МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЮЖНО-УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ НАЦИОНАЛЬНОГО КОМИТЕТА ПО ИСТОРИИ И ФИЛОСОФИИ НАУКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ XVIII ВЕКА

К ПРЕДСТОЯЩЕМУ 300-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА (1707—1783)

Выпуск 3

Оренбург
Издательство ОГПУ
2002

УДК 51 (091)
ББК 22.1 г
И32

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук, профессор
Г. П. Матвиевская

И32 **Из истории математики XVIII века**. **К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера**: Сборник научных статей. Выпуск 3 / Отв. ред. Г. П. Матвиевская. — Оренбург: Издательство ОГПУ, 2002. — 88 с.; 4 л. ил.
ISBN 5-85859-154-X

УДК 51(091)
ББК 22.1 г

ISBN 5-85859-154-X

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора

В настоящем выпуске сборника продолжается публикация результатов исследования математического творчества Эйлера, которое проводится в Оренбургском государственном педагогическом университете при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-06-80327). Работа основывается главным образом на изучении неопубликованных записных книжек Эйлера, хранящихся в Санкт-Петербургском филиале Архива Российской Академии наук, — по фотокопиям, которые имеются в распоряжении коллектива.

В сборник вошли статьи Г. П. Матвиевской, В. Д. Павлидис, И. В. Прояевой, И. В. Игнатушиной, Ж. Ю. Личиковой, в которых затронуты различные вопросы, связанные с изучением научного наследия Эйлера в области теории чисел, математического анализа, геометрии, теории приближенных вычислений.

Г. П. Матвиевская

Г. П. Матвиевская

ОБ ИЗУЧЕНИИ НЕОПУБЛИКОВАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ РУКОПИСЕЙ Л. ЭЙЛЕРА

Постоянный, не ослабевающий с течением времени интерес к трудам великого ученого Леонарда Эйлера (1707—1783) объясняется тем огромным влиянием, которое они оказали на формирование современного математического естествознания. Необъятное научное наследие Эйлера всегда служило источником плодотворных идей, развитие которых нередко приводило ученых разных поколений к важным открытиям и существенному продвижению вперед в построении той или иной естественнонаучной теории. Поэтому такие выдающиеся деятели науки, как П. С. Лаплас (1749—1827), К. Ф. Гаусс (1777—1855), П. Л. Чебышев (1821—1894), А. Н. Крылов (1863—1945), говорили об Эйлере как об общем учителе и видели в изучении его сочинений лучшую школу для творчески работающего ученого.

Внимание к трудам Эйлера обычно обостряется в связи с юбилейными датами, отмечаемыми научной общественностью — в особенности на его родине в Швейцарии, в ставшей его второй отчизной России и в Германии, где он прожил 25 лет. В это время в печати вновь обсуждаются результаты, полученные Эйлером в различных областях науки, появляются новые статьи и книги о его жизни и творчестве.

Так, в нашей стране в связи с исполнившимся в 1933 г. 150-летием со дня смерти Эйлера Академия наук выпустила памятный сборник статей [1], авторами которых были академики А. Н. Крылов и С. И. Вавилов, профессора Н. С. Кошляков, Ю. А. Крутков, Б. А. Венков и другие видные ученые.

Еще торжественнее в 1957 г. отмечалось 250-летие со дня рождения Эйлера. Академией наук была проведена юбилейная научная сессия, на которой с докладами о его достижениях в математике, физике, механике, астрономии выступили академики М. А. Лаврентьев, В. И. Смирнов, Б. Н. Делоне, профессора А. И. Маркушевич, Б. В. Гнеденко, М. Ф. Субботин, А. О. Гельфонд и др. Эти доклады, а также материалы юбилейной конференции, проведенной в том же году в Берлине, вышли затем из печати отдельными изданиями [2, 3].

Важным научным событием 1982—1983 гг. стало 275-летие со дня рождения Эйлера и 200-летие со дня его смерти. В этой связи 24—27 октября 1983 г. Академия наук провела торжественное заседание и симпозиум «Развитие идей Эйлера в современную эпоху». На нем в выступлениях академиков А. П. Александрова, И. Ф. Образцова, Л. Д. Фаддеева и в многочисленных докладах были подведены итоги интенсивной работы по изучению трудов и жизни Эйлера. Они нашли отражение в опубликованном в 1988 г. академическом сборнике [4] и наряду с другими — советскими и зарубежными — юбилейными изданиями существенно пополнили литературу о великом ученом.

Сейчас приближаются две очередные памятные даты, связанные с Эйлером: 18 сентября 2003 г. исполняется 220 лет со дня его смерти, а 15 апреля 2007 г. — 300 лет со дня рождения. Они также не будут забыты, и многие ученые, готовясь отметить эти даты, снова обращаются к неисчерпаемой эйлеровской тематике, к его колоссальному научному наследию.

К концу жизни Эйлера список его печатных сочинений достиг 562 наименований, но много завершенных работ опубликовать он не успел. По свидетельству его ученика академика Н. Фуса, престарелый ученый «неоднократно обещался представить Академии столько сочинений, что по смерти его на двадцать лет довольно будет» [4, с. 375]. В действительности же оставленные Эйлером рукописи публиковались в академических изданиях гораздо дольше: последние из них вышли из печати только в 1830 г. и список его работ составил 785 названий.

Однако вскоре выяснилось, что научное наследие Эйлера далеко не исчерпано, так как постепенно были обнаружены его новые неопубликованные рукописи. В 1844 г. внук Эйлера академик П. Н. Фус, в то время непременный секретарь Петербургской Академии наук, обнаружил в семейном архиве 61 рукопись неизвестных трактатов ученого по математике, механике и физике.

Об этом сенсационном открытии в отчете Академии наук говорилось: «В минувшем году совершилось событие весьма важное в области математических наук: отыскано несколько неизданных творений знаменитого Эйлера... Года два назад в кипе неважных бумаг в Архиве Академии случайно найдена была «Небесная механика» Эйлера. Это счастливое открытие побудило г. непременного секретаря подвергнуть тщательному рассмотрению большую связку автографов, хранившихся в числе фамильных бумаг наследников Эйлера, и тут П. Н. Фусу посчастливилось отыскать не начатки каких-нибудь творений, но целые довольно пространные диссертации, доселе неизданные, и множество записок по всем отраслям математики, частью неконченных. И все это писано и большей частью переписано набело рукой автора, следственно, не может быть ни малейшего сомнения, что эти сокровища действительно творения Эйлера. В числе их находятся обширные, совершенно оконченные отрывки из больших сочинений: между прочим, латинская рукопись без заглавия, содержащая в себе 1—16 глав диссертации о теории чисел, тоже латинское сочинение о приложении дифференциального исчисления к криволинейной геометрии, латинское сочинение о статике, курс физики на немецком языке, наконец два сочинения на французском языке о диоптрике и множество отдельных записок, частью уже переписанных набело» [5, с. 76—77].

П. Н. Фус по поводу этих рукописей, которые, по его словам, «обнаруживают гений бессмертного автора», заметил, что великий ученый «после долгих 60 лет сна, как кажется, опять поднялся — через 14 лет после того, как Академия сочла, что она издала последние запасы сочинений Эйлера».

Замечательная находка послужила поводом для разработки проекта полного собрания трудов Эйлера в 25 томах, который намеревалась осуществить Петербургская Академия наук. Однако из-за материальных трудностей от него пришлось отказаться и ограничиться изданием трактатов по теории чисел в двух томах, вышедших из печати в 1849 г. [6], и также двухтомного собрания некоторых рукописных сочинений, опубликованных в 1862 г. [7].

После этого рукописи Эйлера, перешедшие на хранение в Архив Петербургской Академии наук, не привлекали к себе внимания вплоть до начала XX в., когда в связи с 200-летним юбилеем Эйлера вновь встал вопрос об издании полного собрания сочинений ученого. Он обсуждался на международных математических конгрессах в Цюрихе (1897) и Риме (1908), после чего его решением занялись созданные в Швейцарии, Германии и России эйлеровские комиссии. Осуществление грандиозного плана — издать все труды Эйлера (*Leonhardi Euleri Opera omnia*) взяло на себя Швейцарское общество естествоиспытателей — при материальной поддержке академий наук разных стран и международной подписке.

Петербургская Академия наук приняла самое активное участие в начавшейся работе, предоставив в распоряжение редакции все рукописные материалы, хранящиеся в академическом архиве и касающиеся ученой деятельности Эйлера. В декабре 1910 г. эти материалы были отправлены в Цюрих для Швейцарского общества естествоиспытателей «с обязательством возвратить их в определенное время» [8, с. 73—74].

При издании полного собрания сочинений Эйлера, первый том которого вышел в 1911 году и которое не завершено и сейчас, широко использованы рукописи уже опубликованных сочинений для сверки и уточнения текста. Остальные рукописные материалы, общий обзор которых дал известный шведский историк математики Г. Энестрём [9], были подразделены им на следующие группы:

а) общее и смешанное;

б) научные работы, доклады и отзывы;

в) биографические и библиографические материалы.

Их было решено публиковать в конце всего издания вместе с перепиской Эйлера.

Энестрём обратил внимание на двенадцать рукописных тетрадей солидного объема, вызвавших у него «большое удивление» и оказавшихся записными книжками, «в которых Эйлер случайно отмечал те вещи, которыми в данное время занимался» [9, с. 193]. Отметив, что эти книжки должны быть основательно проработаны, сам он ограничился лишь беглым обзором, поскольку они «в общем имеют примерно 3000 исписанных страниц и записи часто очень коротки», так что более основательное исследование, по его словам, «потребовало бы много месяцев» [там же, с. 194]. Сейчас очевидно, что Энестрём сильно недооценил трудоемкость этой работы.

Рукописи Эйлера были возвращены из Швейцарии только после второй мировой войны, в 1949 г. В это время начиналась подготовка к 250-летию со дня рождения ученого, так что они сразу привлекли пристальное внимание ученых, и прежде всего академика В. И. Смирнова (1887—1974). По его инициативе было начато планомерное изучение рукописного наследия Эйлера, в котором приняли участие многие исследователи (А. П. Юшкевич, Г. К. Михайлов и др.).

Первые результаты этой работы были сообщены В. И. Смирновым на III Всесоюзном математическом съезде в 1956 г. и на юбилейной эйлеровской сессии Академии наук СССР 16 апреля 1957 г. и опубликованы в статье Г. К. Михайлова и В. И. Смирнова в сборнике материалов этой сессии [10]. Затем последовало продолжающееся до сих пор изучение и издание переписки Эйлера с учеными и других рукописных материалов.

Особое внимание привлекли записные книжки Эйлера. Общий обзор их содержания был дан в статьях Г. К. Михайлова (1957) [11], Г. П. Матвиевской (1960) [12, 13], Э. Кноблоха (1988) [14]. Впоследствии в той или иной мере были исследованы записи по механике, теории чисел, алгебре, геометрии, физике, астрономии (Ю. А. Белый, Р. И. Галченкова, А. А. Киселев, А. Е. Малых, Г. П. Матвиевская, И. Г. Мельников, Л. С. Минченко, Г. К. Михайлов, Н. И. Невская, Е. П. Ожигова).

Исследование заметок по теории чисел, занимающих в записных книжках наибольший объем, было начато в 1956 г. Г. П. Матвиевской под руководством В. И. Смирнова [12, 15 и др.]. Впоследствии этими вопросами занялись также Е. П. Ожигова [16, 17 и др.], И. Г. Мельников [18], А. А. Киселев [19 и др.]. Основные результаты этой работы были опубликованы в 1997 г. [20].

В настоящее время изучение математических заметок из записных книжек Эйлера ведется (по фотокопиям) в Оренбургском государственном педагогическом университете при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (руководитель Г. П. Матвиевская). Статьи членов исследовательского коллектива, помещенные в трех выпусках сборника «Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783)», отражают результаты, полученные членами исследовательского коллектива.

Список литературы

1. Леонард Эйлер (1707—1783). Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1935.

2. Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР / Ред. М. А. Лаврентьева, А. П. Юшкевича, А. Т. Григорьяна. М.: Изд-во АН ССРР, 1958.

3. 250-летие со дня рождения Л. Эйлера. (Торжественные собрания в Берлине и Ленинграде) // Вестник АН СССР. 1957. Т. 27. № 6. С. 121—123.

4. Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука: Сб. статей / Ред. Н. Н. Боголюбов, Г. К. Михайлов, А. П. Юшкевич. М.: Наука, 1988.

5. Извлечение из отчета по 1-му и 3-му Отделениям Академии наук // Журнал министерства народного просвещения. Ч. IV. 1845. Отд. III.

6. Euler L. Commentationes arithmeticae collectae. Vol. 1—2. Petropoli, 1849.

7. Euler L. Opera postuma mathematica et physica. Vol. 1—2. Petropoli, 1862.

8. Обозрение архивных материалов (Архив АН СССР). Вып. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933.

9. Eneström G. Bericht an die Eulerkomission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie // Jahresber. der Deutschen Mathem.-Vereinigung. 1913. Bd. 22. H. 1—2. S. 191—205.

10. Михайлов Г. К., Смирнов В. И. Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР // Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 47—79.

11. Михайлов Г. К. Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР: Общее описание и заметки по механике // Ист.-мат. исслед. М., 1957. Вып. 10. С. 67—94.

12. Матвиевская Г. П. О неопубликованных рукописях Леонарда Эйлера по диофантову анализу // Ист.-мат. исслед. М., 1960. Вып. 13. С. 107—186.

13. Матвиевская Г. П. О рукописном наследии и записных книжках Эйлера // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 122—129.

14. Кноблох Э. Математические записные книжки Леонарда Эйлера // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 102—121.

15. Матвиевская Г. П. Заметки о совершенных числах в записных книжках Эйлера // Тр. Ин-та истории ествествозн. и техн. АН СССР. 1959. Т. 22. С. 240—250.

16. Ожигова Е. П. Функция Эйлера в его записных книжках // Ист.-мат. исслед. Вып. 27. 1983. С. 50—63.

17. Матвиевская Г. П., Ожигова Е. П. Рукописные материалы Эйлера по теории чисел // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 130—138.

18. Мельников И. Г. Удобные числа в рукописном наследии Эйлера // Ист.-мат. исслед. М., 1983. Вып. 27. С. 10—24.

19. Киселев А. А., Матвиевская Г. П. Неопубликованные записи Эйлера по partitio numerorum // Ист.-мат. исслед. М., 1965. Вып. 16. С. 145—180.

20. Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел / Отв. ред. Н. И. Невская. СПб.: Наука, 1997.

В. Д. Павлидис

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ЭЙЛЕРА*

Дифференциальные уравнения простейших классов были проинтегрированы Ньютоном и Лейбницем в XVII в. В качестве общего метода Ньютон предложил искать решения в форме степенных рядов. В школе Лейбница внимание было сосредоточено на поиске решений в конечном виде. Так, удалось проинтегрировать в квадратурах уравнение с разделяющимися переменными, однородное уравнение, линейное 1-го порядка и др.

В первой половине XVIII в. работа ученых в этой области состояла в решении отдельных специфических видов уравнений. Были выработаны предпосылки для создания основ общей теории [4; 6—8; 10—12; 19].

В 1724 г. Дж. Риккати (1676—1754) рассмотрел случаи конечной интегрируемости уравнения $\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha$, где a, b, α — произвольные числа (специальное уравнение Рик-

* Исследование поддержано РФФИ.

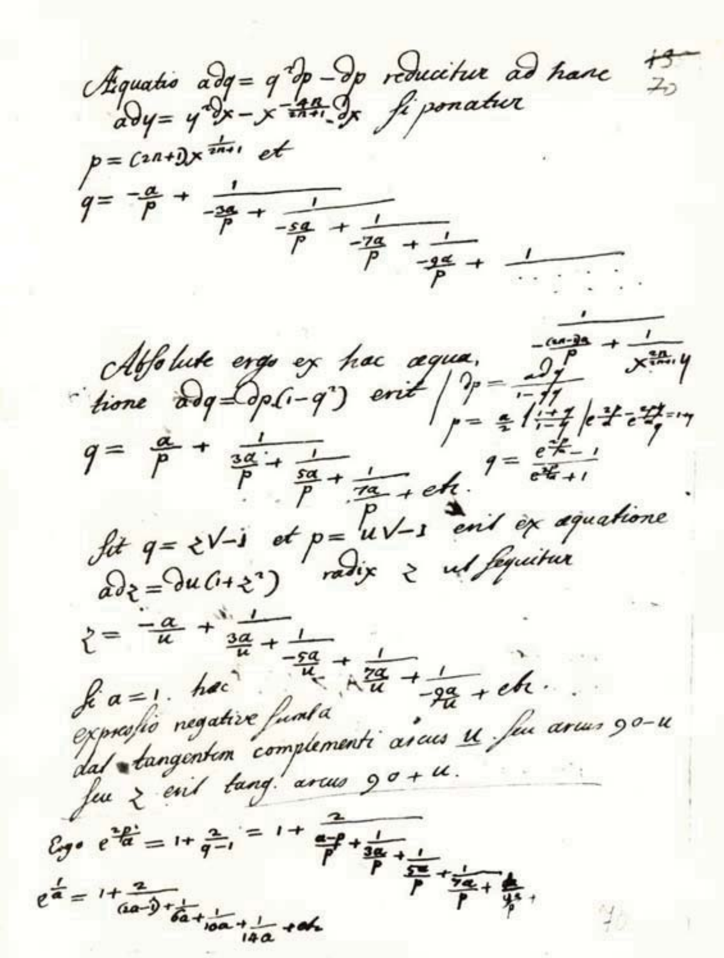
кати). Первоначально он рассматривал это уравнение в более общем виде: $x^n \dfrac{dq}{dx} = \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^2}{q}$, где q, y — функции от x. Однако он сумел найти решение, лишь упростив задачу, положив $q = x^{\alpha}$.

