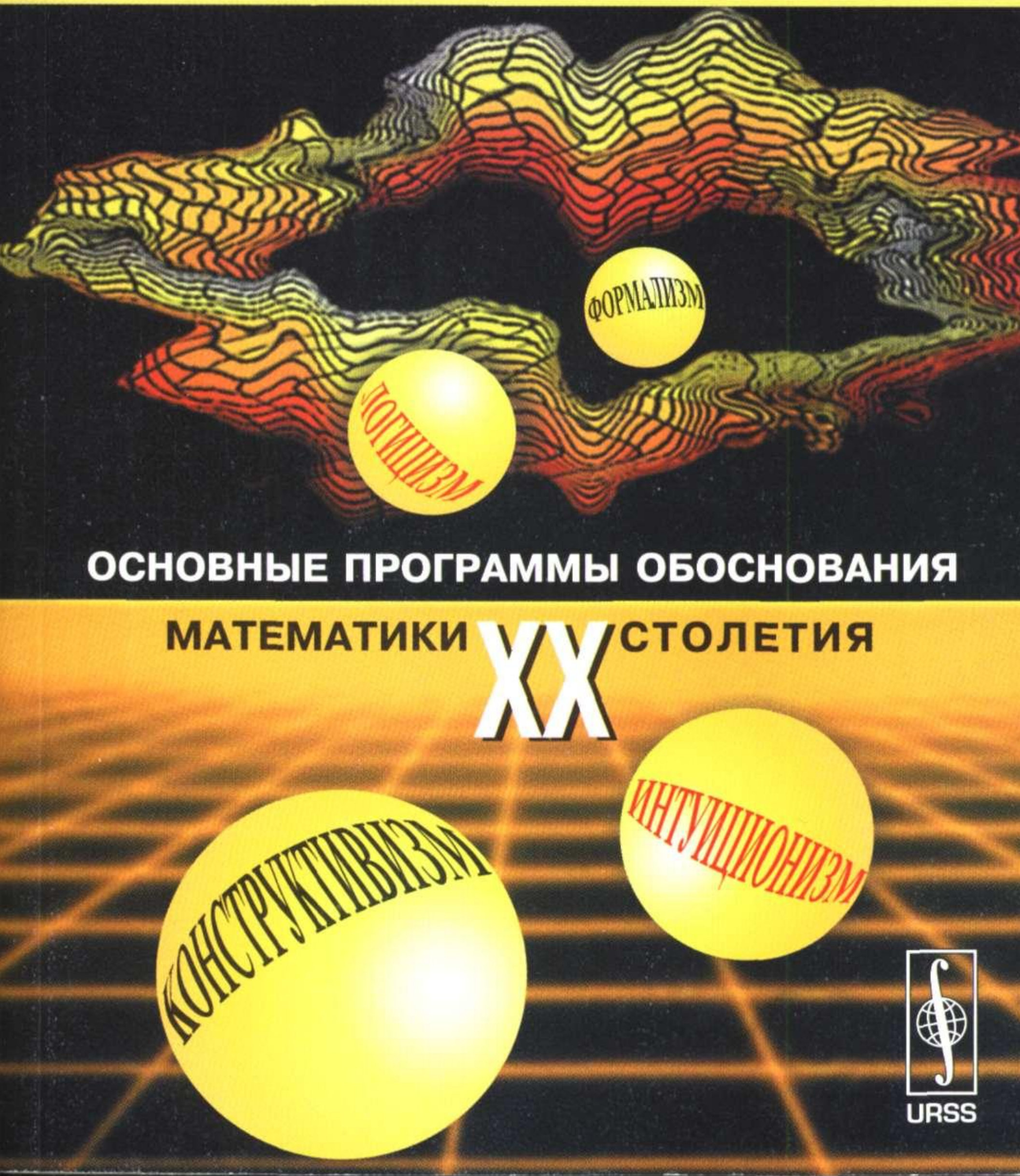
В. А. Светлов

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

ОСНОВНЫЕ ПРОГРАММЫ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ XX СТОЛЕТИЯ



URSS

В. А. Светлов

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

Основные программы обоснования математики XX столетия

Допущено Учебно-методическим объединением
по направлениям педагогического образования
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по направлению 540400 (050400)
«Социально-экономическое образование»

МОСКВА

URSS

ББК 22.1ф 87.1

Светлов Виктор Александрович

Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия: Учебное пособие. — М.: КомКнига, 2006. — 208 с.

ISBN 5-484-00453-5

Настоящее пособие подготовлено на основе авторского курса по истории и философии науки для аспирантов естественно-научного и гуманитарного циклов. Дан подробный анализ четырех ведущих программ обоснования философии XX столетия — логицизма, интуиционизма, конструктивизма и формализма. Главный акцент сделан на раскрытии философских допущений перечисленных программ и доступном изложении тезисов и основных результатов каждой из них. В пособии используется большое количество первоисточников и критической литературы. В первой главе автором излагается общий подход к проблеме обоснования математики. Предлагается решение, выходящее за рамки известной дихотомии априоризма и апостериоризма математического знания. Объясняется, почему ни одна из анализируемых программ не может считаться удовлетворительной в полной мере.

Пособие написано в соответствии с требованиями Программы кандидатских экзаменов по «Истории и философии науки», одобренной Высшей аттестационной комиссией и утвержденной приказом Министерства образования России от 17.02.2004, № 697.

Адресовано студентам, аспирантам, преподавателям, ученым, а также всем, кто самостоятельно изучает философские проблемы математики и кого интересуют логика и методология современной науки.

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Подписано к печати 09.02.2006 г. Формат 60×90/16. Бумага типографская. Печ. л. 13. Зак. № 425.
Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 5-484-00453-5

3710 ID 35662
9785484004539

Оглавление

Предисловие

К предмету философии математики принято относить вопросы, касающиеся обоснования математики как науки. XX век был уникальным временем, когда проблема обоснования математики считалась одной из самых приоритетных, и лучшие математические умы потратили немало времени на поиски ее адекватного решения. В результате были получены фундаментальные результаты, имеющие выдающееся философское значение.

В пособии дан подробный анализ четырех ведущих программ обоснования философии XX века — логицизма, интуиционизма, конструктивизма и формализма. Главный акцент сделан на раскрытии философских допущений перечисленных программ и доступном изложении тезисов и основных результатов каждой из них. В пособии используется большое количество первоисточников и критической литературы. В первой главе излагается общий подход к проблеме обоснования математики. Предлагается решение, выходящее за рамки известной дихотомии априоризма и апостериоризма математического знания. Объясняется, почему ни одна из анализируемых программ не может считаться удовлетворительной в полной мере.

Для удобства читателей в пособие в качестве справочного и общеобразовательного материала включены два специальных приложения. В первом разъясняются основные допущения и определения современной символической логики. Во втором содержится доступный анализ «парадокса лжеца», сыгравшего значительную роль в формировании современных концепций обоснования математики.

Пособие соответствует требованиям новой программы подготовки аспирантов по теме «философия математики» и рассчитано на всех, кто интересуется философскими вопросами математики, логикой и методологией современной науки.

Глава 1

Проблема обоснования математики

> Хорошо, что существуют логики и интуитивисты; кто рискнет утверждать, что он предпочел бы, чтобы [логик] Вейерштрасс никогда не писал или чтобы [интуитивиста] Римана не было? Таким образом, мы должны примириться с разнообразием умов или, еще лучше, мы должны ему радоваться.
>
> *А. Пуанкаре.* Наука и метод

Основной принцип научного исследования состоит в том, что ни одно высказывание, ни одна теория не принимаются научным сообществом без достаточных оснований. Однако в ряду всех наук математика занимает особое место. Ее утверждения не просто истинны, а *необходимо* истинны. В чем источник необходимости математических утверждений? Что может служить достаточным основанием их принятия? — Ответы на эти принципиальные вопросы образуют содержание проблемы обоснования математики.

Было предложено множество ответов, большинство которых источник необходимости математических истин видит в особенностях математического знания и соответственно этому развивает особую программу обоснования математики. Это прежде всего программы логицизма (основание математики — в логике), интуиционизма (основание математики — в априорной интуиции времени), конструктивизма (основание математики — в точном предписании, называемом алгорифмом) и формализма (основание математики — в представлении ее в виде исчисления), которые подробно анализируются ниже. Для полноты картины к ним следует добавить так называемый платонистский взгляд на природу и особенности математических объектов, концепцию самоочевидности математических теорий и эмпиристскую доктрину необходимости математического знания.

Согласно платонистам, которые не образуют самостоятельного направления и могут принадлежать к разным школам обоснования математики, математика имеет дело с объектами особого рода, реальность существования которых совершенно не зависит от природной действительности или по крайней мере не ниже уровня реальности природных объектов. По мнению логициста Фреге, задача математика заключается в открытии того, что уже существует на самом деле, а не в конструировании того, чего не было ранее. «Математик в состоянии создать что угодно в столь же малой степени, как и географ; он также может лишь обнаружить то, что есть, и дать этому название... В арифметике мы занимаемся предметами, которые не как нечто чуждое известны нам извне через посредничество чувств, но которые даны непосредственно разуму... Нет ничего более объективного, чем арифметические законы»[1].

Создатель теории множеств Кантор рассматривал бесконечные множества как объекты, как нечто, подобное идеям Платона. «...Под 'многообразием' или 'множеством' я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, т. е. всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона, и таким образом я думаю определить нечто, родственное платоновскому 'эйдосу' или 'идее'...».[2] Платонизм Кантора был прямым следствием принятия допущения актуальной бесконечности.

В новейшее время платонистскую позицию в математике защищал Гёдель, называя ее математическим реализмом. «...Классы и понятия можно мыслить как реальные объекты, т. е. классы как 'множества вещей', или как структуры, состоящие из множества вещей, а понятия как свойства вещей и отношения между ними, существующие независимо от наших определений и конструкций.

---

[1] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. Томск, 2000. § 96, 105 (по принятой международной традиции при ссылках на публикации Фреге указываются только параграфы его работ).

[2] *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М., 1985. С. 101.

Мне кажется, что допущение таких объектов так же законно, как и допущение физических тел, и имеются все основания верить в их существование. Они необходимы для получения удовлетворительной системы математики в том же смысле, в каком физические тела необходимы для удовлетворительной теории наших чувственных восприятий...»[3]

Неудовлетворительность платонистской точки зрения на обоснование математики состоит в том, что она не объясняет, а постулирует необходимость существования определенных объектов. На самом деле любая математическая теория зависит от множества допущений, что делает объекты, существование которых она утверждает, не абсолютно, а только условно необходимыми. Кроме того, она вступает в противоречие с тем способом, каким в действительности интеллект овладевает в процессе своего развития математическими операциями. Развитие математического мышления ни в коем случае не является мгновенным единовременным актом, как должно было быть, если бы платонисты были правы, а представляет последовательно прогрессивный, продолжающийся в течение многих лет процесс. Интеллект способен выполнить математическую операцию, абстрагировать какое-либо свойство только тогда, когда он имеет в своем распоряжении готовую операциональную структуру. И пока такие структуры не созданы, математика с ее утверждениями не более необходима, чем сновидение. Математические объекты — конструируемые в самом прямом смысле, а не открываемые нашим интеллектом объекты.

Аксиоматический характер многих математических теорий, а также особый статус аксиом в дедуктивной системе, их независимость от опыта наталкивают некоторых математиков на предположение, что необходимость математических суждений является следствием их самоочевидности. Данный критерий восходит, по крайней мере, к Декарту, который утверждал, отвечая своим оппонентам: «Все, что я воспринимаю ясно и отчетливо, по необходимости истинно»[4]. Развернутую защиту концепции самоочевидности математических истин дал Лейбниц. По его мнению, в основе самоочевидности лежит то обстоятельство, что все математические

[3] *Gödel K.* Russell's Mathematical Logic // Philosophy of Mathematics. Englewood Cliffs, 1964. P. 220.

[4] *Декарт Р.* Сочинения: В 2 т. Т. 2. М., 1994. С. 257.

истины суть тождественные, т. е. необходимо истинные, истинные сами по себе, утверждения. Их отрицание, следовательно, всегда ложно. «Бесспорно, что тождественные предложения являются первыми из всех и не допускают никакого доказательства, будучи тем самым истинными сами по себе... И очевидно, что все необходимые, или вечно истинные, предложения являются виртуально тождественными, — те, конечно, которые могут быть доказаны из одних только идей или определений... т. е. могут быть сведены к первым истинам, так что окажется, что противоположное содержит в себе противоречие и приходит в столкновение с каким-либо тождеством, или первой истиной»[5].

К сожалению, несмотря на все усилия рационалистов, критерий самоочевидности сам не является самоочевидным. Как хорошо знают изучавшие математику, не все математические истины самоочевидны. Совсем не очевидно, почему квадратный корень из двух не является рациональным числом. Кроме того, некоторые истины, особенно относящиеся к теории бесконечных множеств, не только не самоочевидны, но и вступают в явное противоречие с нашей интуицией конечного. Бесконечный опыт поколений убеждает, что часть всегда меньше целого[6]. Тем не менее определение бесконечности требует принятия прямо противоположного допущения: множество бесконечно, если и только если существует собственное подмножество (не равное всему множеству), которое находится во взаимно однозначном соответствии со всем множеством.

Всем указанным взглядам на причину математической необходимости противостоит точка зрения, согласно которой математика, если не по происхождению своих абстракций, то по своему методу, — эмпирическая наука. Д. С. Милль[7] в XIX в., Л. Кальмáр[8] и И. Лакатос[9] в XX в. наиболее последовательно, хотя и с некото-

---

[5] *Лейбниц Г. В.* Сочинения: В 4 т. Т. 3. С. 139–140.

[6] «Отсюда... философы уже давно доказали, что часть меньше целого, использовав следующее определение: меньшее есть то, что равно части другого (большего)». (*Лейбниц Г. В.* Указ. соч. С. 139.)

[7] *Милль Дж. С.* Система логики силлогистической и индуктивной. М., 1914. С. 201–234.

[8] *Kalmár L.* Foundations of Mathematics — Wither Now? // Problems in the Philosophy of Mathematics. Amsterdam, 1967. P. 187–194.

[9] *Lakatos I.* A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of mathematics // Problems in the Philosophy of Mathematics. Amsterdam, 1967. P. 199–202.

рыми отличиями друг от друга, отстаивали эту точку зрения. Основные аргументы ее защитников таковы. Если математика — наука, то она, как и все остальные науки, должна быть опытной по происхождению, ее метод должен быть подобен общенаучному и степень необходимости ее положений не может превосходить степень необходимости естественнонаучных теорий. Математическая необходимость есть не более чем необходимость следования теорем из посылок, называемых аксиомами. Но это уже не онтологическая, а логическая необходимость. К математике в собственном смысле она не имеет прямого отношения.

Неудовлетворительность эмпирического обоснования математики следует из того, что математические суждения не просто истинны, а истинны с необходимостью. Необходимость же может быть следствием только необходимости. Но опытные суждения не являются необходимо истинными и не могут служить формальным основанием истинности математического знания. Никакое число объединений двух различных объектов с тремя различными объектами не может доказать аподиктичность элементарного суждения арифметики «2 + 3 = 5». Парадоксальность математической необходимости состоит в том, что ее доказательство вообще не требует обращения к внешнему опыту. Другим аргументом против эмпирического обоснования математики служит пример, который любил приводить Фреге. Ни один эмпирик не может удовлетворительно объяснить, какому внешнему, наблюдаемому в опыте событию соответствует число 0. Ему также трудно объяснить происхождение и операции с бесконечностью и тем более — с разными видами бесконечности. «Из опыта, т. е. посредством эксперимента, никогда нельзя прийти к заключению о возможности или существовании сколь угодно большого числа, ибо число предметов, являющихся объектом нашего опыта, даже если оно велико, все же не превосходит некоторого конечного предела»[10].

Можно поэтому согласиться со следующей оценкой перспективности эмпирического обоснования математики. «Верно, что математика в конечном счете отражает объективный мир, но она (как наука) имеет свою специфику по сравнению с эмпирическими науками, и поэтому нельзя отождествлять методы развития и обосно-

[10] *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.; Л., 1948. С. 323.

вания математики с методами развития и обоснования эмпирических наук. Методы математики и естествознания в определенной степени сходны, но не идентичны, что связано прежде всего с тем обстоятельством, что идеальные модели пространственных форм и количественных отношений действительности, являющиеся в конечном счете предметом математики, не даны нам непосредственно эмпирически»[11].

Кроме необходимости, математическое знание обладает и другими особенностями, также влияющими на построение программы обоснования.

Математическая теория — содержательная или формальная дедуктивная система, управляемая небольшим числом аксиом. Каждая математическая аксиома — абстракция отношений между природными или социальными объектами. Природа идеализаций такова, что никакой опыт не соответствует им с абсолютной точностью. Всякая попытка провести идеально прямую линию, скажем на бумаге, обречена на неудачу. С одной стороны, идеализации — продукты творческого воображения, но никак не результаты наблюдения, обобщения и систематизации данных опыта. С другой стороны, только благодаря идеализациям математическое доказательство становится необходимым и универсально применимым.

В дедуктивных системах аксиомы выполняют функцию посылок, из которых с помощью специальных правил выводятся следствия (теоремы). В отличие от естественнонаучных теорий, в которых истинность посылок зависит от истинности их следствий, в математических теориях все наоборот — истинность теорем полностью обусловлена истинностью аксиом, из которых они следуют. Значит, истинность математических утверждений зависит не от опыта, а от истинности аксиом. Последние обосновываются либо посредством интуиции, либо признаются априорными конструкциями[12].

Таким образом, в подавляющем числе случаев специфику математики принято видеть в необходимости и независимости ее утверждений от опыта, интуитивном или априорном происхождении ее аксиом. В зависимости от того, какие особенности математиче-

---

[11] *Карпунин В. Н.* Формальное и диалектическое в математическом познании. Л., 1983. С. 24.

[12] О новых аргументах в защиту априорной природы математических идеализаций см.: *Перминов В. Я.* Философия и основания математики. М., 2001.

ского знания выделяются в качестве специфических, строится конкретная программа обоснования математики.

Процедура обоснования математики формально имеет характер следующей неразрешимой дилеммы. Математическое знание, как и всякое другое знание, требует внешнего обоснования. Ибо ясно, что математика не является самодостаточной, самой себя обосновывающей наукой. Но, будучи необходимой, математика не может быть обоснована ничем внешним, эмпирическим, потому что последнее принципиально не является необходимым. Решить эту дилемму неформально означает доказать, как математическое знание достигает необходимости (аподиктичности), хотя его предпосылки сами не являются необходимо истинными.

Операциональное обоснование математики

Принято считать, что математическое знание иерархизировано и что в его основании лежит теория натуральных чисел. Все остальные разделы математики интерпретируемы в терминах натуральных чисел и тем самым сводимы к ним. Данное утверждение принято называть *тезисом арифметизации математики*[13]. Принятие этого тезиса объясняет, почему натуральные числа считаются парадигмальными объектами математики, почему все ведущие программы обоснования математики начинаются с предположений, объясняющих прежде всего необходимую природу натуральных чисел.

Программы обоснования математики можно условно разделить в зависимости от того, как именно обосновывается в каждой из них понятие натурального числа.

В стандартной теории множеств натуральное число есть множество, принадлежащее (индуктивному) множеству I со следующими свойствами:

---

[13] «При такой точке зрения (рассмотрении арифметики, алгебры и анализа как части логики. — *В. С.*) оказывается самоочевидным и вовсе не новым то обстоятельство, что всякая, хотя бы и очень отдаленная, теорема алгебры или высшего анализа может быть формулирована как теорема о натуральных числах...» (*Дедекинд Р.* Что такое числа и для чего они служат. Казань, 1905. С. 5.)

(1) $0 \in I$;

(2) если $n \in I$, тогда $(n + 1) \in I$[14].

В логицистской программе Фреге—Рассела натуральное число является определенным свойством объема понятия F и определяется как класс всех понятий, которые можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с F.

В интуиционистской программе натуральные числа определяются как результаты умственного деления переживаемого жизненного момента на две части, одной из них — еще на две части и т. д. Сам жизненный момент имеет исключительно интуитивное основание.

В конструктивистской программе натуральное число — результат конструктивного, т. е. основанного на определенном алгорифме, процесса построения ряда определенных элементарных знаков (например, вертикальных черточек).

В формалистской программе Гильберта натуральные числа — это экстра-логические дискретные объекты, присутствующие в нашем непосредственном опыте еще до всякого размышления о них.

Несмотря на внешнее разнообразие подходов к определению натуральных чисел и сделанных при этом его авторами проницательных открытиях, ни одно из предложенных обоснований нельзя назвать удовлетворительным в полной мере. Общая методологическая причина этого — восхождение при объяснении природы натурального числа от частного к общему. Тогда как более правилен обратный путь — от общего к частному.

Подавляющее число математиков разделяют мнение, что каждое натуральное число представляет объект, который может быть выделен из ряда натуральных чисел и рассмотрен как нечто обособленное и автономное и который может быть определен (построен) независимо от других чисел. Например, среди формалистов и конструктивистов популярна идея представления натуральных чисел в виде комбинации определенных знаков — вер-

[14] Индуктивное множество I строится следующим образом. Число 0 обозначает общее свойство всех множеств, не содержащих ни одного элемента, т. е. 0 приравнивается к пустому множеству: $0 = \varnothing$. Число 1 — общее свойство всех одноэлементных множеств: $1 = \{0\} = \{\varnothing\}$. Число 2 — общее свойство всех двухэлементных множеств: $2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Число 3 — общее свойство всех трехэлементных множеств: $3 = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, и т. д.

тикальных черточек, палочек и тому подобных символов. Подобная символизация, полагают эти математики, наглядно демонстрирует дискретный характер каждого натурального числа, его самодостаточную природу, и объясняет, почему наш интеллект воспринимает суждения об этих объектах как очевидно истинные. *Но так ли это на самом деле?*

Проблема с натуральными числами заключается в том, что невозможно мыслить не только отдельное натуральное число, но и все множество натуральных чисел, включая нуль, как нечто обособленное. «Положительные и отрицательные числа, — пишет К. Гаусс, — могут найти применение только там, где сосчитанному противостоит нечто противоположное, что в соединении с ним дало бы в результате нуль. Точнее говоря, это условие осуществляется только там, где сосчитанное составляют не субстанции (сами по себе мыслимые предметы), а отношения между двумя предметами. Постулируется при этом, что предметы эти располагаются определенным образом в один ряд, например, *A*, *B*, *C*, *D*, ..., *и что отношение между A* и *B* может мыслиться равным отношению *B* к *C* и т. д. Здесь в понятие противоположности не входит ничего больше, кроме перестановки членов отношения, так что если отношение (или переход) от *A* к *B* есть +1, то отношение *B* к *A* должно быть выражено через –1. Так как такой ряд беспределен с обеих сторон, то всякое реальное целое число представляет отношение любого избранного началом члена к определенному члену ряда»[15].

Аналогичное мнение высказывает Ж. Пиаже: «Равным образом не вызывает сомнения, что целое число как психологически, так и логически (вопреки мнению Рассела) существует только в системе натурального ряда чисел (порождаемого операцией +1) ...»[16]

Значит, ни одно натуральное число не существует как нечто, обособленное от всего ряда натуральных чисел. Каждое из них представляет результат допустимой операции, интегрированной в целостную (взаимозависимую) систему объектов и операций. Следовательно, каждое натуральное число существует только как элемент определенной системы объектов и операций над ними. На-

---

[15] Цит. по: *Кунтце Ф.* Математика и точное изложение теоретико-познавательных проблем // Новые идеи в философии. СПб., 1914. № 11. С. 130.

[16] *Пиаже Ж.* Психология интеллекта. СПб., 2004. С. 42.

пример, суждение «1 + 1 = 2» истинно, если и только если речь идет о натуральных числах и знак «+» обозначает операцию арифметического сложения. Но если в качестве объектов системы выбрать дождевые капли, а их сложение интерпретировать как их слияние, то истинным будет уже суждение «1 + 1 = 1», которое с арифметической точки зрения, безусловно, ложно.

Обобщая сказанное, парадигмальными объектами математики следует считать не числа, множества, функции... как отдельные и самостоятельные математические объекты, а формы их целостности, которые принято называть математическими системами (или группами в алгебраическом смысле). Математическое знание достигает целостности, если оно может быть представлено в виде замкнутой группы преобразований, сохраняющих базисное множество элементов. Математика в принципе ничего иного и не представляет, как конструирование и применение подобных систем для решения конкретных задач.

Назовем сохранение математической системой базисного (исходного) множества своих объектов при применении своих преобразований свойством замыкания. Тогда математическую систему можно определить следующим образом:

Математическая система = базисное множество математических элементов + множество допустимых операций, выполняющих свойство замыкания.

Главные свойства математических систем таковы. Они символизируют схемы допустимых действий с элементами базисного множества системы. Благодаря свойству замкнутости операций результаты любых преобразований элементов системы порождают ее же собственные элементы. Иными словами, любые преобразования правильно построенной математической системы всегда сохраняют ее как определенную целостность объектов и операций. Свойства таких систем всегда предшествуют свойствам своих элементов, но не наоборот. В интуитивно очевидном для многих равенстве «–1 + 1 = 0» первичными являются не числа 1 и 0 со своими индивидуальными свойствами, а свойства математической системы, называемой группой по сложению, определенной на множестве целых (положительных и отрицательных) чисел.

Необходимость и достоверность математических суждений представляют прямое следствие замкнутого характера преобразований, допускаемых математической системой. Если условие замкнутости не выполняется, то результаты преобразования перестают быть необходимыми. *Быть математически необходимым означает существовать как элемент определенной математической системы и подчиняться законам сохранения ее целостности.*

В системе натуральных чисел только операции сложения и умножения порождают натуральные числа. Значит, только они сохраняют множество натуральных чисел как данную систему и только их результаты являются для нее необходимыми:

Натуральные числа + операции сложения и умножения = натуральные числа.

Операции вычитания и деления, выполняемые без ограничений на множестве натуральных чисел, могут привести к появлению отрицательных и дробных чисел. Последние виды чисел не принадлежат к множеству натуральных чисел. Значит, операции вычитания и деления способны приводить к ненеобходимым (случайным) для системы натуральных чисел результатам и по этой причине не входят в список ее допустимых операций. Замкнутый характер математических систем означает, что математическая необходимость представляет разновидность «истин тождества» (так Лейбниц называл истины разума) в следующем смысле:

Математические суждения о свойствах (операциях и их результатах) данной математической системы необходимо истинны, если и только если операции этой системы выполняют условие замыкания.

Все правильно построенные математические системы замкнуты и тем самым необходимы в том смысле, что каждая из них представляет инвариант собственных операций. Между собой математические системы можно тем не менее различать по свойству полноты (целостности) — по числу операций, сохраняющих элементы базисного множества. Более полная система включает все операции менее полной и содержит по крайней мере одну дополнительную. Это означает, среди прочего, что отличительным признаком прогресса математики является процесс конструирования все более полных, целостных математических систем. Наглядным примером такого прогресса служит следующий фрагмент из истории чисел[17].

Система *натуральных* чисел $N = \{x \mid x = 0, 1, 2, \ldots\}$ допускает только операции сложения и умножения. Представляет простейшую и наименее полную числовую систему. Данное обстоятельство ставит под сомнение желание многих математиков видеть в этой системе «твердое» основание всей математики.

Система *целых* чисел

$$C = \{x \mid x = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = = N \times N = \{(a,\ b)\},$$

где $a > b$, $a < b$ или $a = b$, более полна, потому что ее базисное множество включает, помимо целых положительных чисел и нуля, отрицательные числа. К сложению и умножению присоединяется операция вычитания.

Система *рациональных* чисел $R = C \times C = \{x \mid x = m/n, n = 1, 2, \ldots\}$ еще более полна. Она содержит конечные или бесконечные периодические дроби (дроби, чьи числители и знаменатели равны целым числам); к допустимым операциям для целых чисел добавляется деление.

Система *действительных* (*вещественных*) чисел $D = \{x \mid x =$ конечная или бесконечная периодическая дробь, бесконечная непериодическая дробь$\}$ еще более полна и тем самым целостна. Она состоит из рациональных и иррациональных чисел. Ее мощность равна континууму. Действительные числа находятся во взаимно однозначном соответствии с точками числовой прямой. Они всюду плотны и не содержат никаких пробелов. Эта система чисел необходима и достаточна для построения таких разделов анализа, как дифференциальное и интегральное исчисление.

Существуют и более общие системы чисел, но сказанного достаточно для понимания логики конструирования математических систем и характера прогресса в математике. Потребность создания все более целостных систем является важнейшим мотивом развития не только теории чисел, но и всей математики.

---

[17] См.: *Дейвис Филипп Дж.* Арифметика // Математика в современном мире. М., 1967. С. 29–45.

Математические системы обладают еще одним важным свойством, которое позволяет понять генетически обусловленное единство интеллектуальных, логических и собственно математических операций. Существенный признак всякой математической системы — не множество ее элементов, а те операции, которые его порождают и обеспечивают его существование (сохранение). «С психологической точки зрения операции — это действия, которые перенесены внутрь, обратимы и скоординированы в системе, подчиняющейся законам, которые относятся к системе как целому. Они представляют собой действия, которые, прежде чем они стали выполняться на символах, выполнялись на объектах. Они перенесены внутрь, так как выполняются в мысли, не утрачивая при этом своего естественного характера действия. Они обратимы в противоположность простым действиям, которые не обратимы... Наконец, поскольку эти операции не существуют изолированно, они связаны в форму *структурированного целого*»[18].

Операциональное мышление появляется в результате замещения действий с реальными объектами действиями с символами. При этом ни одна операция не существует изолированно. «...Единичная операция не является операцией, а остается на уровне простого интуитивного представления. Специфическая природа операций, если их сравнивать с эмпирическими действиями, заключается, напротив, в том, что они никогда не существуют в дискретном состоянии. Об „одной“ операции мы можем говорить, только в результате абсолютно незаконной абстракции: единичная операция не могла бы быть операцией, поскольку сущность операций состоит в том, чтобы образовывать системы»[19].

Есть все основания считать, что уже на первых стадиях развития интеллекта начинает формироваться система *с общими для интеллекта, логики и математики операциями*. Она была названа Пиаже (алгебраической) группой *INRC* (аббревиатура от начальных букв названий операций — тождества *I*, отрицания *N*, обращения *R* и отрицания обращения С). Если это предположение Пиаже верно, то исчезает вопрос о приоритете интеллекта, логики и математики. Все эти способности и соответствующие

[18] *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М., 1994. С. 594.

[19] *Пиаже Ж.* Психология интеллекта. С. 41.

им знания рождаются, существуют и влияют друг на друга одновременно.

Одним из лучших неформальных определений группы в алгебраическом смысле является следующее: «Группу можно определить как некоторое множество действий, или операций *A*, *B*, ..., которые могут объединяться вместе — делай сначала *A*, затем *B*. Действие, представляющее результат объединения каких-либо действий, также должно быть членом группы; процесс объединения обычно называют «умножением». Недействие (отсутствие действия, нулевое действие. — *В. С.*) следует считать членом группы (ее нейтральным элементом). Каждое действие должно быть обратимым, при этом объединение какого-либо действия со своим обращением должно давать недействие, т. е. возвращение к исходному действию. Наконец, результат некоторой последовательности действий... не должен зависеть от порядка их объединения»[20].

Конкретно в группу *INRC* входят[21]:

(1) действия, позволяющие соединять (складывать, умножать, включать и т. д.) определенным образом любые элементы системы и получать новые элементы этой же системы (свойство замыкания);

(2) действия, представляющие обратную трансформацию другого действия, т. е. наличие в системе для каждой операции ей обратной (вычитание для сложения, деление для умножения и т. д.);

(3) действия, позволяющие получать новые объекты системы различными независимыми способами (свойство ассоциативности: $((A + B) + C) = (A + (B + C)) = D$);

(4) действия, аннулирующие результаты им обратных действий, т. е. позволяющие получать нуль при объединении сложения и вычитания, единицу при объединении умножения и деления.

Если в качестве перечисленных действий взять операции отрицания (дополнения), обращения, отрицания обращения и тождества (нулевого действия), то мы получим группу, порождающую все интеллектуальные, логические и математические преобразования. Несложная проверка позволяет убедиться в этом.

[20] *Candy R.* "Structures" in Mathematics // Structuralism: An Introduction. Oxford, 1973. P. 144–145.

[21] *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. С. 567–628.

Пусть N = «операция отрицания», R = «операция обращения», C = «операция отрицания обращения» («операция обращения отрицания»), I = «операция тождества».

Первое свойство группы требует, чтобы результат объединения операций снова был одной из исходных операций. Пусть знак «×» обозначает объединение операций и имеет приблизительно тот же смысл, что и союз «и». Проведем проверку данного свойства (интерпретация группы в целом будет приведена после рассмотрения ее законов).

$NR = C$, отрицание × обращение = отрицание обращения.

$NC = R$, отрицание × отрицание обращения = обращение.

$RC = N$, обращение × отрицание обращения = отрицание.

$NRC = I$, отрицание × обращение × отрицание обращения = тождество.

$NRCN = N$, отрицание × обращение × отрицание обращения × отрицание = отрицание. И т. д.

Смысл рассмотренного свойства состоит в том, что любую последовательность операций всегда можно заменить равнозначным результатом их последовательного выполнения, опять принадлежащим исходному множеству операций.

Второе свойство группы требует наличия тождественного преобразования. В рассматриваемой группе таким преобразованием является операция I. Проведем проверку данного свойства.

$IN = N$, тождество × отрицание = отрицание.

$IR = R$, тождество × обращение = обращение.

$IC = C$, тождество × отрицание обращения = отрицание обращения.

$INR = NR = C$, тождество × отрицание × обращение = отрицание × обращение = отрицание обращения.

$INRC = NRC = I$, тождество × отрицание × обращение × отрицание обращения = тождество. И т. д.

Итак, применить тождественное преобразование означает оставить все без изменения.

Третье свойство требует, чтобы для каждой операции, являющейся ее элементом, существовала ей обратная операция. При этом объединение (последовательное выполнение) прямой и обратной операции должно давать тождественное преобразование. Особенностью группы *INRC* является то, что каждая исходная операция обратна самой себе. Приведем проверку данного свойства.

$NN = I$, отрицание × отрицание = тождество.

$RR = I$, обращение × обращение = тождество.

$CC = I$, отрицание обращения × отрицание обращения = тождество.

$II = I$, тождество × тождество = тождество.

Из данного свойства следует, что тождество может быть получено двумя принципиально разными способами — как отрицание отрицания и как обращение обращения. На этом различии основано различие между логикой классов с дополнением в качестве отрицания и логикой отношений с обращением в качестве собственной операции отрицания (логика отношений включает, конечно, и операцию дополнения).

Четвертое свойство требует, чтобы порядок объединения операций не влиял на их конечный результат (свойство ассоциативности). Проведем проверку данного свойства.

$N\ (RC) = (NR)\ C = R\ (NC) = I$, отрицание × (обращение × отрицание обращения) = (отрицание × обращение) × отрицание обращения = обращение × (отрицание × отрицание обращения) = тождество.

Очевидно, что ассоциативность является логическим аналогом свойства альтернативности.

Итак, все свойства группы выполняются. Связь всех операций, согласно данным свойствам, указана на рис. 1.1.

Рассмотрим простую интерпретацию группы в целом. Пусть даны величины A и B такие, что A больше B, ($A > B$). Тогда операция R трансформирует $A > B$ в отношение $B < A$, операция N переводит $A > B$ в отношение $A \leq B$, операция C преобразовывает $A > B$ в отношение $B \geq A$ (рис.1.2).

Все свойства группы можно проверить движением вдоль соответствующей линии диаграммы на рис. 1.2.

Инвариант логико-математического мышления, структуру которого отображает группа *INRC*, основывается на четырех элементарных операциях — отрицании (дополнении), обращении, отрицании обращения и тождестве. Все эти операции в равной мере необходимы и вместе достаточны для порождения всех логических преобразований, свойственных человеческому интеллекту.

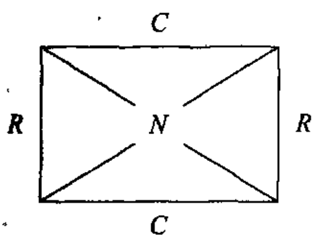


Рис. 1.1. Операции группы *INRC*

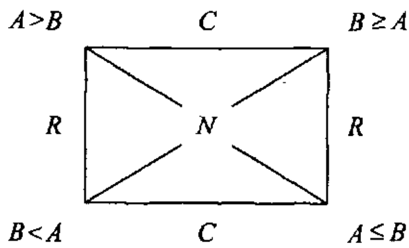


Рис. 1.2. Пример группы *INRC*

Группа *INRC* синтезирует две основные ступени интеллектуального развития. Первая из них связана с овладением операциями с классами, что соответствует логике понятий. Вторая ступень связана с развитием навыков формирования и преобразования отношений, чему соответствует логика суждений. Синтез обеих ступеней предполагает умение оперировать как классами, так и отношениями, что отражается в способности строить отрицания обращений (обращение отрицаний) и соответствует логике умозаключений. Структура последней и выражается группой *INRC*.

Группа *INRC* снимает вопрос о приоритете интеллекта, логики или математики, так как представляет общую для всех них систему умственных операций. Операции отрицания, обращения, отрицания обращения и тождества взаимозависимы и уравновешенны. Они существуют только вместе, имеют смысл только относительно друг друга. Никакая отдельная операция, комбинация любых двух операций недостаточна для полноценного мышления.

С учетом зависимости и уравновешенности всех элементов рассматриваемой структуры имеет смысл говорить не об отдельных обособленных законах интеллекта, логики и математики, а об инвариантных чертах мышления как такового. К ним относятся способность строить классы и тем самым использовать операцию дополнения; способность строить отношения и тем самым использовать операцию обращения; способность строить дополнения обращений и тем самым использовать операцию отрицания обращений; способность строить дополнения дополнений, обращения обращений и другие комбинации операций, ведущих к тождеству, тем самым использовать тождественные преобразования. На этом операциональном фундаменте развивается способность интеллекта к установлению взаимно однозначного соответствия между элементами различных множеств, пониманию принципов сохранения числа элементов при различном способе их счета и подобным операциям, позволяющим строить математические системы в собственном смысле слова.

Группа *INRC* представляет инвариант операций, общих для всех действий интеллекта и достаточных для построения логики и математики. Данный инвариант доказывает существование фундаментального единства интеллектуальных, логических и математических операций. Это следует понимать как формирование нашим интеллектом с самого начала своей активности общей, лишь конкретизируемой в последующих частных применениях, антиципирующей схемы действия. Назначение этой схемы состоит в том, чтобы обеспечить единый и универсальный механизм решения проблем, с которыми сталкивается интеллект, и, в конечном счете, успешную адаптацию к изменяющейся внешней среде.

Общий операциональный источник наших знаний объясняет гносеологический статус математического знания. Интеллект использует свои математические способности тогда, когда нуждается в идеальных количественных эталонах оценки конкретных операций с реальными объектами. Без создания таких эталонных операций результаты конкретных преобразований теряют свою необходимость. Если маленький ребенок при сложении двух птичек с тремя птичками приходит к результату, отличному от результата сложения трех птичек с двумя птичками, то это свидетельствует о том, что он еще не обладает устойчивой эталонной операциональной схемой сложения, независимой от порядка счета. Только по этой причине одинаковые результаты сложения не являются для него обязательными. С гносеологической точки зрения, математика — множество идеальных эталонов, организованных в определенные математические системы, цель которых состоит в том, чтобы количественно контролировать и гарантировать необходимость результатов наших действий с реальными и символическими объектами. Нечто подобное имеет место в измерительных процедурах, когда некоторые единицы длины, веса, тяжести и т. п. принимаются за эталоны и все последующие операции с объектами производятся с учетом принятых эталонных мер. Всякое отступление от принятых мер является ненеобходимым и признается за ошибку.

Обоснование математики существенным образом связано с логикой процедуры обоснования. Смысл и последствия этой логики, однако, редко объясняются.

Со времен Евклида идеалом обоснования какой-либо науки считается построение ее в виде аксиоматической системы. Считалось, что если выбрать надлежащее множество самоочевидных аксиом и применить к ним надежную технику дедуктивного вывода, все истины аксиоматизированной науки превратятся в доказываемые утверждения, или теоремы. Главное преимущество аксиоматизированной системы — подчинение бесконечного числа аксиом небольшому числу аксиом. Тот, кто знает аксиомы некоторой науки и правила дедукции, потенциально знает все ее теоремы.

Несмотря на явные преимущества такого способа обоснования, постепенно стали ясны и его ограничения. Во-первых, проблемным является вопрос о самоочевидности аксиом. Аксиома — положение, которое, по определению, не доказывается в силу своей самоочевидности. Вместе с тем она должна быть максимально достоверным положением. При этом было достаточно сослаться на интуитивную самоочевидность или тождественность логических признаков. Однако опыт показывает, что такие ссылки не гарантируют достоверности аксиомы. Самый известный пример аксиомы, оказавшейся через много сотен лет неочевидной, — пятый постулат геометрии Евклида (через точку, лежащую вне прямой, можно провести одну и только одну параллельную линию). Как известно, этот постулат был отвергнут в XIX в. Во-вторых, как было доказано Гёделем в первой трети XX в., аксиоматизация теорий, включающих элементарную арифметику, принципиально не может быть полной. Какой бы исчерпывающей ни была система аксиом, всякая теория, включающая утверждения о натуральных числах, содержит истинные высказывания, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть средствами этой теории. В-третьих, оказалась несбыточной мечта некоторых математиков отождествить математическое мышление с дедукцией.

Дедукция всегда ценилась математиками за то, что позволяла из истинных посылок выводить только истинные следствия. Однако мало кто придает значение тому факту, что в дедукции не посылки управляют значением истинности следствий, а следствия — значением истинности посылок[22]. Истинное заключение может следовать как из истинных, так и ложных посылок. Истинность заключения не зависит от значения истинности посылок. В то же время ложное заключение необходимо опровергает истинность по крайней мере одной из посылок, из которых оно следует. Следовательно, истинность посылок зависит от истинности заключения, но не наоборот.

Из сказанного следует важный для обоснования математики вывод. Если истинность посылок в дедукции принципиально не может быть выше по рангу истинности заключения, значит, не аксиомы управляют истинностью теорем, а наоборот, теоремы управляют истинностью аксиом. Но тогда следует, что аксиомы — это положения, ничем не отличающиеся по своему статусу от гипотез, достоверность которых больше нуля, но меньше единицы, а аксиоматическая система по своим логическим свойствам — обычная гипотетико-дедуктивная система. Выходит, что обоснование математических истин ничем фактически не отличается от обоснования истин нематематических наук. Оно протекает как процесс выдвижения и испытания математических гипотез[23].

Далее, если даже в аксиоматических системах теоремы управляют истинностью аксиом, значит, вопрос о том, из каких именно аксиом следуют данные теоремы, не имеет принципиального значения. Поиск «самых достоверных начал» для математики оказывается лишенным по крайней мере логического смысла. Ведь если одна и та же теорема следует из бесконечного числа аксиом (начал), то насколько интересен и важен спор, из какой именно? Никаких единственных и достоверных начал на самом деле не существует ни для одной науки. Математика, как и все остальные разделы научного знания, может строиться на основании любых гипотетических предпосылок. Важны получаемые результаты, а не те начальные допущения, которые принимают математики. При этом так называемые «побочные», «вспомогательные» итоги обоснования представляют очень часто гораздо более важные результаты, чем преследуемые непосредственно. Например, создание современной

[22] См.: *Орлов И. Е.* Логика естествознания. М.; Л., 1925. С. 3.

[23] Более подробно об этом см.: *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М., 1967.

символической логики можно считать гораздо более значительным достижением логицизма и формализма, чем полученные основателями этих программ конкретные результаты в области обоснования математики.

Высказанные соображения означают, что ни одна из ведущих программ обоснования математики XX в. не смогла завоевать абсолютного признания и решить проблему обоснования в полном объеме. Однако каждая из них внесла свой частный вклад в решение этой сложнейшей задачи. И мы должны быть благодарны всем, кто спорил и продолжает спорить до сих пор, отстаивая, уточняя или развивая дальше свою точку зрения. Ведь только из столкновения различных мнений рождается подлинная истина.

Глава 2

Кризис математики в начале XX века

> Этой точки зрения (о законности существования абсолютной бесконечности. — *В. С.*), которую я считаю *единственно правильной*, придерживаются лишь немногие. Быть может, я по времени первый, защищающий ее с полной определенностью со всеми следствиями, но одно я знаю твердо: я не буду ее последним защитником.
>
> *Г. Кантор.*
> О различных точках зрения на актуально бесконечное

Событием, которое, по общему признанию, потрясло весь математический мир и стало причиной появления альтернативных программ обоснования математики, стал кризис математики, разразившийся в начале XX в. Состояние, предшествовавшее кризису, не предвещало никаких катаклизмов. «...После многовековых блужданий в тумане математикам как будто бы удалось к началу XX в. придать своей науке ту идеальную структуру, которая была декларирована Аристотелем и, казалось, была осуществлена Евклидом в его „Началах“. Математики наконец-то полностью осознали необходимость неопределяемых понятий; определения были очищены от неясных или вызывавших какие-либо возражения терминов; некоторые области математики были построены на строгой аксиоматической основе; на смену умозаключениям, опиравшимся на интуитивные соображения или эмпирические данные, пришли надежные, строгие дедуктивные доказательства. Даже законы логики были расширены настолько, что охватывали теперь те типы рассуждений, которые ранее математики использовали неформально и порой неявно, хотя, как показывал опыт, эти рассуждения всегда приводили к правильным результатам»[24].

