $X' = \pm \varphi'(x)$, woraus die nemlichen Folgerungen, (als in N. 4) zu ziehen sind. Auch erhellt, daß die Linie des Schwerpunkts eine horizontale gerade seyn muß, deren Gl: $\gamma = \varphi(a) \pm A$, wie auch schon daraus erhellt, weil $q = \frac{dy}{d\beta} = 0$, und auch weil die Schwerpunkts-Linie eine aequidistans der Berührungs-Linie seyn muß.

Wenn die zu berührende Oberfläche die Gl: $y = \varphi(x)$ hat; so erhält man: $P = Q = \infty$, also $z - \gamma = 0$. Dazu kommt die Gl $\frac{P}{Q} = \frac{p}{q}$, welche: $\varphi'(x) = \frac{X \cdot X'}{\beta - y}$, giebt. Hieraus erhält man wieder: $X' = \pm \varphi'(x)$, $\beta - y = \pm A$, und $\beta = \varphi(a) \pm A$, als Gl für die Linie des Schwerpunkts.

7) Wenn die Gl der zu berührenden Oberfläche, unter folgender Form enthalten ist: $X^2 + \varphi(y, z) = 0$; so wird x aus den Gl: $p = P$, $q = Q$, verschwinden; und eben so leicht wird es aus der gegebenen Gl, durch die Gl (1), eliminirt, woraus die Gl: $(y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 + \varphi(y, z) = 0$, entsteht. Substituirt man in diese Gl, die aus den Gl: $p = P$, $q = Q$, erhaltenen Werthe von y und z ; so erhält man die Gl für die Linie des Schwerpunktes. Es findet sich aber noch, daß wenn in $\varphi(y, z)$, die veränderlichen Größen nur auf den zweiten Grad steigen, alsdann die Linie des Schwerpunktes auch nur von der zweiten Ordnung, ein sogenannter Kegelschnitt ist. Um dies zu zeigen; so wollen wir annehmen: die zu berührende Oberfläche solle folgende Gl haben:



$$nX^2 + gz^2 + g'y^2 + 2kz + 2k'y + 2myz + l = 0.$$

Die Gl: $p = P$, wird: $\frac{X \cdot X'}{\gamma - z} = \frac{n \cdot X \cdot X'}{gz + k + my}$, und die Gl:

$$q = Q, \text{ wird: } \frac{\beta - y}{\gamma - z} = \frac{g'y + k' + mz}{gz + k + my}, \text{ geben.}$$

$$\text{Hieraus findet sich: } y = \frac{m(n\gamma - k) - (n + g) \cdot (n\beta - k')}{m^2 - (n + g) \cdot (n + g')},$$

$$\text{und: } z = \frac{m(n\beta - k') - (n + g') \cdot (n\gamma - k)}{m^2 - (n + g) \cdot (n + g')},$$

Durch die Substitution dieser Werthe in die obige Gl, findet sich nach einigen Reductionen, folgende Gl für die Linie des Schwerpunctes:

$$(13) \dots n(\beta^2 + \gamma^2) + l + \frac{(n+g) \cdot (n\beta - k')^2 + (n+g') \cdot (n\gamma - k)^2 - 2m(n\beta - k') \cdot (n\gamma - k)}{m^2 - (n + g) \cdot (n + g')} = 0$$

z. B. wenn der Doppel-Körper eine Kugel vom Halbmesser $= r$, seyn soll; so wird: $X^2 = r^2 - x^2$. Setzt man in der Gl der gegebenen Oberfläche: $g' = m = k = k' = 0$, $n = 1$, $l = -r^2$; so wird sie sich in: $x^2 = gz^2$, verwandeln; diese Gl gilt für zwey Ebenen, die mit der Ase y parallel laufen, auf welchen sich die Kugel zu gleicher Zeit bewegen kann. Die Gl (13) giebt für diesen Fall, für den Weg des Schwerpuncts, die Gl: $\gamma = \pm r \left(\frac{1+g}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$,

wie dies auch aus einer einfachen geometrischen Betrachtung hervorgeht.

Setzt man in der Gl (13), den Nenner des Bruches $= 0$; so muß auch der Zähler $= 0$ gesetzt werden. Dies giebt: $n\gamma - k = \pm (n\beta - k') \cdot \left(\frac{n+g}{n+g'} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Der Schwerpunct beschreibt also in diesem Fall eine gerade Linie, und es gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $m = +$ oder $-r(n+g) \cdot r(n+g')$, gesetzt wird. Aber die gefundenen Coordinaten des Berührungspunctes,



y und z , werden für diesen Fall beyde $= \frac{g}{n}$, und wenn man die aus den Gl:
 $p = P$, und $q = Q$, gezogenen Werthe von $z - y = \frac{gz + k + my}{n}$, und:

$\beta - y = \frac{g'y + k' + mz}{n}$, in die Gl (1) des Doppel-Körpers substituirt,

und den daraus folgenden Werth von X^2 , in die Gl der Oberfläche setzt; so erhält man die zweite Gl der Berührungs-Linie, welche für den vorstehenden Fall, wenn man noch: A statt $r(n + g)$, und B statt $r(n + g')$, setzt, folgende wird:

$$(14) \quad (Az \pm By)^2 + 2 \cdot (Az \pm By) \cdot \frac{(Ak \pm Bk')}{n + g + g'} + \frac{k^2 + k'^2 + ln}{n + g + g'} = 0$$

wo wieder das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $m = +$ oder $-$ A.B, gesetzt ist.

Diese gefundene Gl, gilt für zwey mit der Ase x parallelen Ebenen, in welchen also die jedesmaligen Berührungs-Puncte liegen werden. Auch steht die vom Schwerpuncte beschriebene gerade Linie, auf die Ebene der Berührungs-Puncte senkrecht. (Cf. Lacroix l. c. Tom. I. §. 301.)

Um ein Beispiel zu geben, so wollen wir annehmen: daß der Doppel-Regel, dessen Gl: $(y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = t^2 x^2$; ist, sich auf einem andern Regel bewegen soll, dessen Scheitel im Anfangspunct der Coordinaten, und dessen Ase in der Ebene y, z liegt, und mit der Ase y den Winkel $= \omega$, macht. Auch soll das Verhältniß der Ase dieses Kegels zum rad. der Grundfläche, $= \frac{1}{t}$, das umgekehrte des Doppel-Kegels seyn; so wird die Gl des festen Kegels, aus der Gl (6), werden:

$$t^2 x^2 + t^2 (z \cdot \cos \omega - y \cdot \sin \omega)^2 - (y \cdot \cos \omega + z \cdot \sin \omega)^2 = 0$$

welches sich leicht in: $t^2 x^2 + z^2 \cdot (t^2 \cdot \cos^2 \omega - \sin^2 \omega) + y^2 \cdot (t^2 \cdot \sin^2 \omega - \cos^2 \omega)$

$-2yz \cdot \sin \omega \cdot \cos \omega \cdot (1 + t^2) = 0$, verwandelt, worin, wenn man sie mit der angenommenen Gl vergleicht, die Gl. $m^2 = (n + g) \cdot (n + g')$, statt findet; da $n = 1$, $1 + g = (1 + t^2) \cdot \cos^2 \omega$, $(1 + g') = (1 + t^2) \cdot \sin^2 \omega$, ist. Es ist ferner: $k = k' = l = 0$; daher wird die Gl (14) geben: $z = \mp y \cdot \operatorname{tg} \omega$; und der Schwerpunct beschreibt die Linie: $y = \pm \beta \cdot \cotg \omega$, wo von den doppelten Zeichen in unserm Falle, nur das untere gilt, weil $m = -A.B$, ist.

Man sieht leicht ein, daß die beyden Regel, wenn $\beta = \gamma = 0$, ist, sich in der ganzen geraden Linie, welcher die Gl: $z = y \cdot \operatorname{tg} \omega$, und: $y = x \cdot t \cdot \cos \omega$, gehören, berühren werden, wodurch das unbestimmte $\frac{0}{0}$, in den Werthen von y und z , wenn sie dem Berührungs-Puncte angehören, seine Bedeutung erhält. Aber die von den Berührungs-Puncten nach den Axen der beyden Regel gezogenen Halbmesser, wachsen ins Unendliche; daher werden sich alsdann die zu ihnen gehörigen Kreise in einer geraden Linie, welche auf diese Halbmesser senkrecht steht, berühren: und daher dem Doppel-Regel keine andere Bewegung als nach der Richtung dieser geraden Linie erlauben, da diese Berührung auf beyden Seiten der Axen statt findet.

Wenn wir in der Gl: $m^2 = (n + g) \cdot (n + g')$, noch: $g = g' = -n$, also auch: $m = 0$, annehmen; so wird aus den Gl: (13) und (14), nur folgen: $k^2 + k'^2 = gl$.

Um dies zu erklären, muß man bedenken, daß die Gl: $p = P$, für diesen Fall wird: $\frac{X \cdot X'}{\frac{k}{n} - z} = \frac{X \cdot X'}{\gamma - z}$, und da wir diese Gl mit $X \cdot X'$

dividirt haben; so kann nur: $\gamma = \frac{k}{n}$, und daher $\beta = \frac{k'}{n}$, und $k^2 + k'^2 = gl$, folgen.

Wenn aber für alle Berührungs-Puncte, x einen Werth hat, welcher



aus der Gl: $X \cdot X' = 0$, folgt; so kann die Gl: $p = P$, bestehen, ohne daß $\gamma = \frac{k}{n}$, sey, und die Gl (13) wird in diesem Fall nicht den ganzen Weg des Schwerpunktes, aber auch keine Unrichtigkeit angeben.

Dies wird am besten aus einem Beispiel erhellen: Die Kugel deren rad. $= r$, deren X^2 also $= r^2 - x^2$, ist; soll sich auf einer andern Kugel bewegen, deren Gl: $x^2 + \left(y - \frac{k'}{n}\right)^2 + \left(z - \frac{k}{n}\right)^2 = R^2$, ist. In dieser

Gl wird: $g = g' = -n$, und $m = 0$ seyn, auch wird: $\frac{l}{n} = R^2 - r^2 + \frac{k^2 + k'^2}{-n^2}$,

hier findet sich leicht für die Berührungs-Linie, die Gl: $x = 0$, welcher Werth auch aus: $X \cdot X' = 0$, folgt. Der Schwerpunkt wird den Kreis vom Halbmesser $= R \pm r$, beschreiben.

Aus der Gl: $k^2 + k'^2 = gl$, folgt aber in unserm Falle: $R^2 - r^2 = 0$, also: $R = r$, und alsdann wird (bey der innern Berührung), immer die Gl: $\beta = \frac{k'}{n}$, und: $\gamma = \frac{k}{n}$, statt finden. Uebrigens gehört, wenn $m = 0$, und $g = g'$ ist, die gegebene Oberfläche unter Nr. 4 dieses §, und ist darnach leicht zu behandeln.

8) Wir wollen nun noch einige Beispiele betrachten: Die Kugel, deren Gl: $(y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2 - x^2$; ist, soll beständig die Ebene berühren, deren Gl: $z = gx + ky + l$; ist: wie dies 3. B. auf Regelfahnen, bey den gewöhnlichen Rinnen, worin die Kugel zurückläuft, statt findet. Hier

ist: $P = g$, $Q = k$; daher nach Nr. 2 dieses §: $g = \frac{-x}{z - \gamma}$; $k = \frac{\beta - y}{z - \gamma}$;

und man erhält sehr leicht, durch Elimination, die Gl:

$$\gamma = k\beta + l + r(1 + g^2 + k^2)^{\frac{1}{2}},$$



für den Weg des Schwerpunkts, und $x = \frac{g \cdot r}{(1 + g^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}$, $= r \cdot \text{cosinus}$

des Winkels, den die gegebene Ebene mit der Ebene y, z macht, (cf. Lacroix l. c. T. I. §. 304) für die Berührungslinie. Die Linie des Schwerpunkts ist parallel mit dem Durchschnitt der gegebenen Ebene, und der Ebene y, z ; und man muß den Ordinaten dieses Durchschnitts noch die Größe: $r \cdot \text{secans}$ des Winkels, den die gegebene Ebene mit der Ebene x, y macht, hinzufügen, oder abnehmen, um die Ordinaten der Linie des Schwerpunkts zu erhalten. Eben

so leicht findet sich: $y - \beta = \frac{r \cdot k}{(1 + g^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}$, $= r \cdot \text{cosinus}$ des Winkels

der gegebenen Ebene, mit der Ebene x, z ; und: $y - z = \frac{r}{(1 + g^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}$
 $= r \cdot \text{cosinus}$ des Winkels der gegebenen Ebene, mit x, y .

Wenn der Doppel = Regel, dessen $X = t(h - x)$, ist, die Ebene dieser Nr. bey seiner Bewegung berühren soll; so erhält man aus der Gl (12),
 $t^2 = \frac{g^2}{1 + k^2}$; = dem Quadrat der Cotangente des Winkels, den die gegebene Ebene mit der Ebene y, z macht; für die Berührungs = Linie. Dies ist also eine Bedingungs = Gl zwischen den beständigen Größen, und wenn diese erfüllt ist; so wird der Regel die Ebene unabhängig von x, y und z , d. h. in allen ihren Puncten berühren. Für die Linie des Schwerpunkts findet sich:
 $y = k\beta + hg$.

9) Wenn der Doppel = Regel, dessen $X = t \cdot (h - x)$, ist, sich auf einem andern Regel bewegen soll, dem die Gl (6) gehört, welche Gl wir durch:
 $A^2 + B^2 = \tau^2 \cdot C^2$, darstellen wollen; so wird die Gl: $p = P$, geben:

$$\frac{t^2 \cdot (h - x)}{y - z} = \frac{A \cdot \sin \psi + B \cdot \cos \psi \cdot \sin \omega - C \cdot \tau^2 \cdot \cos \psi \cdot \cos \omega}{B \cdot \cos \omega + C \cdot \tau^2 \cdot \sin \omega}, \dots (15)$$



und: $q = Q$, wird geben:

$$\frac{y - \beta}{\gamma - z} = \frac{-A \cdot \cos \psi + B \cdot \sin \psi \cdot \sin \omega - C \cdot \tau^2 \cdot \sin \psi \cdot \cos \omega}{B \cdot \cos \omega + C \cdot \tau^2 \cdot \sin \omega}; \dots (15)$$

Wir können zu mehrerer Vereinfachung, und ohne dadurch eine Einschränkung zu machen, die Ase des festen Kegels in die Ebene, x, y legen, wodurch ω und $c = 0$, wird, auch können wir $b = 0$ setzen. Denn wenn wir so eine Gl zwischen β und γ finden, und wenn wir annehmen, daß nachher das ganze System der Körper und Oberflächen durch Drehung um eine der Ase x parallele Ase, deren Gl: $y = b'$; $z = c'$; sind, einen Winkel $= Z$, beschreibe; so werden wir in der gefundenen Gl zwischen β und γ setzen, daß β sich in: $b' + (\beta - b') \cdot \cos Z + (\gamma - c') \cdot \sin Z$, und $\gamma - c'$ sich in: $(\gamma - c') \cdot \cos Z - (\beta - b') \cdot \sin Z$, verändere, um die Gl für die unter diesen Umständen beschriebene Linie des Schwerpunctes zu erhalten. Eben so wird in den andern Gl, durch diese Bewegung der Werth von y , in: $(y - b') \cdot \cos Z + (z - c') \cdot \sin Z + b'$, und $z - c'$ in: $(z - c') \cdot \cos Z - (y - b') \cdot \sin Z$, ungeändert werden, und der Werth von x , ungeändert bleiben. Daher bleibt auch die Gl (1) für den Doppel-Körper, ungeändert.

Unter der Voraussetzung von $\omega = c = b = 0$, erhalten wir:

$A = (x - a) \cdot \sin \psi - y \cdot \cos \psi$; $B = -z$; $C = (x - a) \cdot \cos \psi + y \cdot \sin \psi$;
und man erhält aus der Gl (12), für die Berührungs-Linie, folgende Gl:

$$y = (x - a) \cdot \frac{\sin^2 \psi \cdot (1 + \tau^2) - \tau^2 \pm t \cdot \tau \cdot \left(\frac{1 + \tau^2}{1 + t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \psi}{\sin \psi \cdot \left(\cos \psi \cdot (1 + \tau^2) \mp t \cdot \tau \cdot \left(\frac{1 + \tau^2}{1 + t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)};$$

Dies ist eine Gl für zwei auf die Ebene x, y senkrechte, und durch den Scheitel des festen Kegels gehende Ebenen: deren Durchschnitte mit diesem Kegel also vier gerade Linien, als Berührungs-Linien geben werden. Nämlich

der Doppel - Regel muß über die Scheitel hinaus verlängert, und die Berührung auch unterhalb des festen Regels als möglich gedacht werden.

Setzen wir in der letzten Gl, den Coëfficienten von x , $= \operatorname{tg} \varphi$; so haben wir für die Berührungs - Linie die eine Gl: $y = (x - a) \cdot \operatorname{tg} \varphi$; und für den Winkel, den diese Linie mit der Ebene x, y macht, $(= \vartheta)$, werden

wir sodann (aus der sphär. Trigonom.) die Gl: $\cos \vartheta = \frac{1}{\cos \varphi - \psi \cdot (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}$;

haben. Und man wird sodann für eine zweite Gl der Berührungs - Linie,

die Gl: $z = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sin \varphi} \cdot y$, erhalten.

Da wir für φ und ϑ beständige Werthe erhalten haben; so werden wir aus der Gl (5), auch einen solchen Werth für m , als Tangente der Neigung der geraden Linie, welche der Schwerpunkt des Doppel - Regels beschreibt, erhalten. Und die Größe: n , erhalten wir aus der Gl (4)*, worin wir die Werthe von x , y und z aus den beyden Gl der Berührungs - Linie substituiren, indem wir $x = a$, $y = 0$, und $z = 0$, setzen; wornach n die einzige unbekannte Größe in dieser Gl. bleibt.

