СОВРЕМЕННЫЕ ОСНОВЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Допущено Министерством просвещения СССР в качестве учебного пособия для студентов педагогических институтов по математическим специальностям

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1980

ББК 22.1
С56

Авторский коллектив:
Н. Я. Виленкин, К. И. Дуничев, Л. А. Калужнин, А. А. Столяр

Рецензенты:
доктор физико-математических наук Е. С. Ляпин; кафедра алгебры Тульского педагогического института (зав. кафедрой А. Р. Есаян).

Современные основы школьного курса математики:
С56 Пособие для студентов пед. ин-тов/ Н. Я. Виленкин, К. И. Дуничев, Л. А. Калужнин, А. А. Столяр.—
М.: Просвещение, 1980.—240с.

В данном пособии показаны роль и место важнейших понятий современной математики в школьном курсе, раскрываются связи между различными разделами математики и содержание теоретико множественного, алгебраического, логического и других аспектов в изложении основ школьной математики

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов педагогических институтов весьма полезна для учителей математики, представляет интерес для всех интересующихся проблемами современной математики

$С\frac{60602-591}{103(03)-80}$ 40—80 4309020400 ББК 22.1
51

© Издательство «Просвещение», 1980 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга является учебным пособием по курсу «Современные основы школьной математики» (СОШМ). Объектом изучения этой дисциплины является курс математики, излагаемый в школе, т. е. так называемая школьная математика. Учебная дисциплина «Методика преподавания математики» тоже имеет своим объектом изучения школьную математику. Однако эти две дисциплины изучают школьную математику с различных точек зрения, т. е. имеют различные предметы изучения.

Предметом курса СОШМ является анализ школьной математики с точки зрения: а) изучения отраженных в ней фундаментальных математических идей: множества, отношения, математической структуры, изоморфизма, алгебраической операции и т. д., б) научного анализа понятий функций, величины, числа, алгоритма, фигуры, играющих столь важную роль в школьной математике, в) изучения языка, применяемого в школьной математике, г) анализа логических основ школьной математики. При этом курс СОШМ не касается методов формирования и развития этих идей и понятий в школьном обучении, не рассматривает вопрос о том, как преподавать математику в школе на базе этих идей, понятий, языка и логических основ. Эти вопросы должны изучаться в курсе «Методика преподавания математики».

Таким образом, основная задача курса СОШМ — дать возможность будущим учителям математики увидеть преподаваемый ими предмет с высшей точки зрения, позволяющей объединить разрозненные факты, привести их в систему на базе общих математических и логических идей, служащих современными основами школьной математики.

Предполагается, что читатель книги уже прослушал основные математические курсы, входящие в учебный план пединститута («Математический анализ», «Алгебра и теория чисел», «Геометрия», «Математическая логика», «Числовые системы»), и знаком с изученными в этих курсах понятиями и утверждениями. Однако, чтобы облегчить чтение курса, некоторым главам книги предпосылается сводка основных определений и утверждений, касающихся изучаемого в этой главе материала.

Работа авторов над текстом распределялась следующим образом: главы I—IV написаны Н. Я. Виленкиным, причем в главе I использованы материалы, принадлежащие А. А. Столяру. Первые два параграфа главы V написаны К. И. Дуничевым, а третий параграф той же главы — Н. Я. Виленкиным. Первоначальный текст главы VI написан А. А. Столяром, а главы VII — А. А. Столяром и Л. А. Калужниным. Эти главы были обработаны Н. Я. Виленкиным с учетом материалов, предоставленных в его распоряжение старшим преподавателем Рязанского пединститута А. Х. Назиевым, которому авторы выражают искреннюю благодарность.

При написании главы I были использованы статьи А. Д. Александрова и А. Н. Колмогорова [3], [4], [5], [7], исторические очерки Н. Бурбаки [14], статьи и книги К. А. Рыбникова [8], [49]. В главах II и IV использованы книга К. Куратовского и А. Мостовского [34] и книга С. Фефермана [54]. В главе VI часть материала опирается на книги С. Клини [31] и А. Черча [58]. Некоторые понятия (например, «направленная полугруппа») принадлежат авторам книги, равно как и трактовка понятия положительной скалярной величины, несколько отличающаяся от предложенной академиком А. Н. Колмогоровым [3].

Авторы выражают благодарность рецензентам книги профессорам М. Д. Гриндлингеру и Е. С. Ляпину и доцентам С. И. Рабиновичу и А. Р. Есаяну за ценные замечания, позволившие устранить недостатки, имевшиеся в первоначальном тексте.

Просим присылать замечания о возможных недостатках и упущениях по адресу: 129846 Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

Глава I

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

§ 1. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕЕ ХАРАКТЕРНЫЕ ЧЕРТЫ

1. **О методологии математики**. Перед каждым, кто изучает математику, применяет ее или готовится обучать других математике, естественно возникают вопросы о предмете математики, об отношении этой науки к реальной действительности, о путях возникновения и развития математических понятий и теорий, о сущности математических абстракций, о соотношении дискретного и непрерывного. Эти и близкие к ним вопросы образуют предмет методологии математики. Важной частью методологии математики является учение о методе, о специфическом для этой науки способе исследования объективной реальности. Здесь рассматриваются такие вопросы, как методы построения абстракций, определение логических связей различных разделов математики, совокупность требований к логической структуре математики в целом или ее отдельных частей, понятия существования и истины в математике и т. д.

Однако этими вопросами проблемы методологии математики не исчерпываются — к ней относится также изучение всей совокупности методов познания, применяемых в математике. Чтобы осмыслить эту совокупность, необходимо рассмотреть ее в ходе исторического развития математики, исследовать не только внутренние проблемы математической науки, но и ее связи с другими науками и с различными сторонами деятельности человеческого общества.

С еще более широкой точки зрения методология математики понимается как философское учение о методах познания и преобразования действительности, как применение принципов мировоззрения к процессу познания и к практике. При таком понимании предмета методологические проблемы получают общефилософское истолкование, методология математики рассматривается в связи с универсальной методологией, изучающей самые общие законы развития природы, общества и мышления — в связи с марксистско-ленинской философией, с диалектико-материалистическим мировоззрением.

В этой главе мы рассмотрим некоторые вопросы методологии математики. Знание этих вопросов необходимо будущему учителю, чтобы он умел связывать свою работу и ее результаты с практикой, подчинять эту работу общим задачам развития нашего общества. Оно позволит ему, работая с абстракциями, формальными методами и моделями, характерными для современного этапа развития математики, видеть за ними реальную действительность, изучение которой привело к созданию этих моделей и абстракций, и в то же время понимать относительную самостоятельность математики как особой формы познания действительности.

2. Предмет математики. Математика, как и другие науки, изучает действительный, материальный мир, объекты этого мира и отношения между ними. Однако в отличие от наук о природе, исследующих различные формы движения материи (механика, физика, химия, биология и т. д.) или формы передачи информации (информатика, теория автоматов и другие разделы кибернетики), математика изучает формы и отношения материального мира, взятые в отвлечении от их содержания. Поэтому математика не изучает никакой особой формы движения материи и, следовательно, не может рассматриваться как одна из естественных наук.

Во второй половине XIX в. Ф. Энгельс дал следующее определение предмета математики: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал». При этом он указывал: «Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне, как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины, разные a и b, x и y, постоянные и переменные величины»[1].

Из этих слов Энгельса вытекает, что исходные понятия математики, бывшие предметом изучения с самого зарождения математической науки, — натуральное число, величина и геометрическая фигура — заимствованы из действительного мира, являются результатами абстрагирования отдельных черт материальных объектов, а не возникли путем «чистого мышления», оторванного от реальности. В то же время, для того чтобы стать предметом математического исследования, свойства и отношения материальных объектов должны быть абстрагированы от их вещественного содержания.

Таким образом, специфика математики состоит в том, что она выделяет количественные отношения и пространственные формы, присущие всем предметам и явлениям, независимо от их вещественного содержания, абстрагирует эти отношения и формы и делает их объектом своего исследования.

Приведенное выше определение предмета математики было дано Ф. Энгельсом более 100 лет назад. Протекшее с тех пор столетие характеризуется бурным развитием естественных и общественных наук, невиданным ростом техники, возникновением новых областей знания. Сейчас происходит математизация многих областей знания, до того считавшихся чисто гуманитарными (лингвистика, социология, экономика). Появление быстродействующих вычислительных машин усилило интеллектуальную мощь человека при выполнении вычислительных и логических процедур.

---

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд., т. 20, с. 37.

Необходимость решать новые задачи повлекла за собой создание новых областей математики (топология, общая алгебра, функциональный анализ, математическая логика и т. д.) и перестройку всего здания математики, качественное изменение взглядов на роль и сущность этой науки, на ее место среди других наук. В результате указанных процессов оказалось необходимо уточнить данное Ф. Энгельсом определение математики. Об этом будет подробнее сказано в п. 6, § 2.

3. **Характерные черты математики.** Отметим следующие характерные черты математической науки:

1) Математика изучает абстрагированные свойства предметов — числа, а не совокупности предметов, геометрические фигуры, а не реальные тела. При этом математика абсолютизирует свои абстракции: возникшие в ходе ее развития математические понятия в дальнейшем закрепляются и рассматриваются как данные. Например, хотя теперь известно, что свойства реального пространства отличны от предполагавшихся Евклидом, построенная им геометрия сохранила свое значение, как одна из возможных моделей реального пространства. Сравнение результатов, полученных в математике, с реальной действительностью является задачей не столько математики, сколько ее приложений.

2) Основным методом получения математических результатов является логический вывод, не опирающийся на экспериментальную проверку.

3) Как следствие этого имеет место непреложность математических выводов. Если приняты исходные посылки, то полученные из них математическим путем результаты непреложны. Если же результаты расходятся с опытом, то следует подвергнуть исследованию принятые посылки.

4) Абстракции, возникающие в математике, развиваются ступенчато — от абстракций, непосредственно обобщающих свойства реальных предметов, к абстракциям столь высокого уровня, как топологические пространства, общие алгебраические системы, алгоритмы и т. д.

5) Математика обладает свойством универсальной применимости. В любой области, где только удается математически поставить задачу, математика дает результат с точностью, соответствующей точности постановки задачи. При этом, чем более отвлеченными от содержания являются используемые в исследовании понятия и методы, тем шире область возможных применений этих методов. Однако эта универсальность не является абсолютной — сама возможность применения математических методов предполагает известный уровень абстрактности данной науки. Кроме того, ошибочность принятых положений не может быть исправлена сколь угодно тонким математическим анализом.

6) Наконец отметим, что математика занимает особое положение в системе наук — ее нельзя отнести ни к гуманитарным, ни к естественным наукам. Она дает те основные понятия, которые используются почти во всех науках. Такие понятия, как «множество», «структура», «система», «изоморфизм» и т. д., впервые возникшие в математике, сейчас приобрели статус общенаучных понятий.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

1. Введение. В школьном курсе математики сейчас мирно уживаются разделы математической науки, возникшие на протяжении ее многотысячелетней истории. Например, арифметика была (по крайней мере, в своей практической части) создана более 5 тыс. лет назад египетскими и вавилонскими писцами и жрецами; геометрия в значительной части восходит к трудам древнегреческих ученых, развивавших эту науку в VII—III вв. до н. э.; начала алгебры можно усмотреть еще в трудах вавилонских математиков, а ее дальнейшее развитие связано с именами арабских ученых IX—XIII вв. н. э. и европейских алгебраистов XVI—XVII вв.; формулы дифференцирования и интегрирования были выведены в конце XVII в. Ньютоном и Лейбницем, а понятия теории множества в основном сформулированы в работах Г. Кантора, относящихся к концу XIX в.

Чтобы разобраться в этом конгломерате идей и понятий, необходимо знать основные этапы развития математики, понимать, как математика постепенно расширяла свой предмет в процессе исторического развития. Историю математики условно разбивают на четыре основных периода, причем начало каждого периода ознаменовалось выдающимися научными достижениями, определявшими переход математики в новое качественное состояние.

2. Зарождение математики. *Период зарождения математики* начался с древнейших времен и закончился в VII—V вв. до н. э. Это был период накопления фактического материала, тесно связанного с потребностями хозяйственной жизни — развитием ремесла, земледелия, обмена и торговли, исчислением податей, обеспечением войска продовольствием и оружием, измерением площадей земельных участков и объемов сосудов и т. д. Накопленные эмпирические знания подвергались систематизации, что привело к выделению особого вида понятий и методов решения задач, явившихся зачатками будущей математической науки.

Уже в этот период формируются три основные понятия, изучение свойств и взаимосвязей которых легли в основу дальнейшего развития математики: *число*, *величина* и *геометрическая фигура*. Пересчет элементов конечных множеств (убитых на охоте зверей, сделанных горшков, изготовленных стрел и т. д.), а также упорядочивание этих элементов привели к возникновению понятия натурального числа, как количественного, так и порядкового. Сравнение масс различных предметов, объемов сосудов, расстояний и т. д. привели к понятию величины. При этом первоначально величины различного вида рассматривались раздельно, так что точнее было бы сказать не о величине, а о величинах (например, меры массы не были связаны с мерами объема). Наконец, изучение формы изделий, зданий, земельных участков и т. д. привели к понятию геометрической фигуры — части геометрического пространства (само слово «геометрия» означает землемерие).

Уже в глубокой древности были введены арифметические действия над натуральными числами, отражавшие операции над конечными множествами. Далее была установлена связь между натуральными числами и величинами — в некоторых случаях измерение данной величины определенной единицей давало ответ в виде натурального числа. В случаях, когда результат измерения не выражался натуральным числом, либо переходили к более мелкой единице измерения, либо выражали результат измерения дробью. Во всех практических задачах для выражения результатов измерения величин было достаточно дробей. С помощью наблюдений и простейших рассуждений люди пришли к формулам для вычисления геометрических величин — длин, площадей и объемов различных фигур. Тем самым был перекинут мост между арифметикой и геометрией. Более того, можно сказать, что в этот период геометрия и арифметика не разделялись, геометрические задачи ставились как особого вида задачи на вычисление.

В дошедших до нас древнеегипетских папирусах и древневавилонских клинописных табличках уже содержатся правила выполнения арифметических действий, вычисления геометрических величин, методы решения типовых арифметических задач (некоторые из которых и сейчас встречаются в школьных задачниках), таблицы квадратов, кубов, обратных величин и т. д. Не только понятия натурального числа и измерения величины свободно использовались в то время, но и были созданы некоторые общие методы решения арифметических задач, которые можно назвать «праалгеброй», — вместо привычного сейчас использования букв давались образцы решения задач.

Все это свидетельствует о довольно высоком уровне абстрактного мышления тогдашних математиков, которые выделили три центральных понятия: «фигура», «величина» и «число», нашли некоторые классы геометрических фигур (квадрат, прямоугольник, треугольник, прямоугольный параллелепипед, шар и т. д.), отметили типичные связи величин в материальном мире, зафиксировав их в виде типовых задач.

Решение практических задач потребовало умения обозначать натуральные числа и дроби, воплощать понятие числа в определенных символах. Были разработаны различные системы счисления, тесно связанные со счетом на пальцах (десятичная, двадцатеричная), а также двенадцатеричная и шестидесятеричная системы счисления, которые были очень удобны, так как давали возможность делить «круглые» числа без остатка на 3 (происхождение этих систем счисления не установлено до конца историками науки).

Вавилонские ученые умели решать уравнения первой и второй степеней (а в некоторых случаях — и более высоких степеней), решать задачи на прогрессии и т. д.

Однако, несмотря на накопление известного теоретического материала, математика того времени еще не была дедуктивной наукой — наряду с результатами, полученными путем тех или иных выводов, она содержала много эмпирических результатов, часть которых была даже ложной. Например, в некоторых древнеегипетских папирусах утверждается, что площадь произвольного четырехугольника равна произведению полусумм длин противоположных сторон.

Задачи в древнеегипетских папирусах классифицировались не по методам решения, а по содержанию (задачи на припек, на емкости сосудов и т. д.). Вместо доказательств писалось: «Делай, как делается», т. е. основой было не логическое рассуждение, а ссылка на авторитет предшественников. Основной задачей обучаемого было не понимание правил, а их запоминание.

3. Математика постоянных величин. Второй период развития математики известен в литературе как *период математики постоянных величин* (или *элементарной математики*). Он начался в VII в. до н. э. и закончился в XVII в. н. э. Основным достижением математической мысли, характеризующим начало этого периода, было возникновение и развитие понятия о доказательстве. Греческие математики сознательно стремились расположить математические доказательства в такие цепочки, чтобы переход от одного звена к следующему не оставлял никакого места сомнениям и заставлял всех с ним согласиться.

К сожалению, до нашего времени не дошли тексты, по которым можно было бы судить о возникновении этого «дедуктивного метода». Традиция называет первым из философов, применившим в математике доказательства, греческого ученого Фалеса из Милета (города в Малой Азии), жившего в VII—VI вв. до н. э. По дошедшим до нас сведениям, Фалес доказал некоторые простейшие геометрические утверждения: равенство углов при основании равнобедренного треугольника, равенство вертикальных углов, один из признаков равенства треугольников, равенство частей, на которые диаметр разбивает круг, и т. д.

Созданный Фалесом метод логического доказательства математических утверждений был развит и усовершенствован учеными пифагорейской школы в период между концом VI в. и серединой V в. до н. э., которые доказали, в частности, утверждение, называемое теперь *теоремой Пифагора* (формулировка этого утверждения была известна еще вавилонянам).

Пифагорейцы предприняли первую попытку свести геометрию и алгебру того времени к арифметике. Они считали, что «все есть число», понимая под словом «число» лишь натуральные числа. В частности, они были долгое время убеждены, что длины любых отрезков соизмеримы друг с другом, а потому для измерения любых величин достаточно рациональных чисел.

Поворотным пунктом было открытие пифагорейцами того, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. Это открытие, сделанное на основе теоремы Пифагора, показало несостоятельность попытки свести всю геометрию к натуральным числам. Анализ полученного доказательства привел к исследованию начальных вопросов теории чисел (четности и нечетности простых чисел, разложения чисел на простые множители, свойств взаимно простых чисел и т. д.).

После работ Пифагора стало ясно, что не все величины выражаются рациональными числами. Поскольку понятие иррационального числа не могло быть создано в ту эпоху, греческие математики предприняли иную попытку — обосновать всю математику на основе геометрических понятий. Они стали развивать геометрическую алгебру, истолковывая, например, сложение величин, как сложение отрезков, а умножение — как построение прямоугольника с заданными сторонами. При этом говорили о равенстве отрезков, а не о равенстве их длин, поскольку длина отрезка выражается числом, а числа были изгнаны из древнегреческой математики. Следы такого подхода к алгебре сохранились в современных терминах *квадрат числа*, *куб числа*, *геометрическое среднее*, *геометрическая прогрессия* и т. д.

Древнегреческие математики продвинулись очень далеко. Они провели, например, классификацию квадратичных иррациональностей, открыли все виды правильных многогранников, вывели формулы для объемов многих тел, исследовали разнообразные кривые линии (эллипс, гиперболу, параболу, спирали). Выдающуюся роль в формировании математики как теоретической науки сыграла знаменитая книга Евклида «Начала» [26], представлявшая синтез и систематизацию основных результатов древнегреческой математической мысли и длительное время служившая источником знаний и образцом строгого математического изложения.

Книга Евклида является первой из дошедших до нашего времени попыток аксиоматического изложения математической дисциплины. Хотя во времена Евклида не вставал еще вопрос об описании логических средств, применяемых для извлечения содержательных следствий из аксиом, в системе Евклида была уже четко проведена основная идея получения всего основного содержания геометрической теории чисто дедуктивным путем из небольшого числа утверждений — аксиом, истинность которых представлялась наглядно очевидной.

В XIX в. было показано, что список аксиом Евклида неполон и многие теоремы он доказывал, привлекая утверждения, не вошедшие в этот список. Не было у Евклида и аксиом порядка. Признаки же равенства треугольников доказывались на основе понятия наложения фигур, т. е., по сути дела, на основе идеи движения, относящейся скорее к механике, чем к математике.

В течение двух тысячелетий основное внимание критиков и комментаторов Евклида было направлено на аксиому о параллельных, поскольку предполагалось, что ее можно доказать на основе остальных аксиом. Лишь открытие в начале XIX в. неевклидовой геометрии показало безнадежность попыток такого доказательства.

На формулировку аксиом Евклида сильное влияние оказали длившиеся долгое время споры между сторонниками и противниками атомизма. Атомисты (Демокрит, Левкипп) утверждали, что материя состоит из неделимых атомов, причем существует предел делимости пространства (т. е. что и пространство состоит из неделимых далее частиц). Их противники полагали, что пространство безгранично делимо и потому недопустимо считать, что линии состоят из точек, поскольку точки не имеют ни частей, ни размеров, а линии имеют определенную длину.

Хотя атомисты достигли больших успехов в геометрии (например, Демокрит вывел формулу объема пирамиды), их попытки дать логическое обоснование геометрии не увенчались успехом. Дело в том, что из атомистических воззрений вытекала соизмеримость любых двух отрезков, а это противоречило известной уже в то время теореме о несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. В то же время

Евклиду удалось построить логически замкнутую систему геометрии, в которой считалось, что любой отрезок безгранично делим, а потому не существует неделимых элементов пространства.

Книга Евклида подвела также итог длительному развитию идеи бесконечности, приведшему к формированию, с одной стороны, понятия о бесконечном ряде натуральных чисел, а с другой — понятия о безгранично делимых геометрических фигурах (отрезках, кругах и т. д.). Однако бесконечность понималась лишь как потенциальная возможность продолжать определенный процесс (прибавления единицы к натуральному числу, деления пополам отрезка и т. д.). Идея об актуальной (законченной) бесконечности изгонялась из работ Евклида и его последователей (Архимеда, Аполлония и др.). Эта идея была дискредитирована в результате открытия греческим философом Зеноном затруднений, к которым вело ее использование. Например, Зенон «доказывал», что стрела не может пролететь свой путь, поскольку она должна сначала пролететь половину пути, а до этого — половину половины и т. д. — значит, она никогда не сдвинется с места.

Поэтому формулы для объема шара и конуса, площади круга и т. д. излагались без применения предельного перехода, без разложения на бесконечно малые части, хотя для отыскания этих формул математики применяли «запрещенные приемы». Архимед решил такие сложные для тогдашней математики задачи, как отыскание объема сегмента параболоида вращения и площади сектора архимедовой спирали.

Недостатком геометрического подхода к математике было то, что он препятствовал развитию алгебры (хотя греки и умели, например, в геометрической форме решать квадратные уравнения) — невозможно было представить геометрически четвертую и высшие степени длины, а, кроме того, нельзя было складывать выражения разных степеней: эта сумма геометрического смысла не имела.

По той же причине в греческой математике не было отрицательных чисел и нуля, иррациональных чисел и буквенного исчисления. Лишь в III в. н. э. в работах александрийского математика Диофанта появляются зачатки буквенного исчисления. Но этим работам не суждено было иметь продолжения в греческой математике, так как после принятия христианства в V в. н. э. языческая культура, составной частью которой была математика, оказалась разрушенной, а в 529 г. император Юстиниан под страхом смертной казни запретил занятия математикой.

Центр математических исследований переместился на Восток — в Индию, Китай и арабский мир. Индийские математики ввели нуль и отрицательные числа, проводили исследования по комбинаторике (Ариабхатта, V в. н. э.). Основной заслугой арабских математиков (аль-Беруни, Омар Хайям, Гиясэддин Джемшид, IX—XIII вв. н. э.) следует считать развитие тригонометрии (в связи с астрономическими исследованиями) и, особенно, создание новой области математики — алгебры.

Алгебра, которую теперь рассматривают как общее учение о формальных действиях и их свойствах, появилась у арабов как наука о решении уравнений. Само слово «алгебра» арабского происхождения и означало «восстановление», т. е. перенос отрицательных слагаемых в другую часть уравнений.

С начала XIII в. вновь возрождаются математические исследования в Европе. Но лишь в XVI в. были получены первые научные результаты, превзошедшие достижения греков и арабов, — итальянские математики дель Ферро, Тарталья, Кардано, Феррари и др. вывели формулы для решения уравнений третьей и четвертой степеней. Одновременно с этим формируется система алгебраических обозначений, словесная алгебра постепенно заменяется буквенной. В начале XVII в. в трудах французских и английских математиков (Виета, Декарта, Гэрриота) завершается развитие алгебраической символики, создаются правила буквенного исчисления. Одновременно с развитием символики происходит расширение понятия о числе: еще в середине XVI века в математике окончательно утверждаются отрицательные числа, а вскоре за тем появляются и комплексные числа (хотя они долгое время не находили признания, поскольку не допускали истолкования известными в то время средствами). При этом оказалось, что правила буквенной алгебры в равной мере применимы к числам любого вида.

Важнейшую роль сыграли работы итальянского ученого Бомбелли (XVI в.) и французского математика Р. Декарта (XVII в.), которые фактически ввели идею действительного числа, освободив тем самым алгебру от несвойственной ей геометрической одежды. Пользуясь этим, Декарт, в отличие от греческих математиков, сводивших алгебраические проблемы к геометрии, начал алгебраически решать геометрические задачи. Этим было положено начало *аналитической геометрии*.

4. Математика переменных величин. Началом третьего периода развития математики следует считать работы Р. Декарта, в которых он ввел понятие *переменной величины*. Ф. Энгельс писал по этому поводу[1]:

«Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика*, и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем».

Под влиянием запросов практики математики XVII в. переходят от изучения постоянных величин к исследованию зависимостей между переменными величинами, т. е. к математическому описанию движения и других процессов. Таким образом, третий период развития математики является *периодом математики переменных величин*.

Одним из основных достижений этого периода явилось введение общего *понятия функции*, сделанное в конце XVII в. немецким математиком и философом Г. В. Лейбницем. В этом понятии нашла свое отражение общефилософская идея о всеобщей связи явлений материального мира.

---

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч., 2-е изд., т. 20, с. 573.

Следует отметить, что математические понятия переменной и функции представляют собой не что иное, как абстракции конкретных переменных величин (координат, скорости и ускорения движущегося тела и т. д.) и конкретных зависимостей между ними (например, законов движения планет вокруг Солнца или законов свободного падения). Значениями математической переменной являются числа, служащие отвлеченным образом значений любой переменной. Исследование общих свойств зависимостей между переменными величинами привело к созданию математического анализа.

Рассматривая вопросы геометрии и механики в конце XVII в., английский физик и математик И. Ньютон и почти одновременно с ним Г. В. Лейбниц создали *основы дифференциального и интегрального исчислений*. Они и их ученики развили аппарат математического анализа, ставший одним из основных орудий в решении задач механики и гидродинамики, астрономии и оптики. Триумфом методов математического анализа явилось предсказание возвращения в 1759 г. кометы Галлея. Математический анализ был в ту эпоху основным каналом связи математики с естествознанием. Большие успехи в этом направлении были достигнуты в XVIII—XIX столетиях: математики научились решать *уравнения в частных производных*, к которым сводились многие вопросы математической физики, создали *вариационное исчисление*, позволившее решать экстремальные задачи, недоступные для первоначальных методов математического анализа, нашли истолкование и приложения для комплексных чисел. Большую роль в этих исследованиях сыграли работы члена Петербургской Академии наук Л. Эйлера.

Следует отметить также возникновение и развитие *теории вероятностей*, первые работы по которой появились в XVII в. Большой вклад в нее сделали русские математики XIX в. П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов и др.

5. Современный период развития математики. Для рассмотренных выше трех периодов развития математики характерна убежденность в том, что эта наука непосредственно отражает свойства реального мира, лишь в несколько идеализированной форме. Ни у кого не возникало сомнения в том, что существует лишь одна геометрия, данная на все времена Евклидом и непосредственно отражающая свойства реального пространства, что свойства производной полностью совпадают с известными из физики свойствами скорости. Иными словами, считали, что математические объекты нам даны и не в нашей власти приписывать им произвольные свойства, так же как физик не может изменить какое-нибудь природное явление. При таком подходе не могло быть и речи об уклонении от изучения чисел и фигур.

Однако еще в конце XVII в. Лейбниц указывал на иные задачи математической науки. Он считал, что «универсальная математика — это, так сказать, логика воображения» и она должна изучать «все, что в области воображения поддается точному определению». Главной частью так понимаемой математики была для него наука об абстрактных соотношениях между математическими объектами, наука, в которой изучают одинаковое и различное, похожее и непохожее, абсолютное и относительное расположения, в то время как обычная математика занимается большим и малым, единицей и многим, целым и частью. Лейбниц ставил и задачу о развитии операций над высказываниями. Но уровень математической науки в то время был еще недостаточен для решения столь грандиозных задач.

Лишь в начале XIX в. появляются первые работы, давшие новый толчок математической мысли в направлении исследования предмета математики и знаменовавшие зарождение нового, четвертого периода истории математики. Первый удар классическим концепциям нанесло построение в 20-х годах XIX в. гиперболической неевклидовой геометрии, сделанное великим русским математиком Н. И. Лобачевским и независимо от него (хотя и несколько позже) венгерским ученым Я. Больяй.

Открытие неевклидовой геометрии потребовало отказа от претензий предшествующих веков на «абсолютную истинность» евклидовой геометрии, от точки зрения на аксиомы как на истины, не требующие доказательства в силу своей очевидности. Оказалось, что аксиомы скорее являются гипотезами, и речь идет о том, насколько построенные с их помощью модели соответствуют материальному миру. Это послужило стимулом к глубоким исследованиям в области оснований математики, к критике системы аксиом Евклида, к выяснению того, какими свойствами может и должна обладать система аксиом. В дальнейшем это привело к созданию *аксиоматического метода*, ставшего теперь одним из ведущих методов познания не только в математике, но и в иных математизируемых дисциплинах (математической экономике, математической лингвистике и т. д.).

Важным этапом в развитии новых взглядов на математику явились исследования Римана, показавшие неограниченное разнообразие геометрических пространств, отличающихся друг от друга размерностью, формулами для вычисления расстояний и т. д. Стали изучаться и пространства с комплексными координатами, а также пространства, элементами которых являются не точки, а прямые, окружности, сферы и даже функции и последовательности (функциональные пространства). Изучение *функциональных пространств* в дальнейшем привело к созданию новой ветви математики — *функционального анализа*, в котором геометрические понятия и идеи применяются для решения задач математического анализа.

Следует отметить, что восхождение от чувственного осязаемого, реального пространства к абстрактным математическим пространствам не означало отхода математики от отображения реального действительного мира. Например, при создании в начале XX в. теории относительности были использованы геометрические идеи, разработанные за полвека до того Б. Риманом, а в квантовой механике используют бесконечномерные пространства и линейные операторы в этих пространствах.

Качественные изменения произошли в начале XIX столетия и в алгебре. В XVI—XVIII вв. алгебра занималась в основном решением уравнений и систем уравнений, а также правилами преобразований буквенных выражений, причем буквы в этих выражениях означали некоторые числа. Таким образом, алгебра той эпохи была в своей основе учением об общих свойствах арифметических действий над числами, учением о формальных правилах преобразования выражений и решения уравнений.

Однако к середине XIX в. понятие исчисления было расширено. Различного вида операции начали производить не только над числами, но и над векторами, кватернионами, матрицами, логическими высказываниями и т. д. Правила этих действий отличались от привычных правил действий над числами. Изучение таких исчислений привело к необходимости исследовать общие свойства алгебраических операций в произвольных множествах.

Изучение различных операций сочеталось с изучением таких алгебраических структур, как *группы* и *кольца*, а позднее — *поля*, *решетки* и т. д. Эти структуры первоначально возникли из конкретных задач алгебры и геометрии. Например, понятие группы было введено в 30-х годах XIX в. Э. Галуа в связи с задачей о разрешимости уравнений в радикалах.

В дальнейшем предметом алгебры становится изучение разного рода алгебраических структур, порождаемых в множествах введением различных операций. Этим значительно расширилось поле приложения алгебраических методов. Одна и та же алгебраическая теория (например, теория групп, теория коммутативных групп, теория колец, теория полей и т. д.), описывающая определенный род алгебраических структур, может применяться к любой структуре этого рода, в какой бы предметной области она ни встретилась.