Созданная Г. Кантором (1845–1918) теория трансфинитных (бесконечных) множеств взорвала сложившееся спокойствие. Ее главная особенность состояла в том, что она была теорией актуально бесконечных множеств и, в частности, позволяла количественно оценивать и оперировать такими множествами.

Кантор различал потенциальную и актуальную бесконечность в следующем смысле. Потенциальная бесконечность представляет конечную величину, которая способна принимать значение, большее любого заранее установленного предела. Она всегда остается конечной, хотя и переменной величиной. По этой причине потенциальная бесконечность есть величина, в действительности не противостоящая конечному и не являющаяся истинной бесконечностью. Подлинная бесконечность — это актуальная (завершенная, замкнутая в себе) бесконечность, ибо только она в действительности противоположна конечному. «Несмотря на существенное различие понятий *потенциальной* и *актуальной* бесконечности, — причем первая означает *переменную* конечную величину, *растущую* сверх всяких конечных границ, а последняя — некоторое *замкнутое в себе, постоянное*, но лежащее по ту сторону всех конечных величин количество, — к сожалению, слишком часто встречаются случаи смешения этих понятий. Так, например, нередко встречающийся взгляд на *дифференциалы* как на *определенные* бесконечно малые величины (тогда как они представляют собой лишь переменные произвольно малые вспомогательные величины, совершенно исчезающие из конечных результатов, а потому характеризовавшиеся уже Лейбницем как простые фикции...) основывается на таком смешении»[25]. Математическим аналогом актуальной бесконечности служит теория трансфинитных кардинальных чисел (трансфинитных множеств).

---

[24] *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М., 1984. С. 228–229.
[25] *Кантор Г.* Указ. соч. С. 265–266.

В конспективном изложении суть теории множеств Кантора можно свести к следующим допущениям, определениям, результатам и проблемам (определение ординальных бесконечных множеств и связанная с этим проблема невозможности их полного упорядочения не рассматривается, так как это не связано с дальнейшим ходом изложения).

- «Под ‘множеством’ мы понимаем соединение в некое целое M определенных хорошо различимых предметов *m* нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться ‘элементами’ множества M)»[26]. Данное определение распространяется на конечные и бесконечные множества.
- Всякому множеству соответствует определенная ‘мощность’, или ‘кардинальное число’. «’Мощностью’, или ‘кардинальным числом’ множества M, мы называем то общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из M, когда мы абстрагируемся от качества его различных элементов *m* и от порядка их задания»[27].
- Два множества M и N равномощны (их элементы находятся во взаимно однозначном соответствии), если каждый элемент M является элементом N, и наоборот.
- Множество M — подмножество множества N, только если каждый элемент M есть элемент N.
- Если множество M равно множеству N, тогда оно — подмножество N.
- Если множество M есть подмножество множества N и существует по крайней мере один элемент N, который не является элементом M, тогда M называется собственным (истинным) подмножеством N.
- Множество M больше, чем множество N, если и только если N эквивалентно некоторому подмножеству M, но M не эквивалентно ни одному подмножеству N.
- Множества могут содержать один и более элементов или ни одного элемента.

---

[26] *Кантор Г.* Указ. соч. С. 173.
[27] Там же. С. 173.

- Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым. Все пустые множества равномощны и являются подмножествами любого множества.
- Множество бесконечно, если оно эквивалентно своему собственному подмножеству. В противном случае оно конечно.
- Множество называется счетным (перечислимым), если существует взаимно однозначное соответствие между его элементами и множеством целых положительных чисел. В частности, множество положительных рациональных чисел перечислимо, но множество действительных чисел — нет, т. е. оно несчетно.
- *Теорема Кантора*: кардинальное число множества всех подмножеств любого множества больше кардинального числа самого множества. Доказательство следует из того факта, что если множество содержит n элементов, число его подмножеств равно 2^n, а $2^n > n$. Например:
  - ▶ Пустое множество содержит одно подмножество, именно само себя ($2^0 = 1$).
  - ▶ Множество с одним элементом содержит два подмножества — пустое множество и само себя ($2^1 = 2$).
  - ▶ Множество с двумя элементами содержит четыре подмножества — пустое множество, само себя и два подмножества по одному элементу ($2^2 = 4$).
- Наименьшим кардинальным числом в ряду бесконечных множеств является кардинальное число множества натуральных чисел. Для его обозначения Кантор использовал знак $\aleph_0$ (читается — *алеф нуль*). Пусть D — множество всех действительных (рациональных и иррациональных) чисел. Тогда доказывается: $D = 2^{\aleph_0}$.
- Иерархия бесконечных множеств порождается следующим образом:
  1. $\aleph_0$ (наименьшее трансфинитное число = кардинальное число множества натуральных чисел).
  2. $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ (кардинальное число множества действительных чисел).
  3. $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$.
  4. $\aleph_3 = 2^{\aleph_2}$.

  … … … … …

- *Проблема (гипотеза) континуума*: существует ли в указанной иерархии бесконечных множеств трансфинитное кардинальное число, большее $\aleph_0$, но меньшее $\aleph_1$? Кантор предположил, что не существует ни одного кардинала (трансфинитного кардинального числа), который удовлетворял бы указанному условию, и пытался это доказать. Однако не смог этого сделать. В списке важнейших двадцати трех математических проблем XX в., оглашенных Гильбертом на II Международном математическом конгрессе 1900 г., проблема континуума была названа первой[28]. Лишь в 1940 г. Гёдель установил, что проблема континуума не противоречит аксиомам стандартной теории множеств[29] и в 1963 г. П. Коэн, обобщая все полученные до него результаты, доказал, что проблема континуума независима от аксиом теории множеств и поэтому не может быть ни доказана, ни опровергнута[30]. Из этого результата Коэна следует нетривиальный результат. Так как континуум-гипотеза независима от стандартной теории множеств, то последняя может развиваться как без добавления этой гипотезы, так и вместе с ней. Вместо одной теории множеств появилось две альтернативных.

Несмотря на отчаянное сопротивление одного из бывших учителей Кантора (Леопольда Кронекера), теория трансфинитных множеств постепенно завоевывала умы математиков[31]. К нача-

[28] Строго говоря, проблема континуума составляла первую часть первой проблемы. Второй частью первой проблемы было доказательство, что множество действительных чисел вполне упорядочено, т. е. в любой извлеченной из него последовательности существует первый элемент и, кроме того, оно линейно упорядочено.

[29] *Гёдель К.* Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи математических наук. 1948. Т. 3. Вып. 1.

[30] *Cohen P.* Set theory and the continuum hypothesis. N. Y., 1966.

[31] Л. Кронекер отстаивал позиции, близкие к конструктивистским, отвергал теорию трансфинитных множеств, предельные построения в традиционном анализе и даже требовал изгнания иррациональных чисел из математики как «ненужных». Ему принадлежат часто цитируемые слова: «Господь Бог создал натуральные числа; все остальное — дело рук человеческих». Отвечая на нападки своего бывшего учителя, Кантор отметил, в частности: «Мы видим, таким образом, что господствующий теперь *академически позитивистский скептицизм*, появившийся в виде реакции против чрезмерного канто-фихте-гегеле-шеллинговского идеализма, захватил, наконец, и *арифметику*, где он старается сделать последние еще воз-

лу XX в. канторовская теория множеств «нашла широкое применение во многих областях математики. Кантор и Рихард Дедекинд понимали, сколь важна теория множеств для обоснования теории целых чисел (конечных, или 'финитных', и трансфинитных) для анализа понятий линии или размерности и даже для оснований математики»[32]. Рассел назвал Кантора величайшим мыслителем XIX в. Гильберт утверждал о теории множеств Кантора: «Мне представляется, что это самый восхитительный цветок математической мысли и одно из величайших достижений человеческой деятельности в сфере чистого мышления»[33].

Проблемы начались, когда Кантор попытался определить множество всех трансфинитных множѐств. Согласно теореме Кантора, существует бесконечное число трансфинитных кардинальных множеств. Согласно этой же теореме, если такое «сверхмножество» существует, то должно существовать и множество всех его подмножеств, которое должно быть больше «сверхмножества». «Следовательно, заключил Кантор, должно существовать трансфинитное число, превосходящее наибольшее из трансфинитных чисел. Придя к столь нелепому выводу, Кантор сначала растерялся; однако затем он решил, что все множества можно разбить на *противоречивые* и *непротиворечивые*, и в 1899 г. сообщил об этом Дедекинду. Таким образом, множество всех множеств и соответствующее ему трансфинитное число попадали в разряд 'противоречивых' — и тем самым исключались из рассмотрения»[34].

Рассел, узнав о парадоксе «сверхмножества», сначала усомнился в правильности рассуждений Кантора. По его мнению, Кантор, должно быть, «совершил очень тонкую логическую ошибку, которую я (Рассел. — *В. С.*) надеюсь объяснить в одной из следующих работ»[35]. Результатом размышлений Рассела стала формулировка нового парадокса, названого в его честь *парадоксом Рассела*.

Рассел обратил внимание на то, что возможны два вида классов: содержащие себя в качестве собственного элемента и не со-

можные для него выводы с крайней последовательностью, могущей стать роковой и для него» (*Кантор Г.* Указ. соч. С. 273).

[32] Там же. С. 234.

[33] Цит. по: *Клайн М.* Указ. соч. С. 237.

[34] Там же. С. 235.

[35] Там же. С. 235.

держащие себя в качестве собственного элемента. К первым относятся, например, понятия «список», «каталог», «классификация», «абстракция» и т. п. Подобные понятия составляют меньшинство, поэтому их называют нестандартными. Обычно же классы не содержат себя в качестве элемента своего класса, не входят в объем собственного множества (стандартные классы). Скажем, элементами множества «студент» являются конкретные студенты, но очевидно, что само это множество студентом не является, ибо не имеет ни возраста, ни национальности или факультетской принадлежности.

Логически парадокс обнаруживается в том, что неизвестно, куда поместить стандартное множество. В классе, который является собственным элементом, ему не место, поскольку он не входит в свой класс. Но его нельзя включить и в класс, который собственным элементом не является, поскольку он представляет стандартный класс и не должен находиться среди собственных элементов. Формально это выглядит так. Пусть R = «семейство тех и только тех классов X, которые не являются своими элементами и потому удовлетворяют условию $X \notin X$». Таким образом, имеет место эквивалентность $X \in R \equiv X \notin X$. Подставив вместо переменной X символ R, получим $R \in R \equiv R \notin R$, т. е. противоречие.

Парадокс Рассела — самый известный из относящихся к основаниям математики, но не единственный. Поскольку все они обладают одной и той же логической структурой, именно структурой парадокса «Лжец», они здесь не рассматриваются[36]. Этот парадокс возникает как следствие незаконной, имеющей характер порочного круга, по мнению Рассела, самореференции определенных понятий. Пуанкаре назвал понятия, не способные к непротиворечивой самореференции, непредикативными. Обнародование парадокса Рассела и ему подобных противоречий побудили математиков к поиску непредикативных понятий не только в теории множеств, но и в других разделах математики. Вскоре одно из таких понятий было обнаружено в основаниях классической математики — понятие «наименьшей верхней границы». Оказалось, что оно включает среди прочих значений и то, которое призвано обозначить, т. е. наименьшую верхнюю границу. Поскольку никто не мог гарантиро-

[36] Обсуждение этого парадокса содержится в приложении 2.

вать, что если до сих пор то или иное непредикативное понятие не приводило к противоречиям, то их не будет и в будущем, у некоторых математиков возникло ощущение, что математика стоит не просто на шатком, а логически противоречивом основании.

Если парадокс Рассела и ему подобные парадоксы стимулировали математиков к поиску и исключению непредикативных понятий из всех разделов математики и тем самым — к обоснованию ее непротиворечивости в целом, то аксиома выбора, явная формулировка которой принадлежит Э. Цермело (1871–1953), породила среди них другую волну проблем и тревог. Аксиома выбора имеет много вариантов. Один из самых понятных такой. Пусть дано множество М, подмножества которого — непустые множества. Тогда всегда можно выбрать по одному элементу из каждого подмножества и образовать из них новое подмножество. Так, из каждой квартиры многоквартирного дома, в которой проживает хотя бы один человек, согласно аксиоме выбора, можно отобрать по одному представителю для общего собрания жильцов данного дома.

Аксиома выбора неявно использовалась Кантором для доказательства теоремы о том, что любое бесконечное множество содержит подмножество с кардинальным числом $\aleph_0$. Аналогично поступали многие другие математики при решении своих частных проблем. В 1923 г. Гильберт назвал аксиому выбора принципом, без которого невозможна теория математического вывода. Вместе с тем именно эта аксиома в начале XX в. стала объектом жесточайшей критики со стороны ведущих математиков Европы (Ф. Бернштейна, Э. Бореля, Р. Бэра, А. Лебега). «Суть критики сводилась к тому, что если не указано правило, по которому из каждого множества выбирается по элементу, то реально выбор не производится и поэтому в действительности новое множество не образуется. В ходе доказательства выбор может измениться, поэтому доказательство утрачивает силу. По выражению Бореля, выбор без правил представляет собой акт веры; поэтому аксиома выбора лежит за пределами математики»[37]. Пример Рассела поясняет смысл проблемы. Допустим, имеется сто пар ботинок. Если из каждой пары требуется выбрать левый ботинок и образовать множество из ста левых ботинков, то процесс выбора не составит труда, так как известно правило, кото-

---

[37] *Клайн М.* Указ. соч. С. 244–245.

рому оно подчиняется, — «из каждой пары выбирай левый ботинок». Если же обувь заменить, скажем, носками, то из-за невозможности отличить левый носок от правого сразу же возникнет вопрос, погубивший в свое время буридановского осла, об основаниях выбора носка как левого. Иными словами, аксиома выбора критиковалась за принципиально неконструктивный характер. Она указывала на возможность построения нового множества, но ничего не говорила, как именно это можно сделать.

В целом в начале XX в. сложилась следующая ситуация. Теория множеств Кантора, хотя и не без споров и возражений, была признана основанием всей математики. Каждый математический объект мог быть сформулирован в терминах теории множеств, т. е. представлен как теоретико-множественный объект. Вместе с тем парадоксы трансфинитных множеств Кантора, Рассела и родственные им, неконструктивный характер аксиомы выбора и так называемых доказательств существования, бесконтрольное использование математиками непредикативных понятий и связанная с этим потенциальная угроза возникновения новых противоречий, наконец, отсутствие достаточных логических средств для точного выражения и анализа математических рассуждений — все это создавало впечатление если не фундаментальной ошибочности, то, по крайней мере, ненадежности теоретико-множественного обоснования математики. Стали говорить о (третьем) кризисе математики.

Но был ли на самом деле кризис *математики*? Ни одна из существующих в то время математических теорий не была признана формально противоречивой. Ни одна из фундаментальных теорем арифметики, геометрии, алгебры, анализа и топологии не была признана ошибочной, и не было никакого повода сомневаться в достоверности самих этих наук. Все споры свелись исключительно к тому, как интерпретировать необычные теоретико-множественные объекты канторовской теории, основанные на допущении актуальной бесконечности, в привычных методологических схемах и абстракциях. Следовательно, в начале XX в. возник кризис *не математики*, а *ее методологии*: обнаружилось очередное резкое несоответствие *объяснительных средств, которыми располагали математики в рассматриваемое время, тем новым теоретико-множественным объектам, которые они же сами и создавали*. В частности, абстракция актуальной бесконечности, которой так свободно пользовался Кантор, противоречила принятым в то время представлениям об ограниченных познавательных способностях человека и конечном характере доступного ему опыта.

Как всегда, было предложено множество выходов из кризисной ситуации, начиная от призывов Кронекера полностью запретить теорию трансфинитных множеств Кантора, попыток ее существенной ревизии, предпринятых интуиционистами и конструктивистами, и до надежд построить логически безупречное основание этой теории логицистами и формалистами.

Как будет показано, ни одна из предложенных программ спасения теории множеств Кантора не достигла своей цели. Одной из причин такой неудачи можно считать разделяемое всеми специалистами, работающими в области обоснования математики, общее заблуждение, что математика должна иметь единое и достоверное основание — источник, из которого она могла бы гарантированно извлекать свои истины. Математика не только не имеет такого основания, но она также не имеет раз и навсегда заданного универсума своих объектов и операций над ними. Создание неевклидовых геометрий ясно показало, что математика имеет дело с множеством возможных моделей, ни одна из которых не является для нее более фундаментальной, чем другая. Математика, как никакая другая наука, — в очень высокой степени замкнутая и независимая от непосредственного влияния практических потребностей, саморазвивающаяся и самодетерминирующаяся область знания, внешние (психологические, культурные, социальные) причины для которой являются важными, но не определяющими.

Другой причиной неудач работ в области обоснования математики можно назвать отсутствие ясного понимания, что такое математическая бесконечность. Основной результат, к которому обычно приходят в процессе обсуждения этой проблемы, — это недопустимость актуальной бесконечности из-за ее принципиальной ненаблюдаемости и непроверяемости в нашем конечном опыте. Но не является ли такое исключение сознательной или бессознательной уступкой старой изжитой позитивистской догме о реальности исключительно конечных объектов и иллюзорности бесконечного? Ведь совершенно очевидно, что потенциальная бесконечность противопоставляется актуальной в качестве истинной только потому, что она, как объяснял еще Кантор, и не покидает пределы конечного, т. е., по сути, и не является бесконечностью. Таким образом, реальная проблема, лежащая в основе споров о законности актуальной бесконечности, заключается в том, что до сих пор отсутствует общепринятое и удовлетворительное объяснение связи конечного и бесконечного.

Третьей причиной методологического кризиса математики в начале XX в. стало обнаружившееся несоответствие используемых большинством математиков логических средств — аристотелевой логики — задачам конструирования новых математических объектов и теорий. Анализ трансфинитных множеств потребовал уточнения не только закона исключенного третьего, но и границ применимости всей классической логики. Усилиями Фреге, Рассела и Уайтхеда была создана символическая логика — один из самых значительных результатов математической мысли этого времени.

Таким образом, рассматриваемый кризис не поколебал построенное здание математики. Наоборот, он способствовал более быстрой разработке необходимых концептуальных средств для ассимиляции новых открытий и более быстрому прогрессу математики как науки.

Глава 3

Логицизм. Математика как создание логически очевидных конструкций

Одним из самых фундаментальных и вместе с тем удивительных свойств математики называют необходимость ее утверждений. Объясняя это свойство, Лейбниц указал на четыре особенности логических и математических суждений, которые сыграли впоследствии решающую роль в становлении программы логицизма.

Во-первых, логические и математические истины необходимы, потому что их логическое отрицание ведет к противоречию. Отрицать, что «холостяки есть неженатые мужчины» или «2 + 2 = 4», означает утверждать противоречие.

Во-вторых, логические и математические истины как истины разума допускают в конечное число шагов редукцию к «тождественным истинам»[38]. Например, доказать суждение «2 + 2 = 4» означает свести его к тождеству вида «1 = 1». Ненеобходимые (случайные) истины подобны несоизмеримым отрезкам, и их редукция к истинам тождества нуждается поэтому в бесконечном числе шагов и доступна только Богу.

В-третьих, редукция логических и математических истин к истинам тождества требует построения формального исчисления для вывода следствий из принятых аксиом. «Мне же, беспокойному,

[38] *Лейбниц Г.* Указ. соч. С. 496.

уже давно со всей очевидностью представилось и нечто более важное, а именно, что все человеческие мысли вполне разрешаются на немногие, как бы первичные; что если бы этим последним были поставлены в соответствие характеры (символы. — *В. С.*), то из них могли бы образовываться характеры производных понятий, из которых всегда могли бы извлекаться все их реквизиты и входящие в них первичные понятия, и то, что я называю определениями или значениями, а равным образом и следствия, доказуемые из этих определений. Если бы все это было осуществлено, то каждый, кто пользовался бы в процессе рассуждения и писания такого рода характерами, либо никогда не ошибался бы, либо сам не хуже других с помощью несложных выкладок обнаруживал свои ошибки; к тому же, он приходил бы к открытию истины, поскольку она следует из данных...»[39]

В-четвертых, будучи аналитическим по своей сути, критерий необходимости Лейбница придает логике и математике автономный характер, принципиально отделяет их от всех остальных наук. Проблема обоснования логики и математики, в отличие от всех остальных наук, становится сугубо внутренним делом данных дисциплин. Они не нуждаются в обращении к опыту, интуиции, психологии восприятия (познания).

Идеи Канта о синтетическом характере математических суждений, конструктивной природе математического знания, независимости математики от логики не поколебали уверенности логицистов конца XIX и начала XX вв. в аналитическом характере математики и логики, но потребовали от них дополнительного прояснения вопроса о соотношении между собой логических и математических истин. Учитывая совместимость последних, возможны три варианта их отношений. Либо логические и математические истины образуют один и тот же класс, либо логические истины являются подклассом математических истин, либо, наоборот, математические истины образуют подкласс логических истин. Согласно логицистам первый и второй варианты отпадают, потому что, по их мнению, не каждая логическая истина является математической. Остается третий вариант: математические истины суть логические истины; они — следствия правильно постро-

[39] *Лейбниц Г.* Указ. соч. С. 502.

енного логического исчисления. Вывод новых математических истин совершается механически посредством манипуляции символами из ранее отобранных, названных аксиомами. Все этапы получения нового знания контролируемы, возникновение парадоксов исключается по определению. Ошибки возможны лишь из-за отсутствия должного внимания и легко исправляемы.

Программа логицизма: математика как продолжение логики

Предположение о сугубо внутреннем, т. е. чисто логическом, основании необходимости математики составляет идейную основу логицизма как особой программы обоснования математики. Эта идея объединяет логицистов с Лейбницем. Отличает их тщательность логической разработки этой идеи. Тождественную истину Лейбница, т. е. суждение, в котором объем субъекта полностью включен в объем предиката, Фреге превращает в аналитическое высказывание. Высказывание — аналитическое, если оно выводимо из общих законов логики и связанных с ними определений. Соответственно редукция Лейбница к тождественной истине заменяется Фреге доказательством аналитического характера рассматриваемого высказывания. Доказать, что математика есть часть логики, с логицистской точки зрения означает показать, что все понятия и суждения математики суть аналитически истинные сущности.

Попытки доказательства аналитического характера математики привели логицистов к созданию новой логики. Именно это следует считать самым важным результатом реализации логицистами своей программы. Детали этой логики (в современном оформлении) изложены в приложении к данной работе. Она существенно отличается от традиционной логики и позволяет решать задачи качественно иного уровня.

Основные тезисы программы логицистов:

- Все понятия математики определяются в терминах понятий логики.
- Все теоремы математики выводятся из логических аксиом.

Философия математики Готтлоба Фреге

> Надеюсь, в данном сочинении я сделал правдоподобным то, что арифметические законы являются аналитическими, а следовательно, априорными суждениями. Сообразно этому арифметика есть лишь дальнейшее развитие логики, а каждое арифметическое предложение есть логический закон, хотя и производный.
>
> *Г. Фреге.* Основоположения арифметики

Критика противоположных подходов к определению числа

Готтлоб Фреге (1848–1925) рассматривал создание новой логики не как конечную цель, а как средство анализа арифметики. Отсутствие единства мнений среди математиков о значении ее исходных терминов подтолкнуло Фреге к тому, чтобы начать размышлять о логическом анализе арифметики. Во времена Фреге под арифметикой понимали теорию натуральных чисел вместе с основаниями анализа. Поэтому предметом интенсивного логического анализа стали прежде всего исходные понятия арифметики — число, множество, равенство, переменная и функция. Среди них обоснование понятия числа Фреге считал наиболее актуальным и приоритетным.

По его мнению, самые простые и неэффективные ответы на вопрос «что такое число?» предлагают те, кто полагает, что значение понятия числа может быть установлено непосредственно и не требует специальной методологической и, возможно, логической рефлексии. Число с этой точки зрения есть либо определенный психологический объект, либо тот знак (цифра), которым оно обозначается. Психологизм и формализм в математике берут свое начало, считает Фреге, именно из этой порочной методологической установки. Математики говорят, что числа абстрагируются из классов, или множеств, но они при этом не определяют, что именно они понимают под абстракцией и классом. Абстрагируя, мы следуем от *объектов к понятию*, которые ему подчиняются (образуют его объем). Но такой математик, как Г. Кантор, понимает под абстракцией нечто иное. Для него абстракция означает создание *новых объектов* из уже данных. По его мнению, из наблюдения пяти точек, расположенных на одной линии, мы сначала абстрагируем их упорядоченность, что дает нам понимание значения порядкового числа «пятый», а затем посредством новой абстракции от порядка, в котором расположены эти точки, мы получаем определение кардинального числа «пять». Такая абстракция, согласно Фреге, является «волшебной»[40].

По мнению Фреге, легко доказать бесплодность любого «непосредственного» определения числа. Если математик утверждает, что число — это идея, знак, целое, состоящее из подобных друг другу частей, или результат абстрагирования от множества вещей, то следует просто спросить о применимости подобных определений при конструировании математики как целостной науки. Если их нельзя применить буквально или их использование не приводит к доказательству законов арифметики, такие определения следует признать бесполезными.

Неопределенность в понимании числа порождает неопределенность в определении других исходных понятий арифметики. При рассматриваемой трактовке понятия числа знак равенства не может быть использован для обозначения тождества. Каждое вхождение числа «5» в равенство «5 = 5» будет обозначать *разные* последовательности объектов, и следовательно, знак «=» не является знаком тождества.

Имя «переменная», используемое для обозначения неопределенных величин, включая числа, само по себе ошибочно, полагает Фреге. Математики говорят о переменных так, как если бы они обозначали нечто переменное и неопределенное. Но это, по его мнению, не так. Референтом выражения может быть только нечто постоянное и определенное. Переменные величины принципиально отличаются от единичных числовых терминов и используются двумя различными способами. Согласно первому, они указывают открытое место, на которое может подставляться константа, как, например, в выражении «$x + 3$». Согласно второму, они функционируют в качестве законов,

---

[40] *Frege G.* Nachgelassene Schriften. Hamburg, 1969. S. 77–78. Цит. по: *Sluga H.* Gottlob Frege. London, 1980. P. 98.

как, например, в равенстве «$x + y = y + x$». В обоих случаях назначение переменных величин состоит в том, чтобы *указывать место вхождения референта*, а не обозначать его.

Проблемы с пониманием переменных величин переносятся на понятие функции. Общепринятое определение функции «Если каждое значение действительной переменной x, принадлежащее ее рангу, коррелирует с определенным числом y, тогда y определяется как переменная и называется *функцией действительной переменной x*; $y = f(x)$», согласно Фреге, не выдерживает критики. Как и переменные, функции не могут обозначать неопределенные числа или величины.

Фреге называет несколько общих методологических причин неопределенности и путаницы в основаниях математики своего времени. Это тенденции смешивать знак и то, что он обозначает; объект и понятие; субъективное (психологическое) и объективное (логическое); рассматривать значения знаков вне их контекста.

Последняя тенденция особенно распространена и опасна. Математики не видят, что их наука — комплексная система знаний, в которой все законы, определения и теоремы взаимосвязаны и ничто не имеет самостоятельного значения вне данной системы. Значение математических терминов определяется не тем представлением, которое они вызывают в нашем уме, а тем местом, которое они занимают в математической системе; теми конкретными функциями, которые они в ней выполняют.

Убеждение Фреге в дефектности всех существующих в его время оснований арифметики определяет структуру *Основоположений арифметики*. Главная задача этой книги — обосновать новый подход к определению понятия числа, устранить все неопределенности в основании арифметики.

В первую очередь Фреге стремится устранить все сомнения в аналитическом характере математических истин. Если этого не сделать, полагает он, невозможно будет доказать объективность и всеобщность математических законов.

Хотя Фреге и не собирался, по его словам, вкладывать новый смысл в определения аналитических и синтетических истин, а только более точно истолковать, что имели в виду другие авторы, и прежде всего Кант, результат получился впечатляющим. В конце «Основоположений арифметики» Фреге смог даже обвинить Канта в том, что предложенная им дихотомия аналитического и синтетического не является исчерпывающей[41].

Основание фрегевской классификации предложений на аналитические и синтетические, априорные и апостериорные составляет положение, что нас должно интересовать только, *какое обоснование* следует считать лучшим. Таким обоснованием, полагает Фреге, является дедуктивное доказательство. Результат обоснования зависит от *всех* использованных посылок. В совершенном обосновании ни одна из начальных посылок не требует доказательства.

Посылки по своему статусу делятся на «факты» — недоказуемые истины, высказывающиеся о свойствах частных объектов, — и «универсальные законы» — утверждения общего порядка, не требующие сами по себе доказательства.

Исключая возможность предложений, аналитических и апостериорных одновременно, как противоречивую по определению, Фреге считает, что

Предложение — *априорное*, если оно *дедуктивно выводимо* из некоторого множества посылок. В противном случае оно — *апостериорное*.

Предложение — *аналитическое*, если оно выводимо из одних только универсальных логических законов и определений, включая все высказывания, от которых зависит их корректность. В противном случае, т. е. когда хотя бы одна из посылок представляет суждение о частном факте, выводимое предложение — *синтетическое*.

Таким образом, в класс априорных истин попадают как аналитические, так и синтетические суждения. Апостериорные предложения могут быть только синтетическими.

Ревизия аналитических и синтетических истин открывает Фреге путь к новому *чисто логическому* пониманию природы арифметических (математических) истин, их универсальности и подчиненности законам логики. «Фактически, все, что может быть объектом мысли, может быть на самом деле сосчитано: идеальное и реальное, понятия и вещи, временное и пространственное, события и тела, методы и теоремы; даже сами числа можно последовательно пересчитать. В действительности не требуется даже указывать точ-

---

[41] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 88.

ные границы области мыслимого и считаемого, ее логическую завершенность. Из этого факта можно прийти к поспешному выводу, что фундаментальные принципы арифметики не имеют никакого отношения к ограниченной области объектов, отличительные признаки которых они выражают, как выражают аксиомы геометрии отличительные признаки пространственных отношений. Наоборот, эти фундаментальные принципы должны охватывать все, что мыслимо; а высказывание, соответствующее этому высшему уровню универсальности, с полным основанием должно быть отнесено к сфере логики»[42].

Кант недооценил значение аналитических истин, считает Фреге. Как и синтетические истины, они могут давать новое знание о мире. Знание немногих законов арифметики позволяет обосновывать аналитически истинность арифметических утверждений, имеющих прямое отношение к решению реальных практических проблем. Иными словами, аналитический характер арифметических истин, основанный на их дедуктивной выводимости, никак нельзя назвать бесплодным.

Вместе с доказательством аналитичности арифметических истин Фреге опровергает их возможность быть апостериорными истинами. Если бы арифметические истины были апостериорными, тогда они были бы индуктивными истинами. Но последнее невозможно, потому что индуктивное обоснование само основано на использовании теории вероятностей и тем самым — законов арифметики. «Вероятно, саму процедуру индукции можно оправдать только с помощью общих предложений арифметики, если под ней не понимать простую привычку. Последняя совершенно не обладает ручающейся за истину силой. В то время как научная процедура согласно объективным стандартам то находит обоснованной высокую вероятность в одном единственном примере, то считает не имеющими цены тысячи событий, привычка определяется числом и силой впечатлений и субъективными обстоятельствами, которые не имеют никакого права оказывать влияние на суждение. Индукция должна опираться на учение о вероятности, поскольку она может сделать предложение не более чем вероятным. Однако не видно, как это учение можно развить, не предполагая арифметических законов»[43].

---

[42] Из лекции "Uber formale Theorien der Arithmetik", прочитанной Фреге в 1885 г. Цит. по: *Dummett M.* Frege: Philosophy of Mathematics. Cambridge (Mass.), 1991. P. 44.

[43] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 10.

Далее, если бы арифметические истины были апостериорными истинами, тогда они по определению зависели бы от психологических, физиологических и физических обстоятельств и условий. Но в этом случае математика потеряла бы свою всеобщность, объективность и обязательность. В сущности она бы самоупразднилась как наука, так как каждая новая эмпирическая ситуация требовала бы создания новых законов и теорем. Наконец, если бы математические истины были апостериорными, тогда они были бы истинны только в действительном мире и не имели бы никакой обязательной силы для возможных объектов пространственного созерцания, относящихся к области геометрических истин, и необходимых объектов мыслимых вещей, составляющих область универсальных логических истин. Значит, делает вывод Фреге, математические истины носят априорный характер.

Арифметические истины, развивает дальше свою мысль Фреге, также не могут быть синтетическими истинами. По его мнению, возможны только три источника познания — наблюдение; априорная пространственная и временная интуиция; логическая способность. Наблюдение может сказать нам только, каковы вещи на самом деле. Априорная пространственная и временная интуиция сообщает нам, какими должны быть вещи, если нам приходится их воображать в пространстве и времени. Но ни наблюдение, ни интуиция не позволяют узнать, каковы вещи на самом деле, когда их не наблюдают или не воображают. Знание о вещах вне наблюдения и воображения способна дать только наша способность логического мышления.

Итак, *все математические истины — априорные и аналитические*. Данный вывод Фреге признает хотя и вероятным, но все же важным «исправлением» точки зрения Канта[44].

Достигнув этого вывода, Фреге разворачивает критику всех определений понятия числа, не удовлетворяющих требованиям априорности и аналитичности.

Числа не являются свойствами, с помощью которых предикативно различаются отдельные вещи. Приписывание числа вещи отличается от указания цвета лошади, длины дороги, веса куска металла. Сказать, что на этом дереве листья зеленые, означает ска-

---

[44] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 109.

зать нечто о каждом листе и о листве дерева в целом. Утверждение же, что на этом дереве тысяча листьев, означает утверждение нечто, что не может быть приписано ни отдельному листу, ни листве дерева в целом. Таким образом, число не есть свойство того же рода, что и свойство «зеленый»[45].

Ответы на вопрос «Сколько?» требуют предварительного знания того, что требуется сосчитать. Когда задают подобный вопрос, сначала определяют множество вещей, подлежащих счету, — деревья, автомобили, дома, людей, деньги и т. п. Ответы на вопросы «Какой длины эта вещь?», «Сколько она весит?» такого знания не требуют.

Одно и то же множество вещей может быть сосчитано разными способами и соответственно представлено разными числами. Ботинки можно сосчитать как четыре ботинка, как две пары ботинок, как два правых и два левых ботинка. Это также доказывает, что число не является свойством физических вещей, неотъемлемо присущим им наподобие протяженности или веса. Простыми аргументами против того, что числа есть свойства вещей, служат, согласно Фреге, числа 0 и 1 — отсутствие каких либо вещей, соответствующих первому, и двусмысленность второго. В самом деле, невозможно определенно ответить, какой вещи соответствует число 0. Но в не меньшей степени неопределенен, доказывает Фреге, и вопрос относительно числа 1. «Мы вновь задаем вопрос: Какой смысл в том, чтобы какому-нибудь предмету прилагать свойство «один», если сообразно пониманию каждый предмет может как быть, так и не быть одним? Каким образом на столь расплывчатом понятии может основываться наука, которая снискала себе славу как раз самой большей определенностью и точностью?»[46] А ведь именно из 1 посредством последовательного добавления все новых единиц порождается натуральный ряд чисел — фундамент всей математики.

Счету подлежат все вещи универсума, материальные и идеальные, реальные и воображаемые. Следовательно, числа есть универсальные свойства.

Высказывания о числах — не свойства вещей, не опытные истины, не субъективные представления и, хотя и функционируют наподобие прилагательных, не прилагательные. Они существуют объек-

---

[45] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 22.

[46] Там же. § 33.

тивно, независимо от того, кто их мыслит, вне времени и пространства и не подвержены каким-либо изменениям. Следовательно, они могут быть только понятиями. Понятия — не субъективные представления, не тождественны предикатам. Предикат может обозначать число, но только если это число подпадает под определенное понятие. Свойство «Земля имеет одну Луну» — свойство не представления, не слова, а понятия *Луна Земли*. Число как понятие объясняет, почему можно считать физические и нефизические вещи по отдельности и вместе; почему можно образовать число 0, которому не соответствует ни одна вещь. Например, известно, что планета Венера не имеет спутников. Но существует понятие *Луна Венеры*, которому можно приписать число 0 посредством утверждения «Венера имеет 0 Лун».

Вывод Фреге категоричен: «Число не абстрагируется от вещей по типу цвета, веса, твердости и не является свойством вещей в том смысле, как эти последние. Все еще остается вопрос, к чему относится то, что высказывается посредством указания на число.

Число — не вещественно, но также и не субъективно, оно не является представлением.

Число не возникает прибавлением вещи к вещи. Также ничего в этом отношении не меняет и придание имени соответственно каждому прибавлению.

Выражения «многое», «множество», «множественность» из-за их неопределенности не годятся для объяснения числа»[47].

Логическое определение числа

Определению числа как объема равночисленных понятий Фреге предпосылает доказательство, что объемы понятий являются специфически логическими объектами. Чтобы доказать это, Фреге формулирует ответы на следующие три взаимосвязанные вопроса:

(1) Что такое логический объект?

(2) Что такое логическая объективность?

(3) Что такое закон логики?

Исходный пункт размышлений Фреге — не всякое знание является эмпирическим. Это следует из существования априорных

[47] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 45.

и аналитических истин арифметики, фундаментальных как для теоретического, так и эмпирического знания. Без них невозможна индукция и тем самым — апостериорное обоснование. Математика, следовательно, — не просто часть общего и специального знания человека о природе, а его фундамент. Не было бы математики — никакая наука была бы невозможна в принципе.

Фреге далее доказывает, что не всякое знание является субъективным. Идеи не существуют без субъекта, но субъект не есть идея. Следовательно, существует нечто, что не является субъективным знанием. В каждой идее существует то, что связывает ее именно с этим, а не другим субъектом, делает ее субъективной, и то, что связывает ее с более чем одним субъектом. Именно эта вторая компонента всякой идеи, *называемая мыслью*, *представляет первичный логический объект*.

Понятие объекта Фреге определяет противоположным образом традиционному представлению и с существенным отличием от кантовского. Объект — формальное содержание суждения, т. е. мысль, которая никаким образом не зависит от внешнего мира, интуиции и способности чувственного созерцания. Так как мысли не обладают пространственно-временными характеристиками, то объекты Фреге носят исключительно логический характер. «Однако, быть может, на это возразят, что даже если Земля и на самом деле непредставима, она все-таки является внешней вещью, занимающей определенное место; но где находится число 4? Его нет ни вне нас, ни в нас. В пространственном смысле последнее понимается правильно. Определение местонахождения числа 4 не имеет смысла; но отсюда вытекает только то, что оно не является пространственным предметом, а не то, что его вообще нет»[48].

Объекты характеризуются свойствами тех выражений, которые их обозначают и называются их *собственными именами*. Фреге формулирует четыре критерия, которым должны удовлетворять объекты. Их собственные имена, не должны начинаться с неопределенного артикля; не должны содержать свободных переменных; не могут использоваться предикативно (но могут входить как часть предиката); могут входить слева и справа от знака равенства, т. е. образовывать законченные предложения. Выражения, содержащие

[48] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 61.

числа (например, «число семь», «быть равным числу семь»), удовлетворяют этим критериям. *Следовательно, числа, которые они обозначают, являются логическими объектами.*

Мысли, но не идеи, частью которых они являются, объективны, существуют вне времени и пространства, самодостаточны и сами по себе совершенны. Субъективно то, что связано с некоторым носителем, зависит от субъекта, определяется им. Объективно то, что понимается более чем одним субъектом в одном и том же смысле, т. е. то, что по своей природе интерсубъективно. Любая мысль истинна или ложна независимо от того, какое личное значение истинности приписывает ей ее субъект или даже все субъекты вместе. Гносеологическая независимость мысли делает ее объективной. Но объективность мыслей *лишь логическая*, т. е. она не постулирует реального существования мыслимых вещей. Логическая объективность не влечет реального существования ни самих мыслей, ни их референтов. «Я отличаю объективное от осязаемого, пространственного, действительного. Земная ось, центр массы Солнечной системы являются объективными, но я не могу назвать их действительными, как саму Землю. Экватор часто называют *мысленной* линией, но было бы ложным назвать его *выдуманной* линией; он не является результатом душевного процесса, возникшим посредством мысли, но лишь познается, схватывается посредством мысли»[49].

Область мыслимого и исчислимого — высшая и универсальная область объективного знания, включающая логические законы и все логические объекты — мысли и их объемы, истину и ложь, понятия, числа, функции, отношения и т. п.: «Для понятийного же мышления можно принять противоположное той или иной геометрической аксиоме, без того чтобы, если следствия выводятся из таких конфликтующих с созерцанием предпосылок, запутаться в противоречиях с самим собой. Эта возможность показывает, что геометрические аксиомы независимы друг от друга и от первичных логических законов и являются синтетическими. Можно ли сказать то же самое об основоположениях науки о числах? Не смешается ли все, если захотелось бы отрицать одну из них? Было ли бы тогда еще возможно мышление? Не лежит ли основание арифметики глубже, нежели основа всего опытного знания, даже глубже, чем

[49] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 26.

основание геометрии? Арифметические истины господствуют над областью исчислимого. Это основание является всеобъемлющим, так как ему принадлежит не только действительное, не только созерцаемое, но и все мыслимое. Разве не должны тогда законы чисел находится в теснейшей связи с законами мысли?»[50]

Логические законы — строго универсальные утверждения, распространяющие свою истинность на *все вещи* универсума. Отличительные черты логических законов — их универсальность и истинность. Универсальность законов логики означает, что им подчиняются все без исключения вещи универсума. Их истинность — истинность правил вывода. Логика вообще должна рассматриваться как наука о законах истины. Истина — ее подлинный предмет и единственная цель.

Аналитическая истинность арифметики, особый статус ее объектов несовместимы с формалистской интерпретацией ее утверждений. Фреге специально подчеркивает, что если арифметические уравнения считать неинтерпретированными формулами, то их истинность будет иметь не больше смысла, чем особое расположение фигур на шахматной доске. Самое большее, на что способна формалистки интерпретированная арифметика, — это доказательство непротиворечивости своих правил. Но из этого доказательства не следует с необходимостью истинность ее утверждений. Знаки без того, что они обозначают, — нелепость. «О знаках можно ничего не говорить; никто ничего не желает знать о знаках, если их свойство одновременно не выражает свойство обозначаемого. Здесь без логической ошибки одно и то же может иметь различные знаки; числу знаков даже не нужно совпадать с числом обозначаемого»[51].

Логические объекты не могут быть даны с помощью интуиции или наглядного созерцания. Они задаются, согласно Фреге, контекстом тех предложений, в которые входят утверждения с их собственными именами. В следующем отрывке из «Основоположений арифметики» Фреге вводит так называемый *контекстный принцип значения*. «Стало быть, непредставимость содержания слова не является основанием лишить его всякого значения или исключить из обихода. Противоположный взгляд, вероятно, возникает вследствие

[50] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 14.
[51] Там же. § 24.

того, что мы рассматриваем слова изолированно, а потом спрашиваем об их значении, за которое затем принимаем представление. Таким образом, кажется, что слово, которому недостает соответствующего внутреннего образа, не имеет содержания. Необходимо, однако, всегда учитывать полное предложение. Только в нем слова обладают подлинным значением. Внутренний образ, который при этом как бы витает, не обязательно соответствует логически составной части суждения. Достаточно, если предложение имеет смысл как целое; благодаря этому свое содержание получают также и его части»[52].

Каким образом, спрашивает Фреге, можно определить число, если мы не в состоянии обладать его представлением или созерцанием? Ведь слова обозначают нечто только в контексте предложения. Ответ следующий — посредством объяснения смысла предложения, в которое входит числительное. Контекст предложения задает цель счета и тем самым понятие числа и само число как его объект.

Необходим также критерий равенства для чисел, определяемых как понятия. О значении равенства для математики в целом свидетельствует следующее признание Фреге. «Если мы удалим, — пишет он, — равенство из арифметики, вряд ли что-нибудь останется от нее как науки»[53]. Благодаря отношению равенства различаются и отождествляются все объекты универсума. В отношении чисел принципиальное открытие Фреге состоит в следующем. Всякое выражение вида «Существует *n* объектов, выполняющих понятие *F*» можно заменить суждением равенства «число вещей, выполняющих понятие *F*, *равно n*». Это открытие позволило Фреге ввести критерий равенства для высказываний, содержащих числа: «Число, соответствующее понятию *F*, является тем же самым, как и число, соответствующее понятию *G*». Данное определение, признает Фреге, он заимствовал у Лейбница: «Тождественные [объекты] суть те, один из которых может быть поставлен вместо другого с сохранением истинности [всего отношения]»[54]. Данное заимствование свидетельствует о том, что Фреге не различал отношения равенства и тождества. Причина этого в том, что в каждое определение он рассматривал как равенство.

[52] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 60.

[53] *Frege G.* Nachgelassene Schriften. S. 180.

[54] *Лейбниц Г. В.* Указ. соч. С. 632. Формально: $(x)(y)(F)(Fx \equiv Fy) \equiv (x = y)$, что читается как «Всякие две вещи x и y равны друг другу тогда и только тогда, когда для всякого свойства F истинно, что x обладает F, если и только если y обладает F».

