Физико-математическое наследие: математика
(философия математики)

А. Фосс

СУЩНОСТЬ МАТЕМАТИКИ

Перевод со второго
немецкого издания,
исправленного и дополненного,
И. Яшунского

Издание третье

URSS
МОСКВА

ББК 22.1я44 22.1ф

Фосс Аурель Эдмунд

Сущность математики: Пер. с нем. Изд. 3-е. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 120 с. (Физико-математическое наследие: математика (философия математики).)

Чем, собственно, занимается математика? Почему она долго являлась наименее популярной из всех наук, несмотря на то, что вся человеческая культура имеет подлинной своей основой математические науки? Каким образом она играет в нашей культуре ту выдающуюся роль, какая фактически все же выпала на ее долю? В чем состоит сущность математики? Эти и другие вопросы рассмотрены в книге немецкого ученого, посвященной сущности математики, в том числе и с точки зрения исторического развития этой науки.

Книга адресована ученым — математикам и философам, аспирантам и студентам вузов, всем, кто интересуется историей и методологией математики.

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 7,5. Зак. № 1853.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-00272-1

Предисловие ко второму изданию.

Я охотно пошел навстречу желанию издательства B. G. Teubner выпустить новым изданием мое сочинение „О сущности математики“, так как это дало мне возможность устранить некоторые погрешности, исключить несущественное и зато изложить более пространно вопросы, затронутые прежде слишком кратко или вовсе не затронутые. Надеюсь, что и в новом своем виде книга будет способствовать пробуждению интереса к более общим вопросам математики и углублению их понимания. Для этой цели мне казалось особенно пригодным трактование, в котором развитие абстрактных идей идет рука-об-руку с очерком их исторического возникновения и с указанием на главнейшие источники.

А. Фосс.

Мюнхен, декабрь 1912 г.

От переводчика.

В своем предисловии автор черезчур скромно характеризует работу, произведенную им для второго издания своего труда. На самом деле им не только тщательно просмотрена вся книга, но и внесены в нее многочисленные дополнения, в том числе обширное дополнение об основаниях механики и принципе относительности и заново написанное пространное изложение теории множеств. В итоге книга выросла более, чем на четверть, и специально число примечаний возросло с 130 до 164.

Перевод, впервые выпущенный в 1911 г. издательством „Физика“, ныне нами тщательно сверен с оригиналом и дополнен согласно второму его изданию. При этом исправлены замеченные погрешности перевода, а библиография по возможности дополнена указаниями на русскую литературу предмета. Добавления переводчика, для отличия, все заключены в квадратные скобки.

И. Я.

Петроград, сентябрь 1919 г

Нынешнюю нашу эпоху обычно называют веком естественных наук и техники. Название вполне правильное Представим себе только колоссальные приобретения нашего времени! Мы видим их повсюду,—в наших строительных сооружениях, для которых нет ничего слишком большого, в наших открытиях, которые доставляют нам господство над силами природы, в удивительных вспомогательных средствах физики, создаваемых ею в неустанном стремлении к все более утонченным методам, в могучих успехах химии, которая даже синтез наиболее сложных органических соединений не относит уже к области невозможного, в развитии астрономии, которая в состоянии с достаточной точностью предсказать изменения в расположении небесных тел даже для очень отдаленных времен.

Это стремление нашего времени подчинить материальную действительность господству духа сказывается по двум различным направлениям. Одно направление, дар технической изобретательности, проявляется, напр., в различных отраслях химии, в конструировании машин, в фотографии, в применении электричества и накладывает свою печать на всю нашу социальную жизнь. Но как-бы высоко мы ни ценили эту творческую силу изобретения в интересах нашей материальной культуры, мы все-таки поставим еще выше интеллектуальное проникновение в весь мир явлений, являющееся целью всех точных естественных наук.

Более обстоятельное описание этой цели не входит здесь в мои задачи. Но есть нечто о д н о, что одинаково объемлет в с е стремления, направленные на более глубокое понимание действительности. Это есть м а т е м а т и к а. Что стал бы делать инженер без этой науки, которая единственно дает ему возможность заранее вычислить пригодность и действие его конструкций? Что стал бы делать без нее геодезист, когда без помощи математики было бы немыслимо прокладывать наши туннели, тянущиеся на протяжении многих верст через целые горные массивы? А во что превратилась бы физика или астрономия, которые в теоретических своих частях представляют, в сущности, только приложение математики? Наконец, даже химический анализ заимствует теперь свои наиболее глубокие исследования из области математической абстракции!

Этих кратких замечаний должно быть достаточно для обоснования утверждения, что вся наша современная культура, поскольку она покоится на духовном уяснении и подчинении себе природы, имеет подлинной своей основой математические науки. Это убеждение настолько неотразимо и сильно, что большинство образованных людей в своем преклонении перед математикой доходит чуть ли не до переоценки ее значения. Это выражается не только в том, что за математикой признают все большую ценность, как за средством образования и воспитания нашего юношества, это выражено и в мыслях наших величайших умов. Галилей в следующих выражениях намечает основные черты новой эпохи в познавании природы [1]: „Истинную философию вещает нам природа: но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, при помощи которых она говорит с нами. Но этот язык есть математика, а знаки эти суть математические фигуры". А из-под пера Канта [2]) вышли следующие неоднократно цитированные слова: „Я утверждаю, что в каждой отдельной естественной науке можно найти собственно науку лишь постольку, поскольку в ней можно найти математику".

При всем том математика, это произведение человеческого ума, с которым никакое другое не может сравниться по древности, математика, зачатки которой несомненно восходят за шесть тысяч лет до наших дней, все еще является наименее популярной из всех наук! Правда, всякая истинная наука по существу своему обречена на непопулярность. Ее нельзя постигнуть легким путем случайного чтения, для этого требуется долгая неутомимая работа. Но в то время, как всякий сколько-нибудь разносторонне образованный человек, вообще говоря, более или менее ориентируется в наиболее выдающихся прочих областях знания, в физике, астрономии, описательных естественных науках, а также в языковнании, истории философии и в процессе мирового исторического развития, и может с большим или меньшим успехом осмысленно следить за прогрессом этих наук,—по отношению к математике вообще приходится констатировать поразительно слабое понимание, которое совершенно не согласуется с выше отмеченным общим признанием ее ценности, а в иных случаях прямо граничит с невероятным пренебрежением. Как часто приходится слышать даже от умственно высоко развитых людей о непреодолимой антипатии, с которой они относятся к применению математических формул; как часто приходится сталкиваться с вопросом: чем собственно занимается математика? Каким образом она играет в нашей культуре ту выдающуюся роль, какая фактически все же выпала на ее долю?

Причина такого непонимания того, в чем собственно состоит сущность математики, отчасти, конечно, заключается в трудности математических изысканий, требующих, в виду своего абстрактного характера, упорного интенсивного и непрерывного умственного труда, для которого занятой человек нелегко может найти необходимый досуг. Но наше воспитание тоже не мало повинно здесь. Только самая ничтожная часть математики составляет предмет преподавания в наших средних учебных заведениях, в то время как исторические и словесные науки проходятся по обширной программе, которую к тому же представляется много возможностей расширить и в дальнейшей жизни. Преподавание математики в наших школах, напротив, давно уже ведется по неизменной программе, которая, быть-может, весьма пригодна для логического развития и для приобретения практических знаний [3]), но не дает никакого представления о глубине воззрений, характеризующей, начиная с XVIII столетия, математические изыскания,—она, вообще говоря, обнимает только замкнутую и непосредственно, повидимому, не поддающуюся расширению область учений, которые известны под именем элементарной математики [4]).

В таком случае совершенно понятно, почему лишь очень немногие подозревают о том, что за этой школьной математикой, которая в действительности только поверхностному наблюдению представляется столь законченной, возвышается несказанно грандиозное создание человеческого духа, чистейший и подлиннейший продукт духовной деятельности, который с древнейших времен разрабатывается с поразительнейшим остроумием, постоянно находится в стадии громадного развития и непрерывно обогащается новыми и непреходящими истинами.

Но когда ставят вопрос о сущности математики, то обыкновенно ответ гласит, что это дано уразуметь только посвященным. Пусть это правильно не только для математики, но mutatis mutandis для всякой науки, но ведь все же должно быть возможно сколько-нибудь доступное описание содержания, целей и характерных методов математики, хотя бы в самых общих их чертах. Мы ставим поэтому вопрос: в чем собственно состоит сущность математики? Почему мы усматриваем в ней единственный пример науки, высказывающей познание в аподиктической форме, какова та основа, на которой это достигается, и, в частности, что дало последнее столетие развитию математики в этом, если позволено будет так выразиться, теоретико-познавательном отношении?

Однако, прежде чем обратиться к рассмотрению этих вопросов, уместно будет бросить краткий взгляд на историческое развитие математики вообще. Исследование исторического развития математики в целях самого математического познания, долгое время находившееся в загоне, привлекло к себе в самое последнее время исключительное внимание. Ныне считают само собой разумеющимся, что возникновение и преобразование математических идей можно уразуметь не иначе, как путем обращения к первоисточникам, и это является заслугой, главным образом, Морица Кантора и его школы, работы которых сосредоточены в „Bibliotheka Mathematica" (редактор Энештрем) и в „Klassiker der exakten Wissenschaften" Оствальда [5]).

Зачатки математического знания покрыты глубоким мраком; поскольку мы в состоянии их проследить, мы встречаемся уже с прямо-таки загадочной стадией их развития. О довольно уже развитых познаниях народов Месопотамии свидетельствуют найденные в большом количестве и испещренные клинописью памятники давно погибшей культуры [6]); первые же обстоятельные рукописные свидетельства дошли до нас от египтян, а именно, в папирусе Ринда, восходящем по общепринятому воззрению приблизительно к 1800 г. до Р. Хр. [7]). Познания этих народов относились преимущественно к области арифметики, хотя у них имеются и зачатки геометрии, приуроченной, главным образом, к определенным бытовым условиям. Оттуда математика перешла к грекам, но только в Александрии (около 300 г. до Р. Хр.) греческая геометрия достигла расцвета, который мы обычно сочетаем с именем Евклида; а несколько позднее Архимед из Сиракуз с несравненной талантливостью подходит уже к тем методам вычисления площадей и поверхностей тел, которые только 2000 лет спустя положили начало исчислению бесконечно-малых [8]). На ряду с этим, благодаря интересу к астрономии, развивается тригонометрия. Клавдий Птолемей (ок. 120 г. по Р. Хр.) оставляет после себя в своей *μεγάλη σύνταξις* тригонометрическую систему, с таким совершенством развитую применительно к астрономии, что в течение более тысячи лет она оставалась непревзойденной [9]). В Индии [10]) открываются новые источники математических познаний, особенно в области арифметики, достигающие высшего расцвета при великих индусских математиках Арьябхатта и Брахмагупта; оттуда поток математических идей перебрасывается к арабам, продолжая развиваться в только-что указанном направлении, чтобы, наконец, вновь вернуться на Запад, в Испанию. Около 1200 г. по Р. Хр. Запад, по словам М. Кантора, имеет в своем распоряжении латинские переводы произведений великих александрийцев и арабских математиков. В это же самое время в Италии начинается дальнейшее развитие алгебры, которая, обогатившись заимствованным у индусов введением нуля, отрицательных и иррациональных чисел, вступает на путь самостоятельного развития; вместо кропотливого выражения мыслей словами вводится язык знаков, который пользуется буквами для обозначения чисел и действий над ними. Мы обычно связываем этот шаг вперед с толчком, который дали французский математик Виэта и немецкие алгебраисты М. Штифель и Видманн; но на самом деле метод обозначения современной математики создавался очень медленно и постепенно под влиянием самых разнообразных источников [11]).

Постепенно завоевывают себе право гражданства десятичные дроби [12]) и вместе с ними иррациональные числа [13]); около 1620 г. изобретаются логарифмы [14]), а возродившийся тем временем интерес к геометрии вновь обращается при Кеплере (1615) и Кавальери (1635) к проблемам, завещанным Архимедом.

Математика греков, при всей высоте своего развития не сумела дойти до общего решения двух особенно важных проблем, а именно, построения касательной, т. е. определения прямой, соприкасающейся с кривой в данной точке, и определения площадей. Эти вопросы перешли в совершенно иную стадию, когда под влиянием Декарта геометрия свелась к учению о числах. Если хотят, напр., указать кому-либо местоположение какого-нибудь растения на горизонтально-протяженном поле, прорезываемом дорогой, то ему говорят: пройди по дороге расстояние в x метров, затем сверни под прямым углом направо (или налево), пройди y метров прямо вперед по новому направлению, и ты придешь к этому растению. Этот крайне примитивный принцип обозначения положения точки в пространстве координатами [15]) x, y, z употреблялся с самых древних времен, но впервые Декарт освободил понятие координат от лежащего в его основе представления величины и рассматривал эти x, y, z как чистые числа [16]), которые, впрочем, могут быть применены только будучи отнесены к употребляемой в каждом данном случае единице длины Благодаря этому понятию координат всякое геометрическое исследование, очевидно, сводится к исследованию соотношений между числами, т. е. законов их сочетаний, предлагаемых арифметикой,—геометрия переводится на язык учения о числах [17]).

Всякая точка, напр., плоской кривой линии определяется, следовательно, двумя ее координатами x и y, которые следует мыслить отложенными по двум, скажем, перпендикулярным осям; к произвольно выбранному внутри известных пределов x относится вполне определенный y (иногда несколько y); y является здесь зависимым от x и называется функцией его. Прямая, соединяющая две точки кривой A и B, называется ее секущей; по наивному воззрению, которому мы здесь следуем, она превращается в касательную в точке A, если секущая вращается вокруг точки A до тех пор, пока точка B не совпадет с точкой A; мы говорим, что предельное положение секущей есть касательная [18]). Пользуясь ныне употребительными терминами, мы скажем, что тригонометрический тангенс угла, который касательная к кривой составляет с осью x-ов, есть производная зависимой переменной y по независимой переменной x. Существует ли на самом деле такое предельное положение, об этом вначале вовсе не думали, так как в случаях, с которыми прежде всего приходилось иметь дело, исследование само оправдывало это допущение, либо кривая прямо определялась при помощи процесса движения.

К вполне аналогичным вопросам приводило также и изучение простейших процессов природы, которое переживало тогда пору исключительного расцвета, особенно в Италии [19]), — вспомним только Леонардо да Винчи и воссоздателей статики, Галилея и его учеников

При всяком процессе в природе известные состояния представляются нам связанными таким образом, что наличность первого класса состояний постоянно сочетается с наличностью второго класса, между тем как обратное не всегда имеет место; состояния первого класса мы привыкли называть следствиями, состояния второго класса—причинами. Один процесс, таким образом, представляется нам зависимым, как результат, от другого, от его причины, а формальное представление этой зависимости, т. е. взаимное сопряжение каких-нибудь физических состояний, взятое независимо от всяких метафизических идей, опять дается нам понятием функций.

Так, напр., если ограничиться простейшими примерами, высота ртутного столба в термометре есть функция температуры; температура точки в стержне, один конец которого нагревается постоянным источником теплоты, является функцией расстояния от этого конца и истекшего времени; давление газа, заключенного в нерастяжимый сосуд, является функцией температуры, которая ему сообщена.

Галилей своим исследованием о движении падающих тел дал первый толчок к созданию действительной кинематики и динамики, т. е. учения о явлениях движения тел [20]). В частности мы ему обязаны основными понятиями скорости и ускорения. О скорости говорят, правда, и в повседневном обиходе. Но это понятие вполне ясно лишь тогда, когда точка движется по своему пути равномерно, т. е, когда количество единиц пути, деленное на соответствующее количество единиц времени, постоянно имеет одно и то же значение; это отношение, в обиходном языке обозначаемое как „путь на время“, и есть скорость. В противном случае это отношение, исходя из определенной начальной точки, будет иметь, в зависимости от промежутка времени, соответствующего конечной точке, переменное значение, которое принято называть средней скоростью. Железнодорожному поезду, который в 2 часа проходит 120 километров, мы приписываем среднюю скорость приблизительно 16,6 метров в секунду, хотя мы отлично знаем, что эта скорость относится только к воображаемому, равномерно движущемуся поезду, который отходит и прибывает в одно время с действительным поездом.

Но как придти теперь к понятию скорости в определенный момент? Мы, как нам кажется, подмечаем, что чем меньший промежуток времени мы берем, тем средняя скорость все более приближается к определенному так называемому предельному значению, которое и есть скорость в начальный момент. Выражаясь современным языком, мы скажем, что величина скорости есть производная пути по времени. И тут необходимо всячески подчеркнуть то обстоятельство, что даже такое, повидимому, простое понятие, как понятие скорости, не может быть формулировано без помощи понятия предела, основанного на представлениях, исчисления бесконечно-малых представлениях, которые единственно ведут от интуитивно сложившегося убеждения к логическому уразумению.

Итак, оказывается, что определение скорости по величине и направлению [21]) вполне совпадает с проблемой касательной. Поэтому нет ничего удивительного в том, что при кривых, образуемых процессами движения, этим прямо-таки пользовались для построения касательных [22]).

Но отсюда вытекало много весьма важных дальнейших следствий. В силу теоремы о параллелограмме движений [23]) мы приписываем скорости составляющие скорости по осям координат, которыми она вполне определяется по направлению и величине. А в таком случае простейшие соображения показывают, что само движение вполне дано, если для каждого момента известны составляющие скорости, как функции времени и положения движущейся точки в этот момент, и если дано также начальное положение. Мы, таким образом, в состоянии описать процесс движения, если только мы в каждый данный момент знаем составляющие его скорости. Если обозначить эти последние как производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ координат по времени, то, по нашим современным терминам, мы интегрируем систему дифференциальных уравнений первого порядка. В частности, следовательно, дело сводится к нахождению кривой, которая имеет данное „отношение наклона“ к оси x-ов. Решение этой проблемы дает Лейбниц (Acta erudit. 1693, „Klassiker“ Оствальда № 162): в цитированном труде он описывает даже интеграф, который пригоден для вычерчивания кривой на подобие интеграфа, лишь недавно изобретенного А. Абакановичем.

Тем самым была разрешена и проблема определения площадей, если вообще предположить, что площадь, ограниченная, напр., прямолинейной осью x, двумя к ней перпендикулярными ординатами a и y и отрезком кривой, заключенным между их конечными точками, может быть измерена числом, ибо непосредственно вытекало, что скорость, с какой растет площадь F, а именно $\frac{dF}{dt}$, равна y, а тем самым было дано и F при помощи интегрирования.

Но при помощи одного только понятия скорости механика никогда бы не достигла того неизмеримого значения, какое она вскоре приобрела. Скорости и их функциальная зависимость от места и времени с трудом распознаются при помощи наблюдения и уже в простейших случаях выражаются не особенно наглядными законами. Но если, в свою очередь, нанести на осях составляющие скоростей, подобно координатам, то получится приуроченное к первоначальному движению новое движение, составляющие скорости которого мы называем ускорениями первоначального движения [24]); это суть вторые производные координат. Первоначальное движение опять-таки вполне определено системой дифференциальных уравнений второго порядка, если только известны начальное положение и начальные скорости точки.

В случаях, которые прежде всего были рассмотрены, а именно, при падении тел и при движении планет, эти ускорения являлись весьма простыми функциями положения движущейся точки [25]). Вследствие этого гениальный Ньютон имел возможность доказать, что кеплеровы законы движения небесных тел являются необходимыми результатами общего положения, в котором весьма существенную роль играли, впрочем, некоторые метафизические представления, напр., абсолютного пространства, абсолютного времени, силы и ее отношения к массе и ускорению, и относительно понимания которого в общераспространенных изложениях механики до сих пор еще господствуют разнообразные представления [26]).

Только-что изложенные соображения в действительности руководили Ньютоном, в исчислении флюксий которого, как это показывает само название, основные представления о бесконечно-малых были заимствованы из учения о движении, хотя для определения этих флюксий или составляющих скорости ему и приходилось пользоваться особыми чисто математическими вспомогательными средствами [27]).

Лейбниц, который значительно ближе держался проблемы касательной и обратной проблемы и исходил из представлений, которые уже Б. Паскаль и И. Барроу [28]) ввели в трактование задач этого рода, напротив, пришел к совершенно другому методу: непосредственно примыкая к геометрическому представлению, он положил в основу своих рассуждений бесконечно-малые величины.

Что длина отрезка кривой тем меньше отличается от соответствующей ему хорды, чем менее этот отрезок; что касательная тем более совпадает с секущей, чем короче расстояние между точками пересечения последней с кривой; что объем шара определяется тем точнее, чем больше число вписанных пирамид, вершины которых находятся в центре шара, а углы основания лежат на поверхности его, и т. д., все это представляется настолько несомненным, — хотя оно совершенно несовместимо с строгим логическим мышлением греческих геометров, — что уже Кеплер, последовательно применяя эти представления, использовал их для многочисленных определений площадей и поверхностей геометрических тел. Лейбниц же, отчасти посредством более отчетливых определений понятий, отчасти посредством метода, с чрезвычайной легкостью применимого ко всем случаям, сумел превратить эти расплывчатые представления, столь далекие от точности античной геометрии, в чуть ли не механический счет с этими бесконечно-малыми числами или величинами, которые должны были быть именно меньше всяких других сколь угодно малых чисел или величин.

Отныне открылся путь для дальнейшего развития исчисления бесконечно-малых. Стало ясно, что во всех процессах природы, — а их-то, главным образом, имела в виду тогдашняя наука, — мы встречаемся с совершенно таким же положением вещей, как и в геометрических и аналитических изысканиях. Определенная группа неизвестных процессов, которые благодаря своему свойству быть измеряемыми допускают числовое выражение, дана при помощи их флюксий или производных относительно группы независимых переменных (величин времени или длины); требуется найти эти неизвестные процессы. Принятие точки зрения Лейбница имело вместе с тем еще то преимущество, что употребление бесконечно-малых величин чрезвычайно облегчало наглядное понимание задач.

Таким образом, мало-по-малу удалось всецело выразить в системе дифференциальных уравнений не только вопросы геометрии и анализа, но и всю механику, и притом не только астрономическую или механику неба, но и молекулярную механику, теорию упругости, гидродинамику, теорию распространения теплоты, а позднее также учение об электричестве и магнетизме, поскольку уже установлены были экспериментальные основы этих явлений; решение этих уравнений должно было заключать в себе все, что вообще доступно познанию. Никогда еще никакая наука не праздновала таких триумфов, как математика в период героев исчисления бесконечно-малых, Бернулли, Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Лапласа. Проникновение математического анализа во все области мира явлений в XVIII ст. явилось воистину небывалым триумфальным шествием. Проблемы, о разрешимости которых в прежнее время даже думать не смели, теперь были поставлены и немедленно же, чуть ли не шутя, разрешены. ничто в области точных естественных наук не казалось более недоступным человеческому уму. Как завершение этого периода, следует рассматривать Лапласа [29]), высказавшего гордую мысль, к которой мы теперь, впрочем, вряд ли можем отнестись иначе, как к крупному преувеличению: Ум, который в определенный момент познал бы состояние всего материального мира, сумел бы при помощи вспомогательных средств математического анализа сразу обнять прошлое и будущее мира. Течение космоса урегулировано большой системой дифференциальных уравнений, которые вплоть до отдаленнейших времен предуказывают течение прошлых и будущих событий.

Что же такое представляет математика, развитие которой мы только-что пытались изобразить в самых общих чертах, обратив при этом на существенные, лежащие в основе ее идеи больше внимания, чём это было бы уместно в строго историческом исследовании?

Старый ответ гласит, что математика есть наука о величинах, а величина есть все то, что можно мыслить равным себе самому или неравным, т. е. находящимся в отношении „больше“ или „меньше“. Вряд ли этот ответ можно признать удовлетворительным. Имеются, во-первых, целые отрасли математики, в которых вообще не говорится о сравнении величин, напр., комбинаторика и теория групп, проективная геометрия и Analysis situs, теория чисел; сюда же следует отнести и алгебру логики. С другой стороны, этот ответ отсылает нас к понятию величины, которое, — по крайней мере, с первого взгляда—представляется терающимся в расплывчатости неопределенного воззрения [30]).

Все эти соображения привели к тому, что выставлено было требование гораздо более общего определения понятия математики. С тех пор как познали, что достоверность математических положений в конечном счете может основываться только на их чисто логическом дедуктивном построении, начались попытки дать чисто логическое определение понятия математики, которое заключало бы полную и общую ее характеристику со стороны метода и содержания [31]).

Мы не можем здесь распространяться об этих исследованиях, так как они относятся к области, где краткость изложения не легко осуществима и вряд ли приводит к цели.

Затем путем общей формулировки того, что такое представляет известная наука, вообще никогда нельзя дать сколько-нибудь конкретного представления о ее сущности, ибо эта последняя состоит именно из совокупности развитых в ней понятий, которые отнюдь не явствуют из такого совершенно общего, а потому чисто формального определения. Во всяком случае такого рода рассмотрение отвлекло бы нас от самого содержания математики значительно больше, чем это преследуется нашим изложением.

Расхождение точек зрения окажется значительно меньшим, если мы будем придерживаться взгляда, который новейшая логическая школа считает, впрочем, более поверхностным [32]), и разделим всю совокупность математических изысканий на чистую математику и область ее приложений. К последним мы относим геометрию и механику, понимая их в самом широком смысле. Чистая же математика есть наука о числах, а числа суть созданные нами знаки для упорядочивающей деятельности нашего рассудка, которые допускают сочетания друг с другом по определенным общим правилам.

В учении о числах мы усматриваем поэтому подлинную сущность математики, а изъяснение того, как все другие представления, содержащиеся в понятии величины, могут быть подчинены понятию числа, составляет в пределах чистой математики переход к областям ее приложения.

Если же мы в дальнейшем ограничимся сначала теми числовыми знаками, которые возникли на основе натуральных целых чисел, и только позднее коснемся общего характера числа, который лежит в основе только-что указанного понимания сущности математики, что мы будем лишь придерживаться порядка, в каком протекало историческое развитие самой науки.

В предшествовавшем историческом обзоре мы встретились с появлением целого ряда новых понятий: переменного числа или переменной, функциональной зависимости, предела. Но тут же мы сталкиваемся еще с одним понятием, отчасти лежащим в основе всех этих представлений, с понятием сплошности или непрерывности. Движению, посредством которого образуется линия, и тем самым этой линии мы приписываем свойство не миновать ни одной точки, т. е. именно свойство непрерывности *), которое мы считаем нужным требовать от всех процессов в природе, поскольку мы намерены приводить их к явлениям движения. Посему, если мы хотим посредством понятия числа выразить эту непрерывность, то число само должно быть сделано непрерывно изменяющимся.

Но каким образом в математику, издавна, повидимому, покоившуюся на прочном фундаменте арифметических правил, которые относятся прежде всего к действиям над целыми числами, и на геометрических аксиомах и постулатах Евклида, можно было ввести совершенно новые понятия непрерывности, предела (или бесконечного приближения к таковому) и бесконечности, понятия, основывавшиеся, повидимому, на совершенно шатких и неопределенных идеях, — и вместе с тем не изменить коренным образом характера математики, как источника познаний, стоящих выше всяких сомнений?

Это возражение было неоднократно выставляемо, между прочим, и в тот замечательный период развития исчисления бесконечно-малых [33]), когда некоторые, повидимому, совершенно отказались от требования логической строгости, характерной для методов античных математиков. Импульс, с которым открытия в области математики тогда буквально обгоняли друг друга, был в самом деле столь могуч и неотразим, что иные представления вводились совершенно без размышлений об их логической обоснованности. Сомневающимся указывали на свободные от противоречий результаты нового учения, как на лучшее доказательство его правильности [34]). Отчетливее всего это, пожалуй, сказывается в фундаментальных трудах великого математика Л. Эйлера, который впервые попытался дать общий обзор анализа бесконечно-малых, сохранивший непреходящее значение по сей день, хотя с принципиальным его обоснованием мы отнюдь уже не можем согласиться [35]). Подобного рода несовершенства чуть ли не с необходимостью проявляются во всякой науке, которая находится в стадии особенно быстрого развития, когда вдохновение предвосхищает результаты методического познания, но они не составляют настоящей помехи для прогресса, особенно там, где неправильность немедленно должна обнаружиться вследствие своего противоречия с уже установленными познаниями, как это имеет место в математике, располагающей в любой момент бесчисленным множеством контрольных средств, чего в такой же мере нет ни в одной другой науке.

---

*) [См ниже, стр. 21, точное определение понятия о непрерывности]

Но математика издавна считала своей высшей целью познание само по себе, а не моральное убеждение в обоснованности своих методов, хотя бы и подтвержденное скоіь-угодно многими проверками. Математика требует построения логически необходимой систематической связи, основанной на исключительном употреблении логических операций.

И вот работа большой части XIX столетия была направлена на то, чтобы вновь доставить абсолютное господство чистой математике, т. е. доказать, что понятие числа и действий над ним есть исключительный фундамент всего математического познания[36]). Таким образом, не только было создано понятие переменного числа, и совершилось развитие общей арифметики в вполне законченную науку, но понятие функции и выражение функций было чрезвычайно расширено посредством соответствующих вспомогательных средств: была доказана полнейшая логическая обоснованность понятий бесконечно-малого и бесконечно-большого, и тем самым была выяснена основа исчисления бесконечно-малых; наконец, в значительной части была разрешена и проблема о существовании решений дифференциальных уравнений, которой математика XVIII столетия почти-что не коснулась

Итак, прежде всего нужно остановиться на учении о самих числах Ибо источником всех сомнений являлось именно унаследованное от индусов понятие числа, которое в своих существенных чертах оставалось совершенно неясным.

Понятие численности множества[37]) представляемых вещей, в психологическое развитие которого, как объединения ряда повторенных актов мышления, мы не можем здесь вдаваться, мы будем рассматривать как ясное само по себе; равным образом, мы для обоснования простейших сочетаний этих целых чисел, о которых учат основные правила арифметики для сложения, вычитания, умножения и деления, сошлемся на непосредственную логическую достоверность, с которой совершаются эти сочетания [38]).

Целые числа, но только единственно они, обладают тем свойством, что их можно рассматривать как знаки для представлений, связанных с реальными вещами вне нас. Иначе обстоит уже дело с дробными числами, хотя здесь мы, пожалуй, сталкиваемся еще не с очень существенными трудностями [39]). Но зато вплоть до середины прошлого столетия и даже позднее еще[40]) много сомнений возбуждали отрицательные[41]) числа; людей непосвященных, которым обыкновенно недоступна их подлинная сущность, они все вновь укрепляют во взгляде, что в метематике отнюдь не все основано на чисто дедуктивных доказательствах. Предпринято было бесчисленное множество попыток для преодоления этой трудности: для отрицательных чисел пытались ссылаться на такие же относящиеся к реальному міру акты мышления, как и для положительных чисел; обращались к пространственному представлению, как к несомненно надежному источнику познания, и изображали положительные числа в виде точек на прямой, числовой оси, справа от нулевой точки, а отрицательные числа в виде точек на той же прямой слева от нулевой точки. Сочетания, выражающиеся в сложении и вычитании, таким путем, действительно, можно было объяснить, но положение, что произведение двух отрицательных чисел есть опять положительное число, с этой точки зрения вновь представляло трудности, которые удавалось затушевать, но не преодолеть. Признавали даже эти положения, как это сделал иезуит Клавий (1612), совершенно непостижимыми, хотя и правильными фактически [42]).

В сущности совершенно такие же сомнения возникли при введении так называемых мнимых чисел [43]). Под извлечением квадратного корня из какого-нибудь числа a понимают, как известно, определение такого числа, которое, будучи само на себя помножено, дает a Но если a отрицательное число, то нет ни положительного, ни отрицательного числа, которое удовлетворяло бы этому требованию, потому что квадрат всякого положительного или отрицательного числа всегда положителен. Несмотря на это, нельзя было обойтись без введения числовых знаков для этих мнимых чисел, и, введя мнимую единицу $\sqrt{-1} = i$, стали над ними, равно как над комплексными числами $a + bi$ производить действия совершенно так же, как над обыкновенными, вещественными числами. Таким путем получили массу поразительнейших результатов, в правильности которых невозможно было сомневаться, так как во многих случаях они могли быть добыты изысканиями, не заходящими в область мнимого.

Мало-по-малу между тем познали, что в основе счета, т.-е. законов сочетания целых чисел, лежат известные формальные законы [44]), на которых единственно покоится счет, так что нет надобности каждый раз вновь обращаться к представлению того, что могут означать собой числа в их отношении к действительным об'ектам. Тем самым открылось совершенно новое понимание понятия числа. Так как вычитание двух равных чисел или вычитание большего из меньшего невозможно, но такого рода требование все же неизменно пред'является к нашему интеллекту, то нужно было ввести новые числовые понятия, которые удовлетворяли бы этим требованиям. Затем уже остается только показать, насколько эти чисто логические создания нашего рассудка допускают вычисления, т.-е. закономерное сочетание. Когда, напр., введены нуль и отрицательные числа, как знаки для выражения определенного акта мышления, то задача состоит в том, чтобы наиболее подходящим образом установить эти правила счета. Но это достигается особенно наглядным образом, если можно без противоречия придерживаться тех же формальных законов, которым подчинены вычисления с натуральными целыми числами. Ибо тогда возникает чистый схематизм счета, благодаря которому делаются возможными общие, ни чем более не стесненные приемы.

Этот чисто служебный принцип расширения области чисел посредством свободных и самих по себе произвольных определений понятий, подчиненных, однако, принципу экономии мышления Маха [45]), этот принцип перманентности формальных законов впервые выражен во всей своей общности Г Ганкелем [46]), и с тех пор он образует основу чисто ариѳметических теорий. И, действительно, обнаружилось, что вычисления над дробными, отрицательными, а затем и над комплексными числами фактически могут быть подчинены этому принципу перманентности: над всеми этими числами можно производить вычисления как над целыми числами, если только при всех действиях применять чисто формальные правила, и всякое вычисление, основанное на основных видах счета, распространяется постоянно на всю область комплексных чисел, даже там, где это не находит себе применения.

В действительности общее применение мнимых чисел получило право гражданства лишь после того, как Гаусс изображением этих чисел на числовой плоскости представил свободное от противоречий, связанное, впрочем, с пространственным представлением [47]) учение о сочетании этих чисел, сводившееся к чисто формальному расширению известных правил вычисления [48]), еще более значительным было влияние поразительных результатов изучения этих чисел, которых сумели добиться Гаусс в своих изысканиях в области теории чисел, и Абель, Якоби и Коши — в теории функций комплексных переменных [49]).

Завершено ли, однако, понятие числа комплексными числами? Оказывается, правда, что пока нет надобности в переходе к дальнейшим числовым знакам, так как все вычисления, какие возникают в области арифметики, она вполне может выполнить при помощи комплексных чисел, последние образуют законченную в себе систему чисел. Но в виду того, что обнаружилась чрезвычайная полезность вычислений с комплексными числами благодаря их особенной подвижности, возник такого рода вопрос: не получится-ли еще большее усовершенствование счета, если на подобие того, как от прямой линии, числовой оси вещественных чисел, перешли к числовой плоскости Гаусса, перейти к пространству, в котором каждая точка с тремя ее координатами соответствовала бы числовому знаку?