В конце XIX в. идеи теории групп стали применяться в геометрии. Этот подход в геометрии был впервые сформулирован в 1872 г. немецким математиком Ф. Клейном в его знаменитой *Эрлангенской программе*. Геометрия рассматривается Клейном как наука, изучающая свойства фигур, не изменяющиеся при преобразованиях из той или иной группы. Выбирая различные группы геометрических преобразований (группы перемещений, подобий, аффинную, проективную, конформную и т. д.), можно получить различные геометрии. А поскольку отыскание инвариантов данной группы является алгебраической задачей, то была установлена новая связь между алгеброй и геометрией.

Глубокие сдвиги произошли и в области математического анализа. В ходе развития математики в XVIII в. не придавалось большого внимания строгости рассуждения. Это привело к целому ряду неясностей и даже к «скандалам в математике». Поэтому пришлось критически пересмотреть основные понятия математического анализа, начиная с понятия действительного числа. Лишь во второй половине XIX в. это понятие оказалось «арифметизировано», т. е. сведено к понятию натурального числа. Наряду с действительными числами в математическом анализе начинают применять и комплексные числа, что привело к созданию новой ветви математики — *теории функций комплексного переменного*.

Критическому анализу были подвергнуты такие понятия математического анализа, как «предел функции», «непрерывность», «производная», «интеграл». Им были даны определения, отличавшиеся большей строгостью и общностью. Это позволило заметить, что, например, понятия функции и геометрического преобразования весьма близки друг к другу, и применить идею непрерывности в случаях, весьма далеких от наглядности. Были уточнены понятия длины, площади и объема и расширена область их применимости.

Исследования по теории интеграла и рядов Фурье привели к детальному изучению разрывных функций, а позднее — к появлению теории точечных множеств, т. е. множеств, состоящих из точек координатной прямой или плоскости.

Дальнейшее развитие *теории множеств* показало ее приложимость к самым различным вопросам математики — алгебры и геометрии, математического анализа и теории вероятностей. Общие методы и понятия теории множеств позволили охватить с единой точки зрения области математики, казавшиеся весьма удаленными друг от друга, дали возможность сравнивать мощности различных множеств, т. е. как бы «градуировать бесконечность».

Все сказанное привело к формированию нового взгляда на предмет математики — стало ясно, что она изучает различные структуры, которые могут встречаться в различных предметных областях. Выявились общие идеи, лежащие в основе различных областей математики. Начиная с этого момента выход на арену аксиоматического метода становится общепризнанным фактом.

Важную роль в распространении этих идей сыграло завершение работ по аксиоматизации евклидовой геометрии. После критического анализа аксиом Евклида первая полная система аксиом была создана немецким ученым М. Пашем. В 1894 г. появилась книга Д. Гильберта «Основания геометрии» [22]. В этой книге аксиомы геометрии были разбиты на группы и был исследован вопрос об их независимости, для чего Гильберт построил самые разнообразные «геометрии», совсем непохожие на евклидову. Таким образом, в области, рассматривавшейся до того, как одна из наиболее близких к действительности, была показана возможность построения науки, исходя из произвольно выбранных постулатов. Разумеется, этот произвол не следует понимать слишком буквально — плодотворными оказываются лишь те системы аксиом, которые правильно отражают те или иные стороны действительности.

После указанных выше работ сложилась концепция математики, которую академик А. Н. Колмогоров характеризует следующими двумя тезисами:

А) *В основе всей математики лежит чистая теория множеств.*

Б) *Специальные разделы математики занимаются структурами, принадлежащими к тем или иным специальным родам структур. Каждый род структур определяется соответствующей системой аксиом. Математика интересуется только теми свойствами структур, которые вытекают из принятой системы аксиом, т. е. изучает структуры только с точностью до изоморфизма.*

Точка зрения, выраженная в этих тезисах, получила наиболее полное отражение в работах группы современных французских математиков (А. Вейль, Ж. Дьедонне и др.), публикующих свои труды под общим псевдонимом «Николя Бурбаки». Ими выпускается многотомное издание «Элементы математики», в котором наиболее важные разделы современной математики рассматриваются с указанной выше точки зрения (это издание еще далеко от завершения). Поэтому такую точку зрения часто называют «бурбакистской», хотя в ее формировании важную роль сыграли труды многих математиков XIX и XX вв., писавших задолго до появления книг Н. Бурбаки.

Важной вехой в развитии теории вероятностей было создание аксиоматики этой науки А. Н. Колмогоровым. Благодаря этому было показано, что теорию вероятностей можно рассматривать как теорию мер особого вида, и потому к ней применимы методы теории функций действительного переменного.

Систематическое применение аксиоматического метода позволило выявить связи между областями математики, казавшимися очень далекими друг от друга, найти пути преодоления тенденции к расщеплению математики на почти независимые области и укрепить тем самым единство математической науки. Оно дало ряд важных результатов благодаря выявившейся возможности применять методы, выработанные в одних областях математики, к иным областям, связанным с ними единством структуры.

6. Характерные черты современной математики и перспективы ее развития. Развитие математики и расширение области ее применения показали, что в материальном мире существует ряд объектов и отношений, математическое описание которых не сводится в чистом виде к количественным отношениям и пространственным формам. Выявилась роль таких математических структур, как *эквивалентность*, *порядок*, *близость* и т. д. При этом стало ясно, что такие структуры одинаково проявляют себя в различных предметных областях. Оказалось далее, что наряду со структурами, непосредственно отражающими объекты и отношения реального мира, для многих приложений нужны абстракции более высокого уровня.

Все это привело к тому, что данное Ф. Энгельсом определение предмета математики было уточнено и приведено в соответствие с современным состоянием науки — теперь речь идет не только о количественных отношениях и пространственных формах материального мира, а о любых формах и отношениях, взятых в отвлечении от их содержания. Но и эти абстрактные формы и отношения имеют в конечном счете прообразы в реальном мире.

Таким образом, в предмет математики теперь входят любые формы и отношения действительного мира, которые объективно обладают такой степенью независимости от содержания, что могут быть от него полностью отвлечены и отражены в понятиях с такой ясностью и точностью, с сохранением такого богатства связей, чтобы дать основания для чисто логического развития теории.

При этом в математике сейчас изучаются не только понятия, возникшие при рассмотрении реальных объектов, но и свойства «мыслимых объектов» (например, шаров или спиралей в бесконечномерном пространстве), математика изучает логически возможные чистые формы, системы отношений. Главное в определении Энгельса, а именно то, что математические понятия связаны с материальным миром, а не являются продуктом деятельности «чистого сознания», сохранилось и теперь.

Предмет математики нельзя ни подменять формальными логическими схемами, ни низводить до уровня коллекции разрозненных фактов. Математика есть учение об общих формах, свойственных реальному бытию, она создает постоянно развивающиеся теории, пригодные для самых различных запросов естествознания и техники. Именно это позволяет применять математические методы, разработанные при решении задач одной области науки, к совершенно непохожим на них задачам, относящимся к совсем иным областям знания.

Все сказанное показывает, что для современной математики характерен весьма общий подход к предмету исследования. Она абстрагируется как от конкретной природы объектов, так и от конкретного содержания отношений между ними. Для нее важна лишь структура этих отношений. Роды структур, изучаемые современной математикой, могут порождаться во множествах различной природы отношениями, отличными от количественных (в обычном их понимании). Абстрактные математические пространства отражают определенные формы действительности, однако эти формы действительности не обязательно совпадают с пространственными формами в обычном их понимании.

Таким образом, расширение предмета математики привело к существенному расширению самого понятия количественных отношений и пространственных форм. Содержащееся в определении Ф. Энгельса выражение «количественные отношения и пространственные формы» теперь следует понимать в более широком смысле, чем оно понималось в период классической математики.

Следует отметить, что, несмотря на кажущуюся абстрактность многих разделов современной математики, она находит обширные применения в самых разных областях науки.

Серьезный толчок расширению области применения математики дало создание во второй половине XX в. быстродействующих вычислительных машин. Сейчас, когда их быстродействие измеряется многими миллионами операций в секунду, а память огромна, с помощью таких машин можно решать задачи, о которых раньше невозможно было и мечтать, настолько большой вычислительной работы они требуют. В настоящее время вычислительные машины рассчитывают пути космических кораблей, позволяют моделировать работу атомных реакторов, применяются для составления экономических планов и в автоматических системах управления (АСУ), находят применения в военном деле, управляют самолетами и т. д. Они во много миллионов раз ускоряют формирование, поиск и обработку информации. Трудно назвать область человеческой деятельности, не связанную так или иначе с применением этих машин.

Создание быстродействующих вычислительных машин сделало «прикладными» некоторые области математики, которые казались раньше весьма далекими от какой-либо практики. В частности, весьма важной для приложений оказалась *математическая логика*, возникли новые отрасли математики (*теория кодирования*, *теория информации*, *теория алгоритмов*, *теория автоматов*), так или иначе связанные с вычислительными машинами. Бурное развитие получила *конечная математика*, связанная с изучением конечных множеств, почти заново была создана *вычислительная математика*. На многие классические разделы математики пришлось смотреть под иным углом зрения. Все это позволяет говорить о начале нового, пятого периода в развитии математики, периода *машинной математики*.

Таким образом, математика сейчас переживает период бурного развития, диктуемого быстрым расширением областей ее применимости к различным областям знания и техники. Как и в предыдущие периоды, это развитие идет в следующих направлениях:

1) нахождение новых результатов в рамках уже определившихся понятий — доказательство новых теорем о числах, функциях и т. д.;

2) расширение предмета математики, связанное с включением в нее новых форм и отношений;

3) развитие новых общих методов решения задач и доказательства теорем;

4) восхождение к новым абстракциям, введение новых абстрактных понятий;

5) углубление основных понятий, таких, как понятие множества, алгоритма, доказуемости и т. д.

Мы видим, что развитие математики не сводится к количественному росту, но включает глубокие качественные изменения. При этом, если последовательность развития математики определяется в значительной степени объективной логикой предмета (в этом находит свое отражение относительная самостоятельность математической науки), то темпы роста диктуются общими условиями, в частности потребностями научно-технической революции.

Развитие математики является естественным ответом на все возрастающую сложность и трудность проблем, с которыми она имеет дело. Поскольку такие проблемы прямо или косвенно возникают при решении задач других областей науки, эта сложность математических проблем отражает все возрастающую сложность и разветвленность современного естествознания и наук об обществе.

Как и ранее, развитие математики в настоящее время происходит в процессе борьбы многих сплетающихся в ней противоположностей: конкретного и абстрактного, частного и общего, формального и содержательного, аксиоматического и конструктивного, конечного и бесконечного, дискретного и непрерывного. Эта борьба противоположностей, развертывающаяся по законам, открытым материалистической диалектикой, приводит к их постоянному разрешению и восстановлению на все более приближающихся к действительности ступенях познания, ко все более глубокому и полному познанию объективной реальности, идущему по восходящей линии.

Указанные выше и иные противоречия математической науки являются следствиями ее основного противоречия. Математика изучает отношения и формы, абстрагируясь от содержания. Но формы и отношения не существуют вне содержания, а потому математические формы и отношения не могут быть абсолютно безразличны к содержанию. Это и есть коренное противоречие в сущности математики, которое наряду с противоречивостью понятия бесконечности является внутренней движущей силой ее развития.

Как перед самой математикой, так и перед исследованиями по ее основаниям лежит путь бесконечного развития и уточнения, а окончательное решение проблем оснований математики так или иначе упирается в отношения этой науки к действительности.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОЗНАНИЯ

1. Математика и действительность. Материальный мир состоит из объектов, обладающих определенными свойствами и находящихся в определенных соотношениях друг с другом. В процессе развития эти объекты взаимодействуют, видоизменяются, утрачивая одни свойства и приобретая другие. Одной из важнейших задач человеческого познания является изучение объектов материального мира, их свойств, взаимоотношений, взаимодействий, путей их видоизменения, с тем чтобы использовать это знание для решения практических задач.

На разных этапах развития математики в ней вырабатывались специфические методы, характеризующие процессы математического осмысления определенных фрагментов разнообразных пространственных форм и количественных отношений материального мира. Использование математических методов в различных науках позволяет вскрыть структурную общность законов, лежащих в основе описания различных явлений и процессов, при всей несхожести областей, в которых действуют эти законы.

Роль математики в естествознании и гуманитарных науках заключается в том, что она предлагает весьма общие и достаточно четкие модели для изучения окружающей действительности в отличие от более расплывчатых качественных моделей, характерных для доматематического этапа развития данной науки.

Изучение сложных проблем современной науки и техники в настоящее время стало невозможным без построения упрощающих, огрубляющих, формализующих, охватывающих лишь одну сторону явления *моделей*. Появление таких моделей в какой-либо области науки показывает, что система понятий этой отрасли достигла такой стадии, что может быть подвергнута строгому и абстрактному, т. е. математическому, изучению. Если естественнонаучные открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства окружающего мира, то математические открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства рассматриваемых моделей мира и позволяют создать новые модели.

2. Математические модели действительности. Одним из наиболее плодотворных методов математического познания действительности является построение *математических моделей* изучаемых явлений. Математическая модель — это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Построение математических моделей является мощным методом познания внешнего мира, прогнозирования явлений и управления различными процессами

Метод моделирования широко применяется в самых разнообразных областях науки Например, при изучении колебаний физического маятника создается модель явления, в которой пренебрегают сопротивлением воздуха и трением в точке подвеса, гибкостью нити, конечностью размеров самого маятника Возникающая при этом модель получила название *математического маятника* Размеры груза математического маятника считаются нулевыми (изучаются колебания материальной точки), нить считается абсолютно жесткой, сопротивление воздуха и трение в точке подвеса полагаются равными нулю Это позволяет получить математическую модель явления — написать дифференциальное уравнение

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

несущее всю информацию о движении такого идеализированного маятника Разумеется, как сам математический маятник, так и описывающее его движение дифференциальное уравнение являются лишь моделями реально протекающего процесса Однако эти модели охватывают многие качественные стороны явления, а учет отброшенных сторон явления привносит лишь определенные поправки к полученной качественной картине

Современный этап математизации таких наук, как экономика, социология, биология, лингвистика и т д, характеризуется широким использованием математических моделей различной сложности Следует иметь в виду, однако, что отображение мыслью всякого явления, всякой стороны, всякого момента действительности огрубляет, упрощает его, выхватывая его из общей связи природы В то же время оно может придать изучаемому явлению дополнительные свойства, отсутствующие у самого явления Например, идея измерения величины, отправляясь от наблюдаемого факта делимости однородных объектов на равные части, приводит к модели, основанной на идее безграничной делимости величин, что противоречит молекулярному строению вещества

При построении математических моделей всегда приходится пренебрегать теми или иными сторонами действительности, благодаря чему полученная модель отнюдь не эквивалентна изучаемому явлению Лишь сравнение с действительностью результатов, полученных путем изучения модели, позволяет судить о качестве этой модели, границах ее применимости Каждая модель применима лишь в определенных рамках Например, при измерении малых участков земной поверхности можно использовать модель евклидовой плоскости эти участки мало отличаются от плоских При увеличении размеров участков до стран и континентов приходится использовать более точные модели — сначала сферической геометрии, потом геометрии на эллипсоиде вращения, и, наконец, на трехосном эллипсоиде По мере уточнения модель усложняется, отражая все новые стороны изучаемого явления

Итак, математика исходит из практики, создавая математические модели явлений, и возвращается к ней, показывая возможность применения результатов, полученных на основе изучения этих моделей.

В последние десятилетия описанная выше схема связи между математикой и другими науками стала меняться в сторону расширения влияния математики не только на решение вопросов конкретных наук, но и на постановку этих вопросов. Например, некоторые понятия квантовой механики или квантовой теории поля невозможно сформулировать, не используя математического языка.

3. Понятия числа, фигуры и множества как примеры математических моделей. К построению математических моделей явлений, основанному на отвлечении от всех свойств предметов, кроме их количественных отношений и пространственных форм, человечество прибегало с первых шагов развития математики. Одним из первых достижений на этом пути было создание понятия натурального числа. Оно появилось, по-видимому, на довольно позднем этапе возникновения мышления, поскольку предполагает уже развитую способность к созданию абстрактных понятий. В процессе практической деятельности люди пришли к абстрагированию такого общего свойства конечных множеств, каким является их численность. Чтобы усмотреть, что между множеством, состоящим из шести рыб, и множеством, состоящим из шести звезд, есть что-то общее, нужна уже высокая степень умения абстрагироваться от второстепенного, умения выделять главное. Этнографы нашли племена, в языках которых существует много видов числительных — числительные для множеств живых существ отличаются от числительных для множеств плодов, орудий охоты и т. д. Хотя эти племена и подошли к понятию числа, оно не получило у них должной общности.

Процесс создания понятия числа был сложным и длительным. На первом этапе устанавливалась равночисленность различных множеств, а общее свойство равночисленных множеств еще не отделялось от конкретной природы сравниваемых множеств (например, знали, что два рыболова поймали поровну рыб, но не выражали этого каким-либо числом). На втором этапе численность одних множеств выражается через численности других множеств,т. е. общее свойство равночисленности начинает осознаваться как нечто отличное от конкретной природы самого множества.Однако в качестве эталонов выступают еще различные множества, состоящие из камешков, раковин, пальцев и т. д. На третьем этапе определенное множество (например, множество пальцев на руках и на ногах) начинает выступать в качестве своеобразного единственного эталона количества, что позволяет выделить общее свойство численности, отличное от всех особенных свойств множеств. На четвертом этапе общее свойство всех эквивалентных множеств абстрагируется (отвлекается, отделяется) от самих множеств и выступает в «чистом виде», т. е. как абстрактное понятие натурального числа. Теперь уже в качестве эталона численности выступают сами натуральные числа и говорят не «рука яблок», а «пять яблок» (впрочем, в слове «пять» сохранилось воспоминание о «пясти», т. е. о ладони, сравните слово «запястье»). Далее происходит отвлечение от реально существующих ограничений счета и возникает понятие о сколь угодно больших числах, о развертывающемся в бесконечность натуральном ряде чисел. Наконец, возникает абстракция бесконечного множества натуральных чисел. Объектом науки становятся свойства элементов этого множества, в отвлечении от тех предметов, пересчет которых привел к созданию понятия числа. Возникает система чисел с ее свойствами и закономерностями.

Создание такого понятия натурального числа, при котором этих чисел оказалось бесконечно много, носило поистине революционный характер. При этом, возникнув как инструмент в познании мира, понятие натурального числа стало предметом исследований, приведших к выявлению скрытых, но объективных свойств этого понятия (например, бесконечности множества простых чисел, бесконечности множества «пифагоровых троек чисел» и т. д.).

Понятие числа, возникшее как математическая модель операции пересчета предметов, само становится основой для построения новых математических моделей. Хотя свойства чисел раскрываются в отношениях одних чисел к другим, но не в отношениях этих чисел к реальному миру, каждое свойство натуральных чисел допускает конкретную реализацию в виде свойств совокупностей реальных объектов. Это связано с тем, что свойства и отношения в множестве натуральных чисел являются отвлеченными образами свойств и отношений множеств, состоящих из конкретных предметов.

На этом примере хорошо видны этапы конструирования математической модели реального явления: после долгого эмпирического знакомства с явлением возникает сначала его конкретная модель (пальцы рук и ног моделируют численности различных множеств), потом от этой модели переходят к мысленной модели — натуральным числам и, наконец, изучают эту модель и применяют ее для построения других моделей.

Похожий путь прошли в своем развитии и такие геометрические понятия, как «прямая линия», «плоскость», «шар», «цилиндр», «пирамида» и т. д. Сначала люди сталкивались с различными телами, имевшими форму, похожую на те или иные фигуры, и стали классифицировать тела по их форме. Говорили — имеет такую же форму, как натянутая нить или как еловая шишка («конос»), или как столик для еды («трапецион») и т. д. В дальнейшем при изготовлении предметов им старались придать ту или иную форму. Таким образом, сначала придавали форму тем или иным предметам, а лишь потом стали осознавать форму как то, что может быть рассмотрено в отвлечении от материала, из которого изготовлен предмет. Далее, возникли понятия геометрических фигур (конуса, пирамиды и т. д.), отвлеченные от реальных прообразов этих фигур. Они являлись математическими моделями, к изучению которых приводилось изучение реальных тел, мало отличающихся от этих фигур.

Дальнейшее развитие привело к расширению класса тел, используемых для построения таких моделей (параболоиды вращения, эллипсоиды и т. д.), а после создания аналитической геометрии математики получили возможность строить бесконечное множество самых разнообразных моделей тел, используя задание геометрических фигур уравнениями и неравенствами. В свою очередь, геометрические фигуры стали моделями уравнений и неравенств — читателю известно, насколько удобен, например, геометрический язык в линейной алгебре.

Следует иметь в виду, что одно и то же явление, одна и та же сторона материального мира может описываться различными моделями. Например, геометрическая структура материального мира может быть описана как геометрией Евклида, так и геометрией Лобачевского, причем на определенном уровне экспериментальной проверки обе модели дают результаты, одинаково хорошо согласующиеся с действительностью.

Одной из наиболее абстрактных моделей действительного мира, в которой отвлекаются от всех свойств предметов, кроме принадлежности их одному и тому же классу, является понятие *множества*.

Поразительным фактом, установленным в последние десятилетия, оказалось то, что у такого, казалось бы, наглядного понятия, как «множество», существуют различные математические модели. Это особенно важно потому, что теория множеств дает универсальную систему понятий, охватывающую все математические теории и широко используемую для построения математических моделей.

4. Абстракция отождествления. Построение любой математической модели начинается с абстрагирования. Процесс абстрагирования в математике имеет свои характеристические особенности, он отличен во многом от аналогичного процесса в других науках, поскольку способы абстрагирования в науке зависят от природы изучаемых объектов, характера и целей их изучения.

Наиболее распространенными видами абстракций в математике являются: *абстракция отождествления* (обобщающая), *идеализация* и различные *абстракции осуществимости*.

Основные особенности абстракции отождествления хорошо видны на описанном выше процессе формирования понятия числа. Такая абстракция начинается с установления отношения эквивалентности в исследуемом множестве объектов (подробнее об этом отношении и его роли в классификации объектов см. п. 3 § 4 главы II). При установлении отношения эквивалентности в каком-нибудь множестве эквивалентные объекты отождествляются по какому-нибудь свойству, которое абстрагируется от остальных свойств этих объектов и становится самостоятельным абстрактным понятием, находящимся на более высокой ступени абстракции, чем объекты, от которых оно было абстрагировано.

Так, отношение равночисленности множеств объединяет в один класс все конечные множества, между которыми можно установить биективное соответствие. В результате этого отождествления от множеств, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности, абстрагируется их общее свойство, характеризующее этот класс, присущее всем множествам этого класса и не присущее никаким иным множествам. Это свойство и является самостоятельным понятием натурального числа, выражающего численность множеств данного класса.

Поскольку при абстракции описанного вида множества, предметы и т. п. отождествляются по определенному свойству или набору свойств, общему для всех объектов, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности, такая абстракция получила название *абстракции отождествления*. Абстракция отождествления применяется не только в математике, но и в других науках при создании общих понятий.

5. Идеализация и ее роль в математике. Наряду с абстракцией отождествления при построении математических моделей действительности широко используется и такой специфический прием абстрагирования, как *идеализация*.

Здесь под идеализацией понимается образование новых понятий, которые наделены не только свойствами, отвлеченными от их реальных прообразов, но и воображаемыми свойствами, отсутствующими у исходных объектов. Это делается для того, чтобы посредством изучения идеализированных образов облегчить в конечном счете изучение их реальных прообразов. Как уже отмечалось выше, такой метод моделирования применяется и в других науках (например, при замене физического маятника математическим).

Многие исходные понятия различных областей математики представляют собой такие идеальные понятия. Нигде в природе не встречается «геометрическая точка», не имеющая размеров, но попытка построения геометрии, не использующей этого понятия, не приведет к успеху. Точно так же невозможно развивать геометрию без таких идеализированных понятий, как *прямая линия*, *плоскость*, *шар*, *параллелограмм* и т. д. Все реальные прообразы шара имеют на своей поверхности выбоины и неровности, но если бы геометры стали заниматься такими выбоинами и неровностями, они никогда не смогли бы получить формулу для объема шара. Эта формула в применении к реальным фигурам, похожим на шар, дает некоторую погрешность, но полученный приближенный ответ достаточно точен для практических потребностей.

В геометрии к полученным после идеализации геометрическим фигурам применяют далее абстракцию отождествления. Так, отождествляя все шары, получают общее понятие шара, отождествляя все треугольники, — общее понятие треугольника и т. д.

Связь идеальных объектов математики с действительностью более сложна, чем в естественных науках. Это явилось причиной многочисленных попыток неправильного истолкования предмета математики, отрыва ее от реального мира. Например, некоторые биологи считали применение математических методов в биологических науках «идеалистически-математическим». Развитие науки опровергло эти заблуждения.

Попытки исказить природу математического знания возникали и внутри самой математики. Например, авторы, пишущие под псевдонимом Бурбаки, полагают, что «то, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, — это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого...».

Если вспомнить, что основные понятия математики уходят своими корнями в реальный мир, то вряд ли можно удивляться, что они оказываются полезными при исследовании этого мира. И разумная идеализация реальных объектов и процессов — мощный метод познания действительности. В целом можно сказать, что идеализация используется прежде всего там, где сложность реальных явлений или процессов мышления представляет значительные трудности для исследования.

Особым видом идеализации является абстракция *потенциальной осуществимости*. Например, при построении натуральных чисел абстрагируются от того, что невозможно написать или назвать число, содержащее слишком много (например 10^{1000}) десятичных знаков. Всякий раз, когда мы доходим до некоторого числа n, допускается возможность написания и следующего за ним числа $n + 1$. Точно так же при изучении геометрии вводится абстракция потенциальной осуществимости безграничного деления геометрических фигур, при которой пренебрегают тем, что реальные тела имеют молекулярную структуру.

Абстракция потенциальной осуществимости приводит к абстракции *потенциальной бесконечности*. Натуральный ряд чисел мыслится потенциально бесконечным. С этой точки зрения процесс его построения незавершим, предполагается лишь, что после каждого шага процесса мы располагаем возможностями для осуществления следующего шага.

Можно мыслить натуральный ряд чисел и как законченный объект, что соответствует другой абстракции — *актуальной бесконечности*.

Перечислим важнейшие особенности математической абстракции, отличающие процесс абстрагирования в математике от аналогичного процесса в иных науках:

а) По сравнению с естествознанием процесс абстрагирования в математике идет значительно дальше. В известном смысле слова можно сказать, что там, где естествознание останавливается, математическое исследование только начинается.

б) Абстрагирование в математике чаще всего выступает как многоступенчатый процесс. Поэтому в математике весьма часто встречаются абстракции от абстракций.

в) Во всей истории математики можно выделить три больших этапа в развитии ее абстракций: на первом этапе отвлекаются от конкретной, качественной природы объектов, на втором стали отвлекаться от конкретных чисел и величин, на третьем этапе, связанном с переходом к современной математике, стали отвлекаться не только от конкретной природы объектов, но и от конкретного смысла отношений между ними.

г) В математической абстракции широко используются идеальные объекты.

д) Многие системы абстракций в математике, возникнув на базе опыта или даже в процессе чисто логического развития теории, не требуют в дальнейшем обращения к опыту.

Математические абстракции являются важным моментом в познании действительности. К ним, как и к другим абстракциям в науке, применимы слова В. И. Ленина[1]: «Человек не может охватить„="отразить„="отобразить природы *всей*, полностью, ее «непосредственной цельности», он может лишь *вечно* приближаться к этому, создавая абстракции, понятия, законы, научную картину мира...»

Как уже отмечалось выше, широкое использование в математике абстрактных понятий приводит к использованию для их изучения особых методов познания. Одним из важнейших методов познания в математике является аксиоматический метод.

§ 4. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

1. Аксиоматический метод в математике. Поскольку математика изучает формы и отношения, отвлекаясь от их содержания, все математические доказательства проводятся путем логического рассуждения. Но если теорема A выводится из теоремы B, а теорема B — из теоремы C и т. д., то получается «бесконечное возвращение назад». Такая же ситуация возникает при попытке давать определения новым понятиям, основываясь на ранее введенных понятиях. Чтобы избежать такого «бесконечного возвращения назад», применяют следующий метод: некоторые понятия и связывающие их отношения считают неопределяемыми, исходными, а все дальнейшие понятия и их свойства выводят из исходных путем точных определений и логических рассуждений. Подобный стиль построения научных дисциплин получил название *аксиоматического метода*. Как уже говорилось выше, первой дошедшей до нас попыткой такого изложения математической дисциплины была книга Евклида «Начала».

В настоящее время аксиоматический метод стал одним из основных при построении математических моделей действительности. Как пишут наиболее верные приверженцы этого метода — группа авторов Н. Бурбаки, «аксиоматический метод берет за точку опоры убеждение в том, что если математика не является нанизыванием силлогизмов в направлении, избранном наугад, то она тем более не является более или менее хитрым искусством, состоящим из произвольных сближений, в котором господствует одна техническая ловкость. Там, где поверхностный наблюдатель видит лишь две или несколько теорий, совершенно отличных друг от друга по своему внешнему виду, и где вмешательство гениального математика приводит к обнаружению «неожиданной помощи», которую одна из них может оказать другой, там аксиоматический метод учит нас искать глубокие причины этого открытия, находить общие идеи, скрывающиеся за деталями, присущими каждой из рассматриваемых теорий, извлекать эти идеи и подвергать их исследованию». Далее они пишут: «В доказательствах какой-либо теории аксиоматика стремится разъединить главные пружины фигурирующих там рассуждений; затем, беря каждое из соответствующих положений изолированно и возводя его в общий принцип, она выводит из них следствия; наконец, возвращаясь к изученной тео-

[1] Ленин В. И. Полн. собр. соч , 5-е изд., т. 29, с. 164.

рии, она снова комбинирует предварительно выделенные составные элементы и изучает, как они взаимодействуют между собой», [14].

Такой метод приводит к тому, что свойства и отношения, казавшиеся совершенно различными, оказываются лишь различными формами одних и тех же свойств и отношений, имеющих место в абстрактной системе, воплощениями которой являются данные конкретные системы. Это позволяет получать из каждой теоремы о соответствующей абстрактной системе ряд теорем, касающихся различных моделей этой системы.

2. Пример аксиоматизации. В этом пункте мы разберем пример аксиоматизации математических теорий. Начнем с рассмотрения тех конкретных примеров, изучение которых послужило источником этой аксиоматики. Существуют три вопроса, на первый взгляд не имеющие между собой ничего общего: изучение геометрических преобразований, переводящих в себя данный правильный m-угольник и не меняющих ориентации плоскости, изучение корней m-й степени из единицы и операции над остатками при делении натуральных чисел на m.

Геометрические преобразования, переводящие в себя правильный m-угольник и сохраняющие ориентацию плоскости, являются поворотами плоскости вокруг центра m-угольника на углы, имеющие величину φ_k, где $\varphi_k = \frac{2\pi k}{m}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Обозначим соответствующий поворот через R_k. Композицией поворотов R_j и R_k является поворот на угол $\frac{2\pi j}{m} + \frac{2\pi k}{m} = \frac{2\pi(j+k)}{m}$. Если $j+k<m$, то это не что иное, как поворот R_{j+k}; если же $j+k \geqslant m$, то $R_j \cdot R_k = R_{j+k-m}$ (напомним, что поворот на угол $\frac{2\pi m}{m} = 2\pi$ является тождественным преобразованием плоскости). Итак,

$$R_j \cdot R_k = \begin{cases} R_{j+k}, & \text{если } j+k<m, \\ R_{j+k-m}, & \text{если } j+k \geqslant m. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим корни m-й степени из единицы, т. е. комплексные числа вида $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{m} + i \sin \frac{2\pi k}{m}$, где $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Из формулы Муавра следует, что

$$\varepsilon_j \cdot \varepsilon_k = \begin{cases} \varepsilon_{j+k}, & \text{если } j+k<m, \\ \varepsilon_{j+k-m}, & \text{если } j+k \geqslant m. \end{cases}$$

Как повороты вокруг точки O, так и корни из единицы были занумерованы числами $0, 1, \ldots, m-1$. Каждое из этих чисел является одним из остатков при делении натуральных чисел на m. Числам $0, 1, \ldots, m-1$ соответствуют классы вычетов $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$ по m. Как известно, эти классы вычетов можно складывать, причем имеют место равенства:

$$\overline{j} + \overline{k} = \begin{cases} \overline{j+k}, & \text{если } j+k<m, \\ \overline{j+k-m}, & \text{если } j+k \geqslant m. \end{cases}$$

можно сказать, что классы вычетов по m дают числовую модель и для поворотов правильного m-угольника вокруг центра и для корней m-й степени из единицы.