Auf diese Art kann man ohne beschwerliche Eliminirung die Gl für die Linie des Schwerpunkts: $y = m\beta + n$, bestimmen, weil wir daraus, daß die Berührungs - Linie eine gerade war, schon wissen konnten, daß die Linie des Schwerpunktes auch eine gerade seyn müsse.

10) Die Kugel, deren $X^2 = r^2 - x^2$, ist, soll bey ihrer Bewegung beständig den Regel dem die Gl (6) gehört, berühren.

Man macht dies Experiment wohl mit einer Billard - Kugel, indem man sie auf zwey Stößer (Queus) legt, und durch Entfernen oder Nähern der beyden dicken Enden derselben, die Kugel hin - oder herwärts, (scheinbar auf - oder unterwärts) rollen läßt.



Die beyden Gl: $p = P$, und $q = Q$, werden hier ebendieselben als in der vorhergehenden Nr., nur daß man in der ersten, linkerhand des Gleichheits-Zeichens, $\frac{x}{y-z}$, statt: $\frac{t^2(h-x)}{y-z}$, setzen muß. Und für die Berührungs-Linie werden wir nach einigen Reductionen, aus (12), folgende Gl erhalten:

$$A \cdot \operatorname{tg} \psi + B \cdot \sin \omega - C \cdot \tau^2 \cdot \cos \omega = \pm \frac{C \cdot x \cdot \tau \cdot (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}{r \cdot \cos \psi},$$

welche, wenn wir wieder ω und $c = 0$, setzen, sich in folgende verwandelt:

$$[(x-a) \cdot \cos \psi + (y-b) \cdot \sin \psi] \cdot [r \cdot \cos \psi \cdot (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}} - \tau \cdot x] = \frac{r \cdot (x-a)}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}; \dots (16)$$

Diese Gl sind von der zweiten Ordnung in Rücksicht der veränderlichen Größen; daher wird die Linie, worin alle Berührungs-Puncte der Kugel mit dem Kegel liegen, eine Curve von doppelter Krümmung seyn.

Die Elimination von x, y, z wird hier zu weitläufig.

Die zweite der Gl (15) giebt die Neigung der Linie des Schwerpunctes gegen die Ase y zu erkennen. Soll diese z. B. $= 0$ seyn; so giebt der Zähler dieser Gl, $= 0$ gesetzt, unter der Voraussetzung: $\omega = c = 0$, folgende Gl:

$$y - b = (x - a) \cdot \frac{(1 + \tau^2) \cdot \operatorname{tg} \psi}{1 - \tau^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \psi};$$

welche mit den beyden Gl für die Berührungs-Linie vereinigt, die drey Coordinaten des Berührungs-Punctes giebt, wo die Kugel ruhig liegen bleiben wird.

Die zuletzt gefundene Gl, gehört einer auf die Ebene x, y senkrechten Ebene, durch den Scheitel des Kegels, (und man sieht nebenher daraus, daß in der vorhergehenden Nr. die Neigung der Schwerpuncts-Linie nie $= 0$

werden kann, wenn nicht diese Ebene, und die dort gefundene Ebene für die Berührungs-Linie, identisch sind.)

Aus den beyden zuletzt gefundenen Gl: erhalten wir für den Punct, wo die Kugel nicht von der Schwere bewegt wird, wenn wir, der Kürze wegen, auch noch: $a = b = 0$, setzen, folgende Gl für die Coordinaten desselben:

$$x = \frac{r \cdot \tau \cdot \sec \psi}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}; \text{ und } y = \frac{r \cdot \tau \cdot \sin \psi \cdot (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}{\cos^2 \psi - \tau^2 \cdot \sin^2 \psi};$$

Für die Stelle, wo die Kugel zwischen den beyden Kegeln durchzufallen wird, wird $\frac{dy}{d\beta} = \infty$ seyn, und man wird in der zweiten der Gl (15),

den Nenner $= 0$, setzen. Unter den jetzigen Voraussetzungen erhalten wir daraus: $B = z = 0$; dadurch verwandelt sich die Gl für den Kegel, in:

$$x \cdot \sin \psi - y \cdot \cos \psi = \pm \tau \cdot (x \cdot \cos \psi + y \cdot \sin \psi), \text{ woraus}$$

$$x = y \cdot \frac{\cos \psi \pm \tau \cdot \sin \psi}{\sin \psi \mp \tau \cdot \cos \psi}, \text{ folgt.}$$

Aus dieser Gl, folgt, wenn sie mit der Gl (16) verbunden wird:

$$x = \frac{r}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot (\sin \psi \mp \tau \cdot \cos \psi), \text{ und: } y = \frac{r}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(\sin \psi \mp \tau \cdot \cos \psi)^2}{\cos \psi \pm \tau \cdot \sin \psi};$$

welche nebst $z = 0$, die Coordinaten des verlangten Punctes sind.

Die doppelten Zeichen rühren daher, weil der Kegel zwey, Durchschnittslinien mit der Ebene x, y hat. So kommt für $\psi = 0$, $x = \frac{y}{\pm \tau}$;

da die Kugel nun an der Linie: $x = \frac{y}{\pm \tau}$, durchfallen soll, wenn sie sich

noch um den Winkel $= \psi$ dreht; so muß man die untern Zeichen nehmen. Die andern Zeichen würden alsdann gelten, wenn der Schwerpunct der Kugel sich in der Ebene x, z bewegte, und die Kugel berührte. Aus bloßen einfachen



geometrischen Betrachtungen erhellet auch leicht, daß man für diese beyden Fälle haben werde: $x = r \cdot \sin(\psi \pm \text{arc. tg } \tau)$; und:

$$y \cdot \cotg(\psi \pm \text{arc. tg } \tau) = r \cdot \sin(\psi \pm \text{arc. tg } \tau);$$

woraus obige Werthe von x und y folgen.

11) Da bey den Aufgaben dieses §, die Elimination von x , y , z , leicht beschwerlich wird; so wird es wieder nöthig seyn, ein Verfahren anzugeben, wodurch wir aus einem willkürlich angenommenen x , (oder y , oder z), sowohl die beyden andern Coordinaten des Berührungspunctes, als auch die dazu gehörigen Coordinaten des Schwerpunctes, nebst der Neigung seiner Linie daselbst, und so auch die jedesmaligen statischen Momente der Reibung und Drehung finden können. Dazu dienen uns nun die drey letzten Gl in Nr. 3 dieses §, wenn man sie mit der gegebenen Gl für die zu berührende

Oberfläche, und der Gl: $\frac{dy}{d\beta} = q = Q$, verbindet. Nämlich die Gl der

Oberfläche und die Gl: $X' = \frac{P}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}}$; geben die beyden andern Coordi-

naten des Berührungspunctes, $\frac{dy}{d\beta} = Q$, giebt die Neigung der Linie des

Schwerpuncts, und daher auch den Druck gegen die Unterlagen, und die re-

lative Schwere des Doppel - Körpers; und: $\beta - \gamma = \frac{Q \cdot X}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}}$, nebst:

$z - \gamma = \frac{X}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}}$, geben β und γ , so wie auch (nach §. 3. 3), die Mo-

mente der Drehung und Reibung. Hiedurch weiß man also alles, was für den augenblicklichen Zustand des Doppel - Körpers zu wissen nöthig ist.

6.

Wir wollen jetzt voraussetzen: Es seyen außer dem Dop-



pel-Körper, auch die zwey Ell einer Curve gegeben, welche der erstere bey seiner Bewegung beständig berühren soll; und hieraus soll die Ell für den Weg des Schwerpunctes gefunden werden.

1) Es ist hier ebenfalls das Verfahren anwendlich, welches Lacroix (l. c. Tom. I. §. 341.) beschreibt.

Die beyden Oberflächen, deren Durchschnitt die gegebene Linie ist, sind durch ihre Ell gegeben. Nun nenne man den Differenzial-Coefficienten,

$$\frac{dz}{dx} \begin{cases} \text{bey der ersten Oberfläche:} & = P. \\ \text{bey der zweyten:} & = P, . \\ \text{beym Doppel-Körper:} & = p. \end{cases}$$

$$\text{eben so nenne man, } \frac{dz}{dy} \begin{cases} \text{bey der ersten Oberfläche:} & = Q. \\ \text{bey der zweyten:} & = Q. \\ \text{beym Doppel-Körper:} & = q. \end{cases}$$

so wird die Tangente der Stützlinie an einem Puncte, dessen Coordinaten: x', y', z' , sind, gleich dem Durchschnitte der beyden Berührungs-Ebenen: der gedachten Oberflächen an diesem Puncte seyn. Die Ell dieser Ebenen sind:

$$z - z' = P. (x - x') + Q. (y - y'); \text{ und:}$$

$$z - z' = P, . (x - x') + Q, . (y - y').$$

(Cf. Lacroix l. c. Tom. I. §. 322).

Die Ell für den Durchschnitt der beyden Ebenen, sind:

$$x - x' = \frac{(Q, - Q) . (z - z')}{P . Q, - P, . Q}; \text{ und:}$$

$$y - y' = \frac{(P - P,) . (z - z')}{P . Q, - P, . Q},$$

welches also die Ell für die Tangente der Stützlinie sind.

Wenn nun der Doppel-Körper auf dem gedachten Punct der Stütz-



linie ruht; so wird die Tangente dieses Punctes der Stützlinie, in der Berührungsebene dieses Punctes des Doppelkörpers liegen. Die Gl dieser letztern Ebene ist: $z - z' = p \cdot (x - x') + q \cdot (y - y')$. Man wird also in diese Gl die vorher gefundenen Werthe von: $x - x'$, und: $y - y'$, setzen können, wodurch man folgende Gl erhält:

$$P \cdot Q - Q \cdot P, = p \cdot (Q - Q) + q \cdot (P - P); \dots\dots\dots (17)$$

Wenn man aus dieser Gl, der Gl (1) für den Doppelkörper, und den beyden Gl für die Stützlinie, die Coordinaten: x, y, z , eliminirt; so wird man die Gl zwischen β und γ erhalten.

2) Wenn die Stützlinie in einer der Ebene x, y parallelen Ebene liegt; so wird die eine (erste) der Oberflächen, worin die Stützlinie liegt, die Gl: $z = \text{const}$, haben. Daraus folgt: $P = Q = 0$, und die Gl (17) verwandelt sich in: $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$; d. h. der Differenzial - Coefficient $\frac{dy}{dx}$ des Doppelkörpers am Stützpunkte, muß dem $\frac{dy}{dx}$ der Stützlinie daselbst gleich seyn. Und man wird aus der hieraus entspringenden Gl, der Gl (1), nebst den Gl: $z = \text{const}$, und der zweiten Gl für die Stützlinie, die Coordinaten: x, y, z , eliminiren, und so die Gl zwischen γ und β erhalten. Das $\frac{dy}{dx}$ des Doppelkörpers, ist aber = $\frac{X \cdot X'}{y - \beta}$.

Ist die Stützlinie in einer der Ebene y, z parallelen Ebene gelegen; so wird ihr die Gl: $x = \text{const}$, zukommen. Daraus folgt: $P = \infty$, weil man die fehlenden Coordinaten in der Gl der Ebene ansehen kann, als wenn sie mit Null multiplicirt wären. In der Gl (17) wird wegen $P = \infty$, der Coefficient dieser Größe, = 0 seyn müssen. Dies giebt: $q = Q$; aber q ist



auch $= \frac{dy}{k\beta}$; (§. 5. 3), und die Linie des Schwerpunkts wird (nach §. 4. 2) eine aequidistans der Stütze sein.

Liegt die Stütze in einer der Ebene x, z parallelen Ebene; so ist die eine ihrer Gl: $y = \text{const}$, daher wird in der Gl (17), $Q = \infty$, und $p = P$.

Ueberhaupt werden wir von allen Fällen, wo die Stütze in einer der Axe x parallelen Ebene liegt, nur denjenigen zu betrachten nöthig haben, wo sie in der Ebene x, y selbst liegt. Denn wenn wir annehmen, daß sich nachher das ganze System um eine der Axe x parallele Axe, deren Gl: $y = b$; und $z = c$; sind, drehe, und den Winkel $= \varphi$ beschreibe; so wird man für β, γ, y, z , die in Nr. 9 des vorhergehenden §. für einen ähnlichen Fall gefundenen Werthe setzen, und so die neuen Gl erhalten.

Wenn die Stütze eine Axe hat, wodurch sie in zwei gleiche Theile getheilt wird; so wird man diese Axe in die Ebene x, y legen, und daraus durch eine völlig gleiche Veränderung der Coordinaten: β, γ, y, z , alle andere Fälle ableiten können.

3) Wenn daher die Stütze eine gerade Linie seyn soll; so werden wir nur den Fall zu betrachten nöthig haben, wo diese in der Ebene x, y liegt. Es seyen ihre Gl: $y = Gx + K$; und $\varphi = 0$; haben wir für diesen Fall den Weg des Schwerpunktes gefunden, und es wird die Bestimmung dieses Weges für den Fall verlangt, wenn der Doppel-Körper sich auf der geraden Linie bewegt, deren Gl: $z = gy + k$; und: $z = g'x + k'$; sind; so werden wir (in Nr. 9 des vorhergehenden §.) haben:

$$\tan \varphi = \frac{dz}{dy} = g; \quad b' = -\frac{k}{g}; \quad c' = 0.$$

In der gefundenen Gl zwischen β und γ werden wir daher β in:



$$-\frac{k}{g} + \frac{\beta + \frac{k}{g} + \gamma \cdot g}{(1+g^2)^{\frac{1}{2}}}; \text{ und } \gamma \text{ in: } \frac{\gamma - \left(\beta + \frac{k}{g}\right) \cdot g}{(1+g^2)^{\frac{1}{2}}};$$

verändern müssen, so wie G in:

$$g' \cdot \frac{(1+g^2)^{\frac{1}{2}}}{g}; \text{ und K in: } k' \cdot \frac{(1+g^2)^{\frac{1}{2}}}{g} - \frac{k}{g};$$

z. B. wenn der Doppel-Regel, dessen $X = t \cdot (h - x)$, ist, sich auf der Linie: $y = Gx + K$, bewegen soll; so finden wir durch die angezeigten Eliminationen leicht folgende Gl für den Weg des Schwerpunktes:

$$\gamma = \frac{t}{\pm (G^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot (\beta - G \cdot h - K) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Die Bewegung wird unmöglich, wenn $t > G$, wie gehörig. Die Gl hat doppelte Zeichen, weil der Regel auch mit seiner Verlängerung jenseits des Scheitels, die Linie berühren kann.

Die Gl (18), stellt nur so lange den Weg des Schwerpunktes dar, bis der Doppel-Regel den Durchschnittspunct der Stützlinie mit der Ebene y, z berührt. (Cf. §. 3 Schlußbemerkung 1.) Für diesen Punct ist: $x = 0$, und: $y = K$. Da nun aus (18), $\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{t}{(G^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}$, ist; so erhalten

$$\text{wir aus den Gl (3), } \beta = K \pm \frac{t h}{G}, \text{ und: } \gamma = \pm \frac{t \cdot h \cdot (G^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}{G},$$

als Coordinaten der Endpunkte der geraden Linien, welche der Schwerpunkt des Regels beschreibt. Sollte dieser seine Bewegung noch fortsetzen; so würde sein Schwerpunkt zunächst einen Kreisbogen um den besagten Durchschnittspunct beschreiben.

Soll die gegebene Linie: $y = Gx + K$, mit der Durchschnitts-Linie

identisch seyn, welche aus der Gl (4)* folgt, wenn man darin $z = 0$ setzt; so wird: $G = \frac{-t \cdot r(1+m^2)}{m}$; und: $K = \frac{-n + t \cdot h \cdot r(1+m^2)}{m}$.

Setzt man diese Werthe in die Gl (18); so verwandelt sich dieselbe in: $y = m\beta + n$; wie gehörig.

Soll der Doppel-Regel sich nun auf der Linie bewegen, deren Gl: $z = gy + k$; und: $z = g'x + k'$; sind; so werden wir, nach denen zu Anfang dieser Nr. angezeigten Verwandlungen, folgende Gl für den Weg des Schwerpunktes erhalten:

$$*(18) \dots y = (g \cdot \beta + k) \cdot \left[g'^2 \pm t(g'^2(1+g^2) - g^2 \cdot t^2)^{\frac{1}{2}} \right] \left\{ \begin{array}{l} \pm g'^2 - g^2 \cdot t^2 \\ - t \cdot (hg' + k') \cdot \left[g^2 \cdot t \pm (g'^2(1+g^2) - g^2 \cdot t^2)^{\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right\}$$

Diese Gl verwandelt sich, wenn $t = 0$, und: $th = r$, ist, in: $y = g\beta + k \pm r(1+g^2)^{\frac{1}{2}}$; wie gehörig.