Этот вопрос привел к разносторонним изысканиям относительно гиперкомплексных чисел. Английскому математику В. Р. Гамильтону мы обязаны системой чисел, кватернионов, которая, хотя и не подходит более под принцип перманентности и только в одном предельном случае опять ему подчиняется, но, пожалуй, впервые доказала возможность и полезность чисто логических числовых образований. Но, собственно, на вопрос, может ли система, стоящая над системой комплексных чисел, удовлетворить принципу перманентности, этим еще не было дано ответа. После того как уже Ганкель [50]) рассмотрел в главных чертах этот выдвинутый Гауссом вопрос и пришел к отрицательному на него ответу, Вейерштрасс и Дедекинд показали самым общим образом, что если сохранить формальные законы вещественных чисел, которые пришлось, впрочем, для этого несколько более точно логически формулировать [51]), то вообще расширение за пределы комплексных чисел невозможно или по крайней мере излишне, так что вычисления с комплексными числами обладают, таким образом, характером полной законченности.

Гораздо большую трудность представляло зато логическое обоснование иррациональных чисел, которые, собственно говоря, молчаливо уже предполагались нами в предшествовавших рассуждениях.

Греки познали, что отношение двух отрезков не всегда может быть выражено рациональным числом или дробью. Возможны случаи, когда два отрезка точно измеримы одной и той же единицей длины, которая содержится, скажем, a раз в первом и b раз во втором; $a:b$ называется тогда отношением обоих соизмеримых отрезков. Пифагорейской школе приписывают уже знание того, что диагональ и сторона квадрата никогда не могут быть выражены как целые кратные одной и той же единицы длины, т. е. что они несоизмеримы. И вот, вместо того, чтобы обобщить понятие числа, как это нам представляется наиболее естественным, греки отказались от применения чисел к геометрии и пытались самостоятельно построить геометрию при помощи весьма, правда, остроумного метода пропорций или отношений. Что имеются числовые действия, которые не могут быть выполнены по своим условиям никаким рациональным числом, известно всякому: сюда относится, напр., извлечение квадратного корня из всякого рационального числа, которое само не есть квадрат. Каждый из этих новых числовых знаков можно было бы, конечно, подчинить правилам перманентности и, таким образом, восстановить схематизм счета, но такой метод никогда не приведет к обоснованию права на существование всех мыслимых иррациональных чисел.

Поводом к образованию иррациональных чисел на самом деле служит представление непрерывности величин [52]), в простейшем случае, следовательно, непрерывности прямолинейного отрезка, которую надлежало выразить в числах, если только не хотели отказаться от математической формулировки сущности процессов природы, которым, повидимому, свойственна непрерывность [53]).

Дедекинду должно быть вменено в заслугу, что он впервые истинно философским образом преодолел заключающуюся здесь трудность. Он исходил при этом из намерения описать сущность непрерывности прямой линии, и 24-го ноября 1858 г. он нашел, что она состоит в следующем свойстве [54]):

Если все точки прямой распадаются на два класса таким образом, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение или сечение.

Представим себе, далее, что все рациональныя числа распадаются на два класса таким образом, что всякое число первого класса меньше всякого числа второго класса.

При таком разложении мыслимы только четыре случая:

1. Среди чисел первого класса находится одно наибольшее a, среди чисел второго класса — одно наименьшее b. Этот случай исключается как невозможный, ибо $^1/_2(a+b)$ было бы рациональным числом, которое, вопреки предположению, не принадлежало бы ни к первому, ни ко второму классу.

2. Среди чисел первого класса находится одно наибольшее a, среди чисел второго класса нет наименьшего; тогда a есть рациональное число, производящее сечение.

3. Среди чисел первого класса нет наибольшего, но среди чисел второго класса имеется наименьшее b; тогда b производит это сечение.

4. Среди чисел первого класса нет наибольшего, среди чисел второго класса нет наименьшего; тогда нет рационального числа, которое производило бы это сечение. Мы должны, следовательно, создать и приурочить к нему новый числовой знак, и всякий раз, когда это может иметь место, создаются новые, уже не

рациональные числовые понятия, т. е. иррациональные числа.

Теперь остается только показать, как можно производить вычисления над этими новыми числовыми знаками. Для этого нужно доказать, что эти новые знаки могут быть определены как находящиеся между собой и с рациональными числами в отношении равенства, а также неравенства в ту или другую сторону, и что к ним применимы обыкновенные правила арифметики. Если это удастся, то мы достигли введения непрерывной числовой системы. Дедекинд в действительности доказывает следующее положение: Если эта расширенная, таким образом, система вещественных чисел распадается на два класса так, что каждое число первого класса меньше всякого числа второго класса, то существует одно и только одно число, которое производит это сечение.

Само собой разумеется, что эти новые числовые знаки невозможно точно выразить как-нибудь при помощи рациональных чисел. Само по себе это и не требуется в чистой математике, ибо здесь вполне достаточно логическое установление. Если, однако, принять во внимание приложения и ввести выражение: два числа приближаются друг к другу до степени ε, если их абсолютная разность меньше $10^{-\varepsilon}$, то иррациональные числа можно заменить приближенно десятичными дробями и притом со сколь угодно большой, но всегда только конечной степенью приближения [55]).

Тем самым устраняются последние сомнения, которые даже недавно еще вызывали эти и родственные им взгляды [56]).

Эти последние исходят из понятия предельного значения [57]), которое тоже нужно было вполне выяснить. При развитии лейбницевского исчисления бесконечно-малых встретилась трудность в виде отыскания логически удовлетворительного представления о бесконечно-малых величинах. Одни прямо принимали их за нули [58]), другие создали себе мистическое представление о величинах, которые, будучи меньше всякой представляемой величины, все же заключают в себе зародыш возникновения конечного количества [59]). Впервые Даламбер опять указал на необходимость введения понятия предела; но в фундамент исчисления бесконечных возвел его лишь Коши, хотя и после него пришлось еще поработать в этом направлении.

Утверждение, что расстояние, постоянно растущее и все-таки никогда не превосходящее данной длины, должно достигать наибольшей величины, которая называется его пределом, представляется наивному разумению очевидной истиной. Мы можем поэтому применить этот принцип и к понятию числа, индивидуумы которого должны ведь соответствовать непрерывному отрезку. Если мы теперь попытаемся точно выразить эту наглядную истину, то получится следующее определение:

Если через a_1, a_2, a_3, a_n обозначить бесконечный ряд последовательных значений переменного числа x, и если существует такое число A, что

$$\left| a_n - A \right| < \varepsilon,$$

коль скоро $n > N$ (при чем ε означает сколь угодно малое заданное рациональное число), то A называется пределом [60]) числа x. Это определение еще отличается тем неудобством, что нужно уже знать число A; Коши выразил его поэтому (не совсем вполне, впрочем, обосновавши это) в следующей форме, известной в настоящее время под названием принципа сходимости [61]):

Если бесконечный ряд чисел a_1, a_2, a_3, a_n обладает тем свойством, что

$$\left| a_{n+m} - a_n \right| < \varepsilon$$

для всякого сколь угодно большого m, коль скоро $n > N$, то ряд чисел a стремится к пределу.

Если понятие предела таким образом определено, то раскрывается новая теория иррациональных чисел, которая, повидимому, обладает некоторыми преимуществами по сравнению с теорией Дедекинда. С одной стороны нужно ведь признать, что в большинстве вопросов числа не представляются сечениями, и что всякий раз требуются особые рассуждения, чтобы познать их как таковые; с другой стороны, точка зрения Дедекинда, по крайней мере, по внешней видимости, связана с пространственным представлением. В противоположность этому теории Гейне, Кантора и Мерэ можно назвать чисто арифметическими [62]). В них рассматриваются ряды рациональных чисел, которые удовлетворяют принципу сходимости. Сходящийся ряд может иметь рациональный же предел; если же этого нет, то к такому ряду нужно приурочить новый иррациональный числовой знак. В этом случае также можно затем показать, что с этими знаками можно производить вычисления по законам перманентности [63]).

Но одно-однозначное отнесение всех вещественных чисел к непрерывной прямой при всех этих теориях связано с трудностью, на которую давно уже [64]) обратил внимание Г. Кантор. Если исходить из арифметического определения иррациональных чисел, то при помощи представлений величин, возникающих из понятия конгруэнтных отрезков и из упоминаемой ниже аксиомы Евдокса, можно, конечно, показать, что всякому отрезку соответствует рациональное или иррациональное число. Но из этого еще не следует и обратное, что всякому иррациональному числу соответствует вполне определенный отрезок. Ибо невозможно обозреть арифметические изображения иррациональных чисел во всей их совокупности и еще менее возможно привести их в соответствие с пространственным представлением. Посему необходимо рассматривать это как аксиому, именно благодаря которой делается возможным обратимо однозначное сопряжение точек прямой с вещественными числами и тем самым применение последних к геометрии и механике. Точно так же обстоит дело, если рассматривать теорию Дедекинда надлежащим образом, т. е. как совершенно не связанную с пространственным представлением [65]). Но этим отнюдь еще не завершено расширение понятия числа самого по себе. Уже разносторонние результаты, полученные Гамильтоном при помощи кватернионов [66]), свидетельствуют о плодотворности числовых знаков, законы сочетания которых не удовлетворяют более закону перманентности, а обязаны своим правом на существование исключительно логически непротиворечивому их определению. Грассману должно быть вменено в особую заслугу, что в своем учении о протяженности он показал пользу употребления чисел с произвольно многими единицами для систематического развития всех тех вопросов, на которых вообще основано приложение арифметики к геометрии и механике.

Определенное данное вещественное число, как бы мало оно ни было, всегда превзойдет любое другое данное число, если только достаточное количество раз взять его множителем. Мы считаем себя в праве утверждать это и о величинах, как факт нашей интуиции; с каким глубоким пониманием древние относились к подобного рода вопросам, видно из того, что уже Евдокс Книдский и Архимед рассматривали это как недоказуемую аксиому учения о величинах. Мы говорим, что непрерывная в современном смысле (линейная) система величин удовлетворяет лемме Евдокса или Архимеда. Но уже обыкновенные наши комплексные числа не подчиняются более этому понятию величины [67]), а Гильберт в своих исследованиях оснований геометрии ввел и с чрезвычайным успехом применил вещественные числовые понятия, про которые следует сказать то же самое [68]). Аналогичным характером отличается также введенная П. Дюбуа-Реймоном система „бесконечного возрастания вещественных функций“ [69]), равно как числовые знаки, применяемые, напр. алгеброй логики, с их особыми законами сочетания.

Понятие функции [70]) постепенно вылилось в следующую форму: y называется функцией от x в промежутке от $x = a$ до $x = b$, если в этих границах каждому значению x соответствует одно или несколько определенных y. Каким образом это понятие в дальнейшем своем развитии приобретает столь неизмеримо богатое содержание, представляется на первый взгляд трудно постижимым. Здесь мы можем только сослаться на факт, что работа всего прошлого столетия была направлена на развитие этого понятия, находящегося в самой тесной связи с нашими идеями причинности, и что в будущем, вероятно, оно также будет приниматься за исходную точку всех математических изысканий. Относящиеся сюда вопросы могут быть, впрочем, несколько подробнее развиты.

1. Пусть закон зависимости y от x дан в виде общепонятного элементарного арифметического правила. Тогда в сущности дело идет о свойствах соответствующей кривой $y = f(a)$; подобного рода вопросы составляют предмет дифференциальной геометрии.

2. Дано вообще только правило, по которому возможно определить, какое y относится ко всякому данному x. В таком случае мы прежде всего должны спросить, где функция непрерывна, и где она этим свойством не обладает, дифференцируема ли она там, где она непрерывна, или, быть-может, допускает даже неоднократное дифференцирование.

В качестве первой подгруппы можно выделить тогда те функции, которые допускают неограниченное, т. е. сколько угодно раз повторенное дифференцирование. Для таких функций может быть действительной [71]) основная теорема о ряде Тейлора, согласно которой значение функции в определенном промежутке, области сходимости, выражается при помощи так называемого степенного ряда, если в одной точке промежутка известны значения функции и всех ее производных. Если это имеет место, то можно сказать, что функция в данной области сходимости изображена при посредстве аналитического выражения.

Для второй группы, для так называемых произвольных функций непрерывного переменного x, в которых не предполагается ни непрерывность, ни возможность дифференцирования, это аналитическое выражение, разумеется, совершенно неприложимо. Но историческое развитие показало, что большой класс этих „произвольных функций" может быть изображен при посредстве тригонометрических рядов и иных вспомогательных средств. Исследование этих случаев, начатое Фурье и поставленное на вполне надежный фундамент впервые Дирихле[72], составляет одну из важнейших глав в учении о функциях вещественного переменного, которую мы не имеем здесь возможности развивать в деталях и в частности не можем довести до последних ее границ.

Если теперь принять в соображение, насколько арифметика обогатилась, благодаря понятию комплексного числа, то естественно было ожидать, что со введением комплексных чисел в понятие функции должны будут открыться совершенно новые горизонты. Чрезвычайную заслугу Коши[73] составляет то, что он впервые сделал этот шаг; вместо совершенно тривиального понятия, что $\xi + i\eta$ должно зависеть от $x + iy$, он ввел понятие аналитической функции[74], сводящееся к тому, что

$$f\ (x+iy),$$

рассматриваемая как функция обоих переменных x и y, т. е. в рассматриваемой области непрерывных переменных x и y, имеет первые частные производные по x и по iy, которые для каждой точки x, y равны между собой.

С тех пор теория функций комплексного переменного выдвигается на первый план. Она развивалась, главным образом, по двум направлениям. Одно направление, основанное Вейерштрассом, берет за исходную точку тот факт, что степенной ряд комплексного переменного z внутри области его сходимости представлает элемент аналитической функции, но что во многих случаях возможно продолжить этот элемент функции и за первоначально данную область одним и только одним образом. Тем самым создается тогда вполне определенное аналитическое образование, и его-то именно называют аналитической функцией, которая происходит из указанного элемента функции или относится к нему.

Против этого понимания можно, пожалуй, возразить, что исходная точка в виде степенного ряда вначале ведь случайная, так что она по самой сути своей может привести к быть может не необходимому ограничению понятия функций. Этого недостатка нет в собственно более глубоком направлении Риманна, которое, примыкая ко взглядам Коши, пытается ограничить понятие функции его наиболее существенными условиями и вместе с тем показывает, что точка зрения Вейерштрасса обладает точно такой же степенью общности, как и только-что упомянутая[75].

Не-математику, однако, трудно будет понять, почему именно переход к мнимым числам является пригодным для раскрытия столь многих новых свойств понятия функции. Почему необходимо сперва перейти в область мнимого, чтобы найти истины, которые, в конце концов, должны ведь послужить поводом к новым утверждениям об отношениях между вещественными числами? На это можно ответить аналогией. Кто переезжает из одного места в другое всегда по прямому пути, накопит очень мало наблюдений, гораздо меньше того, кто пользуется всякий раз иным маршрутом. Точно так же имеются геометрические теоремы [76]), которые невозможно доказать на плоскости, но которые немедленно же становятся доказуемыми, как только мы принимаем в соображение значительно более богатые свойства пространства. Подобно этому числовая непрерывность в комплексной плоскости тоже значительно более богата, и ответ на вопрос заключается в том, что благодаря взаимоотношениям в числовой плоскости удается раскрыть обстоятельства, которые при ограничении вещественной областью, по крайней мере в н а ч а л е, совершенно не были бы замечены [77]). На этом основано и то, что почти все исследования в области теоретической физики вообще невыполнимы, если не применять функций комплексного переменного, и только в конечных результатах, которые должны относиться к действительным обстоятельствам нашего наглядного представления и опыта, совершается в них переход к вещественным числам. Новичек в математике удивляется, когда узнает, что при помощи гиперкомплексных числовых систем, каковы, напр., система знакопеременных чисел или кватернионов, раскрываются н о в ы е взаимоотношения между вещественными числами. Так, из первых вытекают основания теории определителей, из вторых—если взять особенно поразительный пример—получается теорема Э й л е р а о преобразовании произведения двух сумм четырех квадратов в аналогичную сумму. Простое рассуждение показывает, однако, что коль скоро введены уже вещественные числа во всем их объеме, т о в с е э т и м е т о д ы п р и в о д я т л и ш ь к с о о т н о ш е н и я м, к о т о р ы е м о г у т б ы т ь д о-б ы т ы и в о д н о й т о л ь к о в е щ е с т в е н н о й о б л а с т и (в этом заключается существенное отличие от вышеприведенного случая пространственной геометрии). Дело в том, что методы эти всегда основываются только на уравнениях, которые действительны в вещественной области, но которые по сложности своей зачастую не могут быть непосредственно выведены. Наиболее ярко это иллюстрируется на исключительном прогрессе, которым анализ обязан формуле Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Только в самых кратких словах можем мы, теперь коснуться предметов, которые механическому пониманию природы XVIII столетия должны были, разумеется, казаться особенно важными, а именно, решения дифференциальных уравнений. Очень скоро обнаружилось, что только для небольшой группы дифференциальных уравнений, к которым приводят уже простейшие вопросы, возможно приведение к обращению процесса дифференцирования, т. е. решение посредством так наз. квадратур. „Institutiones calculi integralis“ Эйлера дают нам столь же остроумное, сколько и плодотворное трактование дифференциальных уравнений по этому методу, который благодаря учению Ли о группах преобразований [78]) получил в наше время совершенно новую форму, отличающуюся многими принципиальными точками зрения. Исключительно благодаря тому, что исходили из взгляда, покоющегося собственно на механическом понимании природы, что всякое дифференциальное уравнение разрешимо [79]), удавалось во многих случаях представить это решение в удовлетворительной для применения форме, хотя для этого нередко прибегали к приемам, которые не были вполне оправдываемы [80]).

И здесь также Коши принадлежит честь создания фундамента. Он не только показал, что система вещественных дифференциальных уравнений первого порядка с одним независимым переменным—а к этому случаю может быть приведена всякая система обыкновенных дифференциальных уравнений определенного порядка—имеет при известных предположениях одно и только одно определенное решение, но позднее он своим „Calcul des limites“ распространил эту теорему и на комплексную область [81]). Его исследования были вплоть до новейшего времени упрощаемы и совершенствуемы. Мы должны здесь отказаться от дальнейших указаний относительно природы этих решений, так как при этом нельзя обойтись без терминологии теории функций комплексного переменного. Заметим только, что уже Гаусс в своей работе о гипергеометрическом ряде (как это во всем объеме выяснилось, впрочем, только позднее) наметил основания той теории линейных дифференциальных уравнений, которая со времени знаменитых работ Фукса [82]) окончательно отрешается от старой точки зрения нахождения решения посредством ряда квадратур и вместо этого вводит непосредственное изучение интегралов при помощи теории функций Коши-Вейерштрасса.

Интерес к этому классу дифференциальных уравнений обнаружился чрезвычайный, с одной стороны, в виду их особенной простоты [83]), а с другой стороны, в виду некоторых вновь возникавших трудностей[84]); не удивительно поэтому, что частные дифференциальные уравнения, которые собственно для физических приложений являются еще более важными, до сих пор не исследованы с такой же обстоятельностью. И здесь также Коши уже в 1842 г. сделал первый шаг, но только исследования Дарбу и Софии Ковалевской обнаружили однозначное существование решений, удовлетворяющих известным начальным условиям, по крайней мере для одного вполне определенного вида частных дифференциальных уравнений, а рассмотрение особого класса их, важного для физических изысканий, поставлено было, благодаря принципу Дирихле и позднее благодаря замене его вполне строгими методами, в полную независимость от вышеуказанных предположений.

В последние десять лет, благодаря началу, положенному в 1900 г. трудами И. Фредхольма, и благодаря широким точкам зрения, внесенным в исследование работами Д. Гильберта, выдвинулась теория интегральных уравнений и успела приобрести исключительное значение, так как при ее помощи оказались разрешимыми задачи, из теории дифференциальных уравнений, которые до того действительно поддавались разрешению только в отдельных случаях. Здесь мы должны, однако, отказаться от общего очерка этой теории, которая пользуется исследованием бесконечных определителей, относящихся к линейным уравнениям с бесконечно многими неизвестными, от квадратичных форм с бесконечно многими переменными, и которая в состоянии бросить совершенно новый свет на важнейшие задачи чистой и прикладной математики, особенно же на задачи теоретической физики[85]).

Понятие интеграла функции уже Лейбниц[86]) в принципе познал, как предельное значение суммы. Но под влиянием великих основных трудов Эйлера в области анализа, это понятие превратилось в чисто формальное, а именно, в обращение действия дифференцирования[87]). В виду этого понятие интеграла оставалось в сущности совершенно проблематичным во всех тех случаях, когда такое обращение не могло быть произведено посредством известных операций[88]). Крупной заслугой Коши является то, что он вновь ввел понятие определенного интеграла как предела суммы и вместе с тем указал критерии существования этого предела.

В частности предел всегда существует, когда подлежащая интегрированию функция непрерывна. Это представление было, однако, чрезвычайно расширено Риманном[89]). Этот последний заметил, что существование такого предела отнюдь не обусловлено непрерывностью интегрируемой функции, что оно может быть доказано для обширного класса разрывных, но конечных функций. Критерий Римана[90]) поставил, таким образом, понятие определенного интеграла на фундамент, по существу своему всецело независимый от дифференциального исчисления, и тем самым создал из интегрального исчисления метод, идущий несравненно дальше узко специальных предпосылок дифференциального исчисления, которые исходят из существования производной функции. Благодаря этому стало возможным говорить о вычислении площадей, о длине дуг и т. д. для случаев, которым вообще не соответствуют какие-либо доступные наглядному представлению образования.

С другой стороны, исследование Коши могло быть применено и к многократным интегралам, которые получаются, когда подлежащие интегрированию объемы, площади и т. д. совершенно произвольным образом разлагают на меньшие части [91]).

Здесь опять-таки, как и при рассмотрении простого интеграла, сталкивались с тем, что исследование значения интеграла существенно зависит от свойств области, в которой функция определена и, в частности, может быть, характеризуется уклонениями от непрерывности. Эти соображения привели к совершенно новой дисциплине, которая развилась в течение последних 30 лет, к учению о множествах. В основных своих чертах созданная почти исключительно трудами Г. Кантора[92]), эта теория весьма скоро получила значение одного из важнейших методов, который проникает во все области анализа и теории функций и заслуживает большого внимания также по своей теоретико-познавательной ценности.

Под множеством понимают по Г. Кантору совокупность вполне различимых об'ектов нашего мышления, элементов множества, относительно которых каким-либо способом можно решить, относятся ли они к множеству или нет. При этом на первый план выступают два основных понятия—понятие мощности и понятие расположения элементов[93]).

Два множества M_1 и M_2 называются равномощными или эквивалентными $M_1 \sim M_2$, если их элементы могут быть приведены в одно-однозначное соответствие друг с другом; да будет позволено обозначить здесь это соотношение как отображение. Если это общее понятие мощности обозначить символом $\overline{M}$, то эквивалентность выражается через $\overline{M}_1 = \overline{M}_2$; напротив, если правильная часть M от M_1 эквивалентна M_2, но в M_1 нет части, эквивалентной M_2, то $\overline{M}_1 > \overline{M}_2$ [94]).

В то время как Гаусс и, опираясь на его авторитет, особенно философы протестуют против употребления бесконечных множеств как законченного синтеза, Кантору не только удалось законно ввести понятие такого множества (т. е. точно определить в каком смысле трансфинитные множества, числа, могут быть рассматриваемы как надежные понятия), но он сумел также развить теорию таких множеств, покоющуюся на обоих принципах мощности и расположения, которыми уже до того пользовался Дедекинд в своих изысканиях о понятии числа.

О том, чтобы дать хотя бы скромный очерк огромного значения теории множеств, здесь и речи быть не может; мы должны будем удовольствоваться несколькими простейшими указаниями.

Конечному множеству соответствует определенное количество, его кардинальное (количественное) число; конечное множество не может быть „отображено“ на какой-нибудь своей правильной части. Напротив, бесконечное множество, элементы которого хотя и даны определенными законами, но никогда не могут быть вполне указаны, характеризуется тем, что правильная его часть может быть эквивалентна ему самому; так, напр., множество положительных целых чисел может быть эквивалентно частичному множеству, состоящему из четных чисел. Это бесконечное или трансфинитное множество есть простейшее, и каждое ему эквивалентное множество называется исчислимым; его мощность обозначается символом $\aleph_0$ (алеф-нуль) трансфинитного кардинального числа.

Засим Кантор доказывает поразительную теорему, что множество всех рациональных чисел, равно как множество всех алгебраических чисел тоже исчислимо [96] и что всякое исчислимое множество исчислимых множеств в свою очередь опять-таки исчислимо [97]). Всю плодотворность этих идей обнаруживает доказательство Кантора существования бесконечного множества трансцендентных чисел (мощности континуума всех чисел), существование коих Ж. Лиувиль познал еще в 1851 г., построив определенные классы чисел этого рода [98]).

Тем самым доказано и то, что линейный континуум вещественных чисел не исчислим, т. е. обладает высшей мощностью нежели $\aleph_0$, и вместе с тем доказано, что $\aleph_0$ есть наименьшее трансфинитное кардинальное число, так как из каждого бесконечного не-исчислимого множества M можно выделить исчислимое частичное множество, при чем M не перестает быть бесконечным (*Borel*, „Leçons sur la théorie des fonctions“, стр. 12).

Теперь можно перейти к **вычислению с кардинальными числами** благодаря введенным Кантором понятиям множеств соединения, сочетания и взаимного отображения двух или более мощностей; алгоритм этих действий следует ассоциативному (сочетательному), дистрибутивному (распределительному) и коммутативному (переместительному) закону обыкновенной арифметики.

Существуют ли, далее, **высшие** мощности, нежели мощность линейного континуума? Кантор сделал замечательное открытие (1877), доказавши, что **континуум** n **измерений и даже континуум исчислимо бесконечно многих измерений может быть отображен на линейный континуум** [99]).

Однако имеются **высшие** мощности, чем **линейный континуум** C_1. Такова, напр., мощность **всех** функций в определенном промежутке, тогда как множество **непрерывных** функций в том же промежутке имеет только мощность C_1 [100]).

При указанном отображении C_m на C_n $(m > n)$ наше обычное понимание n мерного многообразия, как охарактеризованного со времени Декарта понятия, повидимому, теряет свой смысл. Но это не имеет места, если ограничиться **непрерывными** отображениями [101]).

Так, напр., отображение квадрата на отрезок **не непрерывно** [102]). Тем самым возникает задача показать, **какие геометрические характерные черты связаны с непрерывными отображениями многообразия.** Analysis situs впервые здесь через учение о множествах получает свое принципиальное развитие. А. **Шенфлис** систематически обработал результаты, добытые в этой области в течение последних лет [103]).

Но правильна также и обратная теорема: **Непрерывное сопряжение** C_m с C_n **никогда не есть „отображение“.** Сопряжение подобного рода впервые реализовал Дж. **Пеано**, который доказал, что непрерывная кривая, однозначно отнесенная к отрезку $0 - 1$, может пройти через все точки квадрата, сторона которого равна единице [104]).

Это должно было дать толчок к более точному ограничению понятия кривой. К этому приводит понятие кривой **Жордана**, т. е. образ

$$x = f(t),\ y = \varphi(t),$$

который при помощи непрерывных функций f, φ отображается на линейный континуум

$$t_0 \leqq t \leqq t_1,\ t_0 \neq t_1,$$

если уравнения

$$f(t) = f(\tau), \ \varphi(t) = \varphi(\tau)$$

одновременно в области переменного t имеют только одно решение $t = \tau$. Эта кривая незамкнута; замкнутые кривые надо отображать на точки окружности

$$x = \cos t, \ y = \sin t,$$

присовокупляя условие

$$f(0) = f(2\pi), \ \varphi(0) = \varphi(2\pi).$$

Кривая *Жордана* никогда не имеет многократной точки, и тем самым исключена, напр., мнимая парадоксальность кривой *Пеано*. И вот фундаментальная теорема гласит, что такого рода замкнутая кривая, которую простоты ради можно мыслить лежащей целиком в области конечного, постоянно разделяет плоскость на (конечную) *внутреннюю* и бесконечную *внешнюю* области, общей границей которых и является эта кривая[105]).

Столь же крупное значение имеют изыскания *Кантора* о *понятии числа* вообще, в частности *различение кардинального и ординального* (порядкового) *числа*, которое так явственно чувствуется в словесном выражении, но между тем не оказывает никакого влияния на многие математические рассуждения.

Множество элементов называется *упорядоченным*, если из каждых двух его элементов m_1, m_2, в силу определенного правила, один элемент, напр., m_1 считается предшествующим, а другой m_2 последующим. Тогда пишут $m_1 \prec m_2$; при этом должен быть также удовлетворен закон *монотонии*: „из $m_1 \prec m_2$, $m_2 \prec m_3$ следует $m_1 \prec m_3$“. Два упорядоченные множества M_1 и M_2 называются подобными ($M_1 \simeq M_2$), если их элементы отображены друг на друга без изменения соотношений расположения. Тем самым создается понятие расположения, *общего всем подобным множествам*, понятие *порядкового типа*. Все множества одного и того же типа эквивалентны в силу определения, но эквивалентные множества могут относиться к самым различным типам: два конечные эквивалентные множества имеют однако только *один* тип, их *порядковое число*, которое обозначается одинаково с их *кардинальным числом*[106]). Для этих типов, как и раньше для мощностей, можно создать алгорифм, который подчиняется формальным законам арифметики, но *переместительный закон при этом в общем не имеет силы*[107]).

Из типов возникают засим порядковые числа Кантора при посредстве понятия вполне упорядоченных множеств „M_w", т. е. таких упорядоченных множеств, для которых каждое частичное множество имеет первый элемент. Итак, в множествах M_w для каждого элемента имеется непосредственно за ним следующий (исключение представляет последний элемент, буде он имеется).

Если далее назвать множество элементов, предшествующих элементу m, отрезком A_m, то получаются основные теоремы: „Множество M_w не подобно ни одному из своих отрезков, но два множества M_w либо подобны друг другу, либо одно из них подобно отрезку другого" [108]).

Типы вполне упорядоченных множеств и суть порядковые числа Кантора, они называются трансфинитными, если они относятся к трансфинитным множествам. Для таких двух чисел m, n, которые относятся к M_w, N_w, теперь могут существовать только обычные для величин соотношения, и на этом основывается право называть столь общие символы расположения числами: если $M_w \simeq N_w$, то $m = n$; если же только отрезок M_w подобен N_w, то $m < n$. Так как множество порядковых чисел, которые меньше m, в свою очередь тоже вполне упорядочено, то для каждого порядкового числа n имеется ближайшее высшее, которое называется $n + 1$.

Это рассуждение дает нам способ переходить к все высшим порядковым числам. Порядковое число $(1, 2, \quad , n)$ есть n; порядковое число трансфинитного вполне упорядоченного множества $(1, 2, \quad .)$ обозначается через ω, оно называется предельным числом порядковых чисел натурального ряда чисел. Отсюда переходят к числам

$$\omega + 1,\ \omega + 2, \qquad \omega + n$$

и при помощи повторения предельного перехода получают $\omega 2$, а затем

$$\omega 2 + 1,\ \omega 2 + 2, \qquad ,\ \omega 2 + n$$

или $\omega\ 3$, вообще $\omega m + n$, затем отсюда $\omega\omega$ или ω^2 и т. д.

Всякому трансфинитному порядковому числу соответствует известная мощность, так как оно относится к совершенно определенному вполне упорядоченному множеству. Совокупность всех порядковых чисел, которые могут соответствовать определенной мощности, Кантор называет числовым классом. Так, мощности $\aleph_0$ соответствует числовой класс $Z(\aleph_0)$. Этот класс в свою очередь имеет мощность $\aleph_1$, про которую говорят, что она больше $\aleph_0$; это приводит к восходящему классу алефов.

И вот, казалось бы, надо было надеяться, что при помощи числовых классов, восходящих по своей мощности, можно дойти до мощности континуума C_1. Тем самым мы подошли к неоднократно рассматривавшемуся вопросу о возможности полного упорядочения линейного континуума, и в более общем виде к вопросу о полном упорядочении бесконечного множества вообще. На этот счет до сих пор еще не установилось единства мнений. В то время как Э. Цермело желал свести вопрос к принципу выбора, что из каждого множества должно быть возможно выбрать по меньшей мере один элемент (Math. Ann. 59, стр. 514, 1904), против этого тотчас же раздались возражения, и приходится согласиться с А. Шенфлисом, который в своем реферате II относительно учения о множествах (стр. 33) называет этот принцип только иной формулировкой подлежащей доказательству теоремы; другие исследователи, напр., Г. Гессенберг (Taschenbuch für Math. u. Physiker 1912, стр. 79), напротив, считают возможным и доказанным полное упорядочение каждого множества.

Параллельно этим разсуждениям развивается—долженствующая быть понятой опять-таки чисто арифметически—теория точечных множеств, рассматриваемых в каком-либо пространстве. Мы ограничимся, главным образом, линейными точечными множествами, которые представляются точками на прямолинейном отрезке, промежутке (ab), а потому будем под точечным множеством P понимать совокупность P каких-нибудь лежащих на отрезке (ab) точек, предполагая, однако, континуум в качестве фона.

Точка A называется в (ab) точкой сгущения для P, если внутри каждого окружающего A произвольно малого промежутка $(\alpha\beta)$ лежит по меньшей мере одна точка (отличная от A), а следовательно и произвольно большое число точек P. Каждое находящееся в (ab) бесконечное множество имеет по меньшей одну точку сгущения [109]. Эта точка не должна непременно принадлежать множеству P, она может быть пограничной; если точка принадлежит множеству, то P называется замкнутым в данном месте; множество называется вообще замкнутым, если все его точки сгущения принадлежат к нему. Оно называется в себе плотным, если все его точки суть точки сгущения, и совершенным, если оно замкнуто и в себе плотно; напротив, множество называется изолированным, если оно вообще не содержит точек сгущения [110].

Замкнутое точечное множество либо исчислимо, либо имеет мощность континуума. Точечное множество называется далее повсюду плотным в (ab), если в каждой части $(\alpha\beta)$ от (ab) находятся точки его, как это можно сказать, напр., относительно точек с рациональнымя абсцисами на отрезке 0—1; множество **нигде не плотно**, если оно ни в одном ($\alpha\beta$) не повсюду плотно.

Особенно важна теория точечных множеств, производных от множества P. **Производная** от P есть множество P' его точек сгущения; при этом P' **всегда замкнуто, если даже** для P это не имеет места [111]).

Если P' в свою очередь имеет производную P'', то P'' есть **часть** P'; это рассуждение приводит, значит, к ряду последовательных производных P', P'', P''', Этот ряд либо заканчивается, точечное множество P называется тогда **приводимым**, и в этом случае можно показать, что оно так же **исчислимо**, либо это не имеет места как, напр., для совершенного множества где P тождественно с P' и со всеми P^n.

Учение о множествах приобрело важность и для **понятия функции**. По Дирихле уравнение $y = f(x)$ выражает то, что к каждому x внутри линейного континуума (ab) относится значение y [112]). Но теперь x может также изменяться в пределах точечного множества, определенного каким-нибудь правилом. Тогда возникают новые вопросы. Так, непрерывная функция от x уже определена, если известны ее значения для всех рациональных точек [113]), более обще—если это имеет место для повсюду плотного исчислимого множества.