Однако пока что мы имеем лишь сведение одного математического объекта к другому (поворотов и корней к классам вычетов). Существенно, что за всеми тремя разобранными вопросами стоит одна и та же математическая структура, называемая *структурой циклической группы порядка* m.

Эта структура возникает на любом множестве X, состоящем из m элементов, на котором определена ассоциативная алгебраическая операция $*$, причем все элементы из X являются степенями одного из них (порождающего элемента группы) и в X есть элемент, нейтральный относительно операции $*$ (единичный элемент группы). Например, для поворотов правильного m-угольника операцией является композиция поворотов, единичным элементом — тождественное преобразование, а порождающим элементом — поворот на угол $\frac{2\pi}{m}$. Для корней m-й степени из 1 операцией является умножение, единичным элементом — число 1, а порождающим элементом — число $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$. Наконец, для вычетов по модулю m операцией является сложение, единичным элементом — класс $\overline{0}$, а порождающим элементом — класс $\overline{1}$ (заметим, что в этом, как и в предыдущих примерах, в качестве порождающего элемента можно выбрать любой класс $\overline{k}$, такой, что k взаимно просто с m).

Замена трех различных множеств с заданными на них операциями их общей математической структурой позволяет, изучая эту структуру, делать выводы о каждом из трех множеств. Эти множества называются *моделями данной структуры* (или данной системы аксиом). Система аксиом, определяющая структуру циклической группы порядка m (численность множества, ассоциативность операции, наличие порождающего и нейтрального элементов), обладает *свойством категоричности*: все ее модели изоморфны друг другу. Иными словами, если X и Y — две модели этой системы аксиом, то существует биективное отображение f X на Y, такое, что $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \circ f(x_2)$. (Здесь через $\circ$ обозначена операция в Y.)

Структура циклической группы порядка m является частным случаем более общей математической структуры группы (см. п. 5 § 1 главы IV).

Существует бесконечно много неизоморфных друг другу групп. Оказывается, что понятие циклической группы можно выделить из общего понятия группы условием существования порождающего элемента. Добавляя условие, что число элементов группы равно m, возвращаемся к понятию циклической группы порядка m, с которого начали рассмотрение.

Мы видели на разобранном примере, как анализ общих черт в разнородных объектах позволяет подойти к этим объектам аксиоматически, сформулировать систему аксиом, а потом преобразовать ее так, чтобы она охватывала гораздо более широкий класс объектов, чем послужившие исходным пунктом исследования. В то же время переход от этого широкого класса объектов к исходному совершается путем наложения добавочных требований.

3. Общие понятия, связанные с аксиоматическим методом в математике. Разобранный в п. 2 пример наглядно показывает основные черты аксиоматического метода. Были введены понятия элементов циклической группы и операции $*$ над этими элементами. Ни те, ни другие понятия не были определены — как элементы, так и операции над ними могли быть произвольными математическими объектами (геометрическими преобразованиями или комплексными числами, композицией преобразований или умножением чисел и т. д.). Важно было лишь, чтобы эти понятия удовлетворяли требованиям, указанным в аксиомах. Все свойства элементов и операции можно вывести, пользуясь лишь этими аксиомами (и, разумеется, теориями, которые были построены ранее, в нашем случае — теорией множеств и арифметикой натуральных чисел).

Напомним вкратце основные понятия, относящиеся к аксиоматическому методу в математике. Из логики известно, что высказывание $A \wedge \overline{A}$, где $\overline{A}$ — отрицание A, заведомо ложно. Далее известно, что импликация $A \to B$ с ложной посылкой A всегда истинна. Отсюда следует, что высказывание $(A \wedge \overline{A}) \to B$ истинно при любом B. Значит, если из данной системы аксиом можно вывести два противоречащих друг другу высказывания A и $\overline{A}$, то из нее можно вывести и любое высказывание B. Разумеется, такая аксиоматика бессодержательна. Ее называют *противоречивой*. Аксиоматика T называется *непротиворечивой*, если из ее аксиом нельзя вывести двух противоречивых высказываний A и $\overline{A}$.

Совокупность различных утверждений, которые можно вывести из данной системы аксиом, вообще говоря, бесконечна. Поэтому невозможно доказать непротиворечивость данной системы аксиом, сделав из нее все возможные выводы и показав, что среди них нет взаимно противоречивых. Чтобы обойти эту трудность, был разработан особый метод, получивший название *метода интерпретаций*.

Этот метод состоит в следующем. Поставим в соответствие каждому неопределяемому понятию теории некоторое множество объектов. Например, при проверке непротиворечивости аксиом инцидентности евклидовой геометрии можно поставить в соответствие понятию «точка» множество вершин тетраэдра, понятию «прямая» — множество ребер тетраэдра, а понятию «плоскость» — множество граней тетраэдра. Обычно требуют, чтобы множества, соответствующие различным понятиям, не имели общих элементов. После этого каждому отношению теории T ставят в соответствие определенное отношение между элементами соответствующих множеств. Совокупность полученных множеств и отношений называют *полем интерпретации*. Всякому утверждению A теории T можно естественным образом поставить в соответствие некоторое высказывание A^* об элементах поля интерпретации. Например, утверждению «через две точки проходит одна и только одна прямая линия» при указанной выше интерпретации соответствует высказывание «через каждые две вершины тетраэдра проходит одно и только одно его ребро». Если полученное высказывание A^* истинно, то говорят, что утверждение A теории T *истинно в данной интерпретации*. Если же A^* ложно, то A *ложно в данной интерпретации*. Если все аксиомы теории T истинны в данной интерпретации, то ее называют *моделью* данной системы аксиом. Например, указанная выше интерпретация аксиом инцидентности является моделью этой системы аксиом.

Обычно и поле интерпретации и его свойства сами являются предметом рассмотрения некоторой математической теории T', которая, в свою очередь, может быть аксиоматической. Это позволяет доказывать с помощью метода интерпретации *относительную непротиворечивость* теории T, т. е. суждение типа «если теория T' непротиворечива, то непротиворечива и теория T». Для этого достаточно построить модель теории T в теории T', т. е. так интерпретировать теорию T в данном поле интерпретации, чтобы все аксиомы теории T перешли при этом в истинные высказывания теории T'.

Покажем, что тогда теория T действительно непротиворечива. Если бы это было не так, то из аксиом теории T можно было бы вывести два противоречивых утверждения: A и $\overline{A}$. Им соответствуют высказывания A^* и $\overline{A}^*$ теории T', которые тоже противоречивы. Но эти высказывания можно вывести из истинных высказываний теории T', которые соответствуют аксиомам теории T. Значит, эти противоречивые высказывания можно вывести и из аксиом теории T', а потому теория T' противоречива, вопреки предположению. Отсюда делаем вывод, что теория T непротиворечива.

В этом рассуждении предполагается, что логические средства, с помощью которых в теориях T и T' делаются заключения, подобны друг другу. Это условие практически всегда выполняется (как правило, используют классическую логику предикатов).

Метод интерпретаций позволил показать, например, что аксиоматика геометрии Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива аксиоматика геометрии Евклида, непротиворечивость же геометрии Евклида удалось свести к непротиворечивости аксиоматики действительных чисел. В свою очередь, было показано, что арифметика действительных чисел непротиворечива, если непротиворечива арифметика натуральных чисел. Тем самым вопрос о непротиворечивости большой области математики, охватывающий, во всяком случае, всю элементарную математику, был сведен к вопросу о непротиворечивости арифметики натуральных чисел (или, как мы будем в дальнейшем кратко говорить, *непротиворечивости арифметики*).

С помощью метода интерпретации можно решать и вопросы о независимости данной системы аксиом. Напомним, что аксиома A теории T называется *независимой* от остальных аксиом, если ее нельзя ни доказать, ни опровергнуть, исходя из этих аксиом. Для доказательства независимости данной аксиомы A надо построить новую аксиоматику, заменив аксиому A ее отрицанием и сохранив остальные аксиомы. Если как данная система аксиом, так и полученная из нее указанным образом система аксиом непротиворечивы, то аксиома A не зависит от остальных аксиом. Таким путем была доказана, например, независимость аксиомы о параллельных от остальных аксиом геометрии (как евклидова геометрия, так и геометрия Лобачевского непротиворечивы).

Следующим важным понятием аксиоматики является *изоморфизм моделей*. Для простоты предположим, что в данной аксиоматике имеется лишь одно неопределяемое понятие и лишь одно неопределяемое отношение. Пусть (X, R) и (Y, S) — две модели этой системы аксиом T (здесь X и Y — некоторые множества, а R и S — отношения в этих множествах). Назовем эти модели изоморфными, если существует биективное отображение φ: $X \to Y$, такое, что x_1Rx_2 в том и только том случае, когда y_1Sy_2, где $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$. Наглядный смысл состоит в том, что две модели изоморфны, если их элементы и отношения между ними отличаются лишь названиями и свойствами, не связанными с рассматриваемыми вопросами.

Система аксиом T называется *категорической*, если все ее модели изоморфны друг другу. Замечательным фактом математики является то, что категоричны системы аксиом, определяющие три основных понятия: «натуральное число», «действительное число» и «трехмерное евклидово пространство». В то же время такие системы аксиом, как аксиомы группы, кольца, поля, не являются категорическими — группами являются и множество вычетов по модулю m с операцией сложения, и множество положительных действительных чисел с операцией умножения, хотя одно из этих множеств конечно, а другое бесконечно, и потому они не могут находиться в биективном соответствии. Одной из характерных черт современной математики является переход от изучения объектов, определяемых категорической системой аксиом, к изучению объектов, система аксиом для которых не категорична.

Слабой стороной метода интерпретаций является то, что в вопросах непротиворечивости и независимости системы аксиом он дает результаты, носящие неизбежно лишь относительный характер. Но важным достижением этого метода стал тот факт, что с его помощью на достаточно точной основе была выявлена особая роль арифметики натуральных чисел — как такой математической теории, к вопросу о непротиворечивости которой сводится аналогичный вопрос для целого ряда других теорий.

4. Формальные аксиоматические теории. После сведения проблем непротиворечивости геометрии и математического анализа к вопросу о непротиворечивости арифметики натуральных чисел встал вопрос о доказательстве непротиворечивости этой последней. Более фундаментальным, чем понятие натурального числа, является лишь понятие множества, и потому была сделана попытка вывести всю арифметику натуральных чисел из теории множеств. Эта попытка удалась, однако в то же время выяснилось, что в самой теории множеств существуют противоречия, что ее основные понятия не обладают той степенью ясности, как это первоначально предполагалось.

Поэтому Д. Гильберт предпринял попытку другим путем доказать непротиворечивость арифметики, а именно свести процесс доказательства математических утверждений к цепочке формальных преобразований некоторых выражений и путем анализа возникающих цепочек доказать, что они не могут привести к противоречивому равенству типа $0 = 1$. Это направление, явившееся вершиной аксиоматического метода, получило название *метода формализма* в основаниях математики. Основным является здесь понятие *формальной системы.*

Всякая формальная система строится как точно очерченный класс выражений — формул, в котором некоторым точным образом выделяется подкласс формул, называемых *теоремами* данной формальной системы. При этом формулы формальной системы непосредственно не несут никакого содержательного смысла и их можно строить из произвольных, вообще говоря, значков. Общая схема построения произвольной формальной системы S такова:

I. Язык системы S.

а) *Алфавит* — перечень элементарных символов системы.

б) *Правила образования* (*синтаксис*) — правила, по которым из элементарных символов строятся формулы системы S; при этом последовательность элементарных символов считается формулой тогда и только тогда, когда она может быть построена с помощью правил образования.

II. Аксиомы системы S. Выделяется некоторое множество формул (обычно конечное или счетное), которые называются *аксиомами системы* S.

III. Правила вывода системы S. Фиксируется (обычно конечная) совокупность предикатов $R_1, \ldots, R_k$ на множестве всех формул системы S. Пусть $R_i(x_1, \ldots, x_{n_i}, x_{n_i+1})$ — какой-либо из этих предикатов, причем $n_i > 0$. Если для данных формул $F_1, \ldots, F_{n_i}$, F_{n_i+1} утверждение $R_i(F_1, \ldots, F_{n_i}, F_{n_i+1})$ истинно, то говорят, что формула F_{n_i+1} непосредственно следует из формул $F_1, \ldots, F_{n_i}$ *по правилу вывода* R_i.

Заданием языка системы, ее аксиом и правил вывода формальная система S полностью определяется как математический объект. Понятие теоремы или выводимой формулы образуется для всех формальных систем единообразным способом. *Выводом* системы S называется всякая конечная последовательность формул этой системы, в которой каждая формула либо является аксиомой системы S, либо непосредственно следует из каких-либо предшествующих ей в этой последовательности формул по одному из правил вывода данной системы. Формула системы S называется *теоремой*, если существует вывод системы S, заканчивающийся этой формулой.

Всякую конкретную математическую теорию T можно перевести на язык подходящей формальной системы S таким образом, что каждое осмысленное (ложное или истинное) предложение теории T выражается формулой системы S.

Гильберт и его ученики надеялись путем изучения формальных систем получить доказательство непротиворечивости арифметики натуральных чисел, не использующее таких сильных методов, как абстракция актуальной бесконечности. Однако, эта программа потерпела крах, поскольку в начале 30-х годов XX в. К. Геделем были доказаны следующие утверждения:

1) *Всякая естественная непротиворечивая формализация S арифметики натуральных чисел или другой математической теории, содержащей арифметику (например, теории множеств), неполна и непополнима в том смысле, что*:

а) *в S имеются содержательно истинные формулы F, такие, что ни F, ни $\overline{F}$ не являются выводимыми в S (такие формулы называют неразрешимыми в S)*;

б) *каким бы конечным множеством дополнительных аксиом ни расширить систему S, в новой системе неизбежно появятся свои неразрешимые формулы.*

2) *Если формализованная арифметика натуральных чисел в действительности непротиворечива, то хотя утверждение о ее непротиворечивости выразимо на ее собственном языке, однако доказательство этого утверждения, проведенное средствами, формализуемыми в ней самой, невозможно.*

Таким образом, уже в арифметике натуральных чисел невозможно исчерпать весь объем содержательно истинных утверждений классом выводимых формул и нет надежды получить когда-либо формализованное доказательство непротиворечивости арифметики, не использующее понятие бесконечности. Все это ставит определенные границы аксиоматического метода в математике.

5. Аксиоматика и математические конструкции. Хотя формально аксиоматические теории строятся независимо от того предметного содержания, которое вкладывается в их понятия и отношения, на самом деле жизненны лишь аксиоматики, правильно отражающие те или иные черты реального мира. Как пишет А. Д. Александров: «Современные формалисты полагают наиболее целесообразным излагать и даже развивать теории, исходя из аксиом, не предваренных никаким разбором того реального содержания, которое они должны суммировать. Но аксиомы сами по себе нуждаются в содержательном обосновании; они лишь суммируют другой материал и дают основание логическому построению теории».

Другую яркую характеристику взаимоотношения аксиоматики с содержанием математической науки дал известный немецкий математик Г. Вейль:

«...все эти прелестные общие понятия не падают к нам в руки сами. Определенные конкретные проблемы были вначале завоеваны в их нераздельной сложности, побеждены, так сказать, грубой силой. Только потом пришли аксиоматисты и сказали: «Вместо того чтобы ломиться в дверь со всей силой и обламывать себе руки, вы должны были изготовить себе такой-то и такой-то специальный ключ и тогда вы смогли бы открывать дверь совершенно легко и спокойно». Но они могут сделать этот ключ только потому, что, после того как дверь взломана, оказалось возможным исследовать замок с обеих сторон, снаружи и изнутри. Прежде чем вы можете обобщать, формализовать и аксиоматизировать, вы должны иметь математическую субстанцию».

Но не только для того, чтобы формулировать аксиомы, нужна реальная математическая субстанция. Не вводя других понятий, кроме содержащихся в аксиомах, можно сформулировать лишь весьма ограниченное число интересных теорем. Поэтому нужно, опираясь на первоначальные понятия и связывающие их аксиомы, вводить новые понятия и отыскивать касающиеся их теоремы, обладающие большой общностью. Этот отбор новых понятий и поиск новых теорем ведется обычно не путем прямого использования данной аксиоматики, а иным путем, в котором большую роль играют интуиция математика, понимание им связи изучаемых вопросов с иными проблемами, направленными на познание реального мира. Истинная наука никогда не сводится к чисто логическим понятиям, за которыми не стоят те или иные концепции. За словами и понятиями всегда должна скрываться сама реальность. Как отмечает один из основателей советской школы теории множеств Н. Н. Лузин: «Концепция интуитивного или экспериментального характера обычно всегда имеет действенный интерес, даже в том случае, если она не очень хорошо поддается логическому определению, причем обычно имеет большую важность ее всестороннее изучение, и, напротив, огромное большинство чисто логических сущностей и понятий, встреченных на путях логического порядка, обычно бесплодны и не могут оказать никакого влияния на прогресс науки. Именно в полной мере является справедливым то давно уже сделанное замечание, что на логических путях исследования как раз не встречают тех понятий, которые наиболее ценны, и если бы мы ограничились лишь исследованиями чисто логического характера, мы никогда бы их не имели».

Поэтому можно сказать, что ценность аксиоматической системы проявляется в ее моделях, которые служат, с одной стороны, источником данной системы аксиом, а с другой стороны, полем ее приложений.

Таким образом, мнение, что целью математики являются последовательное абстрагирование, логически строгая математическая дедукция и последующее еще более широкое обобщение, следует признать лишь односторонним изображением действительности. При таком подходе на первый план выходит осознание и упорядочивание математического содержания и вскрытие его структуры, а конструктивным элементам, индукции, воображению, интуиции отводится лишь второстепенная роль. И хотя дедуктивный метод, отправляющийся от аксиом, позволяет быстро овладевать обширными областями математики, конструктивный метод, идущий от частного к общему и избегающий излишней догматизации, прокладывает для творческой мысли математика несравненно более надежный путь. Полет в область абстракции должен исходить из конкретного и частного и завершаться конкретным и частным. Общие теории, которые не служат для разъяснения и систематизации более узких частных вопросов, обычно малосодержательны и, как правило, бесполезны. Тем или иным путем, в открытой или скрытой форме, даже прикрытая самым безупречным аксиоматическим одеянием, конструктивная интуиция всегда остается самым жизненным элементом в математике.

В ходе изучения некоторого вопроса математики чаще всего сначала появляются некоторые конкретные математические объекты и изучаются их свойства. Это позволяет усмотреть общие черты различных объектов и сформулировать эти черты в виде аксиом. После этого возникает вопрос об описании всех объектов, удовлетворяющих данным аксиомам, перечислении этих объектов и установлении их связи с ранее изученными понятиями. Во многих случаях оказывается, что данной системе аксиом удовлетворяет или единственный объект (если эта система аксиом *категорична*), или несколько объектов или серий объектов. Это позволяет решить вопрос о классификации данного рода математических объектов. В других случаях классифицировать удается не всю совокупность объектов данной аксиоматики, а лишь более или менее широкие части этой совокупности.

Приведем некоторые примеры взаимодействия аксиоматического и конструктивного направлений в математике, позволяющие понять диалектическую взаимосвязь аксиоматического подхода к математике с конструктивным подходом.

Множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел с обычными операциями сложения, вычитания и умножения можно определить как наименьшее кольцо, содержащее полукольцо $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел. Это — аксиоматическое определение множества $\boldsymbol{Z}$. Другие определения множества $\boldsymbol{Z}$ имеют конструктивный характер. Например, $\boldsymbol{Z}$ можно определить как объединение множеств $\boldsymbol{N}^+$, $\boldsymbol{N}^-$ и $\{0\}$, где $\boldsymbol{N}^+$ состоит из пар вида $(+, n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}^-$ — из пар вида $(-, n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, а операции над этими парами и нулем определяются обычным образом (например, $(+, 5)+(-, 3) = (+, 2)$ и т. д.). Можно определить $\boldsymbol{Z}$ и как множество классов эквивалентных пар (m, n) натуральных чисел (см. [43]).

Оба подхода к понятию целого числа (аксиоматический и конструктивный) эквивалентны. При этом аксиоматический подход вскрывает то общее, что кроется за различными конструкциями множества $\boldsymbol{Z}$. В свою очередь, конструкции показывают, что лежащие в основе понятия целого числа аксиомы непротиворечивы, т. е. что целые числа существуют. Заметим, что для этого достаточно построить хотя бы одну модель данной системы аксиом.

Аналогично обстоит дело с понятием действительного числа. Существуют различные аксиоматические определения этого понятия. Например, можно определить множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел с обычными отношениями порядка и алгебраическими операциями как полное архимедовски упорядоченное поле. В этом определении вскрыты основные свойства множества $\boldsymbol{R}$, на которых в дальнейшем строится весь математический анализ.

Но наряду с этим определением существует ряд конструктивных определений множества $\boldsymbol{R}$. Элементы этого множества можно определить как бесконечные десятичные дроби, бесконечные двоичные дроби, бесконечные троичные дроби и т. д. Можно определить действительные числа и как дедекиндовы сечения в множестве $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел, как совокупность классов эквивалентности в множестве фундаментальных последовательностей рациональных чисел, с помощью бесконечных непрерывных дробей и т. д. И в этом случае аксиоматика вскрывает общее содержание всех этих конструкций, а любая из конструкций доказывает непротиворечивость аксиоматики.

Заметим, что для математических понятий обычно существует не одна, а несколько аксиоматик. В связи с этим возникает вопрос об их эквивалентности. При переходе от одной аксиоматики данного понятия к другой некоторые теоремы первой аксиоматики становятся аксиомами второй, а аксиомы первой — теоремами второй. Это вызывает известные методические трудности при таких переходах.

Опишем вкратце некоторые методы, с помощью которых в математике конструируют новые математические понятия на основе уже известных.

а) Пусть заданы некоторое множество X и в нем отношение эквивалентности $\sim$. Тогда множество X распадается на классы эквивалентности. Рассмотрим множество $X/\sim$, элементами которого являются эти классы. Мы получаем новые математические объекты — сами классы эквивалентности и множество этих классов.

б) Другим мощным методом построения математических понятий является введение различных отношений между элементами множества и отображений одного множества в другое.

Если задано преобразование множества X, то возникает понятие *инварианта*, т. е. отношения в X, не меняющегося при данном отображении.

в) Полезным методом конструирования новых математических понятий является *метод идеальных элементов*.

При построении идеальных элементов часто реализуют их как некоторые подмножества множества исходных элементов. Например, бесконечно удаленная точка на проективной плоскости может быть определена как совокупность попарно параллельных прямых.

Глава II

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ АСПЕКТЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1. «НАИВНАЯ» И АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. «Наивная» теория множеств. Основатель теории множеств Г. Кантор пояснял понятие множества следующим образом: «Под «множеством» мы понимаем любое объединение в одно целое M определенных вполне различаемых объектов x нашего восприятия или мысли (которые называются «элементами» M)». Это пояснение слишком нечетко, чтобы служить математическим определением изучаемого понятия. Поэтому слова Кантора лишь поясняют, но не определяют, что такое множество.

Поскольку исходные положения канторовой теории множеств основываются на пояснениях, а не на строгих определениях и аксиомах, эту теорию называют «наивной» теорией множеств. Следует отметить, что, несмотря на «наивность» этой теории, почти все практически действующие математики используют в своей работе именно ее положения.

Как правило, встречающиеся в математических рассуждениях и практических применениях множества состоят из элементов, обладающих общим свойством, которым не обладают элементы, не принадлежащие этому множеству. Это свойство называют *характеристическим* для элементов данного множества (множество треугольников, множество красных предметов и т. д.). Операции над множествами соответствуют определенным операциям над свойствами, задающими эти множества. Например, понятию пересечения множеств соответствует понятие объектов, обладающих несколькими из данных свойств (вместо того чтобы говорить о пересечении множества прямоугольных треугольников с множеством равнобедренных треугольников, можно говорить о прямоугольных равнобедренных треугольниках). Исследование взаимосвязей различных свойств объектов лежит в основе классической логики.

Исследования Кантора по сходимости тригонометрических рядов привели его к рассмотрению числовых множеств очень общей природы, плохо описывавшихся известными в то время свойствами. Обобщая эту точку зрения, Кантор пришел к рассмотрению произвольных подмножеств данного множества M. Он не накладывал требования, чтобы эти подмножества выделялись теми или иными свойствами, а считал достаточным свойство «элементы, принадлежащие данному подмножеству». Иными словами, вместо того чтобы выделять подмножества свойствами их элементов, Кантор считал, что задание подмножества определяет тем самым некоторое свойство.

Вскоре выяснилось, что столь широкая точка зрения на понятие множества приводит к противоречиям, которые называют *антиномиями* теории множеств. Например, обозначим через M множество всех *множеств, которые не являются элементами самих себя*. Предположим, что M содержит само себя. Тогда, согласно определению M, оно не содержит самого себя. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно и потому M не содержит самого себя. Но тогда, по определению M, оно должно содержать себя. Итак, M и содержит себя в качестве элемента и не содержит себя. Значит, понятие множества M внутренне противоречиво.

Помимо этой и иных антиномий, в теории множеств накопилось много неясных вопросов. В течение почти ста лет не поддавалась решению поставленная еще Кантором «проблема континуума».

Существует ли множество, мощность которого промежуточна между мощностями множества натуральных чисел и множества точек прямой линии?

Все подмножества множества точек прямой, которые удавалось эффективно построить, оказывались либо счетными, либо имели мощности континуума. В связи с этим возник вопрос: что значат слова «множество M существует»? Следует ли требовать, чтобы множество M было эффективно построено?

Далее, во многих доказательствах теорем о множествах использовалось следующее утверждение, впервые сформулированное немецким ученым Цермело:

Если дано некоторое семейство $\{M_\alpha\}$, состоящее из непустых попарно непересекающихся множеств, то существует множество N, пересекающееся с каждым из множеств M по одному элементу (т. е. можно выбрать в каждом из множеств M_α по элементу a_α).

Так как в этом утверждении ничего не говорится, как выбираются элементы a_α из множеств M_α, то этот выбор неэффективен. Из утверждения Цермело были сделаны многие парадоксальные выводы. Например, доказана «равносоставленность» множества точек сферы и множества, состоящего из точек двух сфер, конгруэнтных данной.

Для устранения возникших антиномий и выяснения взаимосвязи вызывавших сомнения утверждений (гипотезы континуума, аксиомы выбора и т. д.) были разработаны различные аксиоматики теории множеств. Эти аксиоматики выделяли некоторые способы построения множеств, считавшиеся «допустимыми», что позволяло отбросить множества, определения которых оказались внутренне противоречивыми. Ни одна из этих аксиоматик не имела большого преимущества по сравнению с остальными и вопрос об их непротиворечивости остается открытым до сих пор.

Как говорит академик А. Н. Колмогоров, «выяснение вопроса, в какой мере и при каких условиях при изучении бесконечных множеств законно абстрагирование от процесса их образования, еще нельзя считать законченным».

2. Аксиоматика Цермело — Френкеля теории множеств. Приведем одну из аксиоматик теории множеств, принадлежащую в основном Цермело, уточненную и пополненную в дальнейшем Френкелем.

Основными понятиями являются *множество*, *элемент*, а основным отношением — элемент x *принадлежит* множеству M, или символически: $x \in M$ (в этом случае говорят также, что M *содержит* x). Кроме того, используются логические связки, кванторы всеобщности и существования, и понятие высказывательной формы. Поскольку в этой аксиоматике рассматриваются множества, состоящие из множеств, то им дано особое название — *совокупность множеств*. Совокупности множеств будут обозначаться полужирными латинскими буквами.

Аксиомами Цермело — Френкеля являются:

I. А к с и о м а о б ъ е м н о с т и. *Если множества A и B содержат одни и те же элементы, то они совпадают.*

II. А к с и о м а с у щ е с т в о в а н и я п у с т о г о м н о ж е с т в а. *Существует такое множество $\varnothing$ (пустое множество), что ни один элемент x ему не принадлежит.*

III. А к с и о м а о б ъ е д и н е н и я. *Для каждой совокупности множеств $\{A_\alpha\} = \boldsymbol{A}$ существует множество S, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат некоторому множеству A_α, принадлежащему совокупности $\boldsymbol{A}$.*

Из аксиомы I вытекает, что существует не более одного множества с требуемыми свойствами. Множество S с указанными свойствами называется *объединением множеств*, принадлежащих совокупности $\boldsymbol{A}$, и обозначается так: $S = \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ или $S = \bigcup\limits_{A_\alpha \in \boldsymbol{A}} A_\alpha$.

Если любой элемент, принадлежащий множеству B, принадлежит и множеству A, то говорят, что B — *подмножество* в A или что B *включено* в A.

IV. А к с и о м а б у л е а н а. *Для каждого множества A существует совокупность множеств $\boldsymbol{P}(A)$, элементами которой являются все подмножества множества A, и только они.*

Из аксиомы I вытекает, что множество $\boldsymbol{P}(A)$ однозначно определено. Его называют *булеаном множества A*.

V. А к с и о м а б е с к о н е ч н о с т и. *Существует такая совокупность множеств $\boldsymbol{A}$, что к ней принадлежит пустое множество $\varnothing$ и вместе с каждым множеством X к $\boldsymbol{A}$ принадлежит множество Y, состоящее из всех элементов множества X и самого множества X.*

Таким образом, $\boldsymbol{A}$ содержит следующие множества[1]:

$$\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\},\ \ldots$$

(и быть может, еще иные множества).

VI. А к с и о м а в ы б о р а. *Для каждой совокупности $\boldsymbol{A}$ непустых попарно непересекающихся множеств существует множество B, имеющее один и только один общий элемент с каждым из множеств M, принадлежащих $\boldsymbol{A}$.*

[1] Под $\{\varnothing\}$ понимают множество, единственным элементом которого является пустое множество; $\{\varnothing;\ \{\varnothing\}\}$ — множество, элементами которого являются множества $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$, и т. д.

VII_φ. Аксиома замены для высказывательной формы φ. *Пусть высказывательная форма $\varphi(x, y)$ не содержит переменных z и B. Если для каждого x существует единственный элемент y, такой, что выполняется $\varphi(x, y)$, то для каждого множества A существует множество B, состоящее из тех и только тех элементов y, которые при некотором $x \in A$ выполняют $\varphi(x, y)$.*

Наглядный смысл этой аксиомы состоит в следующем. Если ее условие истинно, т. е. если для каждого x существует единственный элемент y, выполняющий $\varphi(x, y)$, то форма $\varphi(x, y)$ определяет для каждого $x \in X$ определенный элемент y. Назовем этот элемент φ-последователем x. Аксиома VII_φ утверждает, что для каждого множества X существует множество Y, состоящее из φ - последователей элементов множества X, и только из них. Заметим, что поскольку высказывательная форма $\varphi(x, y)$ может быть любой, данная аксиома на самом деле определяет бесконечно много аксиом (по одной на каждую форму $\varphi(x, y)$). Как говорят, VII_φ является схемой аксиом — аксиомы получаются из такой схемы заменой φ конкретными высказывательными формами.

Аксиома VII_φ, по сути дела, связана с отображениями множеств (если каждому x соответствует единственный элемент y, то тем самым задано отображение $x \xrightarrow{\varphi} y$). Это показывает, что понятие отображения (в неявном виде) фигурирует уже в определении понятия множества, хотя и не является объектом изучения. При этом рассматриваются лишь отображения, заданные некоторой высказывательной формой с двумя переменными. В дальнейшем произвольные отображения будут определены на основе теоретико-множественных понятий.