Исследованием специального уравнения Риккати занимались Л. Эйлер, Х. Гольдбах, Д. Бернулли, Н. Бернулли и др. Д. Бернулли установил (1724), что это уравнение интегрируется в элементарных функциях, если $\alpha = -2$ или $\alpha = -\dfrac{4k}{2k-1}$, где k — целое. В 1738 г. Эйлер решил специальное уравнение Риккати, применив теорию рядов [13]. В то же время он начинает рассматривать более общий случай уравнения Риккати

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — непрерывные функции. Его частными видами являются специальное уравнение Риккати, уравнение Бернулли (при $R(x) = 0$) и линейное дифференциальное уравнение (при $P(x) = 0$) [14]. В 60-х годах Эйлер обнаружил, что при наличии двух частных решений интегрирование уравнения Риккати сводится к квадратурам. Если же известен один частный интеграл V, то оно может быть преобразовано в линейное дифференциальное уравнение подстановкой $y = V + \dfrac{1}{z}$. К исследованию уравнения Риккати Эйлер периодически возвращался вплоть до 1783 г.

В [5] мы рассмотрели формирование исчисления непрерывных дробей в работах Эйлера, в том числе в его записных книжках. В данной статье представлены материалы Эйлера, связанные с использованием аппарата не-



~~13~~ 70

Aequatio $a\,dq = q^2dp - dp$ reducitur ad hanc
$a\,dy = y^2dx - x^{-\frac{4n}{2n+1}}dx$ si ponatur
$p = (2n+1)x^{\frac{1}{2n+1}}$ et

$$q = -\frac{a}{p} + \cfrac{1}{-\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{-\frac{5a}{p}+\cfrac{1}{-\frac{7a}{p}+\cfrac{1}{-\frac{9a}{p}+\cfrac{1}{\dots}}}}}$$

$$\cfrac{1}{-\frac{(2n-1)a}{p}+\cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}}y}}$$

Absolute ergo ex hac aequatione $a\,dq = dp(1-q^2)$ erit

$dp = \frac{a\,dq}{1-qq}$

$p = \frac{a}{2}\, l\,\frac{1+q}{1-q}$ | $e^{\frac{2p}{a}} - e^{\frac{2p}{a}}q = 1+q$

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\frac{3a}{p}+\cfrac{1}{\frac{5a}{p}+\cfrac{1}{\frac{7a}{p}+\text{etc.}}}}$$

$$q = \frac{e^{\frac{2p}{a}}-1}{e^{\frac{2p}{a}}+1}$$

Sit $q = z\sqrt{-1}$ et $p = u\sqrt{-1}$ erit ex aequatione
$a\,dz = du(1+z^2)$ radix z ut sequitur

$$z = -\frac{a}{u} + \cfrac{1}{\frac{3a}{u}+\cfrac{1}{-\frac{5a}{u}+\cfrac{1}{\frac{7a}{u}+\cfrac{1}{-\frac{9a}{u}+\text{etc.}}}}}$$

Si $a=1$ haec expressio negative sumta dat tangentem complementi arcus u seu arcus $90-u$ seu z erit tang. arcus $90+u$.

$$\text{Ergo } e^{\frac{2p}{a}} = 1+\frac{2}{q-1} = 1+\cfrac{2}{\frac{a-p}{p}+\cfrac{1}{\frac{3a}{p}+\cfrac{1}{\frac{5a}{p}+\cfrac{1}{\frac{7a}{p}+\cfrac{1}{\frac{9a}{p}+}}}}}$$

$$e^{\frac{1}{a}} = 1+\cfrac{2}{(2a-1)+\cfrac{1}{6a+\cfrac{1}{10a+\cfrac{1}{14a+\text{etc.}}}}}$$

Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 70

Применение цепных дробей к решению дифференциальных уравнений. Связь между трансцендентными величинами и цепными дробями прерывных дробей к решению дифференциальных уравнений. При ее подготовке нами были использованы не только мемуары Эйлера, но и заметки из его записных книжек, а также переписка с Гольдбахом [3; 18].

Впервые Эйлер применил теорию непрерывных дробей к решению дифференциальных уравнений в связи с уравнением Риккати. Эту идею он высказал в письме к Гольдбаху от 25 ноября 1731 г. [18], а полученные результаты опубликовал в 1737—1739 гг. в мемуарах [13] и [14]. В частности, там был изучен вопрос о нахождении значения непрерывной дроби путем интегрирования соответствующего уравнения Риккати.

В работе [13] Эйлер показывает, что значение непрерывной дроби $q(p) = \cfrac{a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{5a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{7a}{p} + \ldots}}}$ должно удовлетворять уравнению

$$adq + q^2 dp = dp\,. \qquad (*)$$

Для получения этого результата он, во-первых, рассматривает бесконечный ряд, эквивалентный данной непрерывной дроби; во-вторых, находит дифференциальное уравнение, решением которого является этот ряд.

Проинтегрировав уравнение (*) и зная непрерывную дробь для $e^{\frac{2p}{a}}$, Эйлер находит решение как непрерывную дробь для представления величины $q = \dfrac{e^{\frac{2p}{a}} + 1}{e^{\frac{2p}{a}} - 1}$.

Как видно из заметки в записной книжке (**131, л. 70**), результат, опубликованный в [13], был получен Эйлером гораздо раньше. Запись содержит решение уравнения $adq = q^2dp - dp$, связанное с представлением q через непрерывную дробь, и основанное на нем решение уравнения $adz = du(1 + z^2)$. Вероятнее всего, указанный выше способ решения уравнения Риккати был известен Эйлеру уже в 1735 г.

Заметка также содержит разложения:

$$e^{\frac{2p}{a}} = 1 + \frac{2}{q-1} = 1 + \cfrac{2}{\cfrac{a-p}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{5a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{7a}{p} + etc,}}}}$$

$$e^{\frac{1}{a}} = 1 + \cfrac{2}{(2a-1) + \cfrac{1}{6a + \cfrac{1}{10a + etc.}}}.$$

В работе [14] Эйлер находит непрерывную дробь, с помощью которой решает уравнение

$$ncx^n dx + cy^2 dx + dy = 0 \quad . \qquad (**)$$

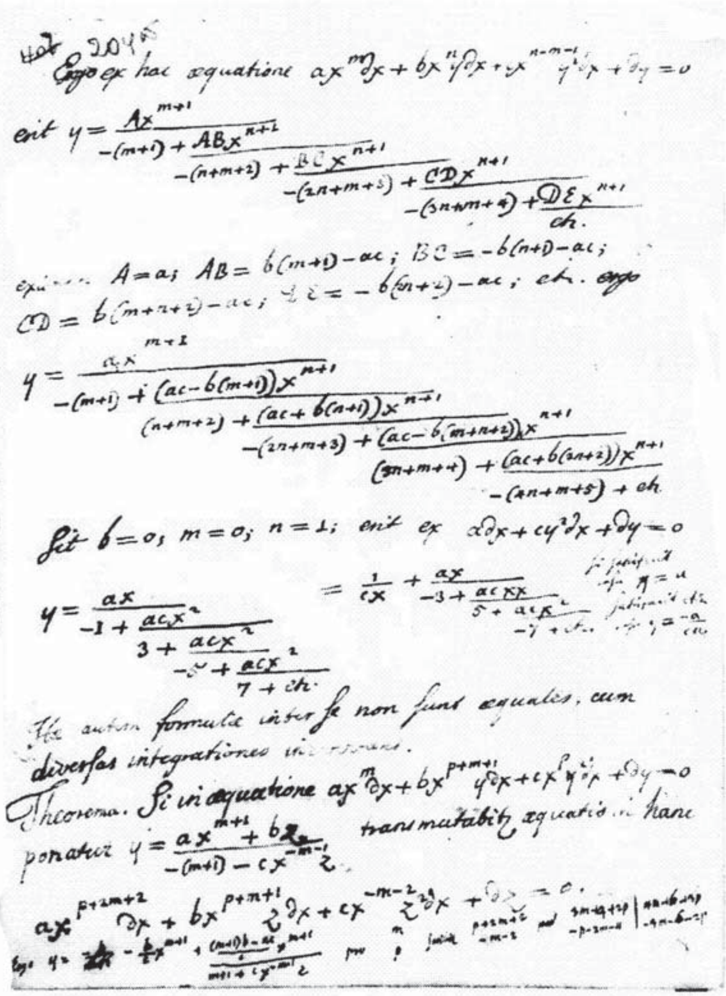
Лист 204 об записной книжки **131** содержит решение уравнения

$$ax^m dx + bx^n y dx + cx^{n-m-1} y^2 dx + dy = 0,$$

которое имеет вид:

$$y = \cfrac{Ax^{m+1}}{-(m+1) + \cfrac{ABx^{n+1}}{-(n+m+2) + \cfrac{BCx^{n+1}}{-(2n+m+3) + \cfrac{CDx^{n+1}}{-(3n+m+4) + \cfrac{DEx^{n+1}}{etc}}}}},$$

где $A = a$, $AB = b(m + 1) - ac$, $BC = -b(n + 1) - ac$,



204 об

Ergo ex hac aequatione $ax^m dx + bx^n y dx + cx^{n-m-1} y^2 dx + dy = 0$

erit $y = \cfrac{Ax^{m+1}}{-(m+1) + \cfrac{ABx^{n+1}}{-(n+m+2) + \cfrac{BCx^{n+1}}{-(2n+m+3) + \cfrac{CDx^{n+1}}{-(3n+m+4) + \cfrac{DEx^{n+1}}{\text{etc.}}}}}}$

existente $A = a$; $AB = b(m+1) - ac$; $BC = -b(n+1) - ac$; $CD = b(m+n+2) - ac$; $DE = -b(2n+2) - ac$; etc. ergo

$$y = \cfrac{ax^{m+1}}{-(m+1) + \cfrac{(ac - b(m+1))x^{n+1}}{(n+m+2) + \cfrac{(ac + b(n+1))x^{n+1}}{-(2n+m+3) + \cfrac{(ac - b(m+n+2))x^{n+1}}{(3n+m+4) + \cfrac{(ac + b(2n+2))x^{n+1}}{-(4n+m+5) + \text{etc.}}}}}}$$

Sit $b = 0$, $m = 0$; $n = 1$; erit ex $adx + cy^2dx + dy = 0$

$$y = \cfrac{ax}{-1 + \cfrac{acx^2}{3 + \cfrac{acx^2}{-5 + \cfrac{acx^2}{7 + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{cx} + \cfrac{ax}{-3 + \cfrac{acxx}{5 + \cfrac{acxx}{-7 + \text{etc.}}}}$$

Hae autem formulae inter se non sunt aequales, cum diversas integrationes involvunt.

Theorema. Si in aequatione $ax^m dx + bx^{p+m+1} y^2 dx + cx^p y^2 dx + dy = 0$ ponatur $y = \frac{ax^{m+1} + bz}{-(m+1) - cx^{-m-1}z}$ transmutabitur aequatio in hanc

$ax^{p+2m+2} dx + bx^{p+m+1} z dx + cx^{-m-2} z^2 dx + dz = 0$.

Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 204 об

Применение цепных дробей к решению дифференциальных уравнений

$CD = b(m + n + 2) - ac$, $DE = -b(2n+2) - ac$, *etc*. Далее рассмотрен частный случай этого уравнения при $b = 0$, $m = 0$, $n = 1$:

$$adx + cy^2 dx + dy = 0,$$

$$y = \cfrac{ax}{-1 + \cfrac{acx^2}{3 + \cfrac{acx^2}{-5 + \cfrac{acx^2}{7 + etc}}}}$$

Сравнивая и анализируя содержание заметки и мемуара [14], мы пришли к выводу, что запись содержит не только подготовительные материалы к этой публикации. Заметка указывает на то, что уже в 1738—739 гг. Эйлер наметил пути исследования, результаты которого опубликовал значительно позже. В мемуаре «Summatio fractionis continuae cujus indices progressionem arithmeticam constituunt dum numeratores omnes sunt unitates ubi simul resolutio aequationis Riccationae per hujus modi fractionis do cetum» [15] он изучает суммирование непрерывной дроби вида

$$S = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \dots}}, \qquad (***)$$

где a, b, c,... образуют арифметическую прогрессию. Для решения поставленной задачи он показывает, что подходящая дробь k-го порядка может быть записана в виде дроби $\frac{z}{\psi}$, где

$$Z = 1 + \frac{k}{az} + \frac{(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot abczy} + \frac{(k-2)(k-3)(k-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3abcxyz} + $$
$$+ \frac{(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)}{4!\, abcdvxyz} + \dots$$

$$\psi = \frac{1}{a} + \frac{(k-2)(k-3)}{1 \cdot 2 \cdot abczy} + \frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3abcdxyz} + \ldots$$

и x, y, z, ... определяются равенствами:

$$z = a + k\Delta;$$

$$y = a + (k-1)\Delta;$$

$$x = a + (k-2)\Delta;\ v = a + (k-3)\Delta;\ \ldots;$$

Δ — разность арифметической прогрессии.

Затем Эйлер находит предел S при $k \to \infty$. Умножая числители полученных рядов (начиная со второго члена) соответственно на $x^{\Delta}, x^{2\Delta}, x^{3\Delta}$ и т.д., он вводит в рассмотрение ряды

$$p(x) = 1 + \frac{x^{\Delta}}{a\Delta} + \frac{x^{2\Delta}}{1 \cdot 2ab\Delta^2} + \frac{x^{3\Delta}}{1 \cdot 2 \cdot 3abc\Delta^3} + \ldots,$$

$$q(x) = \frac{1}{a} + \frac{x^{\Delta}}{ab\Delta} + \frac{x^{2\Delta}}{2!\,abc\Delta^2} + \ldots$$

и получает $S = \left.\frac{p(x)}{q(x)}\right|_{x=1}$.

Таким образом, исходную задачу он сводит к суммированию рядов $p(x)$ и $q(x)$, причем функция $q(x)$ выражается через $p(x)$. Формальное дифференцирование ряда

$$p(x) = 1 + \frac{x^{\Delta}}{a\Delta} + \frac{x^{2\Delta}}{1 \cdot 2ab\Delta^2} + \frac{x^{3\Delta}}{1 \cdot 2 \cdot 3abc\Delta^3} + \ldots \qquad (1)$$

приводит к уравнению

$$x\frac{dp}{dx} = x^{\Delta}q, \qquad (2)$$

откуда,

$$q(x) = \frac{1}{x^{\Delta-1}}\frac{dp}{dx}. \qquad (3)$$

Далее нужно найти функцию $p(x)$, определяемую рядом (1). Для этого Эйлер ищет то дифференциальное уравнение, которому она должна удовлетворять.

Из уравнения (3) следует:

$$x^a q = x^{a-\Delta+1} \frac{dp}{dx}. \tag{4}$$

Дифференцируя это равенство, он получает:

$$d(x^a q) = (a - \Delta + 1)x^{a-\Delta} \frac{dp}{dx} dx + x^{a-\Delta+1} \frac{d^2 p}{dx^2}. \tag{4a}$$

Из определения

$$q(x) = \frac{1}{a} + \frac{x^\Delta}{ab\Delta} + \frac{x^{2\Delta}}{2!\, abc\Delta^2} + \ldots$$

следует равенство

$$d(x^a q) = p x^{a-1} dx. \tag{5}$$

Из равенства (4a) и (5) получается линейное уравнение 2-го порядка относительно $p(x)$:

$$p x^{a-1} dx = x^{a-\Delta+1} \frac{d^2 p}{dx^2} + (a - \Delta + 1)x^{a-\Delta} \frac{dp}{dx} dx,$$

Начальные условия таковы: из определения $p(x)$ вытекает, что $p(0) = 1$, кроме того, при $\Delta > 1$ $\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=0} = 0$, при $\Delta = 1$ $\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=0} = \frac{1}{a}$, а при $\Delta < 1$ $\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=0} = \infty$.

Далее Эйлер строит дифференциальное уравнение, которому удовлетворяло бы частное от деления двух функций

$$\frac{p(x)}{q(x)} = z(x). \tag{6}$$

Таким образом, значение непрерывной дроби (***) может быть найдено как $Z(1)$. В силу определения функций $p(x)$ и $q(x)$ начальное значение $z(0) = a$.

Исходя из (3) и (6), Эйлер получает $q = \dfrac{qdz + zdq}{x^{\Delta-1}dx}$

или $x^{\Delta-1}qdx = qdz + zdq$, следовательно,

$$dq = \frac{x^{\Delta-1}qdx - qdz}{z}.$$

Подставляя это значение dq в равенство

$$d(x^a q) = ax^{a-1}qdx + x^a dq,$$

он находит

$$d(x^a q) = ax^{a-1}qdx + \frac{x^{a+\Delta-1}qdx - x^a qdz}{z}.$$

Приравнивая правые части данного уравнения и уравнения (5), он приходит к соотношению

$$px^{a-1}dx = ax^{a-1}qdx + \frac{x^{a+\Delta-1}qdx - x^a qdz}{z}.$$

Затем это равенство умножается на $\dfrac{z}{x^{a-1}q}$ и, принимая во внимание (3), Эйлер получает уравнение

$$z^2 dx = azdx + x^{\Delta}dx - xdz,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z^2 - \frac{a}{x}z - x^{\Delta-1} = 0. \tag{7}$$

Так как известно начальное условие $z(0) = a$, то отыскание величины S сводится к решению уравнения (7), которое, по замечанию Эйлера, «явно содержалось в уравнении Риккати» [15, §17]. Применяя подстановки

$$y = \frac{z}{x^a} \text{ и позже } x^a = t, \tag{8}$$

после ряда преобразований он получает уравнение вида

$$ady + y^2 dt = t^{\frac{\Delta-2a}{a}}dt. \tag{9}$$

Таким образом, для отыскания значения непрерывной дроби

$$S = a + \cfrac{1}{a + \Delta + \cfrac{1}{a + 2\Delta + \cfrac{1}{a + 3\Delta + \ldots}}}. \tag{10}$$

надо найти решение $y = y(t)$ уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{t=0} = \infty$, и взять значение этого решения при $t = 1$.

Решив задачу о нахождении значения непрерывной дроби с помощью уравнения Риккати, Эйлер показал, что известным случаям интегрируемости уравнения (9) соответствует один и тот же вид непрерывной дроби. При этом он указал, что при различных случаях интегрируемости различается лишь конечное число первых неполных частных соответствующих непрерывных дробей.