Особенно важное значение получили понятия теории множеств для теории тригонометрических рядов и учения об **определенном интеграле**: здесь вскоре было обнаружено, что аналитическое существование этих образований существенно зависит от распределения разрывов U функции в определенном промежутке, т. е. от множества элементов U.

Понятие **интеграла функции** покоилось сначала на требовании отыскать для данной функции $f(x)$ **все** функции $F(x)$, для которых $f(x)$ является производной, так что

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

Все значения этой по необходимости непрерывной функции $F(x)$ даны формулой

$$F(x) = F_1(x) + \text{const},$$

если одно из них обозначить через

$$F_1(x) = \int f(x)dx.$$

Интегрирование и дифференцирование являются в силу этого **обратными** действиями; но что интеграл существует и в тех случаях, когда невозможно непосредственно указать $F_1(x)$, это вытекало только из предположения о существовании площади фигуры, ограниченной кривою $y = f(x)$ и осью x'-ов. Но тем самым понятие интеграла либо ограничивается случаями, когда уже известно $F_1(x)$, либо оно приводится к понятию, которому присущи все неясности представления о кривой.

Впрочем, Лейбниц уже в 1675 г. понимал интеграл в смысле Архимеда, как предельное значение суммы „бесконечно малых" прямоугольников. Влияние Эйлера оттеснило на задний план эту точку зрения, и лишь Коши выдвинул ее для непрерывной функции $f(x)$ в качестве понятия определенного интеграла, который теперь является как вполне определенный предел суммы

$$S = (a-x_1) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \qquad (b - x_{n-1})' f(\xi_n),$$

в случае, если все частичные промежутки $x_i - x_{i-1}$ промежутка интегрирования (ab) страновятся меньшими сколь угодно малого числа, а ξ_i есть произвольный аргумент из $x_i - x_{i-1}$.

Но даже тогда, если $f(x)$ содержит точки разрыва U, это понятие интеграла Коши может быть оставлено в силе. Для этого необходимо, чтобы множество U не было в себе плотно, и чтобы в каждом свободном от U промежутке $(\alpha\beta)$ существовала функция $F(x$, для которой уравнение

$$F(\beta) - F(x) = \int_{a}^{\beta} f(x)\, d(x)$$

имеет определенный смысл [114]).

Это ограничение множества U не имеет силы для Риманнова понятия определенного интеграла [115]). Риманн доказал в 1854 г, однозначное существование предельного значения суммы S при предположении конечного $f(x)$, если тольке сумма

$$D = (a - x_1) D_1 + \qquad (b - x_n) D_n,$$

где D_i есть колебание [116]) $f(x)$ в соответствующем промежутке $x_i - x_{i-1}$, при каком-нибудь разложении (ab) на частичные промежутки может быть сделано меньше, чем ε, когдн $x_i - x_{i-1}$ принимаются $< \delta$, или же если сумма длин промежутков, в которых колебания больше η, может быть сделана меньше, чем ε [117]). Такого рода функция называется интегрируемой.

Для непрерывных функций интеграл Риманна совпадает с пнтегралом Коши. Но знаменитый пример первого (1854)

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^2} +$$

где для (y) надо взять наиболее близкое к y целое число, но вместе с тем надо взять нуль, если y превосходит такое число на $\frac{1}{2}$, относится уже к $f(x)$, в котором разрывы непрерывности образуют повсюду плотное множество. Под-интегральная функция не имеет поэтому во всех этих точках производной, но она имеет производные слева и справа; это был первый пример непрерывной функции, которая во всех этих точках не дифференцируема, и послужила поводом к формулировке Г. Ганкелем принципа сгущения особенных точек, пока Вейерштрасс не дал примера непрерывной функции, ни в какой точке не дифференцируемой (ср. примеч. 123).

Итак, интегрируемы функции, которые вовсе не могут быть рассматриваемы как производные других функций, и интегрирование, как уже отмечено было, не является более обратной операцией дифференцирования [118]. Но даже тогда когда $F(x)$ имеет производную $f(x)$, $F(x)$ не должно непременно отличаться только постоянной от интеграла функции $f(x)$; эта основная теорема интегрального исчисления

$$F(x) - F(x) = \int_a^x f(x)\, dx,$$

разумеется, иллюзорна, если производная не интегрируема, но она может утратить силу и тогда, когда $f(x)$ интегрируемо.

Эти соображения привели к обобщению понятия производной, по которому непрерывная функция в общем имеет для каждой точки четыре производных [119]. В таком случае имеет силу теорема Дюбуа [120]:

Если $F(x)$ непрерывно в (ab) и одна из ее четырех производных $DF(x)$ конечна и интегрируема, то это относится ко всем производным и в то же время для всех них:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x DF(x) dx).$$

Для другой непрерывной функции $\Phi(x)$ поэтому при тех же предположениях правильно.

$$\Phi(x) - \Phi(a) - \int_a^x D\Phi(x) dx),$$

а посему

$$F(x) - \Phi(x) - \left(F(a) - \Phi(a)\right) = \int_b^x D\left(F(x) - \Phi(x)\right) dx.$$

Если теперь предположить равенство и конечность соответствующих производных под знаком интеграла для всех мест, то основная теорема, разумеется, сохраняет силу: $F(x)$ и $\Phi(x)$ отличаются между собой только постоянной. Но по Л. Шефферу, теорема сохраняет силу и тогда, если множество точек, в которых это предположение равенства отсутствует, в крайнем случае исчислимо [121]).

То обстоятельство, что понятия интеграла различны у Коши и Риманна, побудило Лебега формулировать более общее понятие интеграла. Здесь мы не можем о нем распространяться, но поразительно то, что дело идет тут о точной формулировке идей Кавальери об измерении площадей при помощи изысканий из области теории множеств [122]).

Отметить надлежит здесь еще другое расширение Риманнова понятия интеграла. Если относительно функции $f(x)$ делается предположение только о конечности, то всегда еще существуют два вполне определенных предельных значения, которые называют верхним и нижним интегралом; они получаются как предельные значения суммы S (стр. 37), если каждое $f(\xi_i)$ заменяют соответственно верхним или нижним пределом значения функции в соответствующем промежутке; если эти значения равны между собой, то функция интегрируема в смысле Риманна.

Нам остается еще рассмотреть, какое влияние развитие чистой математики оказало на области ее приложения. Обратимся сперва к геометрии, где работы XIX столетия вполне выяснили важнейшие спорные вопросы.

Прежде всего следует отметить, что отчетливость понятия числа значительно превосходит то, что мы называем геометрической интуицией, даже тогда, когда мы говорим не о непосредственном чувственном восприятии, а об идеальных интуитивных представлениях, которые, по нашему мнению, пожалуй имеются в нас относительно простейших образований: точки, линии, поверхности, тела. К точкам отрезка мы, согласно аксиоме Кантора, приурочиваем обратимо однозначно значения вещественных чисел; но наша интуиция оказывается бессильной, когда мы между каждыми двумя сколь-угодно близко лежащими рациональными точками прямой должны себе представить опять безгранично много новых рациональных точек; она совершенно отказывается служить нам, когда мы вынуждены между этими рациональными точками вставить еще бесчисленно много иррациональных точек. Точно так же совершенно невозможно представить себе вид кривой, которая в одной единственной точке обнаруживает устранимый разрыв непрерывности, между тем как мы, конечно, можем создать графическое изображение того, что одной точке оси x-ов соответствуют две точки кривой, принадлежащие различным ее ветвям. Наша интуиция здесь не только не точна, как принято было выражаться, но она вообще не в состоянии следовать за понятием числа. Но так как аксиома непрерывности как-бы обязывает нас к этому, то неудивительно, если мы приходим к утверждениям, которые хотя непосредственно и не противоречат нашей интуиции, но все же лежат за пределами ее. Интуиция, руководимая процессом движения, который уже древним казался загадочным, показывает нам, повидимому, что всякая кривая линия должна иметь направление, касательную, служащую ее продолжением; но анализ вещественных функций говорит нам, что это отнюдь не должно иметь место во всех точках кривой линии, что существуют даже непрерывные кривые, которые ни в одной своей точке не имеют касательной [123]). Чисто геометрические вопросы, напр., система окружностей, постоянно отражающихся друг в друге, с таким успехом разработанная Клейном [124]) в теории автоморфных функций, чрезвычайно ясно говорят о существовании образований, которые, будучи вполне определены арифметически, все-таки совершенно недоступны интуиции; дальнейшие примеры в любом количестве дает теория множеств. Мы вынуждены поэтому признать, что интуиция и понятие вообще не могут заменять друг друга, хотя интуиция и играет существенную роль при образовании и оживлении понятий.

Все эти размышления оказали большое влияние не только на форму методов доказательства, из которых пришлось удалить все моменты, сводящиеся к интуиции,—они повлияли и на самые основы геометрии. Геометрия Евклида с древних времен вызывала величайшее удивление своей логической строгостью. Если принять ее аксиомы и постулаты, то, казалось, необходимо нужно было прийти ко всем дальнейшим теоремам. Более точное исследование показало, однако, что некоторые предпосылки не содержатся в самих аксиомах, а заимствуются из так называемого непосредственного воззрения [125]), напр., представление движения, сколь угодно отдаленных частей пространства, засим предложения, которые мы теперь называем аксиомами расположения, а также утверждения о равенстве об'емов и площадей фигур. Эти возражения отчасти были известны уже и в древности. Но критика всегда, главным образом, направлялась против правильности одиннадцатой, по теперешнему счету—пятой аксиомы, которая в несколько измененной форме высказывает основное положение, что к данной прямой через данную точку можно провести только одну параллельную прямую.

Неоднократно пытались [126]) доказать, что это положение вытекает из остальных аксиом и определений, но безрезультатно. Наконец, Лобачевский в 1829 г. первый—после того как Гаусс еще в 1792 г. [127]) пришел к этому результату, но высказывал его только в письмах к близким друзьям—показал, что эта аксиома не есть следствие остальных, и что можно построить свободную от противоречий геометрию и в том случае, если вместо евклидовой аксиомы параллельности ввести предположение, что через всякую точку в плоскости, содержащей прямую, могут быть проведены две собственно параллельные прямые к этой прямой, в то время как существует еще сверх того бесконечно много прямых, вообще ее не пересекающих.

Риманн в своей диссертации обратил внимание на то, что если отказаться от представления о бесконечной протяженности пространства и принять, что оно только неограниченно или беспредельно продолжимо, то существует еще вторая геометрия, в которой через точку вообще нельзя провести параллели к данной прямой [128]).

Эти геометрии, поскольку они относятся к многообразиям двух измерений, можно изобразить наглядно [129]), хотя и не с должной полнотой, если для геометрии Лобачевского взять псевдо-сферическую поверхность Бельтрами, а для геометрии Риманна—сферу. Для построений же трех измерений, напротив, удобнее будет воспользоваться методом Клейна, который самым общим образом вывел эти различные геометрии на основании проективного мероопределения [130]). Это обоснование не-евклидовых геометрий не вызывает возражений, которые могут быть отчасти сделаны по поводу изысканий, относящихся к двумерным многообразиям (ср. примеч. 130), и которые все еще являются излюбленными аргументами против математических теорий пространства. Затем оно гораздо проще принципиально, так как при нем прямые линии и плоскости остаются неизменными как таковые, а вместе с ним сохраняется и все содержание проективной геометрии (независимость этого содержания от аксиомы параллельности установил Ф. Клейн), особенной же формулировке подлежат только метрические свойства, измерение длин и углов, понятие движения и покоющееся на нем понятие конгруэнтности.

Со времени фундаментальной работы Риманна эти три геометрии Евклида, Лобачевского и Риманна-Клейна, или параболическая, гиперболическая и эллиптическая геометрии связаны со значением известного числа, которое соответственно равно, больше или меньше нуля и которое уже Гаусс [131]) назвал мерой кривизны пространства. При большом значении этой кривизны результаты эллиптической и гиперболической геометрии, конечно, существенно отличаются от тех, которые дает евклидова геометрия, где мера кривизны равна нулю; но эта разница будет тем меньше, чем меньше эта положительная или отрицательная постоянная отлична от нуля. Другими словами это значит: невозможно вообще разрешить, какая из трех геометрий необходимо должна быть положена в основание наших рассуждений; они все три одинаково пригодны, если речь идет о непротиворечивом изображении геометрических соотношений и если предположить, что высказывания о мероотношениях, т. е. о соотношениях между расстояниями и углами и т. д. делаются только для не очень отдаленных частей пространства, вообще, единственно доступных нашей интуиции, и рассматриваются как равнозначущие, когда они по своим числовым значениям достаточно мало отличаются друг от друга. В евклидовом треугольнике, напр., сумма углов точно равна двум прямым, эллиптический же и гиперболический треугольники имеют соответственно несколько большую и меньшую, вообще переменную сумму углов; в евклидовой геометрии имеются подобные фигуры в строгом смысле слова, в то время как в обоих других геометриях, поскольку мера кривизны не очень многим отличается от нуля, могут быть только приближенно подобные фигуры. Только принцип экономии мышления заставляет нас предпочесть евклидову геометрию [132]), как простейшую. И если мы—а при принятии евклидовой геометрии мы тоже должны это сделать — позволяем себе порожденную в нас таким образом геометрическую интуицию перенести на суждение о так называемом воспринятом пространстве, то мы вынуждены согласиться с утверждением, что математика учит о возможности физических пространств, отличных от евклидова пространства, но не может и не хочет дать средств для решения вопроса, присуще ли которому-нибудь из этих пространств то, что наивное представление понимает под действительностью [133]); каждое из этих пространств, следовательно, может быть с одинаковым правом рассматриваемо как достаточно совершенная картина этой последней [134]).

Нам осталось ответить еще на одно возражение. Откуда проистекает убеждение в непротиворечивости этих причудливых пространств, к которым можно присоединить даже еще другие в том же роде? Мы основываем его, прежде всего, на том факте, что каждому положению евклидовой геометрии соответствует аналогичное положение в обеих других геометриях, которое непротиворечиво, если оно действительно в евклидовом пространстве, и обратно. Итак, либо всякая из этих геометрий приводит к противоречиям, либо ни одна из них. Но евклидова геометрия не заключает в себе противоречий, потому что благодаря аналитической геометрии мы можем привести с нею в соответствие чисто умопостигаемое царство чисел таким образом, что каждое положение евклидовой геометрии находит свое обоснование в чисто арифметическом положении. Но тем самым доказана непротиворечивость не-евклидовой-геометрии, если только непротиворечивы арифметические положения [135]).

Все это, однако, только первые зачатки значительно более глубоких исследований, начало которым положили изыскания итальянских математиков, Пеано и его школы, равно как знаменитые „Основы геометрии“ Гильберта. Сомнение в правильности евклидовой аксиомы параллельных есть только случайное начало, выдвинутое историческим развитием; мы, очевидно, должны поставить вопрос так: каковы необходимые постулаты интуиции, на которых вообще может быть построена непротиворечивая полная геометрия? Под необходимыми постулатами мы понимаем при этом такие, которые сами по себе достаточны для ответа на все вопросы, какие мы хотим поставить, и которые вместе с тем оказываются независимыми друг от друга, т.-е. не могут быть приведены к еще меньшему количеству постулатов.

Мы не можем здесь вдаваться в остроумные исследования названных математиков; отметим только принцип, который был с блестящим успехом применен к отысканию ответа на эти чисто логические вопросы: Чтобы доказать, что постулат q не зависит от ряда других постулатов $q_1, q_2 \ldots q_n$, нужно доказать существование многообразия, в котором удовлетворены все постулаты $q_1, q_2 \ldots q_n$ за исключением единственно постулата q.

Таким образом удалось развить целый ряд новых, подчас довольно причудливых геометрий, в зависимости от того, который из кажущихся существенным для нашего представления постулатов опускался, а вместе с тем удалось выяснить основания каждой из этих геометрий.

Что касается второй обширной области приложения чистой математики, механики, то в ней еще не установились столь общепринятые точки зрения, как в геометрии. Здесь все еще друг другу противостоят по существу различные воззрения. Отметим, что в то время как одни принимают наличность абсолютного пространства и абсолютного времени в смысле Ньютона за необходимый постулат, другим эти представления кажутся внутренне противоречивыми и даже невозможными. Мы не будем здесь останавливаться на этих и подобных им вопросах, которые в настоящее время, повидимому, каждый еще разрешает по личному своему разумению, поскольку речь идет о построении механики, которая должна быть не только абстрактной научной системой, но вместе с тем при помощи рационального развития или изложения своих основных понятий хочет обеспечить себе прочное приложение к описанию изменений в физическом мире [136]).

И здесь также принципы, из которых исходит аксиоматика, привели к некоторым изящным результатам [137]), но вместе с тем, правда, выявили все растущее количество предпосылок, до сих пор молчаливо принимавшихся за „само собой разумеющиеся". Но все еще мы ждем гения, который сумеет, как это сделал Коши в исчислении бесконечно-малых, проложить здесь новые пути [138]).

Мы не можем, однако, пройти мимо имеющих столь глубокое значение воззрений теории относительности или „новой механики", как выразился Пуанкарэ.

Уравнения „классической" механики, хотя они прежде всего относятся к системе, мыслимой в абсолютном покое, имеют силу для каждой другой системы, которая по отношению к первой находится в состоянии равномерного прямолинейного переносного движения. В этой механике, которая предполагает понятие места x, y, z, времени t и массы m независящими друг от друга, уравнения движения свободной материальной точки суть:

$$mx'' = X,\ my'' = Y,\ mz'' = Z,$$

где Ньютоновы составляющие силы X, Y, Z суть функции координат, составляющих скорости и времени. Как векториальные уравнения они инвариантны для всех вне-временных изменений координатной системы, но и по отношению к координатам x_1, y_1, z_1 Галилеева преобразования $x = x_1 + wt$, $y = y_1 + vt$, $z = z_1 + wt$ левые стороны остаются неизменными, а правые стороны тоже не меняются, если силы зависят только от разностей координат и скоростей относительно других точек, участвующих в преобразовании.

Но электромагнитная теория света и явления, связанные с фактическим движением света, приводят к более общему представлению. Из опытов А. Майкельсона (с 1881 г.) выводят, что световое движение эфира распространяется равномерно по всем направлениям со скоростью $c = 3.10^{10}$ см. сек. В этом не заключалось бы никакой трудности, если бы можно было допустить, что эфир движущегося источника света участвует в движении источника. Но „увлечение" эфира в этом размере не имеет места по опытам Физо́ и противоречит также аберрации света и иным явлениям.

Идеи, которые развили Г. А. Лоренц (1895), А. Эйнштейн (1905) и Г. Минковский (1908), напротив, дают объяснение свободное от противоречий. Они устраняют понятие времени, обязательного для всех друг по отношению к другу равномерно переносно движущихся координатных систем, и вместо него вводят понятие мировой точки, т.-е. представление системы четырех чисел x, y, z, t, которая обозначает местно-временное состояние точки пространства.

Тогда возникает вопрос, как можно описать явление в природе применительно к системам, движущимся друг относительно друга указанным образом. При этом появляются, по аналогии с линейными Галилеевыми преобразованиями классической механики, так называемые Лоренцовы преобразования.

Ввести их можно различными способами в зависимости от того, желательно ли получить теорию, покоющуюся на аксиоматических понятиях, либо непосредственно на физических фактах.

По Минковскому [139]), „предмет нашего восприятия всегда составляют только места и времена, вместе взятые. Никто не замечал никогда место иначе, как в определенное время, или время иначе, как в определенном месте“ Время в каждом месте—сперва по отношению к системе, покоющейся в „эфире“—может быть измерено счетным прибором, часами, но этим путем не обеспечены ни однородность показаний каждых отдельных часов, ни сравнимость показаний разных часов в разных местах установки, ни указания координатной системы, фиксирующей эти часы, ни понятие скорости. Это достигается при помощи метода световых сигналов, а путем точного анализа понятий времени, пространства, скорости Хэнтингтон [140]) в написанной с поразительной ясностью работе приходит к соотношениям, которые связывают „время-места“ x, y, z, t системы S с время-местами x_1, y_1, z_1, t_1 системы S', движущейся по отношению к ней равномерно переносно, т.-е. он приходит к Лоренцовым преобразованиям, при чем движение S' по отношению к S может быть предположено любым без ограничения общности.

При этом оказывается, что в каждой из обеих систем S, S' для точки с соответствующими координатами x, y, z; x_1, y_1, z_1, расстояния которых от начал O и O' систем суть r и r', подлежащие времена выражаются через $\frac{r}{C}$, $\frac{r_1}{C}$, если к начальмым точкам 0 и O' оба раза приурочивается время $t = t_1 = 0$. Но это рассуждение согласуется также с Эйнштейновским определением понятия времени [141]). А именно попрежнему определим время в покоющейся координатной системе при посредстве системы „тождественных“, установленных во всех точках часов таким образом, что если в начале системы A часы показывают время t_A, то часы в B отмечают время $t_A + \frac{AB}{c}$ в тот момент, когда вышедший из A световой сигнал достигает точки B; тогда те и другие часы будут иметь „синхронный“ ход относительно нормальной точки A; но то же будет правильно для них относительно всякой другой точки A_1 [142]).

Если теперь вместе с Эйнштейном выставить требование, что частные дифференциальные уравнения сферических световых волн должны быть преобразуемы в себя, то получаются опять-таки Лоренцовы преобразования. А именно, они здесь характеризуются, как те линейные преобразования, которые ведут к тожеству

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 t_1^2,$$

между тем как в предшествующем рассуждении это уравнение являлось необходимым следствием. Но тем самым законы механики становятся теперь инвариантными относительно всех систем, находящихся друг к другу в равномерном переносном движении, как этого требует принцип относительности.

Следствия из этой теории представляются на первый взгляд необычайными. (Необходимо, впрочем, отметить, что непосредственной понятностью, предвидимостью и наглядностью не отличаются и процессы, которые разыгрываются в Галилее-Ньютоновой механике для произвольно друг относительно друга движущихся систем в зависимости от точки зрения наблюдателя). События, которые в одной системе совпадают во времени, не являются таковыми в системе, по отношению к ней движущейся. Напротив, часы в движущейся системе кажутся наблюдателю в покоющейся системе имеющими более медленный ход; измерения длины тоже претерпевают для последнего кажущееся укорочение. Параллелограмм скоростей, т. е. сложение векторов, приходится заменить Эйнштейновской „теоремой сложения скоростей". Но зато явления аберрации, принцип Допплера и др., как коэффициент увлечения Физо, становятся понятными и непротиворечивыми [143]).

Таким образом совокупность Лоренцовых преобразований, для которой Минковский своей абстрактной идеей четырехмерного пространства x, y, z, t создал наглядный для математиков и физиков образ, приобретает первостепенный интерес не только для электромагнитной теории света, но и для самой механики.

В то время как классическая механика исходит из формул:

$$\frac{d}{dt}(mx') = X, \ \frac{d}{dt}(my') = Y, \ \frac{d}{dt}(mz') = Z,$$

где x', y', z' суть составляющие скорости, X, Y, Z составляющие силы, m независящая от места и времени постоянная — масса, теперь их место заступает совершенно иная система, которая опять-таки обладает инвариантностью по отношению к *группе Лоренца*, а именно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}x'\right)=X\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

или короче

$$\frac{d}{dt}\,(\mu\, k\, x', = \frac{X}{}$$

вместе с соответствующими уравнениями для y и z; при этом принимается $v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, $k\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1$, а μ есть так называемая „покоющаяся масса“.

Возникает следовательно, *новое понятие массы*, потому что за массу движущейся точки мы склонны будем принять множитель $m = \mu\, k$. Но больше того: сама формула ставит массу в зависимость не только от величины скорости v движущейся точки, но также и от ее направления [145]).

Преобразования Лоренца *вещественны* только тогда, если c больше (в крайнем случае равно) v. Это приводит к необходимости рассматривать c *как не могущую быть превзойденной скорость*, т. е. приписать c *роль бесконечного*; это, впрочем, согласуется и с тем, что при сочетании по теореме сложения двух скоростей v_1, v_2, меньших скорости света, равнодействующая никогда не может стать $\geqq c$.

В итоге *классическая механика* оказывается *предельным случаем новой механики* для $c = \infty$, как это явствует из выше приведенных формул. А в таком случае понятно, что пока скорости v—как это имеет место при „обыкновенных“ движениях весомых частиц—достаточно малы по сравнению с c, следствие теории относительности, при всей своей кажущейся парадоксальности, никогда не могут оказаться в противоречии с следствиями старой механики. Если назвать $\frac{1}{c^2}$ „мерой кривизны“, то все эти парадоксальные явления представят аналогию с не-евклидовыми теориями геометрии [146]).

После этих отступлений и изысканий, которые представляют разнообразный интерес, раскрывая взаимоотношения между совершенно, казалось, далекими друг от друга областями математического умозрения, мы вновь обращаемся к чистой математике.

И вот возникает, наконец, еще один фундаментальный вопрос. *Соединимы ли и сами арифметические правила или постулаты непротиворечиво между собой, независимы ли они друг от друга также и формально?*

Не представляется ли возможным, что здесь когда-нибудь начнется процесс пересмотра, подобный тому, которому, как мы это видели, подверглись постулаты геометрии? Надлежит, следовательно, превратить утверждения арифметики в такие, которые вполне адэкватны чисто логическим формам умозаключения. Если это исполнено, то мы приходим к наиболее общему пониманию сущности математики: м а т е м а т и к а есть совокупность всех чисто логических заключений, которые при помощи аксиоматических установлений относительно сочетания известных символов, числовых знаков, — в самом широком смысле этого слова,—могут быть выведены из этих так называемых „скрытых определений"; постольку можно ее назвать также символической логикой [147]).

Но в таком случае—скажут нам—математика становится ведь невероятной тавтологией! Если все основано на учении о числах, т. е. на называемых постулатами законах сочетания чисел, то выдающийся по своему развитию ум ведь должен быть в состоянии сразу обозреть все конечные выводы. Истинного познания, т. е. н е п р е р ы в н о р а с т у щ е г о ц а р с т в а и с т и н в этом случае собственно вообще не существует, ибо все содержалось бы уже в логическом развитии аксиом, подобно тому, как наивное представление производит из одного семени, без участия внешних элементов, целый мир живых организмов.

Этот вопрос на самом деле неоднократно уже ставился и разрешался самым разнообразным образом [148]). Согласно П у а н к а р э [149]), на этот вопрос безусловно пришлось бы дать утвердительный ответ, если бы математичеокому умозаключению самому не была присуща творческая сила вследствие заключения от n к $n+1$. Это последнее состоит, как известно, в следующем положении [150]):

Если какое-нибудь утверждение оказывается правильным для случая $n+1$, коль скоро мы допустим его правильность для случая n, и если оно правильно для какого-нибудь случая n_0, то оно правильно также для всех дальнейших случаев n_0+1, n_0+2, П у а н к а р э утверждает, что этот метод так называемый п о л н о й и н д у к ц и и, в котором он усматривает синтетическое априорное суждение в смысле К а н т а, соединяет в одной единой формуле бесконечное множество силлогизмов, и что без него невозможно придти к общим положениям.

Трудно, конечно, согласиться с таким взглядом. Ибо мы не видим, каким образом применение этого начала может нас когда-нибудь привести к актуально бесконечному, между тем как П у а н к а р э сам подчеркивает, что только одно начало противоречия уже позволило бы нам доказать справедливость какого-нибудь положения для сколь угодно многих“ случаев; в противоположность этому принцип полной индукции не останавливается, по его мнению, и перед бесконечностью. Но, пожалуй, это сводится лишь к спору о словах; об‘яснения того, почему математика благодаря указанному методу возвышается над тем, что он сам называет невероятной тавтологией, Пуанкарэ во всяком случае не дал [151]).

К совершенно противоположному взгляду приводит другое понимание [152]). Определенную совокупность незыблемых аксиом можно, пожалуй, сравнить с мебелью, которою можно самым различным образом обставить комнаты для самых разнообразных надобностей. Всякое новое расположение зависит тогда только от принципов комбинаторики. Даже в том случае, когда мы располагаем незначительным, быть-может, количеством аксиом, в результате этого продолжительного комбинирования может получиться неограниченный ряд утверждений, но весь процесс, в конце концов, основан на немногих общих формальных принципах, на началах аналогии, образования групп, экономии, художественного чутья, вкуса,—действительно новых познаний не получается, и вся наука сводится к грандиозной шахматной игре, которая со своими бесчисленными партиями, со своими постоянно вновь возникающими логическими задачами в состоянии дать надежное руководство для суждения во всех возможных логических обстоятельствах.

Мне кажется, что оба эти воззрения не согласуются хотя бы даже с фактами исторического развития математики. Что применение правил формальной арифметики, к каким бы красивым тождествам оно ни приводило, а также некоторые иные части математики, действительно, дают только формальное расширение наших знаний в только-что описанном смысле, этого отрицать не приходится. Но никогда еще построение одних тождеств или аналогий не рассматривалось как истинный элемент прогресса, если они не служили для какой-нибудь определенной цели.

Если же мы посмотрим, чем собственно создается дальнейшее развитие математики, то мы встретимся с совершенно другими движущими силами [153]).

Математика египтян в соответствии с узким кругозором этого народа отвечала еще тенденции, направленной исключительно на известные практические познания. Но уже среди греков пробуждается геометрическое дарование, которое сначала не основывается на арифметике, а стремится логически формулировать факты внутреннего пространственного воззрения. У них возникают уже глубокомысленные представления учения о величинах, непрерывности, иррационального, предела, пожалуй, также и смутное предвидение понятия функции; но их мудрость не была в состоянии постигнуть эти концепции чисто арифметически. Лишь после того, как изучение природы при помощи наблюдения и эксперимента обогатило человеческий интеллект и чрезвычайно расширило область нашего опыта и воззрения, народились новые идеи и мысли, которые потребовали углубления смутно представлявшихся древним концепций. Благодаря представлениям, получаемым из геометрии и механики, удается придумать математический язык, язык Ньютона и Лейбница, который по крайней мере до известной степени раскрывает пред математикой загадки анализа бесконечно-малых. Слышались, правда, жалобы, что с этим новым поворотом утратилась строгость древних; мы пытались показать, что эти возражения теперь окончательно опровергнуты. В этом ретроспективном обзоре перед нами раскрываются силы, от которых действительно зависит прогресс науки. Одно лишь употребление аксиом походило бы на пресловутую логическую машину Стэнли-Джевонса и приводило бы только к созданию более или менее остроумной игры из области комбинаторики. Непрерывный рост науки [154]), при котором содержание ее становится все более и более богатым, основан на способности человеческого духа приобретать все новый опыт, извлекать из него общие воззрения и эти последние в свою очередь претворять в чисто математические понятия, т. е. подчинять их понятию числа; сущность науки характеризуется, следовательно, беспредельным развитием. Если бы все содержание математики можно было рассматривать как замкнутую систему истин, то „рассудок Пуанкарэ", конечно, был бы достаточен для того, что все эти истины постигнуть как „само собой разумеющиеся". Но в этом представлении кроется внутреннее противоречие: сущность знания состоит в постоянном прогрессе.

Разве можно было бы дойти до понятия иррациональных чисел без интуиции непрерывности или усвоить понятие предела без интуиции движения! Понятие переменного числа и функции тоже возникает лишь тогда, когда понятие причинности принимается за руководящий принцип для понимания всех явлений природы. В новейшее время на наших глазах создались учение о множествах, которое своим возникновением, очевидно, обязано пространственной интуиции, но принципиальное свое обоснование имеет в царстве чистых чисел, и затем теория интегральных уравнений, форм бесконечно многих переменных, которая дает возможность разрешать новые проблемы анализа. А кто знает, быть может в будущем новые воззрения опять послужат толчком к новым логическим образованиям, которые дадут возможность простейшим образом преодолеть многочисленные трудности, присущие еще современному состоянию науки?

Интуиция, известный дар предвидения нашей творческой фантазии, который можно сравнить с подлинно-художественным творчеством, с *ποιεῖν*, с поэтикой [155]), всегда в конечном счете образует тот зародыш, из которого вырастают все великие успехи математики; превращение их в арифметическую или числовую символику составляет уже предмет чистой науки.

Вот в этом мы усматриваем об'ективное, т. е. непреходящее значение чистой математики, которое присуще ей, несмотря на ее внешнюю отчужденность от мира. Мы неоднократно указывали на то, что стремление к познанию процессов природы породило развитие математики. Из этого, пожалуй, можно заключить, что, по нашему мнению, математика лишь постольку имеет общую ценность, поскольку она остается полезной этим целям. Такой взгляд был действительно распространен в XVIII ст., и это значение математики во всяком случае отнюдь не приходится преуменьшать. Но прямо противоположное убеждение в совершенно особой ценности чисто логического умозрения, стоящей выше всякого материального результата, одушевляло уже греков более чем 2000 лет тому назад. Они создали геометрию, настолько по замыслу своему абстрактную, что она только сама по себе, как свободное порождение человеческого духа могла иметь ценность, которую никогда не отрицали за ней даже в дикие эпохи разрушения и войн. Во время осады своего родного города Сиракуз старик Архимед применяет свои знания для защиты города; но выше самой жизни ценит он развитие зачатков тех исследований, которые лишь в новейшее время приняли форму анализа бесконечно-малых. Заслугой XIX века является то, что он вновь установил в полной мере это убеждение в абсолютной ценности высшей разумной деятельности [156]), убеждение, которое вплоть до арабской эпохи расцвета никогда не было совершенно утрачено человечеством.

В заключение да будет мне позволено коснуться в немногих словах тех выводов, какие из всех предшествовавших рассуждений можно сделать на счет вопросов преподавания математики особенно в наших средних школах.

Если общее образование, как выразился один из наших даровитейших новых педагогов, Б. Швальбе, есть способность понимать все наше культурное развитие, то ясно, что эта цель не может быть достигнута без математических познаний. Но в таком случае представляется уместным, хотя бы в высших классах наших средних школ, подготовлять юношество, поскольку оно предназначено в будущем содействовать этому развитию, к более общему пониманию того, что собственно является предметом математики, и что математика может дать.

Само собою разумеется, что при этом и речи быть не может о подчеркивании тех трудностей, на которых нам преимущественно пришлось останавливаться в предшествовавшем изложении хотя и в совершенно популярной форме; это явилось бы, конечно, полной нелепостью. Но когда ученик подвинулся уже в своем развитии благодаря духовной гимнастике, какою является преподавание математики в его с давних пор установившихся основных чертах, то ему не трудно будет усвоить также и принципы, лежащие в основе начал исчисления бесконечно-малых, если только ограничиваться существенным и соблюдать должную середину между интуицией и абстракцией. Понятие координат, которое образует неизменную схему для наглядного изображения всех процессов и находит многостороннее и интересное применение во всех областях повседневной жизни, в медицине, физической географии, политической экономии, статистике, страховом деле и в технических науках; первые элементы исчисления бесконечно-малых в связи с их историческим развитием; развитие понятия функции и предела из элементов учения о кривых линиях,—все это вещи, без которых в настоящее время нельзя получить ни малейшего представления о явлениях природы; знание же их сразу сообщает нам как бы чудодейственную способность достигнуть понимания, с которым вряд ли какое-нибудь другое может сравниться по глубине и широте и, прежде всего, по надежности. В центре всех успехов научного мышления, которыми так изобилует эпоха, начинающаяся с средины XVII века, стоит понятие функции, это отрешенное от всех трансцендентных умозрений представление сопряжения переменных чисел, при помощи которого взаимоотношения всех явлений выступают с поразительной ясностью: вызвать и развить в юношеском интеллекте этот мир мыслей—такова великая задача математической педагогики нашей современности. Вдумчивые педагоги уверяют, на основании собственного опыта [157]), что эти основные понятия при целесообразном изложении часто представляют для учащихся меньше трудностей, чем в некоторых отношениях значительно более абстрактные методы древних которые в скрытой, а подчас и искаженной форме все еще лежат в основе нашего элементарного преподавания, и истинное понимание которых доступно лишь глубокомыслию ученого.