Aus den beiden Gl für die Stützlinie, folgt noch: $y = \frac{g'x + k' - k}{g}$;

Soll dies mit: $y = Gx + K$, identisch, und: $g = g' = k = k' = 0$, seyn; so verwandelt sich die gefundene Gl für den Weg des Schwerpunktes wieder in die Gl (18), wie gehörig.

y wird unmöglich, wenn: $t^2 > g'^2 \cdot \frac{(1+g^2)}{g^2}$; aus ähnlichen Gründen, wie schon §. 4. 4. angegeben sind.

$$\frac{dy}{d\beta} = \frac{g[g'^2 \pm t \cdot (g'^2(1+g^2) - g^2 t^2)^{\frac{1}{2}}]}{g'^2 - g^2 t^2}, \text{ wird unter der-}$$

selben Bedingung unmöglich, und der Zähler von $\frac{dy}{d\beta}$ wird $= 0$, wenn:



$t^2 = \frac{g'^2}{2g^2} [(1 + g^2) \pm (1 - g^2)]$, ist; also entweder: $t^2 = \frac{g'^2}{g^2}$, für welchen Werth aber auch der Nenner von $\frac{dy}{d\beta} = 0$ wird; oder wenn: $t = \pm g'$, wie dies auch schon aus der Gl (5) folgt. Ueberhaupt stimmt die Gl (5), wenn man darin: $\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \varphi} = \frac{dz}{dx} = g'$; und: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{g'}{g}$, setzt, und dann den Werth von m sucht, ganz mit der jetzt gefundenen Gl für $\frac{dy}{d\beta}$ überein, wie gehörig. Wenn $g = 0$, ist, wird auch $g' = 0$; und der Werth von $\frac{dy}{d\beta}$ hängt vom Werthe des Quotienten $\frac{g'}{g}$ ab.

Wenn man in der Gl (18)*, $t^2 = \frac{g'^2}{g^2}$; setzt; so erhält man beym

Gebrauch der obern Zeichen; folgende Gl: $\beta = \frac{hg' + k' - k}{g}$. Der Schwer-

punct beschreibt also alsdann eine auf die Ebene x, y , senkrechte gerade Linie: dies findet alsdann statt, wenn die vertikale Ebene durch die Stütlinie, eine Berührungs = Ebene des Doppel = Regels ist. Gebraucht man aber, wenn:

$t^2 = \frac{g'^2}{g^2}$; ist, die untern Zeichen; so erhält man: $y = \frac{0 \cdot \beta + 0}{0}$;

Wenn man, um den Werth dieses unbestimmten Bruches zu finden, das Differenzial des Zählers und Nenners nimmt, indem man t veränderlich setzt;

so erhält man: $y = \frac{(g^2 - 1) \cdot (g\beta + k - g'h - k')}{2g^2} + g'h + k'$. Diese

Gl wird statt finden, wenn die vertikale Ebene durch die Stütlinie, den Doppel = Regel schneidet; wodurch Parabeln entstehen, von denen die Stütlinie



eine Tangente seyn muß. Liegt die Stützlinie in der Ebene x, y ; so berührt sie die Parabel an einem unendlich entfernten Punkt, man hat: $g=g'=k=k'=0$, und die zweite Gl für den Weg des Schwerpunkts wird identisch mit der ersten.

4) Wenn der Doppel-Körper, dessen $X^2 = b \cdot (x-h) \cdot \left(1 - \frac{x-h}{a}\right)$ ist [cf. Gl (1)*], die Linie: $y = Gx + K$, berühren soll; so erhalten wir

$$\left(\text{aus Nr. 2 dieses §.}\right) \text{ die Gl: } G = \frac{\frac{1}{2}b - \frac{b(x-h)}{a}}{y - \beta};$$

Durch eine leichte Elimination von y und $x-h$, erhalten wir, da auch: $z=0$, ist, folgende Gl für den Weg des Schwerpunkts:

$$y^2 = -b \cdot \frac{(\beta - K - G \cdot (h + \frac{1}{2}a))^2}{b + aG^2} + \frac{1}{4}(a \cdot b); \quad \dots (19)$$

welche sich, wenn $a = \infty$ ist, in:

$$y^2 = b \cdot \frac{\left(\beta - K - Gh + \frac{b}{4G}\right)}{G}; \text{ verwandelt.}$$

Der parabolische Doppel-Körper, beschreibt also eine Parabel; der elliptische, eine Ellipse; und der hyperbolische, eine Hyperbel, wenn: $G^2 > -\frac{b}{a}$, ist. Ist: $G^2 = -\frac{b}{a}$; so beschreibt der letztere eine verti-

kale gerade Linie, und wenn: $G^2 < -\frac{b}{a}$; so ist bey ihm alle Bewegung unmöglich, wie auch leicht a priori einzusehen.

Will man den parabolischen Doppel-Körper nach Art des gewöhnlichen Doppel-Regels zusammensetzen, daß die Scheitel auswärts gekehrt sind; so wird man den Winkel, den die Axe der Erzeugungs-Parabel dieses Körpers,



mit der Ase x macht, $= \pi$, nehmen [cf. Gl (1)*]; und es erhellet leicht, daß man in der gefundenen Gl für den Weg des Schwerpuncts, nur $-b$, statt $+b$, zu setzen brauche, um diesen Fall darzustellen.

Die Anfangs- und Endpuncte der vom Schwerpuncte beschriebenen Linien findet man, wenn man einmal die Puncte sucht, wo der Doppel-Körper zwischen den Stützeinien durchfällt, für welche: $z - \gamma = 0$, oder in unserm Fall, $\gamma = 0$ ist; und dann auch, wenn man die Werthe von β und γ sucht, welche statt finden, wenn der Doppel-Körper, bey welchem x das Zeichen nicht ändern darf, anfängt mit seiner Zusammensetzung in der Ebene y, z , die Stützeinie zu berühren. (Cf. die erste Schlußbemerkung des §. 3). So z. B. fällt der zuletzt gedachte parabolische Körper durchhin, wenn: $\gamma = 0$, und daher: $\beta = K + Gh + \frac{b}{4G}$; ist. Wenn man nun in den Gl (3), $X^2 = -b(x - h)$; $x = 0$; $y = K$; $z = 0$; $\frac{dy}{d\beta} = \frac{-b}{2G\gamma}$; setzt; so erhält man: $\gamma^2 = \frac{4bhG^2 - b^2}{4G^2}$; und: $\beta = K \pm \frac{b}{2G}$; für die Coordinaten des Schwerpunctes, wenn der parabolische Körper anfängt den Durchschnit der Linie: $y = Gx + K$, mit der Ase y zu berühren, und wo die Endpuncte der vom Schwerpunct beschriebenen Parabel liegen. Zwischen den beyden Werthen von β , beschreibt der Schwerpunct einen Kreis vom Halbmesser $= (bh)^{\frac{1}{2}}$. Das β , welches den Punct angiebt wo der Körper durchfällt, hat auch einen doppelten Werth, weil man für die Hälfte der zweiten Stützeinie, welche diesseits der Ase y liegt, G verneint nehmen muß.

Soll sich nun der in dieser Nummer betrachtete Doppel-Körper, auf der Linie bewegen, deren Gl: $z = gy + k$; und: $z = g'x + k'$; sind; so werden wir wieder in den Gl: $z = 0$, und: $y = Gx + K$, die schon öfterer



angezeigten Verwandlungen, (cf. §. 5. 9) mit y und z vornehmen, um diese Gl mit den gegebenen identisch zu machen, und auf diese Art, z , b' , c' , nebst G und K , zu bestimmen. Alsdann wird man auch in der Gl (19), statt β und γ , ihre transformirten Werthe setzen, und so die neuen Gl finden. Z. B. aus der Gl (19) folgt, wenn man: $h = -\frac{1}{2}a$, setzt:

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{-b}{b + aG^2} \cdot \left(\frac{\beta - K}{\gamma} \right);$$

Diese Gl verwandelt sich durch die (in Nr. 3 dieses §.) angezeigten Substitutionen, in:

$$\frac{d\gamma - g \cdot d\beta}{d\beta + g \cdot d\gamma} = \frac{-bg^2}{g^2b + ag'^2(1+g^2)} \cdot \left(\frac{\beta g + k + \gamma g^2 - k'(1+g^2)}{\gamma g - \beta g^2 - k} \right);$$

woraus man den Werth von $\frac{d\gamma}{d\beta}$ leicht findet.

Die Gl (19) wird nicht anders einem Kreise gehören, als wenn a bejahet, und $G = 0$ ist, d. h. wenn der Doppel-Körper ein elliptischer, und die Stützlinie der Ase x parallel ist. Also beschreibt auch die ganze Kugel außerdem immer Ellipsen mit ihrem Mittelpunct.

Wenn der elliptische oder hyperbolische Doppel-Körper, dem die zweite der Gl (1)* gehört, wenn man darin: $h' + \frac{1}{2}a = 0$, setzt, die Linie: $y = Gx + K$, berühren soll; so wird man nach einer leichten Elimination finden, daß sein Schwerpunct die Linie beschreibe, deren Gl ist:

$$\gamma^2 + \frac{a(\beta - K - Gh)^2}{a + bG^2} = \frac{1}{4}a^2$$

Der Schwerpunct des elliptischen Körpers beschreibe Ellipsen; und beym hyperbolischen, Hyperbeln, so lange die Berührung an der innern Fläche statt findet: aber Ellipsen, wenn $G^2 < -\frac{a}{b}$, wo die Berührung



nur an der äußern Fläche statt finden kann. (Wenn $G = 0$ ist, so wird der Kreis vom Halbmesser $= \frac{1}{2}a$ beschrieben, wie gehörig.) Zwischen beiden Fällen geschieht die Berührung im Unendlichen, und der Schwerpunkt beschreibt die senkrechte gerade Linie, deren Gl: $\beta - K - Gh = 0$, ist. Auch wenn $h = 0$, und wenn $G = \infty$ ist, beschreibt allemal der Schwerpunkt die gerade horizontale Linie, deren Gl: $\gamma = \pm \frac{1}{2}a$, wie auch leicht a priori klar ist.

5) Wenn irgend ein Doppel-Körper bey seiner Bewegung die Linie berühren soll, deren Gl ist: $x^2 = gy^2 + ky + l$; (20)

so findet im Allgemeinen die Gl: $\frac{X \cdot X'}{y - \beta} = \frac{2x}{2gy + k}$, statt; welche aus:

$p = P$; folgt. Soll der Doppel-Körper ein solcher elliptischer oder hyperbolischer seyn, dessen $X^2 = \frac{b}{a} \cdot (\frac{1}{4}a^2 - x^2)$, ist; so wird die gefundene Gl

für alle Berührungs-Puncte, sich in: $y = \frac{a\beta - \frac{1}{2}bk}{a + bg}$, umwandeln. Wenn

man diesen Werth von y in die Gl (20) und die Gl für den Doppel-Körper substituirt; so kann man, da $z = 0$ ist, leicht x^2 aus beiden Gl eliminiren, und so nach einigen Reductionen folgende Gl für den Weg des Schwerpunctes

finden: $\gamma^2 = \frac{-b}{a + bg} \cdot \left(g\beta^2 + k\beta - \frac{bk^2}{4a} \right) + \frac{b}{a} \cdot (\frac{1}{4}a^2 - l)$.. (21)

Ehe wir weiter gehen, wollen wir hier bemerken, daß bey der Linie der Gl (20), folgende Relationen statt finden:

Der Abstand der Scheitel dieser Linie von der Ebene x, z , ist:

$$= \frac{-k \pm (k^2 - 4gl)^{\frac{1}{2}}}{2g};$$



Also ist der Abstand des Mittelpuncts von dieser Ebene, $= -\frac{k}{2g}$;

Ihre Aye in der Richtung der y , ist $= \frac{(k^2 - 4gl)^{\frac{1}{2}}}{-g}$;

Der Parameter ist $= (k^2 - 4gl)^{\frac{1}{2}}$;

Die zweite Aye in der Richtung der x , ist $= \left(\frac{k^2 - 4gl}{-g} \right)^{\frac{1}{2}}$

Bezeichnen wir nun den Unterschied der Quadrate der halben Ayen, die nach der Richtung der x gehen, wovon die eine dem Doppel-Körper, und die andere der Stütze gehört, mit D^2 , so daß wir die Gl:

$\frac{1}{4}a^2 - \frac{k^2 - 4gl}{-4g} = \pm D^2$; haben; so wird sich dadurch die Gl (21), in:

$$y^2 = \frac{-bg}{a + bg} \cdot \left(\beta + \frac{k}{2g} \right)^2 \pm \frac{bD^2}{a}; \text{ umwandeln.}$$

Für die Kugel, wo $a = b = 2r$, ist; erhalten wir:

$$(22) \dots, \quad y^2 = \frac{-g}{1 + g} \cdot \left(\beta + \frac{k}{2g} \right)^2 \pm D^2;$$

6) Es wird nicht ohne Interesse seyn, hier die Entwicklung der verschiedenen Linien, welche in den Gl (20) und (22) zusammengehören, zu finden.

a) Wenn wir in der Gl (20), $k = l = 0$, setzen; so wird sie: $x^2 = gy^2$, und gilt für zwey gerade Linien, auf welchen sich die Kugel zu gleicher Zeit bewegen kann. Die Gl (22) wird aber alsdann: $y^2 = r^2 - \frac{g}{1 + g} \cdot \beta^2$, und giebt dieselbe Ellipse, welche aus der Gl (19) folgt, wenn man dort:

$a = b = 2r$, $K = 0$, $G^2 = \frac{1}{g}$, und: $h = -\frac{1}{2}a$, setzt.



b) Setzen wir in der Gl (20), $g = \infty$; so wird sie, wenn man mit g dividirt, geben: $y = 0$, und wegen des Quadrates von y , wird man in der Gl (20), das Glied: $g \cdot y^2$, noch immer $= 0$ setzen müssen. Dadurch wird auch: $x^2 = l$, werden, und aus (22), werden wir erhalten: $\gamma^2 + \beta^2 = r^2 - l$; d. h. wenn die Stütze sich in zwey Punkte, die in der Ase der x liegen, verwandelt; so beschreibt der Schwerpunct der Kugel einen Kreis vom Halbmesser $= r(r^2 - l)$; um den Anfangspunct der Coordinaten als Mittelpunct: wie gehörig. Man findet übrigens dasselbe Resultat, wenn man voraussetzt: die Kugel solle sich auf der Linie bewegen, der die Gl: $z = 0$; und: $y^2 + (x \pm r l)^2 = 0$; gehören, wodurch dieselben Punkte dargestellt werden.

Setzt man aber $g = 0$, in der Gl: $x^2 = gy^2$; so wird die Stütze die Ase y werden, und wir erhalten: $\gamma = \pm r$, wie gehörig.

Eben so, wenn man in der Gl (20), $g = k = 0$, setzt; wird man: $\gamma^2 = r^2 - l$, erhalten, wie gehörig.

c) Wenn in der Gl (20), $g = -1$, ist; so gilt sie für einen Kreis vom Halbmesser $= r(k^2 + 4l)$;

Die Gl (22), wird alsdann: $\beta = \frac{1}{2}k$, geben: und da wir alsdann in dieser Gl, das Glied: $\frac{(\beta - \frac{1}{2}k)^2}{1 + g}$, wegen des Quadrates im Zähler immer $= 0$, setzen können; so wird noch: $\gamma^2 = \pm D^2$, seyn. Also wird γ unmöglich, wenn der Halbmesser des Kreises größer als der Halbmesser der Kugel ist. Die Kugel kann nemlich alsdann den Kreis gar nicht weiter berühren, als nur seinen Durchschnitt mit der Ase y . Aber jeder Körper, der ein solches Element berühren soll, kann mit seinem Schwerpunct noch einen Kreis beschreiben; da dies also keine ausgezeichnete Eigenschaft der Kugel ist; so wird man auch nicht erwarten können, daß diese Bewegung durch die Gl (22)

ausgedrückt seyn. Wenn wir daher diese Bewegung nicht in Anschlag bringen; so kann die Kugel sich gar nicht auf einem Kreise bewegen. y wird unbestimmt, wenn $\beta = \frac{1}{2}k$, wie gehörig, weil die Kugel den ganzen kleinern Kreis zugleich berührt. Und man sieht leicht a priori, daß alsdann: $\beta = \frac{1}{2}k$, und $\gamma^2 =$ dem Unterschiede der Quadrate der Halbmesser der Kugel und des Kreises seyn muß, wie es die Gl ergeben.

d) Soll die Stüßlinie der Gl (20), eine Ellipse seyn, deren große Ase auf der Ase y liegt; so muß g verneint, und ein eigentlicher Bruch seyn.

Die Gl (22) giebt alsdann:

- α) wenn r kleiner als die halbe kleine Ase der Stüß-Ellipse ist, — eine Hyperbel, deren Ase in der Ebene x, y liegt,
- β) wenn $r =$ der halben kleinen Ase ist, — zwei gerade Linien,
- γ) und wenn r größer als die halbe kleine Ase ist, — eine Hyperbel, deren Ase senkrecht auf der Ebene x, y steht.

Die Fälle, wo die Kugel sogleich hindurchfällt, wollen wir nachher besonders betrachten.

e) Soll die Gl (20) einer Ellipse gehören, deren kleine Ase auf der Ase y liegt; so muß γ verneint, und ein uneigentlicher Bruch seyn. Die Gl (22); giebt alsdann; so lange r kleiner als die halbe große Ase der Ellipse ist, für γ nur unmögliche Werthe. Wird aber r größer; so beschreibt der Schwerpunkt eine Ellipse, wobey man freilich annehmen muß, daß die nicht berührten Theile der Stüß-Ellipse, (die Berührung von den Scheiteln der großen Ase angerechnet), der Bewegung nicht hinderlich sind. (Cf. §. 5 am Ende).