Основным, по мнению Эйлера, является случай $\Delta = 2a$. Тогда решение уравнения (9) может быть получено методом разделения переменных и будет иметь вид:

$$t = \frac{a}{2} \ln \frac{1 + y}{y - 1} + C .$$

Учитывая, что при начальных условиях $C = 0$, и решая последнее уравнение относительно y, Эйлер находит

$$y = \frac{e^{\frac{2t}{a}} + 1}{e^{\frac{2t}{a}} - 1}.$$

Пусть $t = 1$, тогда

$$S = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \cfrac{1}{7a + etc}}} = \frac{e^{\frac{2}{a}} + 1}{e^{\frac{2}{a}} - 1}. \tag{11}$$

Далее Эйлер рассматривает общий случай интегрируемости, когда $\frac{\Delta - 2a}{a} = -\frac{4i}{2i \pm 1}$, где i — целое число, т.е. $\Delta = \pm 2a(2i \pm 1)$. Полагая, $\alpha = \frac{a}{2i \pm 1}(\Delta = \pm 2\alpha)$, он получает непрерывную дробь, содержащую лишь нечетные неполные частные.

Найденный результат позволил ему сделать вывод, что если неполные частные непрерывной дроби образуют другую арифметическую прогрессию, то ее нахождение указанным методом невозможно, так как в этом случае получается неинтегрируемое уравнение Риккати. Это заключение получило свое обоснование в работах Лиувилля, где было доказано, что интегрируемость специального уравнения Риккати в квадратурах осуществима лишь в случаях, указанных Д. Бернулли и полностью изученных Эйлером: для уравнения (9) при $\frac{\Delta - 2a}{a} = -\frac{4i}{2i \pm 1}$, где i — целое.

Таким образом, рассуждения Эйлера указывали одно из возможных направлений исследования неинтегрируемых случаев уравнения Риккати. Идея состояла в том, чтобы применить равенство

$$m - b + \cfrac{1}{2m - b + \cfrac{1}{3m - b + \cfrac{1}{4m - b + \ldots}}} = -\frac{A}{B},$$

где

$$A = \int_0^\infty \frac{dx}{x^{2+\frac{b}{m}} e^{\frac{1+x^2}{mx}}}; \quad B = \int_0^\infty \frac{dx}{x^{1+\frac{b}{m}} e^{\frac{1+x^2}{mx}}},$$

к непрерывной дроби (10).

Так как $\Delta = m$, $a = \Delta - b = m - b$, то

$$A = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^{3-\frac{a}{\Delta}} e^{\frac{1+x^2}{\Delta x}}}; \quad B = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^{2-\frac{a}{\Delta}} e^{\frac{1+x^2}{\Delta x}}}.$$

Следовательно, $y = y(1) = -\dfrac{A}{B}$, где $y = y(t)$ — решение уравнения (9).

В конце работы [15] Эйлер решает обратную задачу: интегрирование уравнения Риккати относительно неизвестной функции $z = z(t)$ с помощью непрерывной дроби, значение которой выражено через функции от t.

Метод Эйлера состоит в применении бесконечной последовательности единообразных дробно-линейных преобразований исходного уравнения

$$dy + ay^2 dx = acx^{2m} dx . \tag{12}$$

С помощью замены переменных $y = x^m z;\ x^{m+1} = t$ он получает:

$$dz - n\frac{z}{t}dt + bz^2 dt = bcdt , \tag{13}$$

где $b = \dfrac{a}{m+1}; -n = \dfrac{m}{m+1}$.

Далее он вводит однотипные преобразования. Сначала следует подстановка

$$z = \frac{n+1}{bt} + \frac{c}{v}, \tag{14}$$

приводящая уравнение (13) к виду:

$$dv - (n+2)\frac{v}{t}dt + bv^2 dt = bcdt , \tag{15}$$

затем подстановка $v = \dfrac{n+3}{bt} + \dfrac{c}{u}$ дает уравнение

$$du - (n+4)\frac{u}{t}dt + bu^2 dt = bcdt .$$

Продолжая этот процесс и анализируя всю цепочку преобразований, начиная с (14), Эйлер делает вывод, что решение уравнения (13) представимо в виде:

$$z = \frac{n+1}{bt} + \cfrac{c}{\cfrac{n+3}{bt} + \cfrac{c}{\cfrac{n+5}{bt} + \cfrac{c}{\cfrac{n+7}{bt} + \ldots}}}. \qquad (16)$$

Так как при $t = 0$ $z = \infty$, он замечает, что представление (16) имеет место, если уравнение (13) интегрируется так, что $z = \infty$. Вопрос о сходимости (16), о единственности решения уравнения при указанных условиях и о том, удовлетворяет ли функция $z = z(t)$ уравнению (13), Эйлером не рассматривался.

Особо следует отметить мемуар «Analysis fagilis aequationem Riccationum per fractionem continuam resolvendi» [17], где достаточно отчетливо ставится проблема единственности. Исходным пунктом исследования явилось уравнение, аналогичное уравнению (13):

$$ady - \frac{bydx}{x} + y^2dx = x^{n-2}dx\,, \qquad (17)$$

которое после ряда преобразований и замен принимает вид:

$$axdz - czdx + z^2dx = x^ndx\,. \qquad (18)$$

Сделав замену $z = c + \dfrac{x^n}{p}$, Эйлер получил уравнение

$$axdp - (c + an)pdx + p^2dx = x^ndx\,. \qquad (19)$$

Далее, как и в предыдущей работе [15], он использует однотипные замены: $p = c + an + \dfrac{x^n}{q}$, уравнение (22) приводит к виду:

$$axdq - (c + 2an)qdx + q^2dx = x^ndx\,;$$

$q = c + 2an + \dfrac{x^n}{r}$ дает уравнение

$$axdr - (c + 3an)rdx + r^2dx = x^n dx \text{ и т.д.}$$

В соответствии с последовательностью этих преобразований Эйлер получает представление решения уравнения (18) в форме

$$z = c + \cfrac{x^n}{c + an + \cfrac{x^n}{c + 2an + \cfrac{x^n}{c + 3an + \ldots}}}. \tag{20}$$

Этот результат позволяет ему сделать вывод, что решение уравнения (17), где b заменено на $(c - a)$, имеет вид

$$y = \frac{c}{x} + \cfrac{x^{n-1}}{c + an + \cfrac{x^n}{c + 2an + \cfrac{x^n}{c + 3an + \ldots}}}. \tag{21}$$

Тогда при $b = 0$ (или $c = a$)

$$y = \frac{a}{x} + \cfrac{x^{n-1}}{a(1 + n) + \cfrac{x^n}{a(1 + 2n) + \cfrac{x^n}{a(1 + 3n) + \ldots}}}. \tag{22}$$

Эйлер отмечает, что при $n > 0$ решение (20) принимает значение c при $x = 0$, а также при $n < 0$ $z(\infty) = c$. Записав решения уравнения (17) в форме (26), он выражает уверенность в том, что начальные условия решений рассматриваемых уравнений определяют их (решения) однозначно. Затем Эйлер рассматривает простейший случай интегрируемости уравнения (17): $n = 2, b = 0$.

Из уравнения $ady + y^2dx = dx$ следует, что

$$dx = \frac{ady}{1 - y^2},$$

тогда

$$y = \frac{\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1}, \text{ где } \Delta = const.$$

Используя замену $y = \dfrac{z}{x}$ и уравнение (18), он находит, что решение z уравнения

$$axdz - azdx + z^2dx = x^2dx. \tag{23}$$

представляется дробью

$$z = x\frac{\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1}. \tag{24}$$

Взяв разложение (20) для z, Эйлер получает

$$z = a + \cfrac{x^2}{3a + \cfrac{x^2}{5a + \cfrac{x^2}{7a + \ldots}}}. \tag{25}$$

Из (25) следует, что при $x = 0,\ z = a$. В соответствии с этим в выражении (24) нужно выбрать значение Δ так, чтобы $z(0) = a$, что могло иметь место, по мнению Эйлера, когда $\Delta = -1$. Тогда

$$z = x\frac{e^{\frac{2x}{a}} + 1}{e^{\frac{2x}{a}} - 1}. \tag{26}$$

Это выражение при $x = 0$ обращается в неопределенность, поэтому Эйлер считает x бесконечно малым, раскладывает в ряд числитель и знаменатель, пренебрегая членами более высокого порядка малости, чем x. В результате он получает приближенное равенство

$$z \approx x\frac{2+\dfrac{2x}{a}}{\dfrac{2x}{a}} = x + a,$$

что означает: начальное условие решения (26) и решения (25) одно и то же, а именно $z(0) = a$. Вследствие этого, по заключению Эйлера, значение дроби (25) представимо в форме частного двух степенных рядов

$$z = \frac{1+\dfrac{x^2}{2a^2}+\dfrac{x^4}{24a^4}+\dfrac{x^6}{72a^6}+\ldots}{\dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{x^2}{6a^2}+\dfrac{x^4}{120a^4}+\ldots\right)}$$

Далее он рассматривает дробь (25) при $x = 1,\ a = 1$:

$$\frac{e^2+1}{e^2-1} = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\ldots}}}$$

и показывает ее быструю сходимость.

В заключении мемуара [17] Эйлер изучает непрерывную дробь

$$z = c+\cfrac{x^n}{c+na+\cfrac{x^n}{c+2na+\cfrac{x^n}{c+3na+\ldots}}},$$

где z удовлетворяет уравнению

$$axdz - czdx + z^2dx = x^n dx,$$

рассматривает примеры.

Таким образом, изучение связи непрерывных дробей и решений дифференциальных уравнений позволило Эйлеру 1) решение дифференциального уравнения представить непрерывной дробью, т.е. по-новому определить функцию; 2) полностью решить проблему интегрируемости уравнения Риккати; 3) поставить проблему единственности решения дифференциального уравнения; 4) расширить сферу применения аппарата непрерывных дробей.

Список сокращений

ИМИ — Историко-математические исследования
ОО — Opera omnia

Список литературы

1. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 129—140.

2. Добровольская Э. М. Развитие теории цепных дробей в XVII—XVIII вв.: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1991.

3. Кладо Т. Н., Копелевич Ю. Х., Лукина Т. А., Мельников И. Г., Смирнов В. И., Юшкевич А. П. (при участии Бирмана К. Р. и Лани Ф. Г.) Леонард Эйлер. Переписка. Аннотированный указатель. Л.: Наука, 1967.

4. Кушнир Е. А. Решение Л. Эйлером разностных обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами методом определенных интегралов // Ист.-мат. исслед. М., 1957. Вып. X. С. 363—371.

5. Павлидис В. Д. Непрерывные дроби в исследованиях Эйлера // Из истории математики XVIII в. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783): Сб. науч. ст. Вып. 2. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2001. С. 10—50.

6. Симонов Н. И. О научном наследии Л. Эйлера в области дифференциальных уравнений // Ист.-мат. исслед. М., 1954. Вып. 7. С. 513—595.

7. Симонов Н. И. Об исследованиях Л. Эйлера по интегрированию линейных уравнений и систем линейных уравнений с частными производными // Ист.-мат. исслед. М., 1954. Вып. 7. С. 327—363.

8. Тимченко И. Ю. Основание теории аналитических функций. Т. 1. Одесса, 1899.

9. Эйлер Л. Интегральное исчисление: В 2 т. М., 1956—1958.

10. Юшкевич А. П. Л. Эйлер. М.: Знание, 1982. (Математика и кибернетика. Вып. 7).

11. Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. 4. Leipzig, 1908. S. 871— 1074.

12. Euler L. Opera omnia. Lipsiae et Berolini. Ser. I.11 — 1913. 7—15; 12 — 1914. 7—11; 13—1914. 7—13.

13. Euler L. De fractionibus continuis // OO.1. 14. 187—215.

14. Euler L. De fractionibus continuis observationes // OO. I. 14. 291—349.

15. Euler L. Summatio fractionis continuae cujus indices progressionem arithmeticam constituunt dum numeratores omnes sunt unitates ubi simul resolutio aequationis Riccationae per hujus modi fractionis do cetum // OO. I. 23.

16. Euler L. Methodus inveniendi formulas integrates qual certis casibus datam inter se teneant rationem, ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi // OO. I. 18.

17. Euler E. Analysis fagilis aequationem Riccationum per fractionem continuam resolvendi // OO. 1. 23.

18. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729—1764 / Herausgegeben und eingeleiten von A. P. Iuskevic und E. Winter. — Berlin, 1965.

19. Wieleitner H. Geschichte der Mathematik. Leipzig, 1911.

И. В. Игнатушина

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ Г-ФУНКЦИИ В ЗАПИСНЫХ КНИЖКАХ Л. ЭЙЛЕРА

Среди трансцендентных функций важнейшей по степени использования для решения теоретических и прикладных задач из различных областей физико-математических и технических наук является *гамма-функция* (Г-функция), или *эйлеров интеграл второго рода*.

$\Gamma(z)$ — однозначная аналитическая функция, заданная на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z = -n$ (где $n = 1, 2, 3\ldots$), в которых она имеет простые вычеты $(-1)^n \dfrac{1}{n!}$.

Она определяется формулой:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} n^z, \qquad (1)$$

где $z \neq 0, -1, -2, \ldots$

Если действительная часть z положительна, $\Gamma(z)$ может быть представлена в интегральной форме (эйлеров интеграл второго рода):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \ . \qquad (2)$$

Полагая в выражении (2) $x = \ln \frac{1}{t}$, получим другое, часто встречающееся представление Г-функции:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{z-1} dt \ .$$

Теория Г-функции излагается в курсах математического анализа (см., например, [1 , с. 7—34; 2, с. 47—57, 64—65; 3, с. 260—274; 4 с. 13—48; 5, с. 753—794]).

В справочниках по специальным функциям [6, 7, 8, 9 и др.] приводятся многочисленные соотношения, установленные для Г-функции при целых, дробных, действительных и комплексных значениях аргумента. Эта функция, как писал А. Н. Крылов, «...получила множество самых разнообразных приложений, как то: в руках Крампа в теории астрономических рефракций, в руках Гаусса как основание учения о распределении случайных ошибок и метода наименьших квадратов, в руках Лапласа и Пуассона в одном из основных вопросов теории вероятностей, у Максвелла в кинетической теории газов, у Тугсона в генетике, биологии и статистике» [10, с. 20].

История теории Г-функции ведет свое начало от Леонарда Эйлера, который ввел в математику понятие этой специальной функции и впервые исследовал ее свойства. Результаты, полученные Эйлером в указанной области, были по достоинству оценены историками математики, которые показали, что ему принадлежит заслуга создания основ теории функции гамма [11—29 и др.].

Наиболее внимательно этот вопрос был рассмотрен В. В. Гуссовым в статье «Работы русских ученых по теории гамма-функции» [30], А. Н. Гусевым в диссертации «Бесконечные ряды у Л. Эйлера» [31], И. А. Головинским в статье «Об интерполировании последовательностей у Валлиса и Эйлера» [32], а также А. И. Курдюмовой, диссертация которой [33] посвящена развитию теории гамма-функции после Эйлера.

Впервые идею о том, что величину, которая по определению принимает только целые положительные значения, можно с помощью расширения понятия заменить непрерывной величиной, выразил в XVII в. Джон Валлис (1616—1703) в своей «Арифметике бесконечных величин» (1655 г.) [16, т. II, с. 152—155].

В 1722 г. Христиан Гольдбах (1690—1764) поставил задачу об интерполировании ряда факториалов

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + x! + \ldots, \qquad (3)$$

которая сыграла главную роль в появлении Г-функции. Решение этой задачи было получено Даниилом Бернулли(1700—1782) и Леонардом Эйлером (1707—1783), которые в то время проживали на одной квартире в Петербурге.

Д. Бернулли в постскриптуме своего письма к Х. Гольдбаху от 17 октября 1729 г. [34, т. II, с. 324—325] привел представление общего члена (с номером x) ряда (3) в виде бесконечного произведения

$$\left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\frac{3}{2+x}\frac{4}{3+x}\cdots\frac{A}{A-1+x}\right),$$

где A может принимать бесконечно большие значения.

Л. Эйлер же сообщил о своем решении задачи об интерполировании ряда факториалов на неделю позже Д. Бернулли. В своем первом письме к Х. Гольдбаху от 24 октября 1729 г. [34, т. I, с. 3—5; 35, с. 19—21] он привел два выражения для общего члена ряда (3) в виде бесконечных произведений:

$$\frac{1 \cdot 2^x}{1+x} \cdot \frac{2^{1-x} \cdot 3^x}{2+x} \cdot \frac{3^{1-x} \cdot 4^x}{3+x} \cdot \frac{4^{1-x} \cdot 5^x}{4+x} \ldots$$

и

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{(1+x)(2+x)\ldots(n+x)}(n+1)^x .$$

Однако эти результаты Эйлер получил, возможно, даже раньше, чем Д. Бернулли, но, по крайней мере, абсолютно самостоятельно. Такой вывод был сделан на основе обнаруженной нами заметки из **записной книжки № 129** Эйлера, которая датируется 1725—1727 гг. [44]. Здесь на л. 169 об.—170 содержится представление общего члена (с номером m) ряда факториалов в виде следующего бесконечного произведения:

$$\frac{1 \cdot 2^m \cdot 2^{1-m} \cdot 3^m \cdot 3^{1-m} \cdot 4^m \cdot 4^{1-m} \cdot 5^m \cdot 5^{1-m} \cdot 6^m \, etc.}{(1+m)(2+m)(3+m)(4+m)(5+m) etc.} \quad (4)$$

Общую постановку и решение задачи интерполирования Эйлер дал намного позднее в главе XVII («Об интерполировании рядов») своего «Дифференциального исчисления» 1755 г. [36]. Проблеме интерполирования ряда факториалов он посвятил отдельный мемуар Е652 («Об общем члене гипергеометрических рядов» [37]), опубликованный в 1793 г., где дал другой способ получения разложения (4).

В 1729 г., используя идею Валлиса, Эйлер в мемуаре Е19 («О трансцендентных рядах, т.е. о рядах, общий член которых не может быть выражен алгебраически» [38]) нашел «конечное выражение» для общего члена последовательности факториалов.

Другими словами, он получил представление Г-функции в виде определенного интеграла:

$$\Gamma(1+z) = \int_0^1 (-\ln x)^z \, dx .$$

В дальнейших своих исследованиях по теории Г-функции Эйлер вывел и второе представление этой функции в интегральной форме $\Gamma(1+z)=\int_0^\infty x^z e^{-x}dx$, которое опубликовал в мемуарах E368 («О гипергеометрической кривой, заданной уравнением $y = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x$», 1769 г. [39]) и E675 («О значениях интегралов, распространенных от значения $x = 0$ до $x = \infty$», 1781 г. [40]).