Предложения и проекты реформы преподавания математики в этом направлении поэтому уже неоднократно ставились на обсуждение. Такие физиологи, как Г. Гельмгольц, А. Фик и Бернштейн [158]), и химики, А. фон-Бейер, Л. Герман, неоднократно указывали на то, что расширение школьного преподавания именно в этом направлении принесло бы чрезвычайную пользу изучающим медицину и вообще всем тем, кому надлежало бы обладать пониманием движущих сил нашего современного развития. В новейшее время эти голоса раздаются все громче и громче; на с'ездах немецких естествоиспытателей и врачей вопрос этот за последние годы всегда выдвигался. В частности, Немецкий Союз математиков, насчитывающий в настоящее время свыше 700 членов, выработал по инициативе Клейна программу целесообразного и осторожного расширения преподавания математики [159]). Мы имеем здесь дело не с идеей, за которую вдруг ухватились с чрезмерным рвением, и не с результатом слишком высокой оценки значения математики, а с глубокой потребностью всего нашего народа, который только на этом пути сумеет и в будущем с честью выйти из соревнования с другими нациями, в этом отношении отчасти уже опередившими нас [160]).

Кто однажды проникся этим сознанием, тот приобретет также уверенность, что начавшееся движение уже не заглохнет, что соединенными усилиями всех тех, на ком лежит забота о воспитании подростающего поколения, удастся найти надлежащий вид современной реформы преподавания математики, реформы, от которой одинаково выиграют учащие и учащиеся. Ибо всякий преподаватель, какое бы положение он ни занимал, лишь тогда находит истинное удовлетворение в своей профессии, когда он убежден, что знакомит своих учеников с элементами духовного мира, которые воистину ценны и непреходящи для всей их дальнейшей жизни. Это убеждение заставит его все вновь углубляться в теоретико-познавательные основы математики и видеть главную свою задачу в соблюдении педагогической середины между требованиями собственно математической строгости и уровнем понимания учеников.

Обратимся, однако, после этого отступления опять к нашей теме, к науке о числе. Математика все еще есть наука, которая— как около 4000 лет т. н. выразился писец папируса Ринда — вводит в тайны всех сокровенных вещей [161]), и, таким образом, является самым блестящим свидетельством способности человеческого духа проникать своими собственными усилиями в царство исключающей всякие сомнения истины. В высшем свете представляется нам теперь учение пифагорейцев, которые мистически усматривали в целом числе господствующую над всем гармонию и подлинную сущность вещей. „Духовная деятельность, говорит А. фон-Гумбольдт [162]), „проявляется во всем своем возвышенном величии там, где она, не нуждаясь во внешних материальных средствах, получает свой блеск исключительно из того, что исходит из мира математических мыслей. Неотразимое очарование, восхищавшее весь античный мир, присуще созерцанию математических истин, вечных соотношений времени и пространства, как они раскрываются в тонах, числах и линиях". А еще более великий, чем Гумбольдт, Гаусс выразил свои глубочайшие мысли в изречении: *ὁ ϑεός ἀριϑμητίζει* [163]). Это значит, что частица божественной сущности вложена в число; способность постигнуть эту ее сторону есть наивысший дар, присущий человеческому рассудку. Знание математика тоже несовершенно, все вновь возникают вопросы, на которые ответа нет и, повидимому, и не будет. Но нами руководит ни разу до сих пор не поколебленное убеждение, что разум должен быть способен ответить на вопросы, возникающие исключительно из его же, им же самим созданного царства [164]).

По современному нашему разумению мы должны признать, что решение великих вопросов, касающихся происхождения органической жизни и ее выражений в ощущениях, представлениях и мыслях и вообще всех выражений духовной жизни, навсегда недоступно для нашего логического познания: ignoramus, ignorabimus, мы их не понимаем и, быть может, никогда не поймем. Но в математике нет ignorabimus, в ней господствует уверенность в преодолевающем все трудности прогрессе.

ПРИМЕЧАНІЯ.

1) Это замечательное место находится в „Saggiatore“ Галилея, Сочинения, т. VI, стр. 232, Флоренция 1890—1900. „La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (jo dico l'universo), mai non si può intendere, se primo non s'impara a intender la lingua à conoscer i caratteri, nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono trianguli, cerchi ed altre figure matematiche“ [Философия написана в грандиознейшей книге, которая всегда открыта для всех и каждого (я говорю о вселенной), но не может ее понять тот, кто раньше не научится понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, и знаки ее суть треугольники, круги и прочие математические фигуры].

2) См. Кант, „Vorrede zu den metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft“.

3) О влиянии математического преподавания на воспитание ср. прекрасные замечания К. Шверинга: „Zur Methodik des mathematischen Unterrichts am Gymnasium“, Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht, год 33, 1902, стр. 26; затем H. Thieme, „Der Bildungswert der Mathematik“, Pädagog. Archiv 1897, т. 39, а также обширные труды: M. Simon, „Didaktik und Methodik des Rechnens und d. Mathematik“, 2-е изд. Мюнхен. 1908. [М. Симон, „Дидактика и методика математики в средней школе.“ 2-е изд. Птг. 1917]; A. Höfler, „Didaktik des math. Unterrichts“, Лейпциг 1910.

4) При теперешнем ограниченном объеме школьной математики (объясняемом, конечно, прежде всего историческим развитием), с которым отдельные учителя умеют, однако, не считаться и достигают прекрасных результатов, нет ничего удивительного, если многие полагают, что математика вообще состоит не в чем ином, как в более пространном, пожалуй, даже излишне обстоятельном развитии тех самых частей, о которых трактует элементарное преподавание.

Само по себе и решение геометрических задач является отличным средством для развития в учениках способности комбинирования и творческой фантазии; арифметика и алгебра для надлежащего своего усвоения требуют постоянного внимания и в этом отношении, конечно, могут сравниться с воспитательным влиянием древних языков; тригонометрия и стереометрия дают подготовку к первым приложениям и вопросам физики и механики. Но кто не пошел дальше этого, тот, смотря по вынесенным из школы впечатлениям, будет либо того мнения, что математики занимаются решением трудных задач на построение или совершенствованием вычислений, либо будет думать, что отыскание возможно большего количества формул есть самоцель, а практическая их ценность является уже чем-то побочным. Правильно сказал Ф. Линдеманн в своей академической актовой речи („Lehren und Lernen in der Mathematik“, Мюнхен, 1904, стр. 15): „Очень многие чтят имена Ньютона и Лейбница! Но мало кто имеет более глубокое представление о том непреходящем, что создано этими гениями! В них корни нашего современного познания, в них истинное продолжение стремлений античной мудрости“.

5) Ср. также соч. G. Kowalewski, „Die klassischen Probleme der Analysis“, Лейпциг 1910.

6) Мориц Кантор („Vorlesungen über Geschichte der Math.“, т. I, 3-е изд. Лейпциг 1907, т. II, III, 2-е изд. 1892, 1898), ссылаясь на Г. Масперо (назв. соч. I, стр. 1), относит древнейшие свидетельства из Месопотамии к эпохе, по меньшей мере, за 5000 лет до Р. Хр. В новейшее время возникли некоторые сомнения относительно надежности столь отдаленных дат. Эд. Мейер, „Geschichte des Altertums“, 2-е изд., т. I, 2 (1909), называет 10 июня 4241 г. до Р. Хр., к которому приурочивается установление египетского солнечного года, древнейшей надежной датой мировой истории (стр. 102), а из сохранившихся памятников или письмен из Вавилонии вряд ли какой-нибудь, по его мнению, восходит к 3000 г. до Р. Хр. (стр. 345). Названный ученый тоже считает вероятным, что Египет и Вавилония находились в сношениях между собой. „Но ни одна из попыток установить взаимные отношения Египта и Вавилонии поныне не привела к убедительному результату“. В виду этой независимости культур обеих стран можно и теперь еще соглашаться с М. Кантором, который начинает свое изложение с Вавилонии. Что вавилонские народы обладали уже высоко развитыми арифметическими познаниями, показывает их цифровое счисление, в котором десятеричная система чередуется с 60-ричной, как это явствует из таблиц, найденных в 1854 г. при Сенкере; раскопки Гильпрехта (1906), кроме того, обнаружили много математических текстов из эпохи 2000—3000 л. до Р. Хр., в которых использована эта система; эта 60-ричная система до сих пор сохранилась в нашем делении дня и в наших инструментах для измерения углов. О геометрических познаниях этих народов ср. Кантор, I, стр. 45 и сл.; особенно примечательной является их система мер, которая основывалась, как полагают, на тех же самых принципиальных соображениях, что и наша, введенная только сто лет тому назад, метрическая система. Э. Мейер и в этом отношении предостерегает от преувеличений (стр. 518 назв. соч.).

7) Еще к более древнему периоду относятся, повидимому, папирусные фрагменты, найденные в 1889—90 г. при Кагуне (ср. Кантор, I, стр. 59) и имеющие по содержанию много общего с папирусом Ринда. Папирус Ахмима, написанный по-гречески между VI и VII столетием, не содержит существенных усовершенствований египетского искусства счисления. Папирус Ринда, счетная книга Ахмеса (новейшее написание этого имени см. у Велльштейна, „Enzyklopädie der Elementarmathemathik“, II, 1905, стр. 270 [русск. пер. 1909 г., стр. 313]), которую после более чем пятилетних трудов перевел и объяснил А. Эйзенлор (Гейдельберг, 1877), содержит вычисления с четырьмя действиями над целыми положительными числами и дробями с числителем единица (дробь $^2/_3$ является исключением) и приложение их к решению практических задач, в частности, выраженных словами уравнений первой степени; некоторые примеры обнаруживают даже знакомство с арифметическими и геометрическими рядами. На ряду с этим имеются зачатки практической геометрии, доходящей до измерения окружности ($\pi = 3{,}16$) и пирамид, и, пожалуй, даже первые следы гониометрических представлений (ср. А. Эйзенлор, „Commentar zum Papyrus R.“, стр. 135; Кантор, I, стр. 425). Настоящих доказательств тут нет; все в целом производит в начале впечатление эксотерического изложения учений, в основе которых лежали, быть-может, еще более обширные познания; Г. Шнейдер, „Entwicklungsgeschichte der Menschheit“, т. I: „Kultur und Denken der alten Aegypter“, стр. 297—317, считает это, однако, весьма мало вероятным (стр. 311). Но если согласиться с И. Г. Цейтеном, что изобрета-

тель правил, записанных в руководстве Ахмеса, в общем наверно был знаком с нашим теперешним счислением дробей, то необходимо признать наличность значительно более высоких познаний в более раннем периоде.

В новейшее время папирус Ринда, в котором встречаются кое-какие неправильности, ошибки в счете и исправления, был назван в частности Л. Ревиллью, к которому присоединились Э. Вейр и М. Симон. „Verhandl. d. 3. internationalen Mathematikerkongresses", Гейдельберг, 1905, стр. 526; „Geschichte d. Math. im Altertum". Берлин, 1909, стр. 27), а также И. Г. Цейтен, просто тетрадью малоспособного ученика; но указанные изъяны с таким же основанием объясняются состоянием тогдашнего знания, когда после написания оказывалась еще необходимость в дальнейших исправлениях, а иные ошибки оставались вообще незамеченными.

К замечанию Симона (назв. соч.), что начертательную геометрию изобрели не Л. да Винчи, Ламберт или Монж, а что зачатки ее имеются уже у египтян, также следует отнестись не иначе, как с большой осторожностью. Такие методы как съемка поля при помощи координатных расстояний, горизонтальная и вертикальная проекция колонны и ее капители (Ср. Борхардт, „Werkzeichnungen der Aegypter", Zeitschr. f. ägypt. Sprache, 1896), которой должен был руководствоваться каменотес, настолько сами собой напрашиваются даже на примитивнейшей ступени, что из них мы ни в коем случае не можем сделать вывода о действительном начале аналитической или начертательной геометрии, так как сущность последней состоит ведь в одновременном использовании первой и второй проекции как средства пространственного изображения; равным образом, напр., мы из изображений на сохранившихся костях из периода la Têne не в праве заключать, что тогда уже имелось представление о подобии фигур.

8) „Eine neue Schrift des Archimedes" von J. L. Heiberg u. H. G. Zeuthen, Bibliotheca mathematica VII, 1906—7, стр. 321. [Проф. И. Гейберг, „Новое сочинение Архимеда. Послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах механики". Одесса 1909]. Этот палимпсест, открытый Гейбергом в 1906 г. в Константинополе по указанию Г. Шёне и принадлежавший монастырю близ Иерусалима, содержит значительную часть сочинения: *Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος* и показывает, что Архимед в своих изысканиях о вычислении площадей и родственных задачах из механики применял чуть ли не всецело методы исчисления бесконечно-малых, как они 1800 лет спустя были применены Кеплером, Паскалем и Ферматом, а именно разложением на сумму малых прямоугольников, пределом которой является площадь; „ибо — гласят собственные его слова, — после того как посредством этого метода получено представление о вопросах, легче найти доказательство, чем при отсутствии этого предварительного представления". То же самое достоинство усматривает и Лейбниц в своем методе. Цейтен показал, что Архимеду был уже известен интеграл $\int x^3 dx$.

9) По Кантору I, стр. 414.

10) Насчет древности и самостоятельности математики индусов мнения до сих пор еще расходятся. В то время как Г. Ганкель („Zur Geschichte der Math. im Altertum und Mittelalter", 1874, стр. 204, 210, 219) пытается доказать, что математика индусов всецело выросла на индусской почве, М. Кантор („Vorlesungen", I, стр. 598) придерживается того взгляда, что она подверглась воздействию вавилонских (а, может-быть, и египетских), но, главным образом, греческих традиций (Герон из

Александрии); он не отказался от этого взгляда и теперь, несмотря на изыскания А. Бюрка („Zeitschrift d. deutsch. Morgenl. Gesellsch.", том 55, 1901, стр. 543), согласно которым древность Шульвасутры и в частности Апастамбы Шульвасутры восходит уже к IV или V ст. до Р. Хр., а теорема Пифагора была известна индусам, по меньшей мере, уже в VIII ст. G. Thibaut („Grundriss d. indoarischen Philologie", III, вып. 9, Страсбург, 1899) отказывается от определенного решения вопроса. В настоящее время взгляды индологов, к которым примкнули также И. Г. Цейтен, М. Симон и др., пользуются почти-что всеобщим признанием. Иной вопрос, однако, было ли индусам известно и доказательство теоремы Пифагора. В Апастамбе Шульвасутре сказано только следующее: „Диагональ прямоугольника создает то, что длинная и короткая сторона создают каждая в отдельности" (для равнобедренного прямоугольного треугольника теорема вытекает с наглядностью); но доказательства не приводится. Вероятнее всего, что теорема явилась как обобщение при помощи индукции отдельных случаев, игравших роль в тайном жертвенном культе (ср. H. Vogt, Bibliotheca mathematica VII, 1906, стр. 6). А если так, то собственно доказательство принадлежит пифагорейской школе. Впрочем, доказательство в первой книге Евклида отнюдь не является простейшим. Уже Ан-Наиризи (900 г. по Р Хр.) дал доказательство, основанное на равносоставленности квадрата на гипотенузе с квадратами на катетах; об относящихся сюда вопросах см. диссертации C. Brandes и P. Mahlo, Галле, 1908 [Ср. также Литцманн; „Теорема Пифагора". Пер. с нем. Одесса, 1912].

11) Уже у египтян имеются известные числовые знаки (папирус Ринда, Комментарий, стр. 8) и даже знак действия сложения и вычитания в виде двух движущихся вперед или назад ног (там же, стр. 22), в то время как греки пользовались буквами алфавита. Последние тоже не признавали еще нуля числовым понятием; даже единица и та тоже не считалась у них числом (*οὔτε δὲ ἡ μονὰς ἀριθμός, ἀλλὰ ἀρχὴ ἀριθμοῦ*, ср. Кантор, I, стр. 435); мнение Аристотеля сводилось к тому, что число всегда заключает в себе понятие множества (Тропфке, „Geschichte der Elementarmathematik", Лейпциг 1903, т. I, стр. 153): еще в 1585 г. С. Стевин в своей „Arithmétique pratique" (Тропфке, I, стр. 156) обстоятельно отстаивал числовой характер единицы. Равным образом дроби тоже представлялись им не самостоятельными числовыми понятиями, а лишь выражением геометрических отношений (ср. W. Brix, „Der math. Zahlbegriff und seine Entwicklung"; Philos. Studien Вундта, V, 1888, стр. 632), что, впрочем, другими оспаривается.

Индусам мы, как известно, обязаны системой положения (впрочем, Гильпрехт убедительно доказал, что она применялась уже вавилонянами в связи с 60-тиричным счислением) и десятеричной системой; нуль (более точные указания у Тропфке, стр. 10 и сл.) как особый знак имеется у них, как это документально доказано, с 738 г. (Кантор, I, стр. 603); отрицательные числа выделяются посредством точек наверху как новые числовые знаки, но не встречают одобрения" (Кантор, I, стр. 622). Цифры индусов очень медленно распространялись при посредстве арабов; в сочинениях Петрарки издания 1471 г. они впервые употреблены для пагинации. Вообще они вошли во всеобщее употребление благодаря книгопечатанию и влиянию Адама Ризе (1492—1559). Ср. E. Löffler, „Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter u. neuer Zeit". 1912 [Е. Леффлер, „Цифры и цифровые системы гл. культурных народов" Пер. с нем. Одесса 1913].

У Диофанта из Александрии (ок. 350 г. по Р. Хр.) имеется уже особый знак ς для неизвестного (Кантор, I, стр. 470), знак вычитания в виде перевернутого ψ, знак равенства $\iota\varsigma$; ему известно также правило знаков умножения для положительных разностей. Развитие коммерческих вычислений у Леонардо Пизанского (1202) приводит к введению отрицательных чисел как debitum, но еще вплоть до XVII ст. они не признаются, напр. у Виета, буквенное счисление которого относится, впрочем, отнюдь не к общим числам, а к геометрическим величинам различного измерения; лишь геометрия Декарта окончательно проложила путь для отрицательных чисел, благодаря их изображению на координатных осях, а еще в 1544 г. М. Штифель указал место нуля в ряду положительных и отрицательных чисел. Ср. Тропфке I, 158—162, в частности стр. 161.

Умножение обозначается уже у индусов посредством написания сомножителей рядом (счетная книга Бакшали, Кантор, I, стр. 598); черта в дробях встречается уже у Леонардо Пизанского. Все еще не выяснено происхождение знаков $+$ и $—$, которые внезапно появляются у Видманна около 1480 г. и затем у М. Штифеля в 1544 г., при чем одновременно пользуются еще обозначениями $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$ для plus и minus (Кантор, предисловие к II тому, стр. IV); (предполагают, впрочем, что эти знаки имеются уже в рукописях Леонардо да Винчи); Т. Харриот ввел в употребление знаки $\gtrless$ (1631 г.), Рекорд в 1556 г.— знак $=$ для равенства. — Относительно развития буквенного счисления ср. соображения Цейтена („Geschichte d. Math im 16. und 17. Jahrh." Лейпциг, 1903, стр. 93—112) и превосходные указания у Тропфке (I, стр. 146—151).

12) О происхождении десятичного представления ср. Кантор, I, стр. 7, 8, 253; о первом появлении десятичных дробей — его же замечания о фон Гмундене, Пеуербахе и Рудольфе назв. соч, II, стр. 164, 167, 366. Впервые Стевин в 1585 г. отчетливо высказал ту мысль, что посредством введения десятичных дробей можно формально вполне обойтись без вычислений с дробями, там же, стр. 565.

13) См. Тропфке, I, стр. 158—164.

14) О логарифмах см. Тропфке, II, стр. 141—186.

[Соч. I. Тропфке начало выходить и в русск. переводе. В 1914 г. вышел первый выпуск: „История элементарной математики в систематическом изложении. Том I. Арифметика и алгебра. Часть I. Арифметика". Пер. под ред. И. И. Чистякова. М. 1914].

15) С употреблением координат мы встречаемся уже у древне-египетских зодчих, которые, как мы это и теперь еще делаем, фиксировали точки чертежа при помощи разделения его на квадраты. Эти координаты сами собой напрашивались при землемерных работах по методу египетских гарпедонаптов. У Гиппарха впервые встречаются долгота и широта как полярные координаты на сфере; прямоугольные координаты применяются также и Аполлонием в учении о конических сечениях и Героном при съемках для определения углов подлежащих измерению трапеций. Ближе всего, пожалуй, подходит собственно к представлению о координатах „tractatus de latitudinibus formarum" Николая Орема (ок. 1350 г.); последний, повидимому, излагает графический метод для наглядного изображения посредством latitudo и longitudo (ординат и абсцисс) свойств возрастания и уменьшения величин, но не поднимается до применения этого метода к развитию геометрии, по существу выходящего за пределы эмпирического наблюдения; этот шаг впервые был сделан Декартом и его современниками. Ср. Кантор, т. II, стр. 117 и сл., и Тропфке, II, стр. 409 и сл., Лейбниц (под псевдонимом O. V. E.) писал в Acta Erutid. (1692, стр. 168):

„Ordinatim applicatas vocare solent geometrae rectas quotcunque inter se paralleles, quae a curva ad rectam quandam directricem usque ducuntur, quae.. solent vocaré ordinatae“.

В этом же духе высказывались уже римские агримеисоры, а также Кеплер (1615).

16) Это есть решающее обстоятельство, которым учение Декарта превосходит значительно более доступно и систематически изложенное учение Isagoge ad locos planos et solidos (Oeuvres de Fermat, éd. Tannery et Henry, I, стр. 91) его знаменитого современника Фермата, который вместо чистого понятия числа все еще пользовался представлением величин различных измерений. Декарт определенно заявляет (R. des Cartes geometria, ed. F. v. Schooten, Франкфурт 1695): Omnia geometriae problemata facile ad hujus modi terminos reduci possunt, ut deinde ad illorum constructionum opus tantum sit rectarum quarundam linearum longitudinem cognoscere. Neque enim hosce Arithmetices terminos ut facilius intelligi possint, in geometriam introducere verebor (стр. 1), и далее, стр. 3, ubi notandum est, quod per a^2 vel b^3 similesve communiter non nisi lineas omnino simplices concipiam. А на стр. 13 и 15 принцип координат вводится следующими словами: ponendo nimirum segmentum lineae AB, quod intra puncta A et B continetur, vocari x, BC autem vocari y; possumus ad libitum assumere alterumtram quantitatem incognitam x vel y, atque alteram invenire per hanc aequationem.

17) Различие между аналитической и синтетической геометрией, как известно, не стоит ни в какой связи с противоположностью аналитического и синтетического метода (о них ср., напр., В. Вундт, „Logik“, II, стр. 94); обе дисциплины одинаково пользуются тем и другим методом.—Дальнейшее содержание геометрии Евклида основано на применении оснований к некоторым собственно лишь случайно выбранным фигурам, хотя ограничение окружностью и прямою и вытекает из сущности самой системы. Общее, единое также и по методу трактование может возникнуть только тогда, когда в основу кладется единое понимание геометрических образов. Это же последнее становится возможным благодаря однообразному созиданию этих образов из их простейших элементов. Если принять за таковой, напр., точку, то определение всякого образа будет основываться на закономерном соединении его точек. Положение же точки может быть определено известными основными геометрическими построениями; тогда получается синтетическая геометрия с конструктивным методом исследования. Если же положение точки выражается координатами или числами, то получается аналитическая геометрия, методика которой состоит в применении арифметики. Такое понимание уясняет не только внутреннее родство, но и характер формального различия между обоими направлениями геометрического исследования, сохраняющийся и тогда, когда для созидания пространственных образов берутся не точки, а совершенно другие элементы.

Координаты суть посему числа, определяющие положение избранного элемента пространства; для этого определения требуется основная конструкция, составляющая характерную сущность координатной системы. Возможность продолжать дальнейшие изыскания исключительно и всецело на арифметической основе составляет сильную сторону аналитической геометрии. Но не следует упускать из вида, что в отнесении всех элементов фигуры к системе координат, которая сама по себе совершенно чужда этой фигуре, заключается несовершенство или трудность, которую особенно чувствует новичек, привыкший к „синтетическим“ рассуждениям евклидовой планиметрии; трудность эту можно устранить, если для связной группы исследований выбрать особенно для них подходящую систему координат.—В сравнении с этим синтетическая геометрия с ее принципами созидания, по существу адэкватными большой и общей области геометрических вопросов, обладала значительно большей гибкостью, позволявшей в некоторых случаях сразу видеть то, что аналитическим путем можно было вывести только пространными рассуждениями. Но благодаря методам учения о протяженности, теории инвариантов или групп для многих частей аналитической геометрии открылась широкая возможность развить метод трактования, который пользуется только символами координат, по своему содержанию совершенно отрешившимися от координатной системы и зато стоящими в более глубокой связи с самой фигурой; этот самый принцип с большим успехом развивается и в так называемом „натуральном“ методе дифференциальной геометрии. Наконец, в механике вместо постоянных преобразований прямоугольных координатных систем, которыми пользуется, напр., С. Д. Пуассон в своем Курсе, применяется понятие вектора с его инвариантными символами, понятие, которое не только достаточно для формального трактования, но настолько по характеру своему подходит к сути вещи, что вспоминается изречение Больцмана: Формула подчас кажется более мудрой, чем выдумавший ее человек.

18) Относительно этого определения касательной ср. письмо Декарта (март 1638 г.). „Oeuvres“, éd. Cousin, VII, стр. 62.

19) См. превосходное сочинение P. Duhem, „Les origines de la statique“, 2 тома, Париж, 1905—6, а также E. Mach, „Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch u. kritisch dargestellt“, 3-е изд. Лейпциг 1897, стр. 119—148 [Эрнст Мах. Механика. Историко-критический очерк ее развития. Пер. с 6-го изд., Спб., 1909, стр. 103 и сл.].

20) О кинематических работах Галилея ср. М. Кантор II, стр. 637, равно как Э. Мах, назв. соч., стр. 112 [русск. пер., стр. 103], в частности о понятии ускорения стр. 137 [118]. Чрезвычайно характерно, что собственно учение о движении, несмотря на попытки Роберваля и др., развивалось так поздно. Лишь в 1763 г. Джулио Моцци открывает положение, что всякое мгновенное движение пространства есть винтовое движение; в 1827 г. Коши действительно доказывает это положение; лишь в 1858 г. Гельмгольц (Journ. f. Math. 55, стр. 25) кладет начало кинематике жидкостей. Собственно говоря, только в новейшее время познали необычайную плодотворность кинематики, ср. богатое идеями сочинение Study: „Die Geometrie der Dynamen“, Лейпциг 1899.

21) Ср. motus transversus и descendens И. Барроу в его „Lectiones geometricae“, Кантор, III, стр. 129.

22) Г. Роберваль (1602—1675) применил свой метод построения касательной (Кантор, II, стр. 804) к 13 различным кривым (Schell, „Theorie der Bewegung und der Kräfte“, т. I, стр. 206). Но уже для конических сечений построение его неправильно (L. Burmester, „Lehrbuch d. Kinematik“, Лейпциг, 1888, стр. 67).

23) По Кантору (II, стр. 805) Роберваль, повидимому, первый высказал в ныне употребительной форме теорему о параллелограмме скоростей.

24) Это есть построение годографа, которым пользуется В. Р. Гамильтон („Elements of Quaternions“, Лондон, 1866, стр. 100, 718); она делает излишней особую теорию ускорений (любого порядка).

25) При движении материальной точки под влиянием центральной силы, действующей по закону тяготения и обладающей на единице расстояния интенсивностью μ, величина скорости определяется формулой

$$v^2 = v^2_0 + 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right),$$

в которую входят начальные значения v_0, r_0, а направление ее определяется построением касательной к коническим сечениям. Ускорение же при всяком положении выражается чрез $\frac{\mu}{r^2}$. Впрочем, в самом понятии ускорения коренится то, что оно не зависит от начального состояния движения, т. е. от координат начальной точки и ее составляющих скорости. Путь точки зависит ведь от 6 параметров, координат начальной точки и составляющих скорости в этой точке. Элиминируя три из этих параметров, можно еще для составляющих скорости получить самые разнообразные выражения, в которых на ряду с x, y, z, t фигурируют еще три параметра; составляющие ускорения, напротив, могут быть выражены как функции единственно x, y, z, t, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Поэтому мне представляется слишком узким следующее определение Пуанкарэ („La science et l'hypothèse“ [Наука и гипотеза, пер. Чернявского, Спб., 1906, стр. 98]):

„Ускорение тела зависит лишь от положения его и соседних тел и от их скоростей“.

Уже когда материальная точка вынуждена двигаться по поверхности, изменяющейся во времени, ее ускорения становятся зависящими от времени; это же представление возникает и во многих других частях механики.

26) Идея всеобщего тяготения, которая в популярных книгах обыкновенно изображается в виде главной заслуги Ньютона, и даже теоретическое (ошибочное, правда) обоснование закона тяготения (впрочем, в виду положения, что поверхности шаров относятся друг к другу как квадраты радиусов, оно и поныне кажется иным весьма приемлемым) были одновременно с Ньютоном или, быть-может, еще до него высказаны некоторыми из его современников; ср. Whewell, „History of the inductive Sciences“, II, стр. 119 [В. Уэвель. История индуктивных наук. Пер. М. А. Антоновича и А. Н. Пыпина. Спб., 1867]. Гораздо важнее то, что Ньютон в своих „Principia“ не только подробно развил идею всеобщего тяготения, но, вместе с тем, изложил основы всей механики, которые сохранились вплоть до настоящего времени, хотя и в несколько видоизмененной форме

27) В основании Ньютоновского исчисления флюксий лежит изначально метафизический принцип, отнесение к абсолютному времени. В „Tractatus de curvatura curvarum“ у Ньютона сказано; „Quantitates mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineae describuntur... non per appositionem partuum sed per motum continuum punctorum..., tempora per fluxum continuum et sic in caeteris“. [Я рассматриваю здесь математические количества не как состоящие из очень малых постоянных частей, а как производимые непрерывным движением. Линии описываются... не приложением частей, а непрерывным движением точек..., времена — непрерывным течением и т. д.]. Затем ставится проблема: „Data aequatione quotcunque fluentes involvente, invenire fluxiones“ (дифференциальное исчисление); задача нахождения флюэнт по их флюксиям (интегральное исчисление) сводится к квадратуре кривых. Трак-

тат заканчивается торжествующими словами: „Et his principiis via ad majora sternitur“; в тех же выражениях Гаусс уже в своем трактате о подобном в наименьших частях отображении (Сочинения 4, стр. 189; ср. замечания П. Штеккеля, сочин. Гаусса, 8, стр. 385) предуказал свое великое открытие меры кривизны в „Disquisitiones circa superficies curvas“ [русск. пер. „Общие исследования о кривых поверхностях“, в сборнике „Об основании геометрии“. Казань, 1895].

По сравнению с этим Лейбницево понимание представляется значительно более популярным, да и сам Лейбниц (M. Simon, „Zur gesch. d. Phil. d. Differentialrechnung, Abh. zur gesch. d. Math.“, вып. 8, Лейпциг, 1898, стр. 115) высказался в том смысле, что его метод дает возможность даже посредственному уму взяться за проблемы; которые до того были доступны только людям высоко одаренным.

Но оба они уже дошли до строгого понятия предела. Стоит сравнить знаменитое место в Principia Philos. naturalis (Амстердам, 1723, стр. 23): „Ultimae rationes illae quibuscum quantitas evanescunt revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper approrinquant, et quas propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi“. [Предельные отношения исчезающих количеств не суть отношения пределов этих количеств, а суть те пределы, к которым при бесконечном убывании количеств приближаются отношения их и к которым эти отношения могут подойти ближе нежели на любую наперед заданную разность, но которых перейти или достигнуть на самом деле не могут] с рукописью Лейбница (26 марта 1676, Leibniz, „Math. Schriften“, ed. C J. Gerhardt, т. V, стр 217): „Videndum, an exacte demonstrari possit.. quod differentia non tantum sit infinite parva, sed omnino nulla, quod ostendetur, si constet, eo usque semper posse inflecti polygonum, ut differentia assumta etiam infinite parva minor fiat error“.

Еще яснее выражается Ньютон в „Tractatus de curvatura curvarum“: „In finitis autem quantitatibus analysin instituere et finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigare, consonum est geometriae veterum: et volui ostendere quod in methodo fluxionum non opus sit figures infinite parva in geometriam introducere“ [Установление этого анализа над количествами конечными и исследование предельных первых и последних отношений зарождающихся или исчезающих величин согласно с геометрией древних, и я хотел показать, что в методе флюксий нет надобности вводить в геометрию бесконечно малые фигуры].

Лейбниц, напротив неоднократно прибегал к способам выражения, в которых идет речь о „бесконечно-малых величинах“ и которые он сам называет лишь „toleranter vera“.

Но Лейбницево трактование одержало верх над Ньютоновым исчислением флюксий благодаря непревзойденному алгорифму дифференцирования, который он применил к исчислению бесконечно-малых в Acta erud. 1684 г. Там даны правила дифференцирования для функций, составленных помощью 4 действий; еще больше выделяются преимущества алгорифма при введении новых переменных. А именно, если положить $y = f(x)$ и $dy = f'(x)\,dx$, то для $x = \varphi(u)$, $y = f(\varphi(u)) = F(u)$ опять получается $dy = F'(u)\,du$.

Эта черта инвариантности дифференциала проявляется еще более выпукло в Лейбницевом гениальном трактовании интеграла. 26 октября 1675 г. он еще вместо „omnia $f(x)$“ Кавальери употребляет знак

$\int f$, но уже 11 ноября в „methodus tengentium inversa" он ставит вместо него $\int f(x)\,dx$. А в этой форме вновь получается инвариантное уравнение $\int f'(x)\,dx = \int F'(u)\,du$ при преобразовании $x = \varphi(u)$, и отсюда тотчас же выводится общая формула $\int f(x)\,dx = \int F(u)\,\varphi'(u)\,du$. Лейбниц создал также всю терминологию (дифференциал, производная (Derivierte, 1677), derivare и т. д.).

Самостоятельность идей Лейбница признал сам Ньютон до того, как он был вовлечен в неуместный спор о приоритете,—об этом свидетельствует известное место из „Principia" (стр. 227 амстердамского издания 1723 г.): „Cum (Leibnitio) significarem, me compotem esse methodi determinandi tongentes et similia peragendi, et literis transpositis hanc sententiam involventibus (data Aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire er vice versa) eandem celarem, rescripsit vir clarissimus, se quoque in ejusmodi methodum incidisse et methodum suum communicavit a mea vix abludentem praeterquam in verborum et notarum formulis et idea generationis quantitarum" [„Я ему (Лейбницу) сообщал, что я обладаю методою для проведения касательных и решения тому подобных вопросов, причем я ее скрыл, переставив буквы следующего предложения (когда задано уравнение, содержащее любое число переменных количеств, найти флюксии, и наоборот); знаменитейший муж отвечал мне, что он также напал на такую методу и сообщил мне свою методу, которая оказалась едва отличающейся от моей, и то только терминами и начертанием формул и идей порождения количеств". Все цитаты из Ньютона в настоящем примечании приведены по переводу А. Н. Крылова: „Математические начала натуральной философии". Известия Николаевской Морской Академии, выпуски IV и V Пг. 1915—1916, стр. 65, 64-65, 68, 299; Изд. 2. М.: Изд-во ЛКИ/URSS, 2008].