Аксиомы III, IV, VI и VII_φ позволяют из существования некоторых множеств делать вывод о существовании других множеств (объединения, булеана и т. д.). При этом конструкции, осуществляемые на основе аксиом III, IV и VII_φ, однозначны: зная данные множества и высказывательную форму φ, можно однозначно найти конструируемые множества. В отличие от них аксиома выбора VI является лишь утверждением о существовании некоторого множества без указания, как это множество можно построить. Аксиомы II и V постулируют существование некоторых множеств (пустого множества и, по существу, множества натуральных чисел).

Отнюдь нельзя утверждать, что аксиомы I—VII_φ полностью описывают интуитивное понятие «множество». Существуют утверждения, представляющиеся интуитивно очевидными, которые независимы от указанной выше системы аксиом.

Одним из наиболее впечатляющих результатов общей теории множеств было доказательство в начале 60-х годов XX в. следующего утверждения:

Гипотеза континуума независима от аксиом I—VII_φ.

Это значит, что существуют как модели системы аксиом, в которых гипотеза истинна, так и модели, в которых она ложна. Была доказана независимость аксиомы выбора от остальных аксиом.

Многие утверждения о множествах, представляющиеся столь же очевидными, как аксиомы Цермело — Френкеля, можно вывести из этих аксиом. Примерами таких утверждений могут служить следующие[1]:

а) *Для произвольных a и b существует множество Y, единственными элементами которого являются a и b* (т. е. $Y = \{a, b\}$).

Множество $\{a, \{a, b\}\}$ называют *упорядоченной парой* элементов a и b. При этом a называют *первым элементом пары*, а b — *вторым элементом пары*. Вместо $\{a, \{a, b\}\}$ пишут короче: (a, b), например:

$$(3; 4) = \{3; \{3; 4\}\}, \quad (3, 3) = \{3, \{3\}\}.$$

Из данного определения и общего определения равенства множеств вытекает, что $(a, b) = (c, d)$ в том и только в том случае, когда $a = c$, $b = d$. Разумеется, обозначение $\{a, \{a, b\}\}$ менее наглядно, чем (a, b) и оно приведено лишь для того, чтобы показать, как можно самые наглядные вещи определить, пользуясь приведенными выше аксиомами.

Аналогично определяют упорядоченные тройки, четверки и т. д. Упорядоченную n-ку элементов $(x_1, \ldots, x_n)$ будем в дальнейшем называть *кортежем длины n*. При этом x_k назовем k-й *компонентой этого кортежа*.

б) *Для произвольных множеств A и B существует такое множество C, что*

$$x \in C \Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)].$$

Это множество C обозначают $A \cup B$.

Полагая

$\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\}$, $\{a, b, c, d\} = \{a, b, c\} \cup \{d\}$, определяют *неупорядоченные тройки, четверки* и т. д.

в) Для каждой непустой совокупности множеств $\mathbf{A}$ существует единственное множество B, составленное из тех и только тех элементов, которые принадлежат всем множествам из $\mathbf{A}$.

Это множество B называется *пересечением* множеств совокупности $\mathbf{A}$ и обозначается $\bigcap\limits_{X \in \mathbf{A}} X$. В частности, пересечение пары множеств A и B обозначается $A \cap B$.

Разность множеств A и B определяется так:

$$A \setminus B = \{x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Если $B \subset A$, то $A \setminus B$ называют *дополнением B в A* и обозначают B'_A.

§ 2. СТРУКТУРЫ И РОДЫ СТРУКТУР

1. Декартово произведение множеств. Декартовым произведением множеств X и Y называют множество $X \times Y$ всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$.

---

[1] Доказательства этих утверждений приведены в [34], глава 2, § 3.

Если $X = \varnothing$ или $Y = \varnothing$, то, очевидно, $X \times Y = \varnothing$. Имеют место следующие свойства декартовых произведений, доказательства которых мы опускаем:

а) $(X_1 \cup X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y)$,
б) $Y \times (X_1 \cup X_2) = (Y \times X_1) \cup (Y \times X_2)$,
в) $(X_1 \setminus X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \setminus (X_2 \times Y)$,
г) $Y \times (X_1 \setminus X_2) = (Y \times X_1) \setminus (Y \times X_2)$,
д) $(X_1 \cap X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \cap (X_2 \times Y)$,
е) $Y \times (X_1 \cap X_2) = (Y \times X_1) \cap (Y \times X_2)$,
ж) если $Y \neq \varnothing$, то
$(X_1 \subset X_2) \Leftrightarrow [(X_1 \times Y) \subset (X_2 \times Y)] \wedge [(Y \times X_1) \subset (Y \times X_2)]$.

Декартовым произведением вида $X \times Y \times Z$ называют множество упорядоченных троек (x, y, z), где $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ и т. д. Существует очевидное биективное соответствие между множествами $(X \times Y) \times Z$, $X \times (Y \times Z)$, $X \times Y \times Z$, задаваемое так: $((x, y), z) \leftrightarrow \leftrightarrow (x, (y, z)) \leftrightarrow (x, y, z)$. Множество $\underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}}$ обозначают X^n.

2. Шкала множеств. Пусть задано семейство множеств $\boldsymbol{A}$. Отправляясь от него, можно построить шкалу множеств, пользуясь лишь операциями образования булеана и декартова произведения. Это делается следующим образом:

Определение 1. Пусть $\boldsymbol{A}$ — семейство множеств. Тогда

а) все множества из семейства $\boldsymbol{A}$ являются *ступенями* над $\boldsymbol{A}$;

б) если Y — ступень над $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{P}(Y)$ тоже *ступень* над $\boldsymbol{A}$;

в) если $Y_1, \ldots, Y_n$ — ступени над $\boldsymbol{A}$, то $Y_1 \times \ldots \times Y_n$ — тоже *ступень* над $\boldsymbol{A}$;

г) *стипеней* над $\boldsymbol{A}$ иного вида не существует.

Определение 2. *Шкалой множеств с базой* $\boldsymbol{A}$ (или над $\boldsymbol{A}$) называют объединение всех ступеней над $\boldsymbol{A}$.

Например, если X — некоторое множество, то ступенями над X являются множества X, X^n, $\boldsymbol{P}(X)$, $\boldsymbol{P}(X^n)$, $[\boldsymbol{P}(x)]^n$, $X \times \boldsymbol{P}(X)$, $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{P}(X)]$, $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{P}(X^n)]$ и т. д.

Пусть f — отображение множества X в множество Y и $A \subset X$. Тогда $f(A) \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \{f(x) \mid x \in A\}$ — подмножество в Y. Таким образом, отображение f задает отображение f_P множества $\boldsymbol{P}(X)$ в множество $\boldsymbol{P}(Y)$. Его называют *каноническим распространением* f *на* $\boldsymbol{P}(X)$.

Легко проверить, что если отображение f инъективно (сюръективно, биективно), то и отображение f_P инъективно (сюръективно, биективно). При этом справедливы равенства:

а) $(f \circ g)_P = f_P \circ g_P$, б) $(1_X)_P = 1_{P(X)}$, в) $(f^{-1})_P = (f_P)^{-1}$,

где 1_X — тождественное преобразование множества X, $f \circ g$ — композиция g и f (равенство в) имеет место, если f инъективно).

Далее, если заданы отображения $f_k : X_k \to Y_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, то определено и отображение F: $X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_1 \times \ldots \times Y_n$, задаваемое формулой

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)).$$

Это отображение называют *каноническим распространением* отображений $f_1, \ldots, f_n$ на декартово произведение множеств $X_1, \ldots, X_n$ и обозначают $f_1 \times \ldots \times f_n$.

Если отображения $f_1, \ldots, f_n$ инъективны (сюръективны, биективны), то и $f_1 \times \ldots \times f_n$ инъективно (сюръективно, биективно), причем выполняются равенства

а) $(f_1 \times \ldots \times f_n) \circ (g_1 \times \ldots \times g_n) = (f_1 \circ g_1) \times \ldots \times (f_n \circ g_n)$,

б) $1_{X_1} \times \ldots \times 1_{X_n} = 1_{X_1 \times \ldots \times X_n}$,

в) $(f_1 \times \ldots \times f_n)^{-1} = f_1^{-1} \times \ldots \times f_n^{-1}$

(последнее — при условии, что все отображения $f_1, \ldots, f_n$ инъективны).

Из этих утверждений вытекает, что если заданы отображения $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ для множеств $X_\alpha \in \boldsymbol{A}$ и если $\boldsymbol{B}$ — совокупность множеств Y_α, то определено отображение любой ступени шкалы множеств над $\boldsymbol{A}$ в соответствующую ступень шкалы множеств над $\boldsymbol{B}$. Иными словами, зная отображения множеств, образующих базу шкалы, можно получить отображение каждой ступени этой шкалы.

3. Теоретико-множественное конструирование математических объектов. В школьной математике изучаются различные объекты — числа (натуральные, целые, рациональные, действительные), геометрические фигуры, функции, алгебраические операции и т. д. Мы покажем сейчас, что все эти понятия можно вывести из единого объекта — множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел, применяя описанные в предыдущем пункте операции образования декартова произведения и булеана, т. е. что все они принадлежат шкале множеств над $\boldsymbol{N}$.

Пусть множество X разбито на попарно непересекающиеся непустые подмножества X_α, $\alpha \in A$ и Y — соответствующее фактор-множество (т. е. множество, элементами которого являются подмножества A_α). Каждое из подмножеств A_α является элементом булеана $\boldsymbol{P}(X)$ множества X, а совокупность $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ этих подмножеств — подмножеством в $\boldsymbol{P}(X)$. Но любое подмножество в $\boldsymbol{P}(X)$ является элементом из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(X))$. Таким образом, Y можно рассматривать как один из элементов множества $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(X))$ (разумеется, обратное неверно: не всякий элемент из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(X))$ соответствует некоторому фактор-множеству множества X). Из сказанного следует, что операция разбиения множества на попарно непересекающиеся подмножества и образования фактор-множества может быть выражена через операции образования булеана и выделения элемента.

Приступим теперь к построению основных множеств школьной математики, отправляясь от множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел. Начнем с построения множества $\boldsymbol{Z}$ целых чисел. Из курса «Числовые системы» известно, что это множество можно сконструировать следующим образом: взять декартово произведение $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^2$, т. е. множество пар (m, n), где $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, и разбить его на классы, отнеся пары (m_1, n_1) и (m_2, n_2) к одному классу, если $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$. Каждый класс эквивалентности назовем *целым числом*. Таким образом, множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел является фактор-множеством множества $\boldsymbol{N}^2$, т. е. , согласно сделанному выше замечанию, элементом множества $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N}^2))$.

Построим теперь множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел. Из курса «Числовые системы» известно, что элементы этого множества можно сконструировать как подмножества $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{N}$ (декартова произведения множества $\boldsymbol{Z}$ и множества $\boldsymbol{N}$). Именно пары (m_1, n_1) и (m_2, n_2), где $m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}$, $n_1, n_2 \in \boldsymbol{N}$, отнесем к одному и тому же подмножеству, если выполняется равенство $m_1n_2 = m_2n_1$.

Построенные подмножества в $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{N}$ попарно не пересекаются, а потому определено соответствующее фактор-множество. Оно и является одной из моделей множества $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел. Из сказанного выше следует, что множество $\boldsymbol{Q}$ является одним из элементов ступени $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{N}))$. Но $\boldsymbol{Z}$-элемент ступени $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N}))$ и потому $\boldsymbol{Q}$ — элемент ступени $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{P}[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})) \times \boldsymbol{N}]]$. В дальнейшем мы не будем явно выписывать ступень над $\boldsymbol{N}$, которой принадлежат конструируемые объекты, — по мере развития теории строение ступеней заметно усложняется.

Построим далее множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел. Каждое такое число x задается своей целой частью $[x]$ и дробной частью $\{x\}$, которую можно представить в виде бесконечной двоичной дроби: $\{x\} = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$, где для всех $n \in \boldsymbol{N}$ имеет $\alpha_n = 0$ или $\alpha_n = 1$. При этом такие двоичные дроби, как 0,010100000000... и 0,010011111..., отождествляются. Условимся в этом случае выбирать дробь, кончающуюся нулями. Заметим теперь, что $[x] \in \boldsymbol{Z}$, а бесконечная двоичная дробь однозначно определяется подмножеством A из $\boldsymbol{N}$, которое состоит из номеров мест, на которых стоят единицы (например, дроби 0,110110110... соответствует подмножество $\{1, 2, 4, 5, 7, 8 \ldots\}$ из $\boldsymbol{N}$). Иными словами, каждой бесконечной дроби соответствует некоторый элемент из $\boldsymbol{P}(N)$, а каждому действительному числу — элемент из $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$. Итак, множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел можно рассматривать как некоторый элемент из множества $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})]$.

Перейдем к построению множества Π_3 точек геометрического пространства. Если выбрать в этом пространстве декартову систему координат, то любой точке a пространства соответствует тройка (x, y, z) действительных чисел (координат точки a). Тем самым устанавливается биективное соответствие между множеством Π_3 точек геометрического пространства и декартовым произведением $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^3$. Каждая геометрическая фигура является подмножеством в Π_3, которому соответствует некоторое подмножество в $\boldsymbol{R}^3$, т. е. элемент из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^3)$. Совокупностям геометрических фигур (например, совокупности всех шаров) соответствует некоторое подмножество в $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^3)$, т. е. элемент из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^3))$.

Наряду с числовыми и геометрическими множествами в школьной математике важную роль играют различные соответствия между ними — отношения порядка и делимости в числовых множествах, конгруэнтности, параллельности и перпендикулярности в множествах геометрических фигур, числовые функции и геометрические преобразования. Мы покажем сейчас, что эти понятия можно определить с помощью тех же двух операций образования булеана и декартова произведения (при этом, разумеется, наряду с множеством $\boldsymbol{N}$ будут использоваться построенные на его базе множества $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{R}$, Π_3 и т. д.).

Во множестве $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел определено отношение «меньше». С теоретико-множественной точки зрения это отношение полностью задается указанием всех пар (m, n), таких, что $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$ и $m < n$. Но множество таких пар (m, n) является подмножеством декартова произведения $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^2$, т. е. элементом из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N}^2)$. Таким образом, отношение «меньше» в множестве $\boldsymbol{N}$ задается с помощью элемента α из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N}^2)$.

Таким же образом можно задать отношение параллельности прямых на плоскости, указав некоторый элемент α из $\boldsymbol{P}(L^2)$, где L — множество прямых (множество пар (l, m), где $l \in L$, $m \in L$ и $l \cap m = \varnothing$ или $l = m$).

Каждая числовая функция полностью определяется своим графиком, который является подмножеством в $\boldsymbol{R}^2$, т. е. элементом из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^2)$. Поэтому числовые функции числового аргумента образуют некоторое подмножество в $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^2)$, т. е. им соответствует элемент из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^2))$. Точно так же числовой функции от n числовых аргументов соответствует элемент из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^{n+1}))$ (график такой функции является подмножеством в $\boldsymbol{R}^{n+1}$).

Операции сложения, вычитания, умножения в $\boldsymbol{R}$ являются отображениями $\boldsymbol{R}^2$ в $\boldsymbol{R}$, например $(a, b) \to a + b$. Поэтому, согласно сказанному выше, они задаются подмножеством в $\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^3$, т. е. элементом из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^3)$.

Геометрические преобразования также допускают теоретико-множественное описание. Каждое такое преобразование f полностью задается своим графиком, т. е. набором пар вида (a, b), где a — точка пространства, а b — ее образ при преобразовании f. Но такой график является подмножеством в $\Pi_3 \times \Pi_3$, т. е. элементом из $P(\Pi_3 \times \Pi_3)$. Поскольку точки из Π_3 описываются своими координатами, то преобразование f можно рассматривать как элемент из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^6)$, а совокупность всех геометрических преобразований является элементом из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^6))$.

Чтобы задать топологию в $\boldsymbol{R}$, достаточно указать семейство множеств, открытых в $\boldsymbol{R}$. Каждое из этих множеств принадлежит $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R})$, а семейство таких множеств является элементом из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}))$. Точно так же топология в $\boldsymbol{R}^n$ задается некоторым элементом из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^n))$.

Еще сложнее строение такого понятия, как операция дифференцирования. Эта операция ставит в соответствие некоторым функциям (а именно дифференцируемым функциям) их производную, т. е. снова некоторую функцию. Поэтому такая операция задается множеством пар вида (f, f'), где f — дифференцируемая функция, а f' — ее производная. Так как функции f и f', как было отмечено выше, являются элементами из $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^2)$, то пара (f, f') принадлежит $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^2) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^2) = \boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{R}^2)$, а сама операция дифференцирования (т. е. некоторое множество пар вида (f, f') соответствует некоторому подмножеству в $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{R}^2)$, т. е. элементу из $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{R}^2)]$. Читателю ясно, насколько усложнилось бы это уже не слишком простое выражение, если бы вместо $\boldsymbol{R}$ было подставлено соответствующее обозначение ступени над $\boldsymbol{N}$.

Из сказанного выше вытекает, что все объекты, изучаемые в школьной (да и не только в школьной) математике, находят свое место на различных ступенях шкалы множеств, построенной над одним единственным множеством $\boldsymbol{N}$. В свою очередь, это множество, как будет доказано в п. 5 § 4 главы IV, строится на основе аксиоматики Цермело — Френкеля. Это и показывает, что понятие множества лежит в основе современной математики, что все математические понятия: «число», «фигура», «отображение», «отношение», «алгебраическая операция», «топология» и т. д. — сводятся в конечном счете к понятию множества.

4. Роды структур. Мы показали в предыдущем пункте, как определять различные математические понятия, строя шкалу множеств над множеством натуральных чисел $\boldsymbol{N}$. Таким же образом, отправляясь от любого семейства множеств $\boldsymbol{A}$, можно с помощью операций образования булеана и декартова произведения вводить различные структуры, связанные с этими множествами. В общем виде понятие структуры определяется следующим образом:

Определение 1. *Структурой* над семейством множеств $\boldsymbol{A}$ называют некоторый элемент, принадлежащий одной из ступеней шкалы множеств, построенной над этим семейством.

Каждый элемент из множеств семейства $\boldsymbol{A}$ является структурой на этих множествах (каждое множество из $\boldsymbol{A}$ — одна из ступеней шкалы), любая ступень шкалы является структурой (ступень X является элементом из $\boldsymbol{P}(X)$), любое соответствие между множествами X и Y семейства $\boldsymbol{A}$, топология в любом множестве X из $\boldsymbol{A}$ — структуры над $\boldsymbol{A}$ и т. д.

Над данным семейством множеств можно построить бесконечно много различных структур. Однако в математике изучают не отдельные структуры (т. е. не отдельные элементы, принадлежащие ступеням шкалы множеств над $\boldsymbol{A}$), а роды структур.

Можно сказать, что род структур состоит из всех структур, обладающих одной и той же аксиоматикой. Чтобы уточнить эту формулировку, введем сначала понятие о типе ступени.

Назовем *типом ступени* с переменными x_α, $\alpha \in A$ любое из выражений вида:

а) сами переменные x_α, $\alpha \in A$,

б) выражения вида $a_1 \times \ldots \times a_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ — типы ступеней,

в) выражения вида $\boldsymbol{P}(a)$, где a — тип ступени. Например, типами ступеней с переменными x_1, x_2 являются

$$x_1,\ x_2,\ x_1 \times x_2,\ \boldsymbol{P}(x_1),\ \boldsymbol{P}(x_2),\ \boldsymbol{P}(x_1 \times x_2),$$
$$\boldsymbol{P}(x_1 \times x_1 \times x_1),\ \boldsymbol{P}(x_1) \times \boldsymbol{P}(x_2),\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(x_1))$$

и т. д.

Определение 2. *Род структуры* задается указанием:

а) типа ступени,

б) аксиомы s, которой могут удовлетворять элементы этой ступени.

Если в тип ступени входят n переменных $x_1, \ldots, x_n$, то для любого кортежа множеств $(X_1, \ldots, X_n)$ имеем одну и только одну ступень, определяемую этим типом, — надо вместо x_k подставить X_k, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Например, типу ступени $\boldsymbol{P}(x_1 \times x_2)$ и кортежу множеств (X_1, X_2) соответствует ступень $\boldsymbol{P}(X_1 \times X_2)$ над множествами X_1, X_2. Аксиома s, которой должны удовлетворять элементы ступени, выделяет в ней подмножество S, каждому элементу которого соответствует своя структура. Объектом изучения являются общие свойства всех этих структур, т. е. утверждения, которые можно вывести из аксиомы данной структуры (заметим, что фактически речь идет о нескольких аксиомах, объединенных в одно высказывание с помощью операции конъюнкции).

Аксиома, которой должны удовлетворять структуры данного рода, не является вполне произвольной. Она должна обладать некоторым свойством *переносимости*, суть которого состоит в следующем: пусть заданы биективные отображения $f_k\colon X_k \to Y_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$ и F — каноническое распространение этих отображений на ступень шкалы над $X_1, \ldots, X_n$, соответствующую данной структуре. Обозначим через S подмножество этой ступени, состоящее из ее элементов, удовлетворяющих аксиоме структуры. Условие переносимости состоит в том, что множество $S' = F(S)$ также состоит из всех элементов соответствующей ступени шкалы над $Y_1, \ldots, Y_n$, которые удовлетворяют аксиоме структуры. Для всех родов структур, которые мы будем рассматривать, условие переносимости выполняется.

5. Примеры родов структур. Приведем несколько примеров родов структур.

а) *Алгеброй* с одной бинарной операцией называют множество X, для которого задано отображение $f: X^2 \to X$. Такое отображение однозначно определяется тройками элементов (a, b, c) множества X, такими, что $f(a, b) = c$. Эти тройки образуют подмножество в X^3, т. е. задают элемент α из $P(X^3)$. Однако этот элемент не произволен. Поскольку задание a и b однозначно определяет c, то должна выполняться аксиома:

$$((\forall a \in X)(\forall b \in X)(\exists c \in X)\,(a, b, c) \in \alpha) \wedge$$
$$\wedge\ ((\forall a \in X)(\forall b \in X)(\forall c \in X)(\forall d \in X)$$
$$((a, b, c) \in \alpha \wedge (a, b, d) \in \alpha \to c = d)).$$

Здесь знаком конъюнкции соединены два различных утверждения. Обычно вместо одной такой аксиомы записывают две аксиомы (существования c, такого, что $(a, b, c) \in \alpha$, и единственности c). Разумеется, данная аксиома слишком бедна, чтобы из нее можно было вывести сколько-нибудь глубокие теоремы. Но, добавляя к ней те или иные новые аксиомы, получим такие алгебраические структуры, как полугруппы, группы, кольца, поля, булевы алгебры и т. д., для которых можно доказать целый ряд нетривиальных теорем большой общности. Например, чтобы получить структуру полугруппы, достаточно добавить к аксиоме (1) следующую аксиому:

$$(\forall a, b, c, d, e, f, g \in X)\,((a, b, d) \in \alpha \wedge$$
$$(d, c, e) \in \alpha \wedge (b, c, f) \in \alpha \wedge (a, f, g) \in \alpha \to e = g)$$

(она выражает ассоциативность умножений в X). А для получения структуры коммутативной полугруппы надо добавить еще аксиому

$$(\forall a, b, c, d \in X)\ ((a, b, c) \in \alpha \wedge (b, a, d) \in \alpha \to c = d).$$

б) Другой класс структур дают *расчлененные множества*, т. е. множества, разбитые на попарно непересекающиеся подмножества.

в) *Топология* в множестве X задается системой открытых подмножеств, т. е. некоторым элементом α из $\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{P}(X))$. При этом должна выполняться аксиома

$$(\varnothing \in \alpha) \wedge (X \in \alpha) \wedge ((\forall_\lambda A_\lambda \in \alpha) \to \bigcup_\lambda A_\lambda \in \alpha) \wedge$$
$$\wedge\ ((A \in \alpha) \wedge (B \in \alpha) \to (A \cap B) \in \alpha),$$

выражающая известные свойства открытых множеств (пустое множество и все множество X открыты, объединение любой совокупности открытых множеств открыто, пересечение двух открытых множеств открыто).

д) Структура *метрического пространства* в множестве X задается тройками (x, y, a), где $x, y \in X$ и $a \in \boldsymbol{R}$, такими, что $r(x, y) = a$. Каждая такая тройка принадлежит множеству $X^2 \times \boldsymbol{R}$, а потому структура метрического пространства является элементом α из $\boldsymbol{P}\ (X^2 \times \boldsymbol{R})$. Аксиома метрического пространства имеет вид:

$$(\forall x, y, z \in X)\ (\forall a, b, c \in \boldsymbol{R})\quad ((x, y, a) \in \alpha \to$$
$$\to a \geqslant 0) \wedge ((x, y, 0) \in \alpha \leftrightarrow x = y) \wedge$$
$$\wedge\ ((x, y, a) \in \alpha \to (y, x, a) \in \alpha) \wedge ((x, y, a) \in \alpha \wedge$$
$$\wedge\ (y, z, b) \in \alpha \wedge (x, z, c) \in \alpha \to c \leqslant a + b).$$

Отметим, что здесь $\boldsymbol{R}$ играет вспомогательную роль. Это находит свое отражение в том, что при переносе структуры метрического пространства с X на другое множество Y элементы из $\boldsymbol{R}$ остаются неизменными (если $r(x, y) = a$, то и $r(f(x), f(y)) = a$).

§ 3. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Числовые множества школьной математики. Математические понятия, изучаемые в средней школе, естественным образом группируются в множества. В арифметике мы имеем дело с различными множествами, состоящими из натуральных чисел: множествами четных и нечетных чисел, множествами кратных и делителей данного натурального числа, множествами простых и составных чисел и т. д. Все эти множества являются подмножествами множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел. Поэтому можно сказать, что множество $\boldsymbol{N}$ является *универсальным* для арифметики: в ней изучаются свойства его элементов и некоторых подмножеств.

Разумеется, совокупность всех подмножеств множества $\boldsymbol{N}$ слишком богата, чтобы каждое из них изучалось в арифметике. Как правило, подмножества, которые рассматриваются в арифметике, задаются конечными наборами свойств (например, свойством делимости на данное натуральное число или свойством отсутствия иных делителей, кроме самого числа и единицы).

По мере знакомства со все большим запасом чисел числовое множество N расширяется сначала до множества Q_0 неотрицательных рациональных чисел, потом до множества Q рациональных чисел и, наконец, до множества R действительных чисел. На факультативных занятиях рассматривается и множество C комплексных чисел. В каждом из этих множеств рассматриваются различные подмножества. И здесь подмножества выделяются, как правило, конечным набором условий (можно сказать, что это характерная черта элементарной математики — рассматривать множества, задаваемые конечным набором условий).

Приведем наиболее важные примеры числовых множеств, рассматриваемых в школьной математике.

а) С каждым уравнением $f(x) = \varphi(x)$ связаны множество A, на котором выражения $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют числовое значение, и множество T чисел, удовлетворяющих этому уравнению.

б) Неравенства вида $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$, $a < x < b$ задают *числовые промежутки*. При этом, когда учащиеся знакомы лишь с рациональными числами, числа a и b должны быть рациональны, а в качестве решений неравенств рассматриваются лишь рациональные числа (на некоторых этапах обучения — лишь натуральные числа). Но после введения множества действительных чисел числовые промежутки рассматриваются как состоящие из всех действительных чисел, удовлетворяющих соответствующим неравенствам.

Наряду с числовыми промежутками рассматривают *числовые лучи* (т. е. бесконечные числовые промежутки). Они задаются неравенствами вида $a \leqslant x$, $a < x$, $x \leqslant a$, $x < a$. В частности, числовыми лучами являются множества R_+ и R_-, состоящие соответственно из положительных и из отрицательных действительных чисел, а также множества $R_+ \cup \{0\}$ и $R_- \cup \{0\}$ (первое из них часто обозначают R_0).

в) Более сложную структуру, чем числовые промежутки, имеют подмножества Q и I, состоящие соответственно из рациональных и иррациональных чисел. Эти подмножества всюду плотны в R, т. е. любой числовой промежуток имеет непустое пересечение как с Q, так и с I.

г) Ряд числовых множеств можно получить, объединяя и пересекая описанные выше множества (например, $Q \cap [a; b]$ — множество рациональных чисел на отрезке $[a; b]$, а $[a; b] \cup [c; d] \cup]e; f]$ — объединение трех числовых промежутков). В школьной математике чаще всего приходится иметь дело с пересечением и объединением лишь конечных совокупностей промежутков. Но в тригонометрии при решении неравенств встречаемся и с объединениями бесконечных совокупностей промежутков. Например, решение неравенства $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$ имеет следующий вид:

$$\bigcup_{n \in Z} \left[-\frac{5\pi}{6} + 2n\pi;\ -\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right].$$

д) Различные подмножества можно указать в множестве C комплексных чисел. Поскольку комплексные числа изображаются точками плоскости, то любая плоская геометрическая фигура задает некоторое множество комплексных чисел. Отметим, в частности, подмножество T, состоящее из таких чисел z, что $|z| = 1$.

2. Точечные множества. В школьной геометрии изучаются геометрические фигуры, т. е. подмножества множества Π_3 точек трехмерного пространства. Метод координат позволяет задать каждую точку трехмерного пространства набором из трех действительных чисел (координат этой точки). Поэтому каждой геометрической фигуре соответствует некоторое множество троек действительных чисел. Точки плоскости задаются двумя координатами, и потому плоским множествам соответствуют множества, состоящие из пар действительных чисел.

Изучаемые в школьной математике точечные множества обычно задаются кортежами действительных чисел. Например, треугольник ABC с вершинами $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ задается кортежем из шести действительных чисел $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$. Круг радиуса R с центром в точке $A(x_1, y_1)$ задается кортежем из трех чисел (x_1, y_1, R) и т. д.

Чаще всего геометрические фигуры задаются своими характеристическими свойствами, т. е. свойствами, которыми обладают точки этих фигур и не обладают остальные точки пространства. Например, отрезок $[AB]$ состоит из таких точек M, что $|AM| + |MB| = |AB|$, круг радиуса R с центром O, лежащий в плоскости Π_2, — из таких точек M этой плоскости, что $|OM| \leqslant R$ и т. д. При этом, как и для произвольных множеств, может случиться, что два характеристических свойства определяют одну и ту же фигуру. Например, если точки A, B, C, D таковы, что $|AB| + |BC| = |AC|$ и $|BC| + |CD| = |BD|$, то прямые AC и BD совпадают.

В этих примерах точечные множества задавались геометрически — свойствами расстояний их точек от некоторых фиксированных точек плоскости. Если в пространстве (или на плоскости) выбрана система координат, то геометрические фигуры задаются теми или иными совокупностями уравнений и неравенств, связывающих координаты точек этих фигур. Например, прямая линия на плоскости задается уравнением вида $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$, круг на плоскости — неравенством вида $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leqslant R^2$ и т. д.

Задание геометрических фигур уравнениями и неравенствами позволяет применять аппарат алгебры для решения геометрических задач и, обратно, давать геометрическую иллюстрацию алгебраическим утверждениям.

3. Роль теории множеств в школьной математике. Как числовые множества, так и геометрические фигуры рассматривались в математике и до появления общей теории множеств. При этом, однако, геометрические фигуры рассматривались как целостные совокупности, а не как множества составляющих их точек. Этому способствовало то, что изучаемые в элементарной математике фигуры задаются конечными наборами точек, и достаточно было задать два конца отрезка, чтобы о нем можно было говорить, не упоминая о множестве точек, из которых он состоит (было принято считать, что эти точки расположены на отрезке, но что он отличен от их совокупности).

Однако лишь теоретико-множественная точка зрения на математику позволила рассматривать множества, состоящие из геометрических фигур, например множество всех прямых на плоскости или множество всех концентрических окружностей.