Эйлеру принадлежит открытие многих важных свойств Г-функции. Как писал Лежандр (1752—1833), «...это одна из тех теорий, которая принадлежит исключительно Эйлеру...» [41, с. 30]. Дадим краткий обзор результатов Эйлера по теории Г-функции, которые имеются в его опубликованных работах:

1. Не позднее 1730 г. Эйлер вывел выражение Г-функции через произведение B-функций[1]:

$$\int_0^1 (-\ln x)^{\frac{p}{q}}dx = \sqrt[q]{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\ldots(p+1)\cdot}{\cdot\int_0^1 (x-xx)^{\frac{p}{q}}dx\int_0^1 (x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}dx\int_0^1 (x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}dx\ldots\int_0^1 (x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}dx}}.$$

Это равенство он сообщил в письме к Гольдбаху от 8 января 1730 г. [35, с. 27] и опубликовал в мемуаре E19 [38].

2. В 1740—1744 гг. Эйлер получил асимптотическое разложение логарифма Г-функции в ряд Стирлинга

$$\ln y = \ln\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \\ + \frac{1}{12x} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^3} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 6x^5} - \frac{3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10x^7} + etc. \tag{5}$$

[1] Определение бета-функции см. в статье «Возникновение начал теории бета-функции в работах Л. Эйлера» данного сборника.

или

$$\ln y = \ln \Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \tag{5*}$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}}{1 \cdot 2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3 \cdot 4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5 \cdot 6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7 \cdot 8x^7} + etc.,$$

где $\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{30}$, $\mathfrak{C} = \frac{1}{42}$, $\mathfrak{D} = \frac{1}{30}$ и т.д. — числа Бернулли.

Используя разложение (5), Эйлер установил приближенное равенство

$$\Gamma(x+1) \approx \frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$$

и вывел разложение логарифмической производной для Г-функции

$$\frac{dy}{ydx} = \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2x^2} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6x^4} - \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 6x^6} + etc.$$

Для установления разложения (5) он использовал формулу суммирования Эйлера — Маклорена, которую получил еще в 1735 г.

Об этих результатах Эйлер также сообщил в письме к Гольдбаху от 23 июня 1744 г. [35, с. 198]. Ход своих рассуждений Эйлер подробно изложил в гл. VI («О суммировании прогрессий с помощью бесконечных рядов») и XVI («О дифференцировании непредставимых функций») второго тома «Дифференциального исчисления» (1755) [36].

3. В работах Эйлера имеются и другие ряды, связанные с Г-функцией. Так, например, в гл. XVI «Дифференциального исчисления» [36] он опубликовал разложение логарифма Г-функции в степенной ряд:

$$\ln y = -x \cdot 0{,}5772156649015325 +$$
$$+\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)-$$
$$-\frac{1}{3}x^3\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{1}{4}x^4\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)-\ldots,$$

откуда вывел разложение в степенной ряд для логарифмической производной этой функции:

$$\frac{dy}{y} = -dx \cdot 0{,}5772156649015325 +$$
$$+xdx\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)-$$
$$-x^2dx\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)+$$
$$+x^3dx\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)-\ldots$$

Здесь фигурирует эйлерова постоянная c = 0,5772156649..., которая была получена Эйлером еще в 1736 г.

4. В мемуаре E352 («Замечания по поводу красивых отношений между степенными рядами, как прямыми, так и обратными», 1768 г., [45]), Эйлер для обозначения функции $\Gamma(\lambda+1)$ ввел специальный символ $[\lambda]$. Здесь же он вывел формулу дополнения для Г-функции:

$$[\lambda]\cdot[-\lambda] = \frac{\lambda\pi}{\sin\lambda\pi}.$$

Позже этот результат Эйлер опубликовал и в мемуаре 1772 г. E421 («Разложение интегральной формулы $\int x^{f-1}dx(lx)^{\frac{m}{n}}$, где интегрирование распространяется от значения $x = 0$ до $x = 1$» [42]). В этом же мемуаре он установил соотношение между функциями Г и В, которое в современных обозначениях имеет вид:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

5. В мемуаре E816 («Рассуждения о некоторых интегральных формулах, величины которых могут быть выражены в некоторых случаях через квадратуру круга», 1862 г., [43]) Эйлер получил частный случай формулы умножения Гаусса для Г-функции, который выражается равенством:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{n}}\, n^{-\frac{1}{2}}.$$

6. Вопросам исследования Г-функции и построению её графика Эйлер посвятил отдельный мемуар E368 («О гипергеометрической кривой, заданной уравнением $y = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x$», 1769 г., [39]), куда включил следующие результаты:

а) таблицу значений функции $\Gamma(x + 1)$ с шагом $\frac{1}{2}$;

б) график функции $\Gamma(x + 1)$, построенный на промежутке от -1 до $+\infty$;

в) все известные к тому времени выражения для Г-функции;

г) уравнение производной функции Г и таблицу значений тангенсов углов касательных, проведенных к графику этой функции, с осью абсцисс;

д) координаты точки минимума для функции $\Gamma(x+1)$, где $x \in (-1; +\infty)$.

Для ответа на вопрос о том, в какое время и каким путем Эйлер получил эти результаты, особый интерес представляет исследование заметок из его записных книжек [44]. В эти книжки (двенадцать тетрадей разного объема) Эйлер на протяжении всей своей жизни вносил заметки, отражающие ход его творческой работы в различных областях науки, и прежде всего в математике. Нами были обнаружены следующие записи, касающиеся теории Г-функции.

Записная книжка № 129 (1725—1727 гг.)

Заметка на **л. 36 об.** содержит представление членов ряда факториалов

1	2	3	4	5	6	
1	2	6	24	120	720	etc.

с индексами $1\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ в виде соответствующих бесконечных произведений.

[Квадрат] члена с индексом $1\frac{1}{2}$ есть

$$2\,\frac{24\cdot 48\cdot 80\cdot 120\cdot 168\cdot 224\cdot \mathrm{etc.}}{25\cdot 49\cdot 81\cdot 121\cdot 169\cdot 225\cdot \mathrm{etc.}},$$

так как член с индексом $\frac{1}{2}$ равен

$$\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18\cdot \mathrm{etc.}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\cdot \mathrm{etc.}}\cdot\sqrt{2}\,.$$

В той же записной книжке на **л. 169 об. — 170** Эйлер дает ответ на вопрос об интерполировании ряда факториалов

1	2	3	4	5	6	
1	2	6	24	120	720	etc.,

найдя сначала для общего члена x с индексом $\frac{1}{n}$ представление

$$x^n = \frac{1 \cdot 2 \cdot n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{2^{n-1} \cdot 3 \cdot n^n}{(2n+1)^n} \cdot \frac{3^{n-1} \cdot 4 \cdot n^n}{(3n+1)^n} \cdot \frac{4^{n-1} \cdot 5 \cdot n^n}{(4n+1)^n} \cdot$$
$$\cdot \frac{5^{n-1} \cdot 6 \cdot n^n}{(5n+1)^n} etc.$$

Потом, положив $n = \frac{1}{m}$, получает

$$x^{\frac{1}{m}} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{1-m}{m}} \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1-m}{m}} \cdot 4 \cdot 4^{\frac{1-m}{m}} \cdot 5}{(1+m)^{\frac{1}{m}} (2+m)^{\frac{1}{m}} (3+m)^{\frac{1}{m}} (4+m)^{\frac{1}{m}}} etc.$$

Отсюда формулируется общее утверждение: член с индексом m выражается бесконечным произведением

$$\frac{1 \cdot 2^m \cdot 2^{1-m} \cdot 3^m \cdot 3^{1-m} \cdot 4^m \cdot 4^{1-m} \cdot 5^m \cdot 5^{1-m} \cdot 6^m etc.}{(1+m)(2+m)(3+m)(4+m)(5+m)etc.}.$$

Таким образом, здесь получено представление Г-функции в виде бесконечного произведения, о котором Эйлер сообщил в письме к Хр. Гольдбаху от 24 (13) октября 1729 г. [35, с. 19—21]. По-видимому, заметка является фрагментом черновых записей к этому письму и содержит результаты, позднее опубликованные в «Дифференциальном исчислении» [36, т. II, гл. XVIII, с. 550].

Записная книжка № 131 (1736—1740 гг.)

На **л. 13 об.** Эйлер формулирует утверждение:

«Интеграл $\int x^m dx(lx)^n$, который исчезает, если $x = 0$, при $x = 1$ дает $\pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{(m+1)^{n+1}}$, где знак +, если n — число четное, знак −, если n — число нечетное; или этот интеграл есть $\frac{-n(n-1)(n-2)\ldots 1}{(-m-1)^{n+1}}$, и интеграл

$\int x^m dx(-lx)^n = \int x^m dx\left(l\dfrac{1}{x}\right)^n$ дает после интегрирования выражение $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{(m+1)^{n+1}}$».

Исходя из этого утверждения и положив после интегрирования $x = 1$, Эйлер находит, что

$$\int_0^1 x^{ax}x^p dx = \frac{1}{p+1} - \frac{a}{(p+2)^2} + \frac{a^2}{(p+3)^3} - \frac{a^3}{(p+4)^4} + etc.$$

Доказательство же самого утверждения можно найти в этой же книжке на **л. 32**, где Эйлер, последовательно интегрируя по частям, получает:

$$\int x^m dx(-lx)^n = x^{m+1}\left(\frac{(-lx)^n}{m+1} + \frac{n(-lx)^{n-1}}{(m+1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(-lx)^{n-2}}{(m+1)^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{(m+1)^{n+1}}\right).$$

Отсюда, если после интегрирования положить $x = 1$, то будет $\int x^m dx(-lx)^n = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{(m+1)^{n+1}}$, что и требовалось доказать.

Далее, заменив $n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 1$ соответствующим интегралом, Эйлер приходит к равенству:

$$\frac{\int_0^1 x^m(-\ln x)^n dx}{\int_0^1 (-\ln x)^n dx} = \frac{1}{(m+1)^{n+1}},$$

которое показывает связь интеграла $\int_0^1 x^m(-\ln x)^n dx$ с Г-функцией.

Лист 169 об. Здесь Эйлер дает выражение сумм рядов $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2n}$ через π^{2n} и указывает формулы для нахождения коэффициентов пропорциональности:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + etc. = \alpha\pi^2,$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + etc. = \beta\pi^4,$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + etc. = \gamma\pi^6,$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + etc. = \delta\pi^8,$$

$$\alpha = \frac{1}{6};\ \beta = \frac{2\alpha^2}{5};\ \gamma = \frac{4\alpha\beta}{7};\ \delta = \frac{4\alpha\gamma + 2\beta^2}{9}; etc.$$

Далее приведены численные значения этих коэффициентов:

$$\alpha = \frac{1}{6};\ \beta = \frac{1}{90};\ \gamma = \frac{1}{945};\ \delta = \frac{1}{9450}; etc.$$

Эти коэффициенты совпадают с коэффициентами *A, B, C, D, E, etc.* в разложении логарифма Г-функции в ряд Стирлинга, приведенного в мемуаре E368 [39]:

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x - x + $$
$$+ \frac{A}{2x} - \frac{1 \cdot 2B}{2^3 x^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4C}{2^5 x^5} - \frac{1 \cdot 2 \ldots 6D}{2^7 x^7} + etc.,$$

где

$$A = \frac{1}{6},\ B = \frac{1}{90},\ C = \frac{1}{945},\ D = \frac{1}{9450},$$
$$E = \frac{1}{93555}\quad etc.$$

Поскольку

$$A = \frac{2\mathfrak{A}}{1\cdot 2};\ B = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\ C = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1\cdot 2\ldots 6};\ D = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1\cdot 2\cdot\ldots 7};\ etc.,$$

то этот ряд эквивалентен ряду Стирлинга (5*), о котором Эйлер писал Стирлингу в июне 1736 г. [34а] и сообщил в письме к Гольдбаху 23 июня / 4 июля 1744 г. [35, с. 198] и в «Дифференциальном исчислении» [36, т. II, гл. VI, с. 317].

Лист 242. Заметка начинается с утверждения: «Общий член ряда факториалов

1	2	3	4	5	6	
1	2	6	24	120	720	etc.

с индексом n равен интегралу $\int dx(-lx)^n$, где после интегрирования нужно положить $x = 1$».

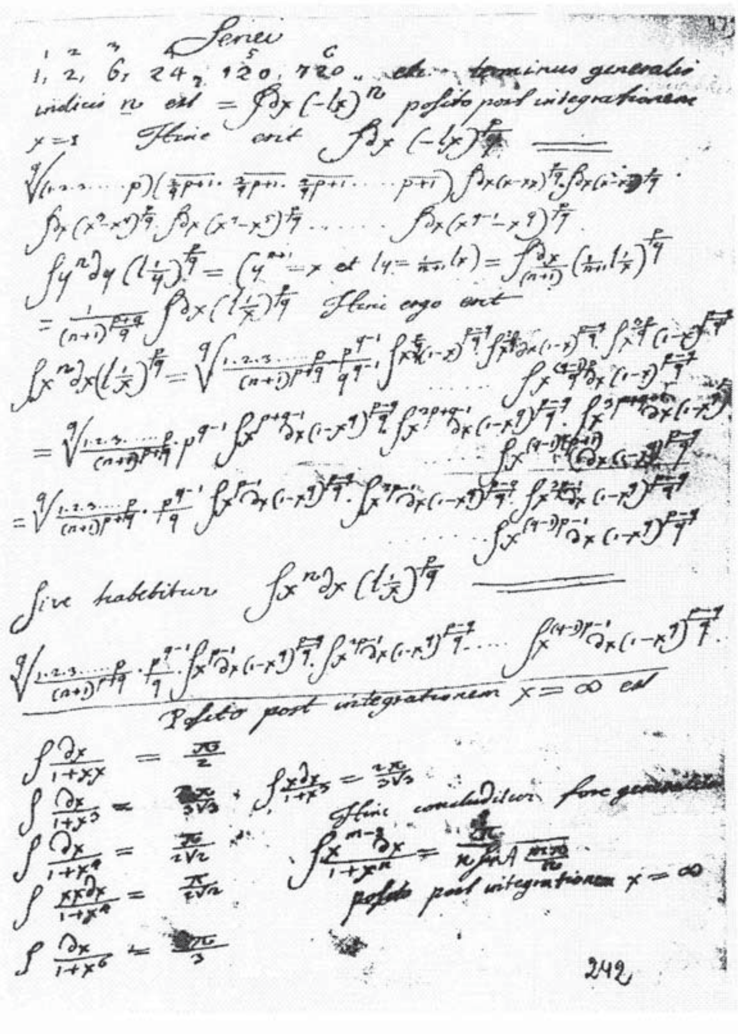
Затем приведено равенство, выражающее этот эйлеров интеграл второго рода или Г-функцию через произведение эйлеровых интегралов первого рода

$$\int_0^1 (-\ln x)^{\frac{p}{q}} dx = \sqrt[q]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\ldots(p+1)\cdot \int_0^1 (x-xx)^{\frac{p}{q}}dx\int_0^1 (x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}dx\int_0^1 (x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}dx\ldots\int_0^1 (x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}dx}.$$

Это равенство имеется в мемуаре E19 [38, с. 20] и упоминается в письме к Гольдбаху от 8 января 1730 [35, с. 27]. Оно играет важную роль в теории Г-функции, так как на его основе Эйлер разработал способ нахождения значений Г-функции.

Далее, показав, что

$$\int_0^1 y^n\left(l\frac{1}{y}\right)^{\frac{p}{q}} dy = \left[y^{n+1} = x\ ,\ \ ly = \frac{1}{n+1}lx\right] =$$



Series

1, 2, 6, 24, 120, 720 .. etc. terminus generalis indicis n est $= \int dx(-lx)^n$ posito post integrationem $x=1$. Hinc erit $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}$ $=$

$\sqrt[q]{(1.2.3\ldots p)\left(\frac{q}{q}p+1 \cdot \frac{2}{q}p+1 \cdot \frac{3}{q}p+1 \ldots p+1\right)\int dx(x-xx)^{\frac{p}{q}} \cdot \int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}} \cdot \int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}} \ldots \int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}}$

$\int y^n dy\left(l\frac{1}{y}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(y^{n+1}=x \text{ et } ly=\frac{1}{n+1}lx\right) = \int\frac{dx}{(n+1)}\left(\frac{1}{n+1}l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}}$

$= \frac{1}{(n+1)^{\frac{p+q}{q}}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}}$ Hinc ergo erit

Sive habebitur $\int x^n dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}}$ $=$

$\sqrt[q]{\frac{1.2.3\ldots p}{(n+1)^{p+q}}\cdot\frac{p^{q-1}}{q}\int x^{p-1}dx(1-x^q)^{\frac{p-q}{q}} \cdot \int x^{2p-1}dx(1-x^q)^{\frac{p-q}{q}}\ldots\int x^{(q-1)p-1}dx(1-x^q)^{\frac{p-q}{q}}}$

Posito post integrationem $x=\infty$ est

$\int\frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2}$

$\int\frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; $\int\frac{xdx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

$\int\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$\int\frac{xxdx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$\int\frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$

Hinc concluditur fore generaliter $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin A\frac{m\pi}{n}}$ posito post integrationem $x=\infty$

242

Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 242

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{n+1} l \frac{1}{x} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{dx}{(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^{\frac{p+q}{q}}} \int_0^1 \left(l \frac{1}{x} \right)^{\frac{p}{q}} dx.$$

Эйлер выводит:

$$\int_0^1 x^n \left(ln \frac{1}{x} \right)^{\frac{p}{q}} dx =$$

$$= \sqrt[q]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots p}{(n+1)^{p+q}} \cdot \frac{p^{q-1}}{q} \int_0^1 x^{p-1} (1-x^q)^{\frac{p-q}{q}} dx \cdot \int_0^1 x^{2p-1} (1-x^q)^{\frac{p-q}{q}} dx \ldots \int_0^1 x^{(q-1)p-1} (1-x^q)^{\frac{p-q}{q}} dx}\,.$$

Лист 269. Здесь найдено значение суммы

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + etc. + \frac{1}{x}\,,$$

при $x = 10$ равное $2{,}9289682539682539 68$.