28) По Кантору (III т. 129) И. Барроу употреблял уже выражение indefinite parvum. Об отношении Лейбница к характеристическому треугольнику Паскаля ср. замечания Кантора (III, стр. 156 и сл.) относительно сочинения Гергардта, Ber. d. Berlin. Acad. 1891.

29) У Лапласа („Thèorie analytique des probabilités, 3-е изд. Париж 1820, „Oeuvres compl. de Laplace" Париж 1876, т. 6, стр. VII) говорится: „Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet d son état antérieur et comme la cause de celui, qui va suivre. Une intelligence, qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre dans la perfection qu'il a su donner à l'astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en Mécanique et en Géométrie, jointes à celles de la pésanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques les états passès et futurs du système du monde. En appliquant la même méthode à quelques autres objets de ses connaissances, il est parvenu à ramener à des lois générales les phénomènes observés et à prevoir ceux que des circonstances données font éclore. Tous ses efforts dans la recherche de la vérité tendent à la rapprocher sans cesse de l'intelligence que nous

venons de concevoir, mais dont il restera toujours infiniment éloigné". [Настоящее положение вселенной мы рассматриваем, как следствие ее прежнего состояния и как причину последующего. Ум, который в данный момент знал бы все действующие в природе силы и соответствующее положение существ, из которых она состоит, ум, который был бы, далее, настолько велик, чтобы подвергнуть все эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения как величайших тел вселенной, так и легчайшего атома; ничто не оставалось бы для него неизвестным, он явственно различал бы как будущее, так и прошедшее. Человеческий дух являет в совершенстве, которое он сумел дать астрономии, слабое подобие такого ума. Его открытия в механике и геометрии вместе с открытием всемирного тяготения приблизили его к пониманию и формулированию в одних и тех же аналитических выражениях прошедших и будущих состояний мировой системы. Применяя тот же метод к некоторым другим объектам своих познаний, он сумел привести к общим законам наблюдаемые явления и предвидеть те, что вызываются данными обстоятельствами. Все усилия человеческого духа к отысканию истины непрерывно приближают его к изображенному нами выше уму, от которого он, однако, всегда останется бесконечно отдаленным].

Лаплас хочет просто принять в общих формулах время $t = \pm\infty$, чтобы узнать начало и конец мира; после исследований Пуанкарэ мы теперь знаем, что даже в повидимому столь простом случае, как проблема трех тел, применяемые для решения ряды не всегда сходятся. Ср. также замечания Г. Буркгардта, „Mathematisches u. naturwissenschaftliches Denken", вступит. лекция в Цюрихе 1897 г. Deutsch. Math. Verein, 11, стр. 49.

30) „Наглядное представление линейно протяженной величины, конечно, ясно, когда мы ограничиваемся прямолинейным отрезком; но уже при кривой линии возникают трудности, которые были хорошо известны и в древнее время. Тогда уже ставился вопрос, можно ли вообще говорить о длине кривых линий, т. е. соизмеримы ли кривые линии как „величины" с отрезками. Эти трудности увеличиваются, когда мы приходим к плоским фигурам; здесь мы непосредственно не в состоянии даже разрешить, равны ли они между собой или одну из них нужно принять за большую так-что изложенное в тексте определение непосредственно не устанавливает даже характера величины простейших геометрических образований. Впервые Коши устранил эти трудности.

В „Теоретической Арифметике" Штольца и Гмейнера, т. I, стр. 1, в основу кладется определение Грассмана („Lehrbuch der Arithmetik". 1861. стр. 1): „Величиной называется всякая вещь, которая может быть принята равной или неравной другой. При каких условиях две принадлежащие к одной системе вещи называются равными или неравными, должно быть всякий раз особо установлено. Если все вещи системы могут быть, таким образом, отнесены друг к другу, то они образуют систему однородных величин". Определеннее выразил это уже Р. Больцано („Paradoxien des Unendlichen". Лейпциг 1851; стр. 4—5): „Если мы рассматриваем предмет, как принадлежащий к роду вещей, из которых каждые две могут находиться между собой исключительно в таком отношении, что они либо равны между собой, либо одна из них представляет сумму, заключающую часть; равную другой вещи... то мы рассматриваем этот предмет как величину". [Ср. Б. Больцано, „Парадоксы бесконечного". Пер. под ред. И. В. Слешинского. Одесса 1911, стр. 10].

Но в математике речь идет об экстенсивных величинах, как их понимает Кант („Критика чистого разума, учение об элементах“, II, 1 отд., 2 кн., 2 гл.): „Экстенсивною я называю всякую такую величину, в которой представление целого делается возможным благодаря представлению частей (которое поэтому необходимо предшествует представлению целого“). А далее говорится: „Во всех явлениях реальное, составляющее предмет ощущения, имеет интенсивную величину, т. е. степень... Ту величину, которая аппрегендируется только как единица, и в которой множественность может быть представлена только путем приближения к отрицанию = 0, называю интенсивной“ [русск. пер. Лосского, СПБ. 1907, стр. 130—131, 132, 134].

В последние еще годы своей жизни К. Ф. Гаусс сказал („Gauss zum Gedächtnis“, С. Фон-Вальтерсгаузена. Лейпциг, 1856, стр. 98): „Под экстенсивными величинами я разумею такие, которые составлены из однородных частей; они образуют предмет математики; интенсивные же являются таковым лишь поскольку они могут быть сделаны экстенсивными, если для них можно подыскать шкалу, по которой их можно измерять и сравнивать друг с другом. Для философа было бы благодарной задачей указать такие пункты, в которых следовало бы начать точное исследование, и если бы даже первая попытка дала крайне грубые результаты, то все же можно было бы надеяться на дальнейшие успехи в будущем“

Несколько лет спустя (в 1860 г.) появились „Элементы психофизики“ Г. Т. Фехнера (2-е изд. 1889 г.), основанные на исследованиях Э. Г. Вебера о чувстве осязания и на обстоятельных опытных работах самого Фехнера. Несмотря на его чрезвычайно талантливое изложение и на интересные, полученные таким путем результаты, все вновь раздавались голоса против принципиального обоснования психофизического принципа измерения, хотя, пожалуй, и не отрицают того, что этот принцип позволяет хорошо ориентироваться в особенно простых раздражениях, которым соответствуют ощущения яркости и давления. Ср. об этом особенно интересную для математиков диссертацию А. Фуко („La psychophysique“, Thèse, présentée devant la faculté des lettres à l'université de Paris 1901) и интересный реферат о ней J. Tannery (Darboux, „Bull. des Sciences Math.“ т. 36, 1900. стр. 101), где вновь указывается на то, что логарифмическая формула измерения Фехнера зависит от двух самих по себе совершенно произвольных, но приемлемых благодаря своей простоте предпосылок.

31) По Б. Пирсу („Linear associative algebra 1870“. Americ. Journ. of Math. IV. 1881) математика есть „наука, которая выводит необходимые следствия“. Но в таком случае она совпадает с логическим мышлением, вообще, ибо всякое вообще суждение основано на (предполагаемой) способности выводить такие следствия. Из этого замечания явствует, что математику нужно определять не только по ее формальному методу, но что следует учесть и особую природу объектов, к которым она применяется.

Б. Кемпе дает следующее определение, к которому в общем примыкает и M. Bôcher („The fundamental concepts and methods of mathematics“, Bull. Amer. Math. Society 11, стр. 115, 1905):

„Если мы имеем некоторый класс соотношений, и если единственные вопросы, которыми мы занимаемся, состоят в том, удовлетворяют ли этим соотношениям упорядоченные группы этих объектов или нет, то результаты исследований называются математикой“.

Я хотел бы подчеркнуть, что Э. Папперииц („Jahresber. d. deutsch. math. Verein“. I, 1892, стр. 36) уже раньше пришел к следующему результату

„Предмет чистой математики образует отношения, которые могут быть логически устанавливаемы между какими-либо мыслимыми элементами, когда мы их принимаем за входящие в состав какого-либо вполне упорядоченного многообразия; закон, порядка этого многообразия должен подлежать нашему выбору“.

Подобно этому Г. Итэльсон („Revue de méthaphysique et de morale“, 1904, 12, стр. 1037) характеризует математику как науку об упорядоченных предметах; что в свою очередь напоминает о еще более общей формулировке Юстуса Гюнтера Грассмана, что математика есть наука о свободном (беспрепятственном) сочетании и расчленении.

Рессель (B. Russel, „The principles of mathematics“, Кембридж, 1903) говорит:

„Чистая математика есть совокупность всех положений вида: из p следует q, где p и q суть положения, содержащие одно или несколько переменных, одинаковых в обоих положениях, и ни p ни q не содержат никаких постоянных кроме логических. Логические же постоянные суть все понятия, подходящие под одно из следующих определений: „следствие“, отношение члена к классу, в который он входит, понятие „таков что“ понятие отношения и всякие иные понятия, какие могут заключаться в общем понятии положений вышеуказанной формы“.

Короче выражает свою мысль в названном выше сочинении M. Bôcher, пытающийся сочетать точки зрения Кемпе и Ресселя и полагающий, что математика есть наука, которая при помощи логических принципов выводит из логических определений (by logical principles from logical principles) дедуктивные заключения.

Л. Кутюра („Die philosophischen Prinzipien der Mathematik“, нем. пер. C. Siegel, Лейпциг 1908, стр. 228 и сл. [„Les principes des Mathématiques“, 1905; „Философские принципы математики„. Пер. с франц. Б. Кореня под ред. П. С. Юшкевича. СПБ 1913, стр. 187 и сл.]) также принимает взгляд Ресселя. По его мнению, математический метод состоит в дедукции из выставленных логистикой принципов. Но от всех прочих чисто дедуктивных теорий математика отличается тем, что она собственно не нуждается ни в каких постулатах: ее определения чисто логические и не содержат никаких иных постоянных, кроме логических. А объекты ее вместе с тем определяются как функции одних логических постоянных. Поэтому формальная основа математики состоит в сообразной с принципами логики совокупности отношений зависимости, а по содержанию она представляет совокупность определений, содержащих только логические понятия.

Все эти взгляды, конечно, серьезно продуманы. Но против большинства из них можно возразить, что они, повидимому, упраздняют различие между общей областью логики и областью математики. Определение Ресселя тоже может быть с одинаковым правом рассматриваемо как идеальный основной принцип всякого абстрактно философского исследования; больше всего положительного содержания заключает в себе, пожалуй, формулировка Э. Папперица, примыкающая к представлениям учения о множествах. Но и здесь возникают сомнения насчет правильности определения, если принять во внимание описательные естественные науки. Эти последние в систематических своих частях занимаются также и порядковыми законами многообразия, которые до известной степени подлежат нашему выбору (напр., половая или естественная система в ботанике), но никто ведь не причислит эти науки к математике.

По моему мнению, всякий математик, который смотрит на свою науку не просто как на предмет, совпадающий с формализмом логики, должен стремиться оттенить еще одно различие. Объекты математики суть знаки, которые обязаны упорядочивающей деятельности разума своими законами сочетания, выраженными в чисто логических определениях. Но такого рода логически установленные знаки мы общим образом называем числами. Поэтому я усматриваю отличительный признак математики в том, что она есть наука о числе. Руководствуясь этим, думается мне, всегда можно будет отличить, относится ли данное исследование к области математики или иной науки. Ср. также соображения H. Rothe, „Taschenbuch für Mathematiker und Physiker." Лейпциг 1911, стр. 65. [Ср. А. В. Васильев, „Математика" Казань 1916. В этой работе дается разбор различных определений математики, в т. ч. и рассмотренных в настоящем примечании, и в заключение предлагается самостоятельное определение, которое „совпадает по существу с определением, предлагаемым Фоссом" (стр. 58)].

Особую часть математики составляет поэтому и логическое исчисление, а именно, поскольку оно приводится к чистому формализму знаков. Как бы велико ни было значение его абстрактных результатов, положительные его результаты поныне весьма ничтожны, поскольку речь идет об изложении более сложных умственных процессов. Дело в том, что все предметы нашего мышления невозможно подчинить понятию числа таким образом, чтобы их многочисленные взаимные отношения выражались при этом в простом виде. Поскольку я знаком с практическими результатами математической логики, она при каждом действительном применении оказывается несостоятельной в виду крайней громоздкости ее формул, из которых при несоразмерно большой затрате энергии можно вычитать почти - что тривиальные выводы с абсолютной, правда, достоверностью. Только там, где трактуются чисто математические вопросы, т. е. соотношения между числами, математическое исчисление (как в „Formulaire des mathematiques" Пеано или его же „Lezioni di Analisi infinitesimale". (Турин 1893), оказывается действительно полезным методом, незаменимым, пожалуй, никаким иным способом выражения. Другими, однако, и это оспаривается и за современной логистикой не признается никакой творческой силы. Ср., напр., M. Winter, „La méthode dans la philosophie des mathématiques". Париж 1911. [Краткий исторический очерк развития логического исчисления и обширные библиографические указания даны в ст. П. Юшкевича „Математическая логика" в „Новом Энциклопедическом Словаре" Брокгауз-Ефрон, т. XXV].

32) Так, напр, Вильсон (E. B. Wilson „The foundations of mathematics" Bull. Americ math. Society, 11, стр. 74, 1905) говорит: „Некоторые, под влиянием арифметических тенденций, склоняются к тому, чтобы дать решительно более поверхностное определение в терминах целых чисел". По поводу этого заметим, что понятие числа в тексте значительно более общее, и затем отошлем к подробному разбору в предыдущем примечании.

33) М. Ролль (1652—1719) (Теорема Ролля, из которой развилась основная теорема дифференциального исчисления, в Traité d'algèbre, Париж 1690, стр. 124), впрочем, впоследствии отказался от своих возражений, признав, что они основаны на недоразумениях (Кантор III, стр. 265). Г. Беркли, известный более как сторонник философского идеализма, возражал против представления флюксий высших порядков (Кантор, III, стр. 715); в 1737 г. Маклорен опроверг это возражение, последовательно развив в своем „Treatise of Fluxions" (1742, стр. 99 и сл) идею этих флюксий и, в частности, понятие ускорения. Беркли принадлежит также утверждение, что в дифференциальном исчислении

постоянно делаются ошибки, которые затем исправляются противоположными ошибками. Этот аргумент впоследствие часто повторялся, напр., Лагранжем (что я уже отметил в „Энциклопедии математических наук, т. II, стр. 59) и Карно, который в своей „Métaphysique de l'analyse infinitésimale“ (1797) утверждает, что анализ бесконечно-малых есть не что иное как исчисление компенсирующихся ошибок (стр. 119, 122, 136); в новейшее время были вновь выдвинуты эти давно уже опровергнутые возражения (ср. реферат R. Норре в 16-ом томе „Fortschritte der Math“ стр. 49).

34) Известно изречение Даламбера, цитированное Фонтенелем в посвященной ему речи: „Идите вперед, и вы обретете веру“.

35) В известных отношениях это можно сказать и о Лагранже, особенно о его „Théorie des fonctions analytiques“. „Нас сильно, надо признаться, поражает—говорит Пикар (E. Picard, „Sur le développement de l'analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences“, Bull. d. sciences math., 28, 1904, стр. 267)—доказательство, которое он, казалось ему, дал для возможности разложения функции в ряд Тэйлора“

36) Это есть та точка зрения, которую Ф. Клейн („Über die Arithmetisierung der Mathematik Gött. Nachr., geschäftl“ Mitt. 1895, стр. 82) охарактеризовал, как арифметизирование математики. Кронекер, как известно, хотел („Journ. f. Math“. 101, 1887, стр. 338) считать целое число единственным предметом математики, и требуемое этим приведение всех исследований он называл „арифметизированием“. Дедекинд („Was sind und was sollen die Zahlen“, 2-ое изд. Брауншвейг 1893; [Что такое числа и для чего они служат? Пер. пр.-доц. Н. Н. Парфентьева. Изв. Физико-Мат. О-ва при Имп. Каз. Унив, 1905, Т. XV, № 2]) полагает, что любая теорема анализа, из какой бы области ни взять ее, может быть выражена как теорема о натуральных числах, но он отнюдь не видит какой-либо заслуги в том, чтобы действительно осуществить это затруднительное приведение и не признавать никаких чисел кроме натуральных. Вейерштрасс также отрицательно отнесся к взгляду Кронекера (Ср. Mittag-Leffler, „Une page de la vie de Weierstrass“, Congrès international de Paris 1900, Париж 1902, стр. 131): „У Кронекера теперь считается аксиомой, что существуют только уравнения между целыми числами“.

По Дедекинду (назв. соч. стр. VII, VIII [русск. пер., стр. 25—26]) числа суть свободные творения человеческого духа; они служат средством для того, чтобы легче и точнее постигнуть различия вещей. „Благодаря чисто логическому построению науки о числах и благодаря обретенному в ней непрерывному царству чисел мы оказываемся в состоянии точно исследовать наши представления о пространстве и времени, устанавливая соответствие между ними и созданным в нашем духе царством чисел. Если точно проследить за тем, что мы делаем при счете количества или совокупности вещей, то мы придем к рассмотрению способности человеческого духа относить вещи к вещам, устанавливать соответствие между двумя какими-нибудь вещами или отображать одну вещь в другой, без каковой способности вообще невозможно никакое мышление. На этом единственном и вообще необходидимом основании должна быть, по моему мнению, построена вся наука чисел“. Выражение „свободные творения человеческого духа“ вызвало много возражений, которые я не могу признать основательными. Здесь речь идет вовсе не о психологическом вопросе, а исключительно о том „априорном“, что заключено в каждом математическом понятии. В этом смысле надо понимать и слова Г. Кантора: „Существо математики— в ее свободе" (Math Annalen 21, стр. 564).

37) Мы исходим здесь, следовательно, из понятия кардинального (количественного) числа, как абстракции, не зависящей от особой природы множества объектов. По Ресселю („The principles of mathematics", Кембридж 1903) это есть общее понятие, свойственное всем эквивалентным множествам в смысле современной теории множеств; аналогичное определение раньше еще дал Г. Фреге („Grundlagen der Arithmetik", Бреславль 1884, стр. 47): численность, соответствующая понятию F, есть объем понятия „равно по числу понятию F". Некоторые считают понятие ординального (порядкового) числа психологически первичным; к ним относится и Гельмгольц („Wiss. Abhandl"., III, 1895, стр. 371) У Канта („Критика чистого разума, о схематизме чистых понятий рассудка") говорится: „Следовательно, число есть не что иное, как единство синтеза многообразия однородного наглядного представления вообще, возникающее вследствие того, что я произвожу само время в аппрегензии наглядного представления". Фигурирующее здесь представление времени, пожалуй, имеющее основание в психологическом возникновении порядкового числа, дало повод к по меньшей мере совершенно бесцельному взгляду, защищаемому особенно Гамильтоном, что фундаментом понятия числа является время как форма чистого наглядного представления. Какой смысл имеет, напр., фраза: Алгебра есть наука о чистом времени (W. R. Hamilton, „Trans. Roy. Irish. Acad." 17, стр. 293, 1837)? Все акты мышления протекают, конечно, во времени; но как возможно было бы сравнение их или приведение в соответствие друг с другом без того, что Кант называет трансцендентальным единством апперцепции? Впрочем, этот взгляд отвергается и представителями философии (ср., напр. Гуссерль, „Philosophie der Arithmetik", Лейпциг, 1891, стр 31). В этом же смысле высказывается В. Вундт („Логика", II, 1907, стр. 153). „Эта психологическая основа понятия числа (т. е. последовательность во времени акта счета) не должна нас, однако, вводить в заблуждение, чтобы мы вместе с Гамильтоном стали и логически выводить число из времени. Если психологически мы и можем себе представлять одновременными несколько актов мышления, то логически вообще не нужны какие-либо предположения о временной последовательности единиц". Соответствующая глава из „Логики" Вунда переведена в сборн. „Новые идеи в математике", № 4, СПБ. 1913, стр. I и сл.].

Аналогично высказывается и Бауманн, „Weitere Bemerkungen zur modernen Mathematik" („Ann. d. Naturphilosophie" Оствальда, VII, 1908, стр. 312) и раньше еще Б. Больцано, „Wissenschaftslehre III", стр. 241, 1837.

[Здесь и в дальнейшем термин „множество" служит для передачи немецкого „Menge" (франц. ensemble). К сожалению, в русской литературе до сих пор не установлено однообразия терминологии, и „Menge" даже в одних и тех же изданиях переводится различно. Так, в „Вопросах элементарной и высшей математики" Клейна (Одесса 1912) на стр. 18 читаем „комплекс или множество", а на стр. 408 „совокупность или комплекс" В сборн. №№ 1 и 6 „Новые идеи в математике" (СПБ. 1913 и 1914) употребляется термин „множество", в сборнике № 4—„комплекс", а на стр. 81 того же сборника—„ансамбль". Термином „ансамбль" пользуются еще Мрочек и Филиппович в „Педагогике математики" (СПБ 1910) и Корень и Юшкевич, пер. „Философских принципов математики" Кутюра (СПБ. 1913). Автор предисловия к этому переводу пишет „совокупность", этот же термин встречается у Богомолова „Вопросы обоснования геометрии" (М. 1913, стр. 13), С. Н. Бернштейна (пер.

кн. Э. Пикара в „Харьк. мат. библ.", стр. 22) и А. Безрукова (пер. „Введения в теорию функций" Таннери, М. 1912). В большинстве изданий „Матезис", в т. ч. и в „Энциклопедии" Вебера-Велльштейна, употребляется термин „комплекс", принятый нами и в первом издании настоящего перевода. Ныне мы от него отказались, гл. обр., во избежание смешения с комплексными числами. Термин „множество" к тому же все более приобретает право гражданства в нашей математической литературе: он принят в серии „Новые идеи в математике" (за исключ. № 4), в специальном трактате Жегалкина („Трансфинитные числа", М. 1907), у А. В. Васильева („Математика", Казань, 1916, и др.), Б. К. Млодзеевского (пер. „Курса математ. анализа" Гурса, т. I, М. 1911) и др. Неменьший хаос царит и в передаче на русский язык терминов теории множеств. Так, abzählbar переводят „исчислимый", „перечислимый", „счетный"; geordnet — „расположенный" и „упорядоченный", Häufungspunkt — точка „накопления", „сгущения" и т. д. Было бы крайне желательно, чтобы какое-нибудь авторитетное учреждение взяло на себя почин в деле выработки однообразной терминологии].

38) Вывод арифметических основных действий дан, напр., у Гельмгольца („Zählen und Messen, erkenntnis—theoretisch bearbeitet", Wissensch. Abhandlungen, 1887, т. III, стр. 356), который следует Г. Грассману: особенно поучительно трактование А. Пуанкарэ в его обстоятельном исследовании в Revue de métaphysique et de morale, 1894, стр. 371 (которое, впрочем, восходит к исчерпывающему трактованию Пирса: C. S. Peirce, Amer. Journ. of Math. 4, стр. 85, 1881); ср. того же автора „La science et l'hypothèse" (2-ое изд. нем. пер. 1906, стр. 3—10) и соображения O. Hölder, „Anschauung und Denken in der Geometrie"; Лейпциг, 1906, стр. 59, примеч. 58). [О. Гельдер, наглядное представление и мышление геометрии. „Новые идеи в математике", № 8, СПБ. 1914, стр. 106 и сл.]. Впрочем, Б. Больцано уже в 1810 г. трактовал действия с целыми числами вполне в духе Грассмана, ср. „Klassiker", Оствальда, № 153 [B. Bolzano, „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gevähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleischung liege"], стр. 38.

Стоящая на современной точке зрения формулировка понятия числа вытекает из простейших представлений учения о множествах (ср., напр., Г. Вебер, „Elementare Mengenlehre", Jahresb. d. Deutsch. Math. Verein, 15, стр. 173, 1906).

Множество, т. е. образованная из каких-нибудь вещей или элементов совокупность, называется упорядоченным, если о каждой паре a, b его элементов известно, который из них предшествует, так что если $a < b$ выражает: a стоит перед b, то из $a < b$, $b < c$ следует также $a < c$. Множество называется вполне упорядоченным, если оно обладает первым (или последним) элементом; оно называется конечным, если оно допускает расположение и при любом его расположении имеется первый и последний элемент. Два таких конечных множества M, N называются эквивалентными, $M \sim N$, если их элементы могут быть обратимо однозначно приведены в соответствие друг с другом; конечное множество не может быть эквивалентно правильной своей части. Можно затем доказать (доказательство приводится у Вебера, назв. соч., стр. 181), что два таких множества M и N всегда должны находиться между собой в одном из следующих трех отношений:

1. Или $M \sim N$.

2. Или правильная часть M_1 множества M эквивалентна N.

3 Или правильная часть N_1 множества N эквивалента M В случаях 2-ом и 3-ем говорят, что $M > N$ или $M < N$, при чем знаки $<, >$ установлены по аналогии со знаками неравенства.

Отсюда вытекает понятие **кардинального числа** Совокупности всех множеств, эквивалентных конечному множеству A, мы приурочиваем знак a, их **кардинальное число**. Если A и B суть два конечные множества, которым соответствуют знаки a, b, то мы полагаем

$$a = b, \text{ если } A \sim B,$$
$$a < b, \text{ если } A < B,$$
$$a > b, \text{ если } A > B.$$

Теперь можно при помощи **начала полной индукции** показать, что числа, которые меньше a или равны a, образуют конечное множество, которому соответствует число a

Ибо если рассматривать конечное, а следовательно и вполне упорядоченное множество A, то эта теорема правильна для его первого элемента a_0, которому приписывается знак 1 Пусть теперь a будет какой-нибудь **другой** элемент, b—предшествующий ему. Тогда к соответствующим частичным множествам Aa, Ab (Ab есть множество, содержащее элемент b и все ему предшествующие элементы) — относятся знаки α, β. Если наша теорема правильна для Ab, т е. если числа, меньшие β или равные β, образуют множество с числом β, то мы можем элементы этого последнего множества привести в однозначно-обратимое соответствие с элементами комплекса Ab· но в таком случае это возможно и тогда, если мы прибавим еще элемент a и приурочим множеству число $\alpha = \beta + 1$. Мы говорим, что к числу β **прибавляется** число $+ 1$. Итак, представление кардинального числа оказывается **первоначальным**, между тем как понятие ординального (**порядкового**) числа получается через процесс прибавления единицы

Принцип полной индукции, которым мы только-что пользовались, может (ср относительно этого ниже, примечание 150) быть приведен к принципу противоречия.

В формулировке Г. **Вебера** он гласит: „Общая теорема, применимая к каждому элементу вполне упорядоченного множества M, доказана, если она правильна для первого элемента множества a_0 и если можно доказать, что она правильна для элемента, следующего за a, коль скоро она правильна для a"

Предположим, что теорема не правильна для всех элементов M; тогда мы образуем **часть** M_1 множества M, содержащую все элементы, для которых эта теорема не правильна Это множество тоже вполне упорядочено, оно имеет свой **первый** элемент α Этот последний не есть a_0, ибо для a_0 теорема правильна; элементу α предшествует, следовательно, в M элемент β, а для β теорема правильна, потому что β **не** содержится в M_1. В таком случае теорема, согласно предположению, правильна и для α. Но это противоречит допущению, что M_1 содержит элемент α Посему множество M_1 вообще не может содержать в себе ни одного элемента, что и требовалось доказать

С наивной точки кажется несколько странным, когда требуют **доказательство** для непосредственно очевидной формы умозаключения, как полная индукция в формулировке: если предложение имеет силу для целого числа n_0 и если оно имеет силу для целого числа $n + 1$, коль скоро оно имеет силу для n, то оно имеет силу для любого целого числа $\equiv n_0$". Но требование это вытекает из необходимости подвести под утверждение, относящееся к специальному понятию целого числа, логический фундамент на основе общего понятия порядка.

39) Необходимо всемерно подчеркнуть, что, уже образуя дроби и отрицательные числа, мы вступаем в область „мнимого" Древние уже чувствовали это; у нас это чувство притупляется традиционной формой элементарного преподавания счета. Таннери (J. Tannery, „Introduction à la théorie de fonctions", Париж 1886, предисл. стр. VIII) говорит: „Дробь с указываемой мною точки зрения не может быть рассматриваема как совокупность равных частей единицы; слова „части единицы" вообще не имеют смысла; дробь есть множество двух целых чисел, расположенных в определенном порядке" (на эту точку зрения впервые стал Гамильтон); „для этого нового вида чисел нужно вновь дать определение равенства, неравенства и арифметических действий".

40) Напомню о неприятном споре, какой вели об этом предмете целый ряд авторов в „Zeitschr. für math. und naturwiss. Unterricht". т. 14—15.

41) О выражениях „положительное" и „отрицательное" см. Тропфке назв. соч. I, стр. 167, а также „Enzycl. des sciences math". Париж 1904, I, 1, стр. 34 (русск. пер. „Новые идеи в математике", сборн. № 4, стр. 51 и сл.).

42) Клавий говорит: „causa autem hujus rei in multiplicatione numerorum et signorum + et — rejicienda videtur, et debilitas humani ingenii accusanda, quod capere non potest, quo pacto id verum esse possit. Neque enim de ratione dubitandum est, cum illa per multa exempla sit confirmata".

Лишь новейшие воззрения, и в особенности принцип перманентности внесли ясность в этот вопрос. Впрочем, тут мы сталкиваемся с действительной трудностью: она вытекает из двойственного характера функциональных знаков $\pm$, которые служат знаками для сложения и вычитания, равно как знаками для положительных и отрицательных чисел, т. е. представляют разного рода операции. Эта двусмысленность, от которой арифметика не может отказаться без существенного ущерба для общего своего алгорифма, устраняется, если последовать примеру Ганкеля и сначала ввести новые знаки для операций $\pm$, напр. $\frown$ и $\smile$, а затем уже убедиться в дозволительности заменить их обычно употребляемым обозначением.

43) Древнейший след квадратного корня из отрицательного числа имеется, хотя и в совершенно неправильном понимании, у Герона Александрийского (Кантор, I, стр. 403); индусы не придавали этим квадратным корням значения числа (Кантор, I, стр. 626). У Кардана они появились в 1545 г. в его „Artis magnae seu de regulis algebraicis liber", но вскоре опять были позабыты. Жирар (A. Girard, „Invention nouvelle en algèbre", Амстердам 1629) первый понял формальную пользу расширения системы чисел введением комплексных чисел, между тем как Декарт (Oeuvres, V, стр. 398, éd. Cousin) не признавал их и называл потому мнимыми. Гауссово представление мнимых чисел (Gött. Nachrichten 1831; сочинения II, стр. 169) еще в 1797 г. было развито Весселем (C. Wessel, „Essai sur la représentation analytique de la direction", Копенгаген 1797); независимо от него пришел к тому же Арган (F. Argand, „Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions geometriques", напечатано в „Bull. d. sciences math." VII, стр. 145).

44) Они состоят в коммутативном (переместительном) и дистрибутивном (распределительном) принципе (F. Servois, „Annalles de Gergonne", 5, 1814—15, стр. 93), к которым Гамильтон прибавил еще принцип ассоциативный (сочетательный). Они, однако, еще недостаточны. При исследовании систем чисел, образованных из сколь угодно многих единиц, прежде всего предполагается:

1. Переместительное свойство сложения;

2. Что произведение двух чисел в свою очередь относится к той же системе чисел;

3. Что оно обладает распределительным и сочетатальным свойством;

4 Что умножение, хотя переместительный закон и не предполагается, в общем однозначно обратимо через оба вида деления, или что имеется модуль умножения. Существенную роль играет еще при этом вопрос, может ли произведение быть равным нулю, если это не имеет места для одного из множителей.

45) По Э. Маху („Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch und kritisch dargestellt". 3-е изд. Лейпциг 1897, стр. 480; [„Механика. Историко-критический очерк ее развития". Пер. с 6-го изд. Спб. 1909, стр. 402 и сл.]) принцип экономии в науке состоит в том, чтобы всегда стремиться достигнуть всякой цели с наименьшей затратой работы мышления.

46) H. Hankel, „Vorlesungen über die Theorie der komplexen Zahlen", Лейпциг 1867. [Г. Ганкель. Теория комплексных числовых систем. Пер. под ред. и с добавл. Н. Н. Парфентьева. Казань 1912]. Сам Ганкель не приписывает себе абсолютного приоритета этого важного принципа, а на странице 15 упоминает о работах G. Peacock'а и других английских математиков 1834—42 гг. Встретивший столь резко отрицательную оценку M. Ohm, которого Ганкель тоже цитирует, в первом издании своего „Versuch eines volkommen konsequenten Systems der Mathematik, 1822", как мне кажется, высказал уже существенную основную мысль этого принципа; ср., напр. предисловие к 3-му изд. 1828 г., стр. XIII и сл., а также приложение к т. I, стр. 407 и сл. По М Симону („Über die Mathematik", Гиссен 1908) этот принцип имеется в напечатанной в 1834 г. работе Г. Бубендея („Über die räumliche Darstellung imaginärer Grössen der Analysis"; программа гамбургского „Іоганнеума"). В Вундт в 3-м изд. своей „Логики", несмотря на выставленные Г. Буркгардтом возражения против этого („Vierteljahrsschritt für wiss. Philosophie", т. XIX, реферат о 2-м изд. „Логики" Вундта), называет принцип перманентности аксиоматическим. Это совершенно неправильно: этот принцип есть требование, выставляемое в видах простоты и целесообразности; можно ли ему удовлетворить, это подлежит всякий раз особому исследованию. Изложение принципа перманентности, отличающееся общностью, дано у O. Stolz и J. A. Gmeiner, „Theoretische Arithmetik", Лейпциг 1900, I отд. стр. 46 и сл., 61 и сл.

Часто еще приходится сталкиваться с неправильным пониманием, будто этот принцип есть верховная аксиома, которой должны подчиняться все законы сочетания в арифметике, так что им можно даже пользоваться для их доказательства Такого рода принципы действительно применяются в прикладной математике, напр, в механике, которая подчиняет все процессы закону действия и противодействия; в чистой математике их нет. В самой ранней форме этот принцип встречается при введении отрицательных показателей степени: устанавливают что a^{-m} должно означать нечто иное, как $\frac{1}{a^m}$, и тем самым возникает единое счисление с общими вещественными показателями.

47) Это, следовательно, не соответствует чисто арифметическому введению комплексных чисел, какого мы требуем в настоящее время. О таковом ср., напр., Г Буркгардт. „Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen", Лейпциг, 1908, стр. 1—10; чисто арифметическое введение комплексных чисел, основанное на употреблении пар чисел, развил впервые В. Р. Гамильтон в 1835 г. (Trans. of the R. Jrish Acad, т. 17, 1837).

48) Другой, также геометрический вывод счисления с комплексными числами, долженствующий доказать их своеобразие, дал Дробиш Ber.'d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch., т 2, стр. 171); но, помимо иных соображений, он непригоден для элементарного обоснования.