Die große Ase der vom Schwerpunkt beschriebenen Ellipse wird $= 2D$ seyn, und senkrecht auf x, y stehen: die kleine Ase ist $= 2D \cdot \left(\frac{1-g}{-g} \right)^{\frac{1}{2}}$, wo für g , der absolute Werth zu setzen ist.



f) Soll die Stützhlinie eine Hyperbel seyn, deren Ase auf der Ase y liegt; so ist g bejaht, und: $4gl < k^2$; die Gl (22) giebt alsdann beständig Ellipsen, da: $D^2 > r^2$. Soll die Ase der Stützhyperbel parallel mit der Ase x liegen; so ist g bejaht, und: $4gl > k^2$; wenn alsdann $r >$ halbe Ase der Hyperbel ist; so beschreibt der Schwerpunkt der Kugel wieder Ellipsen, sonst ist γ unmöglich.

g) Soll die Stützhlinie eine Parabel seyn, deren Ase auf y liegt; so ist $g=0$, und k der Parameter. Die Gl (22) giebt alsdann: $\gamma^2 = -k\beta + r^2 - l$; also eine Parabel von demselben Parameter. Die Gl zwischen y und β , giebt für alle Stützpuncte: $\beta - y = \frac{1}{2}k$, = dem halben Parameter. Das Moment der drehenden Kraft ist also unveränderlich.

Wenn wir nun die erhaltenen Resultate zusammenstellen; so findet sich folgende, durch die darin herrschende Reciprocität, merkwürdige Entstehungs-Art der Linien bis zur zweiten Ordnung, durch die Bewegung einer Kugel längs der großen Ase der Stützhlinie, wenn diese von der zweiten Ordnung ist:

Wenn die Unterlage ist:		so beschreibt der Mittelpunkt
ein Punct an jeder Seite von y ,		der sie berührenden Kugel:
ein Kreis; — —		einen Kreis;
		einen Punct an jeder Seite der
		Ebene x, y ;
zwey gerade Linien, } —		eine Ellipse;
oder		
eine Hyperbel;		
eine Ellipse; — —		{ zwey gerade Linien
		oder
		{ eine Hyperbel;
eine Parabel; — —		dieselbe Parabel, aber in entge-
		gegengesetzter Richtung.



Hiezu aber müssen wir folgende Bemerkung machen:

Die Kugel beschreibt bey ihrer Bewegung auf der Linie der Gl (20), meistens nur einen Theil der Linie der Gl (22): und wir müssen vor allen Dingen die Coordinaten der Anfangs- und Endpuncte dieser Linie finden. Diese aber finden sich aus der Lage, welche der Schwerpunct alsdann hat, wenn:

- a) die Kugel anfängt oder aufhört die Durchschnitts-Puncte der Stützhlinie mit der Ase y zu berühren; oder:
- b) wenn die Kugel zwischen der Stützhlinie hinwegfällt.

Wir haben aber daraus, daß wir das $\frac{dy}{dx}$ der Kugel am Berührungspuncte, dem $\frac{dy}{dx}$ der Stützhlinie daselbst gleichsetzen, die Gl:

$$y = \frac{\beta - \frac{1}{2}k}{1 + g}; \text{ gefunden. Sehen wir diesen Werth von } y \text{ in die Gl (20),}$$

$$\text{und alsdann } x = 0; \text{ so finden wir: } \beta = \frac{-k \pm (1 + g) \cdot (k^2 - 4gl)^{\frac{1}{2}}}{2g},$$

und durch Substitution dieses Werthes von β in die Gl (22):

$$\gamma^2 = r^2 - \frac{1}{4}(k^2 - 4gl);$$

welches die Coordinaten des Schwerpuncts der Kugel alsdann sind, wenn die Beschreibung der Linie der Gl (22), bey der Berührung der Kugel am Durchschnittspunct der Linie der Gl (20) mit der Ase y anfängt. γ wird unmöglich, wenn der Halbmesser der Kugel kleiner ist, als der halbe Parameter der Stützhlinie; β ist unmöglich, wenn: $k^2 - 4gl$, verneint ist, welches bey der Hyperbel, deren Ase mit der Ase x parallel geht, der Fall ist, diese hat nemlich gar keinen Durchschnitts-Punct mit der Ase y . Für diesen Durchschnittspunct findet sich auch noch: $\beta - y = \frac{1}{2}(k^2 - 4gl)^{\frac{1}{2}} =$ dem halben Parameter.



Für den Ort, wo die Kugel zwischen der Stüßlinie hindurchfällt, ist $\frac{dy}{d\beta} = \infty$, oder $y = 0$, woraus: $\beta = \frac{-k \pm (1+g)^{\frac{1}{2}} \cdot (k^2 + 4g(r^2 - l))^{\frac{1}{2}}}{2g}$, folgt; so wie: $\beta - y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k^2 + 4g(r^2 - l)}{1+g} \right)^{\frac{1}{2}}$;

Hiernach wird man nun leicht beurtheilen, wie viel der Schwerpunct von der Linie der Gl (22) beschreibt. Soll die Berührung z. B. von einem Durchschnittpuncte der Stüßlinie mit der Ase y , anfangen; so wird der Mittelpunct der Kugel nur dann erst etwas von der Linie der Gl (22) beschreiben, wenn r größer als der halbe Parameter der Stüßlinie am Durchschnittpunct ist: welches damit übereinstimmt, daß r größer als der Halbmesser der Krümmung daselbst seyn muß, wie man auch leicht a priori sieht.

Soll die Kugel an beyden Enden der beschriebenen Linie durchweg fallen; so wird z. B. der Schwerpunct der Kugel, nur Einen Punct der Linie der Gl (22) beschreiben, wenn in dem letzten Werth von β , die Quadrat-Wurzel $= 0$ ist: &c.

Man wird für den elliptischen und hyperbolischen Doppel-Körper leicht ähnliche Betrachtungen anstellen können, als wir hier für die Kugel dargelegt haben. Da es zu weitläufig fallen würde, diese genau durchzugehen; so wollen wir hier nur bemerken, daß man aus der Gl (21), leicht folgende Gl ziehen kann, wodurch man die Natur der Linie, welche der Schwerpunct beschreibt, sogleich wird beurtheilen können:

Der Mittelpunct dieser Linie ist von der Ebene x, z , um die Größe $-\frac{k}{2g}$, entfernt.



Ihre Ase in der Richtung der β , ist $= 2 \left(D^2 \cdot \frac{a+bg}{ag} \right)^{\frac{1}{2}}$;

ihr Parameter ist $= 2b \left(\frac{gD^2}{a(a+bg)} \right)^{\frac{1}{2}}$;

ihre Ase in der Richtung der γ , ist $= 2 \cdot \left(\frac{bD^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}}$

Wenn der eigentliche Doppel = Regel, dessen $X^2 = t^2 x^2$, ist, die Linie der Gl (20) berühren soll; so wird sein Scheitelpunct die Linie beschreiben, deren Gl ist:

$$\gamma^2 = \frac{g t^2 \left(\beta + \frac{k}{2g} \right)^2}{1 - g t^2} - \frac{t^2 (k^2 - 4gl)}{4g};$$

welche sich für die Parabel, wo $g=0$, ist; in: $\gamma^2 = t^2 (\beta \cdot k + l)$; verwandelt.

Wenn die Linie, welcher die Gl: $z=0$, und (20) gehören, durch Drehung um eine der Ase x parallele Ase, in eine andere Lage versetzt wird; so wird man wieder in den gefundenen Gl, statt β , γ , y und z , ihre (schon in Nr. 9. des vorhergehenden §) für diesen Fall angezeigten Werthe setzen: um so die neuen Gl zu finden.

7) Die in der vorhergehenden Nummer betrachteten Fälle, sind unter folgendem allgemeinem Satze enthalten:

Wenn der Doppel = Körper, welcher durch Umdrehung der Linie: $y=X$, um die Ase der x entstanden ist, bey seiner Bewegung beständig die Linie berühren soll, deren Gl: $n \cdot X^2 = g y^2 + k y + l$; ist; so wird sein Schwerpunct eine Linie der zweiten Ordnung beschreiben, deren Gl ist:

$$\gamma^2 = \frac{g \beta^2 + k \beta + \frac{k^2}{4n}}{n - g} + \frac{l}{n}; \quad \dots \dots \dots (23)$$



Denn nach Nr. 2 dieses §, erhält man leicht die Gl: $y = \frac{n\beta + \frac{1}{2}k}{n - g}$, für alle Berührungspuncte; und wenn man diesen Werth von y , in die Gl: $(y - \beta)^2 + \gamma^2 = \frac{gy^2 + ky + l}{n}$; setzt; so erhält man nach einigen Reductionen, die Gl (23).

Setzt man: $k = l = 0$, und: $g = n$, wodurch die Stütze Linie der Erzeugungs - Linie des Körpers gleich wird; so erhält man: $\beta = 0$, und γ wird unbestimmt. Der Doppel - Körper wird nemlich sogleich durchfallen.

Ueberhaupt wird man, wenn man: $n = g$, setzt, haben: $\beta = -\frac{k}{2g}$; und setzt man, um den Werth des Bruches, der $= \frac{0}{0}$ geworden ist, zu finden: $n = g + dg$; so erhält man für denselben den Werth: $= -\frac{k^2}{4g^2}$; daher wird: $\gamma^2 = \frac{l}{g} - \frac{k^2}{4g^2}$; die Ordinate y des Berührungspunctes wird auch unbestimmt, weil der Doppel - Körper die ganze Linie mit einemal berührt. Denn für: $n = g$, wird die Stütze Linie die Gl:

$$X^2 = \left(y + \frac{k}{2g}\right)^2 + \frac{l}{g} - \frac{k^2}{4g^2};$$

bekommen. Und der Durchschnitt des Doppel - Körpers mit der Ebene x, y , hat die Gl: $X^2 = (y - \beta)^2 + \gamma^2$; und ist also mit der gegebenen Stütze Linie identisch, wenn: $\beta = -\frac{k}{2g}$; und: $\gamma^2 = \frac{l}{g} - \frac{k^2}{4g^2}$. Ist nun: $\frac{k^2}{4g} > l$; so ist γ unmöglich, und überhaupt kann sich der Doppel - Körper nicht auf dieser Stütze Linie bewegen, wie wir davon oben ein Beispiel am Kreise und der Kugel hatten.

Noch ist zu bemerken: Wenn der Doppel-Körper der Gl (1), sich auf dem Durchschnitt der beyden cylindrischen Oberflächen bewegen soll, deren Gl: $(y - b)^2 = X^2$; und: $(z - c)^2 = X^2$; so wird sein Schwerpunkt eine gerade horizontale und vertikale Linie beschreiben, deren Gl: $\beta = b$; und: $c = \gamma$; sind. Man kann dies schon daraus schließen, daß die gegebenen Gl, mit der Gl (4) übereinstimmen, wenn man darin $m = \infty$, oder $m = 0$, setzt; aber man erhält die Gl: $\beta = b$, und: $\gamma = c$, auch leicht auf dem gewöhnlichen Wege, durch die Gl (17), wenn man P und $Q = \infty$ setzt, oder wenn man die Gl: $(y - b)^2 = (z - c)^2$, anwendet.

Dies leitet auf die allgemeine Bemerkung: Wenn ein Doppel-Körper sich auf einer Curve bewegen soll, welche der Durchschnitt von zweyen diesem Körper angehörigen Grenzoberflächen ist; so wird sein Schwerpunkt die beyden Curven beschreiben, welche er einzeln in jeder der Grenzoberflächen beschreiben konnte. So wird z. B. der Schwerpunkt des Doppel-Körpers der Gl (1) auf dem Durchschnitt der Oberflächen der Gl: (4) und (10), die gerade Linie: $\gamma = m\beta + n$; und einen Bogen des Kreises: $(\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2 = \rho^2$; beschreiben müssen.

8) Da die Elimination von x, y, z , hier wieder bald beschwerlich wird; so wollen wir wieder ein Verfahren suchen, wodurch wir bey einem gegebenen Stützpunkt, auf einer gegebenen Curve, die dazu gehörige Lage des Schwerpunkts des Doppel-Körpers, und was dem anhängig ist, finden können.

Dazu verhilft uns nun gleichfalls die Gl (17).

Wenn wir in dieser Gl: $P \cdot Q - Q \cdot P, = A$; $Q, - Q = B$;

$P - P, = C$; nennen, und für p und q ihre Werthe: $p = \frac{X \cdot X'}{z - \gamma}$;

$q = \frac{\beta - y}{z - \gamma}$; setzen; so wird sie sich in: $A \cdot (z - \gamma) = B \cdot X \cdot X' + C \cdot (\beta - y)$;



verwandeln, worin bey einem gegebenen Stützpunkte, außer β und γ , alles bekannt ist. Verbinden wir diese Gl, mit der Gl für den Doppel = Körper: $(y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = X^2$; so erhalten wir leicht:

$$\beta - \gamma = \frac{-B \cdot C \cdot X X' \pm A \cdot X \cdot (A^2 - B^2 \cdot X'^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}{A^2 + C^2}; \text{ so wie:}$$

$$z - \gamma = \frac{A \cdot B \cdot X \cdot X' \pm C \cdot X \cdot (A^2 - B^2 \cdot X'^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}{A^2 + C^2};$$

Aus diesen beyden Gl wird β und γ , und durch die Division der ersten durch die zweite, wird auch: $\frac{dy}{d\beta} = \frac{\beta - \gamma}{z - \gamma}$; bekannt; wodurch vermöge der Gl (3) alles übrige, was für den augenblicklichen Zustand des Doppel = Körpers zu wissen nöthig ist, erbeller.

7.

Um die Gl des Doppel = Körpers zu erhalten, dessen Schwerpunct eine gegebene Linie beschreibt, wenn zugleich die Unterlage, worauf sich der Körper bewegen soll, gegeben ist; so wird man aus den gegebenen Bedingungen eine Gl zwischen x und X zu erhalten suchen müssen, um den hieraus gefundenen Werth von X , in die Gl (1) zu substituiren.

1) Wenn daher zwey Gl für eine Linie, worauf sich der Körper bewegen soll, und die Gl für den Weg des Schwerpunctes gegeben sind; so wird man aus diesen dreyen Gl, in Verbindung mit den Gl: (1) und (2), die Größen β , γ , y , z eliminiren, um so eine End = Gleichung zwischen x und X zu erhalten, und beurtheilen zu können, ob X mögliche Werthe erhalten kann.

Wir wollen uns, wie überhaupt, so auch hier, nicht mit weitläufigen Eliminationen beschäftigen; sondern nur den einfachsten Fall als Beispiel betrachten, nemlich:

Die Gl des Körpers zu finden, dessen Schwerpunkt die gerade Linie: $y = m\beta + n$, beschreibt, wenn der Körper sich auf der geraden Linie bewegen soll, deren Gl: $z = gx + k$, und: $y = G \cdot x + K$ sind.

Durch die angezeigten Eliminationen findet man sehr leicht die Gl:

$$X = \frac{g - m \cdot G}{r(1 + m^2)} \cdot \left(\frac{m \cdot K + n - k}{g - m \cdot G} - x \right)$$

Der Körper ist also (nach §. 2) ein gerader Regel, dessen $t = \frac{g - m \cdot G}{r(1 + m^2)}$,

und $h = \frac{m \cdot K + n - k}{g - m \cdot G}$, ist, welches völlig [mit §. 6 Gl (18)] übereinstimmt.

Der Regel und der unter seiner Gl enthaltene Cylinder, für welchen: $g = m G$, ist, ist also der einzige Körper, dessen Schwerpunkt eine gerade Linie beschreibt, wenn die Stützl原因 auch gerade Linien sind. Wenn aber: $G = K = \infty$ ist; so wird: $X = \infty \cdot 0$, weil: $x = \text{const.}$

Wenn aber aus den Gl der Stützl原因, die Gl: $x = \text{const.}$ folgt, d. h. wenn die Stützl原因 in einer der Ebene y, z parallelen Ebene liegt; so findet eine solche Aufgabe, als wir hier aufgelöst haben, eigentlich gar nicht Statt. Wenn wir annehmen, daß aus $x = a$, $X = A$, folge; so haben wir folgende vier Gl: 1) $(y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = A^2$

$$2) \quad y - \beta + (z - \gamma) \frac{dy}{d\beta} = 0$$

3) die gegebene Gl für die Linie des Schwerpunkts, zwischen β und γ .

4) die zweite Gl für die Stützl原因, worin man x durch a ausdrückt, und welche also blos zwischen y und z ist.

Nun kann man in den ersten beiden Gl entweder:



- 1) y und z durch β und γ ausdrücken, und diese Werthe in die vierte Gl substituiren, oder
- 2) β und γ durch y und z ausdrücken, und diese Werthe in die dritte Gl substituiren.

In beyden Fällen müssen die dritte und vierte Gl eine von der andern abgeleitet werden können, und wenn man dies durch Bestimmung der beständigen Größen erhalten kann; so können die also modificirten Gl der Linie des Schwerpuncts und der Stütze Linie neben einander bestehen, sonst nicht. Z. B. wenn die dritte der obigen Gl: $\gamma = m\beta + n$, und die vierte: $z = by + c$, ist: so erhält man durch Substitution der aus den beyden ersten Gl gezogenen Werthe von y und z , die Gl: $\gamma = b\beta + c + A \cdot \frac{(1 + mb)}{r(1 + m^2)}$. In diesem

Fall muß also $b = m$, $A = \frac{n - c}{r(1 + m^2)}$ seyn, wenn die beyden gegebenen Linien mit einander bestehen sollen, der Doppel - Körper sey übrigens welcher er wolle. Aus dem §. 5. 2 ist übrigens schon bekannt, daß diese Bedingungen Gleichungen darauf hinausgehen, daß $\frac{dy}{d\beta}$ am Schwerpuncte $= \frac{dz}{dy}$ der Stütze Linie am Stützpuncte seyn müsse: und die zweite Gl bestimmt den Abstand der Stütze Linie von der parallelen Linie des Schwerpuncts.

2) Es ist die Gl einer Oberfläche gegeben, welche der Doppel - Körper beständig berühren, und wobey der Schwerpunct eine gegebene Linie beschreiben soll: und hieraus soll die Gl für den Doppel - Körper, oder eine Gl zwischen X und x gefunden werden.