Ниже Эйлер приводит асимптотическое представление этой суммы

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + etc. + \frac{1}{x} = 0{,}5772156649015322 +$$

$$+ lx + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2x^2} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6x^4} - \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 6x^6} + etc.$$

Эта заметка повторяет фрагмент из «Дифференциального исчисления» [36, гл. VI, § 142a —143, с. 303—304].

В этой же книжке содержится заметка, освещающая представление логарифма Г-функции рядом Стирлинга и асимптотическое разложение её логарифмической производной. По-видимому, она является фрагментом черновых записей Эйлера к письму Гольдбаху от 23 июня / 4 июля 1744 г. [35, с. 197—198], которые позднее были опубликованы во втором томе «Дифференциального исчисления» [36, с. 316—317, 533].

Записная книжка 132 (1740—1744 гг.)

На **л. 233 об.** ставится задача: «Найти сумму гиперболических логарифмов $l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + etc. + lx = S$», в результате решения которой Эйлер получает:

$$S = C + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6x^3} + \\ + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6x^5} - etc.$$

и

$$C = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \frac{1}{1788} + etc.$$ [1]

Далее Эйлер проводит рассуждения, приводящие к вычислению значения C:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot 2n \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1) \cdot \ldots},$$

$$\ln \frac{\pi}{2} = 2 \ln 2 + 2 \ln 4 + 2 \ln 6 + 2 \ln 8 + \ldots \\ + 2 \ln 2n - 2 \ln 3 - 2 \ln 5 - 2 \ln 7 - 2 \ln 9 - \ldots \\ - 2 \ln(2n-1) - \ln(2n+1) - \ldots$$

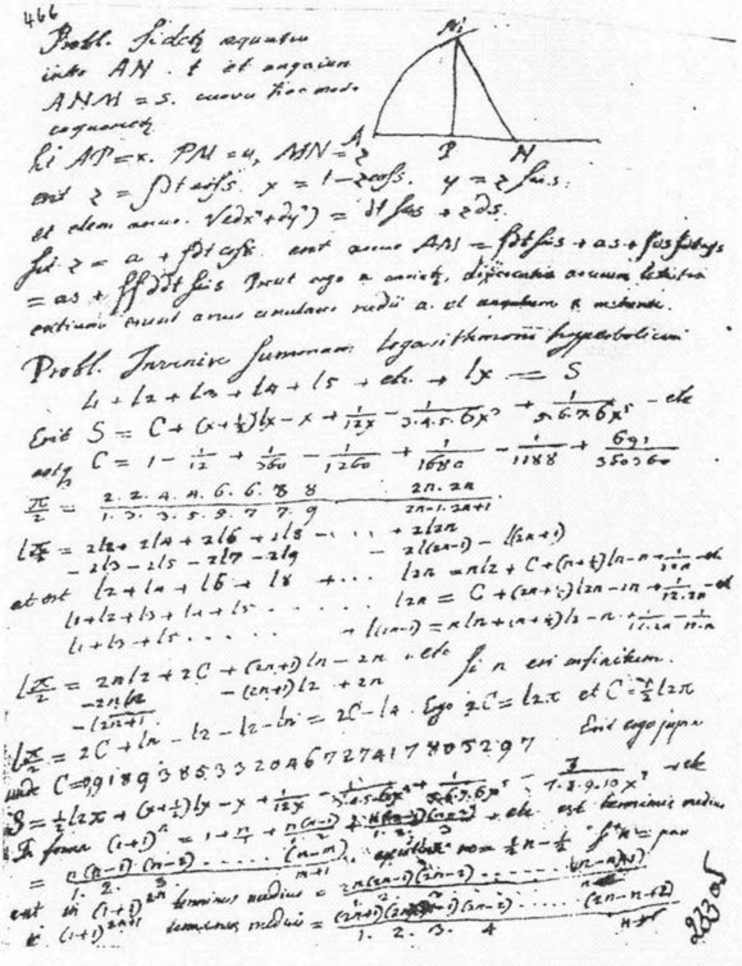
Так как

$$\ln 2 + \ln 4 + \ln 6 + \ln 8 + \ldots + \ln 2n = C + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \\ + \frac{1}{12n} - etc.,$$

[1] Этот ряд получается, если в разложении

$$S = C + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6x^3} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6x^5} - etc.$$

взять $x = 1$.



466

Probl. Si dicatur aequatio inter AN = t et angulum ANM = s, curvam hoc modo cognoscere.

Si AP = x, PM = y, MN = z

erit $z = \int dt \cos s$. $x = t - z\cos s$. $y = z \sin s$.

et elem. arcus $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dt \sin s + z\,ds$.

Sit $z = a + \int dt \cos s$ erit arcus $AM = \int dt \sin s + as + \int ds \int dt \cos s$

$= as + \int\int ddt \sin s$. Erit ergo a arbitr., differentia arcuum habitorum aequatur arcui circulari radii a et angulum s metienti.

Probl. Invenire summam logarithmorum hyperbolicorum

$$l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \text{etc.} + lx = S$$

$$\text{Erit } S = C + (x+\tfrac{1}{2})lx - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6x^3} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot6x^5} - \text{etc}$$

$$\text{atque } C = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \frac{1}{1188} + \frac{691}{360360}.$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8 \ldots 2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9 \ldots 2n-1\cdot2n+1}.$$

$$l\frac{\pi}{2} = 2l2 + 2l4 + 2l6 + 2l8 + \ldots + 2l2n - 2l3 - 2l5 - 2l7 - 2l9 - \ldots - 2l(2n-1) - l(2n+1)$$

$$\text{at est } l2 + l4 + l6 + l8 + \ldots\ l2n = nl2 + C + (n+\tfrac{1}{2})ln - n + \frac{1}{12n} - \text{etc}$$

$$l1 + l2 + l3 + l4 + l5 \ldots\ l2n = C + (2n+\tfrac{1}{2})l2n - 2n + \frac{1}{12\cdot2n} - \text{etc}$$

$$l1 + l3 + l5 \ldots + l(2n-1) = nln + (n+\tfrac{1}{2})l2 - n + \frac{1}{12\cdot2n} - \frac{1}{12n}$$

$$l\frac{\pi}{2} = 2nl2 + 2C + (2n+1)ln - 2n + \text{etc} \quad \text{si } n \text{ est infinitum.}$$

$$-2nl2 - (2n+1)l2 + 2n$$

$$-l(2n+1) \ldots = 2C - l4. \text{ Ergo } 2C = l2\pi \text{ et } C = \tfrac{1}{2}l2\pi$$

Erit ergo

$$l\frac{\pi}{2} = 2C + ln - l2 - l2 - ln \quad 0{,}9189385332046727417805297$$

unde $C = 0{,}9189385332046727417805297$

$$S = \tfrac{1}{2}l2\pi + (x+\tfrac{1}{2})lx - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6x^3} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot6x^5} - \frac{3}{7\cdot8\cdot9\cdot10x^7} + \text{etc}$$

In forma $(1+1)^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3} + \text{etc.}$ est terminus medius si n = par aequalis nom. $\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1\cdot2\cdot3 \ldots m+1}$$

erit in $(1+1)^{2n}$ terminus medius $= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-n+1)}{1\cdot2 \ldots n}$

et $(1+1)^{2n+1}$ terminus medius $= \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots(2n-n+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4 \ldots n-1}$

233 об

Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 132. Л. 233 об

$$ln\, 1 + ln\, 2 + ln\, 3 + ln\, 4 + ln\, 5 + \ldots + ln\, 2n =$$
$$= C + \left(2n + \frac{1}{2}\right) ln\, 2n - 2n + \frac{1}{12 \cdot 2n} - etc.,$$
$$ln\, 1 + ln\, 3 + ln\, 5 + \ldots + ln(2n - 1) =$$
$$= n\, ln + \left(n + \frac{1}{2}\right) ln\, 2 - n + \frac{1}{12 \cdot 2n} - etc.,$$

то

$$ln\frac{\pi}{2} = 2n\, ln\, 2 + 2C + (2n + 1)\, ln\, n - 2n + etc.$$
$$- 2n\, ln\, n - (2n + 1)\, ln\, 2 + 2n + etc.$$

Отсюда, положив n бесконечно большим, Эйлер получает

$$ln\frac{\pi}{2} = 2C + ln\, n - ln\, 2 - ln\, 2 - ln\, n = 2C - l4\,.$$

Следовательно, $2C = l2\pi$ и $C = \frac{1}{2}l2\pi$, откуда

$C = 0{,}9189385332046727417803297$ и

$$S = \frac{1}{2} ln\, 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right) ln\, x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6x^3} +$$
$$+ \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6x^5} - etc.$$

Эта заметка является черновым наброском к соответствующему фрагменту гл. VI «Дифференциального исчисления» [36, с. 316—317].

Лист 234 об. Здесь Эйлер находит значение логарифмической производной Г-функции для целых положительных значений аргумента. Эту заметку можно также считать подготовительным материалом к «Дифференциальному исчислению» [36, гл. XVI, с. 533] и к мемуару E368 [39, с. 54—55].

Для $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$ будет

$$\frac{dy}{ydx} = \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2x^2} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6x^4} - $$
$$- \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 6x^6} + etc.$$

или[1] $\frac{dy}{ydx} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x} - 0{,}5772156649$.

Кроме того получены следующие результаты:

$$x = 0 \qquad \frac{dy}{ydx} = -0{,}5772156649 \qquad y = 1$$

$$x = 1 \qquad \frac{dy}{ydx} = 0{,}4227843350 \qquad y = 1$$

$$x = 2 \qquad \frac{dy}{ydx} = 0{,}9227843350 \qquad y = 2$$

$$x = 3 \qquad \frac{dy}{ydx} = 1{,}2561176683 \qquad y = 6$$

$$x = 4 \qquad \frac{dy}{ydx} = 1{,}5061176683 \qquad y = 24$$

Далее Эйлер отмечает, что $\frac{dy}{ydx} = 0$ при $x = 0{,}46097$. Таким образом, здесь найдено приближенное значение абсциссы точки минимума для функции $\Gamma(x + 1)$ на интервале от -1 до $+\infty$. Это значение, а также выражение

$$\frac{dy}{ydx} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x} - 0{,}5772156649$$

[1] Это равенство получается из предыдущего, если использовать соотношение $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + etc. + \frac{1}{x} = 0{,}5772156649015322 + lx + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2x^2} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6x^4} - \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 6x^6} + etc.$, найденное Эйлером в записной книжке № 131 (л. 269).

Эйлер сообщил в письме к Гольдбаху от 23 июня / 4 июля 1744 г.[35, с. 198].

Записная книжка 133 (датируемая 1749—1753 гг.)

На **л. 170—170 об.** решается задача об интерполировании последовательности

0	1	2	3	
$a,$	$a(a+b),$	$a(a+b)(a+2b),$	$a(a+b)(a+2b)(a+3b),$	$etc.$

«Индексу $\dfrac{\mu}{\nu}$ соответствует член последовательности z, для которого верно

$$z^{\nu} = (a+b)^{\mu} a^{\nu} \frac{(\nu a + \nu b)^{\nu-\mu} \cdot (\nu a + 2\nu b)^{\mu}}{(\nu a + \nu b + \mu b)^{\nu}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(\nu a + 2\nu b)^{\nu-\mu} \cdot (\nu a + 3\nu b)^{\mu}}{(\nu a + 2\nu b + \mu b)^{\nu}} \cdot etc.$$

Индексу $\dfrac{\mu}{\nu} + 1$ соответствует член $z\left(a + \left(\dfrac{\mu}{\nu} + 1\right)b\right)$, индексу $\dfrac{\mu}{\nu} - 1$ соответствует член $\dfrac{\nu z}{\nu a + \mu b}$.

Обозначим член с индексом $\dfrac{\mu}{\nu} - 1$ через y, тогда

$$y = \frac{\nu z}{\nu a + \mu b} \text{ и } y^{\nu} = z^{\nu} \frac{\nu^{\nu}}{(\nu a + \mu b)^{\nu}},$$

т.е.

$$y^{\nu} = a^{\mu} \frac{(\nu a)^{\nu-\mu} (\nu a + \nu b)^{\mu}}{(\nu a + \mu b)^{\nu}} \cdot \frac{(\nu a + \nu b)^{\nu-\mu} (\nu a + 2\nu b)^{\mu}}{(\nu a + \nu b + \mu b)^{\nu}} etc.$$

Так как

$$\frac{\nu a + n\nu b}{\nu a + n\nu b + \mu b} = \frac{\int x^{\nu a + n\nu b + \nu b - 1} dx \left(1 - x^{\nu b}\right)^{\frac{\mu-\nu}{\upsilon}}}{\int x^{\nu a + n\nu b - 1} dx \left(1 - x^{\nu b}\right)^{\frac{\mu-\nu}{\upsilon}}}$$

и

$$\frac{\nu a + n\nu b + \mu b}{\nu a + n\nu b + \nu b} = \frac{\int x^{\nu a + n\nu b + \nu b + \mu b - 1} dx \left(1 - x^{\nu b}\right)^{-\frac{\mu}{v}}}{\int x^{\nu a + n\nu b + \mu b - 1} dx \left(1 - x^{\nu b}\right)^{-\frac{\mu}{v}}},$$

то имеем

$$y^{\nu} = a^{\mu} \frac{\left(\int x^{\nu a + \mu b - 1} dx \left(1 - x^{\nu b}\right)^{-\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\mu}}{\left(\int x^{\nu a - 1} dx \left(1 - x^{\nu b}\right)^{\frac{\mu - \nu}{\nu}}\right)^{\nu - \mu}} .$$

Итак, член с индексом $\frac{\mu}{\nu} - 1$ представляется в виде:

$$y = a^{\frac{\mu}{\nu}} \frac{\left(\int x^{\nu a + \mu b - 1} dx \left(1 - x^{\nu b}\right)^{-\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}}{\left(\int x^{\nu a - 1} dx \left(1 - x^{\nu b}\right)^{\frac{\mu - \nu}{\nu}}\right)^{\frac{\nu - \mu}{\nu}}} .$$

Из природы последовательности имеем

$$y = \frac{\int e^{-\frac{u^b}{b}} u^{a + \frac{\mu}{\nu} b - 1} du}{\int e^{-\frac{u^b}{b}} u^{a - 1} du} ,$$

где после интегрирования положить $u = \infty$, или

$$y = b^{\frac{\mu}{\nu}} \frac{\int dv\left(l\frac{1}{v}\right)^{\frac{\nu a+(\mu-v)b}{\nu b}}}{\int dv\left(l\frac{1}{v}\right)^{\frac{a-b}{b}}},$$

где после интегрирования положить $v = 1$.

Следствие. Для $a = 1$ и $b = 1$ получим

$$\int dv\left(l\frac{1}{v}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\left(\int x^{\nu+\mu-1}dx\left(1-x^{\nu}\right)^{-\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}}{\left(\int x^{\nu-1}dx\left(1-x^{\nu}\right)^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}\right)^{\frac{\nu-\mu}{\nu}}},$$

где после интегрирования $v = 1,\ x = 1$.

Однако

$$\int x^{\nu-1}dx\left(1-x^{\nu}\right)^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} = -\frac{1}{\mu}\left(1-x^{\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu},$$

тогда

$$\int dv\left(l\frac{1}{v}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \mu^{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\left(\int x^{\nu+\mu-1}dx\left(1-x^{\nu}\right)^{-\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \text{ ».} \qquad (6)$$

Далее Эйлер рассматривает частные случаи:

«...для $\mu = 1;\ \nu = 1$ $\int\left(l\frac{1}{v}\right)dv = \int\frac{xdx}{1-x} = -x - l(1-x)$,

для $\mu = 1;\ \nu = 2$ $\int\left(l\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{2}}dv = \left(\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}\pi}$, для $\mu = 1;\ \nu = 3$ $\quad \int \left(l\frac{1}{v} \right)^{\frac{1}{3}} dv = \left(\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{\left(1 - x^3\right)}} \right)^{\frac{1}{3}}$ ».

Отметим, что проверка формулы (6) для случая $\mu = 1;\ \nu = 1$ не дает верного результата, так как $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{v} \right) dv = \int_0^1 \frac{x dx}{1 - x} = \left(-x - \ln(1 - x)\right)\Big|_0^1 = \infty$. Но, с другой стороны, известно, что $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{v} \right) dv = 1! \neq \infty$.

Вероятно, по этой причине полученные здесь соотношения Эйлер нигде не опубликовал.

Исследование записных книжек показывает, что периодом наиболее интенсивной творческой деятельности Эйлера по теории Г-функции являются годы 1725—1753. Распределение материала, касающегося Г-функции, по записным книжкам неравномерно. Следующая таблица схематически дает общую картину занятий Эйлера теорией этих функций:

Номер записной книжки	Годы	Количество заметок, посвященных Г-функции
129	1725—1727	2
130	1725—1727	0
131	1736—1740	5
132	1740—1744	2
133	1749—1753	1
134	1749—1757	0
135	1759—1763	0
136	1759—1763	0
137	1760—1764	0
138	1767—1775	0
139	1775—1779	0
140	1779—1783	0

Все обнаруженные нами заметки по теории Г-функции вошли в опубликованные сочинения Эйлера, кроме записи на листе 170—170 об из книжки № 133 (1749—1753 гг.), где имеется ошибка.

Список литературы

1. Кузнецов Д. С. Специальные функции. 2-е изд. М., 1965. 419 с.
2. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции / Пер. с англ. Ю. А. Брычкова; Под ред. А. П. Прудникова. М., 1978. 375 с.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III. Ч. 2. 6-е изд. М., 1956. 672 с.
4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. II / Пер. с англ. и ред. Ф. В. Широкова. М., 1963. 515 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб., 1997. 795 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Пер. с англ. Н. Я. Виленкина. М., 1965. 294 с.
7. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 3-е изд. М.; Л., 1951.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. А. Абрамовица, И. Стигана; Пер с англ. М., 1979. С. 80—118.
9. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М., 1968. 344 с.
10. Крылов А. Н. Леонард Эйлер // Леонард Эйлер. М.-Л., 1935. С. 1—28.
11. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Под ред. К. А. Рыбникова; Пер. с фр. И. Г. Башмаковой. М., 1963. 292 с.
12. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М., 1966. 467 с.
13. Выгодский М. Я. Вступительное слово к «Дифференциальному исчислению» Л. Эйлера // Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.-Л., 1949. С. 5—34.
14. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики. М.: Изд-во МГУ, 1997. 496 с.
15. Головинский И. А. Из истории интерполяционных рядов // Ист.-мат. исслед. М., 1977. Вып. XXII. С. 65—81.
16. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3 т. М., 1970—1972.
17. История отечественной математики с древнейших времен до конца XVIII в. Т. I / Под. ред. И. З. Штокало. Киев, 1968. 492 с.

18. Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1951. 127 с.

19. Отрадных Ф. П. Математика XVIII в. и академик Леонард Эйлер. М.: Советская наука, 1954. 40 с.

20. Петрова С. С., Демидов С. С. Развитие математического анализа // Очерки по истории математики / Под ред. Б. В. Гнеденко. М., 1997. С. 71—93.

21. Рыбников К. А. История математики. Т. I. М., 1960. 190 с.; Т. II. М., 1974. 334 с.; 2-е изд. М., 1974. 455 с.; 3-е изд. М., 1994. 496 с.

22. Юшкевич А. П. Леонард Эйлер о квадратуре круга // Ист.-мат. исслед. Вып. X . М., 1957. С. 159—210.

23. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 г. М., 1968. 591 с.

24. Юшкевич А. П. О возникновении понятия об определенном интеграле Коши // Математика в её истории. М., 1996. С. 115—165.

25. Юшкевич А. П., Копелевич Ю. Х. Христиан Гольдбах. 1690—1764. М., 1983. 221 с.

26. Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. 1—4. Leipzig, 1897.

27. Davis P. J. Leonhard Euler's integral profile of the Gamma function // Amer. Math. Mon. 1959. Vol. 66. P. 849—869.

28. Krazer A., Faber G. Übersicht über die Bände 14, 15, 16, 16* der ersten Serie // Opera omnia I. 16 б. (гл. II). S. XL—LXXIII.

29. Krazer A., Faber G. Übersicht über die Bände 17, 18, 19 der ersten Serie // Opera omnia I. 19, § VI Г-функция. S. LVIII—LXV.

30. Гуссов В. В. Работы русских ученых по теории гамма-функции // Ист.-мат. исслед. Вып. V. М., 1952. С. 421—472.

31. Гусев А. Н. Бесконечные ряды у Л. Эйлера: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Кострома, 1963.

32. Головинский И. А. Об интерполировании последовательностей у Валлиса и Эйлера // История и методология естественных наук. М., 1978. Вып. 20. С. 62—68.

33. Курдюмова А. И. Развитие теории гамма-функции после Эйлера: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1975.

34. Fuss P. Correspondance mathématique et physique de quelques célébres géométres du XVIII-eme siecle. T. I—II. СПб., 1843.

34а. Красоткина Т. А. Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга // Ист.-мат. исслед. М., 1957. Вып. X. С. 117—158.

35. Juškevič A. P., Winter E. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729—1764. Berlin: Akademie-Verlag, 1965.

36. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Пер. с лат., вступит. ст. и примеч. М. Я. Выгодского. М.-Л., 1949. 579 с.

37. Euler L. De termino generali serierum hypergeometricarium // Opera omnia. I. 16a. 1793. S. 139—162 (E652).

38. Euler L. De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraici dari nequent // Opera omnia. I. 14. 1738. S. 1—24. (E19).

39. Euler L. De curva hypergeometrica hac aequatione expressa $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$ // Opera omnia. I. 28. 1769. S. 6—98. (E368).

40. Euler L. De valoribus integralium a termino variabilis x = 0 usque ad x = ∞ extensorum // Opera omnia. I. 19. 1794. S. 217—227. (E675).

41. Гуссов В. В. Из истории трансцендентных функций в России и СССР: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1950.

42. Euler L. Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa // Opera omnia. I. 17. 1772. S. 316—357. (E421).

43. Euler L. Considerations sur quelques formules integrales dont les valeurs peuvent etre exprimees en certains cas par la quadrature du cercle // Opera onmia. I. 19. 1862. S. 439—490. (E816)

44. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 129—140.

45. Euler L. Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que reciproques // Opera omnia. I. 15. 1768. S. 70—90. (E352).

И. В. Игнатушина

ВОЗНИКНОВЕНИЕ НАЧАЛ ТЕОРИИ БЕТА-ФУНКЦИИ В РАБОТАХ Л. ЭЙЛЕРА

Бета-функция $B(a,\ b)$ определяется как функция от двух переменных с помощью следующего интеграла, который называется эйлеровым интегралом первого рода:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \text{, где } Re\ a > 0,\ Re\ b > 0. \quad (1)$$

Это название дал интегралу (1) в 1811 г. А. М. Лежандр (1752—1833), а называть его бета-функцией предложил в 1839 г. Ж. Бине (1786—1856).

Бета-функция обладает рядом интересных свойств [1, § 1.5, § 1.6, с. 23—30; 2, § 1, с. 5—7; 3, т. III, ч. 2, § 72, с. 265—266; 4, гл. XII, § 12.40—12.43, с. 40—46; 5, т. II, гл. XIV, § 5, с. 750—752], из которых мы укажем следующие.

1. Функция B является симметричной относительно своих аргументов a и b, т.е. выполняется условие:

$$B(a,\ b) = B(b,\ a). \quad (2)$$

2. Если $b > 1$, то $B(a,b) = \dfrac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$. (3)

Эту формулу можно применять с целью уменьшения b, пока b остается больше 1. Таким образом, всегда можно достигнуть того, чтобы второй аргумент стал ≤ 1.

Аналогично, ввиду симметричности бета-функции, того же можно добиться и в отношении первого аргумента.

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b). \tag{4}$$

Если b есть натуральное число n, то, последовательно применяя формулу (3), найдем

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{1}{a+1} B(a,1).$$

Далее, так как $B(a,1) = \int\limits_0^1 x^{a-1} dx = \dfrac{1}{a}$,

то получим

$$B(a,n) = B(n,a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}. \tag{5}$$

Если a также натуральное число m, то

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{1}{mC_{n+m-1}^{n-1}} = \frac{1}{nC_{n+m-1}^{m-1}}. \tag{6}$$

3. Применив в интеграле (1) подстановку $x = \dfrac{y}{1+y}$, где y — новая переменная, изменяющаяся от 0 до ∞, мы получим другое аналитическое представление бета-функции:

$$B(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy. \tag{7}$$

4. Если $0 < a < 1$, то

$$B(a,1-a) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin \pi a}. \tag{8}$$

В частности, положив $a = \frac{1}{2}$, получим $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

Через бета-функцию выражаются многие определенные интегралы, суммы рядов и бесконечные произведения [см., например, 1, § 1.5.1, с. 24—26]. Бета-функция и её свойства играют важную роль в теории вероятностей (бета-распределение). Её значения связаны со значениями гамма-функции, другой важной трансцендентной функцией:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ (при } a > 0 \text{ и } b > 0 \text{)}. \quad (9)$$

В современных руководствах по математическому анализу эти функции всегда рассматриваются вместе. Такой подход в изложении материала является естественным, так как теории этих функций возникли практически в одно и то же время и развивались параллельно, взаимно дополняя друг друга.

Задачи, приводящие к эйлерову интегралу первого рода, рассматривались ещё во второй половине XVII в. Так, в своей «Арифметике бесконечных» Валлис в поисках, как он выражался, «истинной квадратуры круга в числах» использовал, по существу, интегралы вида

$$\int_0^1 (1 - x^{1/p})^q \, dx, \quad (10)$$

которые при подстановке $x = y^p$ преобразуются в

$$p\int_0^1 (1-y)^q y^{p-1} dy = pB(q+1, p).$$

С помощью неполной индукции Валлис установил, что при p и q натуральных обратные значения для интеграла

(10) выражаются «фигурными числами» различных порядков [6, т. II, с. 153].

В теории фигурных чисел, разработанной учеными школы Пифагора (VI в. до н.э.) [6—9 и др.], рассматривались так называемые «m-угольные» числа: n-е «m-угольное» число P_m^n представляет собой сумму n членов арифметической прогрессии, первый член которой есть 1, а разность равна $(m-2)$, т.е.

$$P_m^n = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}.$$

Валлис в своей «Арифметике бесконечных» рассмотрел «фигурные» числа, выражающиеся числом сочетаний C_n^m. «Фигурными» числами первого порядка у него являлись натуральные числа: 1, 2, 3, ... n, ..., т.е. C_n^1; «фигурными» числами второго порядка — «треугольные» числа: 1, 3, 6, ... , $\frac{n(n+1)}{2}$, ..., т.е. C_{n+1}^2, а третьего порядка — «пирамидальные» числа с треугольным основанием: 1, 4, 10, 20, ... $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, ... , т.е. C_{n+2}^3.

Вообще, «фигурные» числа k-го порядка здесь являются суммами чисел (k − 1)-го порядка и равны C_{n+k-1}^k.

Если положить $k = q$ и $n = p + 1$, то соответствующее фигурное число выражается числом сочетаний C_{p+q}^q, которое, как установил Валлис, при q и p — натуральных равно обратному значению интеграла (10), т.е.

$$\frac{1}{\int\limits_0^1 (1 - x^{1/p})^q\,dx} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot q} =$$

$$= \frac{(p+q)!}{p!\,q!} = C_{p+q}^{q} = C_{p+q}^{p}.$$

Далее он привел таблицы фигурных чисел и их обобщений для $p = 1/2$ и $q = 1/2;\ 3/2;\ 5/2;\ 7/2;\ldots$

Таким образом, здесь установлена зависимость между значениями бета-функции и числом сочетаний C_n^m.

Схожий результат имеется и в «Началах видовой геометрии» (1659) П. Менголи (1625—1686), где он произвел квадратуру кривых $y = x^p(1-x)^q$ для натуральных p и q [6, т. II, с. 159], что соответствует равенству

$$\int\limits_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \frac{1}{p+q+1} : C_{p+q}^{p}.$$

Однако появлению B-функции и разработке основ её теории математика обязана Леонарду Эйлеру (1707—1783).

К началу XVIII в. перед математиками встал вопрос *об интегрируемости в конечном виде различных дифференциалов и в том числе так называемого биномиального дифференциала*

$$x^m(\alpha + \beta x^n)^p\,dx, \tag{11}$$

где α и β — произвольные постоянные, отличные от нуля, а показатели $m,\ n,\ p$ — рациональные числа. Эта проблема рассматривается, например, во втором письме Ньютона к Ольденбургу от 24 октября 1676 г. [10, с. 238—240]. Она явилась одной из проблем, которые привели Эйлера к введению в математический анализ B-функции.

В первом томе «Интегрального исчисления» [11, гл.

II, с. 63, следствие 3 (§ 117)] отмечается, что интегралы от биномиальных дифференциалов в общем случае зависят от одной и той же трансцендентной функции. Эта функция непосредственно связана с бета-функцией: если рассмотреть определенный интеграл $\int_0^1 x^m(\alpha+\beta x^n)^p\,dx$ при условии что $\alpha = 1$, $\beta = -1$, то этой трансцендентной функцией будет $\frac{1}{n}B\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right)$.

Другой проблемой, приведшей к появлению бета-функции, была *задача об интерполировании последовательности биномиальных коэффициентов*, определяемых формулой $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, если n и m — натуральные.

Требовалось найти конечное выражение для общего члена этой последовательности, если n и m являются действительными положительными числами. Другими словами, нужно было обобщить понятие биномиального коэффициента на случай непрерывно изменяющихся положительных аргументов n и m.

Эта задача, очевидно, возникла у Эйлера в связи с попыткой распространить формулу бинома Ньютона на случай, когда показатель степени бинома не является натуральным. К её решению Эйлер вплотную подошел в мемуаре E19 («О трансцендентных рядах, т.е. о рядах, общий член которых не может быть выражен алгебраически» [12]), сданном в печать в 1729 г. и опубликованном в 1738 г.

Разложив $(1-x)^n$ по формуле бинома Ньютона, он умножил получившееся на x^1, затем проинтегрировал по x (где x изменяется от 0 до 1) и в результате пришел к выражению:

$$\frac{1}{l+1}-\frac{n}{1\cdot(l+2)}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot(l+3)}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(l+4)}+etc.$$

Отсюда, с помощью неполной индукции, полагая последовательно $n = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots,$

Эйлер выявил, что

$$\int_0^1 x^l(1-x)^n\,dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{(l+1)(l+2)\ldots(l+n+1)}, \qquad (12)$$

где l и n — целые положительные числа.

Здесь показано, что для натуральных l и n справедливо

$$C_{l+n}^{l} = C_{l+n}^{n} = \frac{1}{(l+n+1)\int\limits_0^1 x^l(1-x)^n\,dx}$$

или, если в равенстве (12) заменить l на $(l-1)$, то

$$C_{l+n}^{l} = C_{l+n}^{n} = \frac{1}{l\int\limits_0^1 x^{l-1}(1-x)^n\,dx}\ .$$

Этот результат соответствует имеющемуся в «Арифметике бесконечных» Валлиса и упоминавшемуся выше.

Далее Эйлер распространяет (на основании принципа непрерывности) полученное равенство (12) на случай, когда l является несократимой дробью вида $\dfrac{f}{g}$, и приходит к выражению общего члена последовательности биномиальных коэффициентов, соответствующего дробным индексам:

$$C_{\frac{f}{g}+n}^{n} = C_{\frac{f}{g}+n}^{\frac{f}{g}} = \frac{g}{\left(f+(n+1)g\right)\int\limits_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n\,dx}.$$

Таким образом, задача об интерполировании этой последовательности была частично решена.

Вопросом об интерполировании последовательности биномиальных коэффициентов Эйлер занимался на протяжении всей жизни. Об этом свидетельствуют и записные книжки ученого и его опубликованные мемуары.

Так, в датируемой 1740—1744 гг. **записной книжке № 132** (л. 242 об.) имеется заметка, посвященная этой проблеме. Её решение Эйлер сводит к интерполированию последовательности факториалов, для которой к тому времени им уже была установлена формула для общего члена $x!$:

$$x! = \frac{1\cdot 2^x}{1+x}\cdot\frac{2^{1-x}\cdot 3^x}{2+x}\cdot\frac{3^{1-x}\cdot 4^x}{3+x}\cdot\frac{4^{1-x}\cdot 5^x}{4+x}\ldots$$

Об этом свидетельствуют заметка из **записной книжки № 129** (датируемой 1725—1727 гг.) и письма Эйлера к Гольдбаху от 24 октября 1729 г. [13 , с. 19—21].

Таким образом, он получает, что общий член C_n^x, соответствующий индексу x, последовательности биномиальных коэффициентов

$$1\,;\quad \frac{n}{1}\,;\quad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,;\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,;$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,;\quad \ldots$$

равен бесконечному произведению

$$\frac{(1+x)(1+n-x)}{1(1+n)}\cdot\frac{(2+x)(2+n-x)}{2(2+n)}\cdot \cdot\frac{(3+x)(3+n-x)}{3(3+n)}\cdot\ldots \qquad (13)$$

Отметим, что, хотя Эйлер ничего не говорит о том, какому множеству принадлежит индекс x, вероятнее всего здесь x уже мыслился не только дробным, но и любым действительным неотрицательным числом. К такому выводу приводит данное Эйлером в «Дифференциальном исчислении» определение понятия «интерполируемости ряда»: «Говорят, что ряд интерполируется, если указываются его члены, отвечающие дробным или даже иррациональным индексам» [14, § 389, с. 534].

В мемуаре E768 («Об интерполировании последовательности биномиальных коэффициентов с дробными индексами» [15]), представленном в 1781 г., но появившемся в печати только в 1824, Эйлер снова возвращается к вопросу об интерполировании последовательности биномиальных коэффициентов.

Изложение начинается с постановки задачи: разложение $(1 + x)^n$ имеет вид

$$(1+x)^n = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + etc.,$$

где коэффициенты $\left(\frac{n}{1}\right); \left(\frac{n}{2}\right); \left(\frac{n}{3}\right); etc.$ вычисляются по формулам

$$\left(\frac{n}{1}\right) = n; \quad \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}; \quad \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}; \quad etc.$$

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\ldots\frac{n-q+1}{q},$$

если n и q — целые положительные числа.

В современных обозначениях записи $\left(\frac{n}{q}\right)$ соответствует C_n^q. Эйлер называет их характерами.

Для $q = 0$ он по определению полагает $\left(\frac{n}{0}\right) = 1$.

Ставится задача: определить значение $\left(\frac{n}{q}\right)$, если q не является целым. Эйлер пишет: «Выражение $\left(\dfrac{n}{q}\right)$ является функцией от чисел n и q, где q представляет абсциссу кривой, а $\left(\dfrac{n}{q}\right)$ аппликату. Эта кривая определена по известному закону для целых значений переменной q, для остальных её надо доопределить» [15, § 2, с. 242].

В § 25 Эйлер нашел представление для $\left(\dfrac{p}{q}\right)$ в интегральной форме:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q\int\limits_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-q}\,dx}\,, \qquad (14)$$

где $q > 0$ и $p - q > -1$ и тем самым получил решение задачи об интерполировании биномиальных коэффициентов.

Определенный интеграл $\int\limits_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-q}\,dx$, стоящий в знаменателе формулы (14), соответствует $B(q,\ p - q + 1)$.

Третья задача, которая привела к необходимости ввести B-функцию, связана с *поиском решения дифференциального уравнения вида:*

$$\frac{d^q y}{dx^q} = q!\,x^{p-q}\,, \qquad (15)$$

где p и q могут быть и нецелыми числами. Идея обобщения понятия производной для произвольного порядка дифференцирования привлекла внимание Эйлера ещё в самом начале его творческой деятельности. Так, в § 28 мемуара E19 [12] (1729 г.) он получил формулу для производной от степени, эквивалентную следующей:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n},$$

где m и n ограничены только условиями $m + 1 > 0$, $m - n + 1 > 0$.

Аналогичные вопросы были предметом обсуждения в переписке Эйлера с Ж. Лагранжем (1736—1813) (см. письмо Лагранжа к Эйлеру от 28 июля 1754 г. [16, с. 361—362]).