49) Величайший интерес представило уже расширение Гауссом учения о простых числах. Простое число p вида $4n+1$ может быть разложено на комплексные множители $a+ib$, $a-ib$, так как по Фермату оно есть сумма a^2+b^2; это разложение невозможно для простых чисел вида $4n+3$; особо стоит случай $2=(1+i)\ (1-i)$. Так создается понятие комплексного простого числа; к ним кроме вещественных только что названных чисел и числа $1+i$ относятся все $a+bi$, „норма" которых a^2+b^2 есть простое число, вида $4n+1$; $1+2i$ есть простое число, но $1+3i=(1+i)\ (2+i)$

50) H. Hankel, „Theorie der komplexen Zahlensysteme", стр. 107 (русск. пер., стр. 131).

51) См. примечание 40. Исходя из самых общих точек зрения, сперва Вейерштрасс и Дедекинд („Göttinger Nachr". 1884, стр. 356; 1885, стр. 141; 1887, стр. 1) и затем многие другие математики исследовали теорию образованных из n единиц или гиперкомплексных числовых систем; ср в „Математической Энциклопедии" статью E. Study, т. I, ч. I, стр. 146.

Если предположить для двух единиц переместительное, сочетательное и распределительное свойства умножения и существование модуля e, так что для всякого числа a $ea=ae$, то существуют еще три существенно различных вида счисления. Но только один из этих видов обладает тем свойством, что произведение оказывается равным нулю только одновременно с одним из своих множителей, — это есть система обыкновенных комплексных чисел. Системы без такого модуля впервые рассматривал E. Study („Gött. Nachr". 1889, стр. 239; ср. Stolz u. Gmeiner, „Theoret. Arithmteik" II, стр. 286).

Комплексные числа с $n>2$ единицами, о которых уже упоминает Гамильтон (предисловие к „Lectures of Quaternions", 1853) и которые удовлетворяют восьми законам перманентности, формулированным у Штольца и Гмейнера (назв. соч. II, стр. 294—308), напротив никогда не допускают переместительного умножения. Если опустить условие для исчезновения произведения, то существует только система кватернионов Гамильтона (Фробениус, „Journ. f. Math" 84, стр. 59; Berlin. Ак. Ber. 1896, стр. 601); отсюда понятно своеобразное положение кватернионов.

52) Ср. Ф. Клейн, „Math. Ann" 37, стр. 572: „Повод к образованию иррациональных чисел заключается, конечно, в кажущейся непрерывности пространственного воззрения. Но так как я отнюдь не считаю пространственное воззрение точным, то я не могу из него сделать вывод

о существовании иррационального. Напротив, теория иррационального есть нечто, что должно быть обосновано или определено чисто арифметическим образом, и что мы затем в силу аксиом вносим в геометрию, дабы и в ней достигнуть той ясности разграничений, которая является необходимым предварительным условием математического трактования“

53) Что дифференциальное исчисление не может обойтись без иррациональных значений независимого переменного, явствует, напр., из понятия об (односторонней) производной справа, которое требует, чтобы выражение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ при } h \text{ положительном}$$

стремилось к одному единственному определенному пределу, каким бы образом значения h ни проходили сходящегося и стремящегося к нулю ряда чисел. А что множество иррациональных значений независимого переменного и вообще играет существенную роль в основах дифференциального и интегрального исчисления, показывает напр., работа L. Scheeffer, „Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen“, Akta math. V, стр 183 и 279

54) R. Dedekind. „Stetigkeit und irrationale Zahlen“, 2-ое изд. Брауншвейг, 1892 [Проф. Р. Дедекинд. „Непрерывность и иррациональные числа“. Пер. С. Шатуновский. 3-е изд. Одесса 1914].

55) Практик, который пользуется для своих целей только результатами математических исследований, никогда поэтому не употребляет иррациональных чисел, а только такие приближенные значения, которые обладают достаточной точностью, между тем как чистая математика именно благодаря введению иррациональных чисел достигает абсолютной точности, выходящей далеко за пределы потребностей действительной жизни. Здесь сказывается глубокое различие между точной и приближенной математикой, которое с таким талантом разобрал Ф. Клейн в своих лекциях „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien“ (Лейпциг 1902) и которое специально относительно здесь затронутых вопросов разъяснил Г. Буркгардт в своей вступительной лекции 1897 г.: „Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken“ (Jahresber. d. Deutsch. Math. Verein., 11, стр. 49, 1902). С первого взгляда может даже показаться, что эта абсолютная точность, которую чистая математика требует и должна требовать, введена в область ее приложений только в силу традиционной привычки к идеальной абстракции, и что ее, пожалуй, с таким же успехом можно было бы заменить приближенным исчислением, более приспособленным к практическим потребностям. Не трудно, однако, убедиться, что, только следуя по пути чистой науки, можно создать основы для несомненно достаточного в каждом отдельном случае приближения.

56) E. Illigens („Math. Ann“. 33, стр. 155, а также 35, стр. 452) выставил против современных теорий иррациональных чисел возражение, исходящее из мнения, названного уже в тексте несостоятельным, что понятие числа и при расширении его всегда должно отвечать на вопрос: „сколько“ вещей. В противоположность этому А. Прингсгейм „Uber den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht“, Deutsch. Math. Verein., т. 6, стр. 78) говорит: „Если хотят получить пригодное общее понятие числа, то нужно подвести под общую точку зрения: 1) всевозможные называемые числами объекты, 2) существующие между ними так называемые соотношения величины“. Первое достигается точкой зрения, на которую стал E. Heine („Elemente der Funktionslehre“, Journ. Math., т. 74 (1874), стр. 173):

„Я называю известные осязаемые знаки числами, так что о существовании этих чисел не может быть никаких сомнений“. Этот взгляд был многими неправильно истолкован в том смысле, будто достаточно сделать какой-нибудь „знак“ на бумаге. Здесь речь идет не об „осязаемости“ в этом смысле, а о логическом функциональном значении знака, которое именно благодаря знаку усваивается нашим интеллектом в определенном, всюду вновь различимом, смысле и именно в силу этой абсолютной определенности становится характерной чертой всякого математического трактования. Подходящим средством для решения второй задачи Прингсгейм считает то, „чтобы отношения „больше и меньше“ вообще рассматривать только как выражение известной последовательности: только в особых, специально для сего квалифицированных случаях они служат в смысле обычного словоупотребления для указания количественных различий, определяемых счетом или измерением“ В самом деле, уже утверждение $3 > -5$ не имеет ровно ничего общего с количественными представлениями, а означает только соотношение порядка

57) В древности понятие предельного значения заменяли так называемым методом исчерпания, (по М. Кантору, II, стр. 818, самый ермин принадлежит Григорию а С. Винцентио, 1647), приписываемым Евдоксу. Он основывается на аксиоме Евдокса: „n-кратное всякой заданной величины при достаточно большом n превзойдет любую тоже заданную однородную величину“. Для того, чтобы теперь при помощи приведения к абсурду доказать, что $A = B$, допустим, что $A > B$. Если затем можно показать, что $A - B$ меньше любой сколь угодно малой, но определенной однородной величины, напр., $\frac{C}{n}$ то $n(A - B) < C$, что противоречит аксиоме. — I. Валлис создал арифметическое понятие предела (Opera I стр. 382), отыскивая последовательные значения дроби, про которые он утверждает: Facto enim experimento patefit rationes inductione repertae ad has continue propius accedere, ita ut differentia evadat quovis assignabili minor, adeoque in infinitum continuata evanescere (Кантор, II, стр. 823).

58) Эйлер высказывается различно о понятии дифференциала. В предисловии к „Institutiones caliculi integralis“ (1775) он говорит на стр. XIV: „Hic autem limes, qui quasi rationum ultimarum incrementum constituit, verum est objectum calculi differentialis“, но до того на стр. X и IX у него сказано: „quod nihilum jam hic litera ω exhibitur, id in calculo differentiali, quia ut incrementum quantitatis x spectatur, signo dx repraesentari ejusque differentiale vocari solet“.

59) Пуассон. „Traité de mécanique“, нем. пер. М. Штерна, Берлин 1833, I, стр. 12, утверждает: „итак, бесконечно малые величины существуют в действительности (ont une existence réelle), а не только представляют вспомогательное средство, выдуманное математиками“. Критика этого утверждения, принадлежащая Штерну (назв. соч., 558), и теперь еще остается правильной.

60) Этот решительный шаг впервые сделал Коши („Résumé des leçons données à l'école Polytechnique“. Париж 1823, стр. 81). Необходимо, однако, отметить, что Е. Больцано уже в 1817 г. определил непрерывность функции в ныне употребительном смысле (т. е. раньше, чем Коши „в Cours d'analyse“ 1821 г.), а также установил принцип сходимости, не давши ему, впрочем, строгого доказательства; ср. „Klassiker“ Оствальда, № 153 [см. примеч. 38], стр. 41.

61) Доказательство принципа сходимости, примыкающее к идеям Дедекинда, см. у Таннери („Introduction à la théorie des fonctions“,

1-е изд., стр. 28), а еще обстоятельнее у Т. Буркгардта („Algebraische Analysis", Лейпциг 1903, стр. 73). Ср. также доказательства С. Jordan'a, „Cours d'analyse", 2-е изд., I, стр. 9, Е. Césaro, „Algebraische Analysis" herausg. von G. Kowalewski, Лейпциг 1904, стр. 88; G. Kowalewski. „Grundzüge der Differential-und Integralrechnung". Лейпциг 1909, стр. 33. (Г. Ковалевский. „Основы дифф. и инт. исчислений". Одесса 1911, стр. 35).

62) О третьей, чисто арифметической теории иррациональных чисел, развитой Вейерштрассом в своих лекциях, мы совсем только недавно узнали более обстоятельно из сочинения фон-Данчера, „Vorlesungen über die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen", Лейпциг и Берлин 1908.

63) Понятием числа обстоятельно занимался Г. Ф. Липпс (Wundt, „Phil Studien, un 11 и 14"), резюмировавший свои выводы в сочинении „Mythenbildung und Erkenntnis", Лейпциг 1908, стр. 100 - 154 Взгляды ученого автора, с идеями которого, развитыми в гл. V, стр. 100 и сл., всякий с интересом познакомится, значительно разнятся от точки зрения авторитетных математиков. На стр. 124 мы читаем: „Человек полагает, конечно, что в своем мышлении он обладает творческой способностью, благодаря которой он произвольно может создавать различные числовые формы, лишь бы только произведения его интеллекта были свободны от противоречий. Мы, однако, не располагаем подобной творческой силой нашего рассудка". Против этого взгляда, согласно которому теории Дедекинда и других являются, повидимому, психологическим заблуждением, следует возразить, что математика, стремясь к отчетливости своих понятий, совершенно отвлекается от психологического их развития и определяет их исключительно по их необходимым признакам. По меньшей мере сомнительным кажется м далее, согласятся ли математики с методом Липпса, который ввод отрицательные и мнимые числа посредством принципа двухчленн и четырехчленной противоположности.

Отрицательное суждение насчет алгебры логики, высказанное без достаточно серьезной мотивировки (стр. 154), тоже вряд ли встретит сочувствие, равно как и мнение, что из ± 1, $\pm i$ и понятия „вне и внутри" следует трехмерность пространства (стр. 196). Преследующий в общем аналогичную тенденцию, а именно, исходящий из образования основных рядов, труд П. Наторпа, „Die logischen Grundlagen der exacten Wissenschaften", Лейпциг 1910, тоже содержит в гл. 3. „Число и счет" много представляющих интерес для математиков соображений (ср. в частности „критические замечания", стр. 109, 140, 154, затем также стр. 172 сл.). Против многого математику приходится, однако, выступить с возражениями. Так, напр., на стр. 187 читаем: „Непрерывность не может быть предметом ни созерцания, ни ощущения, а только мышления, так как она выявляет последний основной закон самого мышления и дает ему точное научное выражение", а на стр. 188 [и 189]: „непрерывность есть качественное всеединство, как изначальное единство". Еще больше спорного в том, что автор говорит по поводу исчисления бесконечно-малых. Так, напр., на стр. 216 говорится, что производная есть конечная и для каждой точки постоянная величина; на стр. 219 автор вместе с Г. Когеном провозглашает метод исчисления бесконечно-малых, решительным ответом по поводу значения мышления как порождающего бытие. Но как быть, если производной вовсе нет, а „бытие" все же должно быть порождено? Столь же произвольным представляется то место гл. V, где числовой ряд, который автор само-собой мыслит допускающим произвольное продолжение вверх и вниз (Липпс, „Weltanschauung und Bildungsideal", Лейпциг 1911, стр. 213, считает это невозможным), так как он есть единозначная определенная функция интеллекта, интерпретируется как прямая линия, и отсюда, применительно к идеям Веронезе и Ресселя, отыскивается переход к геометрии с ее „направлениями и измерениями". Уже здесь, повидимому, незаметно в изложение вкрадываются алогические элементы, а дальше встречается все больше произвольных утверждений, так, напр., на стр. 241 в трактовании комплексных чисел.

Но, пожалуй, мы поступаем несправедливо, выступая с единичными замечаниями по поводу столь ученых трудов, как работы Липпса и Наторпа. Надо надеяться, что столь серьезная философская критика, примером которой являются рассматриваемые труды, будет способствовать заполнению пропасти, все еще разделяющей чисто математическое образование понятий от философской терминологии, которой постоянно грозит возможная опасность превратиться в пустую фразеологию.

64) G. Cantor, „Zur Théorie der trigonometrischen Reihen", Math. Ann. 5, 1871, стр. 128. См. также подробный разбор этого вопроса в „Энциклопедии", III A, B, I, стр. 35 и сл., ст. Ф. Энрикеса. Что касается вопроса, необходима ли аксиома Дедекинда о единственном в своем роде существовании иррациональных чисел, или же без противоречий могут быть допущены еще другие числа (Веронезе или Гильберта), то его мы здесь должны оставить без рассмотрения.

65) O. Hölder („Die Axiome der Quantität und die Lehre von Mass", Ber. d. K. Sächs. Ges d. Wissenschaften, т. 53, 1901, стр. 1) весьма обстоятельно обосновал связь учения о величинах с теорией вещественных чисел. В основу исследования измеримых величин он полагает следующие аксиомы:

1. Всякие две величины a, b, находятся в одном из соотношений $a \gtreqless b$.
2. Для всякой величины имеется величина меньшая.
3. Сумма $a+b$ однозначно определена при заданном порядке слагаемых.
4. $a+b>a$ и вместе с тем $>b$.
5. Если $a<b$, то имеются величины x и y, удовлетворяющие условию $a+x=b$, $y+a=b$.
6. $a+(b+c)=(a+b)+c$, и, наконец,
7. Аналогия с Дедекиндовой аксиомой непрерывности: если все величины разделены на два класса так, что всякая величина отнесена к одному и только к одному классу, что всякий класс содержит величины, и всякая величина первого класса меньше всякой величины второго класса, то существует величина ξ такого рода, что всякое $\xi' < \xi$ относится к первому классу, а всякое $\xi'' > \xi$ ко второму классу.

Из этих аксиом можно затем вывести:

1. Аксиому Архимеда: Если $a<b$, то имеется целое положительное число n такого рода, что $na>b$ (назв. соч., стр, 10).
2. Переместительное свойство сложения величин: $a+b=b+a$ (там же, стр. 13).
3. Ко всякому отношению величин, т. е., ко всяким двум величинам, данным в определенном порядке, относится одно определенное число в общем смысле слова (стр. 23), и, наконец,
4. Имеется величина ξ, которая относительно любой заданной единицы выражается любым заданным числом, т. е. имеет его своей мерой (стр. 32).

Благодаря этим теоремам достигается полная связь учения о величинах с числами, как оно требуется для приложений.

66) Кватернионы В. Р. Гамильтона (1843), еще в 1819/20 г. введенные Гауссом („Göttinger Nachr, math. phys. Klasse", 1898, стр. 8), некогда „санкционированные как предмет публичного и неоднократного испытания в Дублинском университете" (Ганкель, назв. соч. стр. 125, [русск. пер., стр. 24?]), не получили более широкого распространения, несмотря на их большой принципиальный интерес и на разнообразное применение их самим изобретателем к различнейшим проблемам геометрии и механики. Но зато из исчисления кватернионов, т. е. из арифметики чисел $a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, единицы которых подчинены законам умножения

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = -ji = k;\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j,$$

и из идей Г. Грассмана развилась символика векториального исчисления, построенного на двух существенных законах умножения. Внутреннее произведение двух векторов

$$ia_1 + ja_2 + ka_3,\ ib_1 + jb_2 + kb_3$$

изображается по правилам

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1,\ ij = ji = 0,\ jk = kj = 0,\ ki = ik = 0$$

в виде выражения $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$,

а векториальное произведение по правилам

$$i^2 = j^2 = k^2 = 0,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik =$$

в виде определителя $\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$;

впрочем, обе эти составные части появляются характерным образом и при умножении кватернионов. Благодаря гениальному дару предвидения Максвеля, которому удалось при помощи понятия вектора выразить формулы электродинамики совершенно симметричным образом, математическая физика не может ныне обойтись без векториального исчисления, которое играет в ней не только роль просто вспомогательного средства, дающего возможность кратко и наглядно представлять формулы. Рациональная механика (ср., напр., известное сочинение Фёппля), вследствие независимости изложения от координатной системы также становится гораздо более ясной, хотя и нужно признать, что при специальном разборе какой-нибудь проблемы в большинстве случаев оказывается целесообразным возвращение к обыкновенным координатам. Ср. W. Gibbs, „Vector Analysis", ed. by E. B. Wilson, Нью-Йорк 1902, а также E. Jahnke, „Vorlesungen über Vektorenrechnung", Лейпциг 1905, и указанную там литературу.

67) По J Thomae („Abriss einer Theorie der komplexen Funktionen", 1870, стр. 41), принимают $a + bi \gtrless c + di$, если $a \gtrless c$, а в случае $a = c$, если $b \gtrless d$; комплексное число, которое $\gtrless 0$, называется положительным или отрицательным. Эти определения согласуются с общими соотношениями величин (ср., напр., Stolz u. Gmeiner, „Theor. Arithmetik" II, Лейпциг 1902, стр. 99 и сл.): но лемма Евдокса уже не удовлетворяется более. Ибо число b^2i меньше чем $c^2 + di$, и это следует сказать также относительно nb^2i, где n может быть любым сколь угодно большим положительным числом.

68) Гильберт рассматривает область тех однозначных и вещественных функций t („Grundlagen", 2-е издание, стр. 22), которые возникают из t при помощи 5 действий, а именно, четырех основных действий и операции $+\sqrt{1+\omega^2}$, где ω получено при помощи тех же 4 действий. Если рассматривать эти функции, каждая из которых при достаточно больших значениях t имеет определенный знак, как своего рода комплексные числа a, b, то мы назовем $a > b$, если $a - b$, как функция от t, положительна для достаточно больших значений t. При этих предположениях для всякого положительного целого n и положительного числа a число $na - t$ наверно отрицательно, т. е. na меньше положительного числа t; ср. дальнейшие рассуждения в „Grundlagen", § 33, а также приложение II, стр. 95 и замечания Пуанкарэ („Bull. des Sc. Mathèm.", том 37, 1902, стр. 259).

69) „Unendlich der reellen Funktionen" См. O. Stolz, „Zur Geometrie der Alten, Math." Ann. 22, стр. 506.

70) Лейбниц, повидимому, первый употребил слово функция (Act. erudit. 1692, стр. 168 сл.; ср. также 1694, стр. 316). И. Бернулли писал в 1718 г. („Mèm. de l'acad. de Paris", 1718, стр. 106, Opera II, стр 241): называют функцией переменной величины количество, составленное каким бы то ни было образом из этой величины и из постоянных". П. Г. Дирихле („Dove, Repertorium der Physik", 1837. Сочинения, т. 1, стр. 133) создал современное понятие функции, которое, однако, встречается уже у F. Lacroix в его большом „Traité", том I, стр. I, 1810. Неоднократно с тех пор высказывавшееся мнение, будто функция есть не что иное, как табличное сопряжение (так характеризует Дирихле, назв. соч. стр. 153, функции, не следующие никакому закону), оспаривалось вполне правильно (напр., Е. Дюрингом). Только путем закономерного отнесения значений y к значениям x может понятие функции возвыситься над сопряжением некоторых отдельных значений. Таблица логарифмов дает изображение логарифмической функции лишь в том случае, если мы можем интерполировать таблицу по логическому закону функции. С другой стороны, понятие функции у Дирихле достаточно общее и может, напр., обнять и такие функции, которые для всех рациональных значений x равны, скажем, $a+bx$, а для всех иррациональных значений равны $c+dx$.

71) Функция, которую можно представить при помощи степенного ряда, имеет внутри области сходимости производные любого порядка n, которые, впрочем, вместе с n могут превзойти любую заданную величину. Но, наоборот, функция, обладающая этим свойством, еще не может быть представлена в виде ряда Тэйлора. Для этого еще требуется, чтобы остаточный член ряда Тэйлора стремился к нулю при возрастании n. Необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять производные от функции в соответствующем промежутке, впервые указаны А Прингсгеймом („Math. Ann." 44, 1894, стр. 68).

72) Функция, которая в конечном промежутке остается конечной и обладает только конечным числом разрывов непрерывности, а также максимумов и минимумов, может быть представлена при помощи тригонометрического ряда. При известных условиях функция может стать также бесконечной, ср., напр., E. Picard, „Traité d'Analyse", I, стр 215; расширил эти вопросы O. Hölder, „Zur Theorie der trigonometrischen Reihen", Math. Ann. 24, стр. 181. [См. прекрасное изложение теории тригоном. рядов в „Cours d'Analyse", т. II, де ла Валле Пуссена и книгу Лебега: „Leçons sur les séries trigonométriques", Париж, 1906].

73) Гаусс еще значительно раньше (письмо к Бесселю от 18 дек. 1811) занимался интегрированием в комплексной области как источни-

ком периодичности; у него имеется уже и основное положение $\int f(z)\,dz = 0$, которое Коши высказал в 1825 г. в „Mémoire sur les intégrales définies entre des limites imaginaires"(M Simon, „Zur Geschichte der Philosophie d Differentialrechung", Adh. z Gesch. der Math., вып. 8, Лейпциг, 1898, стр 115).

74) Коши, впрочем, называл („Comptes Rendus", 36, стр 453) однозначную функцию, которая вместе с производными удовлетворяет условиям непрерывности, моногенной в соответствующей области; вышедшее ныне из употребления обозначение синектическая встречается позднее у Коши, Брио и Буке в различных смыслах Мы теперь обычно говорим, что функция является аналитической (или голоморфной) вокруг одной точки и образуем отсюда понятие (моногенной) аналитической функции по Вейерштрассу.

75) Это направление основано на теореме Коши. Если в точке z_0 области G существует для однозначной функции $f(z)$ предел

$$\frac{f(z_0+\zeta)-f(z_0)}{\zeta}$$

при $lim\zeta = 0$, то $f(z)$ называется дифференцируемой в z_0, указанный предел называется $f'(z_0)$, а функция — аналитической в G, если в каждой внутренней точке в G имеется производная. Если $f(z)$ в каждой точке внутри и на контуре области G, ограниченной „правильной" кривой, непрерывна, а внутри области аналитична, то $\int f(z)\,dz$, взятый по контуру, равен нулю.

Эта основная теорема прежде доказывалась так, что при этом непрерывность $f'(z)$ предполагалась либо не явно (напр., Briot s Bouquet, „Théorie des fonctions elliptiques", Париж, 1875, стр. 128), либо явно (напр, E. Picard, „Traité d'Analyse", т. II, стр 4, 1893) E Goursat показал (1889), что существование вполне определенного $f'(z)$ уже достаточно (см. напр, „Cours d' Analyse Math", II, стр 82; W. Osgood, „Lehrbuch der Funktionentheorie" 1906, стр. 296 и сл. [Доказательство основной теоремы по Гурса приведено у С Е Савича, „Теория функции комплексного переменного". 2-ое изд. ПГ. 1915, стр 79]).

76) Теорема Дезарга: „в двух треугольниках в одной и той же плоскости, соответствующие стороны которых пересекаются в трех точках одной прямой, прямые, соединяющие соответствующие углы, проходят через одну и ту же точку, и обратно", по Клейну („Math. Ann". 6, 1872, стр 112), может быть доказана в проективной геометрии исключительно принимая во внимание пространственные соотношения. Для доказательства же в плоскости требуется дальнейшие постулаты (у Гильберта, „Grundlagen der Geometrie", стр. 49, аксиомы параллельности и конгруэнтности). Это явствует из того, что в плоскости существует геометрия, которая удовлетворяет кроме проективных постулатов еще и аксиоме Евдокса и в которой теорема Дезарга не имеет места, назв соч., стр. 51

77) Прекращение сходимости ряда Тейлора в вещественной области для функции $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, которая в этой области всюду непрерывна вместе со своими производными, находит свое объяснение лишь в ее мнимых особенных точках.

78) S. Lie, „Vorlesungen uber Differentialgleichungen", bearb von G. Scheffers, Лейпциг, 1891; S Lie und G Scheffers, „Geometrie der Beruhrungstransformationen", Лейпциг, 1896.

79) Эта мысль в течение долгого времени господствовала в математических представлениях. Если исходить из предположения, что наши механические основные понятия образуют единственную и совершенно адэкватную форму для познания явлений природы, то всякая непротиворечивая в себе проблема, конечно, должна была иметь по меньшей мере одно определенное решение; во многих случаях можно было доказать также и однозначность его Характерным примером этого может служить, напр, существование функции Грина, выражающей распределение электричества на проводнике вследствие индукции электрической частицы или же существование потенциала электрических токов, на которое ссылается Клейн в своей теории алгебраических функций (Лейпциг, 1881). Если же признать, что всякое математико-механическое объяснение имеет только значение образа, согласованность которого с предполагаемой действительностью отнюдь не дано само по себе, то существование функций или решений таким путем, разумеется, нельзя обосновать.

80) Таковы, напр., результаты, добытые при помощи изобретенного Декартом (Кантор II, стр 684) метода неопределенных коэффициентов

81) О различных доказательствах существования решения дифференциальных систем первого порядка см статью Пэнлеве в „Энциклопедии" (II A. 4a, стр 193—206). Особенно важна теорема об однозначности (голоморфного) решения дифференциальной системы, правые стороны которых суть голоморфные функции переменного в окрестности начальных значений, каковую теорему Пикар (E. Picard, „Traité d'Analyse" II, стр. 314) первый распространил и на тот случай, когда путь стремящегося к начальному значения независимого переменного не имеет более конечной длины. Если правые стороны не голоморфны, то могут наступить совершенно другие обстоятельства; см. пример Пеано („Math. Ann." 37, стр. 82) $\frac{dx}{dt} = 3 \times^{\frac{2}{3}}$ с начальными значениями положительного переменного t, $t=0$, $x=0$, которому соответствуют непрерывные голоморфные решения $x=0$, $x=t^3$, а также функция, которая от $t=0$ до $t=t_0$ равна нулю, но для $t>t_0$ выражается через $(t-t_0)^3$.

82) L. Fuchs, „Programm der städt. Gewerbeschule zu Berlin", 1865; Journ. f. Math. 66, стр. 122 и 68, стр. 354.

83) Простота основана на том, что интегралы этих линейных дифференциальных уравнений порядка n, коэффициенты которых суть аналитические функции независимого переменного, содержат только неподвижные особенные точки.

84) Эти трудности проистекают, во-первых, из требования привести в связь друг с другом элементы функции в комплексной четырехлистной плоскости в надлежащем аналитическом продолжении, а затем из особой природы особенных точек, могущих быть точками определенности или неопределенности. Простые и наглядные условия получаются прежде всего при дифференциальных уравнениях класса Фукса, в которых все решения вполне определены вблизи особенных точек. Связное изложение работ о линейных дифференциальных уравнениях, созданных соединенными трудами современных математиков, дает большой „Handbuch der Theorie der Differentialgleichungen" Л. Шлезингера, т. I и II, Лейпциг, 1895—98; ср. его же „Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen", Лейпциг, 1907, а также J. Horn, „Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung", Лейпциг. 1905, а для дальнейшего ориентирования P. Painlevé, „Le probléme moderne

de l'integration des équations différentielles“, 3. int. math. Kongress in Heidelberg. Лейпциг, 1905, стр. 86.

Решения не линейных обыкновенных дифференциальных уравнений могут, как это показывают уже простейшие случаи, напр., $x+yy'=0$, иметь также и подвижные особенные точки, а именно, зависящие от произвольных постоянных. Относительно не линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$f(x,y,y')=0,$$

где f целая и рациональная функция относительно y,y' и аналитическая относительно x, основная теорема Пэнлеве гласит, что не алгебраические особенные точки y неподвижны, а алгебраические, вообще говоря, подвижны.

Уравнение указанного вида, общий интеграл которого имеет только неподвижные точки разветвления, можно, далее, по исследованиям Фукса и Пуанкарэ.

1. привести к уравнению Риккати посредством рационального преобразования, если род уравнения между y и y' равен нулю;

2. если род равен единице, то общий интеграл в существенном зависит от эллиптической функции;

3. если род больше единицы, то общий интеграл алгебраически зависит от коэффициентов уравнения.

Совершенно другие свойства обнаруживаются уже в дифференциальных уравнениях второго порядка; здесь могут быть также подвижные алгебраические особенные точки. Для класса дифференциальных уравнений вида

$$y''=f\ (x,\ y,\ y'),$$

где f рациональная функция относительно y', алгебраическая относительно y, аналитическая относительно x, известны по Пэнлеве все формы f, при которых общий интеграл имеет только неподвижные точки разветвления.

85) Задача, которую уже 80 лет т. н. рассматривал Н. Г. Абель в механической ее формулировке: найти функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$f(x)=\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^n},\quad a\leqq t\leqq x,$$

соответствует линейному интегральному уравнению первого рода:

$$f(x)=\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt;$$

главная же задача теории потенциала приводит к решению линейного интегрального уравнения второго рода:

$$f(x)=\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

с параметром λ; можно показать, что функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая последнему уравнению, есть аналитическая функция от λ для всякого значения λ, за исключением некоторых значений λ, которые называются „собственными значениями“ ядра К и т. д.

86) Ср. Кантор III, стр. 159: „26 окт. 1675 г. сделан был великий шаг открытия нового алгорифма: Utile erit scribi $\int$ pro omn. ut $\int l$ pro omn. l id est summa ipsorum l; $\int$ autem significat summam, d differentiam".

87) Эйлер, Интегральное исчисление, перевод Саломона, Вена, 1828, I, § 11: Знак $\int$ называют обыкновенно суммой, что возникает из ложного понятия, будто интеграл есть как бы сумма всех дифференциалов, а это столь же неправильно, как и ходячее представление, по которому линия состоит исключительно из точек"; § 29: „Так как интегральное исчисление есть обратное дифференциальному исчислению, то оно, как все обратные методы, знакомит нас с новым родом величин".

88) В этих случаях прибегали к различным методам разложения интегрируемой функции в ряд, каковые методы в каждом отдельном случае могут, конечно, оказаться достаточными.

89) B. Riemann, „Habilitationsschrift 1854", Ges. Werke 1876, стр. 225.

90) О нем ср. замечания Дини (U. Dini, „Grundlagen für eine Theorie der Funktionen", deutsch bearbeitet von. J. Lüroth und A. Schepp, Лейпциг, 1892, стр 317—345).

91) Тем самым, собственно, вполне определяется понятие площади которое наивному пониманию представлялось само по себе существующей величиной или определенным числом.

92) Ср. важные работы в „Math. Ann." 46 и 49. Зачатки учения о множествах имеются у Больцано (B. Bolzano. „Paradoxien des Unendlichen". Лейпциг, 1851 [„Парадоксы бесконечного". Пер. под ред. И. В. Слешинского. Одесса, 1911]). Он ввел в употребление слово „Menge" (стр. 14, [русск. пер. стр. 11]), он говорит уже, подобно Дедекинду, о бесконечных множествах (множество всех истин бесконечно, стр. 21 [стр. 23 русск. пер.]), о множестве всех чисел, ему известна характерная особенность бесконечных множеств, что они могут быть „отображены" на правильную свою часть (стр. 28 [стр. 32 русск. пер.]), и развивает на стр. 34 [стр. 35—36 русск. пер.] понятие равенства множеств; но в дальнейших рассуждениях он приходит к тем кажущимся противоречиям, которые он называет парадоксами бесконечного. [О русской терминологии см. выше примеч. 37].

93) О мощности множества самой по себе говорить нельзя,—это есть классовое понятие, относящееся ко всем эквивалентным множествам.

94) Эти понятия $\lesseqgtr$ взаимно исключают друг друга. Но из этого не следует, что мощности двух множеств всегда должны соответствовать этому различению, характерному для понятия величины. Напротив (E. Borel, „Leçons sur la théorie des fonctions", Париж, 1895. стр. 102; G. Hessenberg, „Grundbegriffe der Mengenlehre", Abh. d. Friesschen Scule, т. I, 1906, стр. 495), в общем случае имеет место четырехчленное различие:

1) M_1 эквивалентно части M_2, M_2 — части M_1,
2) M_1 „ „ M_2, M_2 не эквивалентно никакой части M_1,
3) M_2 „ „ M_1, M_1 не эквивалентно никакой части M_2,
4) M_1 не эквивалентно никакой части M_2, M_2 не эквивалентно никакой части M_1.

Два бесконечные множества, соответствующие случаю 1) эквивалентны: Кантор предугадал эту теорему, а Ф. Бернштейн доказал ее (Борель, назв. соч. стр. 102; Гессенберг, назв. соч. стр. 522; почти одновременно с Бернштейном доказательство теоремы предложил E Schröder, но A. Korselt, „Math. Ann.“ 70, стр. 294, 1911, недавно обнаружил его несостоятельность). Для конечных множеств случай 1) никогда не имеет места; случаи 2), 3), 4) соответствуют тогда соотношениям величины.

95) На недоразумении основано, повидимому, заявление Баумана (J. Baumann. „Kritische Bemerkungen zur modernen Mathematik“, Annalen der Naturphilosophie VI, стр. 291; ср. его же замечания в „Zeitschrift für philos. Kritik“, т. 91), что Кантор произвольно замыкает понятие, которое не может быть завершено, и утверждает о его существовании. Правда, Гаусс, говорит следующее („Briefwechsel mit Schuhmacher“, т. II, стр. 268 [1831]): („Что же касается Вашего доказательства), то я прежде всего протестую против употребления бесконечной величины, как совершенной, что в математике никогда не может быть допускаемо. Бесконечное есть только façon de parler, а собственно речь идет о пределах, к которым одни отношения приближаются сколь угодно близко, тогда как другие отношения могут расти неограниченно“. [Ср. русск. пер. выдержек из переписки Гаусса с Шумахером в сборнике: Об основаниях геометрии. Издано физ.-мат. обществом к столетн. юбилею Н. И. Лобачевского. Изд. 2-е. Казань. 1895, стр. IX]. Но этот протест Гаусса относится прежде всего к употреблению, какое Шумахер в доказательстве теоремы о сумме углов треугольника совершенно неопределенным образом сделал из рассмотрения бесконечных угловых пространств, а также и к аналогичным попыткам доказать аксиому параллельности, напр., к попытке Бертрана (1812). Гаусс наверно не возражал бы против логических образований Кантора, стремящихся выяснить, в каком смысле можно производить точные „вычисления“ с бесконечными множествами, хотя и поныне еще отдельные вопросы этой молодой дисциплины не вполне разрешены. Поныне еще в учении о множествах имеются парадоксы, т.-е. внутренне противоречивые утверждения, которые могут вытекать только из несоответствующего расширения или применения понятия множества. Насчет Канторова определения неоднократно уже указывалось, что оно слишком обще (ср. особенно J. Mollerup, „Math. Ann.“ 64, стр. 234). Под это определение подходят и такие множества, как, напр., „множество всех вещей“ или „множество всех множеств“. Необходимо поэтому должным образом ограничить понятие множества; сначала надо обратиться к рассмотрению таких множеств, которые могут быть генетически построены из других, уже вполне определенных множеств.