Введенный критерий позволяет образовывать суждения равенства, каждая сторона которого является числом (является равночисленным понятием). Пусть *F's* обозначает число объектов, образующих объем понятия *F*; аналогично для *G's*. Отношение взаимно однозначного соответствия объемов Фреге называет равночисленностью.

Понятия *F* и *G* равночисленны (объекты их объемов находятся во взаимно однозначном соответствии), *если и только если число F's* равно числу *G's*.

Фреге разъясняет приведенное определение следующим рассуждением: «Если официант хочет быть уверен, что он положил на стол ножей столько же, сколько и тарелок, ему нет надобности считать и те и другие; как только он справа от каждой тарелки рядом положит нож, каждый нож на столе будет находиться рядом с соответствующей тарелкой. Тарелки и ножи будут взаимно однозначно соотнесены друг с другом, и притом, в равном соотношении местоположений»[55].

После анализа и критики определений, с которыми он не согласен, Фреге достигает, наконец, собственной дефиниции числа. Как логический объект, всякое натуральное число есть *понятие*, элементы объема которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами объемов всех эквивалентных ему понятий. Более точно[56]:

Числом понятия *F* называется объем понятия «равночисленно понятию *F*», т. е. класс всех понятий, которые можно поставить во взаимно однозначное соответствие с *F* (класс всех эквивалентных классов, образующих объем понятия *F*).

Будем говорить, что объект выполняет понятие *F* (подпадает под понятие *F*, в терминологии Фреге), если и только если он является элементом объема *F*.

Из приведенного определения следует, что:

[55] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 70.
[56] Там же. § 68.

Число 0 = число понятия F = *быть не равным самому себе.*
= число понятия F, объем которого содержит 0 F's.
= не существует ни одного объекта, выполняющего понятие F.

Число 1 = число понятия F = *быть равным* 0.
= число понятия F, объем которого содержит точно 1 F.
= существует объект x, выполняющий понятие F, и для всякого другого объекта y, выполняющего F, истинно: $x = y$.

Число 2 = число понятия F = *быть равным* 0 *или* 1.
= число понятия F, объем которого содержит точно 2 F's.
= существуют два различных объекта x и y, $x \neq y$, выполняющих понятие F, и для любого третьего объекта z, выполняющего F, истинно: либо $z = x$, либо $z = y$.

... ...

Число n = число понятия F = *быть равным* 0 *или* 1, ..., *или* n.
= число понятия F, объем которого содержит точно n F's.
= существуют n различных объектов $x, y, \ldots, n$, выполняющих понятие F, $x \neq y$, $x \neq z$, ..., $y \neq z$, ..., и для всякого $(n + 1)$-го объекта w, выполняющего F, истинно либо $w = x$, либо $w = y$, ..., либо $w = n$.

0 определяется Фреге как число понятия *быть не равным самому себе*. Из этого определения и определения равенства следует, что число 0 равно числу F's, если и только если вещи, выполняющие F's, можно поставить во взаимно однозначное соответствие с вещами, которые не равны самим себе. Но ни одна вещь не является не равной самой себе. Поэтому число F's можно поставить во взаимно однозначное соответствие с вещами, которые не равны самим себе, только в том случае, если и только если не существует ни одной вещи, удовлетворяющей понятию F. Таким образом, число F's равно 0 тогда и только тогда, когда не существует ни одной вещи, выполняющей понятие F. «Ведь утверждение существования есть не что иное, как отрицание числа ноль»[57].

[57] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 53.

В отношении выбора понятия для числа 0 Фреге дает следующее пояснение. «Я могу принять за определение 0 любое другое понятие, под которое ничего не подпадает. Но дело в том, что мне нужно выбрать такое понятие, которое может быть доказано чисто логически; и для этого „не равное себе“ представляется удобным. Причем для „равное“ (на самом деле тождественное. — *В. С.*) я признаю приведенное выше объяснение Лейбница, являющееся чисто логическим. Теперь с помощью прежних установлений должно быть возможным доказательство того, что каждое понятие, под которое ничего не подпадает, равночисленно с каждым понятием, под которое не подпадает ничего, и только с такими понятиями; отсюда следует, что 0 — это число, соответствующее такому понятию, и что предметы не подпадают под понятие, если соответствующее ему число есть 0»[58].

Число 1 определяется как число понятия *быть равным 0*. Так как только одна вещь равна 0, то число *F's* равно 1, если и только если *F's* можно поставить во взаимно однозначное соответствие с вещами, равными 0 (т. е. если и только если существует ровно одна вещь со свойствами *F*).

Комментарий Фреге: «Чтобы теперь перейти к числу 1, мы должны сразу же показать, что существует нечто такое, что в натуральном ряду чисел следует непосредственно за 0. Мы рассмотрим понятие — или, если угодно, предикат — „равно 0“! Под него подпадает 0. Напротив, под понятие „равно 0, но не равно 0“ не подпадает никакой предмет, так что 0 — это число, которое принадлежит данному понятию. Таким образом, у нас есть понятие „равно 0“ и некий предмет 0, под него подпадающий; отсюда имеет силу следующее: число, соответствующее понятию „равно 0“, равно числу, соответствующему понятию „равно 0“; 0 — это число, соответствующее понятию „равно 0, но не равно 0“. Стало быть, согласно нашему объяснению, число, соответствующее понятию „равно 0“, в натуральном ряду чисел непосредственно следует за 0»[59].

Определение произвольного числа *n* принципиально ничем не отличается от приведенных определений чисел 0, 1 и 2. Высказывание «*n* — число понятия *F*» должно в общем случае интерпрети-

[58] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 74–75.
[59] Там же. § 77.

роваться как «объем понятия F находится во взаимно однозначном соответствии с числами, меньшими или равными n», или как «существует точно n объектов x таких, что каждый из них является элементом объема F».

Пусть выражение xFx символизирует логический объект, связанный с понятием F, т, е. объем F (для каждого объекта x, если x выполняет F, истинно, что он является элементом объема F). Тогда следующие два равенства выражают основное содержание определения числа Фреге:

$0 =$ число xFx $(x \neq x)$;

$S(n) =$ число xFx $(x \leq n)$.

Несмотря на то, что определение числа Фреге порождает всю последовательность натуральных чисел, этого еще недостаточно для того, чтобы назвать ее *натуральным рядом чисел*. Для этого необходимо определить отношение следования, в котором находятся любые два смежных члена натурального ряда чисел. Неформально это означает, что необходимо доказать, что за каждым натуральным числом n всегда следует число, большее его на одну единицу, $n + 1$, и что не существует конечного члена натурального ряда чисел.

С этой целью Фреге сначала определяет отношение *у непосредственно следует за х*[60]:

у непосредственно следует за х, если и только если существует понятие F и объект z такой, что:

- z выполняет понятие F;
- y — есть число понятия F;
- x — число понятия *объект, не равный z, выполняющий понятие F*.

Пояснением определения отношения *у непосредственно следует за х* служит следующий пример[61]. Допустим, рассматривается пара чисел 1 и 2. Ясно, что число 2 непосредственно следует за

[60] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 76.

[61] *Zalta E.* Gottlob Frege // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / N. Edward Zalta (ed.). 2005 (http://plato.stanford.edu/archives/sum2005/entries/frege).

числом 1 по числовой шкале. Пусть дано понятие F = *быть соавтором Principia Mathematica* и объект z = *А. Уайтхед* такие, что:

- *Уайтхед* выполняет понятие *быть соавтором Principia Mathematica*;
- 2 — число понятия *быть соавтором Principia Mathematica*;
- 1 — число понятия *соавтор Principia Mathematica, отличный от Уайтхеда.*

Последнее условие примера истинно, потому что существует точно один объект, именно Б. Рассел, который выполняет понятие *объект, отличный от Уайтхеда и выполняющий понятие быть автором Principia Mathematica.*

Отношение *непосредственного следования* определяет бесконечную последовательность пар <0, 1>, <1, 2>, <2, 3>, ..., левый член каждой из которых меньше правого члена ровно на единицу.

Затем Фреге определяет отношение *x предшествует y в ряду чисел, связанных отношением непосредственного следования*. Допустим, дана последовательность чисел от 0 до 3, выполняющих отношение непосредственного следования: 1 следует за 0, 2 следует за 1, 3 следует за 2. Отношение *предшествовать* является более либеральным, чем отношение *непосредственно следовать*: если выполняется отношение непосредственного следования, тогда число 0 предшествует не только числу 1, но и числам 2 и 3; число 1 предшествует не только числу 2, но и числу 3.

Сказанное объясняет определение натурального числа и тем самым всего натурального ряда чисел[62]:

x есть натуральное число, если и только если либо $x = 0$, либо 0 есть наименьшее число в ряду чисел, *выполняющих отношение предшествования* (т. е. 0 предшествует всем числам, связанным отношением непосредственного следования).

Определение Фреге выполняет требование эффективности порождения числового ряда. Ибо если натуральные числа заданы посредством равенств 0 = число x ($x \neq x$), $S(n)$ = число x ($x < n$), то на основании только этих посылок становится возможным эффектив-

[62] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. § 83.

ное определение всех чисел натурального ряда. Это определение позволяет ввести принцип математической индукции в форме «Если 0 выполняет понятие F и некоторое натуральное число n выполняет F, только если $n + 1$ выполняет F, тогда каждое число выполняет F». Следовательно, отношение предшествования и допущение, что 0 образует наименьший класс натуральных чисел, позволяет построить модель для аксиом натуральных чисел Пеано. Этим самым достигается полная формализация арифметики.

Анализ отношения арифметики к логике

Означает ли все сказанное, что Фреге полностью достиг своей цели — сведения арифметики к логике? Ответ на этот вопрос, как показал Б. Рассел, зависит от принятия всего лишь одной аксиомы формализованной арифметики (аксиомы V «Основных законов арифметики»). Исходя из своих общих допущений, Фреге полагал, что если доказать, что классы представляют логические объекты, и тем самым теория классов — ветвь логики, тогда доказывается редукция теории чисел и всей арифметики к логике.

Концепция классов Фреге отличается от их современного толкования тем, что классы определяются им как объемы понятий. Фреге специально подчеркивает, что он использует понятие класса так, как это принято в логике, а не в математике[63]. Непривычная для математиков подобная интерпретация классов понадобилась Фреге для введения логических объектов, необходимых для обоснования арифметики. «Числа — объекты, а в логике исходными объектами являются только два — истина и ложь. Нашей первой целью стало поэтому получение объектов из понятий, т. е. определение объемов понятий или классов... Трудности, которые возникают при использовании классов, исчезают, если мы имеем дело только с объектами, понятиями и отношениями, а это — возможность фундаментальной части логики. Класс — нечто производное, тогда как в понятии, как я его понимаю, мы имеем нечто исходное»[64].

---

[63] *Frege G.* Kleine Schriften. Hildesheim, 1967. S. 105. Цит. по: *Sluga H.* Op. cit. P. 165.

[64] *Frege G.* Remarks on P. Jourdain "The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics" // Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. 1912. Vol. 43. P. 251.

Понятия — независимые от ума и языка сущности. Следовательно, объекты, связанные с ними, также будут независимыми, что и требуется для обоснования независимости чисел. Возникает проблема безупречного введения логических объектов.

Фреге считает, что вводить логические объекты можно, если сформулированы условия равенства (взаимно однозначного соответствия) для них. Для классов это отношение определяется обычным способом посредством соотнесения элементов каждого из них с каждым элементом других. Для понятий оно формулируется как требование тождества: $(x)(Fx \equiv Gx)$. В качестве аксиомы, объединяющей условия взаимно однозначного отношения между классами и равенства (тождества) понятий, Фреге формулирует следующий принцип[65]:

$$(\mathrm{x}Fx = \mathrm{y}Gy) \equiv (x)(Fx \equiv Gx). \qquad \text{(V)}$$

Аксиома V читается так: классы, представляющие объемы понятий F и G, равны друг другу (взаимно однозначно соотносятся друг с другом) тогда и только тогда, когда эти понятия тождественны.

Принадлежность элементов классу также редуцируется к анализу связанного с ним понятия посредством принципа

$$a \in \mathrm{x}Fx \equiv (\mathrm{E}G)[(x)(Gx \equiv Fx) \,\&\, Ga]. \qquad \text{(M)}$$

Отношение принадлежности объекта классу читается так: объект a является элементом класса $\mathrm{x}Fx$ тогда и только тогда, когда существует по меньшей мере одно свойство G такое, что a выполняет это свойство, т. е. истинно Ga, и каждый элемент класса $\mathrm{x}Fx$ выполняет свойство F тогда и только тогда, когда он выполняет свойство G.

Бóльшая часть вопросов о классах с помощью принципов (V) и (M) сводится к вопросу о понятиях. В системе Фреге принцип (M) представляет дефинициальное следствие принципа (V). Следовательно, одной лишь аксиомы (V) достаточно для сведения теории классов к логике понятий и тем самым просто к логике.

Аксиома (V) — тождество. Следовательно, она может быть представлена в виде конъюнкции следующих двух импликаций:

---

[65] *Frege G.* Grundgesetze der Arithmetik. Bd. I. Hildesheim, 1962. § 20.

$$(z)(Fz \equiv Gz) \supset \mathbf{x}Fx = \mathbf{y}Gy; \tag{Va}$$

$$\mathbf{x}Fx = \mathbf{y}Gy \supset (z)(Fz \equiv Gz). \tag{Vb}$$

Первая из них не вызывает сомнений, так как определяет условие равенства объемов понятий. Вторая сомнительна, так как утверждает, что между множествами и объектами существует отношение однозначного соответствия — равенство классов однозначно обуславливает, что все принадлежащие им объекты, выполняющие понятие F, выполняют и понятие G. Но согласно одной из теорем теории множеств число, классов, которое можно образовать из непустого множества объектов, всегда больше, чем самих объектов (для n объектов определимо 2^n классов). Сомнительность импликации (Vb) делает сомнительным и использование аксиомы (V) в целом и основанную на ней редукцию классов в логические объекты.

Более существенное возражение против редукции классов к логике понятий представляет парадокс Рассела, касающийся также и аксиомы (V). Рассел, в частности, сообщает в своем знаменитом письме к Фреге: «Уже полтора года, как я познакомился с Вашими „Основными законами арифметики“, но только теперь мне удалось найти время для того, чтобы осуществить свое намерение и тщательно изучить Ваши работы. Я обнаружил, что полностью согласен с Вами во всех главных вопросах, в частности, в том, что Вы полностью отвергаете в логике любые психологические моменты, а также в Вашей высокой оценке записи в понятиях для оснований математики и формальной логики, которые, впрочем, вряд ли можно разделить. Во многих отдельных вопросах я нахожу у Вас анализ, различения и дефиниции, которые тщетно было бы искать у других логиков. В частности, в том, что касается функции (параграф 9 Вашего „Исчисления понятий“), я самостоятельно пришел к взглядам, совпадающим с Вашими даже в деталях. Только в одном пункте я встретился с трудностью. Вы утверждаете (с. 17), что функция может быть неопределенным (относящимся к произвольным объектам. — *В. С.*) элементом. Я тоже раньше так думал, но сейчас этот взгляд вызывает у меня сомнение из-за следующего противоречия. Пусть w есть предикат «быть предикатом, который не приложим к самому себе». Приложим ли предикат w к самому себе? Из любого ответа на этот вопрос вытекает его противоположность. Поэтому мы должны заключить, что w не есть предикат. Точно так же не существует класса (как целостного образования) тех классов, которые — как целостные образования — не содержат самих себя. Отсюда я заключаю, что при определенных условиях понятию класса не соответствует чего-либо целостного»[66].

Письмо Рассела произвело на Фреге гнетущее впечатление. В ответном письме Расселу Фреге сообщает: «Ваше открытие противоречия ввергло меня в сильнейший шок, близкий к полному смятению, потому что оно пошатнуло базис, на котором я намеревался построить арифметику... Я должен поразмышлять над этой темой дальше. Все оказалось гораздо серьезнее, поскольку с потерей аксиомы V не только основания моей арифметики, но и единственно возможные основания арифметики, по всей видимости, рушатся... В любом случае Ваше открытие чрезвычайно ценно и, возможно, приведет к значительному прогрессу в логике, каким бы нежелательным оно ни казалось на первый взгляд»[67].

В Послесловии ко второму тому «Основных законов арифметики», написанном в связи с обнаруженным противоречием, Фреге констатирует: «Вряд ли есть что-нибудь более нежелательное для автора научного произведения, чем обнаружение по завершении его работы, что одна из основ воздвигнутого им здания оказалась пошатнувшейся. — В такое положение я попал, получив письмо от господина Бертрана Рассела, когда печатание этого тома близилось к концу»[68].

Причиной возникшего противоречия Фреге назвал допущение, согласно которому каждое понятие имеет объем, выделяемый посредством «принципа абстракции». «Еще и теперь, — говорит Фреге в „Послесловии“, — я не вижу, как можно научно обосновать арифметику, трактовать числа как логические предметы и вводить их таким образом в рассмотрение, если невозможно — при определенных условиях хотя бы — переходить от понятия к его объему. Могу ли я всегда говорить об объеме понятия, о классе? А если не могу, то как можно отличить эти исключительные случаи? Можно ли из того, что объем какого-нибудь понятия совпадает с объемом какого-нибудь другого, заключать всегда, что

[66] Цит. по: *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. М., 2000. С. 42–43.

[67] From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical logic, 1879–1931. Cambridge (Mass.), 1967. P. 127–128.

[68] Цит. по: *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. С. 43.

всякий предмет, подпадающий под первое понятие, подпадает и под второе? Эти вопросы возникают у меня в результате сообщения господина Рассела. <...> Здесь речь идет не специально о моем способе обоснования арифметики, но вообще о возможности ее логического обоснования»[69].

Если отвергнуть импликацию (Vb), чтобы избежать парадокса Рассела, тогда придется сделать вывод о том, что возможно существование равнообъемных понятий, которые применяются к *разным* объектам. Но это означало бы полный отказ от интерпретации объемов понятий как классов. Кроме того, как показал анализ этой проблемы, данное решение все равно не дает желаемых результатов[70].

Трудность, с которой столкнулся Фреге, обусловлена отчасти его собственными семантическими идеями. Он считал, что мы живем в мире одних только объектов и понятий (относя к последним отношения и функции). Существует только одна модель для наших рассуждений — мир, в котором мы живем. Фреге принимает его за абсолютный универсум. Относительно каждого объекта *a* и произвольного понятия *F*, полагает Фреге, справедлив закон исключенного третьего: выражение *Fa* всегда либо истинно, либо ложно. Иными словами, любой объект в абсолютном универсуме должен считаться аргументом рассматриваемого понятия. Объект (конкретный или абстрактный) — любая вещь, обозначаемая единичным (собственным) именем. Наоборот, понятие — любая вещь, обозначаемая общим именем. Когда посредством единичного термина необходимо обозначить объект, то это можно сделать, лишь указав условия его равенства и тем самым неравенства с другими объектами. Поскольку существует только одно множество объектов, которые можно сравнивать друг с другом, то отношение равенства, а и связанная с его применением операция квантифицирования, также является универсальным, относящимся ко всем объектам универсума. Например, универсально квантифицированное выражение «для всех чисел *n* истинно *F*» должно расшифровываться как «для всех объектов абсолютного универсума *x*, если *x* есть число, тогда истинно *Fx*». Неограниченная квантификация и стала семантической причиной парадоксальности аксиомы (V).

[69] Цит. по: *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. С. 43.

[70] *Resnik M.* Frege and the Philosophy of Mathematics. Cornell University Press, 1980. P. 214–220.

В последнее время появились свидетельства, что самые важные результаты Фреге, связанные с выводом аксиом Пеано, с помощью которых доказываются все теоремы арифметики, независимы от аксиомы (V)[71]. Как оказалось, для их доказательства достаточно так называемого принципа Юма (число вещей, выполняющих понятие *F*, равно числу вещей, выполняющих понятие *G*, если и только если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие), принимаемого также и Фреге, а этот принцип непротиворечив. Сказанное позволяет заключить о правильности направления, выбранного Фреге, и если бы не шок, испытанный им от сообщения Рассела, он, вне всякого сомнения, продолжил бы начатую работу в прежнем направлении и нашел бы правильное решение, как оказалось, вполне частной проблемы.

Философия математики Бертрана Рассела

> То, что может быть познано в математике и математическими средствами, можно дедуцировать из чистой логики.
>
> *Б. Рассел.* Введение в математическую философию

> Во всех вопросах логического анализа мы обязаны главным образом Фреге.
>
> *А. Уайтхед, Б. Рассел.* Принципы математики

Есть свидетельство, что Рассел (1872–1970) сначала послал сообщение о противоречивости понятия «класс всех классов» Джузеппе Пеано, и лишь не получив от него ответа, вступил в переписку с Фреге[72]. Эта переписка послужила началом интенсивно-

[71] *Zalta E.* Gottlob Frege.
[72] *Sluga H. D.* Op. cit. P. 177–178.

го изучения работ Фреге и сотрудничества с Альфредом Уайтхедом (1861–1947) по созданию грандиозного проекта сведения математики к логике под названием "Principia Mathematica"[73]. Согласно этому проекту предполагалось сведение к логике не только арифметики, но и других разделов математики — прежде всего анализа. Кроме того, он планировался как обобщение наиболее важных результатов, полученных к тому времени в области обоснования математики, включая прежде всего работы Пеано и Фреге.

Три цели вдохновляли авторов «Принципов математики» на создание универсального логического языка. Во-первых, они стремились с его помощью провести тщательный логический анализ всех терминов и способов доказательства, используемых математиками, а также свести к минимуму множество неопределяемых математических терминов и недоказываемых (исходных) высказываний, т. е. аксиом. Во-вторых, в таком языке они видели лучший способ выявления и выражения изначальной логической структуры выделенных математических терминов и высказываний. В-третьих, универсальный логический язык казался им самым эффективным средством избавления логики и теории множеств от парадоксов.

Логический анализ исходных понятий и законов математики Рассел назвал математической философией.

Два шага в истории этого анализа стали революционными, отмечает Рассел. Первый — *арифметизация* математики, т. е. сведение ее многообразного содержания к единой теории натуральных чисел. «Всю традиционную чистую математику, включая аналитическую геометрию, можно считать полностью состоящей из высказываний о натуральных числах. Иными словами, ее термины можно определить с помощью натуральных чисел, а ее высказывания можно дедуцировать из свойств натуральных чисел, используя в качестве вспомогательного средства идеи и высказывания чистой логики»[74]. Второй — *аксиоматизация* арифметики, т. е. сведение теории натуральных чисел к небольшому множеству аксиом и неопределяемых терминов. Эта работа, говорит Рассел, была выполнена итальянским математиком Пеано. Как показал

[73] *Whitehead A., Russell B.* Principia Mathematica. Cambridge, 1950 (2d ed.). 3 vols.
[74] *Russell B.* Introduction to Mathematical Philosophy. London, 1919. P. 4.

Пеано, достаточно всего трех неопределяемых терминов и пяти аксиом, носящих его имя, чтобы формализовать всю теорию натуральных чисел и тем самым арифметику.

Когда-то математика и логика были полностью различными сферами интеллектуальной деятельности. Но в настоящее время, считает Рассел, они настолько переплелись, что чрезвычайно трудно провести между ними четкую границу. Фактически они слились в одну единую науку. Тем, кто в этом еще сомневается, Рассел предлагает заглянуть в «Принципы математики» и поискать в определениях и дедукциях этого сочинения границу, четко отделяющую логику от математики. Такую границу, заверяет Рассел, невозможно провести. Но если логика и математика — части одной науки, то у них должен быть единый предмет. Таким предметом является *логическая форма* высказываний, точнее говоря, универсальный логический язык, в котором могут быть выразимы с максимальной точностью любые математические утверждения.

Определение числа

Рассел полностью согласен с определением натурального числа, данным Фреге. Понятие числа может быть характеристикой только чисел, а не вещей. Множество, содержащее определенное число объектов — пример отдельного, конкретного числа, но не понятия числа. Тройка людей — пример числа три, число три — пример конкретного натурального числа, но тройка людей не является примером натурального числа. Конкретное число не идентично тому множеству, элементы которого оно обозначает. Число три не идентично тройке людей, состоящей из Брауна, Джонса и Робинсона. Это число идентично с тем свойством, которое объединяет все трехэлементные множества в один общий класс и отличает его от всех остальных подобных классов. Из этих рассуждений следует, что всякое натуральное число является числом определенного класса, характеристики которого объясняют все его свойства.

Определение натурального числа в терминах классов ничем принципиально не отличается от аналогичного определения Фреге[75].

---

[75] *Russell B.* Introduction to Mathematical Philosophy. P. 18, 19.

Число класса — класс всех тех классов, которые подобны ему (находятся с ним в отношении взаимно однозначного соответствия).

Натуральное число есть все, что является числом некоторого класса.

Выполнение данного отношения гарантирует, что все классы, принадлежащие числу класса, эквивалентны друг другу.

Общая дефиниция натурального числа открывает Расселу возможность логически переинтерпретировать аксиомы Пеано. Последние включают три исходных термина — «натуральное число», «число 0», «число, следующее за» — и следующие пять аксиом:

П1. 0 — натуральное число.

П2. Натуральное число, следующее за любым натуральным числом, есть натуральное число.

П3. Ни за какими двумя различными натуральными числами не следует одно и то же натуральное число.

П4. 0 не следует ни за одним натуральным числом.

П5. Любое свойство, которое принадлежит 0 и натуральному числу, следующему за каждым натуральным числом, принадлежит всем натуральным числам (аксиома математической индукции).

Число 0 есть число класса, в котором нет ни одного элемента, т. е. оно — число пустого класса, нуль-класс. Следовательно, согласно общему определению числа, число элементов пустого класса равно множеству всех классов, подобных пустому классу.

Натуральное число 0 — класс, чьим единственным элементом является нуль-класс.

Подчеркнем, что объем числа 0 не равен объему пустого класса. Последний не содержит ни одного элемента, тогда как объем числа 0 содержит ровно один элемент, именно нуль-класс.

Понятие «число, следующее за» определяется так. Пусть α — класс, содержащий n элементов и пусть x — класс, не входящий в α. Очевидно, что сумма классов α и x определяет число $n + 1$.

Число, следующее за числом класса α, является числом класса $\alpha \cup x$, в котором x — класс, не принадлежащий α.

Аксиомы Пеано, доказывает Рассел, получают логическое оправдание только в случае допущения бесконечного ряда натуральных чисел. «Допустив, что число индивидов в универсуме не конечно, мы достигли успеха не только в определении трех исходных понятий Пеано, но также в доказательстве всех его пяти аксиом с помощью чисто логических средств. И поскольку вся чистая математика выводима из теории натуральных чисел, следует, что вся чистая математика есть только продолжение логики»[76].

Все остальные виды чисел определяются в виде отношений между натуральными числами.

Рассмотрим для примера определение положительных, отрицательных и рациональных дробных чисел. Допустим, m есть некоторое натуральное число больше нуля. *Положительное* число $+m$ представляет *отношение* (взаимно однозначного соответствия) $n + m$ к числу n. Соответственно *отрицательное* число $-m$ представляет *обратное отношение* n к числу $n + m$.

Дробь m/n представляет отношение между двумя натуральными числами x и y, когда справедливо равенство $xn = ym$. Из этого следует, что если m или n не равны нулю, то m/n — прямое отношение (взаимно однозначного соответствия), а дробь n/m — обратное отношение. Дробь $m/1$ — отношение между числами x и y, если выполняется равенство $x = ym$. Но как $+m$, $-m$, так и $m/1$ не следует отождествлять с числом m, потому что натуральное число как класс классов и положительные, отрицательные и иные виды чисел как разные виды отношений натуральных чисел — объекты различного логического статуса, или типа[77].

Классы и парадоксы

Все прежние определения и выводы не выходят за пределы основных результатов Фреге. Проблематика, специфическая для философии математики Рассела, начинается с попытки более точного исследования понятия бесконечного класса и решения связанных с ним парадоксов. Предварительным шагом на этом стал анализ проблемы логического объяснения бесконечных (трансфинитных) чи-

[76] *Russell B.* Introduction to Mathematical Philosophy. P. 24–25.
[77] Ibid. P. 64–65.

сел, а вместе с ними и бесконечных классов[78]. Полное объяснение подобного рода, признается Рассел, означало бы синтез результатов, достигнутых Фреге и Георгом Кантором.

Нельзя быть уверенным ни в том, что число реальных объектов и их свойств в универсуме, в котором мы живем, конечно, ни в том, что оно бесконечно. Но поскольку математика имеет дело с бесконечными последовательностями чисел, то для логического оправдания их статуса и объяснения их свойств, считают Рассел и Уайтхед, необходимо специальное допущение о неконечном характере универсума, названное «аксиомой бесконечности».

Аксиома бесконечности представляет допущение, что *если n — натуральное число, тогда в универсуме существует хотя бы один класс с $n + 1$ элементами*. Так как число n заранее не фиксируется, является произвольным, то число объектов универсума превосходит любое число n. Главное следствие принятия аксиомы бесконечности — введение запрета для произвольного числа объектов n выполнения равенства $n = n + 1$ и тем самым нарушения третьей аксиомы Пеано.

Если эта аксиома бесконечности справедлива, то легко доказать, что универсум содержит объекты разного типа, число которых не может быть натуральным числом. В самом деле, согласно аксиоме бесконечности, существует хотя бы один класс с $n + 1$ элементами. Значит, согласно определению натурального числа, существует бесконечное число эквивалентных классов, которое само по себе натуральным числом уже не является. Причина этого в том, что класс всех натуральных чисел не может быть натуральным числом. Пусть N обозначает класс натуральных чисел. То, что N само не может быть натуральным числом, видно из того, что для этого класса справедливы, в частности, следующие равенства: $N + 1 = N$, $N - 1 = N$. Очевидно, что если бы эти равенства выполнялись для натуральных чисел, то это означало бы опровержение третьей аксиомы Пеано и разрушение арифметики как математической теории.

Сказанное объясняет логический мотив принятия Расселом аксиомы бесконечности. Если ее не принять, то третья аксиома Пеано, утверждающая, что ни за какими двумя натуральными числами не следует одно и то же натуральное число, не выполняется и тем са-

[78] *Russell B.* Introduction to Mathematical Philosophy. P. 77–88, 131–143.

мым не исключается возможность совпадения чисел n и $n + 1$. Следующий простой пример иллюстрирует эту возможность[79]. Допустим, в универсуме существует ровно девять объектов. Тогда числа от 0 до 9 определяются как обычно. Но число 10, равное сумме 9 + 1, должно быть приравнено к пустому классу. В самом деле, по определению, число $n + 1$ есть класс тех классов, которые включают класс x такой, что если его удалить, мы получим число n. Согласно этому определению, число 9 + 1 есть класс, состоящий из нулевого числа классов, т. е. содержит пустое множество элементов. Аналогично для всех последующих чисел: 9 + 2, 9 + 3, ..., $9 + n$, где n не равно нулю. Значит, все числа начиная с 10 эквивалентны друг другу, так как все они равны нуль-классу. Тем самым числа, следующие за числами 9 и 10, нарушают третью аксиому Пеано, ибо за обоими следует одно и то же число, именно нуль-класс.

Итак, аксиома бесконечности необходима для того, чтобы различать классы с n и $n + 1$ элементами, где n — произвольное натуральное число.

Против введения аксиомы бесконечности, замечает Рассел, можно выставить следующее возражение. Допустим, существует n объектов (причем n может быть равно даже нулю). Из n объектов можно образовать 2^n классов, из 2^n классов можно построить 2^{2^n} классов и *ad infinitum*. Если теперь сложить вместе n объектов, классы этих объектов, классы классов этих объектов, то получим первое трансфинитное число в иерархии бесконечных чисел Г. Кантора (обозначаемое как число *алеф нуль*). Это число, можно предположить, отражает реальную бесконечность универсума и делает избыточным принятие аксиомы бесконечности.

Однако Рассел сравнивает подобный аргумент с вытаскиванием из шляпы вещей, которых, как знает владелец шляпы, одолживший ее для фокуса, там никогда не было. Если бы класс, состоящий из всех объектов произвольного сорта, которые можно все пересчитать, реально существовал, он имел бы наибольшее кардинальное (количественное) число из всех возможных. Но такое число противоречиво. Из теории множеств известно, что число классов, которые можно образовать из элементов любого класса, всегда больше числа самих элементов ($2^n > n$). Сказанное относится и к классу «самое большое

---

[79] *Russell B.* Introduction to Mathematical Philosophy. P. 132.

кардинальное число». Но это невозможно, потому что число всех его подклассов, являющихся его членами, не может быть больше числа всех его членов по определению. Значит, такого числа не существует. Но именно такое несуществующее число представляет *алеф нуль*.

Сообщив о своем открытии Г. Кантору (1901 г.) и продолжая размышлять о причинах невозможности наибольшего кардинального числа, Рассел открыл противоречивость широко известных теперь нормальных классов. Допустим, существует класс, включающий все, что существует. Тогда он должен включать и самого себя, так как представляет один из существующих объектов универсума. Но нормальный класс не является членом самого себя. Например, класс всех людей не является человеком. Если теперь образовать класс всех нормальных классов, то возникает вопрос: является ли он нормальным классом. При допущении, что он — нормальный класс, следует, что он — ненормальный класс. При допущении, что он — ненормальный класс, следует, что он — нормальный класс. Так как оба предположения ведут к противоречию, то понятие класса всех нормальных классов логически противоречиво и, следовательно, бессмысленно.

Ошибка, считает Рассел, возникает из-за образования «плохо определенных классов», т. е. классов, чей логический тип четко не определен. Классы — логические сущности, и к их определению должно предъявляться требование, чтобы высказывание о классе могло быть трансформировано в форму, в которой отсутствует всякое упоминание о том, как он сконструирован. Это налагает определенные ограничения на номинальное использование высказываний о классах. Классы наподобие класса всех нормальных классов лишены смысла, потому что бессмысленен вопрос о том, может или не может он быть своим собственным членом. Следовательно, если существует n объектов в универсуме и 2^n классов об этих объектах, ввиду указанного ограничения нельзя образовать новый класс, состоящий из $n + 2^n$ членов. По этой причине попытка избежать введения аксиомы бесконечности бессмысленна.

Теория типов как способ исключения парадоксов

Анализ парадоксов, связанных с плохо определенными и тем самым незаконными классами, считает Рассел, убеждает, что все они основаны на ошибке, получившей в традиционной логике название «порочный круг». Такая ошибка возникает тогда, когда множество объектов содержит элементы, которые определяются с помощью признаков, характерных для множества в целом, т. е. когда признаки целого переносятся на его отдельную часть. *Принцип порочного круга*, запрещающий создавать незаконные классы, звучит так: «Все, что характеризует *весь* класс в целом, не должно характеризовать его отдельный элемент»[80]. Отсюда сразу следует, что ни один класс не может быть своим собственным элементом. Допустим, закон исключенного третьего полагается в форме «все высказывания либо истинны, либо ложны». Если принять его за посылку и сделать вывод, что закон исключенного третьего, как одно из высказываний из указанного класса, также либо истинный, либо ложный, то это означает нарушить указанный принцип. Чтобы исключить подобное, класс «все высказывания» должен быть ограничен таким образом, чтобы в него не входил закон исключенного третьего.

Парадоксы могут возникать в отношении самых разных логических и математических объектов — высказываний, классов, количественных и порядковых чисел и т. д. Поскольку все они конкретные примеры единого порождающего фрейма, названного «пропозициональной функцией», то принципиальный анализ парадоксов возможен только в терминах именно этой функции.

Пропозициональная функция — выражение, содержащее по меньшей мере одну переменную в качестве аргумента и превращающееся в истинное или ложное высказывание после подстановки на место этой переменной определенного аргумента (объекта или функции).

Можно также сказать, что пропозициональная функция — это функция, значениями которой являются истинные или ложные высказывания. Например, пропозициональная функция «x — человек» после подстановки на место переменной x имени *Сократ* в качестве аргумента превращается в истинное высказывание «Сократ — человек». Пропозициональная функция «$2 + 2 = x$» после подстановки на место переменной x числа 5 в качестве аргумента превращается в ложное высказывание «$2 + 2 = 5$».

[80] *Whitehead A., Russell B.* Op. cit. Vol. 1. P. 37.

Пропозициональные функции вводят классы определенных объектов. Класс, по Расселу, не является ни свойством отдельного объекта (классов всегда больше, чем объектов; некоторые классы противоречивы), ни множеством объектов (если бы это было так, то невозможно объяснить появление чисел 0 и 1). Пропозициональные функции, высказывания о свойствах объектов и классы связаны следующим образом. Утверждение «свойство объекта a» эквивалентно выражению «функция ϕx, которая истинна при подстановке аргумента a» и выражению «объект a принадлежит классу α».

Непарадоксальное обсуждение классов в терминах пропозициональных функций требует выполнения следующих условий:

- Каждая пропозициональная функция должна определять класс, состоящий из тех аргументов, которые делают ее истинной.
- Две формально эквивалентные функции должны определять один и тот же класс, и две формально неэквивалентные функции должны определять различные классы.
- Должен быть определен формальный способ обозначения не только классов, но и классов классов, классов классов классов, ... Число, по определению, представляет класс классов. Многие математические понятия имеют аналогичную природу.
- Признать полностью бессмысленным (но не ложным) вопрос о том, может ли класс быть членом самого себя.
- Должен существовать логический формализм, позволяющий высказываться обо всех классах, состоящих из объектов одного логического типа.

Выполнение первых двух условий гарантирует, что каждое множество формально эквивалентных пропозициональных функций определяет один и только один класс объектов, выполняющих их. Например, на множестве положительных чисел функции «x есть четное число» и «x есть число, делящееся на два» определяют один и тот же класс чисел $2n$, где $n \geq 1$.

Третье условие выполняется введением функций нового вида всякий раз, когда требуется обобщить прежний класс функций (когда требуется сделать их аргументами новой функции).

Четвертое условие исключает парадоксы, возникающие из-за того, может или не может какой-нибудь класс быть своим собственным членом.

Пятое условие эквивалентно введению аксиомы редуцируемости. Выполнение всех пяти условий вместе порождает теорию типов — главное открытие Рассела.

Пусть ϕx обозначает произвольную пропозициональную функцию с одной переменной x. Из данной пропозициональной функции можно образовать две новых, присоединив к ней *квантор всеобщности* (x), читается *для всех* x, или *квантор существования* (Ex), читается *для некоторых* (*возможно для всех*) x. В первом случае получаем новую функцию $(x)\phi x$, которую можно прочитать *для всех* x *истинно, что* ϕ; ϕx *истинна всегда*. Во втором получаем новую функцию $(Ex)\phi x$, которая читается *для некоторых* (*может быть и всех*) x *истинно, что* ϕ; ϕx *истинна иногда*. Пропозициональные функции, употребляемые с кванторами всеобщности или существования (в данной формулировке или более специальной), представляют функции функций (высказывания о функциях, высказывания о высказываниях) и образуют исходные логические фреймы, достаточные для порождения любых высказываний математики.

Зависимость значения истинности пропозициональной функции от выбора аргумента проясняет логическую причину парадокса, эквивалентного классу всех нормальных классов: он возникает тогда, когда в число аргументов пропозициональной функции попадает она сама или то, что из нее следует. Пусть ϕx обозначает произвольную пропозициональную функцию с одной переменной x. Тогда допустимы следующие подстановки вместо x: ϕa, ϕb, ϕc, ..., где a, b, c, ... — объекты, превращающие функцию ϕx в истинное или ложное высказывание. Но совершенно недопустимы подстановки вида $\phi(\phi x)$, в которых в качестве аргумента фигурирует сама функция, а также подстановки вида $\phi(\phi a)$, $\phi(\phi b)$, $\phi(\phi c)$, ... Если имеется две и более неэквивалентные пропозициональные функции, применимые к одному и тому же аргументу, то тогда следует, что ни одна из них не может быть аргументом для других. Следовательно, значения пропозициональных функций должны задаваться функциями, а не наоборот[81].

Допустим, универсум состоит из трех объектов: a = Сократ, b = Платон, c = Аристотель. Пусть пропозициональной функцией

[81] *Whitehead A.*, *Russell B.* Op. cit. Vol. 1. P. 39.

первого уровня будет ϕx = «x — древнегреческий философ». Указанные три объекта являются ее аргументами. Подставляя их последовательно в функцию ϕx, получаем три истинных высказывания: ϕa = «a — древнегреческий философ», ϕb = «b — древнегреческий философ» и ϕc = «c — древнегреческий философ». Подстановка объектов нулевого типа в пропозициональную функцию первого уровня превращает последнюю в истинное высказывание. Но какое значение истинности можно приписать, например, следующей подстановке: $\phi(\phi a)$ = «'a — древнегреческий философ' — древнегреческий философ»? Высказывание «Сократ — древнегреческий философ» не является аргументом указанной функции, т. е. его подстановка не превращает ее ни в истинное, ни в ложное утверждение. Причина этого в том, что *высказывания о древнегреческих философах и древнегреческие философы — объекты разного логического типа*. Следовательно, высказывание «'a — древнегреческий философ' — древнегреческий философ» бессмысленно и выпадает из области истинностной оценки.

Сказанное об иерархии объектов и функций об этих объектах можно проиллюстрировать следующей упрощенной схемой:

0. Существуют объекты универсума, не являющиеся классами, функциями или высказываниями: a, b, c, ... Они называются *индивидами* и представляют аргументы *для всех функций более высокого порядка* (*уровня*).

1. Существуют функции, обозначающие *свойства* (*классы*) индивидов: ϕ_1^1x, ϕ_2^1x, ϕ_3^1x, ... Они называются функциями первого порядка и представляют аргументы для функций 2-го порядка.

2. Функции, обозначающие *свойства свойств* (*классы классов*) индивидов: ϕ_1^2x, ϕ_2^2x, ϕ_3^2x, ... Они называются функциями второго порядка и представляют аргументы для функций 3-го порядка.

... ...

n. Функции, обозначающие *свойства ... свойств* (*классы ... классов*) индивидов: ϕ_1^nx, ϕ_2^nx, ϕ_3^nx, ... Они называются функциями n-го порядка и представляют аргументы для функций n + 1 порядка.

... ...

Согласно приведенной типологии, ни одна функция, если она претендует на статус значимого (истинного или ложного) высказывания, не может быть своим собственным аргументом; ни один класс не может быть своим собственным членом. Ни одно высказывание не может быть своим собственным референтом. Если функция определена на уровне n, ее аргументами, кроме индивидов, могут быть функции не выше уровня $n - 1$. Аналогично для классов и высказываний.

Отсюда следует, что необходимо различать разные уровни организации универсума — индивиды, их свойства, свойства свойств индивидов, ... «Таким образом, мы подошли к тому, чтобы ввести иерархию. Начиная с термина *a* и других терминов, которые могут быть аргументами тех же функций, что и для аргумента *a*, мы получаем функции, для которых термин *a* является возможным аргументом, затем функции, для которых данные функции сами являются возможным аргументом и т. д.»[82]

Введение разных типов функций делает бессмысленными высказывания вида «все (некоторые) свойства объекта *a*», «для всех (некоторых) свойств объекта *a*», в которых кванторы «все» «некоторые» относятся к аргументам функций *любого* типа. Ни одна функция не может быть значимой на всех уровнях, т. е. быть функцией для аргументов всех типов. Такое смешение не является логической ошибкой, но приводит к бессмысленным высказываниям типа «то, что я сейчас утверждаю, ложно». Теория типов разрешает в качестве осмысленных лишь высказывания вида «все (некоторые) свойства объекта *a типа n*», «для всех (некоторых) свойств объекта *a типа n*».

Можно предположить, что иерархия типов бесконечна. Но, утверждает Рассел, «мы не достигаем функций бесконечного типа, потому что число аргументов и реальных переменных функции всегда конечно. Поскольку восхождение по типам функций происходит постепенно, никакого 'движения к пределу' нет, и функции бесконечного уровня не входят в теорию типов».[83]

Но даже если иерархия типов конечна, остается проблема идентификации тождества значений истинности высказываний,

[82] *Whitehead A., Russell B.* Op. cit. Vol. 1. P. 48.
[83] Ibid. P. 53.

принадлежащих разным уровням. Тождественные функции, к какому бы уровню иерархии типов они не принадлежали, должны обозначать одни и те же логические объекты. Это допущение Рассел и Уайтхед называют *аксиомой редуцируемости*[84]:

Два высказывания, имеющие одно и то же расширение (один и тот же объем, одно и то же предметное значение), должны быть тождественны на всех уровнях иерархии типов.

Логическая необходимость данной аксиомы не является безоговорочной даже для ее авторов, её значение для теории типов неоднозначно. Она не допускает парадоксов, основанных на самореференции. Но, как допущение, она всего лишь — эмпирическая истина. Ее практическое значение в математических рассуждениях ограниченно. Для чистой логики и чистой математики, что для Рассела одно и то же, она вообще избыточна. Поэтому он оценивает ее значение, как и любой гипотезы, не выше полезности тех следствий, которые из нее можно извлечь.

Непосредственное следствие аксиомы редуцируемости — сведение функции любого уровня иерархии к тождественной ей функции первого уровня. В этом смысле аксиома редуцируемости обосновывает методологически применение принципа полной индукции, требующего чтобы доказываемое свойство, истинное для первого члена последовательности, было истинно и для всех остальных.