Теоретико-множественный подход позволяет увидеть общее в вопросах школьной математики, представляющихся на первый взгляд очень далекими друг от друга. Например, с точки зрения теории множеств числовые функции числового аргумента, геометрические преобразования, измерения длин, площадей и объемов и т. д. являются различными аспектами одного и того же понятия отображения множеств. Использование общего понятия отображения позволяет упростить изложение вопросов комбинаторики. Полезна теоретико-множественная точка зрения и при решении уравнений и неравенств, формулировке утверждений о решениях систем уравнений, о равносильности уравнений и неравенств и т. д.

Наконец, формулировка многих понятий школьной математики становится проще при использовании языка теории множеств. Следует отметить, что роль теории множеств в школьной математике больше сводится к использованию языка этой теории, чем к попытке обосновать на ней всю школьную математику, — излишне педантичное использование понятий теории множеств может сделать некоторые разделы школьной математики слишком абстрактными и непонятными для учащихся.

4. Отношение включения множеств в школьной математике. Одной из самых простых структур над данным множеством X является структура типа $\boldsymbol{P}(X)$. Каждая такая структура является просто одним из подмножеств в X. В школьной математике выделение тех или иных подмножеств данного множества играет весьма большую роль. Так, например, из множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел выделяют подмножества четных и нечетных чисел, простых и составных чисел, чисел, десятичная запись которых имеет данное число цифр и т. д. Выделение различных подмножеств играет важную роль и в геометрии — уже отмечалось, что геометрическая фигура трактуется в школьной математике как подмножество геометрического пространства.

Каждое множество может быть задано двумя способами: перечислением его элементов (как говорят, *экстенсионально*) или указанием некоторого свойства, которым обладают элементы данного множества, и только они (как говорят, с помощью характеристического свойства, или *интенсионально*). Первый способ применим лишь к конечным множествам, поэтому за редкими исключениями в школьной математике используют описание множеств с помощью характеристических свойств (множество окружностей, множество прямоугольных треугольников, множество чисел, которые при делении на 6 дают остаток 2 и т. д.). Теоретико-множественная теория зрения состоит здесь в том, что два множества, заданные различными характеристическими свойствами, но состоящие из одних и тех же элементов, считаются в силу аксиомы объемности равными. Например, равны множества равносторонних треугольников и равноугольных треугольников, множества двузначных чисел, делящихся на 11, и чисел, десятичная запись которых состоит из двух одинаковых цифр, отличных от нуля. Во многих случаях математическое утверждение состоит в том, два множества, заданные различными характеристическими свойствами, совпадают друг с другом. Например, теорему Пифагора и обратную к ней можно сформулировать так: множество прямоугольных треугольников совпадает с множеством треугольников, у которых квадрат длины наибольшей стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон.

Наряду с утверждениями о равенстве двух множеств в школьной математике встречаются утверждения о том, что одно множество включено в другое. Например, множество решений уравнения $f(x) = g(x)$ является подмножеством множества решений уравнения $f^2(x) = g^2(x)$.

Каждое уравнение или неравенство с одним переменным можно рассматривать как характеристическое свойство множества чисел. Если два уравнения равносильны, то они определяют одно и то же множество решений. Поэтому теоремы о равносильности уравнений дают достаточные признаки для того, чтобы два числовых множества, заданные различными характеристическими свойствами, совпадали друг с другом. Характеристические свойства применяются и для выделения геометрических фигур того или иного вида из множества фигур более общего вида. Например, прямоугольник можно определить как параллелограмм, имеющий хотя бы один прямой угол. Характеристическое свойство «иметь хотя бы один прямой угол» выделяет множество прямоугольников из множества параллелограммов. Это свойство равносильно таким свойствам, как «иметь хотя бы одну ось симметрии», «иметь диагонали равной длины» и т. д. Следует отметить, что в различных учебных пособиях по геометрии могут быть выбраны различные характеристические свойства, определяющие данное понятие. Если какое-нибудь из свойств данного понятия выбрано за определяющее, то остальные его свойства выводятся из выбранного путем логических рассуждений.

Отношение включения в применении к изучаемым в школе множествам позволяет устанавливать иерархию понятий. Например, при изучении четырехугольников встречаются с понятиями параллелограмма, трапеции, равнобочной трапеции, ромба, прямоугольника, квадрата, дельтоида. На рисунке 1 изображена схема, показывающая соотношение этих понятий (в отличие от школьного учебника мы называем трапецией любой четырехугольник, какие-нибудь две противоположные стороны которого параллельны, т. е. считаем параллелограмм частным случаем трапеции).

5. Операции над множествами в школьной математике. При конструировании различных объектов школьной математики широко используются операции над множествами. Почти все числовые множества, получаемые в школьной математике, могут быть получены из (замкнутых) лучей и всего множества $\boldsymbol{R}$ с помощью операций объединения и пересечения конечных совокупностей множеств, а также пере-

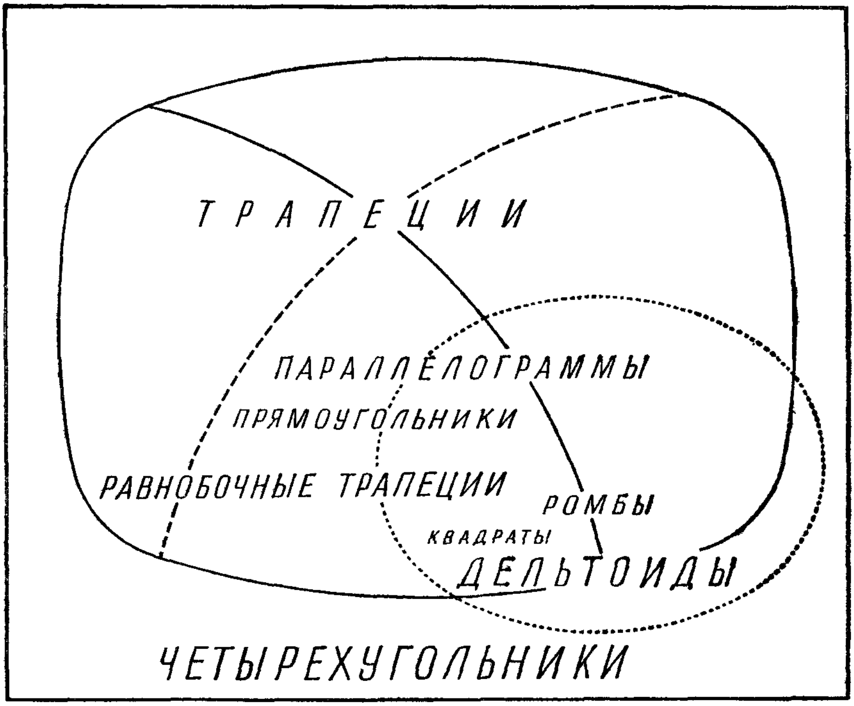

Рис. 1

хода к дополнению. Например, отрезок $[a, b]$ является пересечением лучей $]-\infty, b]$ и $[a, +\infty[$, открытый луч $]a, +\infty[$ — дополнением в $\boldsymbol{R}$ к лучу $]-\infty, a]$. Интервал $]a, b[$ —это пересечение лучей $]-\infty, b[$ и $]a, +\infty[$, а отдельная точка $\{a\}$ — пересечение лучей $]-\infty, a]$ и $[a, +\infty[$.

Операции над точечными множествами (подмножествами геометрического пространства) применяются при конструировании геометрических фигур. Например, угол является либо пересечением, либо объединением двух полуплоскостей. Любой выпуклый многоугольник является пересечением конечной совокупности полуплоскостей, границы которых содержат стороны этого многоугольника (рис. 2). Невыпуклый многоугольник всегда можно разбить на выпуклые многоугольники (рис. 3). Таким образом, отправляясь от совокупности полуплоскостей, можно с помощью операций пересечения и объединения конечных совокупностей множеств получить *множество многоугольников*. При этом, кроме многоугольников, получаются и *неограниченные многоугольные области* (например, фигура на рисунке 4). Среди получаемых описанным образом фигур есть и вырожденные (например, прямые, лучи, отрезки, точки и различные их комбинации). Если вместо полуплоскостей взять полупространства, то с помощью описанных выше операций получим совокупность *многогранных тел*.

Таким образом, если допустить наличие вырожденных или неограниченных фигур, то совокупность *многоугольных фигур* можно определить следующим образом:

а) Полуплоскость является многоугольной фигурой.

б) Если F_1 и F_2 — многоугольные фигуры, то их пересечение $F_1 \cap F_2$ и их объединение $F_1 \cup F_2$ тоже являются многоугольными фигурами.

в) Иных многоугольных фигур не бывает.

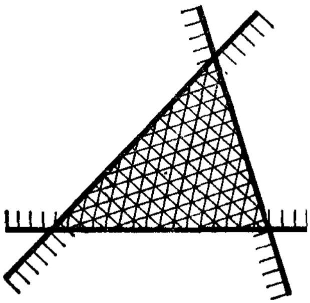

Рис. 2

Это определение многоугольных фигур конструктивно.

Заметим, что ограниченные многоугольники и многогранные тела можно получить путем объединения конечной совокупности простейших фигур такого вида — треугольников и тетраэдров.

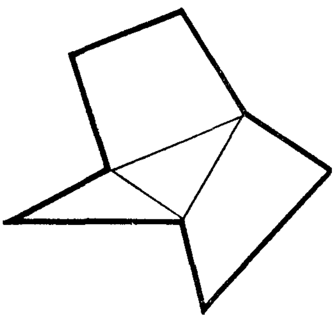

Рис. 3

С операциями над множествами встречаются и при решении уравнений и неравенств. Пусть даны два уравнения с двумя переменными: $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$. Обозначим через M_1 множество пар (a, b) таких, что при подстановке в первое уравнение вместо x числа a, а вместо y числа b, получается истинное равенство $f(a, b) = 0$. Это множество называется *множеством решений уравнения* $f(x, y) = 0$. Через M_2 обозначим множество решений второго уравнения. Тогда решением системы уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

является пересечение $M_1 \cap M_2$ множеств M_1 и M_2. Геометрически множества M_1 и M_2 изображаются обычно линиями на плоскости, а $M_1 \cap M_2$ — пересечением этих линий.

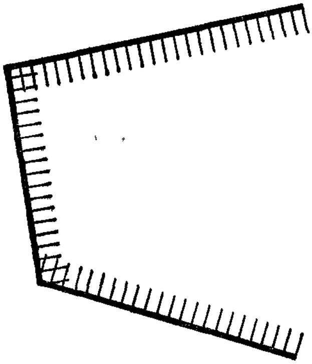

Рис. 4

Если система уравнений

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

равносильна системе уравнений (1), то, хотя множества решений M_3 и M_4 уравнений $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$ отличны от множеств M_1

и M_2, пересечения $M_1 \cap M_2$ и $M_3 \cap M_4$ равны (рис. 5). Если же система уравнений (2) является следствием системы уравнений (1), то справедливо включение $M_1 \cap M_2 \subset M_3 \cap M_4$. Аналогичные утверждения имеют место для систем неравенств, а также для смешанных систем, состоящих из уравнений и неравенств.

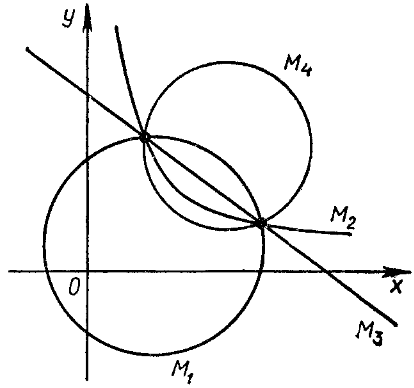

Рис. 5

С объединениями множеств мы встречаемся при решении уравнений вида

$$f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0. \qquad (3)$$

Обозначим через M_i множество решений уравнения

$$f_i(x) = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

а через N_i — область допустимых значений для $f_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда множеством решений уравнения (3) будет $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap M_i \cap \ldots \cap N_n)$. В самом деле, на множестве $N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap M_i \cap \ldots \cap N_n$ множитель $f_i(x)$ равен нулю, а все остальные определены. Поскольку $f_1(x) \ldots f_n(x)$ обращается в нуль лишь для тех значений x, при которых хоть один из множителей равен нулю, а все остальные определены, то наше утверждение доказано.

6. Декартово произведение множеств в школьной математике. Теперь рассмотрим структуры типа $X_1 \times \ldots \times X_n$. Структура такого типа ставит в соответствие каждому кортежу множеств $(X_1, \ldots, X_n)$, единственное множество — декартово произведение $X_1 \times \ldots \times X_n$ данных множеств.

Представление данного множества в виде декартова произведения других множеств позволяет свести изучение множеств к изучению более простых множеств (множества $X_1 \times \ldots \times X_n$ к множествам $X_1, \ldots, \ldots, X_n$). Обратно, с помощью операции образования декартова произведения конструируются более сложные множества.

Например, каждая точка трехмерного пространства определяется своими проекциями на координатные оси, т. е. кортежем точек, лежащих на трех прямых линиях. Отсюда следует, что Π_3 является декартовым произведением трех прямых линий. Выбирая на этих прямых координаты, получаем систему координат в трехмерном пространстве и тем самым устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между пространством Π_3 и пространством $\boldsymbol{R}^3$ — декартовым произведением трех экземпляров множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел.

Среди подмножеств декартова произведения $X_1 \times \ldots \times X_n$ выделим подмножества вида $A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_k \subset X_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Например, на плоскости выделим прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат. Эти прямоугольники естественно

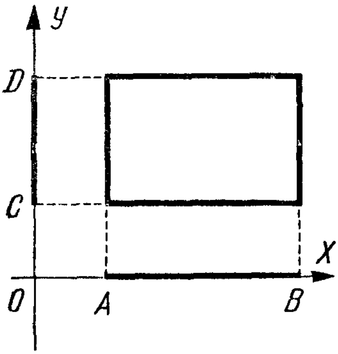

Рис. 6

рассматривать как декартово произведение двух отрезков — их проекций на оси координат (рис. 6). Каждая четверть координатной плоскости является декартовым произведением двух лучей, а верхняя полуплоскость — декартовым произведением оси абсцисс и положительного луча оси ординат.

Таким же образом в координатном пространстве выделяем прямоугольные параллелепипеды, стороны которых параллельны осям координат, октанты, верхнюю и нижнюю полуплоскости и аналогичные фигуры. Но в пространстве существуют более сложные фигуры, являющиеся декартовыми произведениями некоторой плоской фигуры и отрезка. Именно, пусть F — некоторая плоская фигура, лежащая в плоскости xOy. Совокупность всех точек, проекция которых на плоскость xOy принадлежит фигуре F, образует *цилиндрическое тело* (если F — линия на xOy, то — *цилиндрическую поверхность*).

В школьной математике обычно рассматривают лишь части цилиндрических тел и поверхностей. Эти части являются декартовыми произведениями вида $F \times l$, где l — некоторый отрезок. В частности, если F — многоугольник, то соответствующее тело является *призмой*, а если F — граница многоугольника, то получается *боковая поверхность призмы*.

Пусть F — плоская фигура и l — прямая, лежащая в той же плоскости и не пересекающая фигуру F. При вращении фигуры F вокруг прямой l получается *тело вращения*. Каждая точка A этого тела задается точкой A_1 фигуры F, лежащей на одной окружности с точкой A и углом поворота φ, принимающем значения от 0 до 2π. Поскольку углы вращения можно изображать точками окружности, то тело вращения является декартовым произведением фигуры F и окружности. В частности, если F является кругом, то получающееся тело называют *тором*, а если F — окружность, то получается *граница тора*.

Поверхность бесконечного кругового цилиндра является декартовым произведением окружности и прямой линии. Выберем на цилиндре точку A и проведем через нее образующую и направляющую (прямую и окружность, рисунок 7). Тогда получим координатную систему на цилиндре, ставящую точке A этого цилиндра два числа z и α, меняющиеся в пределах $-\infty < z < +\infty$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ (при этом пары $(z, 0)$ и $(z, 2\pi)$ задают одну и ту же точку на цилиндре).

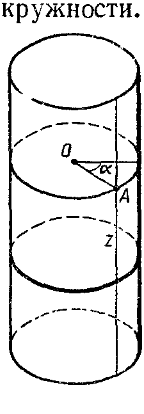

Рис. 7

С этой системой координат на цилиндре связана *полярная система координат* на плоскости. Как известно, такая система координат задается точкой O (полюсом) и лучом Ox (полярной осью). Каждой точке A на плоскости (кроме полюса) ставим в соответствие расстояние r этой точки от полюса и величину угла α между полярной осью и лучом Ox, отсчитываемого против часовой стрелки (рис. 8). Отображение $(z, \alpha) \to (e^z, \alpha)$ задает гомеоморфизм между поверхностью цилиндра и плоскостью с выколотой точкой O. Иными словами, полярная система координат тоже связана с понятием декартова произведения (прямой и окружности).

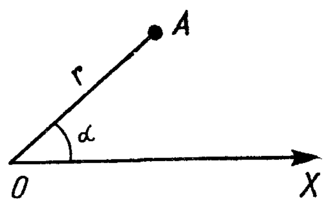

Рис. 8

В заключение остановимся на связи понятия декартова произведения множеств с умножением натуральных чисел. Пусть A и B — конечные множества, мощность которых равна соответственно m и n. Тогда их декартово произведение состоит из mn пар: если $A = (a_1, \ldots, a_m)$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$, то

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (a_1, b), & \ldots, & (a_1, b_n) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ (a_m, b_1), & \ldots, & (a_m, b_n) \end{matrix} \right\}$$

Таким образом, для конечных множеств выполняется равенство

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Иногда эту формулу кладут в основу определения произведения натуральных чисел.

§ 4. СООТВЕТСТВИЯ И ОТНОШЕНИЯ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

1. Введение. Мы рассмотрели выше структуры типа $\boldsymbol{P}(x)$ и $x_1 \times \ldots \times x_n$ и их роль в школьной математике. Следующим по сложности типом структур является $\boldsymbol{P}(x_1 \times x_2)$. Если X и Y — два множества, то структура такого типа является элементом множества $\boldsymbol{P}(X \times Y)$, т. е., проще говоря, некоторым подмножеством декартова произведения $X \times Y$. Назовем структуру такого типа *бинарным соответствием* между множествами X и Y. Аналогично структуру типа $\boldsymbol{P}(x_1 \times \ldots \times x_n)$, т. е. подмножество декартова произведения $X_1 \times \ldots \times X_n$, называют n-арным соответствием между множествами $X_1, \ldots, X_n$. При $n = 1$ эта структура превращается в подмножество из X. Мы будем рассматривать лишь бинарные соответствия.

Во многих случаях множества X и Y совпадают, $X = Y$. В этих случаях будем говорить о *бинарных отношениях* в множестве X. Отметим, что в школьных учебниках для простоты не делается различия между соответствиями и отношениями, а говорится лишь про отношения. Тогда приходится выделять случай $X = Y$ термином *однородное отношение*.

Так как $X \subset X \cup Y$ и $Y \subset X \cup Y$, то любому подмножеству A из $X \times Y$ соответствует состоящее из тех же пар подмножество в $(X \cup Y)^2$. Иными словами, каждому соответствию между X и Y однозначно сопоставляется отношение в множестве $X \cup Y$. Это позволяет обойтись лишь понятием отношения. Но в практических приложениях теории соответствий удобнее иметь дело с множествами X и Y, а не с их объединением $X \cup Y$.

Бинарные соответствия между множествами X и Y связаны с высказывательными формами вида $A(x, y)$, где $x \in X, y \in Y$. Совокупность пар вида (a, b), где $a \in X$, $b \in Y$, для которых выполняется форма $A(x, y)$, образует подмножество в $X \times Y$, т. е., по нашей терминологии, соответствие между X и Y. Например, высказывательная форма «прямая x касается окружности y» задает бинарное соответствие касания между множеством X прямых на плоскости и множеством Y окружностей на той же плоскости.

Отметим, что обычно различного вида соответствия и отношения задаются отнюдь не путем указания соответствующего подмножества в $X \times Y$, а путем указания некоторого свойства пар (a, b), принадлежащих этому подмножеству. Например, чтобы пояснить, что значит касание прямой и окружности, не предъявляют все множество, состоящее из пар касающихся прямых и окружностей, а ограничиваются указанием, что такие прямая и окружность имеют одну и только одну общую точку. Теоретико-множественная же точка зрения служит для того, чтобы уточнить, какие соответствия, определенные с помощью свойств элементов, равносильны (т. е. когда им отвечает одно и то же множество пар в $X \times Y$). Например, соответствие «прямая x касается окружности y» равносильно соответствию «прямая x находится от центра окружности y на расстоянии, равном радиусу этой окружности». Хотя в первом случае речь идет о мощности пересечения двух линий, а во втором — о некоторых расстояниях, множества пар (a, b), удовлетворяющих этим условиям, совпадают.

2. Основные понятия. Напомним основные понятия теории бинарнарных соответствий (см. [30], [59], [61]).

а) Поскольку соответствия между множествами X и Y задаются подмножествами в $X \times Y$, к ним применимы теоретико-множественные операции (объединение, пересечение, дополнение). Например, соответствие S является *следствием* соответствия R, если $R \subset S$. Если подмножества R и S из $X \times Y$ являются дополнениями друг к другу, то говорят, что соответствия R и S *противоположны*.

Утверждение, что $(x, y) \in R$, записывают в виде xRy (например, $x \parallel y$ обозначает, что прямая x параллельна прямой y).

б) Пусть R — соответствие между множествами X и Y, а S — соответствие между множествами Y и Z. Их *композицией* называют соответствие $T = SR$ между множествами X и Y, определяемое следующим образом: xTz в том и тольком в том случае, когда существует такое $y \in Y$, что xRy и yRz.

в) Каждому соответствию R между X и Y можно сопоставить *обратное соответствие* между Y и X, обозначаемое R^{-1} и определяемое так:

$$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy.$$

г) Если R — соответствие между X и Y, то любому $a \in X$ сопоставляется подмножество в Y.

$$R(a) = \{y \mid y \in Y \wedge a\,Ry\},$$

называемое *образом* a при этом соответствии. Точно так же каждому $b \in Y$ сопоставляется подмножество

$$R^{-1}(b) = \{x \mid x \in X \wedge xRb\}$$

из X, называемое *полным прообразом* b при соответствии R (оно совпадает с образом b при обратном соответствии R^{-1}).

д) Соответствие R между X и Y называется *сюръективным*, если для всех $y \in Y$ множество $R^{-1}(y)$ непусто. Оно называется *всюду определенным*, если для всех $x \in X$ непусто $R(x)$. Соответствие R называется *инъективным*, если для всех $y \in Y$ множество $R^{-1}(y)$ содержит не более одного элемента. Оно называется *функциональным*, если для всех $x \in X$ множество $R(x)$ содержит не более одного элемента.

Рассмотрим теперь понятия, касающиеся отношений в множествах:

е) Отношение R в множестве X называется *рефлексивным*, если для любого $x \in X$ имеем xRx.

ж) Отношение R в X называется *антирефлексивным*, если ни для одного $x \in X$ не выполняется xRx.

Обозначим через Δ *отношение тождества* в X, т. е. множество пар вида (x, x), где $x \in X$. Тогда отношение R рефлексивно, если $\Delta \subset R$ и антирефлексивно, если $\Delta \cap R = \varnothing$. Отношение, противоположное рефлексивному отношению, антирефлексивно, и, обратно, отношение, противоположное антирефлексивному отношению, рефлексивно.

з) Отношение R в X называется *симметричным*, если из xRy следует yRx. Иначе можно сказать, что отношение R симметрично, если $R = R^{-1}$ (заметим, что R и R^{-1} являются отношениями в одном и том же множестве X).

и) Отношение R в X называется *асимметричным*, если $R \cap R^{-1} = \varnothing$, т. е. xRy и yRx не выполняются одновременно ни для одной пары (x, y), $x \in X$, $y \in X$.

к) Отношение R в S называется *антисимметричным*, если $R \cap R^{-1} = \Delta$, т. е. если xRy и yRx одновременно выполняются в том и только в том случае, когда $x = y$.

л) Отношение R в X называется *транзитивным*, если $R^2 \subset R$, то есть если из xRy и yRz следует, что xRz.

м) Отношение R в X называется *антитранзитивным*, если $R^2 \cap R = \varnothing$, т. е. если для любой тройки $(x, y, z) \in X^3$ из xRy и yRz следует, что xRz не имеет места.

н) Отношение R в X называется *связным* (пишут также *связанным*), если для любых x и y из X отношение $x \neq y$ влечет за собой, что xRy или yRx.

3. Отношения эквивалентности и классификация. Пусть множество X разбито на попарно непересекающиеся непустые подмножества X_α, $\alpha \in A$, т. е. $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, причем $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. Тогда отношение «x принадлежит тому же подмножеству, что и y» обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Любое отношение, обладающее этими тремя свойствами, называется *отношением эквивалентности.*

Пусть в множестве X задано отношение эквивалентности R. Поставим каждому элементу a из X в соответствие его образ $R(a)$ при этом отношении, т. е. множество таких элементов $y \in X$, что aRy. Имеет место следующая теорема, доказываемая в курсе «Алгебра и теория чисел»:

Теорема. *Если R — отношение эквивалентности в X, то образы $R(a)$ и $R(b)$ элементов a и b из X либо совпадают, либо не пересекаются.*

Из этой теоремы следует, что X является объединением образов своих элементов при отношении эквивалентности R, причем если $R(a) \neq R(b)$, то $R(a) \cap R(b) = \varnothing$. Эти образы называются *классами эквивалентности*, соответствующими отношению R. Множество классов эквивалентности называется *фактор-множеством* множества X по отношению R и обозначается X/R.

Чтобы задать отношение эквивалентности в множестве X, иногда поступают следующим образом. Выбирают некоторые элементы в X, называемые *эталонами*, и вводят в X отношение «X является эталоном для y» сокращенно: x Эт y. При этом требуется, чтобы выполнялись следующие условия:

а) Если x Эт y, то x Эт x (каждый эталон сам для себя является эталоном).

б) Если x Эт y и z Эт y, то $x = z$ (ни один элемент не имеет различных эталонов).

в) Для каждого $y \in X$ найдется такое $x \in X$, что x Эт y (каждый элемент имеет хотя бы один эталон).

Введем теперь в X отношение R, где xRy означает, что Эт x=Эт y. Из условий а) — в) следует, что это отношение рефлексивно (поскольку Эт x = Эт x), симметрично (поскольку из Эт x = Эт y следует, что Эт y = Эт x) и транзитивно (если Эт x = Эт y и Эт y = Эт z, то Эт x = = Эт z), поэтому оно является отношением эквивалентности. Множество эталонов называют *сечением* соответствующего разбиения X на классы эквивалентности.

Отношение эквивалентности лежит в основе всевозможных классификаций. При классификации некоторого множества в нем задают одно или несколько отношений эквивалентности и рассматривают классы эквивалентности, связанные с этими отношениями.

При иерархической классификации все множество разлагается на классы эквивалентности, после чего каждый класс разлагается на классы эквивалентности по другому отношению и т. д. Такая классификация применяется, например, в биологии (царства живых существ, типы, классы, отряды, роды, виды). Иерархическая классификация используется и в математике, например при классификации линий второго порядка.

Другой вид классификации основан на том, что указывается несколько свойств (например, форма, цвет, размер и т. д.), каждое из которых может принимать несколько значений (например, квадрат, круг, шестиугольник или красный, зеленый, черный и т. д.). После этого каждый класс характеризуется значениями, принимаемыми на нем данными свойствами (например, зеленые маленькие квадраты). Такой вид классификации используется в математике, например, при классификации многоугольников, с одной стороны, по числу сторон, а с другой — по признаку правильности или неправильности. Отметим, что пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности. Это позволяет сводить классификацию по нескольким признакам к классификации по одному сложному признаку.

4. Отношения порядка. Другим важным классом отношений являются отношения порядка. Они определяются следующим образом:

Отношение R в X называется *отношением строгого порядка*, если оно асимметрично и транзитивно, и *отношением нестрогого порядка*, если оно антисимметрично и транзитивно.

Из этого определения вытекает, что отношение нестрогого порядка является объединением отношения строгого порядка с отношением тождества. Связное отношение порядка называется отношением *линейного* (или *совершенного*) порядка.

Введем некоторые понятия, связанные с отношениями порядка. Каждому отношению порядка R в X соответствует обратное ему отношение R^{-1}, которое также является отношением порядка (например, отношению «меньше» в множестве действительных чисел обратно отношение «больше»). Если отношение порядка R связно, то противоположное ему отношение $\overline{R}$ также является отношением порядка. При этом, если R — строгое отношение порядка, то $\overline{R}$ — отношение нестрогого порядка, и обратно (например, отношению строгого порядка «меньше» в множестве действительных чисел противоположно отношение нестрогого порядка «не меньше», читаемого также «больше или равно»).

Множество с заданным на нем отношением порядка R (строгого или нестрогого) будем называть *упорядоченным*. В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумения, будем обозначать отношение строгого порядка знаком $<$ (меньше), а соответствующее ему отношение нестрогого порядка — знаком $\leqslant$ (меньше или равно). Обратные им отношения обозначаются $>$ (больше) и $\geqslant$ (больше или равно).

Если A — подмножество множества X, на котором задано отношение порядка R, то на A также задано отношение порядка, индуцированное отношением R (например, имея обычное отношение порядка в множестве действительных чисел, мы получаем отношение порядка и в любом его подмножестве). Если порядок R на X был линейным, то и индуцированный им порядок на A тоже линеен.

Пусть R — линейный порядок в X и a, b — такие элементы из X, что $a < b$. Только через $[a, b]$ обозначают совокупность всех элементов x из X, таких, что $a \leqslant x \leqslant b$. Эту совокупность называют *отрезком* $[a, b]$. Совокупность элементов x, таких, что $a < x < b$, называется *интервалом* $]a, b[$. Аналогично определяются *лучи* $[a, \rightarrow[$ и $]\leftarrow, a]$, а также *открытые лучи* $]a, \rightarrow[$ и $]\leftarrow, a[$.

Пусть A — подмножество упорядоченного множества X. Назовем элемент $a \in A$ *наименьшим* в A, если для любого $x \in A$ имеем $a \leqslant x$.

Очевидно, что в A может существовать не более одного наименьшего элемента. Таким же образом определяется понятие *наибольшего* элемента в A.

Подмножество A упорядоченного множества X называют *ограниченным сверху*, если в X есть хоть элемент b, такой, что $x \leqslant b$ для всех $x \in A$. Аналогично определяется ограниченность подмножества A снизу. Если в A есть наибольший элемент, то A ограничено сверху этим элементом. Любой элемент b, ограничивающий сверху подмножество A, называется *верхней гранью* этого подмножества. Если среди верхних граней подмножества A есть наименьшая, то ее называют *точной верхней гранью* для A и обозначают $\sup A$. Аналогично определяют *точную нижнюю грань* для A, обозначаемую $\inf A$.

Упорядоченное множество X называется *вполне упорядоченным*, если любое его непустое подмножество имеет наименьший элемент. Примером вполне упорядоченного множества может служить множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел.

С помощью аксиомы выбора доказывается, что любое множество X можно вполне упорядочить (как и все результаты, основанные на аксиоме выбора, данное утверждение не дает никакого указания, каким образом произвести это упорядочивание).

Элемент $a \in X$ называется *минимальным* в X, если в X нет ни одного элемента x, такого, что $x < a$. Аналогично определяется понятие *максимального* элемента в X. Ясно, что если в X есть наименьший элемент, то он является единственным минимальным элементом в X. Вообще говоря, в X может не быть ни одного минимального элемента, а может быть бесконечно много таких элементов. Например, в множестве $\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N} \setminus \{1\}$ отношение «a делится на b» задает порядок, для которого минимальными элементами будут все простые числа, и только они.

Упорядочивание множества X называется *плотным*, если между любыми двумя элементами a и b из X лежит хоть один элемент c, $a < c < b$. В этом случае между любыми двумя элементами лежит бесконечно много элементов из X.