В XIX в. эту идею развивали Ж. Лиувилль (1809—1882), Г. Ф. Б. Риман (1826—1866) и др.

Фундаментальные результаты, касающиеся производных с произвольным порядком дифференцирования, были получены А. В. Летниковым (1837—1888) [17, с. 163—238].

Исследованию указанной задачи Эйлер посвятил мемуар E681 («Решение дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами с помощью интегралов» [18]), сданный в печать в 1781 г. Здесь получено решение дифференциального уравнения (15) в следующем виде:

$$y = q\int_0^1 x^{p-q}(1-x)^{q-1}\,dx\ ,$$

что равносильно $y = qB(p - q + 1;\ q)$.

Для обозначения интегралов первого рода

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}, \qquad (16)$$

которые с помощью подстановки $x^n = y$ сводятся к

$$\frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{p}{n}-1}(1-y)^{\frac{q}{n}-1}\,dy = \frac{1}{n}B\left(\frac{p}{n};\frac{q}{n}\right),$$

Эйлер в мемуаре E321 («Рассмотрение интегральной формулы $\int x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}dx$, где после интегрирования полагается $x = 0$» [19]), представленном к печати в 1762 году, вводит специальное обозначение $\left(\frac{p}{q}\right)$. Выбор именно такого обозначения не случаен. Ведь одной из проблем, приведших к появлению бета-функции, как было показано выше, является задача об интерполировании последовательности биномиальных коэффициентов, а их Эйлер обозначал этим же символом $\left(\frac{p}{q}\right)$. Позже в мемуаре E640 («Представление величины интегральной формулы $\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, где значение переменной распространяется от $x = 0$ до $x = 1$» [20]) использовался и другой знак для обозначения интеграла (16), а именно (p, q).

Отметим, что число n Эйлер не ввел в своё обозначение, поэтому в каждом из конкретных выражений, содержащих интегралы вида (16), оно имело одно и то же значение, которое устанавливалось заранее.

Таким образом, введя специальное обозначение, Эйлер особо выделил класс трансцендентных функций, которые при $n = 1$ совпадают с бета-функциями.

Опираясь на этот факт, В. В. Гуссов в своей диссертации «Из истории трансцендентных функций в России и СССР» [21] сделал следующий вывод: «...Исследования Эйлера, по существу, были исследованиями эйлеровых интегралов первого рода, а не B-функции. Конечно, в исследованиях Эйлера содержалась теория этой последней функции, как кислород содержится в окиси углерода, но окисью углерода ещё нельзя дышать. Только спустя полстолетия Лежандр подошел понятию B-функции, да и то ... лишь медленно и постепенно. Основным препятствием в этом процессе являлось то, что Эйлер рассматривал свои интегралы первого рода как функции трех аргументов p, q, n и, кроме того, всегда ограничивался, причем это ограничение было органически связано с характером всей его работы, только целыми значениями p, q и n» [21, с. 44—45].

С этим выводом можно согласиться, но только частично. Во-первых, Эйлер не ограничивался только целыми значениями аргументов p и q. Подтверждение этого содержится в самой постановке задачи об интерполировании биномиальных коэффициентов, которая четко сформулирована в мемуаре E768 [15]. Этот мемуар, вероятно, не был известен Лежандру, так как он был опубликован лишь в 1824 г., т.е. на семь лет позже «Exercices de calcue intégral» Лежандра, где во втором томе он повторил идею Эйлера о том, что в интеграле $\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ числа p и q могут быть как рациональными, так и иррациональными.

Кроме того, в § 30—31 мемуара E745 («О бесконечных дробях Валлиса» [22]), сданном в печать в 1780 г., но опубликованном лишь в 1815 г., Эйлер рассматривает интегралы первого рода, где значение p является уже комплексным. Эти важные мемуары Эйлера остались незамеченными В. В. Гуссовым.

Во-вторых, рассматриваемый Эйлером класс функций является более общим, чем бета-функция. Её свойства получаются как частный случай (при $n = 1$) установленных Эйлером свойств функций этого класса. Поэтому его смело можно назвать основателем теории бета-функции.

Список литературы

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Пер. с англ. Н. Я. Виленкина. М., 1965. 294 с.

2. Кузнецов Д. С. Специальные функции. 2-е изд. М., 1965. 419 с.

3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III. Ч. 2. 6-е изд. М., 1956. 672 с.

4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. II. / Пер. с англ. и ред. Ф. В. Широкова. М., 1963. 515 с.

5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб., 1997. 795 с.

6. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3 т. / Под ред. А. П. Юшкевича. М., 1970—1972.

7. Матвиевская Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. Ташкент, 1967. 241 с.

8. Матвиевская Г. П. Развитие учения о числе в Европе до XVII века. Ташкент, 1971. 230 с.

9. Матвиевская Г. П. Заметки о многоугольных числах в записных книжках Эйлера // Ист.-мат. исслед. М., 1983. Вып. XXVII. С. 27—49.

10. Ньютон И. Математические работы / Пер. с лат., ввод. ст. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л., 1937. 452 с.

11. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 1 / Пер. с лат. С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского; Предисл. М. Я. Выгодского. М., 1956. 414 с.

12. Euler L. De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraici dari nequent // Opera omnia. I. 14. 1738. S. 1—24. (E19).

13. Juškevič A. P., Winter E. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729—1764. Berlin: Akademie-Verlag, 1965.

14. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Пер. с лат., вступит. ст. и примеч. М. Я. Выгодского. М.-Л., 1949. 579 с.

15. Euler L. De unciis potesta binomii earumque interpolatione // Opera omnia. I. 16б. 1824. S. 241—266. (E 768).

16. Euler L. Opera omnia. S. 4. A.: Commercium epistolicum. Vol. V. Basel: Birkhäuser verlag, 1980.

17. Шостак Р. Я. Алексей Васильевич Летников // Ист.-мат. исслед. Вып. V. М., 1952. С. 163—238.

18. Euler L. Specimen aequationum differentialium indefiniti gradus earumque integrationis // Opera omnia. I. 23. 1794. S. 281—294. (E681).

19. Euler L. Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ posito post integrationem $x = 1$ // Opera omnia. I. 17. 1766. S. 268—288. (E321).

20. Euler L. Comparatio valorum formulae integralis

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae // Opera omnia. I. 18. 1789. S. 392—423. (E640).

21. Гуссов В. В. Из истории трансцендентных функций в России и СССР: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1950.

22. Euler L. De fractionibus continuis Wallisii // Opera omnia. I. 16б. 1815. S. 178—199. (E745).

И. В. Прояева

ГЕОМЕТРИЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА В НЕОПУБЛИКОВАННЫХ РУКОПИСЯХ ЭЙЛЕРА

Работы Леонарда Эйлера по геометрии занимают в его математическом творчестве незначительное место, но в них отражены практически все разделы геометрии, начиная с элементарной и заканчивая серьезными вопросами дифференциальной и проективной геометрии.

В неопубликованных рукописях Эйлера, находящихся в Санкт-Петербургском филиале Архива Российской Академии наук (ПФА РАН), среди заметок по геометрии несомненный интерес представляют задачи, касающиеся четырехугольника. Некоторые из них были проанализированы Ю. А. Белым [1].

В учебнике по элементарной геометрии, упоминаемом Г. Энестрёмом среди рукописей Эйлера [2], который был найден и переведен Ю. А. Белым, целый раздел посвящен геометрии четырехугольника. Здесь четырехугольники делятся на параллелограммы (в общепринятом смысле) и трапеции (все остальные). Подробно доказываются свойства параллелограммов, вводятся понятия прямоугольника, квадрата, ромба. Так как учебник предназначался для преподавания в Академической гимназии, то набор рассматриваемых вопросов достаточно традиционен и не выходит за рамки современного школьного курса.

Исследование материалов из записных книжек Эйлера показывает, что он неоднократно обращался к изучению свойств четырехугольника и в результате получил ряд важных математических соотношений для элементов этой фигуры.

Так, наиболее ранние записи о четырехугольнике найдены в **записной книжке № 131** [ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 36 об].

Здесь рассматривается четырехугольник ABCD, описанный около окружности радиуса r (рис. 1).

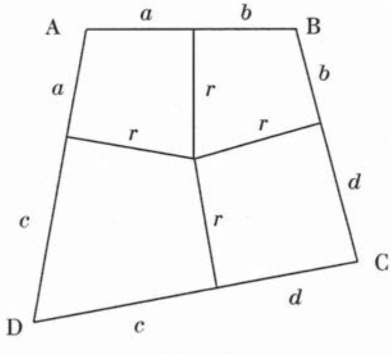


Рис. 1

Для отрезков, обозначенных через a, b, c, d, на которые разбиваются стороны четырехугольника точками касания с окружностью, имеет место равенство

$$r^2(a + b + c + d) = abc + abd + acd + bcd.$$

Доказательство этого факта, к сожалению, отсутствует.

Далее, в этой же записной книжке [№ 131. Л. 71 об], Эйлер рассматривает трапецию ABCD с основаниями AC и BD (рис. 2). Из «центра тяжести» G данного четырехугольника (центра окружности, вписанной в него) опускаются на боковые стороны перпендикуляры GQ и GS, при этом выполняется равенство:

$$AQ = AB \cdot \frac{(AC + 2BD)}{3(AC + BD)}.$$

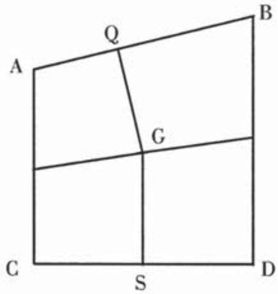


Рис. 2.

Записи, относящиеся к геометрии четырехугольника, встречаются и последующих записных книжках.

Так, в **записной книжке № 133**, относящейся к 1749—1753 гг., рассматривается «геометрическая задача»: «В углах A, B, C, D четырехугольника ABCD восстановлены перпендикуляры Aa, Bb, Cc, Dd, длины которых a, b, c, d (рис. 3). Линии, содержащие стороны AD и BC, пересекаются в точке O, тогда $BC{\cdot}DO{\cdot}Aa - AD{\cdot}CO{\cdot}Bb + AD{\cdot}BO{\cdot}Cc - BC{\cdot}AO{\cdot}Dd = 0$» [ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 133. Л. 152 об].

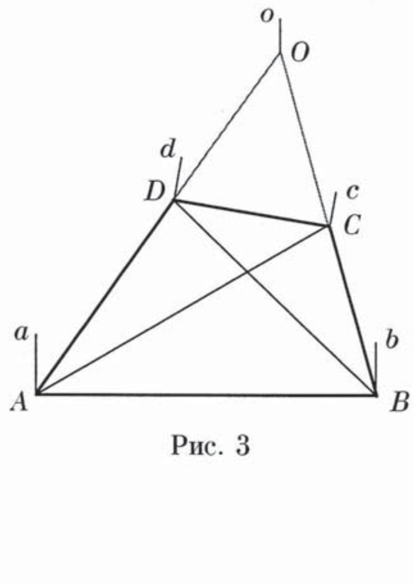


Рис. 3

Для доказательства Л. Эйлер предлагает в точке O восстановить «перпендикуляр» Oo, длина которого определяется из пропорций

$$\frac{Aa - Dd}{AD} = \frac{Aa - Oo}{AO} \text{ и } \frac{Bb - Cc}{BC} = \frac{Bb - Oo}{Bo}.$$

Тогда $Oo = Aa - \dfrac{AO(Aa - Dd)}{AD} = \dfrac{AO \cdot Dd - DO \cdot Aa}{AD}$,

$$Oo = Bb - \frac{BO(Bb - Cc)}{BC} = \frac{BO \cdot Cc - CO \cdot Bb}{BC}.$$

Приравняв правые части равенств и незначительно преобразовав, получаем:

$$\frac{DO}{AD} \cdot Aa - \frac{CO}{BC} \cdot Bb + \frac{BO}{BC} \cdot Cc - \frac{AO}{AD} \cdot Dd = 0 \qquad (*)$$

Далее применяется теорема синусов к треугольникам AOB и COD соответственно:

Из Δ AOB: $\dfrac{\sin \angle O}{AB} = \dfrac{\sin \angle A}{BO} = \dfrac{\sin \angle B}{AO}$,

Из Δ COD: $\dfrac{\sin \angle O}{CD} = \dfrac{\sin \angle C}{DO} = \dfrac{\sin \angle D}{CO}$.

Тогда $DO = \dfrac{CD \cdot \sin \angle C}{\sin \angle O}$, $CO = \dfrac{CD \cdot \sin \angle D}{\sin \angle O}$,

$$BO = \frac{AB \cdot \sin \angle A}{\sin \angle O}, \quad AO = \frac{AB \cdot \sin \angle B}{\sin \angle O}.$$

Подставив полученные выражения для AO, BO, CO, DO в равенство (*), Эйлер получает:

$$Aa \cdot \frac{CD}{AD} \sin \angle C - Bb \cdot \frac{CD}{BC} \sin \angle D +$$

$$+ Cc \cdot \frac{AB}{BC} \sin \angle A - Dd \cdot \frac{AB}{AD} \sin \angle B = 0$$

Тогда

$$Aa \cdot BC \cdot CD \cdot \sin \angle C - Bb \cdot AD \cdot CD \cdot \sin \angle D +$$

$$+ Cc \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \angle A - Dd \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = 0.$$

Далее в заметке содержится несколько равенств, зачеркнутых Эйлером, и на этом, к сожалению, рассуждения обрываются. Но мы доведем их до логического конца.

Возможно, далее Эйлер рассуждает следующим образом.

$$Aa \cdot BC \cdot \frac{S_{\Delta\ DOC}}{CO} - Bb \cdot AD \cdot \frac{S_{\Delta\ DOC}}{DO} +$$
$$+ Cc \cdot AD \cdot \frac{S_{\Delta\ AOB}}{AO} - Dd \cdot BC \cdot \frac{S_{\Delta\ AOB}}{BO} = 0.$$

Следовательно,

$$Aa \cdot BC \cdot \frac{DO \cdot OC \cdot \sin \angle O}{CO} - Bb \cdot AD \cdot \frac{DO \cdot OC \cdot \sin \angle O}{DO} +$$
$$+ Cc \cdot AD \cdot \frac{AO \cdot OB \cdot \sin \angle O}{AO} - Dd \cdot BC \cdot \frac{AO \cdot OB \cdot \sin \angle O}{BO} = 0.$$

Откуда после несложных преобразований и получается доказываемое равенство.

Нужно отметить, что похожая теорема доказывается Эйлером и для треугольника, но немного ранее, в **записной книжке № 132**, л. 483 [3, с. 96].

Как известно, с конца 1760 г. записи в рукописях велись учениками и помощниками под диктовку совершенно ослепшего Эйлера. Так, некоторые такие заметки **записной книжки № 138** вошли в том трудов Эйлера, опубликованный после его смерти [4]. Но часть осталась без внимания со стороны историков математики. К ним относится следующая заметка о четырехугольнике.

Л. Эйлер ставит задачу [ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. Л. 173—174 об]:

Пусть даны 4 точки A, B, C, D (не совпадающие), не лежащие на одной прямой, и 6 прямых AB, AC, AD, BC, BD и CD, попарно их соединяющих, тогда имеет место следующее равенство:

$AB^2 \cdot CD^2 \cdot (AB^2 + CD^2) - AB^2 \cdot CD^2 \cdot (BC^2 + BD^2 + AC^2 + AD^2) + BC^2 \cdot BD^2 \cdot CD^2 + AC^2 \cdot BD^2 \cdot (AC^2 + BD^2) - AC^2 \cdot BD^2 \cdot (AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2) + AC^2 \cdot AD^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot AD^2 \cdot (BC^2 + AD^2) - AD^2 \cdot BC^2 \cdot (AB^2 + AC^2 + BD^2 + CD^2) + AB^2 \cdot AD^2 \cdot BD^2 + AB^2 \cdot AC^2 \cdot BC^2 = 0.$

Для доказательства Эйлер обозначает AB через a, BC через b, CD через c, AD через d, AC через p и BD через q.

Углы $\angle$ DAC и $\angle$ BAC обозначим через x и y соответственно (рис. 4).

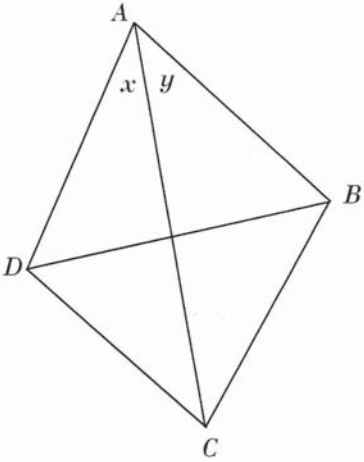


Рис. 4

Тогда по теореме косинусов в треугольнике ABC

$$\cos y = \frac{a^2 + p^2 - b^2}{2ap},$$

обозначим его через α;

$$\cos x = \frac{d^2 + p^2 - c^2}{2dp},$$

обозначим его через β.

И наконец, применив теорему косинусов к треугольнику ABD, Эйлер получает

$$\cos(x + y) = \frac{a^2 + d^2 - q^2}{2ad}$$

и обозначает его за γ. Далее, легко получается

$$\sin\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}, \ \cos\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}},$$

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{2}}, \ \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\beta}{2}}.$$

Тогда

$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = \sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\alpha)}{4}} + \sqrt{\frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{4}} \text{ и}$$

$$cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)=\sqrt{\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{4}}-\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{4}}.$$

С другой стороны,

$$sin\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}} \text{ и } cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}},$$

поэтому можно приравнять соответствующие выражения:

$$\sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\alpha)}{4}}+\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{4}}=\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}} \text{ и}$$

$$\sqrt{\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{4}}-\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{4}}=\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}.$$

Первое равенство Эйлер возводит в квадрат и получает:

$$\frac{(1-\beta)(1+\alpha)}{4}+\frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{4}+2\sqrt{\frac{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}{16}}=$$

$$=\frac{1-\gamma}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1-\alpha\beta}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}=\frac{1-\gamma}{2}.$$

Отсюда $\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}=\alpha\beta-\gamma$. Полученное равенство автор еще раз возводит в квадрат:

$$1-\alpha^2-\beta^2=\gamma^2-2\alpha\beta\gamma \text{ или}$$

$$1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=0.$$

Подставив в последнее равенство выражения, обозначенные через α, β, γ в начале доказательства, автор получает доказываемое соотношение.