Но главный мотив введения аксиомы редуцируемости — это, конечно, исключение парадокса существования класса классов, чьи элементы не являются элементами самих себя, с которым столкнулся Фреге. Пусть α — такой класс. Пусть его определяет функция ϕx. Согласно критерию иерархизации, подстановка $\phi x(\alpha)$ — бессмысленное высказывание. Значит, бессмысленно и высказывание «класс всех классов, не являющихся членами самих себя». Но тогда исчезает и парадокс, связанный с этим высказыванием.

Рассмотрим высказывание «я лгу», порождающее *парадокс лжеца*. Оно эквивалентно высказыванию «существует высказыва-

---

[84] *Whitehead A., Russell B.* Op. cit. Vol. 1. P. 56.

ние, которое я утверждаю и которое ложно». Это высказывание представляет аргумент пропозициональной функции «я утверждаю *p*, и *p* ложно», где *p* обозначает «я лгу». Допустим, *p* — высказывание *n*-го уровня. Но высказывание, в которое *p* входит в качестве переменной, относится уже к $n + 1$ уровню. Следовательно, если утверждение о *p* истинно, то *p* ложно; а если утверждение о *p* ложно, то *p* истинно. Противоречия нет, так как истинностные оценки высказывания «я лгу» принадлежат более высокому уровню, чем само это высказывание. Парадокс исчезает[85].

Оценка программы логицизма

Основным тезисом логицизма является утверждение, что математические истины составляют собственное подмножество логических истин. Это означает, что всякая математическая истина есть логическая истина, но обратное в общем неверно. Фреге и Рассел оба интерпретировали этот тезис таким образом, что высказывания о натуральных числах суть логически истинные высказывания. И поскольку все остальное математическое здание было основано на элементарной арифметике, логическая истинность ее суждений переносилась и на все остальные этажи. Если логическую истину определить, как это обычно делается, как истину во всех возможных мирах, то становится понятным главный мотив основателей логицизма. В этом и только в этом случае *необходимый* характер математических истин получает объяснение. Ведь со времен Аристотеля необходимым считается то, что не может быть иначе.

Натуральное число не есть вещь, множество, свойство или представление, результат интуиции. Оно, как доказал Фреге, представляет абстракцию второго уровня, результат формирования новой операциональной структуры (в смысле Ж. Пиаже), цель которой в координации абстракций первого уровня. Исследование логической природы натурального числа, вне всякого сомнения, можно считать самым выдающимся достижением логицистов.

---

[85] Решение этого парадокса, не использующее теорию типов, приведено в приложении 2.

Современные исследования логицистской доктрины убеждают, что, несмотря на трудности, с которыми лично встретились Фреге и Рассел, их программы никаких фатальных ограничений не содержат и принципиально осуществимы.

Например, несущественно различие между Фреге и Расселом в их понимании логического статуса натуральных чисел. Являются ли они самостоятельными объектами, как полагал Фреге, или контекстуально определяемыми конструкциями, как считал Рассел. В том и другом случае натуральное число определяется как логический конструкт, что для логицистской программы является приоритетным. Также не имеет особого значения периодически выдвигаемое обвинение в том, что логицистское определение натурального числа носит круговой характер: число объявляется особым свойством класса и в то же время определяется в терминах взаимно однозначного соответствия классов. Нелогический характер аксиомы бесконечности, принимаемой Расселом и Уайтхедом, можно оправдать тем, что в противном случае должны быть отвергнуты аксиомы Псано, а вместе с ними — и вся элементарная арифметика. Ибо если натуральные числа n и $n + 1$ не различаются, то третья аксиома Пеано, утверждающая, что ни за какими двумя различными натуральными числами не может следовать одно и то же натуральное число, должна быть отвергнута. Аналогично аксиому редуцируемости можно оправдать тем, что тождественные функции должны выполняться на одних и тех же уровнях иерархии типов. Иррелевантно также обвинение, что аксиома бесконечности вводит завершенный бесконечный ряд натуральных чисел (как актуальную бесконечность) и по этой причине вступает в противоречие с теоремой о невозможности существования наибольшего натурального числа и поэтому представляет *ad hoc* допущение. На самом деле, невозможность существования наибольшего натурального числа не противоречит допущению актуальной бесконечности натурального ряда чисел. Ведь последнее требует только, чтобы имелось хотя бы одно собственное подмножество, эквивалентное всему множеству. Значит, числа, символизирующие мощности таких множеств и их собственных подмножеств, будут одинаковы. Но именно это и означает, что существование наибольшего натурального числа невозможно.

Самым важным вопросом при оценке логицистской программы является поэтому следующий: насколько она изменила бы развитие математики, если бы ее приняло большинство математиков? Если исходить из духа и буквы логицистской концепции, предлагаемое обоснование должно исключить все, что является в математике, и прежде всего в ее предпосылках, ненеобходимым — эмпирическим, интуитивным, психологическим. Основоположникам логицизма казалось, что самый близкий и эффективный путь для достижения такой цели — последовательная логическая перестройка всей математики, начиная с ее оснований и заканчивая ведущими разделами, превращение ее в одно общее исчисление. Однако именно то, что они исключили ради достижения надежности и строгости математики, с точки зрения *обоснования* математики оказывается для нее самым важным. Обоснование математики неотделимо от интеллектуальных, логических и, возможно, культурных предпосылок. Их игнорирование превращает математику в абсолютно замкнутую и, как мы знаем, принципиально неполную систему и лишает ее источника развития.

В результате предпринятой атаки логицисты не только отбросили все, что на самом деле было существенным для обоснования математики, но и столкнулись с фундаментальной для всякого обоснования закономерностью — результаты обоснования оказались независимыми от его предпосылок, а также мотивов и целей его авторов. Самый яркий пример такой независимости — противоположная реакция Фреге и Рассела на открытие парадоксального характера понятия класса всех классов. Они оба начали свою работу с безупречного с логической точки зрения определения натурального числа и успешной формализации всей элементарной арифметики. Оба столкнулись с одним и тем же парадоксом. Если Фреге отказался на длительное время от продолжения своей работы по обоснованию математики, признав ее бесперспективность, то Рассел (вместе с Уайтхедом), наоборот, попытались завершить ее, предложив свой вариант решения парадокса. Другой пример. Важнейшим следствием развития логицизма (и формализма), которое носило вспомогательный характер, стало создание современной символической логики. Будучи побочным, этот результат по своему значению превосходит все остальные достижения логицистов.

Вывод очевиден: успешное начало не гарантирует успешного завершения. Никакой предопределенности в развитии математики не существует. Результаты обоснования независимы от самих оснований. Даже в математике не всегда требуется скрупулезное обоснование каждого шага. Проблема обоснования математики в той постановке, как ее понимает подавляющее большинство аналитиков, бессмысленная проблема. Никакого единственного надежного основания для здания всей математики не существует. Математика всегда начинала с определенных гипотез, сводила их решение к решению известных гипотез и в результате приходила к потребности выдвижения новых гипотез. Дедукция ее утверждений основана большей частью на их семантической связи. Поэтому необходимость математических суждений не только гипотетична, но и конвенциальна, ибо отражает их смысловую связь и зависимость, критерий ее успеха — в совместимости разрабатываемых гипотез с уже достигнутыми результатами.

Математика, которую построили логицисты, оказалась не только независимой от своих логически безупречных оснований, но, будучи избавленной от всех ненеобходимых предпосылок, превратилась в замкнутую относительно дедуктивного следования систему утверждений, лишенную спонтанных и творческих импульсов к развитию и совершенствованию. Только на первый взгляд кажется, что математика — настолько самодостаточная система знаний, что никакие внешние, нематематические факторы для ее развития не требуются. Это неверно в двух смыслах. Во-первых, потому что функционирование любой отрасли знания так или иначе обусловлено общественными потребностями и запросами. Во-вторых, потому что математика никогда не была жестко отделена от других видов естественнонаучного и гуманитарного знания. Достаточно указать на теорию игр, которая, будучи математической дисциплиной, возникла в результате необходимости совершенствования системы управления в военное время и продолжает успешно эволюционировать в основном благодаря удовлетворению разнообразных общественных запросов и потребностей.

Ограниченная отношением дедукции, программа обоснования математики логицистов оказалась в высшей степени нетворческой доктриной. В ее терминах не объясняются революционные этапы развития математики, креативный, спонтанный характер математических инноваций. Кризисы и парадоксы, с точки зрения логицистов, — ничего более, чем логические и тем самым недопустимые ошибки. Творческое озарение с возможными отклонениями и их последующей коррекцией было принесено в жертву логической корректности и принудительной последовательности выводов. Неудивительно, что, в отличие от символической логики, собственно логицистская программа не получила широкого признания и распространения в математической среде.

Глава 4

Интуиционизм и конструктивизм. Математика как создание интутивно и алгорифмически очевидных конструкций

> Нет актуальной бесконечности. Канторианцы (последователи основателя теории множеств Г. Кантора. — *В. С.*) забыли это и впали в противоречие.
>
> *А. Пуанкаре.* Наука и метод

Всех неклассических математиков объединяет общее убеждение, что надежность математических построений гарантируется только тогда, когда математика исследует доступные нашему сознанию конечные объекты, допускающие конечные и эффективные операции над ними. Самым известным вариантом неклассической математики первой половины XX в. является интуиционистская математика Брауэра. Во второй половине этого столетия появились концепции неклассической математики, либо частично, либо полностью независимые от интуиционизма Брауэра, — школы А. А. Маркова и Э. Бишопа соответственно.

Открытие парадоксов классической теории множеств вынудило одних математиков искать решение возникшей проблемы в ее аксиоматизации, других — в совершенствовании ее логических методов, третьих — в доказательстве логической непротиворечивости всей математики. При этом математика рассматривалась как наука, общие принципы которой правильны и не могут подвергаться сомнению. Но нашлись исследователи, получившие позже имя *неоклассиков*, которые посчитали парадоксы теории множеств симптомом не отдельных частных «неполадок», а признаком ложности всей классической математики. «Математики, придерживающиеся этой позиции, утверждают, что в математике — особенно в современной математике — недостаточно обоснованны *понятие бесконечности* и вытекающие из него следствия; в то же время они признают, что для математики — в отличие от почти всех других наук — это понятие является настолько жизненно необходимым, что огромное большинство математических фактов, не имеющих отношения к бесконечности, едва ли не тривиально. По мнению этих математиков, в анализе и геометрии по ходу их развития с XVII столетия, а особенно с начала XIX столетия, особый характер понятия бесконечности и его следствий совершенно игнорировался, так что слывшие строгими методы теории действительных чисел и анализа, введенные в математику в XIX веке — от Коши до Вейерштрасса и Кантора, — не только не достигали поставленных перед ними целей, но привели к созданию разработанной системы, основанной на совершенно ошибочной тенденции обращаться с бесконечностью с помощью средств, выработанных для конечных совокупностей. Таким образом, возникла некая ложная концепция математики в целом»[86].

Незаконная бесконечность, превратившая математику в ложную науку, — понятие актуальной бесконечности, введенное Кантором. Всякая попытка выразить и оперировать законченной бесконечностью в конечном словаре символов неизбежно приводит к противоречиям. Никакая логика не способна предотвратить их появление. Иными словами, актуальная бесконечность принципиально несовместима с конечным характером наших мыслительных процедур. Пуанкаре выразил эту несовместимость наиболее ярко. «Можно ли рассуждать об объектах, которые не могут быть определены конечным числом слов? Можно ли даже говорить о них, зная, о чем говорят, и произнося нечто иное, чем пустые слова? Или же, наоборот, их следует рассматривать как непознаваемые? Что касается меня, то я не колеблюсь ответить, что они просто не

[86] *Френкель А. А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1966. С. 238–239.

существуют. Все объекты, которые мы сможем когда-нибудь себе представить, или будут определены конечным числом слов, или же будут определены только несовершенно и останутся неотделимыми от массы других объектов; и мы не можем исследовать их логически строго до того, как мы их отделим от этих других объектов, с которыми они остаются связанными, т. е. до того, как мы придем к определению их конечным числом слов»[87].

В более широком смысле понятие актуальной бесконечности противоречит конечной природе человека как познающего существа. Принятие этого понятия вынуждает его размышлять о завершенных бесконечностях, данных вместе со всеми своими элементами, в терминах своего конечного опыта, языка и способностей. Вместо того чтобы предполагать бесконечность как изменяющееся количество, потенциально способное увеличиваться или уменьшаться выше или ниже любого установленного уровня, актуальная бесконечность заставляет принять допущение, что высший или низший уровни изменения количества на самом деле уже преодолены. Иными словами, актуально завершенная бесконечность самопротиворечива. С одной стороны, как завершенная бесконечность, она включает в качестве собственных элементов высшую и нижнюю границы. С другой стороны, по определению, в бесконечности таких элементов существовать не должно. Ведь если бы они существовали, тогда рассматриваемая бесконечная совокупность оказалась бы конечной. Это объясняет, почему все логические определения актуальной бесконечности обречены на ошибку, известную под названием «порочный круг», и следовательно, внутренне противоречие. Противоречие, присущее понятию актуальной бесконечности, можно разрешить, только отказавшись от этого понятия.

Значит, ложность математики, перестроенной на теоретико-множественном основании, проистекает из-за навязанного Кантором самопротиворечивого и тем самым ложного основания. Если исходить из конечной природы человека, конечного характера совершаемых им умственных операций, то новым основанием математики может быть, по мнению неоклассиков, только понятие потенциальной бесконечности. По своему определению это понятие

[87] *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 464.

предполагает наличие сколь угодно большой, но всегда конечной совокупности объектов и тем самым всегда конечного множества действий над этими объектами. Тем самым данное понятие обеспечивает эффективность и принципиальную проверяемость всех математических утверждений, а значит, и невозможность возникновения в математике парадоксов и антиномий. «Всякая теорема математики должна быть доступна проверке. Когда я высказываю... теорему, я утверждаю, что все проверки, которые я испробую, приведут к желаемому результату, и даже если одна из этих проверок требует труда, превосходящего человеческие силы, я утверждаю, что если много поколений сочтут нужным заняться этой проверкой, то и в этом случае она удастся. Теорема не имеет другого смысла; это остается верным и тогда, когда в ее формулировке говорится о бесконечных числах; но так как проверки могут быть проведены только для конечных чисел, то отсюда следует, что всякая теорема, относящаяся к бесконечным множествам... не может быть чем либо иным, как сокращенным способом формулирования предложений, относящихся к конечным числам. Если дело обстоит иначе, то эта теорема недоказуема, а если она недоказуема, то она не будет иметь смысла»[88].

Понятие потенциальной бесконечности обеспечивает математике начало, *внутренне присущее самой математике*, а не заимствованное откуда-то извне. Ничто внешнее, включая опыт, язык и классическую логику, не может служить таким началом. Тотальная реорганизация математики на основе данного начала — задача, которую поставили перед собой нео-классики.

Более конкретно решение этой задачи требовало, выражаясь словами Пуанкаре[89]:

1. Анализировать только такие объекты, которые могут быть результатом конечных умственных построений, т. е. могут быть определены конечным числом слов. Такие объекты принято называть конструктивными.
2. Рассматривать все предложения, относящиеся к бесконечности, как сокращенное выражение предложений, относящихся к конечным совокупностям объектов и действий. Совокупности

[88] *Пуанкаре А.* Указ. соч. С. 466.
[89] Там же. С. 467, 470.

образовывать посредством последовательного прибавления новых членов, рекомбинации старых и считать их бесконечными только из-за отсутствия причин остановиться.

3. Исключать в математических построениях непредикативные, т. е. предполагающие «порочный круг», классификации и определения.

Итак, неклассическая математика — математика, отказывающаяся от теории множеств Кантора, закона исключенного третьего, понятия актуальной бесконечности и признающая понятие потенциальной бесконечности как идейный базис для своих теорий.

Основной признак неклассической математики — конструктивность ее построений. Поэтому резонно именовать ее конструктивной математикой, или (математическим) конструктивизмом. Среди школ, составляющих неклассическую математику, особое место занимает интуиционизм Брауэра. Исторически он представляет первую и наиболее влиятельную концепцию конструктивной математики. Остальные направления конструктивной математики возникли в попытке либо улучшить его (Д. ван Дален, А. С. Троэлстра), либо развить альтернативные версии конструктивизма (школы Маркова и Бишопа).

Программа конструктивизма: математика как создание потенциально доказуемых конструкций

Конструктивизм возник в последней четверти XIX в. в качестве реакции на быстрое распространение в этот период благодаря усилиям Г. Кантора и Р. Дедекинда теоретико-множественных методов в математике, основанных на допущении актуальной бесконечности. С самого начала конструктивисты отстаивали идею о том, что это незаконно, противоестественно и что математические объекты должны быть конструируемыми, или вычислимыми, построениями.

К конструктивистам XIX в. относят Э. Бореля, Л. Кронекера и А. Пуанкаре. Начиная с 1907 г. конструктивизм в форме интуиционистской программы обоснования математики систематически развивался голландским математиком Л. Э. Я. Брауэром и продолжает модернизироваться его последователями и в настоящее время. Согласно Брауэру, математика — наука об интуитивно очевидных конструкциях и в своем развитии полностью освобождается от диктата логики и языка. Утверждения классической математики «существует объект x со свойством P» не конструктивны и должны быть заменены утверждениями типа «я выполнил построение K, доказывающее наличие объекта x со свойством P». Любое математическое суждение утверждается только тогда, когда имеется его доказательство. Утверждения согласно закону исключенного третьего «либо число x обладает свойством P, либо x не обладает свойством P» незаконны, пока не будут построены доказательства *обеих* альтернатив.

Логика никак не связана с математикой и поэтому ничего не говорит и не может сказать о ней. Логика — механическая по своей сути имитация реального математического языка, ее стенографический отчет. Сам язык не принадлежит математике, он всего лишь несовершенное средство общения между математиками, сохранения полученных результатов. Использование математиками языка и логики может быть оправдано только практическими, но не теоретическими соображениями.

Центральное место в интуиционистской математике занимает идея бесконечной последовательности свободных выборов и основанная на ней теория континуума. Понятие бесконечной последовательности свободных выборов означает возможность в произвольном порядке приписывать каждому члену некоторой последовательности определенный предикат (например, натуральное число в качестве номера члена последовательности). Брауэр доказывает фундаментальную теорему интуиционистской математики, указывающую условия, при которых можно построить континуум действительных чисел.

В 40 гг. XX в. работы А. А. Маркова и его учеников положили начало отечественной версии конструктивизма. Марков отверг идею Брауэра о математике как свободном творении человеческого ума, но сохранил допущение о потенциальной бесконечности ее объектов, необходимости конечных и эффективных доказательств согласно особой конструктивной (фактически интуиционистской) логике.

В 40–50 гг. XX в. сформировалась еще одно направление конструктивизма, альтернативное интуиционистскому, которое связано с именем американского математика Э. Бишопа. Вместо бесконечной последовательности свободных выборов Бишоп предпочитает говорить о последовательностях, генерируемых каким-нибудь объективным случайным процессом, например, бросанием монеты или игральной кости. Другое отличие связано с возрастающим интересом к вычислительным процедурам математики, компьютерному решению математических проблем, к созданию программ, позволяющих получать новое математическое знание.

Следующие положения являются общими для неклассических математиков всех разновидностей:

- Объектами математики должны быть только конечные структуры, что делает математические операции на них эффективными (вычислимыми). Допущения и понятия, не удовлетворяющие данному требованию финитности, следует исключить из математики. Это относится прежде всего к абстракции актуальной бесконечности, принятие которой стало причиной теоретико-множественных парадоксов классической математики.
- Определения математических объектов не должны содержать ссылки на те множества, элементами которых они являются (тем самым запрещаются так называемые непредикативные, т. е. содержащие порочный круг, определения).
- Теоремы, утверждающие существование определенных математических объектов, должны быть доказательствами, содержащими способы их построения. Истинно то, что доказуемо; ложно то, из предполагаемого построения чего следует противоречие (абсурд, нелепость). Значит, относительно произвольного математического суждения нельзя *a priory* утверждать, что оно либо истинно, либо ложно. Следовательно, закон исключенного третьего в общем (в бесконечной области объектов) не верен.
- Интуиционистская версия неклассической математики Брауэра и его школы дополнительно отстаивает следующие тезисы:

- Объекты математики — ментальные конструкции, непосредственно схватываемые разумом и интуитивно очевидные для него. Язык и мышление — подчиненные и второстепенные средства математического мышления, необходимые лишь для выражения и трансляции результатов интуиции.
- Математика — свободное творение ума, основанное на интуиции времени. Ее основу составляет единство базисной интуиции времени, абстракции потенциальной бесконечности и принципа полной индукции. Интуиционистская математика во многом несовместима с классической.
- Математика не зависит от опыта, логики и языка. Логика — часть математики и не имеет прямого отношения к умственным процессам.

• Теория нормальных алгорифмов Маркова — отечественная версия неклассической математики — дополнительно включает следующие тезисы:

- Объекты математики — «слова» определенного конечного алфавита знаков и алгорифмы (точные предписания) по их трансформации в другие «слова» этого же алфавита. Длина последовательностей знаков, из которых строятся «слова», не ограничена, но всегда конечна.
- Алгорифмическое вычисление конечно, если доказано, что оно не может продолжаться бесконечно («принцип Маркова»). Незавершаемые алгорифмические построения запрещаются.
- Понятие последовательности свободного (т. е. не алгорифмического) выбора Брауэра отвергается.

• Конструктивная математика Бишопа дополнительно включает следующие положения:

- Все математические утверждения должны интерпретироваться в терминах теории натуральных чисел. Математика в целом — «язык высокого уровня программирования».
- Конструктивная математика свободна от философских догм относительно природы своих объектов (допустим любой конструктивный объект).

- Интуиционистская концепция континуума, основанная на понятии последовательности свободного выбора, ложна, остальная часть математики Брауэра может быть принята.
- Все утверждения конструктивной математики являются теоремами классической (обратное верно только при отказе от закона исключенного третьего).

В последующем изложении главный акцент сделан на объяснении основных положений интуиционизма Брауэра. Это связано со значительным воздействием этой программы на ход дискуссии по основаниям математики. Остальные программы, несмотря на бóльшую продвинутость в решении специальных задач, такого значения еще не приобрели.

Философия математики Лейтзена Эгберта Яна Брауэра

Математика — свободное творчество, независимое от опыта; она создается из единственной априорной интуиции, которую можно назвать «постоянством в изменении», или «единством в множественности».

Л. Э. Я. Брауэр.
Об обоснованиях математики

Философские принципы интуиционизма Брауэра

Одно из ключевых положений интуиционистской философии математики состоит в том, что математика представляет полностью автономную и самодостаточную деятельность. Она не нуждается ни в каких внешних гарантиях; все, что ей необходимо, содержится в ней самой.

Логицисты и формалисты видели в парадоксах классической математики заболевание, которое требует лечения и которое можно вылечить, если подобрать подходяще логическое лекарство. Интуиционисты считали парадоксы симптомом болезни, лечение которой требует полной перестройки всей математики. Самая радикальная программа такой перестройки была предложена голландским математиком Л. Э. Я. Брауэром (1881–1966).

По его мнению, положение дел в обосновании математики в начале XX в. представляет следствие изменений ведущих философских установок на отношение математики к опыту, языку и логике. Основной тренд этих изменений — сдвиг интереса от объекта к субъекту и, как следствие, постепенное освобождение математики от диктата опыта, языка и логики.

Убеждение в безусловной точности законов математики, полагает Брауэр, являлось предметом дискуссии многие сотни лет и в конце концов привело к возникновению двух соперничающих школ — интуиционизма и формализма (к которой Брауэр причисляет и логицизм). Интуиционисты признают в качестве источника точности математики человеческий интеллект, формалисты — бумагу. «В философии Канта мы находим старую форму интуиционизма, ныне почти отброшенную, в которой время и пространство считаются априорными формами чувственности, прирожденными человеческому разуму. Для Канта аксиомы арифметики и геометрии — априорные синтетические суждения, т. е. суждения, независимые от опыта и недоказуемые аналитически; именно этим объяснялась их аподиктическая точность в мире опыта и в абстракции. Поэтому для Канта возможность экспериментального опровержения арифметических и геометрических законов не только исключалась твердым убеждением в их истинности, но и была просто немыслима.

Диаметрально противоположна точка зрения формализма, который утверждает, что человеческий разум имеет в своем распоряжении образов прямых линий или чисел, скажем, не более десяти, и поэтому источник этих математических объектов находится не в нашем представлении природы, а в самой природе… Для формалиста, следовательно, математическая точность сводится к созданию метода вывода одних отношений об объектах из других и не зависит от значения, которое можно приписать этим отношениям или связываемым ими объектам»[90].

[90] *Brouwer L. E. J.* Intuitionism and Formalism // Philosophy of Mathematics. Selected Readings. New Jersey, 1964. P. 67–68.

Однако точка зрения Канта на априорный характер пространства оказалась поколебленной открытиями Лобачевского, Больяи, Римана, Гильберта, Эйнштейна. Стало ясно, что геометрия более не является наукой о свойствах одного единственного, именно реального пространства.

Ободренные этими открытиями формалисты предположили, что математические формализмы, как и логические истины, не являются абстракциями опыта и попытались вообще устранить всякое различие между логикой и математикой, доказать их полное единство. Ими двигало желание доказать непротиворечивость всей математики, избавить ее раз и навсегда от парадоксов. Но теоремы Гёделя о неполноте похоронили эту надежду окончательно. Всего лишь несколько математиков, именно Пуанкаре, Борель и Лебег, которых Брауэр называет своими прямыми предшественниками, попытались отстоять независимость некоторых базисных разделов математики от логики, хотя и признавали роль последней в математических доказательствах.

В целом положение дел в области обоснования математики, предшествовавшее возникновению интуиционизма, согласно Брауэру, выглядело так. Доинтуиционистская математика оказалась разделенной на автономную и неавтономную части. К автономной математике относились: элементарная теория чисел, принцип полной индукции, значительная часть алгебры и теории чисел. Надежность и непротиворечивость положений этой части математики не зависели от языка и доказательств. Неавтономная математика, чьи истины, как считал Брауэр, зависели от логики и языка, включала теорию континуума действительных чисел. Доказательство его непротиворечивости Брауэр считал поэтому самой неотложной задачей. «Что касается континуума, вопрос о его существовании, независимом от языка, был проигнорирован. Появились попытки обосновать континуум логическими средствами как множество действительных чисел с определенной на нем позитивной мерой, но без какого-либо доказательства его непротиворечивости»[91].

Для создания новой математики, считает Брауэр, объединяющей автономную и неавтономную части, доказательства ее незави-

[91] Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism. Cambridge, 1981. P. 2.

симости от опыта, языка и логики, обоснования внутреннего критерия достоверности всех ее истин, необходимо восстановить в правах идею Канта об *интуиции* времени как априорной форме чувственности, обосновывающей истинность арифметических истин. То, что оказалось невозможным в отношении обоснования геометрии, должно было стать истинным в отношении элементарной теории чисел и тем самым — в отношении всей математики. Программу, обосновывающую новую математику, Брауэр назвал (новым) интуиционизмом.

Собственно философская часть этой программы состоит из двух тезисов, названных Брауэром «двумя актами (принятия) интуиционизма». С их помощью он объясняет, почему математика должна быть автономной от языка и логики, и раскрывает смысл математического конструирования с интуиционистской точки зрения.

Первый акт интуиционизма требует «полного отделения математики от математического языка и, следовательно, от феномена языка как такового, что характерно для теоретической логики, осознания того, что интуиционистская математика в своей основе — независимая от языка деятельность ума, берущая свое начало в восприятии движения времени. Это восприятие времени можно описать как раздвоение жизненного момента на две качественно различные части, одна из которых открывает путь другой, но сохраняется только в памяти. Если рожденную таким образом двоичность лишить качества, она превратится в пустую форму общего субстрата для всех двоичностей (т. е. превратится в правило перехода от числа n к числу $n + 1$. — *В. С.*). И именно этот общий субстрат, эта общая форма представляет базисную интуицию математики»[92].

Математическая интуиция Брауэра — интуиция порождения натурального ряда чисел, непрерывного потока становления, который никогда не может завершиться. В другой работе Брауэр поясняет эту мысль следующим образом. «Эта интуиция, будучи базисной интуицией математики, создает не только числа один и два, но также все конечные порядковые числа, поскольку один из ее элементов можно мыслить как новое два в одном, причем этот

---

[92] Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism. P. 4.

процесс может повторяться неопределенно долго... Наконец, эта базисная интуиция, объединяющая вместе связанное и отдельное, непрерывное и дискретное, порождает интуицию линейного континуума, т. е. отношения 'между', которое нельзя исчерпать введением новых единиц и которое по этой причине никогда не может рассматриваться как простая совокупность единиц»[93].

Первоначальная интуиция обосновывает не только элементарную теорию чисел, но также и геометрию. «Таким образом, априорность времени не только обосновывает свойства арифметики как синтетических априорных суждений, но она делает то же самое и для свойств геометрии, и не только для элементарной геометрии двух и трех измерений, но и для неевклидовой геометрии и геометрии *n* измерений. Ибо со времени Декарта мы научились сводить все эти геометрии к арифметике посредством исчисления координат»[94].

Первоначальная интуиция Брауэра — выраженная на специфическом языке идея потенциальной бесконечности натурального ряда чисел. Она дает априорное обоснование принципа математической индукции и утверждает конструктивный характер математического знания. Согласно этой интуиции знать какой-либо объект, знать, что он существует, означает знать, как его построить.

Априорный характер первоначальной интуиции принципиально отличает созданные на ее основе математические конструкции от результатов как их логико-лингвистического выражения и осмысления, так и от чувственного восприятия систем знаков. В качестве общего инварианта, она предшествует чувственному восприятию знаков и их логическому или опытному смыслу как идеальный оригинал предшествует всем своим заведомо худшим копиям.

Против классической логики Брауэр формулирует следующие возражения. Во-первых, она предполагает, что независимо от человеческой мысли существует некая абсолютная истина, отдельные части которой выражаются предложениями, называемыми «истинными утверждениями». Но, считает он, существо-

[93] *Brouwer L. E. J.* Intuitionism and Formalism. P. 69.
[94] Ibid. P. 69–70.

вание такой истины представляет не более чем метафизическую гипотезу. Во-вторых, классическая логика признает законным существование общих лингвистических правил, разрешающих автоматическую дедукцию новых истин из старых. Так что, стартовав с ограниченного множества «очевидно» истинных утверждений, названных аксиомами, можно получать новые истины посредством одних только логических операций. То, что аксиомы могут передавать истину своим следствиям, этого Брауэр не отрицает. Проблема, по его мнению, заключается в том, что истинность самих аксиом устанавливается некоторым чуждым для математики путем. Значит, истинность следствий аксиом также сомнительна. В-третьих, используя термин «ложный» как «противоположность истинного», классическая логика признает, что благодаря так называемому «принципу исключенного третьего» каждое утверждение, в частности, о существовании, либо истинно, либо ложно независимо от того, знает ли кто-либо это на самом деле. Однако закон исключенного третьего действителен только для рассуждений о конечных областях объектов.

Итак, следует принципиально отличать математическую деятельность от ее логико-лингвистического выражения. Только активность, подчиняющаяся внутреннему опыту, способна создавать новые математические объекты. Без сомнения, математический язык позволяет выражать их и вступать в коммуникацию. Но он сам по себе никогда не способен создавать новые математические конструкции. Кроме того, он очень часто создает иллюзию математической достоверности, когда без внутреннего контроля начинает переносить выводы с конечных областей на бесконечные. «Допустим, в математическом языке, в котором формулируется некоторая интуиционистская операция, присутствует случайным образом иллюстрация одного из принципов классической логики. Зависит ли она каким-нибудь образом от языка, в котором формулируется эта математическая процедура?

Внимательный анализ позволяет дать следующий краткий ответ. Учитывая неизбежную неадекватность языка как средства описания и коммуникации, указанная иллюстрация подчиняется принципам противоречия и силлогизма. Но в отношении закона исключенного третьего, помимо нескольких особых случаев, ответ отрицательный, потому что этот принцип никак не может считаться в общем случае инструментом открытия новых математических истин»[95].

Язык и логика не способны обеспечить достоверность математических рассуждений в бесконечной области. Закон исключенного третьего, истинный в любой сколь угодно большой конечной области, бесполезен в бесконечной. Реальный предмет математики — бесконечное. А бесконечное не может быть оправдано никаким опытным или логико-лингвистическим способом. Поэтому ни сведение математики к логике, ни аксиоматизация математических теорий, ни финитная программа обоснования всей математики не годятся для ее обоснования. Бесплодие этих проектов объясняется просто — они не способны создавать математические объекты, истинные в бесконечных областях.

Возможность порождения математических объектов, истинных в любых, включая и бесконечные, областях, и вместе с этим возможность создания новой автономной математики указывает второй акт интуиционизма.

Второй акт интуиционизма требует считать законными только «два способа создания новых математических объектов: во-первых, в форме более или менее свободного порождения бесконечных последовательностей математических объектов из созданных ранее (так что для десятичных дробей, не имеющих ни одного точного значения, нет никакой гарантии, что эти значения когда-либо будут установлены); во-вторых, в форме математических обобщений, т. е. свойств, которыми, по предположению, обладают ранее построенные математические объекты и удовлетворяющих также условию, что если они выполняются для некоторого объекта, они также выполняются для всех 'равных' ему объектов»[96].

Только после того, полагает Брауэр, как математику станут считать конструктивной деятельностью, основанной на интуиции времени, которая хотя и может быть применена к внешнему миру, но ни по своему происхождению, ни по своим методам не зависит от него, а критерий истинности математического утверждения будет ограничен самой математической деятельностью, математика достигнет полной автономии и само-оправдания.

[95] Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism. P. 5–6.
[96] Ibid. P. 8.

Непосредственным следствием такого радикального изменения становится то, что для произвольного математического утверждения p допускавшиеся классической логикой две альтернативы, *истина* или *ложь*, заменяются следующими тремя:

- истинно то утверждение, которое доказано;
- ложно то утверждение, которое, как доказано, абсурдно (противоречиво);
- не истинно и не ложно то утверждение, истинность или абсурдность которого не доказаны, или неизвестен конечный алгоритм доказательства его истинности или ложности.

Случай, когда не доказаны ни истинность, ни абсурдность утверждения, но алгоритм такого доказательства известен, сводится, как очевидно, к первым двум случаям.

Отождествление интуиционистского существования с конструируемостью проводит водораздел между интуиционистской и классической теорией множеств. Например, в интуиционистской теории множеств выражение $a \in S$ означает, что a является элементом множества S, если a определимо независимо от S. Выражение $a \notin S$ означает, что для a невозможно быть элементом множества S, или что допущение $a \in S$ ведет к противоречию.

Если интуиционистское множество S есть подмножество другого интуиционистского множества T (каждый член S — член T), их разность $T - S$ равна множеству тех членов T, которые, возможно, не могут быть членами S. В классической теории объединение $T \cup (T - S)$ означает класс элементов, которые являются членами T или $T - S$, или обоих множеств, и результат объединения всегда равен T. С интуиционистской точки зрения, результат $T \cup (T - S)$ может быть и не равен T.

Интуиционистская математика

«В системе математики, — отмечает Вейль, — имеются два обнаженных пункта, в которых она, может быть, соприкасается со сферой непостижимого (бесконечного. — *В. С.*). Это именно принцип построения ряда натуральных чисел и понятие континуума. Все остальное: переход от натуральных чисел к отрицательным и дробным, так же как и введение мнимых и гиперкомплексных величин, представляет собою задачу формальной логики, не таящую в себе уже никаких трудностей и загадок»[97]. Таким образом, понять своеобразие интуиционистской математики означает понять особенности интерпретации интуиционистами натуральных чисел и континуума.

Интуиционистская математика, считает Гейтинг, «начинается после того, как выработаны понятия натуральных чисел и равенства между ними»[98]. Смысл натурального числа заключается в следующем: «В восприятии любого предмета мы представляем его себе как сущность, отвлекаясь от его частных свойств. Мы познаем также возможность неограниченного повторения этой сущности. Здесь-то и лежит источник понятия натурального числа»[99]. Число 0 из ряда натуральных чисел интуиционистами исключается. Натуральное число «легко понимается любым человеком, имеющим минимальное образование... универсально применимо в процессе счета... лежит в основании построения анализа»[100]. Аксиомы Пеано описывают свойства натуральных чисел, очевидные при «прямом рассмотрении». Следовательно, всякая аксиоматизация натуральных чисел есть нечто искусственное и излишнее.

Классическая теория множеств рассматривает ряд натуральных чисел N как законченную совокупность элементов, внутри которого задано некоторое отображение $n \to n'$, однозначно сопрягающее со всяким элементом n множества другой элемент n'. В результате множество всех натуральных чисел может быть отображено на неэквивалентное себе подмножество (например, на подмножество четных чисел), что доказывает его бесконечность. Но бесконечный ряд натуральных чисел, как и его различные также бесконечные подмножества, продолжают рассматриваться классической математикой по аналогии с конечными — как актуально существующие классы элементов. Это порождает многочисленные парадоксы и свидетельствует о неправомерности концепции актуальной бесконечности. Основанием отказа от понятия актуальной бесконечности и вызванной этим перестройки математики служат два акта интуи-

[97] *Вейль Г.* О философии математики. М.: КомКнига, 2005.
[98] *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965. С. 24.
[99] Там же. С. 22.
[100] Там же. С. 25.

ционизма, обосновывающих концепцию потенциальной, или становящейся, бесконечности.

Сущность натурального числа, с интуиционистской точки зрения, состоит исключительно в его отношении к последующему числу, т. е. в законе следования одного числа за другим, бесконечного порождения последовательности чисел. Ряд натуральных чисел, пишет Вейль, «можно получить из двуединства, исходя первоначально из нераздельного, затем расчленяя его на один элемент (единицу), остающийся и в дальнейшем единицей, и некоторый неразделенный остаток, потом снова расчленяя остаток на один элемент (2) и некоторый неразделенный остаток, и т. д. ... Здесь подлежит делению на две части не всякая часть, а только последний оставшийся на данной стадии процесса деления неразделенный остаток»[101]. В схематическом изображении этот процесс выглядит так (рис. 4.1).

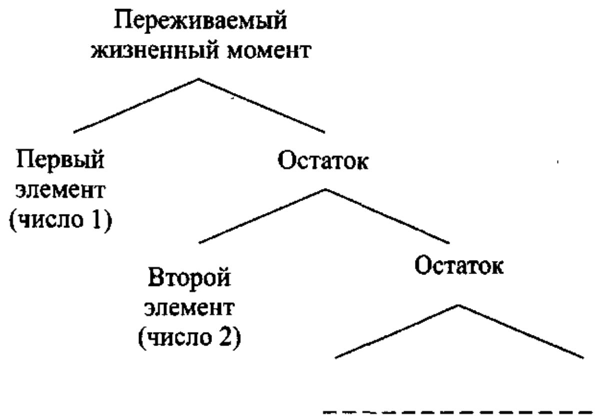


Рис. 4.1. Схема порождения ряда натуральных чисел согласно Вейлю

Ряд натуральных чисел начинается с 1 и может быть продолжен сколь угодно долго посредством последовательного конструирования из уже полученного числа непосредственно за ним следующего, причем в этом «движении вперед» никогда не встречается уже вошедшее в последовательность число. Кроме того, вся последовательность чисел никогда не может быть представлена как нечто за-

[101] *Вейль Г.* Указ. соч. С. 88.

конченное. Ее родовой признак — способность к порождению новых чисел, *их становление*, но не завершенность всего ряда чисел, *их бытие*. Средством, необходимым и достаточным для порождения натуральных чисел, его трансформации в *становящуюся последовательность*, является принцип полной индукции, т. е. закон, указывающий, что обозначает рассматриваемое свойство для 1 и как оно переносится с произвольного числа n на следующее за ним число $n + 1$.

Можно отметить четыре важных следствия интуиционистской интерпретации натуральных чисел.

Во-первых, принцип полной индукции как принцип порождения достаточен и необходим для доказательства любого общего утверждения о свойствах чисел. Например, справедливость операции сложения для любых натуральных чисел доказывается следующим образом. Пусть m и n — произвольные натуральные числа. Пусть апостроф «$'$», поставленный над любым из них, обозначает непосредственно следующее за ним число: $m' = m + 1$, $n' = n + 1$. Тогда сложение натуральных чисел $m + n$ двух натуральных чисел m и n определяется следующими двумя равенствами:

(1) $m + 1 = m'$;

(2) $m + n' = (m + n)'$.

Результат умножения mn двух натуральных чисел m и n можно определить посредством равенств:

(3) $1m = m$;

(4) $(n + 1)m = mn + m$.

Операции вычитания и деления определяются как обратные по отношению к сложению и умножению.

Во-вторых, принцип полной индукции «охраняет математику от опасности превратиться в чудовищную тавтологию и придает ее положениям синтетический, а не аналитический характер»[102]. Благодаря этому принципу математика предстает как исключительно конструктивная деятельность ума, деятельность по созданию новых объектов из уже известных или заданных. Этим свойством математика принципиально отличается от логического вывода истин из

[102] *Вейль Г.* Указ. соч. С. 88.

аксиом, в которых имплицитно содержится все то, что дедуцируется из них в качестве следствий.

В-третьих, принцип полной индукции делает существенным понятие *порядка* последовательности натуральных чисел. Натуральное число есть математический объект, сущность которого определяется местом, занимаемым в последовательности. Следовательно, натуральное число есть нечто относительное, а не абсолютное. По этой причине интуиционисты считают первичным не количественное, а порядковое число.

В-четвертых, при такой интерпретации натуральные числа — это идеальные сущности, не имеющие независимого от ума существования. Их бытие «исчерпывается функциональной ролью, а также значением существующих между ними отношений большего и меньшего»[103].

В целом ряд натуральных чисел представляет бесконечность свободно выбираемых (конструируемых) возможностей; всегда незавершенную и не исчерпанную последовательность умственных построений; основание всех остальных разделов математики. «Ряд натуральных чисел и содержащаяся в нем интуиция итерации составляет последнее основание математического мышления. В нашем принципе итерации находит свое выражение его (ряда) принципиальное выражение для построения всего здания математики»[104]. Ряд натуральных чисел подчиняется только принципу полной индукции и не нуждается ни в каких логических формализмах для конструирования своих объектов. Интуиционистски истолкованный ряд натуральных чисел независим от каких-либо логических допущений.

Интуиционистская концепция континуума представляет распространение идеи свободных актов выбора на множество действительных чисел[105]. Главная проблема для Брауэра заключалась в том, чтобы совместить идею свободно становящейся последовательности, каждый элемент которой подчиняется определенному правилу, с допущением непрерывности континуума, т. е. невозможностью

[103] *Вейль Г.* Указ. соч. С. 63.

[104] Там же. С. 98.

[105] *Brouwer L. E. J.* On the domains of definition of functions // From Frege to Godel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Cambridge (Mass.), 1967. P. 446–463.

предсказать, какое число в последовательности будет следующим. Но Брауэр сумел решить эту проблему, введя понятие последовательности выбора (свободно становящейся последовательности) и построив с его помощью особый тип множества (брауэровское множество, называемое также потоком).

Брауэровское множество есть дерево выборов такое, что «каждый из свободно повторяемых выборов натуральных чисел либо порождает определенный член ряда, продолжая или заканчивая весь процесс, либо делает его недопустимым, уничтожая полученный результат; после $n - 1$ допустимых выборов для каждого $n > 1$ можно точно установить по крайней мере одно натуральное число в качестве n-го члена последовательности, которое делает ее допустимой. Каждая последовательность результатов выборов, полученных таким образом, называется *элементом данного множества*»[106].

Смысл приведенного определения станет более понятным, если ввести дополнительные разъяснения.

Назовем последовательность выборов натуральных чисел *допустимой*, если она удовлетворяет некоторому условию, позволяющему эффективно находить любой член последовательности.

Допустимая последовательность является членом брауэровского множества, если:

- Для каждой конечной последовательности натуральных чисел можно определить, допустима она или нет.
- Если последовательность $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}>$ допустима, то также допустима и последовательность $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n>$.
- Можно установить допустимую последовательность длиной 1, т. е. $<a_1>$.
- Если последовательность $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n>$ допустима, либо можно найти натуральное число k такое, что последовательность $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, k>$ допустима, либо такого числа не существует (что равносильно окончанию процесса выбора).

Припишем определенное рациональное число конечной последовательности, которая допустима согласно указанным условиям. Пусть дана последовательность натуральных чисел $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n>$ такая,

[106] *Brouwer L. E. J.* On the domains of definition of functions. P. 453.

что для каждого n она допустима. Тогда последовательность рациональных чисел вида $r_1 = (\langle a_1 \rangle)$, $r_2 = (\langle a_1, a_2 \rangle)$, $r_3 = (\langle a_1, a_2, a_3 \rangle)$, ..., т. е. последовательность $\langle r_1, r_2, r_3, \ldots \rangle$, представляет *элемент* брауэровского множества.

Брауэровское множество представляет интуиционистский континуум, если и только если каждый его элемент является последовательностью рациональных чисел $\langle r_1, r_2, r_3, \ldots \rangle$, удовлетворяющей условию $|(r_{an} - r_{an+1})| < 1/2^n$.

Начальная часть брауэровского множества, порождающего числовой континуум [0, 1], приведена на рис. 4.2.