Пусть A и B — два подмножества упорядоченного множества X. Скажем, что B *лежит справа* от A, если для любых $a \in A$, $b \in B$ выполняется условие $a \leqslant b$. Элемент c назовем *разделяющим подмножества* A и B, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $a \leqslant c \leqslant b$. Очевидно, что если для подмножеств A и B есть хоть один разделяющий элемент c, то B лежит справа от A.

Назовем упорядочивание множества X *непрерывным*, если оно плотно и для любых двух непустых подмножеств A и B из X, таких, что B лежит справа от A, найдется хотя один элемент c, разделяющий эти множества. Примером непрерывного упорядочивания может служить естественное упорядочивание прямой линии (или, что то же самое, множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел). Естественное упорядочивание множества $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел плотно, но не является непрерывным (например, множества $A = \{r \mid r \in \boldsymbol{Q},\ r < \sqrt{2}\}$ и $B = \{r \mid r \in \boldsymbol{Q},\ r > \sqrt{2}\}$ не разделяются никаким числом из $\boldsymbol{Q}$).

5. Основные соответствия и отношения в школьной математике и их свойства. Различные соответствия и отношения изучаются на протяжении всего курса математики средней школы. Перечислим наиболее важные из них.

При изучении понятия множества наиболее важными являются соответствие принадлежности «элемент x принадлежит множеству y», $x \in y$ и отношение включения «множество x является подмножеством множества y», $x \subset y$. Пересечением отношения включения и обратного ему отношения является отношение равенства множеств (если $x \subset y$ и $y \subset x$, то $x = y$). Далее, существенную роль играют отношения «множества x и y пересекаются» (имеют непустое пересечение) и «множества x и y не пересекаются» (т. е. $x \cap y = \varnothing$).

В совокупности подмножеств некоторого множества U имеет место отношение «подмножества x и y взаимно дополнительны».

В любом множестве, изучаемом в школе, определено отношение тождества или, как чаще говорят, равенства элементов и противоположное ему *отношение различия* или *неравенства* элементов. В числовых множествах отношение неравенства $x \neq y$ является объединением отношений порядка $x < y$ и $x > y$ (если $x \neq y$, то $x < y$ или $x > y$), которые взаимно обратны и несовместимы, т. е. не могут выполняться одновременно. Наряду с этими отношениями строгого порядка в числовых множествах рассматривают отношения нестрогого порядка $x \leqslant y$ и $x \geqslant y$. Объединением этих отношений является *полное отношение* (т. е. отношение, выполняющееся для всех пар элементов), а их пересечением является отношение тождества.

В множестве натуральных чисел определен ряд отношений, не имеющих места в произвольных числовых множествах: *отношения делимости* $x \vdots y$ (x делится на y), *взаимной простоты* «x взаимно просто с y». Образом числа x при отношении делимости является совокупность делителей этого числа, а полным прообразом числа y при том же отношении — совокупность всех кратных этого числа. Отношение делимости обладает свойствами антисимметричности и транзитивности, а потому является отношением нестрогого порядка. Этот порядок не линеен, так как, например, 5 не делится на 8 и 8 не делится на 5. Для любого натурального числа m в $\boldsymbol{N}$ определено отношение сравнимости по модулю m, записываемое в виде $x \equiv y \pmod{m}$. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

В множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел помимо отношений порядка (меньше, больше и т. д.) отметим *отношения соизмеримости* (x соизмеримо с y, если $x = ry$, где r — отличное от нуля рациональное число) и *сравнимости по модулю* a (x сравнимо с y по модулю a, если $x - y = ma$, где m — целое число). В частности, два числа с одинаковыми дробными частями сравнимы по модулю 1. Сравнимость по модулю играет роль при решении тригонометрических уравнений: решения тригонометрического уравнения $\operatorname{tg} x = a$ сравнимы по модулю π.

В школе рассматриваются *отношения эквивалентности* (равносильности) и *логического следования* для высказывательных форм. Отношение эквивалентности высказывательных форм, заданных на одном и том же множестве, сводится к совпадению их множеств истинности. Очевидно, что оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. А отношение «x следует из y» состоит в том, что множество истинности для x содержит множество истинности для y. Это отношение, очевидно, антисимметрично и транзитивно, а потому является отношением нестрогого порядка.

Много примеров соответствий и отношений дает геометрия. В множестве всех геометрических фигур определены отношения *конгруэнтности* и *подобия*. Оба эти отношения являются отношениями эквивалентности. Между множеством X точек и множеством Y геометрических фигур имеет место отношение *принадлежности* и противоположное ему отношение *непринадлежности*.

Между множеством прямых линий и множеством плоскостей в пространстве имеют место соответствия «пересекает», «параллельна», «перпендикулярна». В геометрии обычно применяют одно и то же слово для обозначения таких соответствий и им обратных: «прямая x пересекает плоскость y» и «плоскость y пересекает прямую x» и т. д. Это является отражением того, что в множестве всех геометрических фигур отношение «пересекает» (имеет непустое пересечение) симметрично.

Отношения «пересекает», «параллельна», «перпендикулярна» симметричны как в множестве прямых, так и в множестве плоскостей. При этом отношение параллельности обладает и свойствами рефлексивности и транзитивности (сейчас принято считать совпадающие прямые и плоскости параллельными).

Отметим еще различные соответствия между прямыми и окружностями, а также между прямыми и сферами, плоскостями и сферами. Для прямых и окружностей имеют место соответствия «касается», «пересекает», «проходит через центр». Такие же соответствия имеют место для прямых и сфер, плоскостей и сфер. Если прямая касается окружности, то окружность, в свою очередь, касается прямой. В этом находит отражение симметричность отношения касания в множестве всех гладких линий (две линии касаются в точке A, если касательные к ним в этой точке совпадают).

В множестве окружностей отметим *отношения концентричности, касания, ортогональности, пересечения*. Отношение концентричности является эквивалентностью. Отношение касания рефлексивно и симметрично, но не является транзитивным. Отношение ортогональности окружностей, так же как и отношение перпендикулярности прямых антирефлексивно и симметрично.

Каждой фигуре F на плоскости соответствует ее *граница* ∂F, т. е. множество граничных точек. Напомним, что точка a фигуры F называется *граничной*, если в любой окрестности точки a есть как точки этой фигуры, так и точки плоскости, не принадлежащие a. Тем самым определяется отношение «фигура Ф является границей плоской фигуры F».

Укажем еще на соответствия: «точка x является центром окружности y», «окружность x вписана в многоугольник y», «окружность x описана вокруг многоугольника y» и т. д.

Видим, что понятия отношения и соответствия пронизывают всю школьную математику. В то же время следует отметить, что за исключением отношений эквивалентности и порядка, роль которых в школьной математике будет ниже освещена особо, общая теория соответствий и отношений не играет сколько-нибудь заметной роли в построении школьной математики. По-видимому, это следует объяснить тем, что основные приложения общей теории отношений и соответствий лежат в области гуманитарных наук (экономики, лингвистики, социологии) и общей теории систем, а школьная математика по традиции направлена на естественнонаучные приложения, где роль отношений общего вида сравнительно мала.

Некоторую, хотя явно не формулируемую, роль играет в школьной математике операция композиции отношений и соответствий (например, соответствие «точка x является центром окружности, вписанной в треугольник z» является композицией соответствий «точка x является центром окружности y» и «окружность y вписана в треугольник z». Точно так же отношение параллельности прямых на плоскости является композицией отношения перпендикулярности с самим собой (символически так: $\parallel = \perp \cdot \perp$).

В таблице указаны упомянутые выше отношения и указаны их свойства.

Множество	Отношение	Рефлексивность	Симметричность	Асимметричность	Антисимметричность	Транзитивность	Связанность
P (U)	$A \subset B$	+	—	—	+	+	—
P (U)	$A \cap B \neq \varnothing$	—	+	—	—	—	—
P (U)	$B = A'$	—	+	—	—	—	—
любое	$a = b$	+	+	—	+	+	—
любое	$a \neq b$	—	+	—	—	—	+
N	$a \vdots b$	+	—	—	+	+	—
N	$a \mid b$	+	—	—	+	+	—
N	$D(a, b) = 1$	—	+	—	—	—	—
N	$a \equiv b \pmod{m}$	+	+	—	—	+	—
R	$a > b$	—	—	+	—	+	+
R	$a \geqslant b$	+	—	—	+	+	+
R	$a < b$	—	—	+	—	+	+

Продолжение

Множество	Отношение	Рефлексивность	Симметричность	Асимметричность	Антисимметричность	Транзитивность	Связанность
$\mathbf{R}$	$a \leqslant b$	+	—	—	+	+	+
$\mathbf{R}_+$	$a = \lambda b,\ \lambda \in \mathbf{Q}_+$	+	+	—	—	+	—
Высказывательные формы	$a \Leftrightarrow b$	+	+	—	—	+	—
Высказывательные формы	$a \Rightarrow b$	+	—	—	—	+	—
Фигуры	$a \sim b$	+	+	—	—	+	—
Фигуры	$a \simeq b$	+	+	—	—	+	—
Прямые	$a \parallel b$	+	+	—	—	+	—
Прямые	$a \perp b$	—	+	—	—	—	—
Лучи	$a \uparrow\uparrow b$	+	+	—	—	+	—
Лучи	$a \uparrow\downarrow b$	—	+	—	—	—	—
Векторы	Коллинеарность	+	+	—	—	+	—
Плоскости	$\alpha \parallel \beta$	+	+	—	—	+	—
Плоскости	$\alpha \perp \beta$	—	+	—	—	—	—
Окружности	Касание	+	+	—	—	—	—
Окружности	Концентричность	+	+	—	—	+	—
Окружности	Ортогональность	—	+	—	—	—	—

6. Отношения эквивалентности в арифметике и алгебре. Многие из отношений, рассмотренных в предыдущем пункте, относились к числу отношений эквивалентности (конгруэнтность и подобие геометрических фигур, параллельность прямых, концентричность окружностей, равночисленность конечных множеств и т. д.). В этом пункте будут разобраны еще некоторые отношения эквивалентности, встречающиеся в курсе математики средней школы.

Отношение «выражение x имеет то же числовое значение, что и выражение y» в множестве числовых выражений является отношением эквивалентности. Оно определяет разбиение всего множества числовых выражений на классы эквивалентности, состоящие из выражений, имеющих одно и то же числовое значение.

В множестве натуральных чисел отношением эквивалентности является и сравнимость по заданному модулю m. Это отношение определяет разбиение множества натуральных чисел на *классы вычетов по модулю* m. С ними удобнее, чем с натуральными числами, иметь дело при обсуждении проблем делимости натуральных чисел.

Два буквенных выражения, содержащих одни и те же буквы, считаются *тождественно равными*, если при замене этих букв любыми числами получаются числовые выражения, либо имеющие одно и то же числовое значение, либо одновременно не имеющие число, — отношение тождественного равенства является эквивалентностью.

Понятие эквивалентности играет важную роль при решении уравнений и неравенств. Два уравнения называют *эквивалентными*, если множества их решений совпадают. Этим определяется разбиение всего множества уравнений на классы эквивалентности. При решении уравнения переходят от уравнения к более простому эквивалентному ему уравнению, пока не приходят к уравнению вида $x = a$ или дизъюнкции таких уравнений (для уравнений с несколькими переменными к уравнению вида $x_1 = a_1 \wedge \ldots \wedge x_n = a_n$ или дизъюнкции таких уравнений). Для уравнений такого вида множество решений очевидно. Аналогичным путем решают неравенства.

7. Классы эквивалентности в школьной математике. Каждому отношению эквивалентности в множестве X отвечают разбиение этого множества на попарно непересекающиеся подмножества и соответствующее фактор-множество. Как указывалось выше, переход от данного множества к его фактор-множеству является широко используемым методом введения новых математических понятий. Приведем примеры использования этого метода в школьной математике.

а) Обозначим через X множество всех дробей (т. е. пар вида (m, n), где $m \in \boldsymbol{Z}$ и $n \in \boldsymbol{N}$). Назовем дроби (m_1, n_1) и (m_2, n_2) эквивалентными, если выполняется равенство $m_1n_2 = m_2n_1$. Легко проверить, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, а потому задает разбиение всего множества X на классы эквивалентности. Эти классы называют *рациональными числами* (например, число $\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \ldots, \frac{3n}{4n}, \ldots\right)$), а соответствующее фактор-множество — множеством $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел. В каждом классе эквивалентности содержится одна и только одна несократимая дробь. Ее можно принять за эталон данного класса. Поэтому говорят о числах $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{6}$ и т. д.

б) Отношение параллельности в множестве всех прямых на плоскости является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называют *пучками параллельных прямых*. Каждому такому пучку соответствует бесконечно удаленная точка плоскости, а фактор-множество можно отождествить с бесконечно удаленной прямой на плоскости. В качестве эталона для пучка параллельных прямых можно взять прямую этого пучка, проходящую через фиксированную точку O плоскости.

в) Отношение сонаправленности в множестве лучей на плоскости тоже является эквивалентностью. Оно задает разбиение множества лучей на классы эквивалентности, которые называют *направлениями на плоскости*. Каждому пучку параллельных прямых отвечают два направления на плоскости.

г) Пусть X — множество направленных отрезков (включая отрезки нулевой длины) на плоскости. Назовем два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ эквивалентными, если они имеют одинаковую длину и одно и то же направление (это значит, что лучи AB и CD сонаправлены). Нетрудно проверить, что это отношение обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Оно задает разбиение множества X на классы эквивалентности, называемые *векторами*. Аналогично определяются векторы в пространстве.

Каждый направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ однозначно задается указанием его начала и конца, т. е. упорядоченной парой точек (A, B). Если отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ эквивалентны, то параллельный перенос, отображающий точку A в точку B, отображает точку C в точку D. Поэтому каждому вектору взаимно-однозначно соответствует параллельный перенос. Это позволяет в известном смысле слова отождествить множество векторов с множеством параллельных переносов.

При изучении операций над векторами обычно выбирают некоторую точку O на плоскости и рассматривают для каждого вектора его эталон — направленный отрезок, входящий в этот вектор и начинающийся в точке O.

Из разобранных примеров видно, что разбиение на классы эквивалентности широко используется в школьной математике для введения новых математических понятий. Элементы соответствующих классов эквивалентности выступают в роли представителей получаемых понятий (дробь — представитель соответствующего рационального числа, направленный отрезок — представитель соответствующего вектора и т. д.). Если операции или отношения в разбиваемом на классы множестве согласованы с отношением эквивалентности, то их можно перенести на фактор-множество. Например, сложение рациональных чисел сводится к сложению дробей, сложение векторов — к сложению направленных отрезков по правилу параллелограмма и т. д.

8. Отношения эквивалентности и группы преобразований. Во многих случаях отношение эквивалентности в множестве X задается благодаря тому, что на этом множестве действует некоторая группа преобразований G. Говорят, что задано *действие* группы G на множестве X, если каждому элементу $g \in G$ поставлено в соответствие преобразование $x \to g \cdot x$ множества X (т. е. биекция X на себя), причем для любых $g_1, g_2 \in G$ и $x \in X$ выполнено равенство

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x.$$

Множество X, на котором определено действие группы G, называют *G-множеством* или *G-пространством*.

Назовем элемент $x \in X$ G-эквивалентным элементу $y \in X$, если существует такое $g \in G$, что $y = g \cdot x$. Обозначим это отношение так:

$x \overset{G}{\sim} y$. Покажем, что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. В самом деле, единичному элементу e группы G соответствует тождественное преобразование множества X. Поскольку оно оставляет все элементы из X неподвижными, то для любого $x \in X$ имеем $e \cdot x = x$ и потому $x \overset{G}{\sim} x$. Значит, отношение $\overset{G}{\sim}$ рефлексивно.

Далее, пусть $x \overset{G}{\sim} y$. Тогда найдется такое $g \in G$, что $y = g \cdot x$. В этом случае имеем: $g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x$, и поскольку $g^{-1} \in G$, то $y \overset{G}{\sim} x$. Значит, из $x \overset{G}{\sim} y$ следует $y \overset{G}{\sim} x$ и потому отношение $\overset{G}{\sim}$ симметрично. Наконец, пусть $x \overset{G}{\sim} y$ и $y \overset{G}{\sim} z$. Тогда найдутся такие элементы g_1 и g_2 в G, что $y = g_1 \cdot x$ и $z = g_2 \cdot y$. Но тогда $z = g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$, причем $g_1 g_2 \in G$. Значит, $x \overset{G}{\sim} z$. Это доказывает, что отношение $\overset{G}{\sim}$ транзитивно.

Итак, доказано, что отношение $\overset{G}{\sim}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, а потому является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются *орбитами* множества X относительно действия группы G. Например, пусть X — евклидова плоскость и G — группа поворотов плоскости вокруг точки O. Тогда G-эквивалентными будут точки плоскости, равноудаленные от точки O, а орбитами являются окружности с центром (включая «окружность нулевого радиуса», т. е. саму точку O).

Если само множество X является одной из орбит, т. е. если для любых x и y из X найдется такое $g \in G$, что $y = g \cdot x$, то говорят, что G действует на X *транзитивно*, а X называют *однородным пространством с группой преобразований* G. Каждому элементу a однородного пространства X соответствует подгруппа H в G, состоящая из преобразований, оставляющих этот элемент неподвижным. Ее называют *стабилизатором* элемента a.

Например, группа перемещений транзитивно действует на евклидовой плоскости. Стабилизатором точки A плоскости является группа, состоящая из поворотов вокруг точки A и симметрий относительно прямых, проходящих через эту точку.

Действие группы G на пространстве X распространяется на булеан $P(X)$ этого пространства: каждому подмножеству $A \subset X$ соответствует образ $g(A)$ этого подмножества при действии $x \to g \cdot x$. Этим определяется отношение G-эквивалентности для подмножеств пространства X. К числу таких отношений принадлежат отношения конгруэнтности (эквивалентности относительно группы перемещений), подобия (эквивалентности относительно группы подобия) и т. д. Каждой из групп геометрических преобразований соответствует свое отношение G-эквивалентности.

Если фигуры A и B являются G-эквивалентными, то с точностью до преобразований группы G их свойства одинаковы. Поэтому считают, что геометрия, соответствующая данной группе, изучает свойства геометрических фигур, не изменяющиеся при преобразованиях этой группы. Например, параллельность прямых сохраняется при аффинных преобразованиях, а потому она является аффинным свойством.

Понятие G-эквивалентности используется не только в геометрии, но и в алгебре. Обозначим через S_n симметрическую группу, состоящую из перестановок букв $x_1, \ldots, x_n$. Действие этой группы на множестве букв $\{x_1, \ldots, x_n\}$ переносится на множество многочленов от этих букв. Например, при перестановке местами букв x и y многочлен $3x^2 + 4y^3$ переходит в многочлен $3y^2 + 4x^3$. Эти многочлены эквивалентны относительно группы перестановок двух букв.

9. Однородные пространства и школьная математика. Многие геометрические фигуры, изучаемые в школьной математике, являются однородными пространствами относительно некоторой группы преобразований. Например, плоскость является однородным пространством относительно группы всех перемещений — для любых двух точек найдется перемещение, переводящее одну из точек в другую. Стабилизатором точки является совокупность перемещений, оставляющих эту точку неподвижной (т. е. поворотов вокруг этой точки и симметрий относительно проходящих через нее осей). Плоскость является однородным пространством и относительно группы параллельных переносов. Но в этом случае стабилизатор любой точки состоит из тождественного преобразования (переноса на нулевой вектор).

Однородными пространствами являются также окружность (относительно группы поворотов вокруг ее центра и симметрий относительно прямых, проходящих через ее центр) и сфера (относительно аналогичной группы). Однородным пространством является прямой круговой цилиндр. На нем транзитивно действует группа винтовых перемещений, элементы которой являются композициями поворотов вокруг оси цилиндра и параллельных переносов в направлении этой оси (легко видеть, что с помощью винтового движения можно перевести любую точку цилиндра в любую другую точку того же цилиндра). Но существуют иные преобразования, отображающие цилиндр в себя: центральные симметрии относительно точек, лежащих на оси цилиндра, симметрии относительно плоскостей, проходящих через эту ось, и плоскостей, перпендикулярных ей, а также композиции этих симметрий с винтовыми перемещениями.

Двуполостный прямой круговой конус не является однородным пространством относительно какой-либо группы линейных преобразований, так как ясно, что при любом линейном преобразовании конуса в себя его вершина должна оставаться неподвижной. Однородным пространством является одна пола конуса с отброшенной вершиной. Эта фигура переходит в себя при гомотетиях относительно вершины конуса (с положительным коэффициентом), при поворотах конуса относительно оси, симметриях относительно плоскостей, проходящих через ось, и некоторых других линейных преобразованиях линейного пространства.

Глава III

ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§ 1. ОТОБРАЖЕНИЯ И СТРУКТУРЫ

1. Основные понятия. Понятие отображения является частным случаем общего понятия соответствия между множествами. Именно *отображением из множества X в множество Y* называют любое функциональное соответствие между этими множествами. Иными словами, отображением из X в Y называют такое соответствие f между этими множествами, что образ любого $x \in X$ либо пуст, либо состоит из одного элемента (если xfy_1 и xfy_2, то $y_1 = y_2$). Частным случаем этого понятия является *отображение множества X в Y*, т. е. всюду определенное функциональное соответствие между X и Y. Если f – отображение X в Y, то образ каждого элемента $x \in X$ состоит из одного элемента $y \in Y$. Как и для любого соответствия, пишут: $y = f(x)$.

Отметим основные понятия, касающиеся отображений (см. [15]).

а) Множество $D(f) = \{x | \exists\, y \in Y,\ y = f(x)\}$ называют *областью определения* отображения f, а $E(f) = \{y | \exists x \in X,\ y = f(x)\}$ — его *множеством* (или *областью*) *значений*. В дальнейшем запись $f: X \to Y$ будет обозначать, что f — отображение X в Y. Если $y = f(x)$, то пишут: $f: x \to y$.

б) На отображения (как из X в Y, так и X в Y) переносятся указанные в п. 2 § 4 главы II понятия теории соответствий между множествами: отображение f *инъективно*, если полный прообраз любого элемента y из Y содержит не более одного элемента, и *сюръективно*, если полный прообраз любого элемента y из Y непуст. Инъективное и сюръективное отображение X в Y называется *биекцией* или *биективным соответствием* между X и Y.

Если существует биекция $f: X \to Y$, то множества X и Y называют *равномощными* и пишут: $|X| = |Y|$. Отношение равномощности множеств является эквивалентностью.

в) Если f — отображение из X в Y, а g — отображение из Y в X, то *композиция* $g \circ f$ этих соответствий является отображением из X в Z, которое задается так: пусть $y = f(x)$ и y принадлежит области определения отображения g, тогда $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Заметим, что пересечение $E(f) \cap D(g)$ может быть пусто. В этом случае $g \circ f$ — *пустое соответствие*, т. е. соответствие, при котором образ любого элемента $x \in X$ пуст.

г) Соответствие f^{-1}, *обратное отображению* $f: X \to Y$, вообще говоря, не является отображением Y в X. Лишь в случае, когда f инъективно, обратное соответствие является отображением из Y в X.

Если же f биективно, то f^{-1} — отображение Y в X. Отметим очевидные равенства:

$$(\forall x \in X)\ (f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad (\forall y \in E(f))\ (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

д) В п. 2 § 2 главы II уже упоминалось, что отображение $f : X \to Y$ можно распространить до отображения $\boldsymbol{P}(X)$ в $\boldsymbol{P}(Y)$, а также о том, что отображения $f_k : X_k \to Y_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, допускают распространение до отображения $f_1 \times \ldots \times f_n$ множества $X_1 \times \ldots \times X_n$ в $Y_1 \times \ldots \times Y_n$.

Если $A \subset X$, то $f(A) = \{y \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$. Если $B \subset Y$, то $f^{-1}(B) = \{x \mid \exists y \in B,\ y = f(x)\}$. Если $A_k \subset X_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, то

$$(f_1 \times \ldots \times f_n)(A_1 \times \ldots \times A_n) = f_1(A_1) \times \ldots \times f_n(A_n).$$

е) С каждым отображением $f : X \to Y$ связано разбиение множества X на классы эквивалентности, состоящие из полных прообразов элементов множества Y. В самом деле, если $y_1 \neq y_2$, то $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing$, поскольку ни один элемент $x \in X$ не может иметь двух различных образов y_1 и y_2. Кроме того, $x \in f^{-1}(y)$, где $y = f(x)$, и потому все множество X разбито на подмножества вида $f^{-1}(y)$.

ж) Обозначим через X/f фактор-множество, соответствующее разбиению X на полные прообразы при отображении $f : X \to Y$ (т. е. множество, элементами которого являются эти прообразы, $X/f = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$). Тогда отображение f можно представить в виде композиции трех отображений: *канонического отображения* $\varphi : X \to X/f$, при котором каждый элемент $x \in X$ переходит в $f^{-1}(f(x))$, отображения $\psi : X/f \to f(X)$, при котором множество $f^{-1}(y)$ отображается в y, и *естественного вложения* χ множества $f(X)$ в Y:

$$X \xrightarrow{\varphi} X/f \xrightarrow{\psi} f(X) \xrightarrow{\chi} Y.$$

При этом отображение φ сюръективно, ψ — биективно и χ — инъективно.

з) Обозначим через Y^X множество всех отображений вида $f : X \to Y$. Если в Y задана некоторая структура, то с ее помощью можно определить в некоторых случаях соответствующую структуру в Y^X. Например, если множество Y упорядочено, то порядок в Y^X определяется следующим образом: $f_1 < f_2$, где $f_1, f_2 \in Y^X$, если для всех $x \in X$ имеем: $f_1(x) < f_2(x)$. Если в Y задана алгебраическая операция $*$, то соответствующая операция в Y^X определяется так:

$$(f_1 * f_2)(x) = f_1(x) * f_2(x).$$

2. Морфизмы структур. Чаще всего приходится иметь дело не с отображениями произвольных множеств, а с отображениями множеств, наделенных определенной структурой, в множество, наделенное структурой того же рода (например, отображениями упорядоченных множеств в упорядоченные, алгебр в алгебры того же рода, топологических пространств в топологические пространства, линейных пространств в линейные пространства и т. д.). При этом рассматриваются совокупности отображений с некоторыми свойствами.

Пусть задан некоторый род структур S и $\{X_\alpha\}$ — класс множеств, наделенных структурами данного рода. Будем называть *объектами* *типа* S пары, состоящие из множеств и заданных на них структур.

Множество M, состоящее из отображений объектов типа S в объекты того же типа, назовем *совокупностью морфизмов для типа структур* S, если выполнены следующие условия:

а) для любого объекта (X_α, S) тождественное отображение X_α на себя принадлежит множеству M;

б) если отображения φ: $X_\alpha \to X_\beta$ и ψ: $X_\beta \to X_\gamma$ принадлежат M, то и отображение $\psi \circ \varphi$ принадлежит M;

в) объекты (X_α, S_α) и (X_β, S_β) изоморфны тогда и только тогда, когда в M есть взаимно-обратные биективные отображения φ: $X_\alpha \to X_\beta$ и ψ: $X_\beta \to X_\alpha$.

Приведем примеры морфизмов структур.

1) Если $\{X_\alpha\}$ — класс упорядоченных множеств, то следующие типы отображений f образуют совокупности морфизмов:

а) *сохраняющие строгий порядок*, т. е. такие, что из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$,

б) *сохраняющие нестрогий порядок*, т. е. такие, что из $x \leqslant y$ следует $f(x) \leqslant f(y)$.

2) Если $\{X_\alpha\}$ — класс алгебраических объектов одного и того же рода (группы, кольца, поля, полугруппы и т. д.), то совокупность морфизмов образуют *гомоморфизмы алгебр* (см. п. 4 §1 главы IV).

3) Если $\{X_\alpha\}$ — класс топологических пространств, то совокупности морфизмов образуют:

а) *непрерывные отображения* (т. е. такие отображения f: $X_\alpha \to X_\beta$, для которых прообраз открытого в X_β множества открыт X_α),

б) *открытые отображения* (т. е. отображения, для которых образ открытого множества открыт).

4) Если $\{X_\alpha\}$ — класс метрических пространств, то совокупность морфизмов образуют *изометрические отображения*, т. е. такие отображения f: $X_\alpha \to X_\beta$, что

$$r_\alpha(x, y) = r_\beta(f(x), f(y)).$$

Другую совокупность морфизмов в классе метрических пространств образуют *нерастягивающие отображения*, т. е. такие отображения:

$$f\colon X_\alpha \to X_\beta, \text{ что } r_\alpha(x, y) \leqslant r_\beta(f(x), f(y)).$$

5) Если $\{X_\alpha\}$ — класс линейных пространств над полем P, то *линейные отображения* образуют совокупность морфизмов этого класса.

В случае, когда на множествах заданы одновременно несколько структур (например, алгебраическая структура и топология или топология и порядок и т. д.), рассматривают морфизмы, соответствующие обеим структурам (*непрерывные гомоморфизмы, монотонные непрерывные отображения* и т. д.).

Наличие структур в множествах X и Y позволяет помимо выделения морфизмов структур определять некоторые классы отображений.

Например, если Y — метрическое пространство, то выделяется класс *ограниченных отображений* X в Y. Он состоит из отображений f, для которых существует такое число $a \in R_+$, что $r(f(x_1), f(x_2)) \leqslant a$ для всех $x_1, x_2 \in X$.

3. Инвариантные структуры. Пусть S — структура на множестве X и g — какое-нибудь преобразование этого множества. Это преобразование определяет преобразование ступени, которой принадлежит структура S. Если при этом S (как элемент соответствующей ступени) переходит в себя, говорят, что структура S *инвариантна* относительно g. Поскольку структурами могут быть подмножества в X, тем самым определяется понятие инвариантного подмножества в X: подмножество A из X инвариантно относительно преобразования g, если $g(A) = A$. Например, если G — группа преобразований множества X и A — одна из орбит этого преобразования, то A инвариантно относительно любого преобразования из G.

Совокупность преобразований множества X, относительно которых инвариантна структура S, образует группу, называемую *группой автоморфизмов* данной структуры. Группа автоморфизмов структуры топологического пространства X состоит из всех биективных отображений X на X, таких, что образ любого открытого множества открыт и прообраз любого открытого множества открыт. Такие преобразования называют *гомеоморфизмами* пространства X. Группа автоморфизмов структуры упорядоченного множества состоит из биективных отображений X на X, сохраняющих порядок элементов. Примером такого отображения может служить отображение $x \to \lambda x$ множества $\boldsymbol{R}$ в себя, где $\lambda > 0$. Если в множестве X задана алгебраическая операция $*$, то соответствующая группа автоморфизмов состоит из биективных преобразований X, таких, что $f(x * y) = f(x) * f(y)$ (эти преобразования называются *автоморфизмами* соответствующей *алгебраической структуры*). Например, отображение $x \to \lambda x$, где $\lambda \neq 0$, является автоморфизмом группы $(\boldsymbol{R}; +)$, а отображение $x \to x^\lambda$, где $\lambda > 0$, — автоморфизмом группы $(\boldsymbol{R}_+; \cdot)$ (в самом деле, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ и $(xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda$).

Назовем отображение $\varphi\colon X \to Y$ *инвариантным* относительно преобразования g множества X, если $\varphi \circ g = \varphi$ (т. е. если для любого $x \in X$ имеем $\varphi(g \cdot x) = \varphi(x)$. Аналогично определяется инвариантность φ относительно преобразования h множества Y (в этом случае $h \cdot \varphi(x) = \varphi(x)$). Например, периодичность функции означает ее инвариантность относительно некоторых сдвигов прямой линии (т. е. некоторых преобразований вида $x \to x + a$). Именно функция f на $\boldsymbol{R}$ имеет *период* T, если для любого $n \in \boldsymbol{Z}$ эта функция инвариантна относительно сдвига $x \to x + nT$ (достаточно потребовать ее инвариантности относительно сдвигов $x \to x + T$ и $x \to x - T$).

Четность функции означает ее инвариантность относительно преобразования $x \to -x$. Нечетные функции не являются инвариантными при этом преобразовании — для них равенство $f(-x) = f(x)$ не имеет места. Но они весьма просто преобразуются при указанном преобразовании аргумента: $f(-x) = -f(x)$.