Für diesen Fall haben wir folgende sechs Gl: nemlich die Gl für die zu berührende Oberfläche, die Gl: $\gamma = f(\beta)$; die Gl: (1) und (2), nebst: $p = P$; und: $q = Q$; (cf. §. 5); aus welchen man die Größen: $\beta, \gamma, y, z, X,$

(welche letztere in p enthalten ist), eliminiren muß, um die Gl zwischen X und x zu erhalten.

Satz der Gl: (1), (2), $p = P$, $q = Q$, kann man die (in §. 5. 3) aus ihnen gefolgerten, nemlich die drey in der angeführten Nummer zuletzt angegebenen Gl, nebst der Gl: $Q = \frac{dy}{d\beta}$, anwenden. Wenn man alsdann aus der Gl (12) daselbst, und der Gl für die zu berührende Oberfläche, die Größen: y und z , ohne Zuthun der andern Gl wegschaffen kann; so werden wir für die eine der Oberflächen, worin die Berührungs-Linie liegen soll, eine Gl zwischen X' und x haben, woraus: $x = \text{const.}$ folgt, wie auch X' aus x zusammengesetzt sey. Alsdann finden aber die Bemerkungen der vorhergehenden Nummer statt.

Diese Eliminirung von y und z geht aber immer von statten, wenn die gegebene Oberfläche blos Eine dieser beyden Größen enthält; denn alsdann wird in P und Q auch nur diese Eine von den beyden Größen enthalten seyn. Eben so, wenn die gegebene Gl folgende wäre: $(y-b)^2 + (z-c)^2 = \varphi(x)^2$; woraus man: $\frac{P^2}{1+Q^2} = \varphi'(x)^2$; erhält: wo alsdann aus: $X' = \pm \varphi'(x)$, wieder: $x = \text{const.}$ folgt, und die Zusammensetzung von X aus x , unbestimmt bleibt. So auch, wenn die gegebene Oberfläche die Gl: $z = my + \varphi(x)$; hätte.

Mit diesen Bemerkungen wollen wir uns hier begnügen, da die Eliminationen selbst, bald sehr weitläufig werden, und übrigens anscheinend keine Schwierigkeiten enthalten.

8.

Wir kommen jetzt zur Auflösung derjenigen Aufgabe, wo wir aus



einer gegebenen Gl zwischen $\frac{dy}{d\beta}$, und x, y, z , und deren Differenzialien, die sich auf den jedesmaligen Stützpunkt beziehen, bey einem gegebenen Doppel-Körper, sowohl die Unterlagen, als den Weg des Schwerpunkts, bey welchen jene Relation Statt finden kann, bestimmen wollen.

1) Wir haben (in §. 5. 3) gefunden, daß in allen Punkten, worin der Doppel-Körper eine Oberfläche berührt, folgende Gl statt findet:

$$X' = \frac{P}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Soll diese Oberfläche nun nach und nach in allen ihren Punkten von dem Doppel-Körper berührt werden; so wird diese Gl in der ganzen Ausdehnung der Oberfläche statt finden, und wird also die charakteristische partielle Differenzial-Gleichung dieser Art Oberflächen seyn, durch deren Integration wir daher die allgemeine Gl der Grenzoberflächen erhalten.

2) Ferner, die Gl: $dz = p \cdot dx + q \cdot dy$; welche für die ganze Oberfläche des Doppel-Körpers gilt, wird für alle Punkte, worin derselbe eine gegebene Oberfläche auf seinem Wege berührt, mit der Gl:
 $dz = P \cdot dx + Q \cdot dy$; identisch seyn.

Setzen wir nun in dieser Gl, statt P , seinen Werth: $= X' \cdot (1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}$, und alsdann statt Q , seinen Werth: $= q, = \frac{dy}{d\beta}$, welche Werthe auch in allen Berührungs-Punkten statt haben; so erhalten wir die Gl:

$$(24) \dots \dots \dots dz = X' \cdot \left(1 + \frac{dy^2}{d\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot dx + \frac{dy}{d\beta} \cdot dy;$$

welche ebenfalls für alle Berührungs-Punkte gilt.

Setzen wir nun in dieser Gl, statt $\frac{dy}{d\beta}$, seinen aus der gegebenen

Relation gezogenen Werth in x, y, z oder deren Differenzialien; so haben wir eine totale Differenzial-Gleichung, welche für alle Punkte einer Oberfläche gilt, welche der Doppel-Körper auf seinem Wege berührt. Leistet diese Differenzial-Gleichung nun den Bedingungen-Gleichungen der Integrabilität ein Genüge, so daß sie von einer primitiven Gl zwischen x, y und z , abstammen kann; so wird ihr Integral gleichfalls die Grenzoberfläche darstellen, welche der Doppel-Körper in allen ihren Punkten berührt, wenn die gegebene Relation statt findet. Leistet hingegen die Gl (24), den Bedingungen der Integrabilität kein Genüge, und gehört sie also zu denen, welche man sonst absurde nannte; so wird ihr Integral durch zwey Gl zwischen x, y und z , worin auch willkürliche Functionen dieser Größen vorkommen, ausgedrückt werden. (Cf. Lacroix l. c. Tom. II. §. 799. seqq.) Die Unterlagen des Doppel-Körpers, werden alsdann aus der Klasse der unter diesen beyden Gl enthaltenen Curven genommen werden müssen, wenn die gegebene Gl statt finden soll. Hiebey wird man denn, um die willkürliche Function zu bestimmen, auch noch andere Bedingungen erfüllen können: z. B. wenn die gegebene Gl blos x, y und z , ohne ihre Differenzialien enthält; so erhellet (aus Lacroix l. c. Tom. II. §. 800), daß man die Gl einer Oberfläche, worauf die Stüßlinie liegen soll, willkürlich bestimmen kann, woben man aber zur Bestimmung der zuerst erhaltenen willkürlichen Function, noch einmal eine Gl zwischen zweyen veränderlichen Größen integriren mußte.

3) Wenn die gegebene Gl, keine Differenzialien von x, y, z , enthält; so wird die Bedingungen-Gleichung der Integrabilität der Gl (24), (nach Lacroix l. c. Tom. II. §. 701), wenn wir wieder Q , statt $\frac{dy}{d\beta}$ schreiben, folgende seyn:



$$(25) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ}{dx} + X' \cdot \left(\frac{d(1+Q^2)^{\frac{1}{2}}}{dy} + Q \cdot \frac{d(1+Q^2)^{\frac{1}{2}}}{dz} - (1+Q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dQ}{dz} \right) = 0; \text{ oder:} \\ \frac{dQ}{dx} + X' \cdot \frac{\left(Q \cdot \frac{dQ}{dy} - \frac{dQ}{dz} \right)}{(1+Q^2)^{\frac{1}{2}}} = 0. \end{array} \right.$$

Und man sieht leicht, daß diese Gl gleichfalls eine partielle Differenzial-Gleichung von Q , als Function von x, y und z betrachtet, ist, durch deren Integration wir alle Q erhalten werden, welche, wenn sie statt $\frac{dy}{d\beta}$ in die Gl (24) gesetzt werden, diese integrabel machen, so daß ihr Integral die Grenzoberfläche darstellt.

Wenn aber $\frac{dy}{d\beta}$ zugleich von den Differenzialien der Größen x, y und z abhängt; so werden andere und andere Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität der Gl (24) statt finden, (cf. Lacroix l. c. Tom. II. §. 709 und §. 715.), welche wir hier aber nicht weiter verfolgen wollen.

Wir wollen uns jetzt mit der Integration der gefundenen Differenzial-Gleichungen beschäftigen.

4) Um nun erstlich die partielle Differenzial-Gleichung: $X' = \frac{P}{(1+Q^2)^{\frac{1}{2}}}$;

zu integrieren; so kann man die Methode anwenden, welche Lacroix (l. c. Tom. II. §. 730) erklärt. Die dritte der dort mit (2) bezeichneten Gl wird für unsern Fall geben: $dQ = 0$; also: $Q = \text{const.} = a$. Wenn man diesen, und den daraus folgenden Werth von P , in die Gl: $dz = P \cdot dx + Q \cdot dy$; substituirt, und integrirt; so erhält man: $z = X \cdot (1+a^2)^{\frac{1}{2}} + ay + b$.



Setzt man: $b = \varphi(a)$, und: $\frac{db}{da} = \varphi'(a)$; so erhält man für die Oberfläche, welche der Doppel-Körper nach und nach in allen Punkten berührt, folgendes System von Gl:

$$\left. \begin{aligned} X \cdot (1 + a^2)^{\frac{1}{2}} - z + ay + \varphi(a) &= 0; \\ \frac{a \cdot X}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}} + y + \varphi'(a) &= 0; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

aus welchen man, nachdem man die willkürliche Function bestimmt hat, a eliminiren muß, um die Gl der gesuchten Oberfläche zu erhalten.

Daß die Gl (26), ganz mit den Gl: (1), (2), (3), übereinstimmen, erhellet so: Es ist: $a = Q = \frac{dy}{d\beta}$; setzt man: $\varphi(a) = -\beta \cdot \frac{dy}{d\beta} + \gamma$; in welcher Gl man β und γ als Functionen von $\frac{dy}{d\beta}$ ansehen muß; so ist:

$$\varphi'(a) = -\beta - \frac{d\beta \cdot \frac{dy}{d\beta}}{d \frac{dy}{d\beta}} + \frac{d\gamma}{d \frac{dy}{d\beta}} = -\beta; \text{ zieht man nun die zweite}$$

der Gl (26), nachdem man sie mit a multiplicirt hat, von der ersten ab; so erhält man sogleich: $\gamma - z = \frac{+X}{\left(1 + \frac{dy^2}{d\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$; und die zweite

der Gl (26), giebt: $\beta - y = \frac{X \cdot \frac{dy}{d\beta}}{\left(1 + \frac{dy^2}{d\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$, welches mit den Gl (3)



übereinstimmt. Die willkürliche Function: $\varphi(a)$, vertritt übrigens in den Gl (26), die Stelle der Gl: $y = f(\beta)$, in den Gl (1) und (2).

5) Setzen wir in der ersten der Gl (26), $a = \text{const.} = m$, also auch: $\varphi(a) = \text{const.} = n$; so wird die zweite dieser Gl (26), welche durch Differenzirung der ersten nach a entsteht, gar nicht zum Vorschein kommen, und die erste Gl, welche alsdann giebt: $my - z + n = \pm (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} \cdot X$; wird allein die gesuchte Oberfläche darstellen, wie wir dies auch schon (in §. 4) gefunden haben.

Setzen wir in den Gl (26), $\varphi(a) = l(1 + a^2)^{\frac{1}{2}} - m \cdot a + n$; also:

$$\varphi'(a) = \frac{la}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}} - m; \text{ so erhalten wir: } a = \frac{m - y}{z - n}; \text{ und daher:}$$

$(y - m)^2 + (z - n)^2 = (X \pm l)^2$ für die Gl der Grenzoberfläche. Wenn man mit einer solchen Gl, die Gl: $X = 0$, verbindet; so erhält man die Gl der Linie, welche der Scheitelpunct des Doppel-Körpers beschreibt. Diese Linie ist aber ganz dieselbe mit der Linie des Schwerpunctes: und aus der Gl (1) erhellet auch, daß man für: $X = 0$, auch: $y = \beta$, und: $z = \gamma$; hat. Substituirt man daher diese Werthe, in die gefundene Gl; so erhalten wir für den Weg des Schwerpunctes die Gl: $(\beta - m)^2 + (\gamma - n)^2 = l^2$; welches ganz mit dem übereinstimmt, was wir schon (im §. 4) gefunden haben.

Gegentheils aber darf man eine gegebene Gl zwischen X, y, z , nicht als die Gl einer Grenzoberfläche ansehen, wenn nicht die Bedingungs-Gleichung: $P = X' \cdot (1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}$; bey ihr statt findet.

6) Die Bedingungs-Gleichung der Integrabilität (25), läßt sich selbst integriren, (nach Lacroix l. c. Tom. II. §. 725). Denn die eine der dazu erforderlichen totalen Differenzial-Gleichungen giebt: $dQ = 0$. Daher kann man Q in den andern Gl als eine beständige Größe betrachten, wodurch man folgendes Integral erhält:

$$Q = \varphi \left[\left(y \pm \frac{X \cdot Q}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}} \right), \left(z \pm \frac{X}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

welches (nach §. 5. 3) mit $\frac{dy}{d\beta} = \varphi(\beta, \gamma)$ übereinstimmt. Findet man aus dieser Gl einen Werth von Q , und setzt ihn anstatt $\frac{dy}{d\beta}$ in die Gl (24); so wird diese die Bedingung der Integrabilität erfüllen.

Wenn Q bloß eine Function von y und z ist, und man also $\frac{dQ}{dx} = 0$ hat; so muß in der Bedingungs - Gleichung (25)

a) entweder $X' = 0$, also $X = \text{const.}$ seyn, welches unter allen Doppel-Körpern einzig beim Cylinder der Fall ist. Wirklich wird alsdann die Gl (24) auch kein x enthalten, und ihr Integral also eine cylindrische (im weitern Sinne), auf die Ebene y, z senkrechte Oberfläche darstellen, welche der eigentliche Cylinder allemal in allen Punkten berühren kann.

b) Oder es muß: $Q \cdot \frac{dQ}{dy} - \frac{dQ}{dz} = 0$ seyn. Aus dieser Gl erhält man durch Integriren, nach der Methode, welche Lacroix (l. c. Tom. II. §. 724. Nro. 3) erklärt: $Q = \varphi(y + z \cdot Q)$; so ist z. B. unter dieser Form die Gl: $m + n \cdot Q = y + z \cdot Q$ enthalten, woraus $Q = \frac{y - m}{n - z}$ folgt. Setzt man diesen Werth anstatt $\frac{dy}{d\beta}$ in die Gl (24), und integrirt sie alsdann nach der gewöhnlichen Methode, (cf. Lacroix l. c. Tom. II. §. 703); so erhält man das Integral:

$$(y - m)^2 + (z - n)^2 = (\text{const.} - X)^2$$

welches ganz mit dem übereinstimmt, was wir kurz zuvor schon gefunden haben.



Wenn Q bloss eine Function von x und y ist; so wird die Bedingungs-

Gleichung sich in: $\frac{dQ}{dx} + \frac{X' \cdot Q \cdot \frac{dQ}{dy}}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$ verwandeln, woraus man

durch Integriren erhält: $Q = \varphi \left(y \mp \frac{X \cdot Q}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$

unter dieser Form ist $m + nQ = y \mp \frac{X \cdot Q}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}}$ enthalten. Setzt man

$n = 0$; so kommt $Q = \frac{m - y}{(X^2 - (m - y)^2)^{\frac{1}{2}}}$, welcher Werth, wenn er

anstatt $\frac{dy}{d\beta}$ in die Gl (24) gesetzt wird, diese integrabel macht. Das Inte-

gral ist: $(y - m)^2 + (z - \text{const.})^2 = X^2$,

welches nichts anders als die Gl für den Doppel-Körper ist, wenn die Coordinaten seines Schwerpunkts, m und const. sind. Es wird also gar keine Bewegung in diesem Falle statt finden, wie man auch sogleich sieht, wenn man $X = 0$, $y = \beta$ und $z = \gamma$ setzt.

Wenn Q bloss eine Function von x und z ist; so wird die Bedingungs-

Gleichung: $\frac{dQ}{dx} - \frac{X' \cdot \frac{dQ}{dz}}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$ geben, woraus das Integral:

$Q = \varphi \left(z \pm \frac{X}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$ folgt.

Wenn die Bedingungs-Gleichung statt finden soll; so kann Q nicht allein von x abhängen: und von y oder z allein, nur alsdann, wenn $X = 0$ ist, also nur alsdann, wenn der Doppel-Körper ein Cylinder ist.

Ist aber $Q = \frac{dy}{d\beta} = \text{const.} = m$; so giebt die Gl (24) sogleich das Integral: $z = \pm X \cdot (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} + my + \text{const.}$, wie wir dies auch schon (in §. 4) gefunden haben.

7) Wenn man in der Gl (24), Q anstatt $\frac{dy}{d\beta}$, und dX anstatt $X' \cdot dx$ setzt; so wird sie: $dz = -dX \cdot (1 + Q^2)^{\frac{1}{2}} + Q \cdot dy$;
Differenziirt man diese so, daß man blos Q als veränderlich ansieht; so kommt:

$$0 = -\frac{dX \cdot Q}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}} + dy;$$

Eliminirt man Q aus dieser und der vorhergehenden Gl; so erhält man nach einigen Reductionen: $dz^2 = dX^2 - dy^2$

Diese Gl ist der von Lacroix (l. c. Tom. II. §. 806) mit $W = 0$ bezeichneten Gl analog, wenn wir $P = \pm X' \cdot (1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}$ gleich der von ihm mit $V = 0$ bezeichneten Gl setzen.

Vergleicht man nun das, was Lacroix (l. c. Tom. II. §. 802, 806, 810) über diese Gl sagt; so erhalten wir folgende Integrale der Gl: $dz^2 = dX^2 - dy^2$; nemlich das vollständige Integral derselben mit drey beständigen Größen ist in folgenden beyden Gl enthalten:

$$c - z = \frac{X}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ und: } \frac{y - b}{c - z} = a$$

welche ganz mit den Gl (3) übereinstimmen, und man wird durch Differenziren, und Eliminiren von a , sogleich die vorgegebene Differenzial-Gleichung wieder finden.