Другие усматривают источник парадоксов в логически неправильных заключениях, которых можно избежать при надлежащей осторожности. Если исходить вместе с Шёнфлисом (A. Schönflies, „Die logischen Paradoxien der Mengenlehre“, Jahresber. d. Deutscsh. Math. Verein. 15, стр. 19, 1906) из того, что все умозаключения математики основаны в сущности на принципе противоречия, то это прежде всего значит: Два утверждения „понятию A соответствует понятие a“ и „понятию A не соответствует понятие a“ несовместимы. Но из этого не следует, что в таком случае одно из этих суждений безусловно должно быть правильным. Это будет иметь место только тогда, если понятия A и a сами не противоречивы, и только при этом предположении из невозможности противоположности какого-нибудь утверждения вытекает это самое утверждение. Такого рода внутренне-противоречивым понятием является введенное Ресселем понятие „множества M всех множеств m, которые сами себя не содержат в качестве элемента“: допущение, что M само себя содержит как элемент, равно как и противоположное допущение, оба приводят здесь к противоречию и точно так же обстоит, по Шенфлису, дело с известным парадоксальным множеством w всех вполне упорядоченных множеств.

Обнаружение подобных парадоксов, в которые, однако, постепенно внесено было все больше ясности, дало повод авторитетнейшим математикам совсем еще недавно охарактеризовать учение о множествах или „канторизм“ как неправомерное развитие понятия числа. В своей речи о „Будущем математики“, произнесенной на четвертом международном конгрессе математиков 1908 г. в Риме (Rendiconti di Palermo 1908) Пуанкарэ, подчеркнув пользу теории множеств для теории функций, сказал: „Но случилось так, что столкнулись с парадоксами, с явными противоречиями. Я со своей стороны полагаю, и не я один, что нужно всегда вводить только такие вещи, которые можно вполне определить при помощи конечного количества слов“. (Ср. Пуанкарэ „Наука и метод“. Одесса 1910, стр. 46).

При всем том не представляется вероятным, чтобы в ближайшем будущем учение о множествах стали рассматривать только в качестве интересного патологического случая, как это полагает Пуанкарэ. Понятия точки сгущения или пограничных точек бесконечного множества, эквивалентность и исчислимость, вполне упорядоченные множества и т. д. суть фундаментальные образования нашего разума, которые слишком глубоко связаны со всем строением математики, чтобы их вообще можно было опять устранить. В этом смысле высказывается и Шёнфлис (Jahresb. d. D. M. V. II, 1898, стр. 38): „Учение о множествах оплодотворило различнейшие отрасли математики..., оно углубило наше математическое мышление и со времени своего возникновения привело к исключительным результатам. Приложения учения нигде не обнаружили никаких противоречий. Нельзя себе представить, чтобы это учение могло опять исчезнуть из мира математического мышления“.

96) Благодаря подстановке

$$x = \frac{x'}{1 - x'}, \quad x' = \frac{x}{1 + x},$$

которая отображает совокупность положительных чисел x на отрезок x' от 0 до 1, достаточно привести доказательства этих теорем, для чисел < 1. Но количество всех неприводимых дробей с тождественным знаменателем q не может превысить $q - 1$, а именно, они содержатся в ряду

$$\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \quad \frac{q-1}{q};$$

тем самым [если расположить их по возрастанию знаменателя, а при равных знаменателях — по возрастанию числителя] они отображены на натуральный ряд чисел, правда, с нарушением расположения по величине; аналогично рассуждают относительно алгебраических чисел.

97) Для доказательства пользуются диагональным методом Кантора. Если исчислимое множество M исчислимых множеств M_1, M_2, M_3 . представлено схемой элементов a_{ik}

$$\begin{aligned}
&M_1 : a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14},\\
&M_2 : a_{21}, a_{22}, a_{23},\\
&M_3 : a_{31}, a_{32}, a_{33},\\
&M_4 : a_{41} \quad . \quad . \quad . \quad . \,,
\end{aligned}$$

то множество этих элементов можно пронумеровать как простое множество, если об'единить их в совокупности с одинаковой суммой индексов.

98) Доказательство Кантора (дано впервые в „J. f. Math". 77, стр. 258, 1874) отличается значительной простотой и общностью по сравнению с доказательством Лиувиля („Journ. de mathém." 16, стр. 136, ср. Борель, назв. соч., стр. 26 и сл.): Если бы между 0 и 1 не было никаких трансцендентных чисел, то множество алгебраических десятичных дробей,

$$0,\ a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

в котором каждая конечная десятичная дробь пишется в виде бесконечной (с девятками на конце), должно было бы представлять все числа в этом промежутке. Но это не имеет места, потому что число

$$0,\ a_{11},\ a_{22},\ a_{33}, \qquad \text{где } a_{ii} \neq a_{ii},$$

не содержится в вышеприведенном исчислимом множестве.

99) Доказательство этой теоремы (ср. Кантор „J. f. Math." 84 стр. 242, 1878) основано на следующем: Если из бесконечного множества M выделить исчислимое множество M_1 то остаток $M - M_1$ равномощен с M (ср., напр., Борель, назв. соч. стр. 17). Посему иррациональные числа имеют мощность континуума, и мощность множества точек с иррациональными координатами x, y внутри квадрата, сторона которого имеет длину 1, равна мощности всех в нем лежащих точек. Но иррациональное число i, лежащее между 0 и 1, есть бесконечная непрерывная дробь

$$i = (a_1,\ a_2,\ a_3, \quad .)$$

со знаменателем которой можно привести в однозначное сопряжение пару чисел

$$x = (a_1,\ a_3,\ a_5, \quad .)$$
$$y = (a_2,\ a_4,\ a_6, \quad .).$$

Так как обратно иррациональные x, y однозначно определяют все a_n, а посему также и число i, то теорема доказана. Аналогично следует поступать, когда речь идет об отображении континуума n измерений на линейный и т. д. (см., напр., F. Klein, „Elementarmath. von höherem Standpunkte aus" Лейпциг 1911, стр. 565. [Ф. Клейн. „Вопросы элементарной и высшей математики". Пер. с нем. Одесса 1912, стр. 419]).

100) Ср. Ф. Клейн, назв. соч. стр. 568 [русск. пер. стр. 423], Г. Гессенберг, назв. соч. стр. 553.

101) Но при непрерывных отображениях сохраняется понятие измерения. Это впервые доказал J. Lüroth для $n \lesseqgtr 3$; с тех пор опубликовано много других изысканий; очень простое доказательство инвариантности понятия измерения при непрерывном отображении дал L. Brouwer, „Math. Ann." 71, стр. 365, 1912.

102) Невозможность этого А. Шенфлис („Jahresb. d. D. M. V". II, стр. 20) разъясняет так: Если бы непрерывное отображение было возможно, то каждому отрезку, принадлежащему квадрату, должен был бы соответствовать промежуток отрезка (ab), а посему отрезкам, параллельным одной стороне квадрата, должны были бы соответствовать промежутки на (ab), не имеющие общих точек. Но таких промежутков имеется только исчислимое множество, между тем как названные параллели имеют мощность линейного континуума. Ср. также Ф. Клейн, назв. соч. стр 580 и сл. [русск. пер. стр. 433].

103) А. Шенфлис, назв. соч. стр. 149 — 194.

104) G. Peano, Math. Ann. 36, 1890, стр. 157. „В этой заметке определяются две однозначные непрерывные функции x, y одного вещественного переменного t, принимающие все пары значений, для которых $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, когда t изменяется в промежутке 0,1. Если назвать непрерывной кривой место точек, координаты которых суть непрерывные функции одного переменного, то мы получаем дугу кривой, которая проходит через все точки квадрата“. См. также F. Klein, „Vorlesung über Differential und Integralrechnung“, стр. 239—247, где приведен также геометрический пример Гильберта для такой кривой, и A. Schönflies, „Enwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“, I, стр. 121. E. Cesàro дал арифметический пример для кривой Пеано („Bull. des sc. math.“ 21, стр. 257). Ср. H. Lebesque, „Lecons sur l'intégration“, 1904, стр. 44; он доказывает, что при непрерывном сопряжении кривой с множеством C_n в последнем должны оказаться по меньшей мере $n+1$ раз отмеченные точки („Math. Ann.“ 70, стр. 166.), [а также H. Hahn, „Theorie der reellen Funktionen“, I, 1921: стр. 146 и след.].

105) Впервые приведено у C. Jordan, „Cours d'analyse III“, стр. 593, 1887. Ср. A. Hurwitz, „Ueber d. Entw. d. allgem. Theorie d. analyt. Funktionen“; Intern. Math-Kongress Zürich 1897, Лейпциг 1898, стр. 91, и J. D. Ames. „An Arithmetic treatment of some problems in analysis situs“, Балтимора 1895, а также изложение у Osgood, „Funktionentheorie I, 1, 1906, стр. 120. [См. также указ. уже курс де ла Валле Пуссена изд. 1914 г., т. I, стр. 378; выходит и русский перевод, ПГ. 1923].

106) Числа 1, 2, 3,. n образуют множество типа n; тип множества 1, 2, 3, . обозначается через ω, тип . , -3, -2, -1 через $^*\omega$.

107) Тип множества $1, 2, 3, \ldots, 1', 2', \ldots, m'$ есть $\omega + m$, тип $1, 2, \ldots m'$, $1', 2' \ldots,$ есть $m + \omega$; они по существу различны, потому что у первого есть последний элемент m, а второй не имеет последнего элемента.

108) В множестве $(1, 2, 3, \quad , 1', 2', 3', \quad , n')$ имеется последний член n', за каждым его членом—кроме n'—следует определенный член, но $1'$ не имеет предшествующего члена. Поучительные примеры в этом роде, приведенные, впрочем, в связи с особыми аксиоматическими соображениями, см. у E. V. Huntigton („Annals of Math“. 6, 7, 1905—06, стр. 151).

109) Если все точки промежутка (ab), $b > a$, разделить на два класса C_1, C_2 таким образом, что C_1 содержит все точки (ab), которые превзойдены бесконечно многими точками множества P, а C_2 все прочие точки, то это разложение определяет точку сечения A по Дедекинду; всякий промежуток вокруг A должен содержать бесконечно много точка P; A есть наибольшая точка сгущения для P в (ab).

110) Множество $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, не замкнуто при 0; оно становится замкнутым, если присоединить 0; рациональные точки отрезка $0-1$ образуют плотное в себе множество, множество всех вещественных точек в том же промежутке совершенно и замкнуто.

111) Другими словами это значит: любая точка сгущения A множества P' принадлежит P' Ибо в произвольно малом промежутке α вокруг A находятся точки B множества P'; в произвольно малом промежутке β вокруг B находится бесконечно много точек множества P, а следовательно это можно сказать и о промежутке α; в таком случае A есть точка сгущения для P или точка в P'.

112) J. Tannery дает в своем „Introduction à la Théorie des fonctions“ I, стр 220—256 изд. 2-го, 1904, обстоятельное изложение этого общего понятия функции. [Жюль Таннери. „Введение в теорию функций с одной переменной“. Пер. А. Безруков. М. 1912, т. I, стр. 232 и сл.].

113) Потому что значение $f(x_0)$, непрерывной в точке x_0 функции есть предел ряда $f(x)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, соответствующего стремящейся к x_0 последовательности x_1, x_2, x_3, . . , какова бы ни была эта последовательность; посему это значение определено, если указанный ряд известен для рациональных x_1, x_2, x_3,

114) Подробности см. Lebesgue, назв. соч. стр. 14; U должно быть приводимым.

115) B. Riemann, „Werke", 2 изд. стр. 266.

116) Под колебанием D_t понимают разность верхней и нижней границы $f(x)$ в промежутке $x_t - x_{t-1}$; очевидно вполне безразлично, понимать ли при этом под $f(\xi)$ в сумме S значения функции согласно определению или любые иные значения между теми же границами т. е. интеграл не меняется, если и $f(x)$ в точках приводимого множества подвергать бесконечно многим изменениям.

117) Ср. изложение у U. Dini, „Grundlagen für eine Theorie der Funktionen", Лейпциг 1892, стр. 317; J. Tannery, „Introduction a la théorie de fonctions", Париж, 1904, т. II, стр. 1—11. [Ж. Таннери. „Введение в теорию функций с одной переменною". Т. II. Пер. А. Безруков. М. 1912, стр. 1 и сл. — Мемуар, Риманна 1854 г. переведен на русск. яз. в книге: Лежен-Дирикле, Риманн, Липшиц. „Разложение функции в тригонометрические ряды". Пер. Г. А. Грузинцева и С. И. Бернштейна. Харьковская математ. библи-а, сер. В, № 2, Харьков 1914; там же на стр. 50 см. цитируемый в тексте Риманнов пример функции].

118) Примером—правда, почти тривиальным—может служить функция $f(x)$, которая всюду равна нулю за исключением точки $x = 0$; в этом случае нет такого $F(x)$, из которого дифференциированием получалось бы $f(x)$. Ибо $F(x)$ могло бы быть только постоянной, но ее производная всюду равна нулю.

119) Эти четыре значения в более общем смысле имеются уже у каждой функции $y = f(x)$ для $x = x_0$. Ибо все $f(x_0 + k)$ имеют (при h положительными и не превосходящем h) верхнюю границу G_h и нижнюю g_h: при убывании h, G_h не может возрастать, g_h не может убывать. Посему к x_0 (при положительном h) относят оба правых предельных значения G и g, равно как оба левых. А из них получаются названные четыре производные, если, напр., заменить $f(x_0 + h)$ значениями отношения приращения непрерывной функции $\varphi(x)$ k h

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

120) Ср. „Abh. Münch. Akad." 1876, и M. Pasch, „Math, Ann." 30, стр. 153.

121) Если опустить тут предположение о конечности производных, то наша основная теорема по H. Hahn'у уже не имеет силы („Monatsh. f. Math." 16, стр. 317. 1905).

122) При этом существенно понятие измеримости точечных множеств. Если линейному точечному множеству M в промежутке (ab) сопряжена функция $f(x)$ таким образом, что для каждой точки множества функция равна единице, а для других точек она равна нулю, то верхний интеграл

$$\int f(x)\, dx$$

равен пределу суммы промежутков, в которых вообще находятся точки множества: это есть внешнее протяжение точечного множества. Нижний интеграл надо образовать применительно к промежуткам, которые содержат только точки множества, и он даст внутреннее протяжение. Точечное множество называется измеримым, если оба протяжения равны (для множества рациональных точек в (ab) в каждом частичном промежутке имеются рациональные числа, а посему внешнее протяжение равно $b-a$, внутреннее же протяжение равно нулю, так как нет промежутка, содержащего только рациональные точки). Если оба эти протяжения обозначить через J_e и J_i и рассматривать множество M_1, дополнительное к точечному множеству M, то промежутки, содержащие только точки M_1, не будут содержать ни одной точки M_1 все же другие промежутки будут иметь таковые; отсюда, пользуясь соответственными обозначениями для протяжений дополнительного множества, получаются формулы

$$J'_e + J_i = b - a$$
$$J'_e + J_e = b - a,$$

так что протяжение множества $J_e - J_i$ выражается также через

$$J_e - (b - a - J'_e).$$

123) Г. Ганкель еще в 1870 г. (см. „Math. Ann." 20, стр. 63) указал кривые, которые для всех рациональных абсцисс не имеют касательных и, напротив, только для всех иррациональных абсцисс имеют таковые (назв. соч. стр. 80), равно как кривые, которые для каждой рациональной абсциссы имеют бесконечно много бесконечно малых колебаний, но с определенным направлением касательной (стр. 83).

Известный пример Вейерштрасса относится еще к 1861 г., но был опубликован впервые в 1874 г. Дюбуа-Реймоном („Journal für Math." 79). Хр. Винер пытался в 1881 г. („Journ. für Math." 90) дать наглядное представление кривой Вейерштрасса посредством чертежей (ср. также F. Klein, „Anwendung der Differential und Integralrechnung auf Geometrie", Лейпциг 1902, стр. 83—101); как это ни полезно, все же действительное представление предельного случая является столь же невозможным, как, напр., изображение появления бесконечно многих максимумов и минимумов, которые в сколь угодно малом промежутке всюду плотно расположены. — О построении таких кривых ср., кроме известного сочинения U. Dini, также E. Steinitz, „Stetigkeit und Differentialquotient", Math. Ann. 52, 1899, стр. 58. [См также: Helge von Koch, „Acta Mat." 30; Faber, „Math. Ann." 69]. Можно было еще полагать, что недифференцируемость обусловливается также наличностью бесконечно многих колебаний в каждом промежутке; по R. Köpcke („Math. Ann." 34, стр 161. 1889) возможна, однако, дифференцируемость и тогда, если в каждом конечном промежутке имеется бесконечно много колебаний.

О современном понятии кривой ср еще J. Pierpoint, „On the arithmetization of mathematics", Bull., Americ. Math. Society, V. 1899, §§ 3 и 4, равно как E. Kasner, „The present problems of Geometry", Bull. Americ. Math. Soc. 11 стр. 283.

124) Ср. напр., F. Klein, „The Evanston Colloquium" Lectures of mathematics, Нью-Иорк 1894, особенно лекция VI, а также стр. 212—233 из книги „Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie", Лейпциг 1902.

125) Ср. об этом кроме M. Pacsh, „Vorlesungen über neuere Geometrie", Лейпциг 1882, также указания Ф. Линдемана в его переводе „La science et L'hypothèse" Пуанкаре, стр. 270.

126) Кроме статьи Ф. Энрикеса в „Энциклопедии" III A, B, I, [русск. пер. „Нов. идеи в матем.", № 9, СПБ. 1914], см. еще сочинения P. Stäckel und F. Engel, „Die Theorie der Parallellinien". Лейпциг 1895 и R. Bonola, „Die nichteuklidische Geometrie", нем. пер. Либмана.

Лейпциг 1908, 2-е изд. 1912. [Р. Бонола, „Неевклидова Геометрия“, СПБ. 1910].

127) Участие Гаусса в развитии геометрии Лобачевского в настоящее время вполне выяснено. В письме к Ф. А. Тауринусу от 8 ноября 1824 г. он пишет: „Вот уже свыше 30 лет, как я занимаюсь этим предметом. Допущение, что сумма трех углов меньше 180°, приводит к совершенно особой и отличной от нашей геометрии... Все мои старания найти противоречия в этой неевклидовой геометрии остались безрезультатными и единственное в ней, с чем не может согласиться наш рассудок, это то, что если она истинна, то в пространстве должна иметься определенная в себе (хотя нам неизвестная) линейная величина“. Равным образом он в письме к Ф. Бесселю от 27 января 1829 г. говорит: „Мое убеждение, что мы не можем обосновать геометрию вполне a priori, еще более укрепилось. При всем том, однако, я, вероятно, долго еще не приступлю к обработке моих обширных исследований для опубликования, и, быть может, оно вообще не последует при моей жизни, так как я боюсь криков беотийцев, если я целиком выскажу свое мнение“. Затем в письме к Шумахеру („Briefwechsel“ т. II, 1831, стр. 260) говорится: „Несколько недель тому назад я все-таки начал записывать кое-что из собственных моих размышлений, которые отчасти достигли уже 40-летнего возраста и которых я ни разу еще не занес на бумагу... Я все-таки не хотел бы, чтобы это погибло вместе со мной“. [Ср. цитир. в примеч. 95 русск. пер., стр. VII].

128) По мнению Канта („Критика чистого разума, учение об элементах“, часть I, отд. I) „пространство есть необходимое априорное представление, лежащее в основе всех внешних наглядных представлений... Пространство, следовательно, следует рассматривать как условие возможности явлений, а не как зависящее от них определение“. С содержащимся здесь и в частностях, пожалуй, подлежащим видоизменению учением о трансцендентальной идеальности пространства соглашается Г. Гельмгольц („Die Tatsachen der Warnehmung. Vorträge und Reden“, т. II, 1878, стр. 217) в виду физиологического закона специфических энергий чувств. Необходимо, однако, отметить, что закон, напр., утверждающий эмпирический факт: „при каждом раздражении зрительного нерва не может получится при его посредстве ничего иного, кроме ощущения света“, коренным образом отличен от Кантовского ответа на теоретико-познавательный вопрос, каким образом возможно, что аподиктические высказывания геометрии, основывающиеся ведь на совершенно особой „переработке“ чувственных впечатлений, вместе с тем могут найти приложение к внешнему миру. О взаимоотношении взглядов Гельмгольца и философии Канта ср. особенно A. Riehl, „Kant et Helmholtz; Revue de métaphysique et de morale“, XII, стр. 570, 1904.

Но засим Гельмгольц выступает против точки зрения Канта, и его взгляды, повидимому, находят много сторонников. По Гельмгольцу, Кант усматривает в том, якобы, факте, что „все геометрические положения имеют аподиктический характер, т. е. связаны с сознанием их необходимости“ доказательство того, что они и в отдельных своих высказываниях даны до всякого опыта, между тем как Гельмгольц считает возможным учение о трансцендентальной идеальности пространства как общей формы наглядного представления (стр. 234, ср. также приложение II, стр. 256), но отнюдь не признает отдельные аксиомы за аподиктические высказывания. По его мнению, „учение Канта об априорно данных формах есть ясное выражение положения вещей. Но эти формы должны быть без содержания и достаточно свободны, чтобы вместить всякое содержание, могущее получить форму восприятия. Аксиомы же ограничивают наглядное представление так, что уже не всякое мыслимое содержание может быть вмещено".

Несостоятельность специальных взглядов Канта на природу аксиом, как синтетическиха приорных положений (напр.: прямая есть кратчайшая линия между двумя точками), к которым Кант, несомненно, отнес бы и аксиому параллельности, явствует из непротиворечивой возможности различных геометрических систем, которые должны были бы основываться на противоречащих друг другу априорных суждениях или наглядных представлениях. При этом взгляде нельзя было бы также провести определенную грань между „очевидными" суждениями и нуждающимися в доказательстве.

Что А. Шопенгауер позднее рассматривал систему Евклида как ненужное софистическое мудрствование по сравнению с суверенными высказываниями априорного наглядного представления, удивляться не приходится. (Это отнюдь не было точкой зрения Канта, который всюду подчеркивает логическую конструкцию элементов общего пространственного воззрения, хотя они сами и занимают у него несколько колеблющуюся позицию. Совершенно иной вопрос, — насколько вышеизложенные возражения способны поколебать основания системы Канта, как это довольно часто утверждают. Если ответ дается отрицательный, то, конечно, необходимо дать иную интерпретацию утверждениям Канта. Насколько это возможно, поныне является спорным, общего соглашения на этот счет еще не достигнуто). — В недавнее время и математики, как, напр., К. Циндлер (Sitznugsb. d. к. к. Wiener Akad., phil.-hist. Klasse 118, 1889, стр. 1) примкнули к этому взгляду, который противоречит стремлению к познанию из возможно меньшего числа недоказанных предпосылок. По его мнению, новейшая геометрия с ее прежним равнодушием к принципиальным изысканиям является дисциплиной, наиболее приближающейся к идеалу математической науки (стр. 43). Этот взгляд, вероятно, разделяется только немногими; лучше всего он опровергается превосходными рассуждениями М. Паша в его „Vorlesungen über neuere Geometrie". Лейпциг 1882. [Нов. изд. 1912].

Быть может, уместно будет затронут еще следующий вопрос. Прежним взглядам на точное наглядное представление по крайней мере простейших геометрических образов (точка, прямолинейный отрезок, ограниченная плоская поверхность, и, пожалуй, также простейшие кривые линии и поверхности, как окружность и сфера) ныне противопоставляется новый взгляд: Мы вообще не имеем наглядного представления даже о простейших образованиях; единственное, что фактически дано нам, есть представление телесного, составленное, однако, из весьма различных психологически-физиологических опытных элементов.

Особенно отстаивает этот взгляд Г. Пуанкаре („La science et l'hypothèse", [русск. пер. стр. 93]; „La valeur de la science" нем. пер. стр. 56 и сл; ср. также подробное трактование этих вопросов у Велльштейна, „Enzyklopädie der Elementarmathematik" II, Лейпциг 1905, стр. 123—147 [русск. пер. Одесса, 1913]); по его мнению, точка есть не что иное, как совершенно абстрактное понятие, получаемое при рассмотрении подгрупп группы движения.

Будут ли эти взгляды долго держаться сказать трудно. Чисто логическую точку зрения современной аксиоматики, на которую математика должна стать, характеризует во всяком случае то, что Гильберт начинает свои „Основы геометрии" следующими словами: „Мы мыслим точки, прямые и плоскости в известных взаимных отношениях, точное описание которых дается в аксиомах геометрии". Таким образом, несомненно удается построить здание науки, формально не нуждающееся более в наглядном представлении и сохраняющее силу для каждого случая, в котором приходится или признается желательным принимать эти неявные определения как правомерно существующие (ср. H. Wiener, „Deutsche Math. Verein." I, 1891, стр. 45). Но если эти аксиомы непосредственно затем называются у Гильберта основными фактами наглядного представления, то здесь, повидимому, все же заключается предпосылка, что для этих логических отношений можно найти наглядный субстрат. А если Ф. Клейн („Zur nichteuklidischen Geometrie", Math. Ann. 37, стр. 571) выставляет прямо как факт, что он „во всяком случае не может вести геометрическое рассуждение чисто логически, не имея постоянно у себя перед глазами фигуры, в которой это рассуждение относится", то отсюда, повидимому, следует, что по крайней мере для простейших образов должно иметься точное, хотя, быть может, и ограниченное представление. Без наличности такового пользование им при исследовании было бы совершенно бесполезно и даже вообще невозможно. Я, по крайней мере, совершенно не могу себе составить представление о каком-нибудь теле, если я не в состоянии различить его границу с другими телами; но это ведет к представлению поверхности, а это, в свою очередь, к линии, линия к точке, хотя бы представление линии или поверхности и было при этом приурочено к совершенно частным случаям. Я усматриваю поэтому психологическое заблуждение в том, что представление тела называют первоначальным, а точку, напр., называют телом, деление которого несовместимо с границами наблюдения, ср., напр., B. Pasch, „Vorlesungen über neuere Geometrie", Лейпциг, 1882, стр. 3.

Но это все вопросы, относящиеся к области, в которой, по выражению Пикара, „рискуешь понимать друг друга только с полу-слова".

[Ср. Богомолов, „Вопросы обоснования геометрии". М. 1913].

129) Гильберт показал в 1901 г. („Grundlagen der Geometrie" Anhang V, стр. 162), что никакая правильная аналитическая поверхность не может вполне служить для изображения плоскости Лобачевского, а что всякая такая поверхность должна иметь особенные точки или линии, мешающие продолжению геометрических построений, с чем мы знакомы уже по простейшим поверхностям вращения этого рода, напр., псевдосфере Бельтрами. Это утверждение может быть распространено даже на известные не аналитические поверхности.

Сфера является, правда, свободной от особенностей поверхностью постоянной положительной кривизны, но она со своей геометрией не образует обратимо-однозначного изображения эллиптической плоскости в смысле Ф. Клейна, который впервые в геометрии пучка лучей раскрыл совершенное отображение эллиптической плоской геометрии Тем замечательнее поэтому, что эта последняя может быть изображена при помощи свободной от особенностей, целиком лежащей в конечном, замкнутой поверхности в смысле Analysis Situs. Это показал W. Boy (диссертация, Геттинген 1901, „Math. Ann." 57, стр. 151), который обратимо однозначно отобразил проективную плоскость на такую поверхность.

130) Данное Клейном обоснование проективного мероопределения (ср. его „Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie", Лейпциг, 1894, а также общие замечания в Math. Ann. 50 стр. 583, по поводу первого присуждения премии Лобачевского, равно как F. Lindemann, „Vorl. über Geometrie", II, I, стр. 432, 1891) принимается ныне и со стороны философов, ср., напр., P. Natorp, „Zu den logischen Grundlagen der Mathematik", Archiv f. syst. Philosophie 2, 7, 1901, стр. 201 и сл. Наторп, правда, не хочет соглашаться с тем, что метрическая геометрия Евклида

подчинена проективной; но это сводится к чистому спору о словах. Его замечания на стр. 382, что в неевклидовых теориях встречаются противоречия последним логическим предпосылкам, напр., непрерывности и однородности пространства, тоже основаны, повидимому, исключительно на недоразумении. Подобного же рода возражения встречаются, несмотря на тщательный обзор чисто математических вопросов, в работе P. Milau, „Beitrag zur Untersuchung der erkenntnistheoretischen Wahrheit der verschiedenen analytisch möglichen Raumformen", Archiv für Math, u Physik 3, 9, 1905, стр. 157 и 345.

В „Logische Grundlagen" Наторп (стр. 309 и сл.) еще более резко формулировал свои взгляды о „необходимости евклидова пространства". Она представляется ему не абсолютной логической необходимостью, не чисто опытным фактом и не гипотезой, а „необходимой" предпосылкой в том определенном смысле, что оно (евклидово пространство) обусловливает „возможный опыт", более определенно: однозначную закономерную определенность существования в опыте. Оно покоится, следовательно, не на необходимости мышления, но на необходимости опытного мышления, мышления существования. Различие коренится в присхождении условия единственности, не каких-либо особенных пространственных определений, а связи всех тех определений, которые в совокупности своей делают возможным закономерное изображение существования вещей. Остается правильным и то, что евклидово пространство есть необходимое условие не (общего дискурсивного) мышления, а „наглядного представления" Но требование единственности само есть требование мышления, но только не мышления вообще, а определеннейшего мышления, мышления существования". (стр. 312). — При наличии столь веских доводов, как ссылка на „определеннейшее мышление и мышление существования" математику остается, впрочем, только умолкнуть.

131) См. примеч. 127.

132) Результаты не-евклидовых теорий, поскольку они относятся к специально математической области, ныне никем не отрицаются; в более общем отношении особенно характерными являются мысли столь выдающегося физика, как Э. Мах, („Erkenntnis und Jrrtum", Лейпциг 1905, стр. 380—414; [„Познание и заблуждение", Москва 1909, стр. 380—420]), о теоретико-познавательном значении этих исследований. С тем большим упорством философы, переставшие уже оспаривать логическую возможность не-евклидовых пространств, продолжают утверждать, что этим последним недостает наглядности.

Под наглядностью в геометрическом смысле нужно, конечно, понимать возможность проверять известные логические утверждения на предметах нашего чувственного восприятия или представления. Что это геометрическое наглядное представление весьма бедно, что оно относится вначале только к известнейшим и простейшим фигурам, это факт, оспаривать который невозможно. Но оно поддается развитию. Всякому известно, с какими своеобразными трудностями связано для начинающего понимание стереометрических теорем. Эти трудности значительно увеличиваются, когда мы хотим ознакомиться с образами, созданными по принципу двойственности, или с природой особенностей алгебраических поверхностей, или когда мы исследуем многосвязные римановы поверхности. Отсюда следует, что о наглядности может судить лишь тот, кто занимался развитием наглядного представления. Но в таком случае построения не-евклидовой геометрии являются столь же наглядными, как и построения евклидовой геометрии.

То, что писатели не специалисты по математике называют не-наглядностью „метагеометрических" изысканий, основывается на том, что они склонны рассматривать предложения не-евклидовой геометрии при свете евклидовой геометрии, изначально предполагаемой безусловно наглядною. Посему еще раз подчеркнем здесь, что в не-евклидовых теориях отнюдь не идет речь о некоем истолковании, возможном только на основании евклидовой геометрии — хотя такого рода изложения и встречаются, — а развиваются системы, совершенно равноправные с евклидовой.

В последнее время В. Вундт („Logik," 3-е изд. 1907, т. I, стр. 478 и след.; [см. русский пер. этой главы из „Логики" в сборн. № 2 „Новые идеи в физике", Спб. 1913, стр. 17 и сл.]), вновь повторил уже ранее им высказанные возражения против не-евклидовых теорий пространства. Первое его возражение, что нам дано только одно вполне определенное пространство, а именно, пространство нашего наглядного представления, и что если в наших чувственных восприятих оказываются отклонения от свойств этого пространства, то их следует понимать не как качественно различные пространства, а как обман чувств, это возражение, по моему мнению, обнаруживает вообще непонимание вопроса, о котором идет речь. Цель математики состоит ведь именно в том, чтобы показать, что о пристранстве, фактически лежащем в основе нашего наглядного представления, не необходимо должно быть высказываемо то, что учит геометрия Евклида. Математика поэтому не противопоставляет пространства последнего фиктивным иным пространствам, но утверждает, что невозможно разрешить, которая аксиома должна быть положена в основание особенной природы пространства наглядного представления.

Если Вундт далее оспаривает наглядность математической теории, потому что она получается только благодаря фикции о существах двух измерений (стр. 482, 484), а это предположение столь же недопустимо, как и ограничение нашего данного пространственного представления плоскостью, то отсюда явствует, что он совершенно упустил из вида общее развитие не-евклидовых соотношений в трехмерном пространстве, как оно дано, например, Ф. Клейном уже свыше 30 лет тому назад.

Математик всегда будет благодарен и признателен, если посторонние помогут ему разобраться в представлениях и понятиях его науки. Но какое применение можно сделать из рассуждений Вундта (стр. 492 и сл.) о пространстве? „Только потому, что пространство есть понятие,— говорится там,—оно может быть определено; наглядное представление, которое не содержало бы никаких логических элементов, не допускало бы никакого определения. Но в это определение не следует включать понятий, которые уже предполагают пространство". Такими (действительно пригодными) понятиями являются величина, направление, непрерывность, изменение, число и т. д.

Напрасны будут все старания отыскать ясный смысл в этих словах. Ибо что такое величина, что такое направление, изменение или непрерывность? Об этом мы ничего не узнаем и из дальнейших слов Вундта: Общее определение пространства, включая основные понятия точки, положения, прямой и пространственных образов может быть поэтому выражено в следующих четырех положениях:

1. Пространство есть непрерывная и безграничная величина, в которой элемент, не поддающийся дальнейшему разложению на составные части, определяется тремя друг от друга независящими переменными направлениями. Неразложимый элемент в пространстве называется

точкой; определение какого-нибудь элемента в пространстве посредством трех независимых направлений называется положением.

2. Любую часть пространства можно мыслить обособленной от остального пространства. Такая обособленная часть пространства (сложный элемент) называется пространственным образом.

3. Всякий пространственный образ можно мыслить в измененном положении, при чем взаимное положение любых взятых в нем точек от этого не меняется. Это свойство пространства называется конгруэнтностью.

4. Ко всякому направлению в пространстве имеется противоположное направление точно такого же положения, и положение двух таких противоположных направлений называется прямой.