Функция, инвариантная относительно всех преобразований некоторой группы, называется *инвариантом* этой группы. Например, при любых перемещениях плоскости не изменяется функция $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, выражающая квадрат расстояния между точками. При перемещениях плоскости не изменяются и другие функции, например

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(площадь треугольника $A_1A_2A_3$ с вершинами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$) и т. д. Но все эти функции можно выразить через расстояния между точками — основной инвариант группы перемещений плоскости.

Вообще, для групп преобразований, рассматриваемых в школьной математике (перемещения, подобия и т. д.), всегда можно указать несколько основных инвариантов, через которые выражаются остальные инварианты.

В алгебре понятие инвариантности относительно некоторых групп преобразований также играет важную роль. Например, изучаются многочлены, инвариантные относительно перестановок переменных, — так называемые *симметрические* многочлены. Как доказывается в курсе алгебры, существуют основные симметрические многочлены от n переменных, через которые выражаются остальные симметрические многочлены, а именно:

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j,$$

$$\ldots$$

$$\sigma_n = x_1 \ldots x_n.$$

При $n = 2$ имеем:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right] = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2),$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2. \qquad (1)$$

Выражение симметрических многочленов через основные симметрические многочлены используется при решении систем алгебраических уравнений. Например, чтобы решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^4 + y^4 = 97, \end{cases} \qquad (2)$$

введем новые переменные $x + y = u$, $xy = v$ и используем равенство (1). Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u = 5, \\ u^4 - 4u^2v + 2v^2 = 97. \end{cases} \qquad (3)$$

Из нее следует, что $5^4 - 4 \cdot 5^2 v + 2v^2 = 97$ и потому $v = 6$ или $v = 44$. Теперь осталось решить две системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 44. \end{cases}$$

Из них находим, что решение системы (2) имеет вид

$$\left\{(2;\ 3),\ (3;\ 2);\ \left(\frac{5+\sqrt{-151}}{2};\ \frac{5-\sqrt{-151}}{2}\right),\ \left(\frac{5-\sqrt{-151}}{2};\ \frac{5+\sqrt{-151}}{2}\right)\right\}.$$

Наряду с симметрическими многочленами в алгебре рассматривают многочлены, инвариантные не при всех перестановках переменных, а лишь при некоторых группах таких перестановок. Например, многочлен $\Delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ инвариантен при четных перестановках переменных. Нечетные перестановки меняют знак этого многочлена. Отсюда вытекает, что квадрат этого многочлена, т. е. $\Delta^2 = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2$, — симметрический многочлен. Его можно выразить через основные симметрические многочлены. Это выражение играет роль при решении кубических уравнений в радикалах (точно так же, как выражение

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$$

играет существенную роль при решении квадратных уравнений).

Таким образом, одна и та же идея инвариантности относительно данной группы преобразований полезна и при решении геометрических задач, и при решении систем алгебраических уравнений.

4. Основные виды отображений, изучаемые в школьной математике. В школьной математике изучают в основном множества, состоящие из чисел или числовых кортежей (числовые множества), геометрические фигуры (точечные множества), а также множества, состоящие из геометрических фигур. Существуют четыре основных вида отображений, представляющих интерес для школьной математики:

а) *отображения числовых множеств в числовые множества,*

б) *отображения числовых множеств в точечные множества,*

в) *отображения множеств геометрических фигур в числовые множества,*

г) *отображения точечных множеств в точечные множества.*

Каждому из этих видов отображений соответствует особое направление в школьной математике. Наиболее важны по своим обширным приложениям *числовые функции числового аргумента,* т. е. отображения типа а). Они являются основным объектом изучения в математическом анализе. Чтобы задать такое отображение, надо указать некоторое числовое множество X (т. е. множество, состоящее из чисел или числовых кортежей) и каждому элементу $x \in X$ этого множества сопоставить число или числовой кортеж. Если X состоит из числовых кортежей длины n, а $f(X)$ — из числовых кортежей длины m, то получаем отображение f из R^n в R^m. Такое отображение сводится к заданию m функций от n переменных, принимающих числовые значения, т. е. задается следующим образом: $f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$, где

$$y_k = f_k(x_1, \ldots, x_n),\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Метод координат устанавливает связь между числовыми и геометрическими множествами. Каждому $x \in \boldsymbol{R}$ соответствует точка $M(x)$ координатной прямой, причем это соответствие биективно. Каждой тройке координат (x, y, z) биективно соответствует точка $M(x, y, z)$ координатного пространства. Аналогично устанавливаются связи между парами чисел и точками координатной плоскости. Эти соответствия можно рассматривать и как отображения из $\boldsymbol{R}^k$ в Π_k, и как отображения из Π_k в $\boldsymbol{R}^k$, $k = 1, 2, 3$. Отображения из $\boldsymbol{R}^k$ в то или иное множество геометрических фигур позволяют определять число параметров, от которых зависят элементы этого множества. Например, совокупность окружностей на плоскости является трехпараметрическим семейством, поскольку любая окружность однозначно определяется тройкой чисел (a, b, r), где a и b — координаты ее центра, а r — длина радиуса.

Измерение геометрических величин является примером отображений множеств геометрических фигур в числовые множества. В процессе измерения каждой геометрической фигуре, принадлежащей некоторой совокупности фигур, ставится в соответствие неотрицательное число — *мера* этой фигуры, причем должны выполняться определенные условия аддитивности и инвариантности.

Геометрические преобразования являются биективными отображениями Π_k на Π_k, $k = 1, 2, 3$. Каждое такое преобразование может быть задано набором числовых функций. Например, параллельные переносы плоскости преобразуют точку $M(x, y)$ в точку $M'(x', y')$, где $x' = x + a$, $y' = y + b$. Как и любые отображения, геометрические преобразования допускают каноническое распространение на булеан множества Π_k. Иными словами, каждой фигуре $A \subset \Pi_k$ соответствует ее образ при данном преобразовании.

Проектирование пространства на плоскость или плоскости на прямую линию не является геометрическим преобразованием, поскольку эти отображения не инъективны (разные точки могут иметь одинаковые проекции). Это отображения Π_3 на Π_2 и Π_2 на Π_1.

Помимо рассмотренных типов отображений в школьной математике рассматривают и иные отображения: выражений в функции, функций в функции, функций в числа и т. д. Например, если $A(x, y)$ — некоторое выражение с переменными x и y, имеющее значение для любой пары (x, y), принадлежащей множеству $X \times Y$, то это выражение задает функцию F — отображение $X \times Y$ в $\boldsymbol{R}$, имеющее вид $F: (x, y) \to A(x, y)$. Дифференцирование ставит в соответствие каждой дифференцируемой функции f ее производную f', т. е. является отображением множества дифференцируемых функций в множество функций. Вычисление определенного интеграла от функции является отображением множества интегрируемых функций в множество чисел и т. д. Ниже мы подробнее рассмотрим различные виды отображений в школьной математике.

5. Морфизмы структур и операции над отображениями в школьной математике. Множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел несет на себе ряд структур: с точки зрения алгебры оно является полем (а также аддитивной группой), с точки зрения топологии — топологическим пространством, с точки зрения теории упорядоченных множеств — линейно упорядоченным множеством. Помимо этого на $\boldsymbol{R}$ задана мера (если рассматривать ее на отрезках, то это просто длины отрезков) и метрика (расстояние между точками).

Среди отображений $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ (т. е. числовых функций числового аргумента) особую роль играют морфизмы соответствующих структур. Изучаемое в школе понятие непрерывной функции является иным названием непрерывного отображения $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, т. е. связано с одной из совокупностей морфизмов класса топологических пространств. Различные виды монотонных функций (возрастающие, неубывающие, убывающие, невозрастающие) связаны с совокупностью морфизмов класса упорядоченных множеств. С алгебраическими структурами множества $\boldsymbol{R}$ связаны базисные элементарные функции (подробнее см. § 4). Меру на $\boldsymbol{R}$ сохраняют отображения вида $x \to \pm x + b$, а отношение мер — линейные отображения $x \to kx + b$. Отображения вида $x \to \pm x + b$ сохраняют и метрику на $\boldsymbol{R}$, а линейные отображения — отношение расстояний.

Наличие различных структур в множестве $\boldsymbol{R}$ позволяет ввести структуры в множество числовых функций. Например, множество числовых функций, заданных на множестве X, упорядочивается так: $f_1 < f_2$, если $f_1(x) < f_2(x)$ для всех $x \in X$. Заметим, что, хотя порядок на множестве $\boldsymbol{R}$ линеен, определяемый им порядок на множестве функций не является линейным — может случиться, что для одних значений x имеем $f_1(x) < f_2(x)$, а для других $f_1(x) > f_2(x)$. Сравнение с функцией, тождественно равной нулю, позволяет выделить классы положительных и отрицательных функций на $\boldsymbol{R}$.

Алгебраические операции в $\boldsymbol{R}$ приводят к определению соответствующих операций в множестве числовых функций. Например, сумма функций определяется равенством $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, их произведение — равенством $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ и т. д. Наличие отношения порядка в $\boldsymbol{R}$ позволяет определить для функций операцию max: $\max(f_1, f_2) = F$, если для любого $x \in \boldsymbol{R}$ имеем $F(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$. Аналогично определяется в множестве числовых функций операция min.

Ряд вопросов школьной математики связан с операцией композиции отображений. Это понятие играет существенную роль в геометрии, где рассматриваются композиции различных геометрических преобразований. При изучении числовых функций рассматривают преобразования графиков. Эта операция связана с композицией произвольных числовых функций и некоторых стандартных функций, таких, как $x \to x + a$, $x \to ax$, $x \to |x|$. В зависимости от порядка, в котором производится композиция функций, получаем из функции f новые функции, значения которых при данном значении x равны $f(x + a), f(ax), f(|x|), f(|x + a|), f(x) + a, af(x), |f(x)|, |f(x + a)|$ и т. д. Выполняя же композицию функции f с указанными выше стандартными функциями с обеих сторон, получаем функции, значения которых равны $f(x + a) + b$, $bf(x + a)$, $|f(x + a)|$, $bf(|x| + a)$, $|f(|x|)|$ и т. д. Из школьного курса математики известно, как строить графики таких функций по заданному графику функции f.

6. Топологические и метрические пространства в школьной математике. Роль общего понятия топологического пространства в школьной математике завуалирована тем фактом, что топологическая структура изучаемых в школе объектов (пространств $\boldsymbol{R}$, Π_3 и их подпространств) задается с помощью метрики. На первый план выступает понятие расстояния между точками пространства, причем некоторые фундаментальные понятия топологии (открытые и замкнутые множества, связность, граница множества и т. д.) не получают явного определения в школьном курсе математики, а другие (непрерывная функция, окрестность) получают определение, основанное на метрической структуре. Преимущественному изучению метрических свойств способствует то, что в геометрии изучаются в основном перемещения и преобразования подобия, определение которых связано с метрической структурой геометрического пространства.

Тем не менее роль общих топологических понятий в школьном курсе математики весьма велика: различие между линиями, поверхностями и телами имеет топологический характер, понятие границы фигуры, различие между открытыми и замкнутыми фигурами и т. д. также относятся к области топологии. В курсе геометрии рассматривают параллельное проектирование плоскостей, которое относится к классу аффинных преобразований и, в общем случае, не сохраняет ни метрику, ни отношение расстояний. В то же время это преобразование оставляет инвариантной топологическую структуру плоскости.

Как указывалось в п. 4 § 2 главы II, чтобы задать топологическую структуру пространства, достаточно указать совокупность его открытых подмножеств, причем эта совокупность должна удовлетворять определенным требованиям. Часто понятие открытого множества определяют, задавая для каждой точки a пространства X *систему окрестностей* $\{U_\alpha(a)\}$, обладающую следующими свойствами:

а) Для любой окрестности $U_\alpha(a)$ точки a имеем $a \in U_\alpha(a)$.

б) Если $U_\alpha(a)$ и $U_\beta(a)$ — окрестности точки a, то существует окрестность $U_\gamma(a)$ этой точки, такая, что $U_\gamma(a) \subset U_\alpha(a) \cap U_\beta(a)$.

в) Если $b \in U_\alpha(a)$, то существует окрестность $U_\beta(b)$ точки b, такая, что $U_\beta(b) \subset U_\alpha(a)$.

Задание системы окрестностей позволяет ввести понятие *граничной точки* подмножества A в X:

точка a называется *граничной* для A, если в любой окрестности этой точки есть как точки из A, так и точки из $X \setminus A$.

Топология в X вводится следующим образом:

подмножество G в X называется *открытым*, если оно не содержит ни одной своей граничной точки.

Можно доказать, что если система окрестностей в X обладает свойствами а) — в), то определенная с ее помощью топология в X удовлетворяет аксиоме в) п. 5 § 2 главы II.

Если в пространстве X задана метрика, то δ-окрестностью точки a называют подмножество $U(a, \delta) = \{x \mid r(a, x) < \delta\}$. При этом выполняются аксиомы а) — в), т. е. задается топология в X. Окрестности в метрических пространствах обладают важным свойством *отделимости*.

для любых двух точек a и b из X ($a \neq b$) существуют непересекающиеся окрестности этих точек (например, достаточно взять окрестности $U\left(a, \frac{\delta}{2}\right)$ и $U\left(b, \frac{\delta}{2}\right)$, где $\delta = r(a, b)$).

Совокупность граничных точек подмножества A топологического пространства X называется *границей* этого подмножества и обозначается ∂A. Подмножество A открыто, если $A \cap \partial A = \varnothing$. Если же $\partial A \subset A$ (т. е. A содержит все свои граничные точки), то подмножество A называется *замкнутым* в X. Для любого подмножества A в X множество $A \setminus \partial A$ называется открытым ядром A, а множество $A \cup \partial A$ — *замыканием* A. В метрических пространствах (как и в любых топологических пространствах со свойством отделимости) любая точка является замкнутым подмножеством.

В школьной математике понятие границы множества существенно при изучении геометрии. Оно позволяет, например, различать открытый и замкнутый круги (замкнутый круг берется вместе с граничной окружностью, а открытый круг является дополнением к этой окружности в замкнутом круге).

7. Непрерывные и гомеоморфные отображения в школьной математике. Напомним, что отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y называется непрерывным, если полный прообраз любого открытого подмножества A из Y открыт в X. На языке окрестностей это означает следующее: если $b = f(a)$ и $V(b)$ — окрестность точки b, то найдется такая окрестность $U(a)$ точки a, что $f[U(a)] \subset V(b)$. Биекция $f: X \to Y$, непрерывная вместе с обратным ей отображением f^{-1}, называется гомеоморфным отображением X на Y (или гомеоморфизмом). В случае, когда топология в X и Y задана метрикой, любое изометрическое отображение $f: X \to Y$ является гомеоморфным. В частности, гомеоморфно любое перемещение плоскости или пространства. Все аффинные преобразования плоскости или пространства, и в частности все преобразования подобия, являются гомеоморфизмами.

Свойства пространства, сохраняющиеся при гомеоморфизмах, называются *топологическими*. Из них наиболее важными для школьной математики являются свойства *связности*, *компактности* и *размерности*. Множество $A \subset X$ называют *несвязным*, если существует непрерывная числовая функция f, отображающая A на множество $\{0, 1\}$, и *связным*, если такой функции не существует. Фигуры, изучаемые в школьной математике, состоят обычно из конечного числа *связных компонент*. Можно доказать, что *непрерывный образ связного множества связен*.

Многие фигуры, рассматриваемые в школьной математике, замкнуты и ограничены (круг, окружность, многоугольники и т. д.). Замкнутые и ограниченные фигуры на плоскости и в пространстве называют *компактными*. Можно доказать, что *образ замкнутой ограниченной фигуры при непрерывном отображении снова замкнут и ограничен*.

Наконец, рассмотрим понятие *размерности*. После того как Кантор открыл равномощность множества точек отрезка с множеством точек пространства, а Пеано построил непрерывное отображение отрезка на квадрат, стало ясно, что наглядно очевидное понятие размерности фигуры нуждается в уточнении. Пользуясь понятием границы, это понятие можно сформулировать следующим образом:

а) Пустое множество имеет размерность -1.

б) Множество X имеет размерность n, если любая его точка обладает сколь угодно малой окрестностью, размерность границы которой равна $n-1$.

Например, прямая линия имеет размерность 1, так как любая ее точка имеет сколь угодно малую окрестность, граница которой состоит из двух точек и потому нульмерна. Малых же окрестностей с пустой границей точки прямой не имеют. Размерность топологического пространства является топологическим свойством, т. е. сохраняется при гомеоморфных отображениях. Можно доказать, что размерность любой встречающейся в школьной математике линии (окружности, гиперболы, параболы, графиков функций и т. д.) равна 1, размерность любой поверхности равна двум, а размерность шара и других пространственных тел равна трем.

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

1. Термы и функции. Чтобы задать числовую функцию числового аргумента, надо выбрать подмножество X в $\boldsymbol{R}^n$ (область определения функции) и каждому $x \in \boldsymbol{R}^n$ поставить в соответствие элемент из $\boldsymbol{R}^m$, т. е. кортеж $(y_1, \ldots, y_m)$, где $y_k \in \boldsymbol{R}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Как отмечалось выше, задание такой функции сводится к заданию m функций, принимающих значения в $\boldsymbol{R}$. Поэтому в дальнейшем, говоря о числовой функции, будем считать, что она принимает значения в $\boldsymbol{R}$ (или в $\boldsymbol{C}$, если функция комплексна).

В случае, когда множество X конечно, функцию f можно задать перечислением, указав все пары вида $(x, f(x))$, $x \in X$. Однако, как правило, множество X бесконечно, и потому функции задают с помощью выражений (рациональных, иррациональных, трансцендентных). В математике вместо слова *выражение* часто употребляют слово *терм*.

Пусть $A(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый терм, содержащий n переменных $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $(a_1, \ldots, a_n)$ — кортеж, состоящий из n чисел. Подставляя в терм вместо x_1 значение a_1, вместо x_2 значение $a_2, \ldots$, вместо x_n значение a_n, получаем числовой терм, который обозначают $A(a_1, \ldots, a_n)$. Если в результате выполнения указанных операций получим определенное число c, то его называют *значением* терма $A(x_1, \ldots, x_n)$, при заданных значениях $a_1, \ldots, a_n$ переменных $x_1, \ldots$, $\ldots, x_n$. Терм $A(a_1, \ldots, a_n)$ задает программу вычисления этого числа c. Может случиться, что заданная программа вычисления невыполнима. Тогда говорят, что *терм* (выражение) $A(x_1, \ldots, x_n)$ *не имеет числового значения* при данных значениях переменных.

Назовем подмножество X в $\boldsymbol{R}^n$, состоящее из всех кортежей, для которых терм $A(x_1, \ldots, x_n)$ имеет значение, *областью существования* этого терма. Если X_1 — некоторое подмножество в X, то пара (A, X_1)

определяет числовую функцию переменных $x_1, \ldots, x_n$, заданную на множестве X_1. Отсюда следует, что каждому терму соответствует, вообще говоря, бесконечное множество функций, отличающихся друг от друга выбором подмножества X_1 в X.

Заметим, что различным термам $A(x_1, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, \ldots, x_n)$ может соответствовать одна и та же функция на множестве X. Например, $(x+y)(x-y)$ и x^2-y^2 задают одну и ту же функцию на $\boldsymbol{R}^2$, поскольку для любых x и y из $\boldsymbol{R}$ справедливо равенство $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$. Замену данного терма $A(x_1, \ldots, x_n)$ другим термом, задающим ту же функцию на множестве X, называют *тождественным преобразованием* терма $A(x_1, \ldots, x_n)$ на этом множестве.

Следует иметь в виду, что два терма, тождественно равные на некотором множестве, могут оказаться различными на более широком множестве. Например, $\sqrt{x^2}$ и x принимают одинаковые значения на множестве $\boldsymbol{R}_0$ неотрицательных чисел, но имеют различные значения на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел. Точно так же $2x + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-4}$ и $2x$ тождественно равны на множестве чисел, отличных от 4, но не являются тождественно равными на всем множестве $\boldsymbol{R}$ (поскольку первый терм не имеет значения при $x = 4$, а второй имеет в этой точке значение 8). Невнимательность к этим вопросам зачастую служит источником ошибок школьников.

До сих пор рассматривались функции, определяемые одним термом для всех значений x из области определения функции. Функции могут задаваться и несколькими термами, например:

$$A(x) = \begin{cases} x+5, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^2+4, \text{ если } x > 0, \end{cases}$$

или

$$A(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ рационально}, \\ 1, \text{ если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

С термами связан также неявный способ задания функций. Пусть $A(x_1, \ldots, x_n, y)$ — терм. Для любого числа c равенство $A(x_1, \ldots, x_n, y) = c$ определяет соответствие между множествами $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{R}$. Это соответствие, вообще говоря, не является функциональным по y, т. е. задание значений $x_1, \ldots, x_n$ не определяет однозначно y. Кроме того, оно не всюду определено: например, из равенства $x^2+y^2 = 4$ нельзя определить значение y, когда $x = 3$. В курсе математического анализа даются условия, при которых соответствие $A(x_1, \ldots, x_n, y) = c$ всюду определено и функционально по y для некоторых подмножеств $X \subset \boldsymbol{R}^n$ и $Y \subset \boldsymbol{R}$. Иными словами, даны условия, при которых каждому кортежу $(a_1, \ldots, a_n)$ из X соответствует одно и только одно число b из Y, такое, что $A(a_1, \ldots, a_n, b) = c$. Этим определяется функция f, заданная на множестве X, принимающая значения в Y и такая, что для любых $(a_1, \ldots, a_n) \in X$ имеем $A(a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n)) = c$. Говорят, что эта *функция f неявно задана* равенством $A(x_1, \ldots, x_n, y) =$

$= c$. Разумеется, можно ставить и вопрос об определении из этого равенства x_1 как функции от $x_2, \ldots, x_n$, y и т. д.

Неявное задание функций встречается в школьной математике при решении систем уравнений способом подстановки.

Например, пусть надо решить уравнение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^3 + y^3 = 28. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $y = \pm\sqrt{10 - x^2}$, откуда получаем, что $x^3 + (\pm\sqrt{10 - x^2})^3 = 28$. Решая это уравнение относительно x и подставляя найденные значения x в равенство $y = \pm 10 - \sqrt{x^2}$, находим решения системы. Однако запись $y = \pm\sqrt{10 - x^2}$ не задает функцию, поскольку, например, значению $x = 1$ соответствуют два значения y: -3 и 3. На самом деле из равенства $y = \pm\sqrt{10 - x^2}$ можно получить бесконечное множество функций, полагая $y = \sqrt{10 - x^2}$ на любом подмножестве X отрезка $[-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$ и $y = -\sqrt{10 - x^2}$ на дополнении к X. Если потребовать, чтобы получившиеся функции были непрерывны, то остаются лишь две функции, задаваемые соответственно выражениями $y = \sqrt{10 - x^2}$ и $y = -\sqrt{10 - x^2}$ на отрезке $[-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$.

2. Другие способы задания функций. Для исследования многих прикладных вопросов недостаточно множества функций, задаваемых рациональными и даже иррациональными термами. Как известно, закон радиоактивного распада имеет вид $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, а закон гармонических колебаний — вид $y = A \sin(\omega t + \varphi)$. Большинство задач, изучавшихся в конце XVII в., когда было введено общее понятие функции, сводилось к так называемым элементарным функциям (см. п. 4).

Уже в середине XVIII в. было обнаружено, что отыскание длины дуги эллипса приводит к интегралам от элементарных функций, которые не выражаются через элементарные функции. Например, не выражается через элементарные функции интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Изучение таких интегралов привело к понятию *эллиптического интеграла*. Для изучения функций, выражаемых эллиптическими интегралами, оказалось полезно перейти к обратным им функциям, получившим название *эллиптических функций*.

Решение задач математической физики потребовало дальнейшего расширения запаса функций. Были введены *функции Бесселя* (называемые также *цилиндрическими функциями*, поскольку они возникают при решении различных задач, связанных с бесконечным круговым цилиндром), *сферические функции*, *функции параболического цилиндра*, *гипергеометрические функции* и т. д.

Одновременно с расширением запаса функций были подвергнуты исследованию различные методы задания функций. Выяснилось, что все функции, необходимые для решения задач математического анализа, могут быть получены с помощью арифметических операций, примененных к переменным и числам, и операции предельного перехода. Приведем некоторые примеры.

Показательную функцию e^x можно определить следующим образом:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Видим, что значение e^x получается из значения x и чисел 1, n с помощью арифметических операций, дающих выражение $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, и последующего предельного перехода по n. Ту же функцию можно задать иначе:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right).$$

И здесь сначала с помощью арифметических операций получаем из x и чисел выражение

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

а потом применяем операцию предельного перехода.

Значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ получается из значений непрерывной функции f с помощью сложения, деления и предельного перехода:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right).$$

Поэтому в указанную выше схему ложится и определение функций с помощью интегральных представлений, например:

$$\ln x = \int\limits_1^x \frac{dx}{x}, \quad x>0.$$

В математическом анализе были исследованы также изображения функций с помощью *бесконечных произведений* и *бесконечных цепных дробей*. Например, справедливо равенство

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)\left(1+\frac{x}{n\pi}\right).$$

Оно напоминает разложение многочлена на линейные множители:

$$f(x) = a_n\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_n}\right),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — корни этого многочлена и a_n — его свободный член.

Обилие выражений, представляющих одну и ту же функцию, потребовало выделения некоторой стандартной записи функций. Наиболее гибким и удобным аппаратом для исследования функций оказались *степенные ряды*. Функции, встречавшиеся при решении практических задач, были, как правило, *аналитическими*. Это означало, что в достаточно малой окрестности почти всех значений аргумента эти функции можно было представить в виде сумм степенных рядов вида

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots .$$

Значения аргумента, в окрестности которых такое представление функции невозможно, называются *особыми точками* функции f.

Поскольку над комплексными числами можно выполнять арифметические операции и операцию предельного перехода, задание функций в виде сумм степенных рядов позволило определить функции комплексного переменного. Аналитические функции комплексного переменного обладают рядом свойств. Одним из самых замечательных является следующее свойство:

Если функции f_1 и f_2 аналитичны в области Ω и принимают одинаковые значения на множестве X, имеющем предельную точку, являющуюся внутренней для Ω, то они совпадают во всей области Ω.

Из этого утверждения вытекает, что две аналитические функции, совпадающие на сколь угодно малой линии, совпадают во всей области аналитичности этих функций. Поэтому, например, функции, аналитические на каком-либо участке действительной оси, имеют единственное аналитическое продолжение в комплексную область.

Наряду с «явным» заданием функций термами в математическом анализе рассматривают задание функций как решений некоторых дифференциальных уравнений. Как известно, дифференциальное уравнение n-го порядка имеет бесконечное множество решений, зависящее от n произвольных постоянных. Значения этих постоянных определяются начальными или граничными условиями, общее число которых должно равняться n. Например, функцию $\sin x$ можно определить как решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, а функцию $\cos x$ — как решение того же уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3. Непрерывные функции в школьной математике. Понятие непрерывности играет важную роль не только в вопросах геометрии, но и при изучении начал математического анализа, т. е. свойств числовых функций числового аргумента. Одно из важнейших для школьной математики свойств непрерывных числовых функций выражается теоремой о промежуточном значении: *если функция f непрерывна на промежутке Δ и принимает на нем значения m и M, где $m < M$, то она принимает и все значения, промежуточные между m и M.* Топологический смысл этой теоремы состоит в следующем. Единственными связными подмножествами на прямой являются промежутки (отрезки, интервалы, лучи, полуоткрытые промежутки). Поскольку образ связного множества при непрерывном отображении связен, то образом промежутка при непрерывном отображении $f : \Delta \to$

$\to R$ снова является промежуток. Именно это и утверждает теорема о промежуточном значении.

Роль этой теоремы в школьной математике связана со следующими вопросами:

а) определение и существование обратных функций,

б) решение уравнений,

в) решение неравенств.

Если функция f не только непрерывна, но и монотонна на отрезке $[a, b]$, то она биективно отображает этот отрезок на отрезок $[f(a), f(b)]$ (или $[f(b), f(a)]$, если она убывает). Аналогичное утверждение справедливо для функций, непрерывных и монотонных на промежутке любого вида. Из него следует, что такие функции имеют обратные, причем можно доказать, что обратные функции непрерывны и монотонны. Это позволяет, доказав, например, что функция $f: x \to x^n$ непрерывна и монотонна на луче $[0, +\infty[$, вывести отсюда существование, непрерывность и монотонность обратной к ней функции $f^{-1}: x \to \to x^{1/n}$. При этом, поскольку функция x^n отображает луч $[0, +\infty[$ на себя, то функция $x^{1/n}$ обладает тем же свойством. Точно так же из того, что показательная функция a^x при $a > 1$ непрерывна и монотонна на всей числовой прямой, причем ее областью значений является луч $]0, +\infty[$, вытекает существование, непрерывность и монотонность функции, обратной к a^x, т. е. логарифмической функции. Эта функция определена на луче $]0, +\infty[$, а ее областью значений является вся числовая прямая. Аналогичное утверждение справедливо при $0 < < a < 1$.

Сложнее обстоит дело для тригонометрических функций, поскольку они не являются монотонными на всей числовой прямой. Здесь приходится выделять участки монотонности функций и рассматривать обратные функции, принимающие значения на этих участках монотонности. При этом, разумеется, выбирают такие участки монотонности, на которых функция принимает (по одному разу) каждое возможное значение.

Отметим, что для монотонных функций равносильны два утверждения:

а) *функция f непрерывна на отрезке* $[a; b]$,

б) *функция f принимает все значения, лежащие на отрезке* $[f(a); f(b)]$.

Для немонотонных функций эта равносильность не имеет места.

Теорему о промежуточных значениях используют при решении уравнений: если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень на этом отрезке (и притом только один, если f монотонна на $[a, b]$). Применяемый при доказательстве теоремы метод последовательного деления отрезка пополам дает метод отыскания приближенного значения корня.

На той же теореме о промежуточных значениях основан применяемый для решения неравенств способ интервалов. Пусть надо решить неравенство $f(x) > 0$, где f — непрерывная на промежутке Δ функция, обращающаяся в нуль в точках $x_1, \ldots, x_n$. Они разбивают промежуток Δ на части, внутри которых функция f сохраняет знак (если бы она приняла на такой части значения различных знаков, то она должна была бы принимать и нулевое значение внутри промежутка, вопреки тому, что она обращается в нуль лищь на его концах). Отбирая части, внутри которых функция положительна, получаем решение неравенства.

4. Множество элементарных функций. Одной из наиболее важных задач школьного курса математики является изучение элементарных функций. В связи с этим естественно возникает вопрос, почему в школе изучают именно этот класс функций, а не, например, эллиптические функции или функции Бесселя. Мы изложим сейчас математические соображения, приводящие к вычленению класса элементарных функций из всей совокупности функций, и укажем связи, существующие между теоретико-функциональной линией школьного курса математики и его арифметической и алгебраической линиями, а также линией геометрических преобразований. Будет показано, что элементарные функции теснее всего связаны с основными алгебраическими структурами математики — группами $(\boldsymbol{R}; +)$ и $(\boldsymbol{R}_+; \cdot)$ (т. е., проще говоря, с операциями сложения действительных чисел и умножения положительных действительных чисел).

Чтобы выделить какой-либо класс функций, целесообразно указать некоторый базисный набор функций, входящих в этот класс, и совокупность операций над функциями, не выводящих за пределы этого класса. Назовем совокупность функций *замкнутой* относительно некоторой операции, если ее применение к функциям данной совокупности дает функцию, принадлежащую той же совокупности.

Например, множество целых рациональных функций замкнуто относительно операций сложения и умножения функций — сумма и произведение целых рациональных функций снова являются целыми рациональными функциями. Это множество функций замкнуто и относительно операции дифференцирования — производная целой рациональной функции является функцией того же типа. Замкнуто это множество и относительно операции композиции функций — если f и g — целые рациональные функции, то и их композиция $g \circ f$ принадлежит тому же множеству. Замкнут относительно всех перечисленных выше операций и класс рациональных функций. Но относительно операции интегрирования класс целых рациональных функций замкнут, а класс рациональных функций не является замкнутым (поскольку интеграл от рациональной функции может выражаться через логарифмы или обратные тригонометрические функции).