Wenn wir aber die beyden Gl (26) mit $U = 0$, $\frac{dU}{da} = 0$ bezeichnen; so wird das allgemeine Integral der Gl: $dz^2 = dX^2 - dy^2$



in dem System der Gl: $U = 0; \frac{dU}{da} = 0; \frac{d^2 U}{da^2} = 0$

enthalten seyn, woraus man a , nachdem die willkürliche Function bestimmt worden ist, eliminiren muß. In dieser Form wird das Integral die Gl der Linie darstellen, welche die Durchschnitte aller charakteristischen Curven enthält, und diese zugleich berührt. Z. B. bey der früher angenommenen Form von

$$\varphi(a) = \pm l \cdot (1 + a^2)^{\frac{1}{2}} - m \cdot a + n, \text{ wird } \frac{d^2 U}{da^2} = 0, \text{ gleich } \frac{X \pm l}{(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

welches mit $(y - m)^2 + (z - n)^2 = (X \pm l)^2$ verbunden, $X = \pm l; y = m; z = n$; und also einen Punct für die gesuchte Linie giebt, wenn anders aus der Gl $X = \pm l$, mögliche Werthe für x folgen. Dies ist z. B. bey der ganzen Kugel, deren $X^2 = r^2 - x^2$, nur dann der Fall, wenn $r > l$ ist. Die Resultate dieser Beispiele, welche vom Kreise und der Kugel hergenommen sind, konnte man übrigens mit einiger Aufmerksamkeit leicht vorhersehen.

8) Ehe wir diesen §. schließen, wollen wir noch bemerken: daß die aus der Bedingungs = Gleichung der Integrabilität (25) gezogenen Integrale, alle unter der Form enthalten sind, welche man dem von la Place erweiterten la Grangeschen Umkehrungssatz der Reihen zu geben pflegt. (Cf. Lacroix l. c. Tom. I. Chap. 2. §. 112). (Das erste Integral, welches unter der Voraussetzung erhalten ist, daß Q zugleich von x, y, z abhängt, ist wenigstens alsdann unter dieser Form enthalten, wenn die beiden Größen unter dem Functionszeichen abgesondert neben einander bestehen.) Man kann daher den zur Integration der Gl (24) erforderlichen Werth von Q durch eine unendliche Reihe ausdrücken. So folget aus $Q = \varphi(y + z \cdot Q);$

$$\psi(Q) = \psi(y) + y \cdot \psi'(y) \cdot \varphi'(y) \cdot \frac{z}{1} + \frac{d \cdot (y^2 \cdot \psi'(y) \cdot \varphi'(y))}{dy} \cdot \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \&c.$$



und wenn $\psi(Q) = Q$, und $\varphi(y + z \cdot Q) = \frac{y - m + z \cdot Q}{n}$, ist;

so wird $Q = \left(\frac{y - m}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \&c.\right) = \frac{y - m}{n - z}$, wie gehörig.

Aus $Q = \varphi\left(y + \frac{X \cdot Q}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$, folgt:

$$\psi(Q) = \psi(y) + \frac{y}{(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \psi'(y) \cdot \varphi'(y) \cdot \frac{X}{1} + \frac{d\left[\left(\frac{y^2}{1 + y^2}\right) \cdot \psi'(y) \cdot \varphi'(y)\right]}{dy} \cdot \frac{X^2}{1.2} + \&c.$$

und aus $Q = \varphi\left(z + \frac{X}{(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$ folgt:

$$\psi(Q) = \psi(z) + \frac{1}{(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \psi'(z) \cdot \varphi'(z) \cdot \frac{X}{1} + \frac{d\left[\left(\frac{1}{1 + z^2}\right) \cdot \psi'(z) \cdot \varphi'(z)\right]}{dz} \cdot \frac{X^2}{1.2} + \&c.$$

Bei der Integrirung der Gl (24) wird man aber von diesen Werthen von Q und $(1 + Q^2)^{\frac{1}{2}}$ nur alsdann Gebrauch machen können, wenn man die unendliche Reihe in einen begränzten analytischen Ausdruck umwandeln kann, wie wir oben gesehen haben.

9.

Wir wollen jetzt die Gl der Curve finden, welche auf der Oberfläche eines auf seinen Unterlagen rollenden Doppelkörpers, von den Berührungspuncten gebildet wird; um daraus auch die Anzahl der Umdrehungen zu erkennen, welche dieser rollende Körper machen muß.

1) Der Durchschnitt des Doppelkörpers mit einer Ebene, welche in der Entfernung $= x$, der Ebene y, z parallel liegt, giebt bekanntlich einen



Kreis, dessen Halbmesser $= X$, ist. Wenn wir nun die Länge eines willkürlichen Bogens eines solchen Kreises, dessen $X = 1$ ist, mit u bezeichnen; so wird der Kreisbogen, dessen Halbmesser $= X$ ist, und der von ebendenselben auf der Oberfläche des Doppel = Körpers gezogenen Erzeugungs = Curven desselben begrenzt wird, welche den Bogen u begrenzen, die Länge $= X \cdot u$, haben.

Das Differenzial eines solchen Bogens ist $= X \cdot du$, da X für ihn unveränderlich ist.

Das Differenzial der Länge der Erzeugungs = Curve des Doppel = Körpers, deren Gl: $y = X$, ist, wird seyn: $dx \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}}$.

Das Differenzial der Länge irgend einer auf der Oberfläche des Doppel = Körpers gezogenen Curve, wird nun durch: $ds = (X^2 \cdot du^2 + (1 + X'^2) \cdot dx^2)^{\frac{1}{2}}$, ausgedrückt werden können, wenn wir u und x und X , als Coordinaten dieser Curve ansehen. Denn die beyden Differenziale, woraus ds zusammengesetzt ist, stehen auf der Oberfläche des Doppel = Körpers, auf einander senkrecht.

2) Nun berührt der Doppel = Körper bey seiner Bewegung, entweder eine Curve oder eine Oberfläche; im letztern Falle wird man die zweite Gl der Berührungs = Curve, aus der Gl (12) haben.

Wenn nun die Tangente dieser Curve an dem jedesmaligen Berührungspunct, mit der Ebene y, z den Winkel $= \tau$, macht; so wird das Differenzial der Länge dieser Curve, $= dx \cdot \text{cosecans } \tau$, $= dx \cdot \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$; seyn. Hat man nun aus den beyden Gl für die Berührungs = Curve, zwey andere von folgender Form gezogen: $y = \varphi(x)$; $z = \psi(x)$; wo y und z einkörmige Functionen von x seyn müssen, und bezeichnet man $\frac{d \cdot \varphi(x)}{dx}$ mit



$\varphi'(x)$, und eben so auch ψ ; so wird das Differenzial der Curve seyn: $dx \cdot (1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2)^{\frac{1}{2}}$. Und dies Differenzial muß bey der vorausgesetzten rollenden Bewegung des Doppel-Körpers, gleich seyn: dem vorhin gefundenen Differenzial auf der Oberfläche des Doppel-Körpers. Dies giebt die Gl:

$$(27) \dots du = dx \cdot \frac{(\varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2 - X'^2)^{\frac{1}{2}}}{X} = dx \cdot \frac{(\cotg^2 \tau - X'^2)^{\frac{1}{2}}}{X};$$

deren Integral die Gl der verlangten Curve ist. Wenn man darin den Werth von u , mit $2\pi = 2 \cdot (3,14\dots)$, dividirt; so hat man die Anzahl der Umdrehungen, welche der Doppel-Körper zwischen zwey angenommenen Werthen von x , als dem ersten und letzten Berührungs-Punct angehörend, gemacht hat.

3) Wenn der Doppel-Körper bey seiner Bewegung die gerade Linie berühren soll, deren Gl sind: $y = Gx + K$; und: $z = gx + k$; so ist: $\cotg^2 \tau = G^2 + g^2$.

Wenn der Doppel-Kegel, dessen $X = t(h - x)$, ist, sich auf dieser Linie bewegen soll; so erhalten wir aus der Gl (27), folgende: $du = dx \cdot \frac{(G^2 + g^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}{t \cdot (h - x)}$; deren Integral ist: $u = \frac{(G^2 + g^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}{t} \cdot \log. \text{nat.} \frac{h}{(h - x)}$; wenn x und u zugleich anfangen sollen.

Diese Gl gilt von $x = 0$, bis an den Scheitel des Kegels, wo: $x = h$, und: $u = \infty$, wird. Für die Verlängerung des Doppel-Kegels jenseits der Scheitel, wird man eine andere Constante nehmen, und alsdann:

$$u = \frac{(G^2 + g^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}{t} \cdot \log. \text{nat.} \frac{k}{x - h}; \text{ finden.}$$



Hier ist k die willkürliche Constante: die Bewegung wird von dem Berührungspunct an gerechnet, dessen $x = h + k$, ist, und geht einerseits, bis $x = h$, und anderer Seits bis $x = +\infty$, ist.

Wenn x blos verneinte Werthe haben soll; so ist, für den mit seinen kleinern Grundflächen zusammengefügtten Doppelregel, das u des ersten Integrals verneint, und stimmt mit dem zweiten Integrale, wenn $k = h$, von $x = 2h$ bis $x = +\infty$, überein, wie natürlich auch seyn muß. Denn der größere Zwischenraum zwischen den Stützpunkten kann keinen Unterschied in der Bewegung machen.

Für den Cylinder, wo: $t = 0$, $h = \infty$, und: $th = r$, ist; wird:
 $\log. \text{ nat. } \frac{h}{h-x} = \text{l. n. } \left(1 + \frac{x}{h}\right) = \frac{x}{h} = \frac{tx}{r}$; daher $u = (G^2 + g^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x}{r}$,
 wie auch leicht aus einer geometrischen Betrachtung erhellet.

4) Wenn die Kugel, deren $X^2 = r^2 - x^2$, ist, die gerade Linie der vorhergehenden Nummer bey ihrer Bewegung berühren soll; so erhalten wir aus der Gl (27), die folgende: $du = \frac{dx \cdot (r^2 \cdot \text{cofin}^2 \tau - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\text{fin } \tau \cdot (r^2 - x^2)}$; aus welcher man durch Integriren, (nach Lacroix l. c. Tom. II. §. 377 und §. 370),

wenn man: $z^2 = \frac{\text{cofin } \tau - \frac{x}{r}}{\text{cofin } \tau + \frac{x}{r}}$, setzt, erhält:

$$u = \frac{1}{\text{tg } \tau} \cdot \text{arc} \left(\text{tg} = \frac{-\text{tg } \tau \cdot (1-z)^2}{2z + \text{tg}^2 \tau (1+z^2)} \right) + \frac{1}{\text{fin } \tau} \cdot \text{arc} \left(\text{tg} = \frac{2z(1-z^2)(1+\text{fin } \tau)}{4z^2 - (1-z^2)^2 \cdot \text{fin } \tau} \right);$$

in welcher Gl, u und x zugleich $= 0$ sind, wo alsdann: $z = 1$, ist. Das Integral geht, bis: $x = r \cdot \text{cofin } \tau$ wird, wodurch: $z = 0$, und:



$u = \frac{1}{\operatorname{tg} \tau} \cdot (\frac{1}{2}\pi + \tau)$ wird, wornach die Kugel durchwegfällt. Für größere x , wird z unmöglich. Da u blos eine Function von τ und $\frac{x}{r}$ ist; so werden alle Kugeln, die sich auf der gegebenen Linie bewegen, gleich viel Umdrehungen machen, wenn der erste und letzte Werth von $\frac{x}{r}$ bey allen derselbe ist.

Aus der Gl: $u = \frac{1}{\operatorname{tg} \tau} \cdot (\frac{1}{2}\pi + \tau)$, folgt noch: Wenn $\tau = \frac{1}{4}\pi$, also: $\operatorname{tg} \tau = 1$, ist; so macht jede Kugel, die sich auf dieser Linie, von ihrem Durchschnits-Punct mit der Ebene y, z an gerechnet, (d. h. aber: von da an, wo die Kugel diese Linie an diesem Durchschnits-Punct berührt; nicht, wenn ihr Mittelpunkt senkrecht über diesen Punct steht), bewegt, $\frac{3}{8}$ einer ganzen Ummwälzung, ehe sie durchwegfällt. Denn um die Zahl der Ummwälzungen zu erhalten, muß man u mit 2π dividiren. Soll die Kugel eine ganze Ummwälzung machen, ehe sie durchwegfällt; so muß: $u = 2\pi$, also: $\operatorname{tg} \tau - \frac{\tau}{2\pi} = \frac{1}{4}$, seyn; welches für τ ungefähr: $16^\circ 52'$ giebt. Soll die Kugel zwey Ummwälzungen machen; so wird: $\operatorname{tg} \tau - \frac{\tau}{4\pi} = \frac{1}{8}$, also: τ ungefähr: $7^\circ 43'$ &c.

5) Wenn der Regel, bey welchem: $X = t(h - x)$, die Parabel, deren Gl: $x^2 = ky$, ist, bey seiner Bewegung berühren soll; so erhalten wir aus der Gl (27), folgende: $du = 2 \cdot \frac{(x^2 - \frac{1}{4}k^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}{kt \cdot (h - x)} \cdot dx$; woraus man, wenn man: $z = x \pm (x^2 - \frac{1}{4}k^2 t^2)^{\frac{1}{2}}$; setzt, erhält:



$$\begin{aligned} \mp k t u = \text{const.} + \frac{(z^2 - \frac{1}{4} k^2 t^4)}{z} + 2h \cdot \log. \text{ nat. } z \\ - 2(h^2 - \frac{1}{4} k^2 t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \log. \text{ nat. } \frac{z - h + (h^2 - \frac{1}{4} k^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}{z - h - (h^2 - \frac{1}{4} k^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}; \end{aligned}$$

Wenn aber: $h^2 < \frac{1}{4} k^2 t^2$; so kommt statt des letzten Gliedes, folgendes:

$$- 4(\frac{1}{4} k^2 t^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{arc.} \left(\text{tg} = \frac{z - h}{(\frac{1}{4} k^2 t^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}} \right); \text{ in die Integral-Gl.}$$

Die Differenzial-Gleichung, (welche für den Cylinder: $du = \frac{2x dx}{kr}$,

also: $ru = \frac{x^2}{k}$, giebt, wie gehörig), wird für den Regel zuerst mögliche

Werthe geben, wenn: $x = \frac{1}{2} kt$, ist. Alsdann ist auch: $z = \frac{1}{2} kt$. Dadurch wird aber die Zahl, wovon im letzten Gliede der Integral-Gleichung der Logarithme genommen werden soll, verneint, und bleibt verneint, bis: $x = h$ ist, wodurch diese Zahl entweder $= 0$, oder $= \infty$ wird, je nachdem man das untere oder obere Zeichen von z gebraucht. Hiernach scheint es, daß die Bewegung des Doppel-Regels auf der Parabel nicht eher möglich sey, als wenn $x > h$ ist, wenn x sich auf den Berührungspunct bezieht. Daß dieser Schluß aber unrichtig sey, erhellet aus dem was Lacroix (l. c. Tom. II. §. 494. und §. 518) über diesen Fall sagt: wozu sich vielleicht an einem bequemen Orte noch stärkere Gründe hinzufügen lassen. Man wird den Logarithmen der gedachten verneinten Zahl nehmen, als wenn sie bejaht wäre.

6) Wir wollen jetzt, statt einzelne Beispiele zu häufen, noch einige allgemeinere Fälle betrachten, wodurch die Integrirung der Gl (27) vereinfacht wird.

Wenn in dieser Gl, eine der beyden Größen, $\varphi'(x)^2$ oder $\psi'(x)^2$, z. B. die erste, $= X'^2$ ist; so wird: $du = \pm \frac{\psi'(x)}{X} \cdot dx$.



Wäre auch $\psi'(x) = n \cdot X'$; so erhält man allgemein:

$$u = \text{const.} \pm n \cdot \log. \text{ nat. } X;$$

Durch diese Annahmen wird man aber für die Stüßlinie folgende zwey Gl erhalten:

$$y = \pm X + a; \quad \text{und: } z = nX + b;$$

woraus noch: $y - a = \pm \frac{z - b}{n}$; folgt, daß also alsdann die Stüßlinie in einer Ebene liegt, welche mit der Ase x parallel geht.

Die Gl: $y = \pm X + a$, gehört der Grenzoberfläche, wenn der Doppel-Körper mit seinem Schwerpunct eine gerade vertikale Linie beschreibt. (Cf. §. 4. 3). Und wenn man in der Gl: $z = nX + b$, $n = \pm 1$ setzt; so wird sie gleichfalls der Grenzoberfläche gehören, wenn der Doppel-Körper eine gerade horizontale Linie mit seinem Schwerpunct beschreibt. So z. B. wenn X der Kugel angehört, und $= r(r^2 - x^2)$ ist; so werden die beyden Grenzoberflächen eigentliche Cylinder, deren Durchschnitt die Stüßlinie ist. Diese ist also eine Ellipse, deren große Ase in der Ebene y, z liegt, mit y einen Winkel von 45° macht, und $= r \cdot r^2$ ist. Die kleine Ase dieser Ellipse ist parallel mit x , und $= r$. Und wir finden leicht (aus §. 6. 5), daß der Mittelpunct der Kugel, welche sich auf dieser Ellipse bewegt, eine horizontale und eine vertikale gerade Linie beschreibt.

In allen solchen Fällen also, findet man die angegebene Gl für u , wie wir dies auch schon am Regel (in Nr. 3 dieses §.) gesehen haben, wenn wir dort: $G = g = t$, setzen.