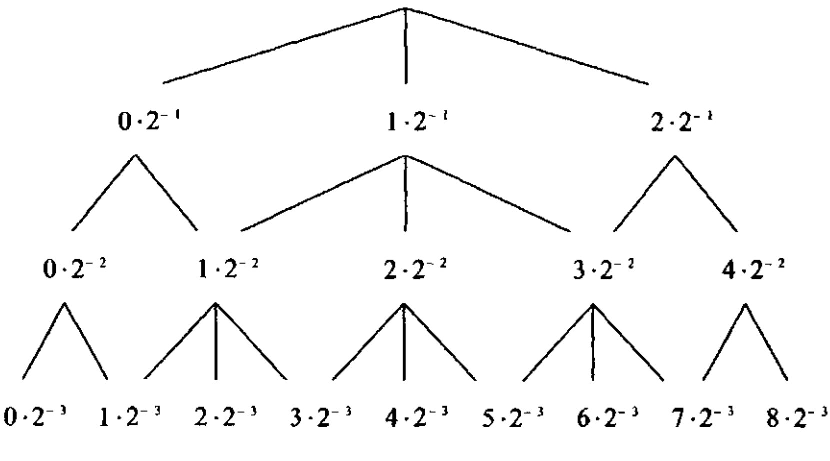


Рис. 4.2. Начальная часть брауэровского множества

Каждая ветвь воспроизведенного на рис. 4.2 брауэровского множества задает некоторое действительное число. В этом множестве потенциально представлены все действительные числа. Для их задания необходимы только продолжающиеся сколь угодно последовательности рациональных чисел. При этом брауэровское множество действительных чисел не является актуально заданным, оно — создаваемое, но никогда не завершаемое множество выборов чисел, «среда свободного становления».

Поскольку в процессе выбора в каждый момент времени известен лишь некоторый начальный отрезок последовательности и никакой информации о ее дальнейшем развитии по условию свободного выбора нет, только начальные отрезки могут использоваться для решения, оставляет ли новое натуральное число начатую последовательность допустимой или нет. Это утверждение известно как *принцип непрерывности Брауэра*.

Если каждой последовательности выбора брауэровского множества $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n>$ сопоставлено число r_n, то значение последнего зависит только от начального сегмента данной последовательности $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}>$, т. е. все последовательности выбора, стартующие с этого же сегмента, совпадают с $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n>$.

Согласно принципу непрерывности, каждая функция, определенная всюду на замкнутом интервале, равномерно непрерывна. Он лежит в основе доказательства *главной теоремы Брауэра* о конечных множествах, фан-теоремы, (брауэровское множество конечно, если для каждого *n* можно составить список всех последовательностей длины *n*)[107].

Если каждой последовательности выбора конечного брауэровского множества $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n>$ сопоставлено число r_n, то существует число r_m такое, что для всех $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n>$ число r_n определяется на основании первых m значений последовательности $<a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, \ldots, a_n>$.

Интуиционистское истолкование континуума действительных чисел радикально несовместимо с основами классического анализа.

Во-первых, оно исключает допущение актуальной бесконечности и вводит допущение потенциальной бесконечности. Согласно Вейлю, несмотря на все достижения теоретико-множественного обоснования анализа, для него характерно «ничем не ограниченное применение терминов 'все' и 'существует' не только к натуральным

---

[107] *Beth E. W.* The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science. Amsterdam, 1959. P. 430.

числам, но также и к местам в континууме, т. е. к возможным последовательностям или множествам натуральных чисел. В этом и заключается сущность теории множеств: она рассматривает в качестве замкнутой совокупности существующих самих по себе предметов не только числовой ряд, но и совокупность его подмножеств. Поэтому она целиком базируется на почве актуально бесконечного»[108].

Во-вторых, новая интерпретация континуума влечет новую интерпретацию логических кванторов. «[Экзистенциальное] высказывание $(Ex)Ax$ воспринимается нами как неполное сообщение о (потенциальной) возможности построения конкретного действительного числа со свойством A, в то время как общее высказывание $(x)Ax$ выражает некоторое свойство потока становящихся последовательностей (элементов брауэровского множества. — *В. С.*). Таким образом, в отличие от традиционной ситуации, кванторы существования и общности имеют совершенно различные области интерпретации, что лишает силы (а порою и смысла) многие законы классической логики, в частности, принципиальную для трансфинитных случаев закона исключенного третьего эквивалентность $\neg(x)Ax \equiv \neg(Ex)\ \neg Ax$»[109].

В-третьих, принцип непрерывности Бауэра противоречит классическому определению последовательности и проводит, по мнению многих аналитиков, непреодолимую границу между интуиционистской и классической математикой.

Центральным понятием интуиционистской математики является брауэровское множество. Последнее представляет математическую модель потенциальной бесконечности — никогда не завершенное, но способное к непрерывному конструированию новых элементов дерево. Последовательно конструируемый ряд натуральных чисел — простейшая модель потенциальной бесконечности, континуум действительных чисел — самая полная. Интуиционистская математика предстает наукой о потенциально бесконечных и конструктивно создаваемых умственных конструкциях.

---

[108] *Вейль Г.* Указ. соч. С. 73.

[109] *Кушнер Б. А.* Принцип бар-индукции и теория континуума у Брауэра // Закономерности развития современной математики. М., 1987. С. 240–241.

Интуиционистская логика (высказываний)

Утверждая независимость математики от языка и логики, ее самодостаточность, принцип полной индукции в качестве единственного метода решения всех математических проблем, интуиционисты тем самым давали понять, что проблема формализации доказательств им безразлична. Однако дискуссии интуиционистов с логицистами и формалистами по поводу законности закона исключенного третьего в конце концов вынудили их проявить интерес и к логической проблематике. В результате была создана так называемая интуиционистская логика высказываний и предикатов, отличающаяся от классической[110].

Сравнение классической логики высказываний с интуиционистской поможет понять их отличие друг от друга.

Классическая логика создавалась в предположении, что ее правила имеют универсальное значение, ее истины общезначимы для всех людей, для любых наук. Наоборот, интуиционисты рассматривают свою логику как *часть математики*, не имеющую за ее пределами никакого операционального значения. Логические правила — умственные конструкции, создаваемые для решения исключительно математических проблем.

Классическая логика высказываний основана на допущении, что истинные и доказуемые утверждения составляют один и тот же класс: всякая истина доказуема и каждое доказуемое утверждение истинно. Интуиционисты отрицают подобную эквивалентность и признают справедливым лишь то, что всякое доказуемое утверждение истинно, но обратное считают в общем неверным. Это означает, что для интуиционистов класс доказуемых истин включен в класс истин, но не равен ему.

Классическая логика оперирует понятиями «истина» и «ложь». Интуиционистская логика заменяет их понятиями «доказуемо» и «противоречиво (абсурдно)». Утверждение «высказывание p истинно» означает «высказывание p истинно, потому что доказано». Утверждение «высказывание p ложно» означает «высказывание p ложно, потому что доказано, что p невозможно, т. е. что из p следует противоречие (абсурд)».

[110] См.: *Гейтинг А.* Интуиционизм. С. 122–142.

Для классической логики значение любого высказывания определяется условиями, при которых оно истинно. Для интуиционистской логики значение любого высказывания определяется условиями, при которых оно может быть доказано.

Для классической логики понятия истины и лжи безличны, не имеют никакой субъективной составляющей. Истинное или ложное высказывание является таковым для всех без исключения. В интуиционистской логике каждое доказанное высказывание — *это отчет математика об акте личного умственного конструирования в определенное время.* Например, вместо «высказывание p истинно» интуиционисты говорят «во время t в моем уме существует (построена) конструкция K, доказывающая p». При этом связь умственного построения с субъектом существенна. Интуиционист не может сказать «существует построение K, независимое от кого бы то ни было». Для него это обещание, не подкрепленное личным свидетельством и лишенное доказательности. Для интуициониста имеют смысл лишь утверждения «*в моем уме* существует конструкция K».

Классическая логика основана на допущении, что значение истинности сложного высказывания представляет *функцию истинности* значений истинности составляющих его простых высказываний. В этом смысле она представляет логику функций истинности. Каждое высказывание классической логики либо истинно, либо ложно. Оно истинно (ложно), потому что ложно (истинно) ему противоречащее. Но интуиционистская логика не является логикой функций истинности. Она допускает высказывания, значение истинности которых не определяется значением истинности их логических атомов.

Последнее отличие становится более понятным, если сравнить интуиционистскую интерпретацию основных логических связок («не», «и», «или», «если..., то») с классической. В классической логике эти связки рассматриваются как условия истинности высказываний; в интуиционистской логике они считаются условиями доказуемости высказываний. Для краткости далее вместо «в моем уме существует конструкция K» будем говорить «существует конструкция K».

Высказывание $\neg p$, читается как «не-p» и называется логическим отрицанием, доказуемо тогда, когда существует конструкция K, доказывающая, что не существует доказательства p (доказывающая, что из существования p выводимо противоречие). В классической логике отрицание высказывания представляет функцию истинности противоречащего ему высказывания: $\neg p$ истинно, если и только если p ложно. В интуиционистской логике доказательство $\neg p$ требует специального доказательства невозможности p. Без такого доказательства интуиционист в общем (бесконечном) случае не может сделать вывод об истинности высказывания $\neg p$. Если для классической логики из ложности высказывания p следует обязательная истинность высказывания $\neg p$, то для интуиционистской логики это не является аксиомой: p может быть ложно, а $\neg p$ неопределенно. По этой причине логическое отрицание не является для интуициониста функцией истинности. К этому следует добавить, что поскольку определение логического отрицания производно от базисного для них понятия доказательства, то некоторые интуиционисты считают операцию отрицания вообще избыточной и полагают, что интуиционистская логика может быть построена без нее.

Высказывание (p & q), читается как «p и q» и называется конъюнкцией высказываний p и q, доказуемо тогда, когда существует конструкция K, доказывающая как p, так и q. В классическом смысле конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все составляющие ее высказывания (конъюнкты). Для интуициониста этого недостаточно. Даже если все конъюнкты истинны, но не построено доказательство их совместной истинности, вся конъюнкция не может считаться доказанным утверждением. Значит, и конъюнкция в общем (бесконечном) случае для интуициониста не является функцией истинности.

Высказывание ($p \vee q$), читается как «p или q» и называется дизъюнкцией высказываний p и q, доказуемо тогда, когда существует конструкция K, доказывающая p или доказывающая q. В классической логике дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинным является хотя бы одно составляющее ее высказывание (дизъюнкт). Для интуициониста этого недостаточно. Даже если найдется один истинный дизъюнкт, но не существует доказательства его истинности, дизъюнкция не считается доказанным утверждением. Следовательно, и дизъюнкция в общем (бесконечном) случае для интуициониста не является функцией истинности.

Высказывание $p \supset q$, читается как «если p, то q» и называется импликацией высказываний q из высказывания p, доказуемо тогда, когда существует конструкция K, которая будучи применена к доказательству p, позволяет доказать q. В классическом смысле импликация $p \supset q$ истинна тогда и только тогда, когда ложно высказывание p или истинно высказывание q. В интуиционистском смысле этого недостаточно. Даже если высказывания p и q истинны, но отсутствует конструкция K, позволяющая из доказательства p вывести доказательство q, вся импликация не может считаться доказанным утверждением. Значит, импликация в общем (бесконечном) случае для интуициониста также не является функцией истинности.

Из сказанного следует, что некоторые правила классической логики не выполняются в интуиционистской логике. Самым известным из них является закон исключенного третьего $p \vee \neg p$. В классической логике этот закон принимается без каких-либо ограничений. Интуиционисты также принимают данный закон, но только для конечных последовательностей объектов. Доказательство высказывания p или доказательство невозможности p требует конечного перебора и поэтому всегда выполнимо. Но этого нельзя сказать о бесконечном универсуме. Никакой перебор элементов здесь невозможен и все доказательства, обладает ли некоторое число данным свойством или нет, становятся бессмысленными. Допустим, требуется доказать, обладает ли натуральное число x свойством A, т. е. истинно ли высказывание «существует число x, обладающее свойством A». Согласно закону исключенного третьего, его альтернативой будет высказывание «ни одно из чисел x свойством A не обладает». Если задана конечная последовательность натуральных чисел, то поставленная проблема решается однозначно посредством последовательной проверки ее элементов. В этом случае либо по крайней мере одно из таких чисел будет обнаружено, либо будет доказано, что все числа из этой последовательности свойством A не обладают. Но в бесконечной области такая процедура неосуществима, потому что нельзя перебрать все числа натурального ряда, чтобы обнаружить нужное. Но также нельзя доказать, что ни одно из чисел свойством A не обладает, так как для этого требуется опровержение бесконечного числа альтернатив. *Иными словами, согласно интуиционистам, закон исключенного*

третьего в бесконечной области объектов — случай неразрешимой проблемы.

Брауэр был первым, кто обратил внимание на то, что закон исключенного третьего — специальный случай проблемы разрешимости. Это и стало решающим мотивом, побудившим Брауэра выступить против закона исключенного третьего[111]. В 1900 г. Гильберт сформулировал *аксиому разрешимости каждой математической проблемы*. В это время Гильберт предполагал, что выражает общее мнение всех математиков. Позже он признал, что эта проблема требует дальнейшего исследования, и переформулировал ее в проблему разрешимости, независимую от каких-либо споров о природе математики.

Ниже приводится реконструкция невыполнимости закона исключенного третьего в интуиционистской логике. В нем используется правило R_D, согласно которому дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда ложны все ее дизъюнкты (альтернативы). Идея становящейся последовательности выборов формализуется посредством индексации значений истинности высказываний их истинностью в определенном возможном мире w. Пусть w_1 обозначает мир, в котором мы реально существуем (действительный мир).

Реконструкция интуиционистского доказательства невыполнимости закона исключенного третьего в бесконечной области объектов

1. $p \vee \neg p$ ложно в мире w_1 (допущение).
2. p ложно в мире w_1 (из (1), R_D).
3. $\neg p$ ложно в мире w_1 (из (1), R_D).
4. p, возможно, истинно в мире w_n, $n \neq 1$ (из (3)).
5. Вторая и четвертая строчки не образуют противоречия. Учитывая, что, кроме нашего мира, возможно существование бесконечного множества других миров и тем самым последовательностей выборов, ***ложность высказывания p в мире w_1 не исключает его возможной истинности в другом мире w_n***. Но если допущение ложности закона исключенного третьего при интуиционистском истолковании не приводит к противоречию, он не может быть законом интуиционистской логики.

---

[111] *Beth E. W.* Mathematical Thought. An Introduction to the Philosophy of Mathematics. Dordrecht, 1965. P. 77–80.

Аргументы интуиционистов (и, добавим, конструктивистов) против закона исключенного третьего будут более понятны на следующем простом примере. Допустим, имеется общее высказывание «для всех x выполняется свойство A», формально $(x)Ax$. Это суждение в конечной области из n объектов эквивалентно конъюнкции частных суждений следующего вида: $(Ax_1 \mathbin{\&} Ax_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} Ax_n)$. Построим отрицание этого общего суждения: $\neg(Ax_1 \mathbin{\&} Ax_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} Ax_n)$. По правилам де Моргана отрицание рассматриваемого суждения эквивалентно дизъюнкции следующего вида: $(\neg Ax_1 \vee \neg Ax_2 \vee \ldots \vee \neg Ax_n)$. Каждый дизъюнкт $\neg Ax_n$, символизирующий объект x_n со свойством $\neg A$, представляет противоречащий пример (контрпример) общего суждения $(x)Ax$. Но какой именно? Классические математики и логики отвечают, что это не имеет особого значения. Достаточно того, что *он просто существует*. Интуиционисты считают это недостаточным: вместо утверждения существования необходимо указать, *какой конкретно дизъюнкт $\neg Ax_n$ является контрпримером*. Для этого в конечной области достаточно перебрать все объекты и найти тот, который опровергает общее суждение $(x)Ax$. Поскольку это возможно принципиально, закон исключенного третьего в форме «истинно либо суждение $(x)Ax$, либо суждение $(Ex)\neg Ax_n$» для конечной области объектов интуиционистами признается общезначимым.

Допустим теперь, область исследуемых объектов бесконечна. Тогда конъюнкция $(Ax_1 \mathbin{\&} Ax_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} Ax_n)$ и дизъюнкция $(\neg Ax_1 \vee \neg Ax_2 \vee \ldots \vee \neg Ax_n)$ будут содержать бесконечное число членов. Какой именно дизъюнкт в бесконечной дизъюнкции будет представлять контрпример? В бесконечной области объектов ответ на этот вопрос для интуиционистов принципиально бессмысленен. Но тогда становится бессмысленным и рассуждение согласно закону исключенного третьего.

Сказанное означает, что в основе отрицания интуиционистами (конструктивистами) закона исключенного третьего лежит следующая проблема. Если классические математики считают, что отрицание общего суждения всегда (в любой области объектов) влечет существование контрпримера и поэтому альтернатива между общим высказыванием и его отрицанием, т. е. частным суждением, законна, интуиционисты (конструктивисты) признают это справедливым только в конечной области.

Конструктивная математика Маркова и Бишопа

Сейчас, когда гигантская работа, проделанная и самим Кантором, и рядом других работавших вслед за ним выдающихся математических мыслителей, таких как Л. Э. Брауэр, Д. Гильберт и А. А. Марков, отошла в прошлое и результаты ее стали всеобщим достоянием, нам все более естественной начинает казаться та — теперь уже действительно простая — мысль, что подобно всякому другому сложно устроенному «творению ума и рук человеческих», математика — для целесообразного, правильного и естественного ее функционирования — должна быть разумно, по детально продуманному плану «возведена» на достаточно прочном «фундаменте» с использованием надлежаще подобранного «строительного материала».

Н. Нагорный [112]

Классические математики считают базисным для построения всей математики понятие множества. Интуиционисты — понятие свободно становящейся последовательности. В 40-е гг. XX в. возникло новое направление в обосновании математики, которое признало понятие свободно становящейся последовательности туманным, основанным на субъективистски истолковываемом понятии интуиции, и заменило его понятием алгорифма. Это направление конструктивной математики возглавил отечественный ученый — А. А. Марков (1903–1979). На становление конструктивизма Маркова определенное влияние оказала работа А. Н. Колмогорова, посвященная переинтерпретации интуиционистской логики как исчисления задач (проблем)[113]. Колмогоров показал, что каждая задача, выводимая из интуиционистского исчисления высказываний, имеет решение. Значит, интуиционистское исчисление задач можно было интерпретировать как исчисление *разрешимых* проблем.

---

[112] *Нагорный Н.* Вместо предисловия ко второму изданию // Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов. М., 1996.

[113] *Колмогоров А. Н.* О принципе tertium non datur // Математический сборник. 1925. Т. 32. № 4. С. 646–667.

Конструктивная математика Маркова представляет «ветвь интуиционистской математики, для которой характерно исследование конструктивных объектов алгорифмическими методами»[114]. Понятия конструктивного объекта и алгорифма являются в этом определении решающими.

Конструктивный объект — результат осуществления конструктивного процесса. Простым примером конструктивного процесса является «построение ряда вертикальных черточек

||||||

путем писания одной такой черточки, приписывания к ней справа ее копии — другой черточки, приписывания к полученным черточкам еще одной черточки, затем еще одной черточки, затем еще одной и еще одной»[115]. Результатом конструктивного процесса является конструктивный объект, изображенный пятью строками выше.

Под алфавитом в конструктивной математике Маркова понимается любой конечный набор четко отличимых друг от друга графических символов (букв), а под словом в данном алфавите — произвольная конечная цепочка букв этого алфавита, включая пустое слово (не содержащее ни одного знака и эквивалентное операции стирания знака). Более точно, конструктивными математическими объектами называются слова в алфавите **А**, удовлетворяющие следующим порождающим правилам[116]:

(а) если α — буква алфавита **А**, то α представляет собой слово в алфавите **А**;

(б) если P — слово в алфавите **А** и α — буква алфавита **А**, то результат приписывания буквы α справа к слову P является словом в алфавите **А**;

(в) пустое слово Λ является словом в алфавите **А**.

Каждое слово — результат некоторого построения, к которому может быть применено новое построение, а к полученному ре-

[114] *Драгалин А. Г.* Конструктивная модель интуиционистского анализа // Философия и логика. М., 1974. С. 59.

[115] *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Указ. соч. С. 1.

[116] Там же. С. 5.

зультату — следующее построение и т. д. Поэтому конструктивный математический объект — это не только актуально существующие слова алфавита, но и все потенциальные результаты их преобразований.

Понятие алгорифма (такой транскрипцией слова «алгоритм» Марков отделял свою теорию от других теорий алгоритмов) представляет дальнейшее уточнение понятия эффективного метода, вычислимой (рекурсивной) функции. Алгорифм создается для решения какого-нибудь класса однотипных задач (проблем). Абстракция потенциальной осуществимости — идейная основа теории алгорифмов. «Осуществляя конструктивные процессы, мы часто наталкиваемся на препятствия, связанные с нехваткой времени, места и материала... *Тем не менее мы в дальнейшем не будем считаться с этими препятствиями в наших рассуждениях о конструктивных объектах. Мы будем рассуждать так, как если бы этих препятствий не существовало, т. е. как если бы в каждый момент в нашем распоряжении были и пространство, и время, и материал, потребные для осуществления очередного шага рассматриваемого конструктивного процесса.* Поступая так, мы будем отвлекаться от ограниченности наших возможностей в пространстве, времени и материале. Это отвлечение принято называть *абстракцией потенциальной осуществимости*»[117]. Теория алгорифмов Маркова — модель математики, реализующей данную абстракцию.

Все конструктивисты исходят из того, что вычислительные процессы в математике осуществляются на основе определенной символики — слов некоторого искусственного алфавита А — и представляют преобразования одних буквенных комплексов в другие в соответствии с точными предписаниями, называемыми алгорифмами. «*Алгорифм* есть общепонятное предписание, однозначно определяющее ход некоторых конструктивных процессов»[118].

Алгорифмы должны соответствовать следующим общим критериям. Во-первых, они обязаны быть определенными, т. е. точными и понятными для всех людей или автоматов, которые их

[117] *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Указ. соч. С. 10–11.
[118] Там же. С. 109.

исполняют, предписаниями. В таких предписаниях каждый новый шаг однозначно (с точностью до одинаковости получаемых состояний) детерминируется предшествующим ему шагом. Во-вторых, они должны допускать применение для всего класса проблем, однотипных с решаемой. В-третьих, всякий алгорифм должен быть результативным — заканчиваться порождением некоторого слова.

Всякий алгорифм строится по определенной схеме, состоящей из детерминированной последовательности дискретных (прерывистых) шагов, называемых подстановками, на каждом из которых получается новое слово в алфавите **А**: $P_1 \to Q_1$, $P_2 \to Q_2$, ..., где P_i, Q_i — слова, построенные из букв алфавита **А**. Допустим, дана подстановка *СМ* $\to$ *ГР*. Если эту подстановку применить к слову *СМОГ*, возникнет слово *ГРОГ*. Иными словами, алгорифм — это предписание, позволяющее осуществить детерминированный процесс переработки слов.

Каждая формула в конструктивной математике Маркова символизируется в виде упорядоченной пары (U, V) слов в алфавите **А**. Слово U называется левой частью этой формулы, а V — ее правой частью. Среди формул некоторые выделяются в качестве заключительных. В схеме алгорифма заключительная формула записывается в виде $U \to \bullet V$, а промежуточная — в виде $U \to V$. Когда процесс заканчивается, то это называется применением данного алгорифма к слову U, взятому за исходное. Результатом применения алгорифма к слову U является слово Q, которое получается на последнем шаге начатого нами процесса.

Алгорифм называется *нормальным*, если он представляет стандартное предписание, задаваемое *схемой подстановок* и определяющее процесс последовательного (шаг за шагом) преобразования одного конструктивного объекта в другой конструктивный объект. Формально нормальный алгорифм **Σ** задается тремя объектами: алфавитом **А**, схемой **Z**, состоящей из некоторого множества формул подстановок, и технического трехбуквенного алфавита ($\alpha\beta\gamma$), не входящего в алфавит **А** (и выполняющего функцию «знаков препинания» для отделения друг от друга формул подстановок; знак γ отделяет друг от друга формулы подстановок, знаки α и β — левые части формул от правых, указывая одновременно на тип формулы подстановки: α у простых формул, β — у заключительных). Применить нормальный алгорифм Σ к слову P означает применить к P схему алгорифма $\mathbf{Z}$.

Например, схема

$$\gamma a\alpha b a\gamma a c\alpha c a\gamma a\beta\gamma a a\gamma$$

в алфавите abc состоит из четырех формул подстановок

$$ab\alpha ba,\ ac\alpha ca,\ a\beta,\ aa,$$

которые могут быть также представлены следующим образом:

$$ab \to ba;$$
$$ac \to ca;$$
$$a \to\cdot\bullet;$$
$$\to a.$$

Нормальный алгорифм Σ представляет предписание по построению, начиная с произвольного слова P в алфавите $\mathbf{A}$, последовательности слов P_i согласно следующему правилу. Выберем слово P в качестве первого члена P_0. Пусть для некоторого $i > 0$ слово P_i построено, и процесс построения нужной последовательности слов еще не завершился. Если в схеме нормального алгорифма Σ нет формул, левые части которых входили бы в P_i, то P_{i+1} полагают равным P_i, и процесс построения последовательности на этом заканчивается. Если же в схеме Σ имеются формулы с левыми частями, входящими в P_i, то в качестве P_{i+1} берется результат подстановки правой части первой из таких формул вместо первого вхождения ее левой части в слово P_i; при этом процесс построения последовательности считается завершившимся, если примененная на этом шаге формула подстановки была заключительной, и продолжающимся в противном случае. Если процесс построения упомянутой последовательности обрывается, то говорят, что рассматриваемый нормальный алгорифм Σ применим к слову P. Последний член Q этой последовательности считается результатом применения нормального алгорифма Σ к слову P и обозначается символом $\Sigma(P)$. При этом говорят, что Σ перерабатывает P в Q, и пишут $\Sigma(P) = Q$.

Очевидно, что если принимается абстракция потенциальной осуществимости, то процесс построения может продолжаться сколь угодно долго. И относительно его результата всегда можно с уверенностью сказать: процесс завершен (нужный объект построен) или процесс не завершен (нужный объект еще не построен). Для тех случаев, когда процесс построения не может быть завершен в конечное время, конструктивисты принимают следующее допущение (*принцип Маркова*)[119]:

Если предложение о неограниченной продолжаемости процесса применения алгорифма Σ к слову *P* опровергнуто приведением к нелепости, то Σ применим к *P*.

Иными словами, если процесс применения алгорифма к некоторому слову не является безгранично применимым, то алгорифм применим к этому слову. Откуда следует, что данный объект является конструктивным. Принцип Маркова радикально отличает конструктивную логику от интуиционистской, так как вводит косвенный способ доказательства утверждения существования. Это не соответствует канонам интуиционистской логики, в которой позволяется доказывать косвенным способом только отрицания суждений существования. Оправдывая данный принцип, Марков и Нагорный пишут: «Мы не видим разумных оснований отвергать этот способ рассуждения, так как никакого выхода за рамки конструктивного направления при этом не происходит: абстракция актуальной бесконечности не применяется, существование продолжает пониматься как потенциальная осуществимость построения. Если мы утверждаем на основании доказанной невозможности неограниченной продолжаемости детерминированного процесса, что этот процесс закончится, то при этом дается совершенно определенный способ построения: продолжать процесс до его завершения. То обстоятельство, что при этом число шагов процесса может не быть ‘заранее’ ограниченным, ничего здесь по существу не меняет. К тому же требование, чтобы это число было заранее ограниченным, едва ли может быть точно и объективно сформулировано»[120].

Марков формулирует принцип нормализации, связывающий теорию нормальных алгорифмов с известными результатами Гёде-

---

[119] *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Указ. соч. С. 420–421.
[120] Там же. С. 421.

ля[121], Клини[122], Поста[123], Тьюринга[124] и Чёрча[125]. Алгорифм, применяемый к словам и называемый вербальным, обладает большей степенью общности, чем нормальный алгорифм. Встает вопрос: всякий ли вербальный алгоритм нормализуем, т. е. выразим в виде нормального алгорифма? Утвердительный ответ на этот вопрос дает принцип нормализации[126]:

Всякий вербальный алгорифм в алфавите А вполне эквивалентен относительно А некоторому нормальному алгорифму над А (всякий вербальный алгорифм нормализуем).

Марков и Нагорный отмечают, что принцип нормализации «представляет собой вариант тезиса Чёрча, относящийся к нормальным алгорифмам»[127]. Тезис Чёрча относится к так называемым арифметическим функциям, для вычисления значений которых имеются какие-либо алгоритмы и которые принято называть вычислимыми. Буквально он гласит: «...Для каждой функции положительных чисел, которая эффективно вычислима в только что определенном смысле (т. е. является рекурсивной функцией. — *В. С.*), существует алгоритм вычисления ее значений. Обратно, при этом же определении эффективной вычислимости верно, что каждая функция, алгоритм вычисления значений которой известен, эффективно вычислима»[128].

Значение принципа нормализации состоит в следующем. После того как в 30-е гг. XX в. было разработано множество специальных видов алгоритмов, «для каждого из этих видов возникла уверен-

[121] *Gödel K.* On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems // Collected Works. Vol. 1. Oxford, 1986. P. 145–195 (текст статьи приводится параллельно на немецком и английском языках).

[122] *Kleene S. C.* General Recursive Functions on Natural Numbers // The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions. N. Y., 1965. P. 237–252.

[123] *Post E. L.* Finite Combinatory Processes // The Undecidable. N. Y., 1965. P. 289–291.

[124] *Turing A.* On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem // The Undecidable. N. Y., 1965. P. 116–151.

[125] *Church A.* An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory // The Undecidable. N. Y., 1965. P. 89–107.

[126] *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Указ. соч. С. 115.

[127] Там же. С. 117.

[128] *Church A.* Op. cit. P. 100.

ность в том, что он с точностью до эквивалентности исчерпывает *все* алгорифмы. Иначе говоря, математики прониклись убеждением в том, что *всякий* алгорифм эквивалентен некоторому алгорифму данного вида. Эта идея стандартизации алгорифмов лежит в основе их современной теории. Вскоре после того, как были выработаны первые стандартные понятия алгорифма, удалось установить, что все предложенные стандартизации в определенном точном смысле слова равносильны друг другу, и когда в дальнейшем были предложены некоторые новые стандартизации, они также оказались равносильными ранее определенным. Поэтому при построении общей теории алгорифмов в конечном счете оказывается безразличным, какой именно их стандартизацией пользоваться. Мы будем использовать наиболее привычные нам 'нормальные алгорифмы'»[129].

Слова в заданном алфавите определяются как возможные результаты осуществления процессов построения. Поэтому суждение классической математики вида «Существует слово, удовлетворяющее условию ϕ» признается конструктивистом неточным и заменяется следующим конструктивным суждением: «Потенциально осуществимо построение слова, удовлетворяющего условию ϕ» или «Слово, удовлетворяющее условию ϕ, является конструктивным математическим объектом».

Различие между классическим и конструктивистским суждениями существования состоит в том, что из доказательства «классического» суждения существования не всегда следует истинность «конструктивного»: первое может быть истинным, но второе тем не менее ложным.

Абстракция потенциальной осуществимости как главная идеализация конструктивной математики допускает не только практически выполнимое в данных материальных условиях построение, но и потенциально осуществимое построение, т. е. осуществимое в предположении, что после каждого шага процесса построения требуемого слова всегда возможно выполнить следующий шаг.

В целом к конструктивному направлению в математике относятся все исследования, удовлетворяющие следующим условиям[130]:

[129] *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Указ. соч. С. 116–117.

[130] *Шанин Н. А.* О конструктивном понимании математических суждений // Проблемы конструктивного направления в математике. М.; Л., 1958. С. 228.

(1) в качестве объектов изучения (объектов суждений) фигурируют только конструктивные объекты, представляющие собой слова некоторого алфавита;

(2) при рассмотрении конструктивных объектов допускается абстракция потенциальной осуществимости и исключается применение абстракции актуальной бесконечности;

(3) используется особая конструктивная логика и исключаются все доказательства, основанные на законе исключенного третьего.

Пусть приписывание вертикальной «черточки» справа от данного натурального числа обозначает новое натуральное число, отличающееся от него на единицу. Тогда алфавита **A** = {0, |} достаточно для порождения ряда натуральных чисел согласно следующим правилам:

- 0 есть натуральное число.
- Если *n* — натуральное число, слово *n* | также есть натуральное число.

Согласно указанному алгорифму, для получения нового натурального числа достаточно приписать справа к данному вертикальную черточку. Таким образом, натуральными числами являются слова 0 (ноль), 0 | (единица), 0 | | (два), 0 | | | (три), … .

Для определения рациональных чисел алфавит **A** = {0, |} достаточно расширить, включив в него дополнительные слова (косая черта отделяет числитель от знаменателя, знак «–» обозначает «минус»): **A** = {0, |, /, –}:

0 | / 0 | | | (одна треть);

– 0 | / 0 | | | (минус одна треть).

Для определения действительных чисел строится алгоритмическая интерпретация критерия сходимости Коши, с помощью которого Кантор строил теоретико-множественное определение действительных чисел. Согласно Кантору, всякая последовательность рациональных чисел, выполняющая критерий сходимости Коши, определяет некоторое действительное число.

Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$, или $\{a_n\}$, где каждый член есть рациональное число, называется последовательностью Коши, если для каждого натурального числа k существует натуральное число n такое, что для всякого натурального числа p $|a_{n+p} - a_n| < 1/k$.

Иными словами, для данного значения дроби $1/k$, как бы она ни была мала, всегда найдется n-й член последовательности, за которым любые два члена последовательности отличаются друг от друга меньше, чем на $1/k$. Действительное число в теоретико-множественном смысле определяется как множество всех эквивалентных последовательностей Коши.

Нормальный алгорифм Σ в расширенном алфавите называется *конструктивной последовательностью рациональных чисел*, если он применим ко всякому натуральному числу и перерабатывает его в некоторое рациональное число. Число $\Sigma(N)$, где N — произвольное натуральное число, называется N-м членом последовательности Σ.

Пусть Σ — конструктивная последовательность рациональных чисел. Конструктивная последовательность натуральных чисел Θ называется *регулятором сходимости последовательности* Σ, если для любых натуральных чисел L, M и N из $M, N \geq \Theta(L)$ следует, что

$$|\Sigma(M) - \Sigma(N)| < 2^{-L}.$$

Конструктивное действительное число есть всякое слово вида $\Sigma\Theta$, где Σ — конструктивная последовательность рациональных чисел, Θ — ее регулятор сходимости[131].

Таким образом, для построения действительного числа требуется два алгорифма. Первый — для задания последовательности рациональных чисел $\Sigma(N)$, второй — для доказательства возможности построения числа $\Theta(N)$ по данному натуральному числу L.

Главный результат теории алгорифмов Маркова состоит в следующем: существует перечислимое, но не разрешимое множество слов. Таким множеством, например, является множество натуральных чисел. В алгоритмических терминах данный результат звучит так: «Может быть построен нормальный алгорифм Σ в алфавите А, удовлетворяющий следующему условию: невозможен нормальный алгорифм над А, применимый ко всякому слову в А и перерабатывающий в пустое слово те и только те слова в А, к которым применим»[132]. Приведенная теорема утверждает, что для

[131] *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Указ. соч. С. 404.
[132] Там же. С. 277–278.

некоторого конкретного нормального алгорифма Σ в **А** проблема распознавания применимости (неприменимости) к словам в **А** неразрешима: искомый в этой проблеме нормальный алгорифм невозможен.

Результат Маркова соответствует аналогичным отрицательным доказательствам А. Тьюринга и А. Чёрча, полученным ранее (в 1936 г.).

Некоторые пояснения к основной теореме Маркова дают следующие определения и результаты.

- Множество М слов в алфавите **А** называется *разрешимым* в **А**, если существует нормальный алгорифм **Σ** над **А**, проверяющий принадлежность слов в **А** к М.
- Множество М слов в алфавите **А** называется *перечислимым*, если существует алгорифм **Σ** над **А** такой, что для любого слова *P* в **А** **Σ**(*P*) определено тогда и только тогда, когда $P \in$ М.
- Всякое разрешимое множество слов является перечислимым.
- Существует перечислимое, но не разрешимое множество слов в алфавите.

Таким образом, хотя всякое разрешимое множество слов перечислимо, т. е. отображаемо на множество натуральных чисел, но обратное, однако, неверно. Перечислимость объектов не гарантирует их разрешимости. Смысл этого утверждения поясняет следующее рассуждение. Допустим, дано множество натуральных чисел. Применяя к нему алгорифм, печатающий последовательно все его элементы, мы знаем, что рано или поздно будет напечатано любое число, принадлежащее этому множеству, но мы принципиально не в состоянии по любому данному числу эффективно узнать, будет ли оно напечатано или же не будет.

Для всякого конструктивно определенного действительного числа всегда можно подобрать алгорифм, порождающий отличное от него другое конструктивно определенное действительное число. Отсюда следует неперечислимость континуума действительных чисел, с чем согласны и классические математики. Но в отличие от Кантора конструктивисты не утверждают на основании этого факта существование множеств, чья мощность превосходит мощность счетного множества натуральных чисел. Для них это означало бы принятие абстракции актуальной бесконечности. Значит, конструктивная, как и интуиционистская, математика имеет дело со счетными, хотя и неперечислимыми множествами.

Реализация школой Маркова программы обоснования математики привела к результатам, схожим, хотя и не во всем, полученным ранее школой Брауэра. Радикально изменилось понятие функции. Было доказано, что монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность конструктивно действительных чисел может не иметь предела, что противоречит одному из основных положений классического анализа. Было также доказано, что конструктивная функция действительно переменного не может иметь конструктивного разрыва ни в одной точке и, кроме того, она всегда непрерывна.

Вместе с этими результатами стало ясно видно, что «никакого упрощения теории не получается. Наоборот, исследование конструктивных аналогов даже весьма элементарных теорий обычного анализа потребовало больших усилий и редкой изобретательности. Что же касается отделов анализа, касающихся наиболее абстрактных свойств банаховых, гильбертовых и топологических пространств, то тут зачастую не удается построить конструктивных аналогов по причинам больших технических трудностей. Короче говоря, конструктивный анализ как по требуемому для его осмысления умственному напряжению, так и по громоздкости применяемого аппарата оказывается не более простым предметом, чем классический анализ, а, пожалуй, даже более сложным...»[133].

Что же может тогда заставить математика пожертвовать простотой методов классической математики и предпочесть им методы конструктивной? Конструктивисты единодушно отвечают: только надежность алгорифмических рассуждений позволяет подвести под математику прочный фундамент. Однако трудности конструктивного анализа, о которых говорят все чаще и чаще, оставляют вопросы о перспективах развития конструктивной математики, ее отношений с классической и интуиционистской, во многом открытыми.

Новая версия конструктивизма, независимая от интуиционизма Брауэра, конструктивизма Маркова, призванная спасти классическую математику, связана с именем американского математика Эррета Би-

---

[133] *Тростников В. Н.* Конструктивные процессы в математике (философский аспект). М., 1975. С. 177.

шопа (1928–1983)[134]. В первой главе своего монументального труда «Конструктивный анализ», названной «Конструктивистским манифестом», Бишоп формулирует основные положения нового видения математики в послебрауэровскую и послегильбертовскую эпоху[135].

Математика, считает Бишоп, — свободное создание нашего ума, представляет ту часть интеллектуальной деятельности, которая превосходит нашу биологию и наше физическое окружение и которая все же менее произвольна, чем любая друга наука. Математика обладает свойством трансцендентности. Это свойство объясняет нашу уверенность в том, что создания, живущие в других мирах, пользуются той же математикой, что и мы.

Первичный объект математики — натуральное число. Мы постигаем число тем же способом, каким, согласно Канту, воспринимается пространство. Существование натуральных чисел вместе с арифметикой обусловлено природой нашего интеллекта и, возможно, разума как такового. Теория натуральных чисел создается из понятий единицы, добавления единицы и принципа полной индукции. Все остальные «этажи» математики строятся посредством последовательного восхождения от базисной теории натуральных чисел. Таким способом создается большая часть математики.

Но существует и другой способ «трансценденции математики». Можно восходить от фактически сконструированного объекта к новому, гипотетическому по своей сути. Так, можно вводить гипотетические множества с гипотетическими операциями на них, выполняющие определенные аксиомы. Оправданием такого способа построения математики становится возможность решения конкретных математических проблем, выраженных в терминах натуральных чисел. *Гипотетические объекты можно строить на основании* других гипотетических объектов, т. е. возможна иерархия гипотетических конструкций. Какой бы высоты ни было все здание, его основанием служит натуральный ряд чисел. Значит, любая математическая проблема при таком построении получает надежный вычислительный базис.

---

[134] См.: *Bishop E., Bridges D.* Constructive Analysis. N. Y., 1985. (Второе переработанное издание. Первое опубликовано в 1967 г.); *Beeson M.* Foundations of Constructive Mathematics. N. Y., 1985.

[135] Ibid. P. 4–13.

На 70-е гг. прошлого столетия пришлась новая волна интереса к конструктивной математике. Возник своеобразный ренессанс конструктивизма. «Существуют две принципиальные причины этого ренессанса: Бишоп и компьютер. В 60-е гг. компьютер использовался для численного решения определенных математических проблем, самой поразительной из которых можно назвать расчет орбит для космических кораблей. Это вызвало значительный прогресс в развитии методов численного анализа и численной алгебры, были построены необходимые алгорифмы и исследовано их применение. Распространение этих методов и алгорифмов на другие области и проблемы породило неожиданный интерес к тому способу решения математической проблемы, который связан с ее *вычислением*. Неизбежным результатом всего этого стало переосмысление проблемы, относительно которой спорили Брауэр и Гильберт. Оно было предпринято Эрретом Бишопом из Калифорнии... Главным поражающим открытием Бишопа стало доказательство, что как Гильберт, так и Брауэр ошибались как раз в том пункте, *относительно которого у них не было разногласий*. А именно, они оба предполагали, что если принять конструктивную (интуиционистскую. — *В. С.*) математику серьезно, то необходимо будет 'отказаться' от самых важных частей современной математики (таких, например, как теория меры или комплексный анализ). Бишоп доказал, что это было обычным заблуждением и что не было никакой необходимости вводить экстравагантные допущения, кажущиеся противоречивыми всем непосвященным. Длившийся долгое время конфликт между мощью и безопасностью математического мышления был на самом деле иллюзорным!.. Бишоп нашел способ представить математику как 'язык высокого уровня программирования', в котором следует записывать доказательства. Каждое доказательство существования должно сопровождаться построением алгорифма»[136].

Таким образом, новым приоритетом, который вдохновляет современных конструктивистов, служит раскрытие фундаментальной связи теоретической математики с вычислительными процедурами и программированием в целом. Компьютер становится реальным средством конструирования новых математических объектов и условием развития самой математики. Потенци-

[136] *Beeson M.* Foundations of Constructive Mathematics. P. XV.

альная бесконечность предстает как возможность вычисления в принципе. При этом базисной структурой математики признается ряд натуральных чисел, все остальные структуры рассматриваются как гипотетические. Таким образом, мечта рационалистов создать когда-нибудь универсальный язык для замены естественных рассуждений точными вычислительными процедурами приобрела в наше время форму респектабельной метаматематической программы конструктивизма.

Оценка программы интуиционизма и конструктивизма

Основной тезис интуиционистов состоит в том, что математика представляет собрание интуитивно очевидных конструкций, независимых от математического языка и логики. Это поднимает вопрос о том, насколько оправданно столь жесткое противопоставление интуиции логике и языку, насколько эффективен критерий интуитивной самоочевидности.

Очевидно, что акцент на интуиции был сделан для введения в математические построения допущения потенциальной бесконечности и исключения возможных парадоксов в основании математики посредством отсечения языка и логики как главных источников, так сказать, по определению. Но какова цена этого решения?

Для интуициониста математическое высказывание в своей сущности не является высказыванием логики и даже языковой конструкцией. Оно порождается не логической, а интуитивной деятельностью интеллекта. Согласно принятой классификации, для интуициониста каждое математическое высказывание синтетическое, так как его содержанием выступает конструируемый объект, и одновременно априорное, потому что представляет результат исключительно умственной деятельности.

Отсюда следует гносеологическая проблема интуиционистского обоснования математики. Истинность математических суждений гарантируется интуитивной самоочевидностью математического построения, оформленного в виде определенного логико-лингвистического отчета. Однако многие аналитики сразу же обратили внимание на то, что не все интуиционистские конструкции, особенно связанные с операцией логического отрицания, являются интуитивно самоочевидными[137]. Например, таким качеством не обладает интуиционистская теорема «квадратный круг не существует». Никакая интуиция не способна даже в воображении выполнить подобное построение, что является обязательным условием вывода из него противоречия, как того требует определение интуиционистского отрицания.

Критерий интуитивной самоочевидности не является очевидным и при применении к другим логическим операциям. Все они по определению связаны с умственными построениями выполняющих их субъектов. Достаточно допустить существование двух интуиционистов с несовместимыми, но самоочевидными для каждого из них интуициями, как этот критерий теряет свою однозначность и интерсубъективность.