Далее Эйлер предлагает другой способ доказательства.

Так, если положить, что $x+y=z$, то

$$\sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 x \cos^2 y - 2\cos x \cos y \cos z +$$
$$+ \cos^2 z = 1 - \cos^2 x - \cos^2 y + \cos^2 x \cos^2 y.$$

И, следовательно, $1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma = 0$.

Дальнейшие рассуждения Эйлера касаются различных частных случаев и, в качестве примера, он получает похожее соотношение для треугольника.

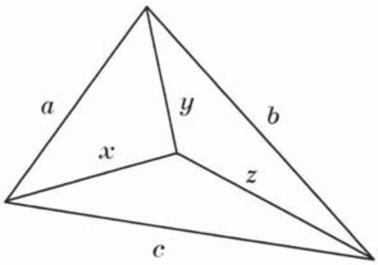


Рис. 5

Так, если треугольник со сторонами a, b, c разбить внутренней точкой еще на три треугольника и длины отрезков обозначить за x, y, z (рис. 5), то имеет место равенство:

$$a^2x^4 - x^2y^2(a^2 + b^2 - c^2) - a^2x^2(b^2 + c^2 - a^2) +$$
$$+ a^2b^2c^2 + b^2y^4 - x^2z^2(a^2 + c^2 - b^2) -$$
$$- b^2y^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2z^4 - y^2z^2(b^2 + c^2 - a^2) -$$
$$- c^2z^2(a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

Список литературы

1. Белый Ю. А. Об учебнике Л. Эйлера по элементарной геометрии // Ист.-мат. исслед. Вып. 14. М., 1961. С. 237—284.

2. Eneström G. Verzeichnis der Schriften Leonard Eulers // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzunbände. Leipzig, 1910. Bd. IV. 1—2. S. 1—388.

3. Белый Ю. А. Геометрия треугольника в неопубликованных материалах Л. Эйлера // Ист-мат. исслед. М., 1983. Вып. XXVII. С. 88—101.

4. Euler L. Opera postuma mathematica et physica. Petropoli, 1862. Vol. 1—2.

Ж. Ю. Личикова

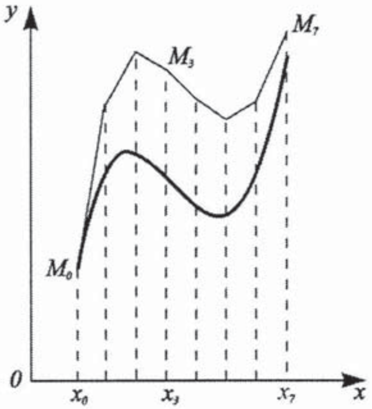
УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД ЛОМАНЫХ В «ИНТЕГРАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ» ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Леонарду Эйлеру принадлежит большая заслуга в создании одного из общих методов приближенного решения дифференциальных уравнений. Этот метод в современной математике носит название «метода ломаных». Обычно он применяется при проведении ориентировочных расчетов, так как обладает достаточно большой погрешностью относительно других методов.

Суть этого метода в современной интерпретации [1] состоит в следующем.

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$. Выбрав достаточно малый шаг h, мы получаем систему равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$.

Тогда искомую интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$, можно приближенно заменить ломаной $M_0M_1M_2\dots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, \dots)$, звенья которой M_iM_{i+1} имеют угловые коэффициенты, совпадающие с значением функции $f(x_i, y_i)$. Эта ломаная носит название ломаной Эйлера.



Значения y_{i+1} находятся по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \text{, где } \Delta y_i = h \cdot f(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Впервые описание метода ломаных было дано в «Интегральном исчислении» [2] Л. Эйлера, опубликованном в 1768—1770 гг. в главе «О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений» (гл. VII, II раздел). В ней рассматриваются три задачи.

В первой из них формулируется в общем виде проблема о приближенном решении дифференциального уравнения: «Пусть предложено какое-либо дифференциальное уравнение. Найти его полный интеграл с любой точностью» [2, с. 377].

Под полным интегралом Эйлер понимает то, что, «когда количеству x придается определенное значение $x = a$, другое переменное y должно получить некоторое определенное значение $y = b$» [2, с. 377]. Основание для постановки задачи разыскания именно полного интеграла он видит в том, что начальные данные задаются в общей форме, а не в виде конкретных числовых значений. Таким образом, Эйлер предвосхитил постановку задачи Коши с начальными данными, как одну из центральных задач теории дифференциальных уравнений.

Итак, «уравнение имеет вид $\dfrac{dy}{dx} = V$, (1)

где V — какая-либо функция от x и y... Будем искать значение количества y, когда x придается значение, мало отличающееся от a, то есть $x = a + \omega$. Тогда y тоже будет мало отличаться от b; поэтому количество V можно рассматривать как постоянное и равное $V(a, b) = A$, то есть $\dfrac{dy}{dx} = A$, и интегрируя, получим $y = b + A \cdot (x - a)$ или $y = b + A \cdot \omega$» [2, с. 377].

Далее Эйлер продолжает: «Таким же образом, как из первоначально данных значений $x = a$ и $y = b$ мы нашли ближайшие следующие значения $x = a + \omega$ и $y = b + A \cdot \omega$, можно и от этих значений последовательно продвигаться дальше через чрезвычайно малые промежутки до тех пор, пока, наконец, не достигнем значений, сколь угодно удаленных от первоначальных.

Для того чтобы эти операции лучше обозреть, их надлежит проводить следующим образом:

Количества	Последовательные их значения
X	$a \;\; a' \;\; a'' \;\; a''' \ldots x$
$У$	$b \;\; b' \;\; b'' \;\; b''' \ldots y$
V	$A \;\; A' \;\; A'' \;\; A''' \ldots V$

Первый ряд можно взять по произволу, лишь бы он восходил (или нисходил) через чрезвычайно малые промежутки» [2, с. 378].

Затем приводятся следствия, в одном из которых ставится вопрос о большой погрешности данного метода, а в другом — об ошибках, получившихся в результате того, что функция V считается постоянной.

Таким образом, ясно, что Эйлер знал недостатки предложенного им метода и поэтому стремился уточнить его. Эту проблему он исследует во второй задаче: «Усовершенствовать вышеизложенный метод приближенного интегрирования, чтобы он меньше отступал от истины» [2, с. 380].

Как отмечает Эйлер, большая погрешность метода ломаных получается из-за того, что V рассматривается как постоянная, хотя в действительности она изменяется, особенно если промежутки берутся достаточно большими. Здесь он пытается учесть изменяемость функции V. Для этого он пользуется методом, суть которого изложил в разделе «Об интегрировании дифференциальных выражений» (гл. VII).

А именно, количеству $x - n \cdot dx = a$ ставится в соответствие $y - n \cdot dy + \dfrac{n^2 d^2 y}{1 \cdot 2} - \dfrac{n^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots = b$.

Тогда $n = \dfrac{x - a}{dx}$, отсюда

$$y = b + \frac{(x-a)dy}{dx} - \frac{(x-a)^2 d^2 y}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{(x-a)^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \ldots \quad (2)$$

Если x ненамного превышает a, то ряд, стоящий в правой части выражения (2), быстро сходится и поэтому очень удобен для приближенного нахождения значения y. Коэффициенты данного ряда вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{dy}{dx} = V$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dV}{dx} + V\,\frac{dV}{dy}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) + 2V\left(\frac{d^2V}{dx \cdot dy}\right) + V\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 +$$

$$+ V^2\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\dots$$

Далее Эйлер замечает, что «так как само значение y неизвестно, то этим способом получается лишь ... уравнение, при помощи которого выражается соотношение между x и y» [2, с. 381].

Для того чтобы определить значение y в явном виде, Эйлер использует способ, изложенный в § 322 (гл. VII, I раздел). Полагая $x = a + n \cdot da$, он получает:

$$y = b + \frac{(x-a)db}{da} + \frac{(x-a)^2 d^2b}{1 \cdot 2 \cdot da^2} + \frac{(x-a)^3 d^3b}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot da^3} + \dots$$

Если для $x = a, \;\; y = b$ обозначить

$$\frac{dy}{dx} = A, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = B, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = C, \dots,$$

то значению $x = a + \omega$ будет соответствовать следующее:

$$y = b + A \cdot \omega + \frac{1}{2} B \cdot \omega^2 + \frac{1}{6} C \cdot \omega^3 + \frac{1}{24} D \cdot \omega^4 + \dots$$

Усовершенствованный метод ломаных сыграл значимую роль в развитии теории дифференциальных уравнений.

Именно с помощью этого метода О. Л. Коши (1789—1857) получил первое доказательство существования аналитического решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ с аналитической правой частью. Однако во многих историко-математических обзорах и в специальной литературе по дифференциальным уравнениям этот результат Эйлера не отмечается. Кроме того, не упоминается тот факт, что Эйлер занимался исследованием случая, когда правая часть уравнения обращается в ноль или в бесконечность.

Данному вопросу посвящена третья задача VII главы II раздела «Интегрального исчисления»: «Пусть при интегрировании уравнения $\dfrac{dy}{dx} = V$ оказывается, что для какого-либо интервала количество V либо исчезает, либо становится бесконечным. Указать способ интегрирования для этого промежутка».

Для решения этой задачи Эйлер полагает в уравнении (1) заменить функцию V на $\dfrac{P}{Q}$. То есть

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}, \tag{3}$$

где либо P, либо Q, либо оба исчезают при $x = a$ и $y = b$.

Далее, положив $x = a + \omega$ и $y = b + \psi$, он получил $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\psi}{d\omega}$. Отсюда, так как P и Q будут функциями от ω и ψ, то, по крайней мере, одна из них исчезает при $\omega = 0$ и $\psi = 0$.

Чтобы найти отношение ω и ψ хотя бы приближенно, Эйлер полагает $\psi = m \cdot \omega^n$. Тогда $\dfrac{d\psi}{d\omega} = m \cdot n \cdot \omega^{n-1}$ или, учитывая (3), получаем

$$m \cdot n \cdot Q \cdot \omega^{n-1} = P. \tag{4}$$

Здесь P и Q, в силу соотношения $\psi = m \cdot \omega^n$, будут содержать степени одного лишь количества ω. Так как ω является бесконечно малой величиной, то, приравняв и показатели низших степеней и коэффициенты соответствующих членов в равенстве (4), можно найти значения m и n. Однако, как отмечает Эйлер, если нужно определить более точную зависимость между ω и ψ, то следует положить $\psi = m \cdot \omega^n + M \cdot \omega^{n+\mu} + N \cdot \omega^{n+\nu} + \ldots$ и, учитывая величину промежутка, взять необходимое количество последующих членов.

Итак, Леонард Эйлер предложил два метода приближенного решения дифференциального уравнения первого порядка и рассмотрел случаи, когда эти методы не применимы.

Методом ломаных Эйлер пользуется и для решения дифференциальных уравнений второго порядка. Рассмотрение этого вопроса проводится в XII главе первой части второго тома «Интегрального исчисления».

Дифференциальное уравнение второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2} = V\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right)$ он приводит к системе двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = V(x, y, p) \tag{5}$$

и ставит вопрос о приближенном решении этой системы. При этом указывает на то, что, кроме начальных данных $x = a$ и $y = b$, необходимо также задать $p = \dfrac{dy}{dx} = c$. Тогда «вся задача интегрирования сводится к тому, чтобы определить соответствующие значения y и p, если количеству x придаем какое-то иное значение» [2, с. 245].

Для решения указанной задачи Эйлер полагает, что при возрастании x от a до $a + \omega$ значения y и p будут мало отличаться от b и c. Вследствие этого изменения функции V будут незначительными, поэтому можно считать функцию V постоянной, значение которой равно F.

Таким образом, справедливо равенство $dp = F\,dx$, интегрируя которое, получим $p = Fx + Const$.

Известно, что при $x = a$ должно быть $p = c$. Следовательно, выполняется $Const = -F \cdot a + c$, и тогда $p = c + F \cdot x - F \cdot a$ или $p = c + F \cdot \omega$.

Рассуждая аналогично, из второго уравнения системы (5) $\dfrac{dy}{dx} = p$, при малом ω, получаем $dy = c\ dx$, отсюда

$$y = b + c\omega. \tag{6}$$

Далее Эйлер обобщает: «Если первоначальные значения суть $x = a$, $y = b$ и $p = \dfrac{dy}{dx} = c$, в соответствии с которыми будет $V = F$, то последующие значения, отстоящие от первоначальных на весьма малый промежуток, суть $x = a + \omega$, $y = b + c\omega$, $p = c + F \cdot \omega$, и если эти значения в дальнейшем рассматривать как первоначальные, то исходя из них, можно таким же образом продвинуться на весьма малый промежуток, и, следовательно, выясняется, что можно продвинуться и на как угодно большой промежуток» [2, с. 246].

Рассматривая прикладные методы анализа у Эйлера, Н. И. Симонов писал: «Изложенное дает схему применения метода ломаных для любой системы вида $\dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2)$, $\dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2)$. Однако это расширение метода ломаных на системы уравнений почти не отмечается в историко-математической и специальной литературе» [3, с. 126].

Предложенный Эйлером метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка, сводящийся к продвижению на малые промежутки, в некоторых случаях сталкивается с проблемами. А именно, когда $c = 0$ или $c = \infty$. В первом из них предлагается заменить (6) на выражение вида $b + A(x - a)^{\lambda}$, где

$\lambda > 1$. Если $c = \infty$, то $y = b + A(x-a)^{\lambda}$, полагая $\lambda < 1$. Эйлер пишет: «Таким образом, в обоих случаях исследование сводится к одному и тому же — к определению из предложенного уравнения $dp = V\,dx$ как коэффициента A, так и показателя λ» [2, с. 248].

Из выражения

$$y = b + A(x-a)^{\lambda}$$

следует

$$\frac{dy}{dx} = p = \lambda \cdot A(x-a)^{\lambda-1}$$

и

$$dp = \lambda(\lambda-1) \cdot A(x-a)^{\lambda-2}\,dx.$$

Найденное значение dp должно совпадать с результатом, когда в выражение $V(x, y, p)dx$ подставляем $y = b + A(x-a)^{\lambda}$ и $p = \lambda \cdot A(x-a)^{\lambda-1}$.

Эйлер утверждает, что для V получается выражение вида $C \cdot (x-a)^{\mu}$, которое должно быть равно выражению $\lambda(\lambda-1) \cdot A(x-a)^{\lambda-2}$. Следовательно, отсюда можно определить коэффициенты A и λ.

Здесь, как и в случае приближенного решения дифференциального уравнения первого порядка, Эйлер встречается с проблемой, связанной с погрешностью рассмотренного метода. Поэтому он стремится его усовершенствовать. Полагая функцию V отличной от постоянной, Эйлер получает $p = c + V(x-a) - \int (x-a)dV$.

Тогда при условии, что $dV = P\,dx + Q\,dy + R\,dp$, имеем $dV = (P + Qp + RV)dx$. «Количество $P + Qp + RV$ на малом интервале можно рассматривать как постоянное, значение которого находится при $x = a$, $y = b$, $p = c$ и $V = F$» [2, с. 252].

Таким образом,

$$p = c + F \cdot (x - a) - \frac{1}{2}(P + Qc + RF) \cdot (x - a)^2 .$$

А так как $dy = p\ dx$, то

$$y = b + c \cdot (x - a) +$$

$$+ \frac{1}{2} F \cdot (x - a)^2 - \frac{1}{6}(P + Qc + RF) \cdot (x - a)^3 .$$

Далее Эйлер ставит проблему применимости предложенного им метода. В качестве примера он рассматривает уравнение $d^2 y + \frac{y\ dx^2}{x^2} = 0$ и отмечает, что «промежуток от 0 вплоть до $x = \omega$, даже если ω принимается весьма малым, дает бесконечные изменения в значениях y и p; это усматривается из полного интеграла указанного уравнения, так как им является $y = A \cdot x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \alpha\right)$» [2, с. 253].

Другим примером может служить уравнение $d^2 y + \frac{2\ dx\ dy}{x} - \frac{f^2 y\ dx^2}{x^4} = 0$, решением которого является $y = A \sin\left(\frac{f}{x} + \alpha\right)$. Эйлер пишет: «Пока x возрастает от 0 до ω, угол $\frac{f}{x} + \alpha$ переходит от бесконечности к конечному значению и его синус в это время бесконечное число раз изменяется от +1 до −1. Стало быть, когда встречаются такого рода промежутки, неудивительно, что обычные методы для приближения отказывают, так как они исходят из того положения, что изменения на весьма малых промежутках сами также ничтожны; а за исключением таких промежутков указанное решение всегда может быть применено с пользой» [2, с. 254].

Анализируя полученные Эйлером результаты, можно заключить:

- во-первых, при нахождении метода приближенного решения дифференциальных уравнений задача была сформулирована им с начальными данными, заданными в общем виде. Постановка вопроса именно в такой форме представляет собой задачу Коши;

- во-вторых, Эйлер не только разработал метод ломаных, который в настоящее время стал классическим и общеизвестным, но и предложил способ его усовершенствования;

- в-третьих, Эйлер применял метод ломаных и для решения дифференциального уравнения второго порядка и усовершенствовал его с целью уменьшения погрешности. Кроме того, Эйлер поставил вопрос о применимости предложенного им метода.

Список литературы

1. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалов Э. З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: Учеб. пособие для втузов. М.: Физматгиз, 1963. 400 с.

2. Эйлер Л. Интегральное исчисление: В 3 т. / Пер. с лат. С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского. М.: Гостехиздат, 1956—1957.

3. Симонов Н. И. Прикладные методы анализа у Эйлера. М.: Гостехтеориздат, 1957. 167 с.

Научное издание

ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ XVIII ВЕКА

К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера
(1707—1783)

Выпуск 3

Редакторы В. Г. Ивашина, Е. С. Рожкова
Технический редактор И. Н. Рожков
Компьютерная верстка И. Н. Рожкова

Подписано в печать 11.12.2002 г.
Усл. печ. л. 5,08
Тираж 200 экз.

Издательство Оренбургского государственного педагогического университета. 460844, г. Оренбург, ул. Советская, 19