Wenn in der Gl (27), $\varphi'(x)^2 = X'^2$, und $\psi'(x)^2 = X^2$; so ist: $u = \text{const.} \pm x$. Z. B. wenn die Kugel, deren $X = r(r^2 - x^2)$, sich auf der Linie bewegen soll, deren Gl sind: $(y - b)^2 = r^2 - x^2$; und:

$$z - c = \frac{x}{2r} \cdot r(r^2 - x^2) - \frac{1}{2}r \cdot \text{arc.} \left(\cosin = \frac{x}{r} \right); \text{ u. s. w.}$$



Jetzt wird es leicht seyn, die dynamischen Gl für die Bewegung der Doppel-Körper auf Unterlagen zu erhalten. Auch die Gl für das Gleichgewicht dieser Körper werden wir kurz betrachten, um ihre Uebereinstimmung mit dem schon gefundenen zu zeigen.

Um aber nicht zu weitläufig zu werden; so muß ich voraussetzen, daß die Leser mit dem Verfahren das Gleichgewicht und die Bewegung der Körper auf Gl zu bringen bekannt sind, welches in la Grange *mecanique analytique* am vollständigsten dargelegt ist. Auf die Uebersetzung dieses vortrefflichen Werkes, welche zu Göttingen 1797 von Murhard erschienen ist, werde ich mich beziehen.

Wir haben bisher nur die Größen an der einen Seite der Ebene y, z betrachtet; jetzt werden wir aber einmal auf beyde Seiten derselben, die wir durch plus und minus unterscheiden wollen, unsere Aufmerksamkeit richten müssen.

Wenn man die Gl einer Oberfläche oder eines Theiles derselben an der plus Seite der Ebene y, z hat, worin also x blos bejahnte Werthe haben darf; so kann man sich allemal eine zweite Oberfläche an der minus Seite der Ebene y, z denken, welche eine solche Lage hat, (wie die linke und rechte Hälfte des menschlichen Körpers), daß zu jedem Puncte in der ersten Oberfläche, der die Coordinaten: $y', z', + x'$ hat, in der zweiten auch ein Punct zu finden ist, der die Coordinaten: $y', z', - x$ hat. Um die Gl dieser zweiten Oberfläche zu haben, so wird man in der gegebenen Gl für die erste, $-x$ anstatt x setzen, und die Bedingung hinzufügen müssen: daß sie nur in so weit gelten soll, als x negative Werthe behält.

Ist nun: $dz - P \cdot dx - Q \cdot dy = 0$, die Differenzial-Gleichung der

ersten Oberfläche, (worin x gleichfalls nur positive Werthe haben darf); so wird: $dz + P \cdot dx - Q \cdot dy = 0$, die Differenzial-Gleichung der zweiten Oberfläche seyn, worin x auch nur negative Werthe haben darf. Denn die zweite Gl wird sich dadurch von der ersten unterscheiden, daß die ungeraden Potenzen von x , in P und Q , entgegengesetzte Zeichen haben. Da nun für x in der zweiten Gl nur verneinte Werthe gelten, wodurch die Zeichen der ungeraden Potenzen geändert werden; so werden dadurch P und Q in beyden Gl, gleiche Werthe bekommen, und blos dx wird das Zeichen geändert haben.

2) Die allgemeine Voraussetzung ist nun diese:

In den Doppel-Körper, dessen Masse $= 2M$ ist, wirkt die beschleunigende Kraft g , (wo g die doppelte Fallhöhe in einer Secunde bedeutet,) nach der Richtung $-z$, und die Differenzial-Gleichung der plus Hälfte des Doppel-Körpers ist: $dz - p \cdot dx - q \cdot dy = 0$, wo: $q = \frac{\beta - y}{z - y}$, und: $p = \frac{X \cdot X'}{z - y}$, ist. Die Differenzial-Gleichung der minus Hälfte des Doppel-Körpers, wird also seyn: $dz + p \cdot dx - q \cdot dy = 0$.

Wenn nun die Bedingung statt findet, daß ein solcher Doppel-Körper sich auf zweien Oberflächen bewegen soll, deren Differenzial-Gleichungen:

$$dz - P \cdot dx - Q \cdot dy = 0, \text{ und: } dz + P \cdot dx - Q \cdot dy = 0,$$

sind, welche wir mit: $du = 0$, und $du' = 0$, bezeichnen wollen, und wo x in der ersten nur bejahte, und in der zweiten nur verneinte Werthe haben darf; so ist bekannt: (cf. la Grange l. c. I. Abschn. 5. §. 8 seqq. und II. Abschn. 4, §. 10 seqq.), daß wir den allgemeinen Gl für das Gleichgewicht und die Bewegung des Doppel-Körpers, die Differenzial-Gleichungen dieser Oberflächen, jede mit einem unbestimmten Coefficienten multiplicirt, also die Größen: $\lambda \cdot du$, und: $\mu \cdot du'$, hinzusetzen müssen. Der senkrechte Druck des Doppel-Körpers gegen die erste Oberfläche wird alsdann seyn:



$$= \lambda \cdot \left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \lambda \cdot (1 + P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ und gegen die}$$

$$\text{zweite Oberfläche, } = \mu \cdot \left(\frac{du'^2}{dx^2} + \frac{du'^2}{dy^2} + \frac{du'^2}{dz^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \mu \cdot (1 + P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist aber an sich klar, daß der Doppel = Körper gegen beyde Oberflächen gleich stark drücken wird, er mag in Ruhe oder in Bewegung seyn, daher folgt: $\lambda = \mu$.

Da überdem die Differenzial = Coëfficienten, P und Q , sich auf die jedesmaligen Berührungs = Punkte des Doppel = Körpers mit den Oberflächen beziehen, für welche wir (nach §. 5. 2, 3) die Gl: $P = p$, und $Q = q = \frac{dy}{d\beta}$ haben; so werden wir für den senkrechten Druck des Doppel = Körpers gegen jede Oberfläche, folgenden Ausdruck haben: $\lambda \cdot (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda \cdot \secans$ des Winkels den die Berührungs = Ebene des Doppel = Körpers am Stützpunkt mit der Ebene x, y macht. (Cf. Lacroix l. c. Tom. I. §. 304)

$$= \frac{\lambda \cdot X}{z - y} \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda \cdot \left(1 + \frac{dy^2}{d\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ aus (3) } \dots (28)$$

wo aber λ für die Ruhe und die Bewegung verschiedene Werthe haben wird.

Wenn der Doppel = Körper, statt auf Oberflächen, sich auf Linien bewegen soll; so kann man sich vorstellen, daß diese Linien auf solchen Oberflächen liegen, denen auf der plus Seite am jedesmaligen Berührungs = Punkt, die Gl: $dz - p \cdot dx - q \cdot dy = 0$, und an der minus Seite, die Gl: $dz + p \cdot dx - q \cdot dy = 0$, zukommen. Alsdann werden wir für den Druck des Doppel = Körpers gegen die Stützlinien ebenfalls den Ausdruck (28) haben. Diese Voraussetzung ist aber erlaubt, weil die Stützlinien am Stützpunkte stets in der Berührungs = Ebene des Doppel = Körpers daselbst liegen müssen,



wobon die eben gedachten Gll, die Differenzial-Gleichungen sind, wenn man in p und q , die Coordinaten x, y, z auf den Stützpunkt bezieht. Auf eben diese Weise kann man überhaupt die Gll für das Gleichgewicht und die Bewegung des Doppel-Körpers der sich auf Linien stützt, auf die Gll zurückführen, welche man erhält, wenn der Doppel-Körper sich auf Oberflächen stützt: wie wir dies sogleich sehen werden.

3) Soll der Doppel-Körper sich nun auf Oberflächen stützen, welchen die obigen Gll: $du = 0$, und: $du' = 0$, gehören; so werden wir für das Gleichgewicht desselben, folgende Gll haben:

$$(29) \dots \begin{cases} \lambda \cdot \left(\frac{du}{dx} + \frac{du'}{dx} \right) = 0, & \text{oder: } \lambda \cdot (-P + P) = 0, \\ \lambda \cdot \left(\frac{du}{dy} + \frac{du'}{dy} \right) = 0, & \text{oder: } -2\lambda \cdot Q = 0, \\ -2M \cdot g + \lambda \cdot \left(\frac{du}{dz} + \frac{du'}{dz} \right) = 0, & \text{oder: } -Mg + \lambda = 0, \end{cases}$$

Die erste dieser Gll ist identisch $= 0$, die letzte giebt: $\lambda = Mg$, und daher die zweite: $Q = 0$, und aus $Q = q = \frac{d\gamma}{d\beta}$, folgt also, daß fürs Gleichgewicht stets: $\frac{d\gamma}{d\beta} = 0$, seyn müsse, wie gehörig.

Für den Druck auf jede Unterlage erhalten wir nun [aus (28)] den Ausdruck: $\frac{M \cdot g \cdot X}{z - \gamma} \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}}$.

Aber wenn: $q = 0$, oder: $y - \beta = 0$, ist; so folgt aus der Gl (1): $z - \gamma = \pm X$; dadurch wird der Druck des Doppel-Körpers gegen jede Oberfläche, $= M \cdot g \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}}$, welcher Ausdruck ganz mit dem überein-



stimmt, welchen wir (§. 3. 4 am Ende) gefunden haben, wenn wir in diesem:

$$\frac{dy}{d\beta} = 0, \text{ setzen.}$$

Die Coordinaten des Stütz-Punctes der Oberfläche, für welchen $\frac{dy}{d\beta} = 0$ ist, finden sich aus den Gl: $Q = 0$; $\pm X' = P$, (als worin sich die Gl (12) verwandelt), und der Gl für die Oberfläche, welche den Doppel-Körper stützen soll.

Ist statt dieser Oberfläche eine Linie durch ihre zwey Gl gegeben; so haben wir für den Fall, daß $\frac{dy}{d\beta} = 0$ ist, (in §. 4. 10) die Gl:

$\pm \operatorname{tg} \vartheta = X' \cdot \operatorname{cofin} \varphi$; gefunden. Aber (aus §. 6. 1, und Lacroix l. c. Tom. I. §. 305) findet sich:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{P \cdot Q - P' \cdot Q}{((Q - Q)^2 + (P - P')^2)^{\frac{1}{2}}}; \text{ und } \operatorname{cof} \varphi = \frac{Q - Q}{((Q - Q)^2 + (P - P')^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Wir haben also auch in diesem Falle drey Gl zur Bestimmung der drey Coordinaten des Stützpunktes. Nämlich durch Elimination von $\operatorname{tg} \vartheta$ und $\operatorname{cof} \varphi$ aus den eben gefundenen Gl erhält man: $X' = \frac{P \cdot Q - P' \cdot Q}{Q - Q}$; mit welcher man die beyden gegebenen Gl für die Stützlinie verbinden muß.

Gelegentlich wollen wir hier noch bemerken, wie man die Coordinaten des Stützpunktes findet, wenn der Doppel-Körper aufhört unterstützt zu werden, und frey fällt. Alsdann muß $\frac{dy}{d\beta} = \infty$, seyn. Ist nun die Unterlage eine Oberfläche, welcher die Gl: $dz - P \cdot dx - Q \cdot dy = 0$, zukömmt; so wird auch, $Q = \infty$ seyn müssen, und daher im Allgemeinen auch $P = \infty$, weil die Berührungs-Ebene der Oberfläche an diesem Puncte, auf der



Ebene x, y senkrecht steht. Diese beiden Gl mit der Gl für die Oberfläche verbunden, geben die drey Coordinaten. — Wenn nun der Doppel = Körper sich auf einer Linie stützt; so wird man aus den beiden Gl dieser Linie, und der Gl: $\pm X' = \operatorname{tg} \varphi$, (§. 4. 10) die Coordinaten des Stützpunktes bestimmen, und es wird: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{P - P'}{Q - Q'}$; seyn.

4) Die Gl für die Bewegung des Doppel = Körpers, der sich auf den Oberflächen: $du = 0$, und: $du' = 0$, stützt, werden folgende seyn:

$$(30) \dots \begin{cases} 2 \cdot \int \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot dM + \lambda \cdot \left(\frac{du}{dx} + \frac{du'}{dx} \right) = 0; \\ 2 \cdot \int \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot dM + \lambda \cdot \left(\frac{du}{dy} + \frac{du'}{dy} \right) = 0; \\ 2 \cdot \int \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot dM + 2M \cdot g + \lambda \cdot \left(\frac{du}{dz} + \frac{du'}{dz} \right) = 0; \end{cases}$$

Wenn wir aber die Coordinaten des Schwerpunkts nach der Richtung der Ase x , mit α bezeichnen; so wie wir die beyden andern Coordinaten schon mit β und γ bezeichnet haben; so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot dM &= 2M \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2}; & 2 \cdot \int \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot dM &= 2M \cdot \frac{d^2 \beta}{dt^2}; \\ 2 \cdot \int \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot dM &= 2M \cdot \frac{d^2 \gamma}{dt^2}; & (\text{cf. la Grange l. c. II. Abschn. 3, §. 3}). \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werthe und die bekannten Werthe von $\frac{du}{dx}$, $\frac{du'}{dx}$, &c.

in die Gl (30), und setzen noch: $Q = q = \frac{dy}{d\beta}$; so erhalten wir folgende:



$$(31) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} M \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0; \\ M \cdot \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \lambda \cdot \frac{d\gamma}{d\beta} = 0; \\ M \cdot \left(\frac{d^2 \gamma}{dt^2} + g \right) + \lambda = 0; \end{array} \right.$$

Die erste Gl giebt durch Integriren: $\alpha = A + B \cdot t$; Wenn also α im Anfange der Bewegung, $= 0$ ist, und auch die Geschwindigkeit des Schwerpunkts nach der Richtung der α oder x , $= 0$ ist, (welche beyde Voraussetzungen in unserm Fall statt finden); so ist: $A = B = 0$, also α beständig $= 0$, wie gehörig.

Setzen wir den aus der dritten der Gl (31) gezogenen Werth von λ , in die zweite Gl; so erhalten wir, wenn wir mit $d\beta$ multipliciren, die Gl:

$$\left(\frac{d\beta \cdot d^2 \beta + d\gamma \cdot d^2 \gamma}{dt^2} \right) + g \cdot d\gamma = 0; \text{ woraus wir durch Integriren erhalten:}$$

$$\frac{d\beta^2 + d\gamma^2}{dt^2} = 2g(c - \gamma); \dots \dots \dots (32)$$

worin die beständige GröÙe: c , durch die anfängliche Geschwindigkeit und die Höhe des Schwerpunkts bestimmt wird. Dies ist die Gl, welche die Erhaltung der lebendigen Kräfte darstellt. (Cf. la Grange l.c. II. Abschn. 3. §. 10).

Die GröÙe λ , ist in der letzten der Gl (31) durch $\frac{d^2 \gamma}{dt^2}$ gegeben.

Könnten wir nun in der Gl (32), $d\beta$ durch γ und $d\gamma$ ausdrücken; so erhielten wir den Werth von $\frac{d\gamma}{dt}$ als Function von γ ; und durch Differenziren, den Werth von $\frac{d^2 \gamma}{dt^2}$, als Function von γ und $\frac{d\gamma}{dt}$, d. h. von γ , und wir könnten λ durch γ bestimmen. Dazu ist es also nöthig, eine Gl zwischen

β und γ zu haben, und deswegen haben wir in den §§. 5, 6 und 8 gezeigt, wie diese zu finden ist.

Da λ bloß Function von γ ist; so ist der Druck des bewegten Doppel-Körpers gegen seine Unterlagen nach (28) bloß eine Function der Linie, welche der Schwerpunkt beschreibt, und von Größen, welche dem Doppel-Körper selbst am Stützpunkt angehören, und ist von der Krümmung der Unterlagen nur in so weit abhängig, als die Linie des Schwerpunkts davon abhängig ist.

Wenn der Doppel-Körper sich auf Linien bewegt; so sieht man leicht, daß wir dieselben Resultate erhalten werden, wenn wir die (zu Ende der Nr. 2 dieses §.) erwähnte Voraussetzung machen. Diese ist aber erlaubt, weil die Stützeinien am Stützpunkt immer in der Berührungsebene des Doppel-Körpers daselbst liegen müssen. Der Druck des Doppel-Körpers geht senkrecht auf seine Berührungsebene.

5) Um nun einige Beispiele zu geben; so wollen wir zuerst voraussetzen: der Schwerpunkt des Doppel-Körpers solle die gerade Linie beschreiben, deren Gl ist: $\gamma = m \cdot \beta + n$; woraus: $d\beta = \frac{d\gamma}{m}$, folgt.

Substituiren wir diesen Werth in die Gl (32); so ist:

$$\frac{d\gamma^2}{dt^2} = \frac{2gm^2(c - \gamma)}{1 + m^2}, \text{ und: } \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{-m^2g}{1 + m^2}.$$

Daher kommt [aus der dritten der Gl (31)]: $\lambda = \frac{-Mg}{1 + m^2}$, und aus der Gl (28), der Druck gegen die Unterlagen, oder eigentlicher, der Gegendruck der Unterlagen: $= -Mg \cdot \frac{(1 + X'^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$; welches völlig mit dem übereinstimmt, was wir (§. 3. 4 am Schluß) gefunden haben.