Но рассматриваемый критерий не менее проблематичен и тогда, когда интуиции совпадают. Ведь установление факта несовместимости или, наоборот, совместимости двух и более отчетов об интуитивной самоочевидности некоторого построения требует внешнего выражения и подтверждения, т. е. логического анализа. Отношения совместимости и несовместимости различаются *в зависимости от логического вида сравниваемых суждений* и не могут быть по этой причине только интуитивно очевидными. Следовательно, апелляция к интуиции и исключительно к ней лишает математика возможности эксплицитно сравнивать между собой математические конструкции, устанавливать между ними логические связи и делать свою главную работу — доказывать истинные и опровергать ложные из них. В конце концов А. Гейтинг был вынужден признать, что «понятие интуитивной ясности в математике само не является интуитивно ясным»[138].

Большой резонанс и сопротивление среди большей части математиков вызвало желание Брауэра и следующих за ним в этом отношении конструктивистов ограничить применение закона исключенного третьего конечной областью объектов. Конструктивисты поддержали Брауэра в этом намерении. Однако реальная проблема не в самом законе, а в интуиционистской интерпретации отрицания

[137] *Körner S.* The Philosophy of Mathematics. An Introductory Essay. N. Y., 1968. P. 140.

[138] *Гейтинг А.* Тридцать лет спустя // Математическая логика и ее применения. М., 1965. С. 225.

общего высказывания. С классической точки зрения, согласно закону противоречия из отрицания общего суждения всегда следует существование частного контрпримера. Причина этого также понятна: альтернативами в этом случае являются существование и несуществование объектов определенного вида.

Теперь сформулируем отрицание общего суждения $(x)Ax$ как интуиционистскую проблему. В этом случае акцент смещается с перечисления альтернатив существования объектов с заданными свойствами на указание общих альтернатив разрешимости проблемы. Они таковы: положительное решение (с приведением конкретного примера существования $(Ex)\neg Ax$), отрицательное решение (с доказательством, что ни один x не обладает свойством $\neg A$) и доказательство отсутствия решения. Сформулировать альтернативы решения согласно закону исключенного третьего. Получим высказывание «проблема отрицания общего суждения либо имеет решение (положительное или отрицательное), либо не имеет его». Интуиционистская интерпретация отрицания общего суждения не обязывает закон исключенного третьего утверждать что-либо напрямую о существовании объектов. *Он должен констатировать только, имеет данная интуиционистская проблема решение или нет.* Но именно это он и делает. Значит, несмотря на множество тонких замечаний, критика интуиционистами и конструктивистами закона исключенного третьего в общем неправомерна. Ограничения, которые они приписывают этому закону, на самом деле есть следствия интуиционистско-конструктивистской интерпретации операции логического отрицания.

С рассматриваемой точки зрения конструктивная интерпретация высказываний существования, о значении которой с гордостью говорят все интуиционисты и конструктивисты, представляет логическое сужение объема обычных утверждений существования. Существование не сводится только к доказательству, или конструированию. Множество доказанных суждений есть собственное подмножество логически допустимых суждений. Логическое, т. е. возможное, существование предшествует всем остальным видам существования. Требовать совпадения существования с доказательством как одним из своих видов означает требовать сильного ограничения множества допустимых объектов математики.

Пусть КМ обозначает классическую математику; ММ — конструктивную математику Маркова; БМ — конструктивную математику Бишопа; ИМ — интуиционистскую математику Брауэра. Соотношение перечисленных видов математики указано на рис. 4.3.

Согласно рис. 4.3, классическая и интуиционистская математики Брауэра частично пересекаются, при этом математика Бишопа исчерпывает область их пересечения. Математика Маркова частично пересекается с интуиционистской, полностью включает математику Бишопа и является собственной частью классической математики. Математика Бишопа — классическая математика, использующая интуиционистскую логику. Интуиционистская математика — математика Бишопа вместе с принципом непрерывности и фан-теоремой Брауэра, которые ложны в классической математике. Математика Маркова — математика Бишопа вместе с принципом Маркова, отвергнутым как Брауэром, как и Бишопом.

Приведенная на рис. 4.3 схема оставляет открытым вопрос, существует ли математика, не являющаяся ни классической, ни интуиционистской. Утвердительный ответ на него следует только при допущении, что классическая и интуиционистская математики вместе не исчерпывают класс всех возможных математик. Этот вопрос, насколько известно, в философской и методологической литературе не только не обсуждался, но даже и не ставился.

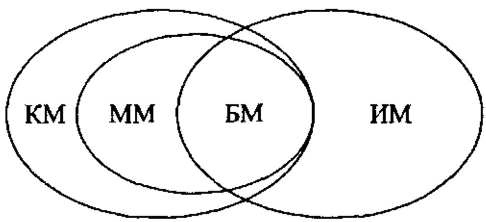


Рис. 4.3. Соотношение классической, конструктивной (Маркова и Бишопа) и интуиционистской математики Брауэра

Глава 5

Формализм. Математика как создание формально непротиворечивых конструкций

> Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике — этом образце достоверности и истинности — образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?
>
> *Д. Гильберт.* О бесконечном

Формализм как особая программа обоснования математики связан с иной исторической традицией мысли, чем логицизм и интуиционизм (конструктивизм). Лейбниц искал источник самоочевидности математических утверждений в логических отношениях между суждениями и понятиями. Кант видел такой источник в априорных формах чувственного созерцания. Если Лейбниц по праву считается основоположником логицизма, то Кант волею судьбы стал основоположником сразу двух направлений в обосновании математики — интуиционизма (конструктивизма) и формализма.

Кант считал, что хотя математические теоремы и следуют из аксиом согласно законам логики, сами они не являются принципами логики или результатом их практического применения. Математические суждения основаны на априорных формах чувственного созерцания — пространстве и времени, благодаря которым мы способны воспринимать расположение и границы объектов, последовательности событий. Математика есть наука о конструируемых объектах восприятия и мышления.

Гильберт принял общее направление обоснования математики Канта. Математика, по его представлению, не может быть основана только на логике. До всяких логических выводов в нашем созерцании уже должны присутствовать конкретные внелогические объекты. Чтобы логические выводы были надежными, число этих объектов должно быть конечно, они должны быть обозримыми во всех своих частях и представимы в нашем созерцании. Их существование, различие и следование друг за другом должны быть интуитивно очевидными настолько, что всякое сведение их к чему-то еще более простому становится излишним.

Как Кант, а затем и Брауэр, Гильберт считает, что если математика будет ограничена описанием логических связей объектов указанного вида, тогда никакие парадоксы в ней будут невозможны. Причина этого — отсутствие допущения актуальной бесконечности в рассуждениях об объектах данного типа. Но Гильберт, в отличие от Брауэра, не считал, что его подход к проблеме обоснования математики несовместим с трансфинитной математикой Кантора. Наоборот, он полагал, что канторовская теория трансфинитных множеств полностью реконструируема в терминах его финитной математики. Примирение конечной и трансфинитной математик, доказательство непротиворечивости всей системы можно назвать главной отличительной чертой гильбертовского подхода.

Программа формализма: математика как конструирование формальных систем

В начале 20-х гг. XX в. немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943), подталкиваемый собственными исследованиями, а также спорами с логицистами и интуиционистами, предложил новую программу обоснования классической математики, получившую название *программа Гильберта*. Другие названия этой программы, принятые в литературе, — теория доказательства, метаматематика. Ее целью были формализация всей математики в аксиоматической форме и доказательство определенными «финитными» методами, что полученная аксиоматизация непротиворечива. Кроме Гильберта, в разработке программы в разное время принимали активное участие такие логики и математики, как В. Аккерман, П. Бернайс, Г. Генцен, Дж. фон Нейман и Ж. Эрбран.

Программа Гильберта включает следующие тезисы:

- Ни классическая, ни логицистская, ни интуиционистская программы обоснования математики не предложили критерия, обосновывающего *всю* математику. Таким критерием может быть только ее непротиворечивость. Пока не будет разработан метод доказательства непротиворечивости всей математики, споры в этой области знания никогда не прекратятся.
- Новый метод должен быть формально аксиоматическим, потому что содержательная аксиоматика апеллирует к интуитивной или опытной очевидности аксиом. Формальная аксиоматика тоже нуждается в очевидности, но особого рода, свойственной не отдельной конкретной области математической науки, а всей математике в целом.
- Каждая теория — упрощающая идеализация, экстраполирующая свои базисные понятия за пределы наличных данных опыта. Поэтому для установления непротиворечивости теории недостаточно ссылки на ее совместимость с имеющимися данными. Необходимо иметь уверенность, что теория непротиворечива для *всех* объектов соответствующего вида.
- Непротиворечивость математики не может быть установлена общепринятым методом интерпретации ее основных объектов посредством чисел и числовых систем, а основные отношения между ними — посредством равенств и неравенств. То, что годится для доказательства непротиворечивости, допустим, геометрии, не может быть перенесено на всю математику. Ибо в этом случае встает вопрос о непротиворечивости той математической теории — арифметики или анализа, с помощью которых доказывается непротиворечивость всех остальных частей математики.
- Непротиворечивость всей математики не может быть дедуцирована из аксиом логики или данных интуиции. Все попытки вывести математику из логики оказались несостоятельны, потому что основаны на проблематичном представлении о натуральном ряде чисел как завершенной совокупности. Еще более проблематичными из-за очевидного субъективизма выглядят попытки обосновать непротиворечивость математики на априорной интуиции времени.

- Доказательство непротиворечивости всей математики состоит из двух этапов. На первом формализуется базис математики — теория множеств, арифметика и анализ, т. е. строится формальная система, из аксиом которой с помощью четко определенных правил выводятся все теоремы, относящиеся к перечисленным разделам. Система должна быть формализованной до такой степени, чтобы во внимание принимались только вид и порядок символов и ничего более.
- На втором этапе доказывается, что применение правил вывода к аксиомам построенной формальной системы никогда не сможет привести к противоречию вида $1 \neq 1$. В построенной формальной системе недопустимы не только противоречия, но и применение закона исключенного третьего к бесконечным совокупностям объектов, экзистенциальные утверждения на основании ложности общих утверждений, а также непредикативные определения.
- Формализованный вариант классической математики должен быть свободен от ограничений, которые пытались на нее наложить интуиционисты.

Философия метаматематики Гильберта

> С помощью этого нового обоснования математики, которое справедливо можно именовать теорией доказательства, я преследую важную цель: именно, я хотел бы окончательно разделаться с вопросами обоснования математики как таковыми, превратив каждое математическое высказывание в поддающуюся конкретному показу, строго выводимую формулу и тем самым приведя образование понятий и выводы, которыми пользуется математика, к такому изложению, при котором они были бы неопровержимы и все же давали бы картину всей науки.
>
> *Д. Гильберт.* Обоснования математики

Философские принципы метаматематики Гильберта

Согласно Гильберту, создание Кантором теории трансфинитных чисел привело к тому, что «[актуально] бесконечное было возведено на трон и наслаждалось временем своего высшего триумфа. Бесконечное в своем дерзком полете достигло головокружительной высоты успеха»[139]. Правда, реакция на это открытие не заставила себя ждать. «На радостях по поводу новых богатых результатов стали явным образом недостаточно критически относиться к законности умозаключений; поэтому уже при простом образовании понятий и применении умозаключений, постепенно ставших обычными, выявились противоречия, сначала единичные, а затем все более резкие и все более серьезные: так называемые парадоксы теории множеств»[140].

В качестве выхода из сложившейся критической ситуации Гильберт мог либо отказаться от теории множеств Кантора, либо найти удовлетворительный способ доказательства ее непротиворечивости. Гильберт не мог принять первую возможность, потому что чрезвычайно высоко ценил теорию Кантора, назвав ее «заслуживающим удивления цветком математического духа». Однако главной причиной было то, что она служила основанием ведущих разделов математики. Отказ от теории множеств означал бы фактически разрушение с таким большим трудом построенного здания всей математики. Гильберт никак не мог с этим согласиться и выбрал вторую возможность.

Парадоксы теории множеств Кантора свидетельствовали о том, что нельзя механически переносить методы, доказавшие свою успешность в конечной области математических объектов, на бесконечные области. Требовалась новая теория доказательства, применимая в бесконечной области с такой же степенью надежности, как и в конечной. Бесконечное должно анализироваться теми же методами, что и конечное. В этом заключалась суть решения, разрабатываемого Гильбертом. «Но существует вполне удовлетворительный путь, по которому можно избежать парадоксов, не изменяя при этом нашей науке. Те точки зрения, которые служат для открытия этого пути, и те пожелания, которые указывают нам направление, суть следующие:

1. Мы будем заботливо следить за плодотворными способами образования понятий и методами умозаключений везде, где явля-

[139] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 348.
[140] Там же. С. 348–349.

ется хотя бы малейшая надежда, будем ухаживать за ними, поддерживать их, делать их годными к использованию. Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор.

2. Надо повсюду установить ту же надежность заключений, которая имеется в обыкновенной, *низшей* теории чисел, в которой никто не сомневается и где возникают противоречия и парадоксы только вследствие нашей невнимательности»[141].

Обоснование совместимости актуальной бесконечности, математической моделью которой была теория трансфинитных чисел Кантора, с конечными разделами и методами математики стала ведущим мотивом новой программы обоснования математики, названной формализмом (теорией доказательства, метаматематикой).

Сказать, что некоторая система (не только математических) высказываний непротиворечива, означает сказать, что она не содержит двух высказываний, одно из которых является логическим отрицанием другого. Если P есть некоторое высказывание, выводимое из формальной системы S, а $\neg P$ — логическое отрицание P, то S непротиворечива, если и только если из нее не выводима конъюнкция $P \& \neg P$. Требование непротиворечивости можно сформулировать и как запрет на вывод из аксиом S *любого*, в том числе и противоречивого, высказывания.

Если исследуемая система содержит небольшое число высказываний, то ее непротиворечивость устанавливается посредством прямого сопоставления каждого высказывания со всеми остальными. Если окажется, что не существует ни одной пары высказываний вида $P \& \neg P$, то система непротиворечива. В противном случае, т. е. если существует хотя бы одна такая пара, система противоречива. Но такая непосредственная проверка неудобна или просто невозможна, если система содержит очень большое число высказываний или если они представляют скрытые следствия аксиом системы. В этом случае необходим более эффективный метод проверки систем высказываний на непротиворечивость.

Непротиворечивость теорий доказывалась и до того, как Гильберт начал свои исследования в области обоснования математики. Если исследуемая область объектов была конечна, то для аксиом доказываемой теории искали подходящую модель, т. е. систему

---

[141] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 349–350.

объектов, удовлетворяющую этим аксиомам. Например, аксиомам Пеано, как показал Рассел, удовлетворяет не только система натуральных чисел, но и бесконечное множество систем других объектов[142]. В этом случае непротиворечивость теории, для которой строится модель, обусловлена непротиворечивостью теории, модель которой выбирается для проверки. Возникает отношение редукции: проблема, поставленная для одной теории, сводится к аналогичной проблеме для другой. Арифметика и теория множеств до возникновения парадоксов на рубеже XIX–XX вв. как раз и рассматривались в качестве конечных моделей, позволяющих установить непротиворечивость любой математической теории более высокого порядка. «Повсюду, где применяется аксиоматический метод, встает вопрос о доказательстве непротиворечивости аксиом. В геометрии и в физических теориях удалось свести это доказательство к вопросу о непротиворечивости аксиом арифметики. Этот метод, очевидно, не применим к самой арифметике»[143]. Таким образом, осталось решить последний вопрос — как доказать непротиворечивость арифметики и теории множеств, если область исследуемых объектов бесконечна? Ведь введение бесконечности само по себе представляет абстрактное допущение, требующее специального обоснования. Решение этой проблемы, названное *прямым доказательством непротиворечивости*, дал Гильберт.

Основная идея Гильберта проста. Чтобы не быть зависимой от абстракции бесконечности в своем основании, математика должна строиться с допущением существования конечных систем объектов и использовать содержательные, исключающие суждения о бесконечности, рассуждения. Какие бы опыты и наблюдения ни проводились, в природе существование бесконечного обнаружить нельзя. Бесконечность — идеальный конструкт, абстракция (интерполяция или экстраполяция) очень больших и очень малых величин, изобретение нашего ума, но не более. «Разве не ясно, что когда мы, как нам кажется, в каком-то смысле познаем реальность бесконечного, на самом деле мы лишь позволяем себе соблазниться чудовищно большими и чудовищно малыми размерами, которые так часто встречаются в действительности»[144]. Значит, бесконечное, если ма-

[142] *Russell B.* Introduction to Mathematical Philosophy. P. 7–9.
[143] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 377.
[144] Там же. С. 350.

тематик не хочет совершить ошибку, должно быть исключено из посылок его рассуждений об основаниях математики. Ведь содержательные умозаключения о действительных вещах и процессах никогда не обманывали человека, если не применялись произвольные способы образования понятий. Содержательный характер математики отстаивали многие философы, в том числе и Кант. «Уже Кант учил — и это составляет существенную часть его учения, — что математика обладает независящим от всякой логики устойчивым содержанием, и потому она никогда не может быть обоснована только с помощью логики, вследствие чего, между прочим, стремления Дедекинда и Фреге должны были потерпеть крушение»[145]. Следовательно, в основание математики должны быть положены содержательные суждения о конечных, максимально простых, наглядных и доступных прямому обозрению объектах. В этом залог надежности и достоверности ее выводов.

С анализа каких именно объектов следует начинать обоснование математики? Гильберт отвечает — с анализа элементарных знаков. Они конечны, наглядны, легко распознаются, не нуждаются в сведении к чему-либо более простому. Сами по себе знаки не имеют никакого смысла. Их смысл конвенциален, задается правилами употребления. Знание свойств знаков и отношений, в которых они находятся, возникает интуитивно. Из знаков математик конструирует по определенным правилам формулы, символизирующие его рассуждения. В итоге любой математический текст можно представить в виде доступной быстрой проверке совокупности формул.

Подобная формализация не просто замещает мысли последовательностями знаков, она сводит к минимуму начальные элементы математических рассуждений, предотвращает появление противоречий и делает легко обозримой структуру доказательства. «...В нашем представлении уже должно быть дано нечто, а именно определенные внелогические конкретные объекты, которые существуют наглядно, в качестве непосредственных переживаний до какого бы то ни было мышления... Это — та философская установка, которую я считаю необходимой как для математики, так и для всякого научного мышления, понимания и сообщения. В частности, в математике

[145] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 351.

предметом нашего рассмотрения являются сами конкретные знаки, вид которых согласно нашей установке может быть непосредственно отчетливо и многократно опознан. Это — наименьшее количество предположений, без которых ни один научный мыслитель не может обойтись и которые поэтому каждый, сознательно или бессознательно, должен соблюдать»[146]. Данное требование Гильберта принято называть *допущением финитности* (финитного способа рассуждений).

Допущение финитности позволило Гильберту по-новому сформулировать проблему актуальной бесконечности. Такая бесконечность не дана нам ни в опыте, ни в интуиции. Она не является атрибутом реальности. Значит, проблема завершенной бесконечности — исключительно внутриматематическая проблема и должна решаться математическими средствами. «В результате этих размышлений мы приходим к пониманию того факта, что вопрос о существовании какого-либо бесконечного многообразия не может быть разрешен посредством указания каких-либо внематематических объектов, а должен решаться внутри самой математики»[147].

По замыслу Гильберта допущение финитности должно было свести все рассуждения об актуально бесконечных числах, множествах и числовых последовательностях к конечным преобразованиям знаков или формул; обеспечить максимальную надежность математических доказательств за счет ограничения их конечными процедурами. «Мы должны бесконечное, в смысле бесконечной совокупности... понимать как нечто кажущееся... И подобно тому как действия с бесконечно малыми были заменены процессами в конечном, которые дают те же результаты и приводят к тем же изящным формальным соотношениям, выводы, содержащие бесконечное, должны быть вообще заменены конечными процессами, дающими в точности те же самые результаты»[148].

Допущение финитности обосновывает принципиальное решение проблемы законности системы аксиом математической теории в случае бесконечной области ее объектов. Так как исследование такой области с целью проверки выполнимости аксиом становится

[146] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 366.

[147] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979. С. 41.

[148] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 339–340.

бессмысленным, то единственный выход в этой ситуации состоит в доказательстве невозможности возникновения противоречия при предположении, что теория истинна.

Финитное обоснование математики

Логико-математический смысл математики, построенной в соответствии с допущением финитности, Гильберт объясняет так: «Основная мысль моей теории доказательства такова: все высказывания, которые составляют вместе математику, превращаются в формулы, так что сама математика превращается в совокупность формул. Эти формулы отличаются от формул математики только тем, что в них, кроме обычных знаков, встречаются также и логические знаки... Некоторые определенные формулы, которые служат фундаментом этого формального построения математики, называются аксиомами. Доказательство есть фигура, которая должна наглядно предстать перед нами; она состоит из выводов, делаемых согласно схеме [modus ponens], в которой каждая посылка... каждый раз является либо аксиомой, либо получается из аксиомы путем подстановки, либо совпадает с полученной ранее из доказательства формулой или получается из такой формулы с помощью подстановки. Формулу мы будем называть доказуемой, если она либо является аксиомой, либо конечной формулой некоторого доказательства»[149].

Как отмечалось, финитный подход требует ограничить математическую мысль объектами, данными в непосредственном созерцании еще до всякого мышления, и такими операциями с этими объектами и способами рассуждения, которые не требуют привлечения абстрактных понятий, включая допущения о завершенных бесконечных последовательностях.

Рассмотрим на примере арифметики, какие объекты (знаки) являются для нее исходными, какие финитные высказывания об этих объектах допустимы и какие методы конструирования и рассуждения приемлемы.

Исходный объект арифметики — цифра 1. Она символизирует число, называемое единицей. Операция порождения — приписыва-

[149] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 366–367.

ние этой цифры справа от данного объекта. Применение данной операции к 1 порождает ряд натуральных чисел:

1, 11 (два), 111 (три), ...

Эти объекты элементарны, наглядны и конечны. Их сравнение друг с другом позволяет устанавливать между ними базисные отношения равенства или неравенства.

Если цифры a и b графически равны, то равны и символизируемые ими числа. Если цифра a совпадает с частью цифры b, то a меньше b; если цифра b совпадает с частью цифры a, то b меньше a. Для всякой пары элементарных объектов арифметики истинно одно из следующих суждений: $a = b$, $a > b$, $a < b$.

С помощью указанных суждений определяются все арифметические операции. Например, операция сложения вводится следующим образом. Если цифра b совпадает с частью цифры a, то остаток c также есть цифра такая, что выполняется равенство $a = b + c$. Буквально операция сложения цифр b и c означает процедуру приписывания b цифры 1, с которой начинается c, столько раз, сколько раз 1 входит в c.

Операции вычитания, умножения, деления определяются аналогично. Ассоциативный, коммутативный и дистрибутивный законы вместе с принципом индукции основываются как следствия данных операций.

Финитный метод построения арифметики допускает и рекурсивные определения. Например, функция $n! = p(n) = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$, называемая факториалом, определяется равенствами:

$$p(1) = 1;$$
$$p(n + 1) = p(n) \times (n + 1).$$

Функцией с указанной точки зрения понимается наглядное предписание, на основании которой заданной цифре сопоставляется некоторая новая цифра. Приведенные равенства, определяющие факториал, называют *рекурсией*. Рекурсивное определение показывает, каким образом, начиная с некоторого значения $p(n)$ и не используя ничего, кроме сложения и умножения, можно вычислить $p(n)$ для любой данной цифры n.

Финитные высказывания могут объединяться логическими союзами («и», «или», «если ..., то», «если и только если», «либо ...,

либо») в сложные высказывания. Кроме того, к ним может применяться операция отрицания и в формулировки теорем могут входить кванторы существования и общности. Последние операции, на первый взгляд, вступают в противоречие с финитной установкой, так как требуют выхода за пределы конечного. Например, высказывание Гильберта «существует простое число между $n + 1$ и $n! + 1$», где n есть простое число, большее 2, требует для доказательства своей истинности бесконечной области объектов. Это высказывание эквивалентно высказыванию «либо $n + 1$, либо $n + 2$, либо $n + 3$, либо … либо $n! + 1$ есть простое число». При прямом истолковании оно явно не финитно. Возникает следующая проблема. Когда слова «все» и «существуют», вводящие кванторы общности и существования соответственно, вставляются в финитные рассуждения, то «логические законы, которыми люди… всегда пользовались и о которых учил уже Аристотель, несправедливы в конечном. Мы бы могли найти выход в том, чтобы установить логические законы, справедливые в области конечных высказываний; но это не принесло бы нам никакой пользы, так как мы ведь не хотим отказаться от пользования простыми законами аристотелевой логики, и никто, говори он даже ангельским языком, не удержит людей от того, чтобы отрицать любые суждения, образовывать частичные суждения и применять закон исключенного третьего. Как же нам теперь быть?»[150].

Для решения данной проблемы Гильберт дополняет свой метод обоснования математики *идеальными элементами*. Как алгебра требует введения мнимых (идеальных) величин, чтобы сохранить всеобщность своих законов, так и при финитном обосновании «к конечным высказываниям мы должны присоединить идеальные высказывания для того, чтобы удержать формально простые законы обычной аристотелевой логики»[151].

Под идеальными элементами Гильберт понимает математические и логические формулы, т. е. *схемы высказываний*, которые не имеют прямой содержательной интерпретации и на место которых могут подставляться любые удовлетворяющие им конкретные арифметические (конечные) высказывания. Сравнение алгебры

---

[150] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 355.
[151] Там же. С. 356.

с арифметикой поможет понять смысл сказанного. Вместо того чтобы доказывать бесконечное число частных теорем вида «1 + 1 = 2», «2 + 2 = 4», «3 + 3 = 6», ..., достаточно знающему алгебру доказать общую формулу, т. е. ввести идеальный элемент, «$a + a = 2a$», которая обосновывает истинность *всех* арифметических суждений указанного вида.

Расширение финитной математики за счет добавления идеальных элементов означает, выражаясь современным языком, ее полную формализацию, построение логического исчисления, позволяющего вместе с математическими аксиомами чисто формально доказывать математические теоремы.

Создание теории идеальных элементов имело одну единственную цель. С ее помощью Гильберт намеревался ввести контроль над актуальной бесконечностью и тем самым обосновать применение логических законов классической логики, распространить финитный подход на бесконечную область объектов. «Если мы этот взгляд обобщим, то математика сведется к совокупности формул, во-первых, таких, которым соответствуют содержательные сообщения конечных высказываний, т. е., по существу, числовых равенств или неравенств, и во-вторых, других формул, которые сами по себе никакого значения не имеют и которые являются идеальными образами нашей теории»[152].

Согласно Гильберту, идеальные элементы не имеют самостоятельного значения, и их значение определяется правилами употребления. С ними нельзя оперировать как с содержательными высказываниями. Они — элементы формального анализа, их принципиальное назначение — быть средством формализации теории.

Идеальные элементы, которые вводятся выражениями, включающими кванторы общности и существования, допускают финитную, фактически конструктивную интерпретацию. Пусть дано общее утверждение, что всякое число, делимое на шесть, делимо также и на три. Оно означает, что, начиная с первого объекта, который делится на шесть, и подставляя поочередно остальные с этим же свойством, мы будем получать каждый раз истинные высказывания, что каждое из них делится также и на три. Как бы далеко мы ни продвинулись в этом процессе контроля, все получаемые выска-

[152] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 357–358.

зывания будут финитно проверяемыми. Но поскольку при этом остается бесконечная последовательность еще непроверенных чисел, делящихся на шесть, мы имеем дело с потенциально истинным рассуждением. Экзистенциальное утверждение вида $(Ex)Ax$ интерпретируется аналогично. Оно представляет частичное, неполное и тем самым потенциально истинное суждение, симптом более полного и определенного высказывания, которое либо обозначает факт непосредственного предъявления объекта, обладающего свойством Ax, либо указывает процедуру конструирования такого объекта.

К идеальным элементам, как логическим инструментам формализации, предъявляется чрезвычайно важное требование: они не должны противоречить содержательной части математической теории, к которой они присоединяются. «Существует одно условие, правда, только одно, но зато абсолютно необходимое, с которым связано применение метода идеальных элементов; этим условием является *доказательство непротиворечивости*; расширение, осуществляемое прибавлением идеалов, допустимо только при условии, что из-за этого в старой, узкой области никаких противоречий не возникает, т. е. при условии, что соотношения, которые получатся для старых образов после исключения идеальных, всегда в старой области имели место»[153].

Сказанного достаточно, чтобы понять характер финитного построения не только арифметики, но и других разделов математики. Финитная математика в целом, согласно Гильберту, — это формализованная математика, т. е. машина, порождающая свои объекты исключительно формальными методами. Главное преимущество формализации состоит в том, что она позволяет свести доказательство непротиворечивости арифметики (как и любой другой математической теории) к доказательству непротиворечивости ее аксиом, т. е. к обоснованию, что вывод из данных аксиом обладает свойством непротиворечивости. Укажем основную идею.

Для формализации математической системы необходимо:

1. Задать алфавит исходных знаков.
2. Определить, какие последовательности знаков являются формулой.

---

[153] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 362.

3. Отобрать формулы, которые будут выполнять функции логических и математических аксиом.
4. В качестве правил вывода использовать следующие два. Правило отделения (ПО): из формул X и $(X \supset Y)$ следует формула Y. Правило подстановки (ПП): вместо любой переменной для высказываний в формуле можно подставить любую формулу всюду, где эта переменная входит в данную формулу.
5. Определить правила построения доказательства (вывода).

Предполагается, что если предъявлена произвольная строчка знаков, входящих в алфавит формальной системы, то в конечное число шагов можно решить, является ли она формулой, и если да, то является ли она аксиомой. Аналогичным образом предполагается, что относительно произвольной последовательности формул можно в конечное число шагов решить, является ли она доказательством. Формула считается доказуемой, если можно построить ее вывод из приведенных аксиом с помощью правил ПО и ПП. Вывод представляет конечную последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо следствие предшествующих формул, полученное с помощью правил следования.

Согласно Гильберту, для формализации элементарной арифметики натуральных чисел (в которой выполняется только операция сложения) и доказательства ее непротиворечивости достаточно следующих аксиом.

Аксиомы логики высказываний

A_1. $A \supset (B \supset A)$	(добавление посылки).
A_2. $(B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$	(исключение высказывания).
A_3. $(A \supset (B \mathbin{\&} \neg B)) \supset \neg A$	(закон противоречия).
A_4. $\neg\neg A \supset A$	(закон двойного отрицания).

Трансфинитные аксиомы

A_5. $(x)\,(Ax \supset Aa)$	(заключение от общего к частному).
A_6. $\neg\,(x)Ax \supset (Ex)\neg Aa$	(если свойство A неверно для всех x, то существует противоречащий пример).

A_7. $\neg (Ex)Ax \supset (x)\neg Aa$ (если не существует примера выполнимости свойства A, то оно ложно для всех x).

A_8. $Ax \supset A(\varepsilon xA)$ (логическая ε-аксиома).

В аксиоме A_8 выражение εxA обозначает вещь, для которой высказывание Aa истинно. Более точно, ε — функция выбора, сопоставляющий каждому x, обладающему свойством A, некоторый элемент из класса вещей, если вещь, удовлетворяющая этому свойству, *уже существует*. Если высказывание A выполняется для одной и только одной вещи, то εxA есть та самая вещь, для которой данное высказывание справедливо.

Связь ε-аксиомы с кванторами существования и общности объясняют следующие два определения:

DF 1. $(Ex)\, Ax = A(\varepsilon xA)$.

DF 2. $(x)\, Ax = \neg\, (Ex)\, \neg A(x) = A(\varepsilon x\, (\neg A))$,
так как $\neg(Ex)\, \neg Ax \equiv \neg A(\varepsilon x \neg A)$.

Согласно Гильберту, достоинство ε-аксиомы состоит в том, что из нее выводимы трансфинитные аксиомы A_5–A_7 и, значит, данная аксиома представляет общий символ всех идеальных элементов формализованной математики. Это означает, что «формализм, который получается из элементарного исчисления со свободными переменными в результате применения к нему ε-формулы... полностью включает в себя все исчисление предикатов в целом»[154]. Кроме того, ε-аксиома «содержит... ядро так называемой аксиомы произвольного выбора»[155].

С помощью данной аксиомы Гильберта доказывает, что кванторы и выражения с ε-оператором всегда могут быть исключены из вывода формулы, не содержащей кванторов, из других бескванторных формул. Для Гильберта это имеет особое значение, потому что выражает суть его финитного подхода: введение идеальных элементов, т. е. высказываний о бесконечном (высказываний с кванторами существования и общности), оправданно тогда и только тогда, когда они всегда могут быть удалены из доказательства. Это озна-

[154] *Гильберт Д., Бернайс П.* Указ. соч. С. 34.
[155] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 361.

чает, что всякое доказательство, включающее суждения об актуальной бесконечности, может быть редуцировано к доказательству, включающему суждения только о конечных множествах элементов.

Роль ε-аксиомы особенно важна для Гильберта в доказательстве непротиворечивости. Если S — математическая система, чьи формулы не содержат кванторов, ε-оператора и разрешимы, тогда S непротиворечива в строгом смысле: каждая выводимая в ней формула истинна.

Математические аксиомы

A_9. $a = a$	(каждое натуральное число равно самому себе).
A_{10}. $a = b \supset (Aa \supset Ab)$	(равные натуральные числа обладают равными свойствами).
A_{11}. $a' \neq 0$	(ни одно натуральное число, непосредственно следующее за натуральным числом a, не равно 0).
A_{12}. $A(0)$ & $(x)(Ax \supset Ax') \supset Aa$	(аксиома полной индукции).

Список приведенных аксиом не противоречив, если из него не выводима формула вида (A & $\neg A$), где переменная A может обозначать любое, в том числе и арифметическое, высказывание. Допустим, формула (A & $\neg A$) следует из данных аксиом. Какое свойство приобретают в этом случае аксиомы? Ответ дает следующее рассуждение, в котором к аксиомам присоединяется в качестве допущения конъюнкция (A & $\neg A$).

1. $A \supset (\neg A \supset B)$	(следствие закона противоречия).
2. (A & $\neg A$)	(допущение).
3. (A & $\neg A$) $\supset A$	(теорема логики).
4. A	(из 2 и 3 по правилу ПО).
5. (A & $\neg A$) $\supset \neg A$	(теорема логики).
6. $\neg A$	(из 2 и 5 по правилу ПО).
7. $(\neg A \supset B)$	(из 1 и 4 по правилу ПО).
8. B	(из 6 и 7 по правилу ПО).

Формула B носит произвольный характер. Следовательно, она может обозначать все, что угодно. Например, B может быть неравенством $0 \neq 0$. Поэтому если некоторая система аксиом противоречива, то это означает, что из нее следует любая формула (следует все, что угодно). Обратное суждение не менее интересно. Если существует формула, не выводимая из данной системы аксиом, то эта система непротиворечива. Ценность обратного суждения в том, что оно указывает общее направление доказательства непротиворечивости. Для этого необходимо сначала указать характеристическое свойство, удовлетворяющее следующим двум условиям. Такое свойство:

(1) должно быть присуще всем аксиомам без исключения и всем выводимым из них формулам, получающим статус теорем;
(2) должна существовать хотя бы одна правильно построенная формула, которая этим свойством не обладает, т. е. не является теоремой.

Свойство «быть тавтологией (логически истинной формулой)» удовлетворяет указанным требованиям. Все аксиомы Гильберта и выводимые их них формулы (теоремы) — тавтологии. Это следует из того, что отрицание каждой из них порождает логическую и математическую ложь. Но такая правильно построенная формула, как $(A \supset B)$, не выводима из аксиом, т. е. не является теоремой элементарной арифметики. В самом деле, ее отрицание не порождает логической лжи. Пусть A = «данное число простое», B = «данное число делится на 3». Тогда формула $(A \supset B)$ читается «если данное число простое, то оно делится на 3». Отрицанием этого суждения будет высказывание $(A \,\&\, \neg B)$, которое читается «данное число простое и не делится на 3». Если бы суждение $(A \,\&\, \neg B)$ было логической ложью, то имело бы место противоречие и A с $\neg B$ не могли бы быть одновременно истинны или ложны. Однако рассматриваемое отрицание не образует противоречия: высказывания A и $\neg B$ могут быть одновременно как истинными, так и ложными. Например, A и $\neg B$ вместе истинны, если взять число 5, и вместе ложны, если взять число 6.

Наличие хотя бы одной формулы, не выводимой из рассматриваемых аксиом, достаточно для утверждения, что арифметика непротиворечива.

Доказательство непротиворечивости элементарной арифметики в целом соответствует логической схеме доказательства, называемой в логике *modus tollens*:

Если арифметика противоречива, то в ней доказуема (выводима) *произвольная* формула.

Существуют формулы, которые недоказуемы с помощью данных аксиом.

Значит, арифметика непротиворечива.

Формализация позволяет все рассуждения, включая и те, которые относятся к бесконечной совокупности объектов, свести к анализу конечного числа правил и небольшого числа легко обозримых последовательностей знаков, называемых формулами, или идеальными элементами. С помощью конечных вычислений она разрешает вопрос о противоречивости математической теории. Более того, формализация — такая игра формулами, которая «кроме математической ценности, имеет еще важное общефилософское значение. Эта игра формулами совершается по некоторым вполне определенным правилам, в которых выражается *техника нашего мышления*... Основная идея моей теории доказательства сводится к описанию деятельности нашего разума, иначе говоря, это протокол о правилах, согласно которым фактически действует наше мышление»[156].

Вдохновленный достигнутыми результатами, Гильберт категорически отвергал любую критику программы доказательства непротиворечивости математики. Отвечая Пуанкаре на обвинение в том, что эта программа содержит порочный круг, Гильберт с обидой, так как был многим ему обязан, заявил: «Прежде всего, утверждая, что непротиворечивость способа полной индукции не может быть иначе доказана, как только с помощью той же полной индукции, он оспаривает *a priori* самую возможность доказательства непротиворечивости аксиом арифметически. Однако, как показывает моя теория, здесь при обосновании арифметики рассматриваются двоякого рода индуктивно употребляющиеся методы, именно, с одной стороны, метод наглядного построения целых чисел как числовых знаков... а с другой стороны — собственно индукция, которая опирается на аксиому индукции... Пуанкаре пришел к своему оши-

---

[156] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 382.

бочному убеждению благодаря тому, что он не отличал друг от друга эти два совершенно различных индукционных метода... Авторитет Пуанкаре в значительной мере односторонне повлиял на юное поколение»[157].

Логицистскую программу обоснования математики Рассела и Уайтхеда Гильберт обвинил в том, что она включает аксиомы бесконечности и редукции. Но эти аксиомы представляют «в полном смысле слова гипотезы, содержательно не обоснованные доказательством их непротиворечивости, гипотезы, всеобщая справедливость которых под сомнением и в которых моя теория, во всяком случае, не нуждается»[158].

Отвечая на критику Брауэра, что теоремы о чистом существовании ничего не стоят, если не содержат способа построения доказываемого объекта, и что математика вырождается в игру с символами, Гильберт указывает, что доказательство так называемого чистого существования представляет на самом деле важное математическое обобщение многих частных случаев. Одно это обстоятельство опровергает утверждение Брауэра о бесполезности теорем о существовании. «Ценность чистого доказательства существования в том именно и состоит, что благодаря ему исключаются отдельные построения и многие разнообразные построения объединяются одной основной идеей, вследствие чего четко выступает только то, что существенно для доказательства: смысл доказательства существования состоит в сокращении и экономии мысли. Чистые теоремы о существовании служили в действительности важнейшими вехами исторического развития нашей науки. Но подобные соображения не влияют на верующих интуиционистов»[159]. Продолжая отвечать Брауэру, Гильберт отвергает все его обвинения против закона исключенного третьего. Этот закон, указывает Гильберт, «никогда не приводил ни к малейшей ошибке», он «ни в малейшей мере не повинен в появлении известных парадоксов теории множеств... доказательства существования, использующие закон исключенного третьего, имеют большей частью особую прелесть благодаря своей краткости и изяществу»[160].

[157] *Гильберт Д.* Указ. соч. С. 378.
[158] Там же. С. 379.
[159] Там же. С. 382.
[160] Там же. С. 383.

Некоторое время казалось, что программа финитного обоснования математики Гильберта должна вот-вот получить триумфальное завершение. Однако в начале 30-х гг. XX в. были открыты такие ограничения, которые поставили под сомнение ее осуществление в полном объеме.

Выявление принципиальных границ программы формализации математики Гильберта

В 1931 г. была опубликована статья 25-летнего австрийского математика Курта Гёделя (1906–1978) «О неразрешимых высказываниях *Principia Mathematica* и родственных систем», которая до сих пор считается одной из самых выдающихся работ в области обоснования математики[161].

Статья Гёделя содержит два результата. Сначала Гёдель доказывает, что любая формальная система типа *Principia Mathematica*, включающая арифметику, принципиально неполна. Это означает, что существуют истинные арифметические высказывания, которые тем не менее не выводимы из аксиом подобных систем. Предположение об увеличении числа аксиом или об их модификации никак не может изменить этого отрицательного заключения. Даже если бы формализованная арифметика содержала бесконечное число аксиом, все равно существовали бы истинные арифметические утверждения, которые не были бы ее теоремами.

Затем Гёдель обосновывает, что невозможно дать доказательство непротиворечивости системы, формализующей *всю* арифметику, если правила этого доказательства удовлетворяют требованию финитности. Сразу же напрашивается предложение использовать более сильные, чем финитные, методы доказательства. Однако применение более сильных методов доказательства, во-первых, несовместимо с одним из основных принципов программы Гильберта и, во-вторых, оно только переводит решение проблемы на более высокий уровень. В любом случае программа финитного доказательства непротиворечивости не только всей математики, но даже арифметики оказывается принципиально невыполнимой.

[161] *Gödel K.* On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems. P. 145–195.

Основные шаги рассуждения Гёделя таковы[162]. Сначала он строит арифметическое исчисление, которое позволяет переводить все метаматематические высказывания о его свойствах на язык арифметических утверждений о натуральных числах. Это делается посредством приписывания каждому знаку, формуле и доказательству формализованной арифметике определенного (гёделева) номера. Нумерация (кодификация) начинается с логических и математических констант. Знак отрицания кодируется цифрой один, знак дизъюнкции — цифрой два и т. д. Знак E обозначает квантор существования, s — знак «число, следующее непосредственно за». Итерация знака s (приписывание его слева к цифре 0) позволяет конструировать натуральные числа. Например, $s0$ соответствует числу 1, $ss0$ — числу 2 и т. д.

$\neg$	$\vee$	$\supset$	E	$=$	0	s	(	)	,
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Для кодификации констант используются первые десять чисел натурального ряда, исключая число 0. Кодификации подлежат также переменные для числовых высказываний, переменные для высказываний и переменные для предикатов. Процесс кодификации должен удовлетворять следующим правилам:

(1) каждой числовой переменной (x, y, z, ...) соответствует простое число, большее десяти: 11, 13, 17, ...;

(2) каждой переменной для высказываний (A, B, C, ...) соответствует квадрат простого числа, большего десяти: 11^2, 13^2, 17^2, ...;

(3) каждой предикатной переменной (P, Q, R, ...) соответствует куб простого числа, большего десяти: 11^3, 13^3, 17^3, ...

Рассмотрим высказывание «существует число x такое, что x есть последователь y». Символически оно выглядит так: $(Ex)(x = sy)$. В формулу входят константы и одна переменная для чисел (дважды). Поэтому она кодируется гёделевыми номерами элементарных знаков:

(	E	x	)	(	x	$=$	s	y	)
8	4	11	9	8	11	5	7	9	13

[162] См.: *Nigel E., Newman J.* Gödel's Proof. N. Y., 1958. P. 68–97.

Однако это только промежуточный результат, потому что цель Гёделя состояла в том, чтобы с каждой формулой и каждым доказательством связать один единственный номер. Для рассматриваемой формулы таким номером будет результат *произведения* первых десяти простых чисел, каждое из которых берется в степени, соответствующей коду элементарного знака:

Код (гёделев номер) формулы $(Ex)(x = sy)$ равен числу

$$2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9.$$

Пусть m обозначает гёделев номер формулы $(Ex)(x = sy)$. Как вычислить гёделев номер конечной последовательности формул, представляющей доказательство? Это делается по аналогии с вычислением гёделева номера отдельной формулы. Допустим, дана следующая последовательность, в которой нижняя формула представляет заключение верхней:

$$(Ex)(x = sy);$$
$$(Ex)(x = s0).$$

Гёделев номер первой формулы (посылки) известен и равен числу m. Пусть число n обозначает гёделев номер второй формулы (заключения). Тогда результат произведения первых двух простых чисел (по числу формул, образующих доказательство), каждое из которых берется в степени, соответствующей гёделеву номеру формулы, будет гёделевым номером рассматриваемого доказательства:

$$k = 2^m \times 3^n.$$

Цель подобного кодирования состоит в том, чтобы каждый знак арифметического исчисления, каждая его формула, каждая последовательность его формул получили соответствующий, только им присущий гёделев номер. Если гёделеву нумерацию провести полностью, логико-математическое исчисление превратится в эквивалентное ему арифметическое исчисление, в котором каждая логико-математическая формула и последовательность таких формул примут вид определенных арифметических формул (точнее чисел).