Наконец, на стр. 493 говорится: „Пространство есть непрерывная, конгруэнтная в себе, бесконечная величина, в которой неразложимый элемент определяется тремя направлениями. Возможность, таким образом, вполне определить пространство при помощи более общих понятий, несомненно, доказывает, что пространство можно не только наглядно представлять себе, но и логически мыслить. Так как, далее, пространство, как таковое, поскольку мы его мыслим независимым от отдельных пространственных представлений, можно мыслить только в этой логической форме, то чистое наглядное представление, образующее предмет геометрии, на самом деле есть не наглядное представление, а понятие и т. д.

Не здесь место возражать против отдельных выражений в цитированных отрывках. Так, напр., в п. I „направление“ понимается как первоначальное понятие, в свою очередь определяющее положение, а в п. 4 говорится о „положении двух направлений“. Существенным представляется мне следующее. Если пространство есть разложимая на составные части величина (которая, впрочем, называется то безграничной, то бесконечной), то каково должно быть логическое содержание „неразложимого элемента“, которое называется точкой? Так как обособленная часть пространства называется „сложным элементом“, то пространство, повидимому, составлено из точек. Но что нужно в таком случае понимать под непрерывностью? И каким образом этот неразложимый элемент может быть определяем „тремя друг от друга независящими переменными направлениями“, логическое понимание которых остается совершенно загадочным? Можно, конечно, исходя из двух данных точек, определить при помощи направлений (понимая эти слова в обычном смысле) положение точки; но, как это можно сделать при помощи одних „направлений“, этого не узнаем.

И на каком основании можно говорить вообще о направлении, как об основном принципе расположения? Груда однородных монет имеет величину, неразложимым элементом является здесь отдельная монета, точка. Если монеты расположены, то можно говорить о направлении „вперед“ или „назад“, но невозможно говорить о направлениях вообще. Очевидно, в основе этого способа определения точки тремя направлениями лежит скрытая идея координат; но она лишена обоснования, если понятие пространства только надлежит еще описать. Аналогичные возражения против Вундтова анализа пространства высказал уже E. Killing („Einführung in die Grundlagen der Geometrie“ II, стр. 198), но я это прежде упустил из вида.

Так как автор притязает своим изложением устранить логические ошибки в некоторых выражениях Риманна и Гельмгольца, то он сам казалось бы, должен был быть особенно тщателен в выборе своих выражений. На самом же деле примененные им понятия: величина, направление, непрерывность и т. д., относятся к наиболее трудным и невыясненным.

А как осторожно следует обращаться с такими общими выражениями, как непрерывность или сплошность и т. п., покажут еще следующие соображения.

Геометрия Евклида—а о ней, конечно, здесь идет речь—исследует взаимоотношения положений прямых и кривых линий, данных алгебраическими уравнениями между координатами, применительно к метрическим обстоятельствам, зависящим от расстояния, которое само определяется теоремой Пифагора. При всех этих исследованиях вводятся только алгебраические числа и, следовательно, используовывается не пространственный континуум целиком, а только исчислимый алгебраический „континуум первого рода", по обозначению Пуанкаре, так как мы обязуемся принимать за элементы геометрического исследования только такие образы (точки, линии, поверхности), которые определяются алгебраическими уравнениями, с рациональными коэффициентами или в которых определяющие постоянные зависят от таких уравнений.

Это пространство Дедекинда (R. Dedekind, „Was sind und was sollen"... стр. XII [русс. пер., стр. 31], которое можно построить из точек P, отношения расстояния коих от трех точек A, B, C выражаются алгебраическими числами, в то время как отношения AB, BC, CA тоже суть алгебраические числа, было бы достаточно даже для всех геометрических изысканий обыденной жизни; но в нем нам пришлось бы отказаться от представления движения, не-алгебраических чисел и вместе с тем от общей теоретической тригонометрии и, наконец, от методов дифференциального и интегрального исчисления вместе с их приложениями к механике и физике. Ясно отсюда, что не приходится говорить о непрерывности пространства, как о понятии само собой разумеющемся, если заранее точно не указано, что под этим следует понимать.

Да будет позволено коснуться еще следующего вопроса. На стр. 483 Вундт говорит: „Гаусс полагал, что понятие числа есть, независимо от свойств эмпирических вещей, чистый продукт логической функции, а пространственные образы, напротив, суть абстрактные обобщения эмпирических свойств тел. Но различие между понятиями числа и пространства, как его установил здесь Гаусс, на самом деле не существует. Свойства чисел точно в таком же смысле зависят от опыта, как и свойства пространства. Ибо без эмпирического существования раздельных предметов не существовало бы чисел, как не существовало бы пространства геометрии без тел с приближенно плоскими поверхностями" и т. д.

Тривиальную истину, что при отсутствии раздельных чувственно воспринятых объектов, к которым Вундт, впрочем, на стр. 510 причисляет и события, свойства и т. д., не существовало бы повода к счету, никто, конечно, не оспаривает; но что и свойства чисел зависят от опыта в том же самом смысле, как и свойства пространства, отнюдь еще этим не доказано, и голословное утверждение Вундта остается тем менее понятным, что на стр. 510 он прямо-таки говорит: „подлинным носителем понятия единицы является единичный акт мышления функция счета всегда состоит в сочетании единичных актов мышления в сложные единицы", а на стр. 489 у него сказано: „при числе мы обращаем внимание только на акт апперцепции". Но, другими словами, это же значит, что „свойства" чисел уже не зависят от эмпирических предметов, а основываются на обработке апперцепции, поскольку они вообще составляют предмет размышления.

Далее, факт таков, что сочетание этих актов мышления при счете можно произвести вполне определенным и законченным в себе способом, выраженным в арифметических правилах, между тем как логическое применение основных геометрических образов., точки, плоскости и прямой линии, требует всегда, помимо их определений, содержащихся в обычных аксиомах, по меньшей мере еще одной дальнейшей аксиомы, если хотят получить законченную и удовлетворяющую фактическим требованиям геометрию. Вот это именно и „полагал“ Гаусс, и трудно понять, каким образом Вундт мог совершенно этого не заметить.

Так как обстоятельное трактование математики в большом труде столь выдающегося исследователя, как Вундт, представляет большой интерес, то было бы весьма желательно, чтобы компетентные лица дали подробную критику его рассуждений, поскольку они касаются математики. Начало этому положил Г. Бурктардт (см. прим. 46), но Вундт, к сожалению, совершенно не обратил внимания на его обстоятельные замечания. Об этом тем более приходится сожалеть, что, вследствие многочисленных недоразумений, особенно во второй части труда, подробнее занимающейся специальными дисциплинами математики, некоторые сами по себе тонкие и правильные замечания Вундта потеряли, пожалуй, свое значение для математиков, между тем как ведь именно их автор имел в виду, а обоюдное соглашение относительно основных понятий математики как раз в настоящее время представляло бы особенный интерес.

133) Несколько раз пытались подтвердить фактическую истинность евклидовой геометрии при помощи измерений, напр., суммы трех углов треугольника. Гаусс будто бы тоже высказался в этом духе (см. von Waltershausen, „Gauss zum Gedächtnis“, стр. 81). Но уже Гельмгольц заметил, что такого рода измерение,—совершенно независимо от того, что эмпирическим измерением никогда нельзя доказать геометрическую теорему,—всегда основывается на предпосылке о неизменяемости орудий измерения при движении, так что получается логический порочный круг (Helmholtz, „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“, 1870, „Vorträge und Reden“, т. II, стр. 23). Пуанкарэ говорит („Bull. des Sc. Mathém.“, т. 37, 1902, стр. 249): „Многие даже думают, что опыт может дать ответ на этот вопрос. Но это, конечно, значит совершенно превратно понять природу геометрии, которая не есть экспериментальная наука“.

134) В противовес этому Гельмгольц (назв. соч., стр. 259 прил. III к лекции о фактах восприятия) говорит о физической геометрии. Несмотря на обстоятельные соображения, развиваемые по этому поводу Гельмгольцем (стр. 266) в ответ на возражение Ланда (что он спутал понятия объективного и реального), я не могу себе составить отчетливого представления об этой физической геометрии. Несомненно, имеется много так называемых „фактов восприятия“, основывающихся на неопределенной идее о конгруэнтных пространствах и соотношениях в них. Но утверждение, что „аксиомы геометрии определяются не просто формами представляемого, а соотношениями реального мира“, вызовет возражения со стороны каждого, который видит в аксиомах не совсем, конечно, произвольные, ни на чем не основанные логические представления, но все же выходящие за пределы восприятия утверждения нашего логического мышления. Гельмгольц продолжает две стороны „равностороннего треугольника“ за их общий угол и откладывает равные стороне отрезки, так что получается новый треугольник. Будет ли он тоже „равносторонний“? Измерения никогда не разрешат вопрос, а могут только навести на мысль, что треугольник может быть равносторонним. Но при помощи теорем о конгруэнтности и аксиомы параллельности можно показать, что это так должно быть логически, и

лишь теперь мы имеем геометрическое предложение. То, что Гельмгольц называет физической геометрией, составляется из неопределенных образов нашей фантазии, руководимой отдельными восприятиями, образов, чуждых определенности, хотя из подобных им и развивается наука геометрии.

Все положения этой так называемой физической геометрии становятся теоремами геометрической системы лишь, когда мы познаем их необходимость в силу общих принципов нашего мышления. Повторные наблюдения, сколько бы мы ни умножали число их, не могут нас убедить в существовании хотя бы только простейших предложений.

Но, с другой стороны, имеется предварительная ступень образования геометрических идей, которая может быть полезна как пропедевтический предмет преподавания и которую увлекательно изложил, напр., Э. Мах в своей книге „Познание и заблуждение", в главе „К психологии и естественному развитию геометрии" (стр. 347—381 [русск. пер. стр. 355—388]); ср. также изложение Велльштейна в „Энциклопедии элементарной математики", т. II, кн. I, гл. 1 и 2.

135) См. Hilbert, „Grundlagen der geometrie", стр. 18; ср. также F. Hausdorf, „Das Raumproblem", Ann. d. Naturphilosophie, III, p. 1. 1903.

136) См. H. Weber, Enzykl. d. Elementarmathematik, II, стр. 589; H. Poincaré. „La valeur de science" (нем. пер. Лейпциг 1906. стр. 217 и сл.). Впрочем, механика исходит из значительно более специальных предпосылок относительно рассматриваемых в ней геометрических образов.; если кривая образована движением точки в смысле механики и если мы одновременно приурочиваем к ней движение на эволютах этой кривой, то речь идет о допускающих неограниченное дифференцирование кривых, которые в большинстве случаев предполагаются аналитическими.

Но кроме этих логических затруднений, которые можно разрешить только при помощи соответствующих теоретико-познавательных соглашений, имеются еще и некоторые другие причины, затрудняющие именно в настоящее время общее исследование основ механики. В частности я отношу сюда гипотетическое допущение постоянной массы, играющее существенную роль в Ньютоновой механике.

Это допущение, дающее вполне удовлетворительную теорию движения весомой материи в старом смысле (примерно, вплоть до явлений, возникающих при ударе), может быть сохранено, впрочем, и тогда еще, когда речь идет о свободной от весомой материи системе, построенной исключительно по законам теории электромагнитного излучения. Но всякое весомое тело, находящееся в состоянии движения, содержит наряду с энергией своего поступательного движения еще вторую составную часть энергии, а именно, причастную этому движению энергию лучистой теплоты, и эти обе части энергии не могут быть так отделены друг от друга, чтобы одна из них оставалась определенной исключительно обычным понятием массы.

Действительно если определять массу через кинетическую энергию, то в эту последнюю входит часть, зависящая от термодинамического состояния системы и, следовательно, от ее температуры, а в таком случае масса не может быть более рассматриваема как постоянная. Но к тому же результату приходят и в том случае, если определять массу через количество движения.

Если Г. Герц строил еще аналитическую механику на трех основных понятиях пространства, времени и по существу своему постоянного числа, измеряющего массу (это последнее, понимаемое как число атомов в определенном объеме, повидимому, сохранилось еще в его изложении как последний остаток схоластических представлений), то пора в конце концов привыкнуть рассматривать это представление как первое приближение, достаточное, впрочем, для суждения о вопросах, при которых термодинамические условия лишь мало удаляются от некоторого среднего состояния. Эта трудность, по замечанию М. Планка, не может быть устранена и посредством различения истинной и кажущейся массы. Ибо истинная масса, как чисто логическое представление, будет тогда, разумеется, обладать неизменностью, но она окажется не имеющей отношения к кинетической энергии или к количеству движения, от чего механика не может отказаться.

Таким образом, возникает задача такого преобразования механики, чтобы ее основания оказались в согласии с вышеуказанными расширенными заданиями, вытекающими из общего принципа энергии. Ср. недавно опубликованные соображения М. Планка, „Zur Dynamik bewegter Systeme", Ber. d. Berliner Akad. 1907, Wiedemanns Annalen, т. 25, 1908, и Annalen d. Natnrphilosophie, т. VII, стр. 296, 1908.

137) Ср. особенно исследования Г. Гамеля, и его же „Elementare Mechanik", Лейпциг 1912.

138) Ср. A. Voss, „Die Prinzipien der rationellen Mechanik", Enzyklopädie d. Math. Wiss., т. IV, 1. Эта статья, в тщательной и прекрасной обработке E и F. Cosserat, начала печататься в французском издании Энциклопедии.

139) Naturforscherversammlung zu Köln, 1908; Jahresb. d. D. Math. Verein., т. 18, стр. 75, 1909. Г. Минковский, „Пространство и время". Пер. I. В. Яшунский, 2-ое изд. ПГ. 1915; см. пер. той же работы проф. А. В. Васильева в сборн. № 5 „Новые идеи в математике"].

140) E. V. Huntington, „Festschrift zu H. Webers siebenzigstem Geburtstag", Лейпциг 1912, стр. 147. Ср. также появившееся еще раньше и преследующее аналогичную тенденцию основательное изложение H. U. Mangoldt, „Längen-und Zeitmessung in der Relativitätstheorie" Physik. Zeitschrift, т. 11, стр. 737, 1910, а также популярное изложение А. Пуанкарэ, „Новая механика" [2-ое русск. изд., Птг. 1919]. У фон-Мангольдта преобразования имеют такой вид:

$$x = \beta\,(x_1 + vt_1)$$
$$t = \beta\,\left(x_1 \frac{v}{c^2} + t_1\right),$$

где постоянная β при надлежащем выборе единицы времени во второй системе координат связана с постоянной c, изображающей скорость света, уравнением $\beta\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$, а движущаяся система S' (x_1, y_1, z_1) с началом O' перемещается параллельно осям неподвижной системы $S\,(x, y, z)$ так, что O' передвигается по оси x—ов последней со скоростью v. У Хентингтона формулы развиты при несколько более общих допущениях.

141) A. Einstein, „Zur Elektrodinamik bewegter Körper", Ann. d. Physik, т. 17, стр. 891, 1905.

142) В тот момент, когда сигнал, высланный из A во время t_A, со скоростью c, достигнет точки B, часы, согласно определению, показывают там время $t_A + \frac{AB}{c}$ и то же время показывают часы в A. Точно так же обстоит дело для другой точки C, и отсюда следует, что в тот момент, когда часы в A показывают $t_A + \frac{AB + AC}{c}$, стрелки в обоих

точках B и C занимают то же положение. Если теперь из A подать в этот момент сигнал в A_1, то часы в A и A_1 при прибытии сигнала в A_1 покажут время $t_A + \frac{AB + AC + AA'}{c} = (t)_A$; если в этот последний момент, когда часы в B и C показывают одинаковое время $(t)_B = (t)_C = (t)_A$, из B выйдет луч по направлению к C, то он прибудет в C по истечении времени $\frac{BC}{c}$. Следовательно, при подаче сигнала время в B равно $(t)_B$, а в момент приема сигнала часы в C показывают $(t)_c + \frac{BC}{c}$. Но это значит следующее: и по отношению к точке A_1 разница в показаниях стрелок в B и C для моментов подачи сигнала в B и приема его в C равна $\frac{BC}{c}$, другими словами, часы синхронны и для любой точки A_1.

143) Ср. напр., M. Laue, „Das Relativitätsprinzip". Брауншвейг 1911, стр. 89, 133 [имеется 2-ое издание 1913].

144) Ср. обширное трактование у M. Laue и изложение A. Bril, „Das Relativitätsprinzip", Jahresb. d. D. Math Verein., т. 21, стр. 60, 1912 [и отд. изд. Лейпциг 1912; русск. пер. в сборн. № 7 „Новые идеи в математике"].

145) Если приведенные в тексте дифференциальные уравнения движения помножить на косинусы направления a, β, γ, то получится:

$$\frac{1}{k}(aX + \beta Y + \gamma Z) = (ax' + \beta y' + \gamma z')\frac{d\,(\mu k)}{dt} + \mu k\,(ax'' + \beta y'' + \gamma z'').$$

Это значит, что для всех перпендикулярных к скорости v направлений $ax' + \beta y' + \gamma z' = v$ масса есть μk; она называется поперечной массой.

Если, напротив, взять $a\ \beta\ \gamma$ равными $\frac{x'}{v}$, $\frac{y'}{v}$, то получится

$$\frac{Xx' + Xy + Zz'}{vk} = v\frac{d}{dt}(\mu k) + \frac{\mu k}{v}(x'x'' + y'y'' + z'z'');$$

так как теперь

$$\frac{d}{dt}(\mu k) = \frac{vk^3}{c^2}\frac{dv}{dt}$$

и

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = v\frac{dv}{dt},$$

то на правой стороне получается $\mu k^3 \frac{dv}{dt}$, так что за продольную массу надо принять μk^3.

146) Уже A. Зоммерфельд указал на связь между теоремой сложения Эйнштейна и формулами сферической тригонометрии с мнимыми сторонами, а Минковский, введя мнимое время $t = it$, достиг установления связи с не-евклидовой геометрией в пространстве четырех измерений. Ср. особенно F. Klein, „Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe", Jahresb. d. D. M. V., т. 19, стр. 281, 1910, [Ф. Клейн. „О геометрических основаниях лорентцовой группы". „Новые идеи в математике", сборн. № 5]; ср. L. Heffter, „Zur Einführung in die vierdimensionale Welt Mirkowskis", там же, т. 21, стр. 1. 1912. Самое яркое не только формальное не-евклидово истолкование теории относительности дал v. Varičák, там же т. 21, стр. 103, [В. Варичак. О не-евклидовом истолковании теории относительности. „Новые идеи в математике", сборн. № 7].

147) Дедуктивное построение геометрии, а затем уже и арифметики впервые было предпринято, повидимому, итальянскими математиками;

начало ему положили сочинения. Пеано: „Arithmetices principia nova methodo exposita“, I Principii di geometria logicamente exposita, Турин 1889. Всякая наука должна предполагать данными известные последние, не имеющие определений представления. В арифметике они обозначаются известными, не имеющими определений символами, сочетание которых описываются системой постулатов. К этой системе A. Padoa, „Un nouveau systéme irréductible de postulats pour l'algèbre“, Congrés intern. à Paris (1900), предъявляет следующие требования: во-первых, непротиворечивую совместность, во-вторых, неприводимость, в третьих, неприводимость символов в их отношении к системе постулатов.

В Германии исследованиями этого рода занимался преимущественно Гильберт. Если, говорит он („Göttinger Nachrichten“, 1900, стр. 204), хотят построить основы какой-нибудь науки, то нужно построить систему аксиом, содержащих точное и полное описание соотношений, какие существуют между элементарными понятиями этой науки. Выставленные аксиомы суть вместе с тем определения этих понятий, и всякое утверждение правильно только тогда, если его можно вывести из аксиом при помощи конечного числа логических умозаключений. При этом возникает вопрос, не обусловлены ли взаимно некоторые утверждения, содержащиеся в отдельных аксиомах, не зависят ли они друг от друга“. Прежде всего нужно доказать, что аксиомы свободны от противоречий, т. е. что они никогда не приведут к противоречивым утверждениям. Гильберт („Deutsche Math. Verein“ 8, 1900, стр. 180) распределил содержание этих аксиоматических утверждений или постулатов по четырем группам: аксиомы сочетания, исчисления, расположения, непрерывности. В то время как первые три группы повторяют известные законы счета, последняя группа состоит из аксиомы Евдокса и аксиомы полноты системы: „Числа образуют систему вещей, которая при сохранении всех других аксиом не поддается более дальнейшему расширению“. Эта аксиома, повидимому, скорее разрубает гордиев узел, нежели распутывает его, так как она содержит отрицательное утверждение, ничего не дающее для описательного определения основных понятий, а потому она образует только формальное насильственное завершение, которое с трудом навязывается нашему мышлению. Позднее Гильберт пытался логически вывести непротиворечивость основных арифметических законов („Verhandl. d. 3. intern. Math. Kongresses“, Heidelberg 1904, Лейпциг 1905, стр. 174—185), и с тех пор, вероятно, эти исследования подвинулись дальше. Ср. относительно рассуждений Гильберта замечания J. Mollerup („Math. Ann.“ 64, стр. 234, 1907), относящиеся особенно к аксиоме полноты системы.

148) Мы оставляем в стороне основанные всецело на недоразумениях возражения этого рода, принадлежащие А. Шопенгауэру, Гамильтону, Гексли, Оливеру Холмсу и другим (Ср. речь А. Прингсгейма, „Deutsche Math. Verein“, 13, стр. 357 [см. примеч. 156], и C. Keyser, „Mathematics, a lecture delivered at the Columbia university“, Нью-Иорк 1907).

149) См. Poincaré, „La science et l'hypothèse“ [русск. пер., стр. 3, 11 и сл.],

150) Поразительно, что „заключение от n к $n+1$“ появляется в математике лишь очень поздно. По Кантору (II, стр 684) Паскаль высказал его еще до 1654 г., очевидно независимо от Мавролико, который пользовался им уже в своей арифметике 1557 г. Яков Бернулли ввел его затем приблизительно около 1680 г., независимо от Паскаля, в своей „Ars Conjectandi“. Этот метод полной индукции в должной мере был использован собственно только в новейшее время;

отметим только виртуозность, с которой его применили C. Jordan в „Traité des substitutions“, P Gordan в своих исследованиях из области теории инвариантов и H. Weber в своих лекциях по алгебре. В то время как Пуанкарэ считает этот метод характерным для математики синтетическим априорным суждением, другие стремятся указать определенное положение этого начала в логическом построении понятия числа. Так, напр., Г. Фреге в „Grundlagen de Mathematik“, Бреславль 1884, развивает понятие натурального ряда чисел, оканчивающегося на n, „благодаря которому удается привести это заключение к общим логическим умозаключениям“; ту же цель преследует, исходя из теории множеств, Дедекинд в своем известном сочинении „Was sind und was sollen die Zahlen“ (1887; §§ 59 и 80), а также Г. Вебер в „Энциклопедии элементарной математики“ I, стр. 1—12; ср. также обстоятельный разбор выше, в прим. 38.

151) В учении о множествах имеется, впрочем, трансфинитная индукция, пользующаяся понятием предела, которое как категория нашего разума является завершением для ускользающей от нашего наглядного представления вполне упорядоченной закономерной последовательности явлений. Формулированный Г. Кантором принцип этой индукции (ср. F. Hausdorf, Leipz. Ber. 58, стр. 127, 1906) гласит так: Если утверждение $\varphi(a)$ удовлетворяет условиям 1) $\varphi(0)$ правильно, 2) из $\varphi(a)$ следует $\varphi(a+1)$, 3) из $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$ следует $\varphi(a_\omega)$, то $\varphi(a)$ правильно для всякого a; но коль скоро признан предельный процесс для предельного числа a_ω, то мы имеем дело всего только с обычным заключением.

152) Fr. Mayer, „Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik“, ein Beitrag zu der Lehre von den synthetischen Urteilen, Archiv Math. Phys. (3), 8, стр. 287, 1905.

153) Можно было бы указать, что, очевидно, требуется творческая сила для того, чтобы образовать те поразительные комбинации основных представлений, какими являются новые мысли отдельных великих математиков. Таковы, напр., принцип заключения от n к $n+1$, понятие определенного интеграла, Риманнова теория функций, принцип разрывного множителя очень многие вопросы собственно теории чисел, и т. д.; они внезапно, словно молния, освещают пути, остававшиеся до тех пор закрытыми для науки. Но в действительности этим не опровергалось бы возражение в тексте, ибо эти комбинации, однажды построенные, являлись бы уже в свою очередь, само-собою разумеющимися.

154) Ср. соображения Гильберта о развитии математических проблем в его речи на международном математическом конгрессе в Париже, „Götting. Nachrichten phys. math.“ Cl., стр. 257, 1900, а также замечания Шенфлиса, „Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II“, стр. 2: „Ибо непрестанное углубление и расширение математического знания возможно только таким образом, что временами возникают идеи и понятия, выходящие за пределы наличных идей и тем самым вводящие в математику новые аксиоматические основы. Но эти идеи и понятия возникают по существу на интуитивной почве, ибо мы обязаны ими обобщающим стремлениям интеллекта, равно как фантазии, руководимой наглядным представлением. Что критический рассудок должен их подвергнуть проверке и обработке прежде, чем они получат право гражданства в математике, это само собою разумеется.

155) Об этой связи между художественным творчеством и математическим исследованием, которую подчеркнул еще в 1742 г. Maupertuis в своей вступительной речи в парижской академии, ср. данные, приводимые у E. Lampe, „Die Entwicklung der Mathematik im Zusam-

menhange mit der Ausbreitung der Kultur", Festrede Berlin 1893 (Hoffmanns Zeitschrift für Math., год 24, 1893, стр. 287).

156) Особенно ярко это выразил Якоби (C. G. J. Jakobi) в письме к Лежандру от 2 июля 1830 г. („Correspondance math. avec A. Legendre", Journ. f. Math. 80, стр. 272): „Фурье действительно полагал, что главная цель математики состоит в служении обществу и в изъяснении естественных явлений; но такой философ, как он, должен был бы знать, что единственной целью знания является слава человеческого разума, и что с этой точки зрения вопрос о числе имеет такую же ценность, как и вопрос о мировой системе". Таков, несомненно, был и взгляд Гаусса, который называл математику царицей наук, а арифметику царицей математики (см. v. Waltershausen, „Gauss zum Gedächtnis", стр. 79). Под ариѳметикой Гаусс наверно понимал здесь теорию чисел, в которой он сам подвизался с столь крупным успехом. Изыскания о соотношениях между целыми числами обнаруживают характерный парадокс. Так как они покоятся исключительно на закономерном созидании этих чисел и сочетании их в новые числа при помощи операции $+1$, то рассматриваемые соотношения, казалось бы, должны быть совершенно ясны для проницательного интеллекта. В действительности оказывается прямо противоположное. Уже начала теории чисел, затем теорема взаимности Лежандра, превращение квадратной иррациональности в непрерывную дробь, требуют значительных умственных усилий, не говоря уже о трудностях, возникающих по поводу таких вопросов, как распределение простых чисел, доказательство теоремы Дирихле, что в ряду $ar+b$ (a и b числа первые между собой) является бесконечно много простых чисел с поддающимся оценке распределением в данном промежутке, вопросов, решение коих до сих пор удалось лишь благодаря применению высших средств анализа. Здесь видимо заключается указание на то, что даже на простейшие акты деятельности нашего упорядочивающего разума влияют связи, совершенно скрытые от непосредственного познания. Этим, очевидно, объясняется и та особая притягательная сила, какую эта абстрактная математическая дисциплина имеет для лиц, ею занимающихся; в действительности нечто подобное свойственно всем вообще математическим умозрениям; они раскрывают нам истины, которые коренятся в природе нашего духа, а посему обладают абсолютным значением. Нет другой науки, которая по богатству мыслей могла бы в этом отношении сравниться с математикой. Только в области художественного творчества встречаемся мы с аналогичным объективированием нашей подлиннейшей внутренней сущности. Сказанному отнюдь не противоречит и то, что в основных формах, создаваемых человеческой жизнью (семья, государство, культ), мы тоже познаем откровение духа. Мы приведем здесь еще слова А. Прингсгейма („Ueber Wert und angeblieben Unwert der Mathematik", Festrede gehalten in der öffente Sitzung d. bauerischen Akademie d. Wiss. zu München, 14 V. 1904, также Jahresber. der Deutsch. Math. Verein. 13, стр. 357. [„Ценность и мнимая не-ценность математики". „Новые идеи в математике", № 1, ср. стр. 148]): „Глубокое влияние, какое успехи математики оказывают на прогресс естественных наук и усовершенствование бытовых условий, мы рассматриваем исключительно как характерный симптом присущей человеческому духу высшей обязанности — обосновывать законы и взаимоотношения числа и пространственных образов в их самом широком объеме. Математические познания являются для нас поэтому ценными сами по себе".

157) Ср. цитированную уже статью E. Götting, Deutsch. Math. Verein. 11, 1902, стр. 189, дающую, главным образом, методические указания для введения основных представлений новой математики.

158) H. v. Helmholtz, „Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts...“, Берлин 1891, стр. 203.

J. Bernstein („Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht“, год 33, стр. 582), „Ueber den math. u. naturw. Unterricht an den höheren Lehranstalten“. Принимая во внимания специально изучение медицины, он указывает, что такие важные учения, как изображение кривой пульса, кривой сокращения мускулов, давления крови, колебания температуры, не могут быть поняты без начал дифференциального исчисления.

A. Fick, „Ueber die Vorbildung zum Studium der Medizin“. (Gesammelte Schriften, т. II стр. 106, Вюрцбург 1906) замечает, что медицинский факультет боннского университета тоже высказался в том смысле, что при настоящем уровне подготовки по математике невозможно читать специальный курс по физиологии чувств. Ср. дальнейшие статьи Фика, назв. соч., стр. 76, 94, 122. Требования, какие надлежит предъявлять к подготовке лиц, желающих посвятить себя изучению медицины, а также более общая постановка вопроса нашли себе яркое выражение в работах Мюнхенского общества врачей („Münch. mediz. Wochenschrift 19“, 1910), особ. в обширном реферате F. v. Müller'а там-же.

159) Первым толчком, повидимому, была работа Ф. Клейна и Рике о прикладной математике и физике и их значении для средней школы („Vorträge, gesammelt von Klein und Riecke“ Лейпциг 1900), затем последовал доклад Клейна на съезде немецких математиков (Deutsch. Mart. Verein. 11, 1902, стр. 128) о преподавании математики в средних школах; ср. также E. Götting, „Ueber des Lehrziel im math. Unterricht der höheren Realanstalten“ (Deutsch. Math. Verein. 11, 1902, стр. 189). Настоящий интерес к этим вопросам обнаружился особенно со времени бреславльского съезда 1904 г. и затем меранского 1905 г. О дальнейшем историческом развитии см. F. Klein и R. Schimmack, „Der math. Unterricht an der höheren Schulen“, Лейпциг 1907. Со времени последнего международного конгресса математиков в Риме (1908) движение в пользу реформы, к которому математическая педагогика обнаружила исключительный интерес (свидетельством его может явиться и большое число появившихся в Германии учебных руководств и сочинений по дидактике), приобрело особое значение в виду образования международной комиссии по преподаванию математики; последняя поставила себе заданием совместную выработку практических целей и путей, ведущих к их достижению; на конгрессе в Кембридже (1912) эти вопросы подверглись обсуждению при участии значительного числа представителей разных стран Старого и Нового Света [Ср. доклады проф. Д. Н. Синцова о международной комиссии по преподаванию математики в „Трудах I Всеросс. съезда преподавателей математики“, т. III, СПБ. 1913, и в „Докладах, читанных на 2 Всеросс. съезде препод. матем.“, М. 1915. Сведения о работах комиссии регулярно печатались в повременных изданиях, посвященных преподаванию математики. Война 1914 и сл. гг. пресекла работу комиссии. — В трудах Всеросс. съездов преподавателей математики имеется также много другого материала по вопросу о реформе препод. математики].

160) Ср. цитированный выше [прим. 158] реферат Мюллера, обращающий внимание на основательную практическую и теоретическую подготовку к изучению медицины и естественных наук, какую школа дает своим воспитанникам, напр., в Голландии.

161) Название папируса Ринд гласит по Эйзенлору (Комментарий, стр. 27): „Руководство к достижению знания всех сокровенных вещей, всех тайн, содержащихся в вещах“.

162) См. „Космос“ Гумбольдта, Штуттгарт и Тюб, 1847, II, стр. 384.

163) По Вальтерсгаузену („Gauss zum Gedächtniss“, стр. 97) Гаусс понимал это изречение так, что интеллекту, стоящему выше человеческого, под формой числового понятия является и то, что недоступно нашему духу.

164) Можно, впрочем, поставить следующий вопрос, отнюдь не имея этим в виду поколебать указанное моральное убеждение.

Пусть дано известное число неопределенных символов (так как они недвусмысленно известны по их применению к данным объектам) и известное число непротиворечивых постулатов сочетания этих символов. Спрашивается: всякий ли вопрос, который ставится относительно этих символов или объектов, должен необходимо допускать решение при помощи математического доказательства? С несомненностью можно будет ответить на это положительно лишь в том случае, если предположить, что это решение возможно на основании данных в постулатах законов сочетания. Достоверно ли это, напр., для каждого положения из теории чисел, напр., для закона Гольдбаха, что всякое четное число, может быть, представлено по меньшей мере одним способом в виде суммы двух простых чисел, закона, который сначала высказывается эмпирически, но в качестве проблемы? Должен ли для каждого вполне определенного числа существовать метод распознавания, относится ли оно к трансцендентным или к алгебраическим? „При современном состоянии науки“, как принято выражаться, мы не располагаем ответом на это. Но из сказанного явствует, что логического основания рассматриваемое убеждение под собою не имеет, а имеется на-лицо только покоющаяся на опыте уверенность в себе, без которой, однако, вообще невозможно движение вперед.

В последнее время многие занимались доказательством теоремы Ферматa, но пока, повидимому, безрезультатно. При всем том мы не сомневаемся, что на этот вопрос вполне можно ответить, и ответ будет найден, когда настанет время для сего. Прекрасным подтверждением этой мысли является история бесчисленных тщетных попыток решения квадратуры круга; вопрос был окончательно выяснен лишь после того, как Линдеману удалось, идя по стопам Эрмита в его исследованиях о показательной функции, доказать, что π не может быть корнем алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами. Математические доказательства зачастую обретаются вовсе не там, где их ищут, а при изыскании в совершенно других областях. Способность познавать это и связывать между собой, повидимому, не имеющие ничего общего друг с другом рассуждения и объясняет большинство успехов, достигнутых великими математиками; в этой способности и кроется подлинная сила математического творчества.

Указатель имен и предметов.

(Числа означают страницы).

А

Б

В

Г

Д

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

X

Ц

Ч

Ш

Э

Я

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Аурель Эдмунд ФОСС

(1845–1931)

Немецкий математик. В 1864–1868 гг. учился в Геттингенском и Гейдельбергском университетах. Получил в Геттингенском университете степень доктора философии. В 1875 г. занял должность профессора в высших технических училищах — сначала в Дармштадте, потом с 1879 г. в Дрездене и с 1885 г. в Мюнхене. С 1891 г. был профессором в Вюрцбурге, а в 1902 г. вернулся в Мюнхен. Автор нескольких книг и многочисленных статей в области математического анализа, дифференциального и интегрального исчисления, дифференциальной геометрии, механики, истории и методологии математики.

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу **URSS@URSS.ru**. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине **http://URSS.ru**