Wenn aber die Linie des Schwerpunkts krumm ist; so wird diese Uebereinstimmung nur alsdann noch statt finden, wenn wir die Geschwindigkeit des Doppel-Körpers = 0 setzen. Z. B. wenn der Schwerpunkt die Parabel:

$y^2 = m\beta$; beschreibt, daß also: $d\beta = \frac{2y \cdot dy}{m}$; ist; so erhalten wir aus

$$(32), \quad \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{2gm^2(c-y)}{m^2 + 4y^2}; \quad \text{und:} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{gm^2(m^2 + 4y(2c-y))}{(m^2 + 4y^2)^2};$$

daher: $\lambda = \frac{4Mgy(m^2(2c-3y) - 4y^3)}{(m^2 + 4y^2)^2}$; und der Gegendruck der Unterlage:

$$= \lambda \cdot \frac{(m^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}}{2y} \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{welcher sich für: } c=y, \text{ in}$$

$$\frac{-2Mgy}{(m^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{verwandelt, und alsdann ganz mit dem Aus-$$

druck in §. 3. 4 übereinstimmt. Ziehen wir diesen letzten Druck, der allein von der augenblicklichen Wirkung der Schwere herrührt, von dem ganzen Druck ab; so bleibt der Druck der von der Geschwindigkeit und Krümme der

$$\text{Bewegung herrührt:} = \frac{4gm^2M \cdot (c-y)}{(m^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist bekannt: daß dieser Druck, wenn ein Punct sich auf einer krummen Linie bewegt, gleich ist, dem Quadrat seiner Geschwindigkeit, dividirt mit dem Halbmesser der Krümmung. Aber das Quadrat der Geschwindigkeit des Schwerpunkts ist aus (32) = $2g(c-y)$, und der Halbmesser der

$$\text{Krümmung, der von ihm beschriebenen Parabel, ist} = \frac{(m^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$$

Daraus folgt also: daß der Doppel-Körper auf gleiche Art gegen seine Unterlage drückt, als ein körperlicher Punct, (der Schwerpunkt, in welchem

die Masse des Doppel = Körpers vereinigt wäre), gegen die Seitenwände eines Kanals drücken würde, deren Durchschnitt die Parabel, worauf der Punct sich bewegt, bildet, und deren Berührungs = Ebenen am jedesmaligen Orte des Punctes, den Berührungs = Ebenen des Doppel = Körpers an den Stützpunkten parallel sind. Denn wenn man den Druck des Punctes gegen den Durchschnitt der Ebenen, in zwey andere Drucke, welche auf die Ebenen senkrecht sind, zerlegen will; so muß man mit der Secante des Winkels, den die Ebenen mit der Ase der x machen, $(= (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}})$ multipliciren.

6) Dieser Satz, den wir so eben durch Induction an der Parabel gefunden haben, hat allgemeine Gültigkeit, welches sogleich aus folgender Analyse erhellet.

Wenn man in den Gl (31), $g = 0$ setzt; so erhält man statt der Gl (32), die folgende: $\text{const.} = \frac{dy^2 + d\beta^2}{dt^2} = v^2$, = dem Quadrat der Geschwindigkeit des Schwerpunctes, und wenn man den hieraus folgenden Werth von dt^2 in die letzte der Gl (31) setzt; so erhält man:

$\lambda = -M \cdot \frac{d^2y \cdot v^2}{d\beta^2 + dy^2}$. Daher wird aus (28) der Druck gegen jede Unterlage, wenn die Schwere in den Doppel = Körper zu wirken aufhörte,

$$= \frac{v^2 \cdot d^2y}{d\beta^2} \cdot \left(\frac{1 + X'^2}{1 + \frac{dy^2}{d\beta^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot M. \quad (33)$$

Aber in den Gl (31) ist: $dt = \text{const.}$ angenommen, daher folgt aus der Gl:

$$\frac{dy^2 + d\beta^2}{dt^2} = \text{const.}; \text{ auch: } dy^2 + d\beta^2 = \text{const.}$$



Der Ausdruck des Halbmessers der Krümmung ist aber:
$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{d\beta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\gamma}{d\beta^2}}$$

wenn man $d\beta = \text{const.}$ nimmt.

Setzt man nun $d\beta^2 + dy^2 = \text{const.}$; so wird man in diesem Ausdruck des Halbmessers der Krümmung, anstatt $\frac{d^2\gamma}{d\beta^2}$, setzen müssen:

$$\frac{d^2\gamma}{d\beta^2} \left(1 + \frac{dy^2}{d\beta^2}\right). \quad (\text{Cf. Lacroix l. c. Tom. I. §. 77}).$$

Daher wird der von der Geschwindigkeit des Doppel-Körpers, und von der Krümmung des Weges seines Schwerpunctes herrührende Druck auf die Unterlage an jeder Seite, wofür wir den Ausdruck (33) gefunden haben, = der halben Masse des Doppel-Körpers, multiplicirt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit seines Schwerpunctes, und dividirt mit dem Halbmesser der Krümmung der Linie, welche der Schwerpunct beschreibt, und multiplicirt mit der Secante des Winkels, den die Berührungs-Ebene des Doppel-Körpers am Stützpunkte mit der Ase der x macht.

Rechnet man hiezu noch den Druck der von der beschleunigenden Kraft, welche in den Doppel-Körper wirkt, herrührt, wofür wir den Ausdruck schon (in §. 3. 4) gefunden haben; so haben wir den gesammten Druck des bewegten Doppel-Körpers gegen seine Unterlagen, woraus sich die Reibung findet.

7) Um nun die Reibung zu bestimmen, braucht man nur noch den Reibungs-Coëfficienten, oder die Verhältnißzahl zwischen Druck und Reibung, welche wir mit k bezeichnen wollen, zu kennen. Diese Zahl ist aber eine Function, theils von den Materialien woraus Doppel-Körper und Un-

terlagen bestehn, theils von der Art der Bewegung des erstern auf den letzteren, welche gleitend oder rollend, oder aus beyden zusammengesetzt seyn kann.

Durch die Reibung aber, deren unmittelbare Wirkung darin besteht, den sich reibenden Punkt des Doppel = Körpers in seiner Bewegung aufzuhalten, wird in dem Körper stets eine Tendenz zur eigentlich rollenden Bewegung entstehen; indem eine größere drehende Bewegung desselben, als zur rollenden erforderlich ist, durch die Reibung vermindert; so wie eine geringere vermehrt wird. Ueberdem ist k bey der rollenden Bewegung ein Kleinstes. Im Allgemeinen wird man daher die Bewegung des Doppel = Körpers auf seinen Unterlagen, als rollend annehmen können, und darnach k berechnen. Alsdann wird die Größe der Reibung auf jeder Seite der Ebene y, z seyn:

$$= k \cdot M \cdot \left(\frac{1 + X'^2}{1 + \frac{dy^2}{d\beta^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(g + v^2 \cdot \frac{d^2\gamma}{d\beta^2} \right) \dots \dots \dots (34)$$

wie aus (33) und Nr. 5 dieses §. (oder auch aus §. 3. 4 am Schluß) folgt.

8) Die beschleunigende Kraft, welche in den Doppel = Körper in jedem Augenblick wirkt, wird gleich seyn: der relativen Schwere, wenn man davon die durch M dividirte Reibung abzieht. Die relative Schwere aber ist (aus

$$\S. 3. 4): = \frac{g \cdot (\beta - y)}{X} = \frac{g \cdot \frac{dy}{d\beta}}{\left(1 + \frac{dy^2}{d\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}}}; \text{ nach (3).}$$

Bezeichnen wir die Höhe, welche der jedesmaligen Geschwindigkeit des Schwerpunktes gehört, mit h ; so hat man nach den Vorschriften der höheren Mechanik folgende Gl:

$$g \cdot dh = \text{der beschleunigenden Kraft, multiplicirt mit } (d\beta^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}};$$



$$(35) \dots \text{oder: } dh = d\beta \cdot \left\{ \frac{dy}{d\beta} + k \cdot (1 + X'^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + 2h \cdot \frac{d^2y}{d\beta^2} \right) \right\};$$

wenn man nemlich in (34), anstatt v^2 , seinen Werth $= 2gh$; setzt.

Um diese Gl zu integriren, muß man zuerst X' oder x vermöge der Gl (2) und den beyden Gl für die Unterstützungs - Linie, durch: $\beta, \gamma, \frac{dy}{d\beta}$

ausdrücken, und alsdann $\gamma, \frac{dy}{d\beta}, \frac{d^2y}{d\beta^2}$; vermittlest der Gl: $\gamma = f(\beta)$

durch β ausdrücken. Alsdann hat man eine einfache Differenzial - Gleichung, zwischen h und β , deren Integration allemal von statten geht, weil h rechter Hand des Gleichheit - Zeichens nur in der ersten Potenz vorhanden ist. (Cf. Lacroix l. c. Tom. II. §. 547). Indessen kann durch die nöthigen Eliminationen die Endgleichung sehr weitläufig werden.

9) Hat man auf diese Art h gefunden; so hat man erst den genauen Ausdruck für die Reibung, indem man in der Gl (34): $v^2 = 2gh$ setzt. Nun findet sich auch die Zeit $= \tau$, durch Integrirung der Gl:

$$d\tau = \frac{(d\beta^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{(2gh)^{\frac{1}{2}}}$$

Der einfachste Fall zur Berechnung ist derjenige, wenn der Schwerpunkt des Doppel - Regels eine gerade Linie beschreibt. Denn für den Regel ist $X' = -t$, $= \text{const}$; und für die gerade Linie ist $\frac{d^2y}{d\beta^2} = 0$, auch $\frac{dy}{d\beta} = \text{const} = m$; daher wird die beschleunigende Kraft:

$$= \frac{g}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(m - k(1 + t^2)^{\frac{1}{2}} \right); \text{ und daher:}$$

$$h = \beta \left(m - k (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} \right) + \text{const.}; \text{ und wenn const.} = 0;$$

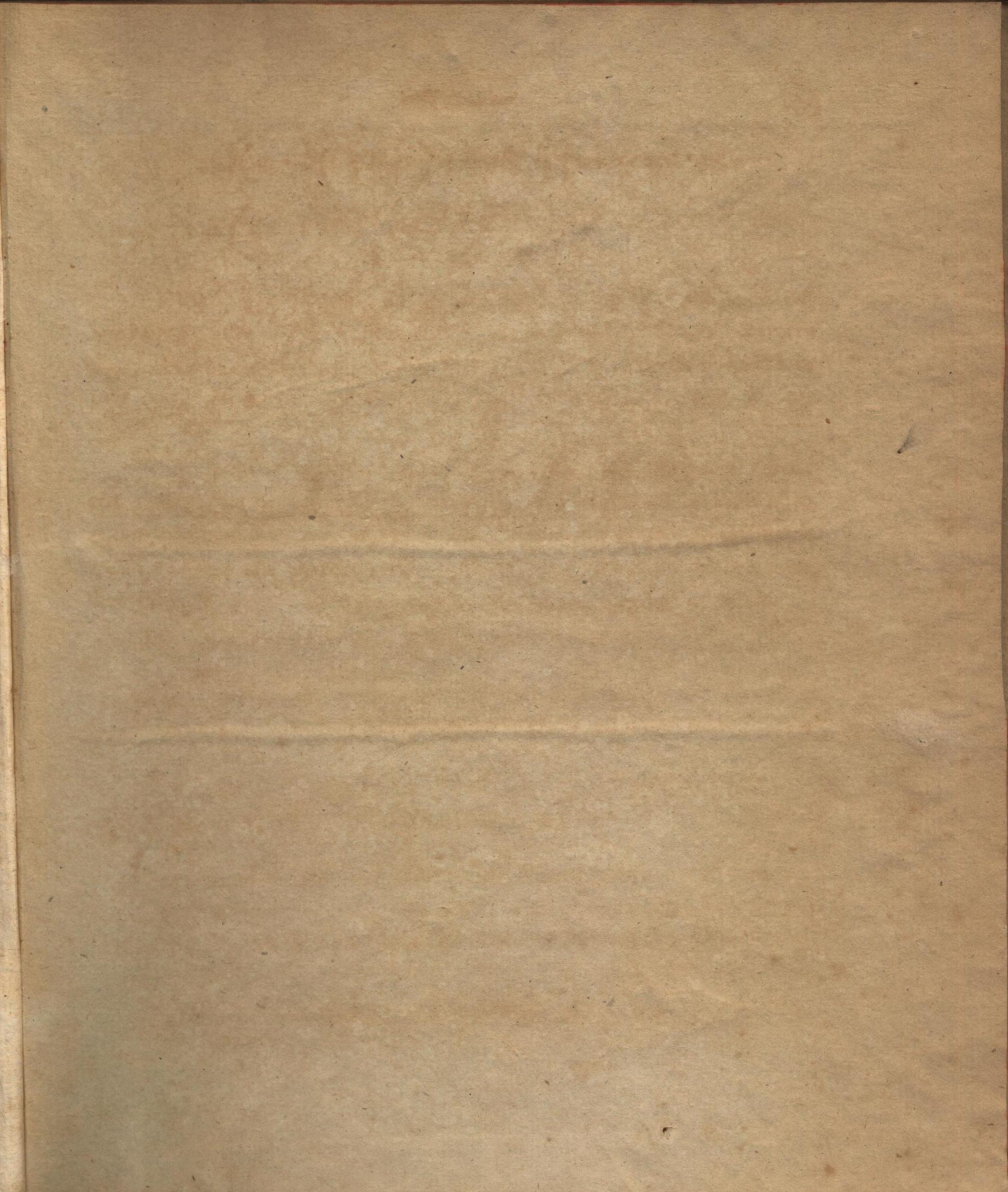
$$\text{so wird: } \tau = \left(\frac{2\beta}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[m - k \cdot (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}};$$

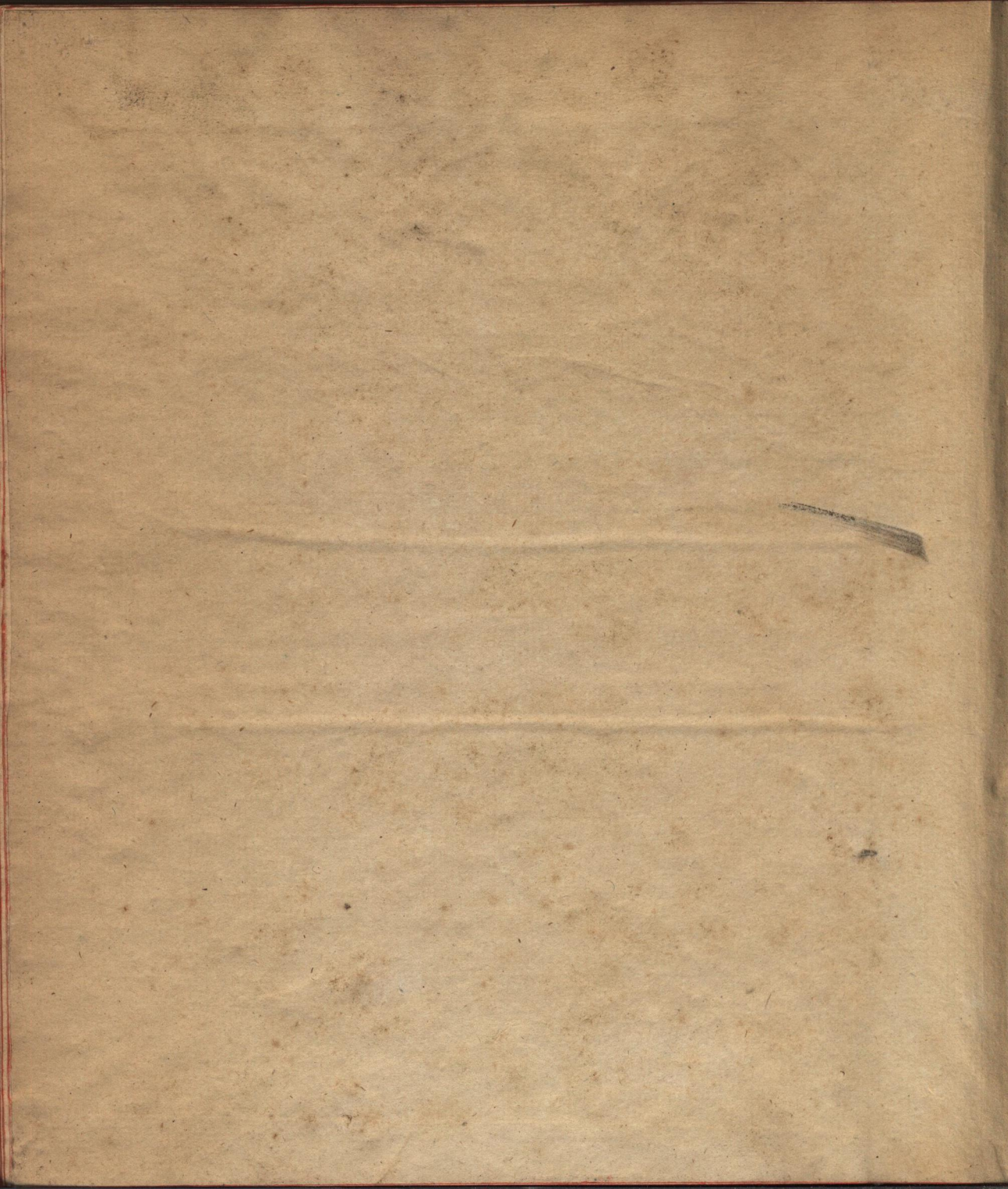
Dieselbe Erleichterung, welche der Regel, wegen $X' = \text{const.}$, in der Berechnung von h und τ darbietet, findet bey allen andern Doppel - Körpern statt, wenn die Unterstützungs - Linie in einer der Ebene y, z parallelen Ebene liegt, weil alsdann auch für alle Berührungs - Punkte, $X' = \text{const.}$ ist, der Doppel - Körper mag seyn, welcher er wolle.

10) Der Verfasser hätte hier leicht noch einige ausführlichere Beyspiele ausarbeiten können: aber theils fürchtet er, daß die Geduld der Leser schon erschöpft seyn möge; theils glaubt er auch, alle zu seiner Aufgabe gehörigen wichtigen Fragen im Allgemeinen beantwortet, und so viel Beispiele als zur Aufhellung der angewandten Methoden nöthig waren, gegeben zu haben.



Köftod, gedruckt bey Ablers Erben, 1823.





d.

A

20,636

8/12