Метод кодирования позволяет каждое метаматематическое выражение перевести в арифметическую формулу. Обратная задача состоит в том, чтобы по данной арифметической формуле определять, соответствует ли ей какое-нибудь осмысленное выражение или элементарный знак системы. Если число меньше или равно 10, то оно, по определению, представляет гёделев номер. Если число больше 10, то оно обозначает гёделев номер, если его можно разложить на множители, каждое из которых представляет простое число, взятое в некоторой степени. В этом случае оно является номером либо формулы, либо последовательности формул.

Примером может служить декодирование числа 243 000 000[163]:

1) 243 000 000;
2) $64 \times 243 \times 15\,625$;
3) $2^6 \times 3^5 \times 5^6$;
4) 6 5 6;
5) 0 = 0;
6) 0 = 0.

Рассматриваемое число представляет результат произведения трех сомножителей, каждый из которых является простым числом, взятым в определенной степени. Следовательно, оно — гёделев номер. Декодирование доказывает, что число 243 000 000 символизирует формулу 0 = 0. Чтение приведенного построения снизу вверх показывает этапы кодирования формулы определенным гёделевым номером. Чтение его в обратном порядке — этапы декодирования предъявленного числа. При этом может случиться так, что число может и не быть гёделевым номером. Например, число 100 больше 10 и должно быть результатом произведения простых чисел, взятых в квадрат или куб. Действительно, 100 можно представить как $2^2 \times 5^2$. Но, по определению, формула должна быть результатом произведения *последовательно возрастающих* простых чисел. Однако в приведенной последовательности отсутствует простое число 3. Значит, число 100 не является гёделевым номером.

Следующий шаг состоит в объяснении ключевой фразы гёделевского метода арифметизации: «Последовательность формул с гёделевым номером *x* есть доказательство формулы с гёделевым номером *y*». Формально: Pr(*x*, *y*). Если *x* и *y* не находятся в указан-

---

[163] *Nigel E.*, *Newman J.* Op. cit. P. 76.

ном отношении доказательства, это символизируется как $\neg\mathrm{Pr}(x, y)$, что читается как «неверно, что x представляет доказательство формулы с гёделевым номером y».

Допустим, даны формулы p и $p \supset (p \vee q)$. Вторая из них является тавтологией и может служить аксиомой. Так как формулы состоят из переменных для высказываний, они получают следующие гёделевы номера:

2^{11^2} для p;

$2^{11^2} \times 3^3 \times 5^8 \times 7^{11^2} \times 11^2 \times 13^9 \times 17^9$ для $p \supset (p \vee q)$.

Легко увидеть, что гёделев номер высказывания p входит в качестве первого сомножителя в гёделев номер высказывания $p \supset (p \vee q)$. Это позволяет сделать важный вывод. Одна формула является частью другой формулы, если и только если гёделев номер первой формулы составляет часть (сомножитель) гёделевого номера второй формулы. Значит, метаматематическое высказывание $\mathrm{Pr}(x, y)$ истинно, если и только если гёделев номер заключения y входит в качестве одного из сомножителей в гёделев номер доказательства x. Вернемся к гёделеву номеру доказательства $k = 2^m \times 3^n$. В новой записи оно выглядит так — $\mathrm{Pr}(k, n)$ — и означает, что k является гёделевым номером доказательства формулы под кодовым номером n. Так как формула с номером n входит в качестве составной части в номер доказательства k, то высказывание $\mathrm{Pr}(k, n)$ истинно.

Сказанного достаточно, чтобы понять смысл основных доказательств Гёделя.

(1) Сначала Гёдель показывает, как в построенном им арифметическом исчислении можно сконструировать формулу G, кодирующую метаматематическое высказывание «формула G не доказуема». Формально: $G = \neg\ (Ex)\ \mathrm{Pr}(x, G)$ (гёделев номер высказывания «не существует ни одного числа x, представляющего гёделев номер доказательства формулы G» равен G).

(2) Затем Гёдель устанавливает, что формула G доказуема, если и только если ее логическое отрицание $\neg G$ также доказуемо. Это означает, что если, скажем, формула G выводима из аксиом арифметического исчисления, то должна быть выводимой и формула $\neg G$ как ей эквивалентная. Обратное также верно. До-

казательство формулы $\neg G$ означало бы существование доказательства G. Но арифметическое исчисление непротиворечиво, и наличие в нем двух противоречащих друг другу формул невозможно. Значит, формулы G и $\neg G$ обе не выводимы из аксиом арифметического исчисления, т. е. они обе — неразрешимые арифметические высказывания[164].

(3) Гёдель также доказывает, что хотя G и не доказуема как арифметическое высказывание, она все же истинное метаматематическое утверждение. Раз формула G сама утверждает о самой себе, что она недоказуема, и это действительно так, то она вне всякого сомнения истинное высказывание.

(4) Таким образом, арифметическое исчисление содержит не только неразрешимое, но и истинное высказывание G. Значит, аксиомы арифметики неполны в том смысле, что из них нельзя дедуцировать *все* арифметические истины. Кроме того, аксиомы арифметики неполны существенно. Даже если к арифметическому исчислению добавить новые аксиомы, чтобы вывести формулу G, в расширенном исчислении появятся новые неразрешимые высказывания.

(5) Следовательно, если арифметическое исчисление непротиворечиво, то оно неполно. Формула G, которая утверждает свою собственную недоказуемость, эквивалентна высказыванию «эта система аксиом неполна», потому что представляет пример истинного и неразрешимого предложения. Значит, верно «если система аксиом нéпротиворечива, то следует, что формула G истинна».

Пусть A — высказывание «существует формула, которая недоказуема», которое эквивалентно утверждению «система аксиом арифметики непротиворечива». Тогда истинна формула $A \supset G$, из которой при допущении существования доказательства A следует доказательство G. Но, как было уже показано, формула G недоказуема. Этого достаточно, чтобы сделать решающий вывод: метама-

[164] Высказывание P формализованной системы S *разрешимо*, если существует эффективная процедура вывода, позволяющая определить, является ли P тавтологией S. Теория S разрешима, если для каждой проблемы, которую можно сформулировать в ее словаре, существует положительное или отрицательное решение. Причем это решение можно получить алгоритмически, следуя правилам вывода S.

тематическими средствами, переведенными на язык арифметических формул, невозможно доказать непротиворечивость арифметики. Иными словами, непротиворечивость арифметики нельзя доказать арифметическими средствами.

Оценка программы Гильберта

Как и все рассмотренные ранее программы обоснования математики, программа Гильберта интересна не столько заявленными целями, сколько непосредственными и отдаленными последствиями своей реализации. Ее цели заключались в формализации и финитизации всей классической математики, избавлении ее от парадоксов, в приближении формализованного математического доказательства к рутинным мыслительным операциям дедуктивного характера. Но ни одна из этих целей не была достигнута. Классическая математика не была формализована в полном объеме; парадоксы в математике не допускались лишь в той степени, в какой было возможно провести финитное обоснование; математическое доказательство оказалось невозможным свести к дедукции. Самым интересным следствием попыток Гильберта превратить всю математику в формальную систему можно считать доказательство Гёделем ограничительных теорем.

Выдающееся значение этих теорем следует видеть в том, что они объясняют принципиальные причины неудачи программы Гильберта и любой другой программы, предполагающей формализации элементарной арифметики. Теорема Гёделя о неполноте в лапидарной формулировке говорит о том, что любая формализованная математическая система, включающая арифметику, либо противоречива, либо неполна, т. е. содержит некоторую недоказуемую, но истинную формулу. Непосредственные следствия этой теоремы хотя и касаются прежде всего формальных систем, включающих арифметику, но имеют также и философское значение.

Во-первых, согласно этой теореме нельзя сконструировать формальную систему, в которой множество истинных формул в точности совпадало бы с множеством доказуемых формул. Множество доказуемых формул всегда будет собственным подмножеством множества истинных формул. Значит, никакая аксиоматизация (система аксиом) не способна подчинить все истинные утверждения данной формальной системы. Ни одна аксиоматизация не может считаться, следовательно, единственной и исчерпывающей. Всегда можно сконструировать более полную. И этот процесс никогда не может быть завершен, по крайней мере теоретически. Результаты Гёделя прямо подтверждают справедливость допущения потенциальной бесконечности и конструктивности процесса математического познания.

Аксиоматизация арифметики не охватывает все истины арифметики. Значит, аксиоматическое доказательство более ограниченно, чем обычное математическое доказательство. Требования строгости и надежности математического доказательства сужают творческий потенциал работающих математиков.

Во-вторых, ни одно высказывание, выражающее непротиворечивость арифметики, не может быть доказано средствами самой арифметики. «Ценой больших усилий, приложенных Гильбертом и представителями его школы для выполнения его программы, им удалось получить строго финитными методами непротиворечивость весьма широкой подсистемы арифметики; подсистема эта имеет лишь тот недостаток, что принцип индукции формулируется в ней в ослабленной форме, что препятствует применению его к квантифицированным предложениям. Следствие из теоремы Гёделя показывает, что такой частичный неуспех гильбертовской школы объясняется отнюдь не недостатком изобретательности ее представителей; напротив, мы знаем теперь, что они продвинулись в этом направлении настолько далеко, насколько это вообще было возможно»[165].

Результаты Гёделя не исключают метаматематического доказательства непротиворечивости арифметики. Они только исключают возможность такого доказательства *средствами самой арифметики*. Это затрудняет программу финитного обоснования математики Гильберта, но не доказывает ее принципиальную неосуществимость. Помимо прочего, обсуждаемое следствие говорит также о том, что применяемая в доказательствах аналитика должна быть в принципе более богатой по своим синтаксическим и семантическим свойствам, чем синтаксис и семантика исследуемой системы. Прогресс математики предполагает, таким образом, что развитие аналитических средств должно обгонять по определенным параметрам развитие самих формальных систем.

---

[165] *Френкель А. А., Бар-Хиллел И.* Указ. соч. С. 370.

Результаты Гёделя не были единственными, которые объясняли причины ограниченных возможностей формализации. Среди них особый интерес представляет теорема А. Тарского об истине: множество всех истинных высказываний непротиворечивой формализованной системы, включающей элементарную арифметику, неопределимо в этой системе[166]. Доказательство этой теоремы, как признается Тарский, обязано во многом теоремам о неполноте Гёделя.

В-третьих, существование неразрешимых высказываний в формализованной арифметике поднимает общий вопрос о неразрешимости как фундаментальной особенности всех формализованных систем. В 1936 г. А. Чёрч доказал, что элементарная арифметика неразрешима[167]. Значит, и всякая теория, включающая арифметику, также неразрешима. Интерес к проблеме разрешимости не ослабевает и сейчас, когда математика постепенно трансформируется в науку о вычислительном эксперименте. Доказательство неразрешимости той или иной проблемы экономит время и ресурсы разработчиков различных компьютерных программ. В более широком контексте существование неразрешимых теорий означает запрет «природы» на возможность конструирования универсального и абсолютно эффективного метода решения какого-либо одного класса задач. Но если это невозможно даже для одного класса, то это тем более невозможно для задач произвольного класса. То, что абсолютный метод, как и вечный двигатель, находятся под запретом, не должно внушать пессимизм и тревогу. Наоборот, неразрешимость как принципиальная черта развивающейся математики порождает, пока существует человечество, вполне обоснованный оптимизм в ее непрерывный прогресс.

Теоремы Гёделя также значительно повлияли на начавшийся процесс изменения приоритетов символической логики в последней четверти прошлого столетия.

Современная логика создавалась под влиянием идей Дж. Буля о логике как алгебре законов мысли[168] и логицистских идей Лейбница и Фреге. Гильберт с энтузиазмом воспринял идею Буля о логике как исследовании законов мысли. Как и Лейбниц, Гильберт считал, что логика выражает структуру нашего мышления; подчиняется строго

---

[166] *Tarski A.* Logic, semantics, metamathematics. Oxford, 1957. P. 247.

[167] *Church A.* Op. cit. P. 89–107.

[168] *Boole G.* An investigation of the laws of thought. N. Y., 1958.

определенным правилам; каждый знак формальной теории выражает некоторый объект нашей мысли таким образом, что между знаками и мыслями существует точное соответствие, и операции с мыслями однозначно могут быть заменены операциями со знаками. Но действительно ли законы символической логики являются законами нашего мышления? Можно ли утверждать с полной уверенностью, что математическое доказательство есть строго дедуктивная процедура — вывод теорем из аксиом? Что формализация есть гарантия не только от ошибок, но и творческих решений проблем? Ответ, очевидно, отрицательный. Ни одна из рассмотренных программ обоснования математики, заботясь исключительно о надежности и строгости математического рассуждения, ничего не предложила в качестве обоснования собственно творческой составляющей математического мышления.

После Гёделя все большее число математиков и логиков склоняется к тому, что «творческие и интуитивные аспекты математической работы не поддаются логической формализации»[169], что математика — это не деятельность идеального, никогда не совершающего ошибок математика, а открытая самонастраивающаяся и самокорректирующаяся система, нуждающаяся в непрерывном информационном взаимодействии с внешней средой со всеми связанными с этим рисками и выгодами. Идеал такой математики — не формализация всех своих теорий, а создание некоторой эвристической недедуктивной процедуры решения проблем. Логика математики в таком понимании — логика не только обоснования, но и изобретения гипотез. Но такая логика — пока что дело будущего.

---

[169] *Feferman S.* What does logic have to tell us about mathematical proofs? // The Mathematical Intelligencer. 1979. Vol. 2. P. 20.

Приложение 1

Символическая логика (основные допущения и определения)

Современная логика — это символическая логика[170]. Ее назначение выражает следующее определение:

Символическая логика — это теория исчислений.

Исчислением принято называть формальный алгоритм построения новых символических объектов из заданных. Знаки и правила оперирования с ними в каждом исчислении тщательно определяются. Каждый введенный знак имеет свой точный смысл. Каждое правило трактуется однозначно. Благодаря такой определенности удается точно выражать логическую структуру рассуждений, логические связи между ними, эффективно преобразовывать одни рассуждения в другие. Именно эти особенности обеспечили широкое использование символической логики в исследованиях по основаниям математики, искусственному интеллекту, информатике, лингвистике и многим другим областям научного знания.

В настоящее время символическая логика представляет достаточно обширную и дифференцированную совокупность теорий и исследований. Тем не менее, можно выделить логику высказываний (ЛВ) и ее расширение — логику предикатов (ЛП) в качестве общего базиса.

---

[170] Полное изложение данной темы см.: *Светлов В. А.* Современная логика. СПб., 2006.

Классическая символическая логика включает:

(1) синтаксис — правила построения формализованного языка;

(2) семантику — правила интерпретации выражений построенного языка как осмысленных;

(3) правила вывода — правила, позволяющие из посылок умозаключений выводить необходимые следствия.

Отметим, что эти части являются каноническими не только для классической, но и всех неклассических логик.

Отличают оба вида логик друг от друга следующие два допущения:

---

(1) Значение истинности неквантифицированных высказываний однозначно определяется значением истинности образующих их простых (атомарных) высказываний.

(2) Высказывания, имеющие одно и то же расширение (один и тот же объем или одно и то же значение истинности), считаются эквивалентными.

Если логика выполняет оба допущения, значит, она является классической. В противном случае, т. е. когда не выполняется хотя бы одно из указанных допущений, логика должна быть отнесена к разряду неклассических.

Логика высказываний

Основные определения и допущения логики высказываний

Логика высказываний основана на определенных базисных понятиях и допущениях. Рассмотрим их последовательно. Исходным в ЛВ является понятие высказывания.

Высказывание ЛВ — предложение, выражающее простое или сложное суждение.

Утверждение «Бессмертная любовь, рождаясь вновь, нам неизбежно кажется другою» (*В. Шекспир*) обладает субъектом, предикатом, связкой и знаком количества и тем самым выражает (простое) суждение. Следовательно, оно является высказыванием ЛВ. Выражение «бессмертная любовь» не обладает атрибутами суждения и поэтому не является высказыванием ЛВ.

В отличие от традиционной логики и логики предикатов, субъектно-предикатная структура высказываний в ЛВ не принимается во внимание как не имеющая никакого значения для формализации доказательств.

Субъектно-предикатная структура высказываний в ЛВ не учитывается.

Единственное свойство высказываний ЛВ, которое принимается во внимание — это их способность быть истинными или ложными суждениями. Истину и ложь принято называть логическими значениями, или значениями истинности высказываний ЛВ.

Высказывание ЛВ *истинно*, если и только если истинно выражаемое им суждение. В противном случае высказывание ЛВ считается *ложным*.

Предложение «5 больше 3» — истинное высказывание, потому что выражаемое им суждение истинно. Предложение «3 больше 5», наоборот, ложное высказывание, потому что выражаемое им суждение ложно.

Вторым по значению и логике высказываний является понятие логического союза (связки).

В естественном языке логические союзы выражаются словами «не», «если ..., то», «или», «либо ..., либо», «если и только если», «ни ..., ни» и их многочисленными синонимами. С помощью логических союзов из простых высказываний образуются сложные высказывания.

Высказывание ЛВ считается *сложным*, если и только если оно содержит вхождение хотя бы одного логического союза. В противном случае высказывание является *простым*.

Высказывание «Сегодня среда» — простое. Высказывание «Сегодня среда или четверг» — сложное, так как состоит из двух простых высказываний «Сегодня среда», «Сегодня четверг», соединенных союзом «или». Сложным будет высказывание «Неверно, что сегодня среда», так как оно представляет отрицание простого высказывания «Сегодня среда», с помощью логического союза «неверно, что».

В логике высказываний по соглашению допускается, что каждое простое высказывания либо истинно, либо ложно. При этом некоторые сложные высказывания, именно противоречивые высказывания, могут быть одновременно истинными и ложными.

Допущение бивалентности. Каждое простое высказывание ЛВ либо истинно, либо ложно.

Следует отметить, что в отличие от простых высказываний некоторые сложные, именно противоречивые высказывания, одновременно истинны и ложны. Ниже объясняется, почему такие высказывания называют логически ложными.

В логике высказываний также допускается, что логическое значение любого сложного высказывания однозначно определяется значениями истинности образующих его простых высказываний. Следовательно, значение истинности любого сложного высказывания представляет определенную функцию истинности значений истинности образующих его простых высказываний.

Значение истинности сложного высказывания ЛВ представляет *функцию истинности* значений истинности составляющих его простых высказываний.

Функции истинности представляют разновидность функций в обычном понимании — как правил, связывающих переменные, называемые аргументами функции, с другими, называемыми ее значениями. *Аргументами и значениями функций истинности служат логические значения — истина и ложь.* Например, логическое отрицание представляет одноаргументную функцию истинности в следующем смысле. Если высказывание «Сегодня среда» (аргумент функции отрицания) истинно (ложно), то ложно (истинно) высказывание «Неверно, что сегодня среда» (значение функции отрицания). Кроме одноаргументных функций в ЛВ встречаются двух-, трех-, …, *n*-аргументные функции истинности. Логику высказываний часто определяют как теорию подобных функций истинности.

Синтаксис логики высказываний

Как и всякий язык, язык логики высказываний имеет определенный алфавит и правила построения с его помощью последовательностей знаков, называемых (правильно построенными) формулами.

Синтаксис ЛВ — алфавит и правила, определяющие:

(1) какие знаки входят в множество символов алфавита логики высказываний;

(2) какие последовательности знаков являются (правильно построенными) формулами ЛВ.

Правильно построенная формула ЛВ — последовательность знаков, которая может быть интерпретирована в качестве истинного или ложного высказывания. Для краткости далее термин «формула» везде употребляется в смысле «правильно построенная формула».

Алфавит логики высказываний

Полный алфавит ЛВ, необходимый для построения формул логики высказываний, задается следующим определением (табл. 1).

Таблица 1

Алфавит логики высказываний

1	Знаки для обозначения простых высказываний (атомарных формул) — прописные начальные буквы латинского алфавита.	$A, B, C, \ldots$
2	Знаки для обозначения логических союзов.	
	2.1. Знак логического отрицания: «неверно, что».	$\neg$
	2.2. Знак конъюнкции: «и».	&
	2.3. Знак слабой дизъюнкции: «или».	$\vee$
	2.4. Знак импликации: «если ..., то».	$\supset$
	2.5. Знак эквивалентности: «если и только если».	$\equiv$
	2.6. Знак сильной дизъюнкции: «либо ..., либо».	$\not\equiv$

Окончание таблицы 1

3	Левая и правая скобки (для указания области действия логических союзов).	(,)
4	Запятая (для разделения формул в посылках).	,
5	Знак для обозначения отношения логического следования: «выводимо, следует».	$\vdash$
6	Знак для обозначения логической лжи и замкнутой ветви дерева формулы.	■
7	Иных знаков, кроме указанных в п. 1–6, в логике высказываний нет.	

Пусть ϕ, φ, γ, ... обозначают (мета)переменные, пробегающие по всему множеству высказываний ЛВ[171]. Это означает, что вместо каждой из букв греческого алфавита можно подставлять любое простое или сложное высказывание. Например, вместо переменной ϕ можно подставить высказывание A или высказывание $\neg A$, или высказывание $(A \supset B)$ и т. д. Аналогично для φ, γ, ... Если в выражении $\neg\phi$ переменную ϕ заменить на высказывание A, то получится $\neg A$, а если на $\neg A$, то возникнет высказывание с двойным отрицанием $\neg\neg A$ (которое эквивалентно A). Заменяя в $\neg\phi$ переменную ϕ на $(A \equiv B)$, получаем высказывание $\neg(A \equiv B)$.

Правила образования формул логики высказываний

В терминах заданного алфавита ЛВ конструируются формулы — символические эквиваленты простых и сложных высказываний, согласно следующему определению (табл. 2).

Таблица 2

Правила построения формул логики высказываний

1	Простые высказывания A, B, C, ... — формулы ЛВ.
2	Если ϕ — (не обязательно атомарная) формула, то $\neg\phi$ — тоже формула ЛВ.

[171] Читается как «фи», «пси», «гамма».

Окончание таблицы 2

3	Если ϕ и φ — (не обязательно атомарные) формулы, то высказывания $(\phi \& \varphi)$, $(\phi \vee \varphi)$, $(\phi \supset \varphi)$, $(\phi \equiv \varphi)$, $(\phi \not\equiv \varphi)$ — тоже формулы ЛВ.
4	4.1. Атомарные формулы ЛВ со знаком отрицания или без него в скобки не заключаются.
	4.2. В каждой формуле ЛВ со скобками число левых и правых скобок должно быть одинаковым.
5	Иных формул, кроме указанных в п. 1–4, в логике высказываний нет.

Понятие подформулы

Некоторые части формулы сами являются формулами. В этом случае говорят о подформулах данной формулы. Например, подформулами формулы $((A \& B) \supset (A \vee B))$ являются формулы $(A \& \mathrm{B})$ и $(A \vee B)$, формулы A и B, а также вся данная формула, так как считается, что она является частью самой себя.

Подформула — формула ЛВ, входящая в состав другой формулы ЛВ.

Согласно определению формулы ЛВ, последовательность символов $((A \& (A \supset B)) \supset B)$ является формулой, а последовательности символов $(A \vee \& B)$, (A) и $(\equiv B)$ нет.

В выражении $((A \& (A \supset B)) \supset B)$ к числу формул принадлежат, во-первых, все ее атомарные подформулы — A и B, во-вторых, все ее неатомарные подформулы — $(A \supset B)$, $(A \& (A \supset B))$, включая и саму формулу $((A \& (A \supset B)) \supset B)$, так как она также является подформулой самой себя. Число левых скобок соответствует числу правых скобок.

В выражении $(A \vee \& B)$ переменные A и B соединены подряд логическими союзами $\vee$ и $\&$, что нарушает п. 3 определения формулы ЛВ, согласно которому все указанные там логические союзы являются бинарными. В выражении (A) атомарная формула A взята в скобки, что нарушает п. 4.1 определения формулы ЛВ. Выражение $(\equiv B)$ нарушает сразу два пункта определения формулы ЛВ — 3 и 4.1.

Главный логический союз

В каждой неатомарной формуле имеется логический союз, который считается главным. Если в формуле один логический союз, то он и является главным. Например, в формуле $\neg A$ единственным, и поэтому главным, логическим союзом является знак «$\neg$». Соответственно формула A является подформулой формулы $\neg A$. В формуле $(A \supset (A \vee B))$ главным логическим союзом является знак импликации, так как именно он при построении этой формулы вводится последним.

Главный логический союз неатомарной формулы ЛВ — союз, который при ее построении вводится последним.

Область действия логического союза

Каждый логический союз имеет определенную область действия, в качестве которой выступают все подчиняющиеся ему подформулы. Например, область действия знака отрицания в формуле $\neg A$ составляет подформула A, в формуле $\neg(A \;\&\; B)$ — подформула $(A \;\&\; B)$. В формуле $(A \supset (A \vee B))$ область действия знака нестрогой дизъюнкции образуют формулы A и B, область действия знака импликации — формулы A и $(A \vee B)$.

Очевидно, что область действия главного логического союза составляют все подформулы данной формулы ЛВ.

Область действия логического союза образуют все подформулы данной формулы ЛВ, которые он связывает.

Формализация высказываний

Типичная синтаксическая задача — формализация высказываний. Алгоритм формализации следующий. В анализируемом высказывании сначала находят все простые высказывания. Каждое из них обозначается новым символом, если оно не эквивалентно ни одному из уже обозначенных высказываний. Затем определяют логические союзы, связывающие простые высказывания. Наконец, конструируется формула, каждая атомарная формула которой обозначает некоторое простое высказывание, а сама она выражает логическую структуру формализуемого высказывания. Чтобы сделать процесс формализации более понятным, рассмотрим несколько примеров.

Пример

«Поскольку всех счастливее в этом мире тот, кто довольствуется малым, то власть имущих и честолюбцев надо считать самыми несчастными людьми, потому что для счастья им нужно несметное множество благ» (*Франсуа де Ларошфуко*).

Простые высказывания: A = «Всех счастливее в этом мире тот, кто умеет довольствоваться малым», B = «Власть имущих надо считать самыми несчастными людьми», C = «Честолюбцев надо считать самыми несчастными людьми», D = «Для счастья им нужно несметное множество благ».

Логические союзы: $\supset$, &.

Формула: $(A \supset (D \supset (B \,\&\, C)))$.

Семантика логики высказываний

Любая формула остается не более чем последовательностью абстрактных знаков, если нельзя установить, каков ее логический смысл. В логике высказываний формула считается осмысленной, если ей можно приписать в качестве логического значения либо «истину», либо «ложь». Процедуру задания значений истинности атомарных формул и вычисления значения истинности всей формулы принято называть интерпретацией.

Интерпретацией формулы ЛВ называется такое приписывание значений истинности всем ее атомарным подформулам, при котором каждая из них получает значение «истина» или значение «ложь» (но не оба вместе).

Анализ понятий «истина», «ложь», «значение», «смысл», обоснование правил интерпретации формул — основные задачи семантики как общего раздела логики. В этой работе анализ семантики

ЛВ ограничен формулировкой и обоснованием правил интерпретации формул.

Семантика ЛВ — правила интерпретации формул ЛВ как осмысленных (истинных или ложных) высказываний.

Правила интерпретации формул ЛВ

Интерпретация произвольной формулы ЛВ совершается в два этапа. На первом определяются значения истинности всех ее атомарных подформул. С этой целью каждой атомарной подформуле сопоставляется определенное простое высказывание. На втором этапе вычисляется значение истинности всей формулы по определенным правилам (таблицам истинности).

Правила интерпретации формул ЛВ

1. Каждой атомарной формуле интерпретируемой формулы ставится в соответствие определенное простое высказывание из универсума (области) интерпретации.
2. Атомарной формуле приписывается значение «истина» или «ложь» в соответствии с тем, истинно или ложно выражаемое ею простое высказывание.
3. Значение истинности всей интерпретируемой формулы ЛВ вычисляется как функция значений истинности всех своих атомарных формул (всех своих аргументов).

Логические союзы как функции истинности. Таблицы истинности

Допустим, даны две формулы $(\phi \supset \varphi)$ и $(\phi \not\equiv \varphi)$. Чтобы вычислить значение их истинности, согласно п. 1 правил интерпретации сначала необходимо сопоставить их с простыми высказываниями. Пусть универсумом интерпретации служит множество натуральных чисел и ϕ = «5 больше 2», φ = «3 больше 4». Теперь согласно п. 2 правил интерпретации можно вычислить значение истинности атомарных формул ϕ и φ. Известные правила арифметики однозначно вынуждают приписать формуле ϕ значение «истина», формуле φ — значение «ложь».

Так как формулы ($\phi \supset \varphi$) и ($\phi \not\equiv \varphi$) обозначают сложные высказывания, то для вычисления окончательного значения их истинности требуется применение п. 3 правил интерпретации. Для этого необходимо знать смысл соединяющих их логических союзов. Этот смысл задается следующими определениями (T обозначает истину, F — ложь).

Определение логического отрицания

Логическим отрицанием формулы ϕ называется противоречащая ей формула $\neg\phi$, которая истинна, если ϕ — ложна, и ложна, если ϕ — истинна.

Назовем *таблицей истинности* формулы ϕ функцию истинности ϕ всех своих атомарных подформул. При этом формула ϕ может быть как простым, так и сложным высказыванием.

Таблица истинности логического отрицания произвольной формулы ϕ имеет следующий вид (для наглядности указаны аргументы и значение каждой определяемой функции):

Аргумент	**Значение**
ϕ	$\neg\phi$
T	F
F	T

Первый столбец таблицы (аргумент функции логического отрицания) указывает все возможные логические значения формулы ϕ. Второй столбец содержит соответствующие логические значения формулы $\neg\phi$. Из таблицы следует, что логически отрицающие друг друга формулы не могут быть вместе ни истинны, ни ложны. Если одна из них истинна, то другая ложна, и наоборот. При этом формула ϕ может обозначать как простое, так и сложное высказывание.

Пусть ϕ = «Я читаю книгу». Тогда $\neg\phi$ = «Неверно, что я читаю книгу». Одно их этих высказываний необходимо истинно, а другое необходимо ложно.

Следующие логические союзы определяются для двух произвольных формул — ϕ и φ, так как все они представляют двухаргументные функции истинности.

Определение конъюнкции

Конъюнкцией формул ϕ и φ называется формула $(\phi \,\&\, \varphi)$, которая истинна, если истинны как ϕ, так и φ, и ложна во всех остальных случаях.

Таблица истинности конъюнкции двух произвольных формул ϕ и φ имеет следующий вид:

Первый аргумент	Второй аргумент	Значение функции
ϕ	φ	$(\phi \,\&\, \varphi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Каждая формула может быть либо истинной, либо ложной. Следовательно, для двух формул мы имеем четыре возможности: ϕ и φ обе истинны; ϕ истинна, но φ ложна; ϕ ложна, но φ истинна; ϕ и φ обе ложны. В общем, если имеется n формул, то существует 2^n возможностей их истинности. Читая третий столбец, мы видим, что формула $(\phi \,\&\, \varphi)$ получает значение «истина» только в случае совместной истинности формул ϕ и φ. Во всех остальных случаях она получает значение «ложь».

Формулы, соединяемые знаком конъюнкции, принято называть конъюнктами.

В формализованном языке перестановка местами конъюнктов не ведет к изменению логического значения формулы. Иными словами, формулы $(\phi \,\&\, \varphi)$ и $(\varphi \,\&\, \phi)$ эквивалентны (имеют одно и то же логическое значение). В естественном языке конъюнктивная связь часто выражает упорядоченную последовательность событий, и перестановка местами ее членов искажает смысл всего высказывания. Высказывания «Я почистил зубы и лег спать» и «Я лег спать и почистил зубы» вряд ли кто-нибудь посчитает эквивалентными.

Определение слабой дизъюнкции

Слабой дизъюнкцией формул ϕ и φ называется формула $(\phi \vee \varphi)$, которая истинна, если истинна хотя бы одна из них, и ложна, когда ложны как ϕ, так и φ.

Таблица истинности слабой дизъюнкции двух произвольных формул ϕ и φ имеет следующий вид:

Первый аргумент	Второй аргумент	Значение функции
ϕ	φ	$(\phi \vee \varphi)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Формулы, соединяемые знаком (слабой и сильной) дизъюнкции, принято называть дизъюнктами.

Формула $(\phi \vee \varphi)$ ложна, если и только если ложны все ее дизъюнкты. Во всех остальных случаях она истинна. В отличие от конъюнкции дизъюнкты могут переставляться в любом порядке без потери смысла как в формализованном, так и в естественном языке.

Определение импликации

Импликацией формул ϕ и φ называется формула $(\phi \supset \varphi)$, которая ложна тогда, когда истинна ϕ и ложна φ, и истинна во всех остальных случаях.

Таблица истинности импликации двух произвольных формул ϕ и φ имеет следующий вид:

Первый аргумент	Второй аргумент	Значение функции
ϕ	φ	$(\phi \supset \varphi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

В формуле $(\phi \supset \varphi)$ подформулу ϕ принято называть антецедентом (лат. *antecedens* — предшествующий), подформулу φ — консеквентом (лат. *consequens* — следствие).

В естественном языке союз «если ..., то», кроме причинной связи, может выражать временну́ю последовательность событий, связь условия и средства ее достижения, условие какого-либо договора или соглашения. Однако в логике высказываний данному союзу придается только то значение, которое зафиксировано таблицей: ***антецедент есть только достаточное условие истинности консеквента, консеквент есть только необходимое условие истинности антецедента***. Из-за такой асимметрии перестановка местами членов импликации в общем случае неправомерна.

Определение эквивалентности

Эквивалентностью формул ϕ и φ называется формула $(\phi \equiv \varphi)$, которая истинна тогда, когда формулы ϕ и φ обе истинны или ложны одновременно, и ложна во всех во всех остальных случаях.

Таблица истинности эквивалентности двух произвольных формул ϕ и φ имеет следующий вид:

Первый аргумент	Второй аргумент	Значение функции
ϕ	φ	$(\phi \equiv \varphi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Из таблицы следует, что формулы ϕ и φ эквивалентны, если и только если каждая из них необходима и достаточна для истинности другой формулы. Или, что то же, если истинны как прямая импликация ($\phi \supset \varphi$), так и ей обратная ($\varphi \supset \phi$). Значит, эквивалентные формулы ЛВ одновременно либо все истинны, либо все ложны. Если истинно (ложно), что сегодня понедельник, значит, истинно (ложно), что завтра будет вторник, послезавтра среда, вчера было воскресенье, позавчера была суббота и т. п.

Эквивалентные формулы могут переставляться местами без потери смысла высказывания, которое они образуют.

Определение сильной дизъюнкции

Сильной дизъюнкцией формул ϕ и φ называется формула ($\phi \not\equiv \varphi$), которая истинна тогда, когда либо формула ϕ истинна и формула φ ложна, либо формула ϕ ложна и формула φ истинна, и которая ложна во всех остальных случаях.

Таблица истинности сильной дизъюнкции двух произвольных формул ϕ и φ имеет следующий вид:

Первый аргумент	**Второй аргумент**	**Значение функции**
ϕ	φ	($\phi \not\equiv \varphi$)
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Дизъюнкты формулы ($\phi \not\equiv \varphi$) часто называют альтернативами, имея в виду, что один и только один дизъюнкт истинный, или что логическая сумма альтернатив образует полное множество.

Сильная дизъюнкция представляет собой логическое отрицание эквивалентности. В отличие от слабой, сильная дизъюнкциями запрещает одновременную истинность всех или некоторых дизъюнктов, кроме одного, а также запрещает их одновременную ложность.

Если значения истинности простых высказываний неизвестны, строят таблицу истинности исследуемой формулы. Такая таблица ничем не отличается от таблиц истинности логических союзов. Она представляет функцию истинности всех своих атомарных подформул.

Таблица истинности формулы $\neg(A \ \& \ \neg(B \supset C))$ имеет следующий вид:

A	B	C	$\neg$	$(A \ \&$	$\neg$	$(B \supset C))$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	F	T
1	2	3	7	6	5	4

Объяснение. В исследуемой формуле имеется три простых высказывания — *A*, *B* и *C*. Значит, существует $2^3 = 8$ возможных интерпретаций (строк) их значений истинности. Первые три столбца (три аргумента функции) символизируют эти возможности. Например, первая строка таблицы говорит о том, что все три высказывания вместе истинны; восьмая строка — что они все вместе ложны.

Столбцы с четвертого по пятый указывают порядок и результат вычисления значения истинности подформулы, управляемой определенным логическим союзом. Каждый столбец размещается под тем логическим союзом, в область действия которого входит анализируемая подформула. Например, столбец (4) содержит значение истинности подформулы $(B \supset C)$; столбец (5) — значение истинности подформулы $\neg(B \supset C)$; столбец (6) — значение истинности подформулы $(A \ \& \ \neg(B \supset C))$; заключительный столбец (7) — значение истинности всей формулы $\neg(A \ \& \ \neg(B \supset C))$. Интерпретация данной формулы завершена. Каковы ее итоги?

Правильно построенная таблица истинности должна содержать *все возможные интерпретации истинности и ложности* рассматриваемой формулы. Анализ таблицы показывает, что исследуемая формула ложна только в той интерпретации, которую указывает вторая строка — атомарные формулы A, B истинны, атомарная формула C ложна. Во всех остальных интерпретациях указанная сложная формула истинна. Самую интересную интерпретацию представляет восьмая строка: все три атомарные формулы ложны, но формула в целом, тем не менее, истинна. Поскольку других интерпретаций нет и быть не может, мы получаем исчерпывающую информацию о логических свойствах исследуемой формулы.

Логически истинные, логически ложные и логически нейтральные формулы

Все формулы ЛВ делятся на два взаимно исключающих и совместно исчерпывающих класса — выполнимые и невыполнимые. Выполнимые формулы делятся далее на логически истинные и логически нейтральные.

Формулы логики высказываний		
Выполнимые		Невыполнимые
Логически истинные (**тавтологии**)	Логически нейтральные (**правдоподобные**)	Логически ложные (**противоречивые**)

Формула ЛВ считается *выполнимой*, если существует хотя бы одна интерпретация (набор значений истинности атомарных формул), в которой она истинна, и *невыполнимой* в противном случае.

Формула называется *логически истинной*, если она истинна во всех своих интерпретациях, т. е. при любых наборах значений истинности своих атомарных формул. Такие формулы также часто называют *тавтологиями* (от греч. *tauto* — то же самое и *logos* — высказывание), *законами логики*, *логическими истинами*, *общезначимыми*, *тождественно истинными*. Все тавтологии сводимы к виду $(\phi \vee \neg\phi)$, где на место ϕ может подставляться *любая* формула ЛВ.

Формула называется *логически ложной* (*невыполнимой*, *противоречивой*, *тождественно ложной*), если не существует ни одной интерпретации, т. е. набора значений истинности ее атомарных формул, в которой она была бы истинна. Такие формула выражают логические противоречия. Все логически ложные формулы сводимы к виду ($\phi \& \neg\phi$), где на место ϕ может подставляться *любая* формула ЛВ.

Формула называется *логически нейтральной*, если существует хотя бы одна интерпретация, в которой она истинна, и хотя бы одна интерпретация, в которой она ложна. Это означает, что такие формулы не могут быть логически истинными и логически ложными. Они лишь относительно истинны и относительно ложны.

Отношение логического следования в логике высказываний

Отношение логического следования лежит в основании всей дедуктивной логики. Сказанное относится и к логике высказываний.

Пусть α и β обозначают соответственно множества формул, образующих посылки и заключение доказательства в ЛВ. Тогда справедливо следующее определение.

Заключение β логически следует из посылок α, если и только если в каждой интерпретации (в каждой строке таблицы истинности формулы ($\alpha \supset \beta$)), в которой истинно α, также истинно заключение β.

Основные законы логики высказываний

Одним из важных свойств логических истин является то, что они выражают законы логики — принципы сохранения истины. Хотя логических истин и, тем самым, логических законов существует бесконечное число, обычно выделяют некоторое конечное подмножество в качестве правил, позволяющих преобразовывать формулы.

Закон снятия двойного отрицания:

$$\neg\neg\phi \equiv \phi.$$

Двойное отрицание не изменяет начального значения истинности высказывания: если оно было истинным (ложным), то в результате двойного отрицания оно и остается истинным (ложным). Поэтому двойное отрицание всегда может быть снято и заменено обычным утверждением.

Законы коммутативности (перестановочности) & и ∨:

$$(\phi \,\&\, \varphi) \equiv (\varphi \,\&\, \phi);$$
$$(\phi \vee \varphi) \equiv (\varphi \vee \phi).$$

Данные законы разрешают переставлять местами конъюнкты и дизъюнкты, так как это не изменяет значения истинности исходной формулы.

Законы ассоциативности (соединения) & и ∨:

$$((\phi \,\&\, \varphi) \,\&\, \gamma) \equiv (\varphi \,\&\, (\phi \,\&\, \gamma));$$
$$((\phi \vee \varphi) \vee \gamma) \equiv (\varphi \vee (\phi \vee \gamma)).$$

Данные законы разрешают вычислять значение истинности формул, состоящих только из конъюнктов или дизъюнктов, в любом порядке, так как это не изменяет значения истинности исходной формулы. Например, безразлично, вычисляется ли сначала значение истинности высказывания (A & B), а затем высказывания ((A & B) & C), или сначала высказывания (B & C), а затем высказывания (A & (B & C)). Аналогично для дизъюнктивной формулы.

Законы дистрибутивности (распределения) & относительно ∨, и наоборот:

$$(\phi \,\&\, (\varphi \vee \gamma)) \equiv ((\phi \,\&\, \phi) \vee (\phi \,\&\, \gamma));$$
$$(\phi \vee (\varphi \,\&\, \gamma)) \equiv ((\phi \vee \varphi) \,\&\, (\phi \vee \gamma)).$$

Законы дистрибутивности позволяют «выносить за скобки» формулы, входящие во все конъюнкты или во все дизъюнкты, а также совершать обратную операцию.

Законы идемпотентности (сохранения степени):

$$(\phi \,\&\, \phi) \equiv \phi;$$
$$(\phi \vee \phi) \equiv \phi.$$

Согласно данным законам значение истинности сложных высказываний с многократным вхождением одного и того же конъюнкта (дизъюнкта) полностью определяется значением истинности одного конъюнкта (дизъюнкта).

Законы удаления $\supset$, $\equiv$ и $\not\equiv$:

$$(\phi \supset \varphi) \equiv (\neg\phi \vee \varphi).$$
$$(\phi \equiv \varphi) \equiv ((\phi \supset \varphi) \,\&\, (\varphi \supset \phi));$$
$$\equiv ((\neg\phi \vee \varphi) \,\&\, (\phi \vee \neg\varphi));$$
$$\equiv ((\phi \,\&\, \varphi) \vee (\neg\phi \,\&\, \neg\varphi)).$$
$$(\phi \not\equiv \varphi) \equiv ((\phi \supset \neg\varphi) \,\&\, (\neg\varphi \supset \phi));$$
$$\equiv ((\neg\phi \vee \neg\varphi) \,\&\, (\phi \vee \varphi));$$
$$\equiv ((\phi \,\&\, \neg\varphi) \vee (\neg\phi \,\&\, \varphi)).$$

Согласно приведенным законам формулы, содержащие логические союзы $\supset$, $\equiv$ и $\not\equiv$, могут равносильно заменяться на формулы, содержащие только логические союзы $\neg$, & и $\vee$.

Законы де Моргана (отрицания конъюнкции и дизъюнкции):

$$\neg(\phi \,\&\, \varphi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\varphi);$$
$$\neg(\phi \vee \varphi) \equiv (\neg\phi \,\&\, \neg\varphi).$$

Согласно законам де Моргана высказывание «Неверно, что сегодня ясно и (или) тепло» эквивалентно высказыванию «Сегодня не ясно или (и) не тепло».

Законы поглощения:

$$(\phi \,\&\, (\phi \vee \varphi)) \equiv \phi;$$
$$(\phi \vee (\phi \,\&\, \varphi)) \equiv \phi.$$

Согласно первому закону поглощения, конъюнктивная формула, в которой один конъюнкт ϕ логически более силен, чем другой $(\phi \vee \varphi)$, эквивалентна логически более сильному конъюнкту — ϕ. Согласно второму закону поглощения, дизъюнктивная формула, в которой один дизъюнкт ϕ логически слабее, чем другой $(\phi \& \varphi)$, эквивалентна логически более слабому дизъюнкту — ϕ. Значит, всякая формула эквивалентна дизъюнкции своих самых слабых допущений и одновременно эквивалентна конъюнкции своих самых сильных следствий.

Законы исключения (противоречащих конъюнктов и дизъюнктов):

$$((\phi \& \varphi) \vee (\phi \& \neg\varphi)) \equiv \phi;$$
$$((\phi \vee \varphi) \& (\phi \vee \neg\varphi)) \equiv \phi.$$

Согласно законам исключения, формула, чьи дизъюнкты (конъюнкты) имеют общий член ϕ и отличаются друг от друга только *одной парой* противоречащих подформул φ и $\neg\varphi$, эквивалентна общей для них подформуле ϕ.

Перечисленные законы логики создают базис для развития более эффективного, чем таблицы истинности, метода решения логических задач логики высказываний. Этот метод развивает далее технику анализа, применявшуюся при решении силлогизмов традиционной логики.

Логика предикатов

Основные понятия и допущения логики предикатов

Согласно одному из допущений ЛВ внутренняя структура простых высказываний не учитывается. Если это ограничение снять, мы получим важное обобщение логики высказываний, названное логикой предикатов.

Логика предикатов — логика, созданная для анализа умозаключений, в которых истинность заключения зависит не только от истинности посылок, но также и от их внутренней логической структуры.

Для анализа внутренней структуры высказываний в логике предикатов дополнительно к основным понятиям ЛВ были введены понятия *универсума*, *имени собственного*, *предметной константы*, *предметной переменной*, *предиката*, *терма*, *предметной функции*, *квантора*. Кроме того, использование ЛП требует принятия особых допущений.

Как и в традиционной логике, в логике предикатов все вычисления привязаны к понятию универсума.

Универсум *U* логики предикатов — класс вещей с заданными свойствами и отношениями.

Универсум задает предметную область интерпретации анализируемого рассуждения, позволяет вычислить его логическое значение. Чтобы обсуждать вещи универсума, необходимо для каждой из них иметь *имя собственное* — имя, которое обозначает эту и только эту вещь.

Имя собственное в логике предикатов — термин, обозначающий отдельную вещь универсума.

Логика предикатов, как и традиционная логика, связана с допущением невозможности существования пустых имен, т. е. таких терминов, которым в рассматриваемом универсуме ничего не соответствует (которые не обозначают ни одной вещи универсума).

Допущение непустоты универсума. Каждому имени собственному должна соответствовать некоторая вещь универсума.

В логике предикатов неважно, каким именем обозначается та или иная вещь, важно, *какая вещь* обозначается. Поэтому если два и более различных имени обозначают одну и ту же вещь, то независимо от различия своих интенсионалов (смыслов) они считаются экстенсионально взаимозаменяемыми.

Допущение экстенсиональности. Если два различных имени обозначают одну и ту же вещь, они считаются взаимозаменяемыми и обладают одним и тем же значением истинности.

Как и в логике высказываний, в логике предикатов сохраняется допущение бивалентности.

Допущение бивалентности. Каждое простое высказывание ЛП либо истинно, либо ложно.

Из-за необходимости учитывать внутреннюю структуру высказываний атомарные формулы ЛП значительно отличаются по своей структуре от атомарных формул ЛВ. Напомним, что в ЛВ атомарной формулой считается знак (прописная буква латинского алфавита), обозначающий простое высказывание.

Допустим, задан некоторый универсум U. Относительно каждой его вещи ее имя собственное может быть известно или неизвестно. Если имя собственное вещи известно, то она обозначается одной из строчных начальных букв латинского алфавита a, b, c, ... и называется *предметной константой*. Значение, т. е. обозначаемая вещь, каждой предметной константы фиксировано и не может быть произвольно изменено. Если же имя собственное вещи неизвестно, то она обозначается одной из строчных конечных букв латинского алфавита x, y, z, ... и называется *предметной переменной*. Предметные переменные не имеют фиксированного значения. *Их главная функция состоит в том, чтобы обозначать все вхождения одного и того же имени.* Иными словами, на место каждой предметной переменной одно и то же имя должно подставляться столько раз, сколько имеется ее вхождений.

Различие между предметными константами и переменными поясняет следующий пример. Допустим, необходимо формализовать утверждение, что некоторая вещь из универсума U обладает свойством P. Это можно сделать двумя способами: либо как Pa, если a — известное имя собственное вещи, либо как Px, если имя собственное вещи не известно. Выражение Pa читается: «Данная вещь a из универсума U обладает свойством P». Выражение Px читается «Произвольная вещь x из универсума U обладает свойством P». Фундаментальное различие между обоими случаями состоит в том, что выражения вида Pa, Pb, ... можно оценивать как истинные или ложные, а выражения вида Px, Py, ... — нельзя.

Пусть U = «пищевые продукты», P = «сладкий», a = «сахар», b = «соль». Тогда выражение Pa = «Сахар сладкий» истинно, а выражение Pb = «Соль сладкая» ложно. Сказать же, что Px = «Произвольный пищевой продукт сладкий» истинно или ложно, бессмысленно, потому что неизвестно, о каком именно пищевом продукте идет речь. Знак x обозначает любую съедобную вещь или, как говорят, «пробегает» по всем вещам рассматриваемого универсума. Значит, чтобы выражение ЛП, содержащее вхождения предметных переменных, можно было интерпретировать как истинное или ложное высказывание, их необходимо заменить соответствующими им предметными константами.

Допустим, необходимо формализовать утверждение, что некоторая вещь находится в определенном отношении к другой вещи. Здесь также различаются указанные выше два случая. Выражение вида Rxy означает «Произвольные вещи x и y из универсума U находятся в отношении R друг к другу». Сказать об отношении Rxy, истинно оно или ложно, нельзя до тех пор, пока не станет известно, какие именно вещи обозначают переменные x и y. Пусть U = «числа», $a = 3$, $b = 4$, R = «больше». Тогда неопределенное с истинностной точки зрения выражение Rxy превращается в ложное высказывание Rab = «3 больше 4».

Традиционно предикатом называется мысль, обозначающая либо свойство, которым обладает или не обладает данная вещь, либо отношение, в котором находится или не находится рассматриваемая вещь к другим вещам. В ЛП предикаты интерпретируются как логические функции, отображающие имена собственные как свои аргументы в множество значений истинности. Если в высказывании «Сахар сладкий» заменить константу «сахар» предметной переменной, то результатом замены станет функция «x — сладкий». Подстановка в данную функцию вместо x различных имен собственных будет порождать истинные или ложные высказывания в качестве ее значений. Если исключить случай, когда предикат имеет нулевое множество аргументов, предикатом в собственном смысле слова можно назвать любое высказывание, содержащее по крайней мере одно вхождение предметной переменной. Пусть, как и прежде, T и F обозначают значения истинности.

Предикат — логическая функция, отображающая собственные имена вещей (предметные константы) в множество логических значений {T, F}.

Выражения вида P^1x принято называть *одноместными* (*одноаргументными*) *предикатами*. Их отличительная особенность в том, что *они обозначают свойства вещей*. Выражения вида P^2xy называют *двухместными* (*двухаргументными*) *предикатами*. Их особенностью является то, что они обозначают бинарные отношения. В общем выражения вида P^n принято называть *n-местными предикатами*, обозначающими n-местные отношения, $n \geq 0$. В случае P^0 предикатная буква обозначает простое высказывание ЛВ, которое по допущению бивалентности либо истинно, либо ложно. *Так как атомарные формулы ЛВ сводимы к виду P^0, то они все являются атомарными формулами ЛП.*

Верхними индексами для обозначения местности предиката можно и не пользоваться, так как число мест предиката легко определяется по числу предметных переменных, которыми он управляет. Например, P^3 означает, что после предикатной буквы P должны стоять три предметных переменных — $Pxyz$.

Если необходимо формализовать операцию, отображающую множество предметных констант в это же множество по определенному закону, тогда используют соответствующую этой операции *предметную* (*т. е. не логическую*) *n-местную функцию*. Известные арифметические операции — сложение, вычитание, умножение и деление — представляют частные случаи таких функций. Двухместная функция сложения $f(a, b)$, определенная на множестве натуральных чисел, ставит в соответствие паре определенных натуральных чисел a и b новое число c из этого же множества в качестве результата их суммы: $a + b = c$. Например, $f(1, 2) = 3, f(f(1, 2), f(1, 2)) = f(3, 3) = 3 + 3 = 6$.

Предметные константы и предметные переменные принято объединять общим именем — *простой терм* (от англ. *term*). Понятие терма обобщает понятия субъекта в традиционной логике.

К числу сложных термов относятся n-местные функциональные знаки, $n \geq 0$, сопровождаемые n предметными константами или переменными в качестве простых термов.

Объединение термов с предикатной буквой порождает атомарную формулу ЛП. Основным правилом в этом процессе является следующее: *n-местной предикатной букве должно соответствовать n термов*. Таким образом, выражение P^3 не является атомарной формулой ЛП, так как предикатный символ не сопровождается тремя термами, а выражение вида $Pabx$ — является. Если $t_1, ..., t_n$ — произвольные термы, P^n — произвольный n-местный предикат, то атомарная формула ЛП имеет следующий канонический вид — $P_{t_1} ..._{t_n}$, $n \geq 0$. Только атомарным формулам ЛП и построенным из них сложным формулам можно приписывать то или иное значение истинности.

Некоторые формулы ЛП с вхождениями предметных переменных могут быть квантифицированы. Кванторы в ЛП играют такую же роль, как и знаки количества — «все», «ни один», «некоторые» — в традиционной логике. Они определяют количественные границы свойств и отношений, обозначаемых предикатами.

Пусть универсум состоит из трех вещей, каждая из которых имеет свое собственное имя, $U = \{a, b, c\}$. Если необходимо сказать, что *все вещи данного универсума обладают свойством P*, то это можно сделать двумя способами. Во-первых, можно построить конъюнкцию: (Pa & Pb & Pc), которая истинна, если и только если истинны все ее конъюнкты. Во-вторых, можно использовать специальное сокращение, называемое *квантором общности* и ставящееся перед той формулой, Px в данном случае, количественную характеристику которой оно определяет: $(x)Px$. Формула Px, перед которой поставлен квантор общности, $(x)Px$, читается: «Каждый x обладает свойством P», «Для всех x имеет место свойство P». Формула $\neg(x)Px$ читается «Неверно, что каждый x обладает свойством P». Формула $(x)\neg Px$ читается «Ни один x не обладает свойством P».

Если необходимо сказать, что *некоторые вещи рассматриваемого универсума обладают свойством P*, то это можно сделать также двумя способами. Во-первых, можно построить дизъюнкцию $(Pa \vee Pb \vee Pc)$, которая истинна, если и только если истинен по крайней мере один ее дизъюнкт. Во-вторых, можно использовать специальное сокращение, называемое *квантором существования* и ставящееся перед тем выражением, количественную характеристику которого оно определяет: $(Ex)Px$. Формула Px, перед которой поставлен квантор существования, $(Ex)Px$, читается «Существует такой x, который обладает свойством P», «По крайней мере для одного x имеет место P». Формула $\neg(Ex)Px$ читается «Неверно, что существует такой x, который обладает свойством P». Формула $(Ex)\neg Px$ читается «Некоторые x не обладают свойством P».

Синтаксис логики предикатов

Синтаксис ЛП представляет расширение синтаксиса ЛВ и включает перечень определяемых знаков алфавита ЛП (табл. 1) и правил построения из них термов и формул ЛП (табл. 2).

Таблица 1

Алфавит логики предикатов

1	Знаки для обозначения предметных констант.	$a, b, c, \ldots$
2	Знаки для обозначения предметных переменных.	$x, y, z, \ldots$
3	Знаки для обозначения n-местных предикатов, $n \geq 0$.	$P^n, Q^n, R^n, \ldots$
4	Знаки для обозначения n-местных функциональных символов, $n \geq 0$.	$f^n, g^n, h^n, \ldots$
5	Знаки для обозначения произвольных термов.	$t_1, \ldots, t_n$
6	Знаки для обозначения кванторов общности и существования.	(x), (Ex)
7	Знаки для обозначения логических союзов. 7.1. Знак логического отрицания: «неверно, что». 7.2. Знак конъюнкции: «и». 7.3. Знак слабой дизъюнкции: «или». 7.4. Знак импликации: «если ..., то». 7.5. Знак эквивалентности: «если и только если». 7.6. Знак сильной дизъюнкции: «либо ..., либо».	 $\neg$ $\&$ $\vee$ $\supset$ $\equiv$ $\not\equiv$

Окончание таблицы 1

8	Левая и правая скобки (для указания области действия логических союзов).	(,)
9	Запятая (для разделения формул в посылках).	,
10	Знак для обозначения отношения логического следования: «выводимо, следует».	$\vdash$
11	Знак для обозначения логической лжи и замкнутой ветви дерева формулы.	■
12	Знак для обозначения равенства термов.	=
13	Иных знаков, кроме указанных в п. 1–12, в логике предикатов нет.	

Правила построения формул логики предикатов

Пусть буквы греческого алфавита ϕ, φ, γ, ... обозначают произвольные формулы ЛП. Это означает, что на место каждой из них следует подставлять формулу ЛП столько раз, сколько имеется вхождений данной буквы.

В терминах заданного табл. 1 алфавита ЛП можно конструировать термы и формулы — символические эквиваленты простых и сложных высказываний согласно следующим правилам.

Таблица 2

Правила построения формул логики предикатов

1	Предметная константа и предметная переменная — термы ЛП.
	n-аргументная функциональная буква f^n, $n \geq 0$, сопровождаемая n термами, $f_{t_1 \dots t_n}$, — (сложный) терм ЛП.
	Ничто другое не является термом ЛП.
2	Для всех $n \geq 0$ n-местный предикат P^n, сопровождаемый n термами, $P_{t_1 \dots t_n}$, является атомарной формулой ЛП.
	Терм t_i, соединенный знаком «=» с другим термом t_j, есть атомарная формула ЛП.
	Ничто другое не является атомарной формулой ЛП.

Окончание таблицы 2

3	Любая атомарная формула ЛП — формула ЛП.
4	Если ϕ — формула ЛП, то $\neg\phi$ — также формула ЛП.
5	Если ϕ и φ — формулы ЛП, то $(\phi \& \varphi)$, $(\phi \vee \varphi)$, $(\phi \supset \varphi)$, $(\phi \equiv \varphi)$, $(\phi \not\equiv \varphi)$ — также формулы ЛП.
6	Если ϕ — формула ЛП и предметная переменная ξ входит в ϕ, но ни квантор общности (ξ), ни квантор существования $(E\xi)$ не входят в ϕ, тогда $(\xi)\phi\xi$ — также формула ЛП[172].
7	Если ϕ — формула ЛП и предметная переменная ξ входит в ϕ, но ни квантор общности (ξ), ни квантор существования $(E\xi)$ не входят в ϕ, тогда $(E\xi)\phi\xi$ — также формула ЛП.
8	Иных формул, кроме указанных в п. 2–7, в логике предикатов нет.

Для определения, какие последовательности знаков из табл. 1 являются формулами ЛП, введем понятие подформулы (которое повторяет определение, приведенное для формул ЛВ).

Подформула — формула ЛП, входящая в состав другой формулы ЛП.

Назовем логическим оператором формулы логический союз или квантор, которые в нее входят. Тогда очевидно следующее определение.

Главный логический оператор неатомарной формулы ЛП — союз или квантор, который при ее построении вводится последним.

Область действия логического союза и квантора

Введем точные определения области действия логического союза (повторяет определение для формул ЛВ) и квантора.

[172] Метапеременная ξ, вместо которой могут подставляться предметные переменные $x, y, z, \dots$, читается как «кси».

Область действия логического союза образуют все подформулы, которые он связывает.

Область действия квантора составляет подформула, *которая начинается сразу после квантора*.

В формуле $(x)((Ey)Pxy \supset (Ey)(\neg Pxy \vee Qxy))$, которая рассматривалась выше, *областью действия* первого квантора существования (Ey) является подформула $(Ey)Pxy$; областью действия второго квантора существования (Ey) — подформула $(Ey)(\neg Pxy \vee Qxy)$; областью действия квантора общности (x) — вся формула в целом.

Связанные и свободные переменные

Некоторые предметные переменные, совпадающие с переменной квантора общности или существования, могут находиться в области его действия. Если это имеет место, вхождение такой переменной называется связанным. В противном случае оно считается свободным.

Вхождение предметной переменной ξ называется *связанным*, если и только если она является переменной квантора общности (ξ) или квантора существования $(E\xi)$, или находится в области действия по *крайней мере одного из них. Всякое иное вхождение переменной ξ называется свободным*.

В формуле $(x)Pxy$ предметная переменная x связана, а предметная переменная y свободна. Одна и та же предметная переменная может входить в формулу свободно и связанно одновременно. Например, в формуле $(x)Pxy$ & $(y)Qy$ предметная переменная y входит свободно в конъюнкт $(x)Pxy$ и связанно в конъюнкт $(y)Qy$.

Допустим, дана формула $((Px \,\&\, (Ey)Qxy) \vee (z)(Qxz \supset Rxbz))$. В подформулу $(Qxz \supset Rxbz)$ переменные x и z входят свободно; в подформулу $(z)(Qxz \supset Rxbz)$ переменная z входит связанно, а переменная x — свободно; в формулу в целом переменные y и z входят связанно, а переменная x — свободно.

Формализация в логике предикатов

Для формализации высказываний в ЛВ необходимо иметь знаки для обозначения атомарных формул и такое множество логических союзов, которое позволяет выражать все виды совместимости и несовместимости между высказываниями. Формализация высказываний в ЛП носит более сложный характер. Для ее осуществления необходимо иметь:

(а) знаки для обозначения свойств вещей или их отношений друг к другу;

(б) предметные константы для обозначения имен собственных вещей;

(в) предметные переменные для обозначения области действия квантора общности или существования;

(г) функциональные знаки для обозначения операций над константами.

Примем соглашение не ставить внешних скобок в формулах ЛП, начинающихся с кванторов.

Пример

Пусть U = «люди»; x, y — предметные переменные; a, b — предметные константы; Pxy = «x — учитель y».

1. «Если a — учитель b, то a чей-то учитель»:

$$(Pab \supset (Ey)Pay).$$

2. «b — ученик a или b — свой собственный ученик»:

$$(Pab \vee Pbb).$$

3. «Если все свои собственные учителя, то a — свой собственный учитель и b — свой собственный учитель»:

$$(x)Pxx \supset (Paa \ \& \ Pbb).$$

4. «Каждый — учитель кого-нибудь тогда и только тогда, когда кто-нибудь — ученик каждого»:

$$(x)(Ey)Pxy \equiv (Ey)(x)Pxy.$$

5. «Неверно, что если a — не учитель b, то b — не чей-то ученик»:

$$(\neg(\neg Pab \supset \neg(Ex)Pxb)).$$

Семантика логики предикатов

Семантика ЛП, как и ее синтаксис, обобщает семантику ЛВ. Как и в логике высказываний, главная семантическая проблема логики предикатов — интерпретация формул как осмысленных выражений.

Семантика ЛП — соглашения и правила, позволяющие интерпретировать формулы логики предикатов как *осмысленные*, т. е. *истинные или ложные высказывания.*

В логике высказываний для интерпретации формулы достаточно поставить в соответствие ее «атомам» простые высказывания и построить таблицу истинности. В логике предикатов это невозможно. Во-первых, потому что ее формулы, кроме знаков, обозначающих логические союзы, содержат знаки, символизирующие нелогические термины — предикатные символы, предметные переменные и константы, функциональные символы и кванторы общности и существования, интерпретация которых подчиняется особым правилам. Во-вторых, потому что логически истинные формулы ЛП должны быть общезначимы в *любом* универсуме, включая универсум с бесконечным числом вещей.

Интерпретацией формулы ЛП называется

(1) определение значений всех ее нелогических терминов;

(2) вычисление значения ее истинности в данном универсуме.

Понятие интерпретации формул ЛП основано на понятии расширения нелогических терминов произвольной формулы ЛП.

Расширением (значением)

- предметной константы в универсуме U называется та вещь, *чьим именем собственным она является*;

- (свободной и связанной) предметной переменной в универсуме U называется *произвольная* вещь U;
- предиката P^n, $n \geq 0$, в универсуме U называется множество элементов U, выполняющих данный предикат;
- функционального символа f^n, $n \geq 0$, в универсуме U называется множество элементов U, удовлетворяющих аргументам и значению обозначаемой им операции.

Расширение предметной константы и предметной переменной не вызывает особых вопросов. Если в словарь формулы ЛП входят константа a и переменная x, то расширением a в универсуме U = «герои пушкинских произведений» должно быть некоторое имя собственное, например, «Татьяна Ларина», расширением x — *любой* элемент универсума, который может быть подставлен на место x, включая и указанное имя собственное.

Расширение предиката соотносимо с определением его объема в традиционной логике. Выяснить расширение предиката ЛП означает вычислить его объем в заданном универсуме интерпретации. Если объем предиката не пуст, он получает значение «истина», в противном случае — значение «ложь».

Результат расширения произвольного предиката P^n, $n \geq 0$, зависит от того, обозначает ли он простое высказывание ЛВ ($n = 0$), свойство ($n = 1$) или отношение ($n > 1$).

Если $n = 0$, предикат P^n обозначает простое высказывание ЛВ, которое либо истинно, либо ложно. В этом случае расширение предиката P^n сводится к доказательству P^n = T или P^n = F.

Если $n = 1$, предикат P^n обозначает свойство. В этом случае расширением предиката P^n является (возможно, пустое) множество всех вещей универсума, выполняющих его. Расширением предиката Px = «x — круглый» в произвольном универсуме, будет множество всех круглых вещей. Если оно не пусто, предикат Px получает значение «истина», Px = T; если же в заданном универсуме нет ни одной круглой вещи, то предикат Px получает значение «ложь», Px = F. В рассматриваемом случае процедура расширения предиката, обозначающего свойство, сводится к отображению элементов U, образующих его расширение, во множество {T, F}.

Если $n = 2$, предикат P^n обозначает бинарное отношение. В этом случае расширением предиката P^n является (возможно, пустое) множество всех упорядоченных пар элементов универсума, выполняющих данное отношение. Расширением предиката Pxy = «x меньше y на единицу» в универсуме $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ будет подмножество упорядоченных пар чисел {<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 5>} таких, что каждое левое из них меньше правого ровно на единицу. Чтобы образовать множество упорядоченных пар, необходимо построить произведение $U \cap U = U^2$. Если расширение предиката, обозначающего бинарное отношение, не пусто, он получает значение «истина», в противном случае — значение «ложь». В данном случае процедура расширения предиката, обозначающего бинарное отношение, сводится к отображению элементов U^2, образующих его расширение, во множество {T, F}.

Если $n > 2$, предикат P^n обозначает n-местное отношение с числом термов, большим двух. В этом случае расширение предиката P^n образует (возможно, пустое) множество всех упорядоченных n-ок элементов универсума, выполняющих обозначаемое им отношение. И в этом случае процедура расширения предиката сводится к отображению последовательностей упорядоченных элементов из множества, образованного n-й степенью U: $U \cap U \cap \ldots \cap U = U^n$, $n > 2$, и образующих его расширение, во множество {T, F}. Например, в универсуме $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ расширением предиката $Pxyz$ = «y больше x и меньше z на единицу» будет множество упорядоченных троек чисел {<1, 2, 3>, <2, 3, 4>, <3, 4, 5>}, которое является подмножеством множества всех троек: $U \cap U \cap U = U^3$.

В общем случае, построить расширение предиката P^n, $n \geq 0$, означает установить его соответствие с отображением произведения U^n во множество {T, F}.

Результат расширения произвольной функции f^n, $n \geq 0$, зависит от того, обозначает ли она предметную константу ($n = 0$) или n-местную операцию ($n \geq 1$) в заданном универсуме интерпретации.

Если $n = 0$, функция f^n обозначает предметную константу. Это возвращает нас к проблеме расширения данной константы.

Если $n = 1$, функция f^n обозначает одноместную операцию. В универсуме U = «натуральные числа» функции f^1 может соответствовать, например, операция возведения в квадрат: $f^1 = x^2$. Расширением такой функции будет следующая бесконечная последовательность результатов возведения в квадрат: $f^1(1) = 1$, $f^1(2) = 4$, $f^1(3) = 9$, … . Для вычисления расширения одноместной функции необходимо построить отображение (обозначается далее символом «→») множества элементов универсума в это же множество элементов, $U \to U$.

Если $n = 2$, функция f^n обозначает двухместную операцию. В универсуме U = «натуральные числа» функции f^2 может соответствовать, например, операция сложения: $f^2 = (x + y)$. Расширением этой функции будет следующая бесконечная последовательность результатов сложения всех пар чисел: $f^2(1 + 1) = 2$, $f^2(1 + 2) = 3$, $f^2(2 + 1) = 3$, ... Для вычисления расширения двухместной функции необходимо построить отображение множества элементов универсума в это же множество элементов, $U^2 \to U$.

В общем случае построить расширение функции f^n, $n \geq 0$, означает установить ее соответствие с отображением произведения U^n во множество элементов U.

Истинность квантифицированных высказываний также основана на понятии расширения.

Произвольная формула $(\xi)\phi\xi$ ЛП, главным знаком которой является квантор всеобщности, истинна в заданном универсуме, если формула $\phi\xi$ истинна в каждом своем расширении; аналогично формула $(E\xi)\phi\xi$, главным знаком которой является квантор всеобщности, истинна в заданном универсуме, если формула $\phi\xi$ истинна хотя бы в одном своем расширении.

Объединяет сказанное следующее определение.

Формула ЛП получает *интерпретацию*, если

(1) задан универсум интерпретации U;

(2) определено расширение каждого ее нелогического символа в U;

(3) формуле $(\xi)\phi\xi$, главным знаком которой является квантор всеобщности, приписано значение «истина», если формула $\phi\xi$ истинна при подстановке на место переменной ξ любой вещи из универсума U; и приписано значение «ложь» в противном случае;

(4) формуле $(E\xi)\phi\xi$, главным знаком которой является квантор существования, приписано значение «истина», если формула $\phi\xi$ истинна при подстановке на место переменной ξ по крайней мере одной вещи из универсума U; и приписано значение «ложь» в противном случае;

(5) формуле, главным знаком которой является логический союз, приписано значение истинности согласно правилу для этого логического союза.

Результатом интерпретации может стать любой один из следующих результатов. Формула ЛП может быть истинна по крайней мере в одной интерпретации, истинна во всех интерпретациях, ложна во всех интерпретациях. По аналогии с логикой высказываний получаем следующее определение.

Формула ЛП

- *выполнима*, если и только если она истинна хотя бы в одной интерпретации;
- *логически истинна*, если и только если она истинна во всех интерпретациях;
- *логически ложна, т. е. невыполнима*, если и только если она ложна во всех интерпретациях.

Пример

Вычислить значение истинности следующих формул в $U = \{a, b\}$, где a = «Сократ», b = «Платон», Pxy = «x старше y».

$(x)(y)Pxy = (y)Pay \& (y)Pby$

(расширение формулы $(x)[(y)Pxy]$) =

$= ((Paa \& Pab) \& (Pba \& Pbb))$

(расширение формулы $(x)(y)Pxy$) =

$= ((F \& T) \& (F \& F))$

(значения истинности элементов расширения) =

$= (F \& F) =$

$= F$ (значение истинности формулы $(x)(y)Pxy$).

По определению квантор общности вводит конъюнкцию элементов расширения предиката Pxy, а квантор существования — их дизъюнкцию. Согласно правилам для конъюнкции и дизъюнкции вычисляется значение истинности каждой формулы в целом.

В итоге только формула $(Ex)(Ey)Pxy$ истинна в указанном универсуме при заданном значении констант и предикатного символа.

Значит, она истинна в данной интерпретации и тем самым выполнима, а все остальные формулы в этой интерпретации ложны.

Отношение логического следования в логике предикатов

Формула ЛП может быть истинна во многих интерпретациях, но поскольку число универсумов интерпретации потенциально бесконечно, то никто не может гарантировать, что не найдется хотя бы один, в котором данная формула окажется ложной. Учитывая это обстоятельство, в ЛП отношение логического следования принято определять следующим образом. Пусть α и β, как и прежде, обозначают соответственно множества формул, образующих посылки и заключение доказательства в ЛП.

Если α и β не содержат свободных вхождений предметных переменных, тогда *заключение β логически следует из посылок α*, если и только если невозможна (противоречива) интерпретация, в которой α истинно, а заключение β ложно.

Отношение логического следования в ЛП сохраняет все свойства отношения логического следования в ЛВ — рефлексивность, несимметричность и транзитивность, но обладает определенной спецификой, которая связана с введением кванторов.

Кванторы общности и существования не являются независимыми. Любой из них может быть определен через противоположный квантор согласно следующим теоремам:

$$\text{T1. } \vdash \neg(x)\phi x \equiv (Ex)\neg\phi x;$$

$$\text{T2. } \vdash (x)\phi x \equiv \neg(Ex)\neg\phi x.$$

Отрицание любого квантора равносильно замене его на противоположный при одновременном отрицании всей области его действия.

Правила подстановки

Если некоторая формула содержит вхождения свободных переменных, то на их место могут подставляться термы. Пусть $\phi(x/t)$

обозначает операцию подстановки терма t на место свободной переменной x в формуле ϕx. Результатом подстановки становится формула ϕt по правилу: $\phi(x/t) \equiv \phi t$.

Чтобы подстановка оказалась правильной, необходимо выполнить следующие условия:

---

1. Если терм t — предметная константа, то подстановка проводится без ограничений.
2. Если терм t — предметная переменная, то ни одно вхождение t не должно оказаться связанным в результате подстановки t на место переменной x в формуле ϕx.

Подстановка $(Ex)Pxy(y/z) \equiv (Ex)Pxz$ является правильной, так как вхождение переменной z не является связанным в формуле $(Ex)Pxy$. Подстановка $(Ex)Pxy(y/x) \equiv (Ex)Pxx$ неправильная, потому что терм x, подставленный вместо y, оказался связанным квантором (x). Неправильные подстановки приводят к противоречию. Пусть Pxy обозначает отношение «x больше y». Пусть U = «натуральные числа». Тогда формула $(Ex)Pxx$, полученная в результате неправильной подстановки, означает, что «существует такое натуральное число, которое больше самого себя», что очевидно ложно.

Основные законы логики предикатов

Как и в ЛВ, в логике предикатов существуют логически истинные формулы, называемые тавтологиями или законами ЛП. Ниже приводятся и комментируются наиболее важные.

Закон удаления квантора общности

Общее правило, истинное для каждого ξ, должно быть истинно и для отдельного случая a, являющегося элементом расширения формулы $\phi\xi$. Если истинно высказывание «Все вещи универсума круглые», то должно быть истинно высказывание «Вещь по имени a, принадлежащая универсуму, является круглой»:

$$\vdash (\xi)\phi\xi \supset \phi(a/\xi).$$

Закон введения квантора существования

То, что истинно для отдельного случая a, являющегося элементом расширения формулы $\phi\xi$, должно быть истинно в качестве произвольного примера подстановки предметной переменной ξ формулы $\phi\xi$. Из истинности высказывания «Вещь a, принадлежащая универсуму, является круглой» следует истинность высказывания «Существует такая ξ, что истинно „ξ — круглая“»:

$$\vdash \phi(a/\xi) \supset (E\xi)\phi\xi.$$

Закон подчинения кванторов

Из истинности универсально квантифицированного высказывания следует истинность экзистенциально квантифицированного высказывания; из ложности экзистенциально квантифицированного высказывания следует ложность универсально квантифицированного высказывания:

$$\vdash (\xi)\phi\xi \supset (E\xi)\phi\xi.$$

Закон противоречия

Противоречащие друг другу высказывания не могут быть вместе ни истинны, ни ложны:

$$\vdash \neg[(\xi)\phi\xi \;\&\; (E\xi)\neg\phi\xi].$$

Закон непустоты универсума логического квадрата

В универсуме логического квадрата должна существовать хотя бы одна вещь, выполняющая формулу $\phi\xi$ или ее отрицание $\neg\phi\xi$ (или и то и другое):

$$\vdash \neg[\neg(E\xi)\phi\xi \;\&\; \neg(E\xi)\neg\phi\xi].$$

Законы взаимоопределимости кванторов

Каждый квантор может быть определен в терминах противоположного ему квантора:

$$\vdash (\xi)\phi\xi \equiv \neg(E\xi)\neg\phi\xi;$$

$$\vdash (E\xi)\phi\xi \equiv \neg(\xi)\neg\phi\xi.$$

Законы дистрибутивности кванторов относительно знака конъюнкции

Квантор общности дистрибутивен относительно знака конъюнкции без ограничений:

$$\vdash (\xi)(\phi\xi \mathbin{\&} \varphi\xi) \equiv [(\xi)\phi\xi \mathbin{\&} (\xi)\varphi\xi].$$

Квантор существования дистрибутивен относительно знака конъюнкции с ограничением:

$$\vdash (E\xi)(\phi\xi \mathbin{\&} \varphi\xi) \supset [(E\xi)\phi\xi \mathbin{\&} (E\xi)\varphi\xi].$$

Законы дистрибутивности кванторов относительно знака дизъюнкции

Квантор общности дистрибутивен относительно знака дизъюнкции с ограничением:

$$\vdash [(\xi)\phi\xi \vee (\xi)\varphi\xi] \supset (\xi)(\phi\xi \vee (\xi)\varphi\xi).$$

Квантор существования дистрибутивен относительно знака дизъюнкции без ограничений:

$$\vdash (E\xi)(\phi\xi \vee \varphi\xi) \equiv (E\xi)\phi\xi \vee (E\xi)\varphi\xi.$$

Законы дистрибутивности кванторов относительно знака импликации

Из высказывания «Для каждого числа, если оно — четное, то оно — целое» выводимо высказывание «Если каждое число четное, то каждое число целое». Но обратная выводимость в общем неверна:

$$\vdash (\xi)(\phi\xi \supset \varphi\xi) \supset [(\xi)\phi\xi \supset (\xi)\varphi\xi].$$

Из высказывания «Если существует четное число, то существует целое число» выводимо высказывание «Существует такое число, что если оно четное, то оно целое». Но обратная выводимость в общем неверна:

$$\vdash [(E\xi)\phi\xi \supset (E\xi)\varphi\xi] \supset (E\xi)(\phi\xi \supset \varphi\xi).$$

Из высказывания «Существует такое число, что если оно четное, то оно целое» выводимо высказывание «Если каждое число четное, то существует целое число». Но обратная выводимость в общем неверна:

$$\vdash (E\xi)(\phi\xi \supset \varphi\xi) \supset [(\xi)\phi\xi \supset (E\xi)\varphi\xi].$$

Из высказывания «Если существует четное число, то все числа целые» выводимо высказывание «Для каждого числа, если оно — четное, то оно — целое». Но обратная выводимость в общем неверна:

$$\vdash [(E\xi)\phi\xi \supset (\xi)\varphi\xi] \supset (\xi)(\phi\xi \supset \varphi\xi).$$

Из сказанного следует, что кванторы общности и существования дистрибутивны относительно знака импликации лишь с ограничением.

Законы перестановки кванторов

Кванторы общности и существования могут переставляться в любом порядке, если они предшествуют формуле однородно, т. е. либо только кванторы общности, либо только кванторы существования. В противном случае имеет место ограничение: независимый квантор существования может свободно вводиться в область действия квантора общности, но не может из нее свободно выводиться.

$$\vdash (\xi)(\zeta)\phi\xi\zeta \equiv (\zeta)(\xi)\phi\zeta\xi$$[173];

$$\vdash (E\xi)(E\zeta)\phi\xi\zeta \equiv (E\zeta)(E\xi)\phi\zeta\xi;$$

$$\vdash (E\xi)(\zeta)\phi\xi\zeta \supset (\zeta)(E\xi)\phi\zeta\xi.$$

[173] Метапеременная ζ, вместо которой могут подставляться различные предметные переменные x, y, z, ..., читается как «дзета».

Приложение 2

Парадокс лжеца

Популярный вариант парадокса таков. Допустим, некто говорит, что он лжет. Что он утверждает на самом деле — истину или ложь? Если допустить, что он говорит истину, тогда то, что он утверждает, истинно, и следовательно, он лжет. Если же он лжет, то, что он утверждает, ложно, и тем *самым он утверждает истину*. Парадокс видят в том, что невозможно однозначно определить значение истинности высказывания «*Я* лгу».

Пусть U обозначает непустое подмножество множества всех высказываний ЛВ. Тогда некоторые высказывания U истинны (T), остальные ложны (F). Среди ложных высказываний некоторые амбивалентны, т. е. истинны и ложны одновременно (A), остальные нет. Существование амбивалентных высказываний говорит о том, что область пересечения истинных и ложных высказываний не пуста. Справедливость этого утверждения следует из того наблюдения, что ложные высказывания могут иметь истинные следствия. Следовательно, справедливо $U = \mathrm{T} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{A}$.

*П*усть C обозначает высказывание ЛВ, не являющееся логической истиной и ложью. Пусть высказывание B является референтом (носителем) истины высказывания C. Мы будем говорить, что высказывание C истинно, что будет обозначаться как T (C), если и только если *C и референт его истины B оба являются элементами одного и того же* (*эквивалентного*) *класса*:

$$\mathrm{T}(C) = (C \supset B) \,\&\, (\neg C \supset \neg B). \qquad (1)$$

Из (1) следует, что истина рефлексивна (выполняется $\mathrm{T}(C) \supset \mathrm{T}(C)$), симметрична (истинна как прямая импликации $\mathrm{T}(C) \supset \mathrm{T}(C)$, так и ей обратная $\mathrm{T}(C) \subset \mathrm{T}(C)$) и транзитивна (всегда передается отношением импликации). Значит, истина определяет отношение эквивалентности, именно разбивает непустой универсум U на два взаимно исключающих и совместно исчерпывающих класса, называемых классами эквивалентности. Каждый такой класс характеризуется тем, что любые два элемента, принадлежащие одному и тому же классу, совместимы друг с другом, взаимно поддерживают друг друга, но любые два элемента, принадлежащие разным классам, таким свойством не обладают.

Ложь не образует эквивалентного класса. Хотя она и симметрична, однако не рефлексивна и не транзитивна. Характерным свойством лжи является то, что рассматриваемое высказывание и референт его истины принадлежат к разным и, значит, несовместимым эквивалентным классам. Значит, если высказывание C ложно, то это означает, что оно оказывает поддержку отрицанию референта истины B, а B — логическому отрицанию высказывания C. Мы будем говорить, что высказывание C ЛВ ложно, что будет обозначаться как $\mathrm{F}(C)$, если и только если *C и референт его истины B являются элементами разных эквивалентных классов*:

$$\mathrm{F}(C) = (C \supset \neg B) \ \& \ (\neg B \supset C). \tag{2}$$

Как и ложь, амбивалентность также не образует эквивалентного класса. Отношение амбивалентности симметрично и транзитивно, но не рефлексивно. Его характерным свойством является одновременная принадлежность высказывания C каждому из эквивалентных классов. Мы будем говорить, что высказывание C ЛВ амбивалентно, что будет обозначаться как $\mathrm{A}(C)$, если и только если *C и референт его истины B одновременно принадлежат разным эквивалентным классам*:

$$\mathrm{A}(C) = \mathrm{T}(C) \ \& \ \mathrm{F}(C). \tag{3}$$

Допустим теперь, что высказывание C само выступает в роли референта своей собственной истинности, т. е. $C \equiv B$. Тогда (1) и (2) трансформируются в следующие самореференциальные утверждения соответственно:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(C) &= (C \supset C) \ \& \ (\neg C \supset \neg C) = \\ &= (\mathrm{T} \supset \mathrm{T}) \ \& \ (\mathrm{F} \supset \mathrm{F}); \end{aligned} \tag{4}$$

$$\mathrm{A}(C) = (C \supset \neg C) \ \& \ (\neg C \supset C) = \\ = (\mathrm{T} \supset \mathrm{F}) \ \& \ (\mathrm{F} \supset \mathrm{T}). \qquad (5)$$

Согласно (4) каждое из противоречащих друг другу высказываний C и $\neg C$ является своим собственным следствием в своем эквивалентном классе. Значит, каждое из них совместимо только с самим собой и только себе оказывает поддержку. *Подобную самореференцию можно назвать позитивной, сохраняющей истинность высказывания C.* Ее основным свойством является поддержка высказыванием C самого себя независимо от того, истинно оно или ложно.

Согласно (5) как C, так и $\neg C$ принадлежат обоим эквивалентным классам сразу и тем самым каждое из них истинно и ложно одновременно и, значит, амбивалентно. Следовательно, каждое из них совместимо только со своим отрицанием. *Такую самореференцию можно назвать противоречивой, опровергающей как истинность, так и ложность высказывания C.* Ее главным свойством является опровержение высказыванием C самого себя независимо от того, истинно оно или ложно.

Высказывания, эквивалентные (5), получили название *парадокса лжеца*. Подобные высказывания нарушают требование непротиворечивости ЛВ и являются тем самым парадоксальными. Среди множества предложенных решений выделяются следующие два.

Согласно Б. Расселу и А. Тарскому[174], парадокс лжеца должен исключаться синтаксически — посредством запрета на применение предиката «ложь» к высказыванию (языку) того же семантического уровня, что и сам предикат. Например, Тарский, чтобы парадокс лжеца не возник в языке L_n уровня $n > 0$, предложил применять предикат F_n только к языку уровня L_{n-1}. Всякое применение предиката F_n к языку L_n заранее исключается как неправильно построенная формула. Однако подобная элиминация вводит бессмысленную бесконечную иерархию предложений (языков) и, кроме того, исключает вместе с парадоксом лжеца и свойство самореференции высказываний.

[174] *Russell B.* Mathematical Logic as based on the theory of types // American journal of mathematics. 1908. Vol. 30. P. 222–262; *Tarski A.* Op. cit. P. 152–278.

По мнению А. Гупты и Х. Херцбергера, высказывание лжеца может быть и истинным и ложным, но не одновременно, а только периодически[175]. Позже было показано, что такое допущение равносильно оценке высказывания лжеца как семантически нейтрального утверждения[176]. Но существование не истинных и не ложных высказываний противоречит допущению бивалентности ЛВ.

Таким образом, ни одно из рассмотренных предложений не решает парадокс лжеца принципиально и конструктивно, без нарушения основных требований ЛВ. Означает ли это, что парадокс лжеца вообще не разрешим в терминах основных допущений ЛВ?

Во-первых, следует отвергнуть семантическую нейтральность высказывания лжеца. Определение амбивалентности (5) представляет частный случай определения ложности (2). Значит, верно:

$$(((\mathrm{T} \supset \mathrm{F}) \,\&\, (\mathrm{F} \supset \mathrm{T})) \supset \mathrm{F}).$$

Откуда следует, что множество амбивалентных высказываний — это прежде всего подмножество логически ложных и тем самым просто ложных высказываний. Следовательно, *высказывание лжеца — пример ложного, но никак не нейтрального высказывания*. «Я лгу» означает только то, что я отрицаю, что сам утверждаю (то, что я лгу), и ничего более. *Значит, утверждая «Я лгу», я утверждаю обычное противоречие, т. е. логическую ложь и тем самым просто ложь.* Если сказать, что высказывание лжеца истинно, т. е. если утверждать $\mathrm{T}(A)$, то это означает подтвердить, что то, что оно утверждает, представляет противоречие: $\mathrm{T}(A) = A$. Если сказать, что высказывание лжеца ложно, т. е. утверждать $\mathrm{F}(A)$, то это означает опровергнуть, что то, что оно утверждает противоречие, т. е. подтвердить, что оно выражает логическую истину: $\mathrm{F}(A) = \mathrm{T} \vee \mathrm{F} = \mathrm{T}$. Следовательно, все высказывания ЛВ, эквивалентные высказыванию лжеца, являются логически ложными утверждениями, образующими область пересечения истины и лжи, и их существование не противоречит допущению бивалентности ЛВ.

---

[175] *Gupta A.* Truth and Paradox // Journal of Philosophical Logic. 1982. Vol. 11. P. 1–60; *Herzberger H.* Notes on Naive Semantics // Journal of Philosophical Logic. 1982. Vol. 11. P. 61–102.

[176] *Priest G.* Unstable Solutions to the Liar Paradox // Self Reference: Reflections on Reflexivity. Dordrecht, 1987. P. 145–175.

Во-вторых, следует отказаться от идеи Рассела и Тарского об исключении свойства самореференции как синтаксической причины высказываний лжеца. Лишить ЛВ этого свойства означает потерять всякую возможность конструктивного обсуждения проблемы истины. Быть истинным означает находиться в позитивной самореференции (не противоречить самому себе); быть ложным — в негативной (противоречить самому себе). Устранить позитивную самореференцию означает лишить ЛВ статуса непротиворечивой теории, устранить негативную самореференцию — лишить ее возможности контролировать выполнение требования непротиворечивости.

Представляем Вам наши лучшие книги:

Серия «Классический университетский учебник»

Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика.
Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.
Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии.
Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. В 4 т.

Теория чисел

Вейль А. Основы теории чисел.
Вейль Г. Алгебраическая теория чисел.
Ингам А. Э. Распределение простых чисел.
Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел.
Хинчин А. Я. Цепные дроби.
Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел.
Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм.
Жуков А. В. Вездесущее число «пи».
Ожигова Е. П. Что такое теория чисел.
Оре О. Приглашение в теорию чисел.
Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа.

Теория вероятностей

Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей.
Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания.
Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания.
Хинчин А. Я. Асимптотические законы теории вероятностей.
Хинчин А. Я. Математические основания квантовой статистики.
Боровков А. А. Теория вероятностей.
Боровков А. А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов.
Пытьев Ю. П. Возможность. Элементы теории и применения.
Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике.
Золотаревская Д. И. Теория вероятностей. Задачи с решениями.
Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.

Теория игр

Шикин Е. В. От игр к играм. Математическое введение.
Оуэн Г. Теория игр.
Жуковский В. И., Жуковская Л. В. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности.
Жуковский В. И. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения.
Смольяков Э. Р. Теория антагонизмов и дифференциальные игры.
Смольяков Э. Р. Теория конфликтных равновесий.

Теория графов

Харари Ф. Теория графов.
Оре О. Графы и их применение.
Родионов В. В. Методы четырехцветной раскраски вершин плоских графов.

Виктор Александрович СВЕТЛОВ

Доктор философских наук, профессор Петербургского государственного университета путей сообщения и Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. Автор более ста научных работ по логике, истории и методологии науки, по теории анализа и разрешения конфликтов.