Введем теперь следующее определение:

Определение 1. *Элементарными функциями* называют функции следующего вида:

а) *базисные элементарные функции*, задаваемые выражениями: C, где $C \in \boldsymbol{R}$, x, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\arcsin x$, которые рассматриваются во всей области, где они имеют значение;

б) функции вида $f + g$, $f \cdot g$ и $f \circ g$, где f и g— элементарные функции.

Заметим, что класс элементарных функций достаточно обширен. К множеству элементарных функций принадлежат все функции вида x^α, $x > 0$. В самом деле, при $x > 0$ имеем $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, а функции e^x и $\alpha \ln x$ элементарны. Поскольку $|x| = (x^2)^{1/2}$, то функция, равная $|x|$ при $x \neq 0$, также относится к элементарным. Относится к ним и функция

$$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

(эта функция не определена при $x = 0$), а также функция $\frac{1}{x} = \operatorname{sgn} x \cdot e^{-\ln|x|}$. Элементарна и функция $\cos x$, так как $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, а $\sin x$ и $x + \frac{\pi}{2}$ — элементарные функции, а также функция $\operatorname{tg} x$, так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$, а функция $\frac{1}{\cos x}$ является композицией функций $\cos x$ и $\frac{1}{x}$, принадлежащих к числу элементарных функций.

5. Показательная функция и изоморфные отображения группы ($\boldsymbol{R}$; $+$) на группу ($\boldsymbol{R}_+$; $\cdot$). Отбор операций, относительно которых замкнуто множество элементарных функций, не может вызвать сомнений. Поскольку операции сложения и умножения отнсятся к основным алгебраическим операциям в $\boldsymbol{R}$, ясно, что сумма и произведение элементарных функций должны принадлежать тому же множеству. Композиция функций тоже включена в число основных операций, так как для элементарных функций она сводится к подстановке некоторого выражения вместо аргумента x. Не включена операция перехода к обратной функции. Дело в том, что, с одной стороны, обратные функции существуют не для всех элементарных функций (поскольку не все элементарные функции инъективны), а с другой стороны, функции, обратные элементарным, могут оказаться чрезмерно сложными. Например, даже функция, обратная многочлену, вообще говоря, не выражается через x и числа с помощью операций сложения, умножения, деления и извлечения корня. Функции, обратные многочленам, принадлежат к классу алгебраических функций, т. е. функций, неявно задаваемых некоторым многочленом от двух переменных. Иными словами, функция f алгебраична, если существует такой многочлен $P(x, y)$, что $P(x, f(x)) = 0$. Исследование алгебраических функций требует привлечения методов теории функций комплексного переменного, топологии, алгебраической геометрии и не относится к элементарной математике. Переход от данной функции к обратной использован лишь при составлении множества базисных функций.

Обсудим теперь, как составлено множество базисных функций. Присутствие в нем постоянной функции C, равно как и функции x, не вызывает сомнений (такие функции есть не только на числовых, но и на любых множествах).

Выясним теперь причину включения в список базисных функций показательной функции e^x. Функцию a^x, где $a > 0$, $a \neq 1$, можно определить следующим образом:

Определение 1. *Показательной функцией с основанием* a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют такую функцию f, что

а) $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \boldsymbol{R}_+$,

б) функция f непрерывна для всех $x \in \boldsymbol{R}$,

в) для любых x_1 и x_2 из $\boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2), \tag{1}$$

г) имеет место равенство $f(1) = a$.

Вместо $f(x)$ пишут a^x.

Это определение можно сформулировать иным образом. Функция $f: x \to a^x$ является отображением множества $\boldsymbol{R}$ на множество $\boldsymbol{R}_+$, причем равенство (1) показывает, что f преобразует операцию сложения в множестве $\boldsymbol{R}$ в операцию умножения в $\boldsymbol{R}_+$. Иными словами, $f: x \to a^x$ является непрерывным гомоморфным отображением группы $(\boldsymbol{R}; +)$ на группу $(\boldsymbol{R}_+; \cdot)$, таким, что $f(1) = a$. Ниже будет показано, что это отображение биективно, а потому является изоморфным отображением $(\boldsymbol{R}; +)$ на $(\boldsymbol{R}_+; \cdot)$.

Когда какой-либо математический объект (число, множество, отображение и т. д.) определен путем указания его свойств, возникают два основных вопроса: существует ли объект, обладающий требуемыми свойствами, и однозначно ли он определяется этими свойствами?

Таким образом, надо ответить на два вопроса:

а) *Существует ли хотя бы одна функция, обладающая свойствами а) — г) из определения 1?*

б) *Однозначно ли определяют эти свойства функцию* a^x?

Мы увидим ниже, что ответ на оба вопроса положителен. Иными словами, верна следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Тогда существует одно и только одно непрерывное гомоморфное отображение группы $(\boldsymbol{R}; +)$ на группу $(\boldsymbol{R}_+; \cdot)$, такое, что $f(1) = a$.*

Доказательство. Докажем сначала единственность искомого отображения. Предположим, что существует отображение f с требуемыми свойствами. С помощью метода математической индукции доказывается, что тогда для любых действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ имеем

$$f(x_1 + \ldots + x_n) = f(x_1) \ldots f(x_n).$$

В частности, для любого натурального числа n получаем, что

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{f(1) \ldots f(1)}_{n \text{ раз}} = a^n.$$

Далее, пусть r — положительное рациональное число, $r = \frac{m}{n}$. Так как $nr = m$ и $f(nr) = [f(r)]^n$, то $[f(r)]^n = f(m) = a^m$. Поскольку по условию $f(r) > 0$, то это равенство однозначно определяет значение $f(r)$: $f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}$. Если $a > 1$, то и $f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m} > 1$, а если $0 < a < 1$, то и $0 < f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) < 1$. Принимая во внимание, что $a^{r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2 - r_1}$, выводим, что если $a > 1$, то при $r_2 > r_1$ имеем $a^{r_2} > a^{r_1}$, а если $0 < a < 1$, то при $r_2 > r_1$ имеем $a^{r_2} < a^{r_1}$.

Пусть теперь x — положительное иррациональное число, и пусть (r_n) — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Так как функция f по условию непрерывна, то отсюда должно следовать, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)$. Значит, функция f однозначно определена для всех положительных значений x.

Осталось отметить, что для любого x имеем $f(x+0) = f(x) \cdot f(0)$ и потому $f(0) = 1$, а $f(x) f(-x) = f(x-x) = f(0) = 1$ и потому $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

Мы доказали, что если функция f с требуемыми свойствами существует, то ее значение при любом значении аргумента однозначно определено.

Перейдем теперь к доказательству существования показательной функции. Для этого воспользуемся теорией рядов. Положим

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{2}$$

и покажем, что функция φ удовлетворяет условиям а) — в) доказываемой теоремы.

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right| = 0,$$

то ряд (2) абсолютно сходится при всех значениях x. При этом если $x > 0$, то сумма этого ряда больше 1 и потому положительна. Поскольку сумма степенного ряда непрерывна в области сходимости, то функция φ непрерывна для всех значений x. Докажем, что при любых s и t выполняется равенство $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$. В силу теоремы об умножении абсолютно сходящихся рядов имеем

$$\varphi(s)\cdot\varphi(t) = \left(1 + s + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^n}{n!} + \ldots\right) \times \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots\right) = 1 + (s+t) + \left(\frac{s^2}{2!} + st + \frac{t^2}{2!}\right) + \ldots + \left(\frac{s^n}{n!} + \ldots + \frac{1}{k!\,(n-k)!} s^{n-k} t^k + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right) + \ldots =$$
$$= 1 + (s+t) + \frac{1}{2!}(s^2 + 2st + t^2) + \ldots + \frac{1}{n!}(s^n + \ldots + C_n^k s^{n-k} t^k + \ldots + t^n) + \ldots$$

Но по формуле бинома Ньютона

$$s^n + \ldots + C_n^k s^{n-k} t^k + \ldots + t^n = (s+t)^n,$$

и потому

$$\varphi(s)\varphi(t) = 1 + (s+t) + \frac{(s+t)^2}{2!} + \dots + \frac{(s+t)^n}{n!} + \dots = \varphi(s+t).$$

Тем самым доказано выполнение равенства (2).

Из (2) следует, что при $x > 0$ имеем $\varphi(-x)\varphi(x) = 1$, т. е. $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, и потому функция φ положительна при всех значениях x.

Нам осталось доказать, что $E(\varphi) = \boldsymbol{R}_+$, т. е. что функция φ принимает любые положительные значения. Для этого заметим, что $\varphi(n) = 1 + n + \dots > n$. С другой стороны, $\varphi(-n) = \frac{1}{\varphi(n)} < \frac{1}{n}$. Значит, функция φ принимает как сколь угодно большие, так и сколь угодно малые положительные значения. Выберем теперь любое положительное число y_0. Найдется такое n, что $\frac{1}{n} < y_0 < n$. Так как функция φ непрерывна, то по теореме о промежуточном значении найдется такое x_0, что $\varphi(x_0) = y_0$. Итак, $E(\varphi) = \boldsymbol{R}_+$.

Таким образом, функция φ удовлетворяет требованиям а) — в) теоремы 1. Значит, она является показательной функцией с основанием $\varphi(1)$. Это основание (т. е. сумму числового ряда $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$) обозначим e; тогда $\varphi(x) = e^x$.

Итак, доказано существование показательной функции с основанием e. Очевидно, что функция e^{kx} при $k \neq 0$ также удовлетворяет условиям а) — в) теоремы и потому является показательной функцией с основанием $a = e^k$. Но для любого $a > 0$, $a \neq 1$ найдется такое $k \neq 0$, что $e^k = a$. Тем самым доказано существование показательной функции с произвольным положительным основанием a.

6. Свойства показательной функции. Из теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда внутри круга сходимости следует, что показательная функция e^x дифференцируема. При этом, почленно дифференцируя ряд (2) п. 5, получаем, что

$$(e^x)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{n!} + \dots = 1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = e^x.$$

Это означает, что функция e^x является решением дифференциального уравнения $y' = y$, удовлетворяющим начальному условию $y(0) = 1$.

Так как $(e^x)' = e^x > 0$, то показательная функция e^x возрастает. Отсюда следует, что функция e^{kx} возрастает при $k > 0$ и убывает при $k < 0$. Поэтому отображение $f: x \to e^{kx}$ множества $\boldsymbol{R}$ на множество $\boldsymbol{R}_+$ биективно при любом $k \neq 0$.

Из биективности отображения $x \to e^x$ следует, что существует функция, обратная функции e^x. Ее обозначают $\ln x$ и называют *натуральным логарифмом*. Таким образом, утверждения $y = e^x$ и $x = \ln y$, $y > 0$ эквивалентны. Отсюда следует, что $e^{\ln y} = y$, $y > 0$ и $\ln(e^x) = x$.

Функция e^{kx} удовлетворяет условиям а) — в) п. 2 и имеет значение e^k при $x = 1$. Значит, она совпадает с функцией $(e^k)^x$: $(e^k)^x = e^{kx}$.

Отсюда следует, что

$$((e^k)^m)^x = (e^{km})^x = e^{kmx} = (e^k)^{mx}. \tag{1}$$

Для любого $a > 0$, $a \neq 1$ найдется такое $k \neq 0$, что $a = e^k$. Из (1) получаем, что

$$(a^m)^x = a^{mx}. \tag{2}$$

Это равенство имеет место и при $a = 1$, если положить $1^x = 1$ для всех x.

Поскольку $a^x = e^{kx}$, то функция a^x биективна при любом $a > 0$, $a \neq 1$ и потому тоже имеет обратную функцию. Эту функцию обозначают $\log_a x$ и называют *логарифмической функцией с основанием* a.

Логарифмическая функция $\ln x$ задает изоморфное отображение группы ($\boldsymbol{R}_+$; $\cdot$) на группу ($\boldsymbol{R}$; $+$), обратное изоморфизму $x \to e^x$. Рассмотрим теперь автоморфизмы группы ($\boldsymbol{R}_+$; $\cdot$). Композиция f отображения $x \to e^x$ с таким автоморфизмом φ также является изоморфным отображением группы ($\boldsymbol{R}$; $+$) на ($\boldsymbol{R}_+$; $\cdot$). В самом деле,

$$f(s+t) = \varphi(e^{s+t}) = \varphi(e^s \cdot e^t) = \varphi(e^s) \cdot \varphi(e^t) = f(s) \cdot f(t).$$

Но любой изоморфизм ($\boldsymbol{R}$; $+$) на ($\boldsymbol{R}_+$; $\cdot$) имеет вид $x \to e^{\lambda x}$, $\lambda \neq 0$. Значит,

$$\varphi(e^x) = f(x) = e^{\lambda x}.$$

Обозначая e^x через y, получаем, что автоморфизм φ имеет вид

$$\varphi(y) = y^{\lambda},\ y \geqslant 0.$$

Мы доказали, что любой автоморфизм группы ($\boldsymbol{R}_+$; $\cdot$) является степенной функцией. Легко доказывается, что любой автоморфизм группы ($\boldsymbol{R}$; $+$) имеет вид $x \to kx$.

7. Другие подходы к понятию показательной функции. Доказывая существование показательной функции, мы опирались на теорию степенных рядов. Это доказательство может быть проведено иными способами, например, с помощью теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения. Применяя эту теорему к дифференциальному уравнению $y' = y$, убеждаемся, что для любого C существует единственное решение этого уравнения, принимающее при $x = 0$ значение C. Обозначим через $\exp x$ решение этого уравнения, такое, что $y(0) = 1$. Тогда решение, принимающее при $x = 0$ значение C, имеет вид $y = C \cdot \exp x$. В самом деле, $(C \exp x)' = C \cdot \exp x$ и $C \cdot \exp 0 = C \cdot 1 = C$.

Докажем, что функция $\exp(x+a)$ при любом a удовлетворяет условиям а) — в) теоремы 1 п. 5. В самом деле, для любого a функция $\exp(x+a)$ также удовлетворяет уравнению $y' = y$:

$$(\exp(x+a))' = \exp(x+a) \cdot (x+a)' = \exp(x+a).$$

Значит, функция $\exp(x+a)$ имеет вид $C \exp x$. Полагая $x = 0$ в равенстве $\exp(x+a) = C \exp x$, убеждаемся, что $\exp a = C \exp 0$. Но по условию $\exp 0 = 1$, и потому $\exp a = C$, т. е. $\exp(x+a) = \exp a \cdot \exp x$. Этим доказано выполнение условия (1) п. 5.

В силу того что функция $\exp x$ однозначно определена в некоторой окрестности $]-h, h[$ точки $x = 0$, получаем, что она определена в любой точке x числовой оси. В самом деле, найдется такое n, что $\left|\frac{x}{n}\right| < h$. А тогда $\exp x = \left(\exp \frac{x}{n}\right)^n$.

Поскольку функция $\exp x$ дифференцируема при любом значении x, она непрерывна на всей числовой оси. Покажем, что она положительна при всех значениях x. В самом деле, в противном случае нашлась бы точка, где эта функция отрицательна, а тогда нашлось бы значение C, такое, что $\exp C = 0$. Но тогда $\exp 0 = \exp(-C + C) = \exp(-C) \exp C = 0$, вопреки условию $\exp 0 = 1$. Значит, все значения функции $\exp x$ положительны.

Мы доказали, что функция $\exp x$ удовлетворяет условиям а) — в) определения 1 п. 5 и потому является показательной функцией $\exp x = a^x$. Основание a этой функции равно $\exp 1$. Нетрудно проверить, что оно совпадает с ранее введенным основанием e (суммой ряда (2) из п. 5). Это вытекает из того, что, как было показано выше, функция e^x, определенная с помощью ряда (2) п. 5, удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = y$ и начальному условию $y(0) = 1$.

Решение дифференциального уравнения $y' = y$ можно представить в виде

$$x = \int \frac{dy}{y}.$$

Этот подход позволяет определить функцию $\ln x$, обратную функции e^x, как интеграл вида

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Можно, отправляясь от этого определения логарифмической функции, вывести все ее свойства, а потом получить соответствующие свойства показательной функции как обратной логарифмической.

Изложенные выше подходы к понятию показательной функции требуют использования методов дифференциального и интегрального исчислений. Существуют изложения теории показательной функции, использующие лишь понятия предела и непрерывности. Одно из них, по сути дела, дается в средней школе. При этом изложении показательная функция определяется конструктивно: для натуральных значений показателя — формулой $a^n = a \ldots a$ (n раз) для положительных рациональных значений показателя — формулой $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, а для отрицательных рациональных значений показателя — формулой $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. После этого определяем значение a^x при $a > 1$ и иррациональном значении x как число, разделяющее множества

$$X = \{a^r \mid r \in \boldsymbol{Q},\ r < x\} \text{ и } Y = \{a^r \mid r \in \boldsymbol{Q},\ r > x\}$$

(либо как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, $r_n \in \boldsymbol{Q}$).

Чтобы доказать однозначность такого определения a^x, надо показать, что множества X и Y разделяются лишь одним числом либо, что для любых последовательностей (r_n) и (s_n), таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$, пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n}$ одинаковы. Эти доказательства требуют довольно кропотливых оценок, позволяющих убедиться в непрерывности построенной функции на множестве $\boldsymbol{Q}$. После этого надо доказывать непрерывность показательной функции для всех значений $x \in \boldsymbol{R}$, выводить ее свойства и т. д. Если учесть, что на каждом этапе расширения понятия о показателе приходится заново доказывать свойства показательной функции, этот традиционный путь вряд ли можно признать целесообразным.

8. **Тригонометрические функции.** Подобно тому как показательная и логарифмическая функции связаны с изоморфизмом групп $(\boldsymbol{R}; +)$ и $(\boldsymbol{R}_+; \cdot)$, тригонометрические функции связаны с гомоморфным отображением группы $(\boldsymbol{R}; +)$ на группу $(\boldsymbol{T}; \cdot)$. Группа $\boldsymbol{T}$ состоит из таких комплексных чисел z, что $|z| = 1$. Поскольку при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, $\boldsymbol{T}$ образует группу относительно операции умножения.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Существует непрерывное гомоморфное отображение группы $(\boldsymbol{R}; +)$ на группу $(\boldsymbol{T}; \cdot)$ (т. е. такое непрерывное отображение $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{T}$, что $f(x+y) = f(x) f(y)$ для любых $x, y \in \boldsymbol{R}$).*

Доказательство. Распространим показательную функцию на комплексную плоскость, положив для любого $z \in \boldsymbol{C}$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \tag{1}$$

Очевидно, что этот ряд всюду сходится, причем для любых z и w выполняется равенство

$$e^{z+w} = e^z e^w \tag{2}$$

(доказательство проводится точно так же, как для действительных значений аргументов).

Из равенства (1) вытекает, что $\overline{e^z} = e^{\bar z}$, и потому при $x \in \boldsymbol{R}$ $|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{\overline{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$, т. е.

$$|e^{ix}| = 1, \text{ если } x \in \boldsymbol{R}.$$

При этом

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}.$$

Итак, функция $f: x \to e^{ix}$ задает непрерывное гомоморфное отображение группы $(\boldsymbol{R}; +)$ в $(\boldsymbol{T}; \cdot)$. Обозначим $\operatorname{Re} e^{ix}$ через $\cos x$, а $\operatorname{Im} e^{ix}$ через $\sin x$. Из формулы (1) вытекает, что

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2x-2}}{(2n-2)!} + \dots \tag{3}$$

и

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \tag{4}$$

Покажем, что образом $\boldsymbol{R}$ при отображении $f: x \to e^{ix}$ является вся группа $\boldsymbol{T}$. Мы имеем $f(0) = 1$. Кроме того, из разложений (3), (4) видно, что $(\sin x)' = \cos x$, а $\cos 0 = 1$, и потому $(\sin x)' > 0$ в некоторой окрестности $]-h, h[$ точки $x = 0$. Значит, в этой окрестности функция $\sin x$ возрастает, а потому образом промежутка $]-h, h[$ при отображении f является все множество чисел $z = x + iy \in \boldsymbol{T}$, таких, что $|y| < \sin h$, $x > 0$. Это множество совпадает с множеством чисел $z = x + iy$ из $\boldsymbol{T}$, для которых $1 - \cos h < x \leqslant 1$.

Возьмем теперь любое число $z = x + iy \in \boldsymbol{T}$. Как известно, имеет место равенство

$$\sqrt{x+iy} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + i\,\mathrm{sgn}\,y\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right]$$

или, поскольку $x^2 + y^2 = 1$, равенство

$$\sqrt{x+iy} = \pm\left[\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\,\mathrm{sgn}\,y\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right]. \tag{5}$$

Выберем в равенстве (5) знак «плюс». Легко убедиться, что при $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$\left|1 - \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{2}|1 - x|.$$

Поэтому найдется такое n, что при $m = 2^n$ имеем

$$|\mathrm{Re}\sqrt[m]{z} - 1| < 1 - \cos h.$$

Но тогда $\sqrt[m]{z} \in f(\boldsymbol{R})$, и потому $z = (\sqrt[m]{z})^m \in f(\boldsymbol{R})$. Итак, $f(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{T}$.

Мы построили непрерывное гомоморфное отображение $f: x \to e^{ix}$ группы $(\boldsymbol{R}; +)$ на группу $(\boldsymbol{T}; \cdot)$. Для любого числа $\lambda \in \boldsymbol{R}$, отличного от нуля, отображение $f_\lambda: x \to e^{i\lambda x}$ также будет непрерывным гомоморфным отображением $\boldsymbol{R}$ на $\boldsymbol{T}$. Ниже будет доказано, что иных непрерывных гомоморфных отображений $\boldsymbol{R}$ на $\boldsymbol{T}$ не существует.

При доказательстве теоремы 1 был построен такой промежуток $]-h; h[$, что его образ при отображении $f: x \to e^{ix}$ лежит в правой полуплоскости. Обозначим через A множество положительных чисел x, таких, что $e^{ix} = -1$. Из сказанного вытекает, что для всех таких чисел имеем $x > h$, а потому точная нижняя грань множества A положительна. Обозначим $\inf A$ через π. Таким образом, $e^{i\pi} = -1$, причем если $0 \leqslant x < \pi$, то $e^{ix} \neq -1$. Из равенства $e^{2i\pi} = (e^{i\pi})^2$ следует, что $e^{2i\pi} = 1$, причем 2π — наименьшее положительное число с тем свойством, что $e^{ix} = 1$.

Теорема 2. *Любое непрерывное гомоморфное отображение φ группы $(\boldsymbol{R}; +)$ на группу $(\boldsymbol{T}; \cdot)$ имеет вид* $f_\lambda: x \to e^{i\lambda x}$ $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda \neq 0$.

Доказательство. Обозначим через α наименьшее положительное число, такое что $\varphi(\alpha)=1$. Тогда $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-1$ и $\varphi\left(\frac{\alpha}{4}\right)=i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ или $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$. В зависимости от этого для любого двоично-рационального числа r имеем $f(r\alpha)=e^{2\pi ri}$ или $f(r\alpha)=e^{-2\pi ri}$. Распространяя это соотношение по непрерывности на иррациональные значения x, получаем либо $f(x\alpha)=e^{2\pi xi}$, либо $f(x\alpha)=e^{-2\pi xi}$, т. е. имеем $f(x)=e^{\lambda xi}$, где $\lambda=\frac{2\pi}{\alpha}$ или $\lambda=-\frac{2\pi}{\alpha}$.

Отметим еще, что любое гомоморфное отображение $(\boldsymbol{T};\cdot)$ на $(\boldsymbol{T};\cdot)$ имеет вид $F: e^{ix}\to e^{inx}$, где $n\in\boldsymbol{Z}$, $n\neq 0$.

Перейдем к рассмотрению свойств функций $\cos x$ и $\sin x$. Из равенств $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ и $e^{it}=\cos t+\sin t$ выводим, что

$$e^{ix}\cdot e^{it}=\cos x\cos t-\sin x\sin t+ \\ +i(\cos x\sin t+\sin x\cos t).$$

Но

$$e^{ix}\cdot e^{it}=e^{i(x+t)}=\cos(x+t)+i\sin(x+t),$$

и потому имеем

$$\cos(x+t)=\cos x\cos t-\sin x\sin t$$

и

$$\sin(x+t)=\cos x\sin t+\sin x\cos t.$$

Все остальные свойства тригонометрических функций вытекают из этой *теоремы сложения*. В частности, из того, что 2π — наименьшее положительное число, для которого $e^{ix}=1$, вытекает, что 2π — основной период функций $\cos x$ и $\sin x$.

9. Тригонометрические функции и повороты плоскости. Любое комплексное число, отличное от нуля, можно представить в виде $z=x+iy=r\left(\frac{x}{r}+i\frac{y}{r}\right)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Так как

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}=1,$$

то $\frac{x}{r}+i\frac{y}{r}\in\boldsymbol{T}$. Поэтому $\frac{x}{r}+i\frac{y}{r}=e^{i\varphi}$, где $\varphi\in\boldsymbol{R}$, т. е.

$$x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}.$$

При этом, если $z=re^{i\varphi}$, $w=Re^{i\psi}$, то

$$zw=(re^{i\varphi})\cdot(Re^{i\psi})=(rR)\,e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Мы доказали, что множество C_0 отличных от нуля комплексных чисел образует группу относительно операции умножения, причем умножение комплексных чисел сводится к умножению их модулей и фазовых множителей $e^{i\varphi}$. Иными словами, группа $(\boldsymbol{C}_0;\ \cdot)$ изоморфна прямой сумме групп $(\boldsymbol{R}_+;\ \cdot)$ и $(\boldsymbol{T};\ \cdot)$.

Если z и w — два комплексных числа, то

$$|e^{i\varphi}z - e^{i\varphi}w| = |e^{i\varphi}| \cdot |z - w| = |z - w|.$$

Это значит, что отображение $z \to e^{i\varphi} z$ сохраняет расстояние между точками комплексной плоскости. При этом равенство $z = e^{i\varphi} z$ имеет место либо когда φ кратно 2π, либо когда $z = 0$. Значит, отображение $z \to e^{i\varphi} z$ либо является тождественным (при $\varphi = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$), либо имеет лишь одну неподвижную точку $z = 0$. В обоих случаях оно является поворотом плоскости вокруг начала координат (на нулевой угол при $\varphi = 2\pi n$).

При повороте, определяемом формулой $z \to e^{i\varphi} z$, точка $z = 1$ переходит в точку $e^{i\varphi}$. На языке декартовых координат это означает, что точка M (1; 0) переходит в точку M' ($\cos\varphi$; $\sin\varphi$). Так же убеждаемся, что точка N (0; 1) переходит в точку N' ($-\sin\varphi$, $\cos\varphi$). Отсюда следует, что указанный поворот задается в декартовых координатах следующим образом: $A\ (x;\ y) \to A'\ (x';\ y')$, где

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

Этому повороту соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Мы поставили каждому комплексному числу вида $e^{i\varphi}$ поворот, задаваемый матрицей (1). Это позволяет строить теорию тригонометрических функций, не опираясь на теорию комплексных чисел, а используя лишь теорию матриц. Именно определим функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ как элементы первого столбца матрицы, задающей поворот на угол φ вокруг начала координат (таким образом, этот подход к теории тригонометрических функций основан на геометрии). Композицией поворотов на углы φ и ψ является поворот вокруг начала координат на угол $\varphi + \psi$. Поскольку при композиции поворотов задающие их матрицы перемножаются, имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Выполняя умножение матриц в правой части этого равенства и сравнивая матричные элементы первого столбца слева и справа, вновь получаем формулы сложения п. 8. Из этих формул, как отмечалось выше, вытекают все остальные соответствия между тригонометрическими функциями.

Можно доказать, что 2π является длиной окружности единичного радиуса на евклидовой плоскости.

10. Тригонометрические функции и дифференциальные уравнения. Тригонометрические функции можно определить как решения некоторых дифференциальных уравнений. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + y = 0 \tag{1}$$

и обозначим через $\cos x$ его решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, а через $\sin x$ — решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Докажем, что если y — решение уравнения (1), то функция $u = y'$ тоже является решением того же уравнения. В самом деле,

$$u'' + u = (y')'' + y' = y''' + y' = (y'' + y)' = 0.$$

При этом, если функция y удовлетворяет начальным условиям $y(0) = C_1$, $y'(0) = C_2$, то функция u удовлетворяет начальным условиям $u(0) = C_2$, $u'(0) = -C_1$. В самом деле, $u(0) = y'(0) = C_2$ и $u'(0) = y''(0) = -y(0) = -C_1$.

Применяя это утверждение к функциям $\cos x$ и $\sin x$, выводим, что $(\cos x)'$ — решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, т. е. $(\cos x)' = -\sin x$. Так же убеждаемся, что $(\sin x)' = \cos x$.

Из этих формул сразу вытекает, что

$$[\cos(x + a)]'' = [-\sin(x + a)]' = -\cos(x + a),$$

т. е. что при любом a функция $\cos(x + a)$ тоже является решением дифференциального уравнения (1). Отсюда следует, что

$$\cos(x + a) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{2}$$

Чтобы найти постоянные C_1 и C_2, положим в полученном равенстве $x = 0$. Находим, что $C_1 = \cos a$. Далее, дифференцируя равенство (2), выводим, что

$$-\sin(x + a) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Полагая $x = 0$, находим $C_2 = -\sin a$. Итак,

$$\cos(x + a) = \cos a \cos x - \sin a \sin x.$$

Дифференцируя это равенство по x, получаем, что

$$\sin(x + a) = \cos a \sin x + \sin a \cos x.$$

Итак, получены теоремы сложения для $\cos x$ и $\sin x$, из которых вытекает вся тригонометрия.

Мы доказали, что показательная, логарифмическая, степенная и тригонометрические функции связаны с гомоморфизмами и автоморфизмами групп $(\boldsymbol{R}; +)$, $(\boldsymbol{R}_+; \cdot)$ и $(\boldsymbol{T}; \cdot)$, образующих числовую основу математического анализа. Поэтому включение этих функций в число базисных вполне обосновано. Функция $\arcsin x$ включена как обратная функции $\sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тем самым доказано, что множество элементарных функций сформировано не случайным, а закономерным образом. Одновременно удалось установить связи между различными подходами к базисным элементарным функциям.

§ 3. ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ И КОМБИНАТОРИКА

1. Основные правила комбинаторики. Отображения конечных множеств тесно связаны с задачами комбинаторики. *Комбинаторикой* называют часть дискретной математики, в которой изучается, сколько существует подмножеств конечных множеств, обладающих заданными свойствами, сколькими способами можно расположить элементы конечных множеств при заданных условиях на эти расположения, сколько существует отображений одного конечного множества в другое, имеющих заданные свойства, и т. д. Кратко говоря, *в комбинаторике изучаются перечислительные задачи теории конечных множеств.*

Все многообразие комбинаторных формул может быть выведено из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств и кортежей:

а) *Если конечные множества X и Y не пересекаются, то число элементов множества $X \cup Y$ равно сумме числа элементов в X и числа элементов в Y:*

$$X \cap Y = \varnothing \Rightarrow |X \cup Y| = |X| + |Y|. \tag{1}$$

б) *Число пар в декартовом произведении конечных множеств X и Y равно произведению числа элементов в X и числа элементов в Y* (см. п. 6 § 3 главы II).

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|. \tag{2}$$

Первое из этих правил называют *правилом суммы*, второе — *правилом произведения.* Оба эти правила с помощью метода математической индукции распространяются на объединения и декартовы произведения любых конечных совокупностей конечных множеств:

а′) Если $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

то

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|; \tag{1′}$$

б′) $|X_1 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \ldots |X_n|$. (2′)

В частности , из формулы (2′) следует, что

$$|X^m| = |X|^m. \tag{3}$$

Кортежи, принадлежащие множеству X^m, где $|X| = n$, называют обычно *размещениями с повторениями из n элементов по m.* Их число обозначают $\bar{A}_n^m$. Поэтому формулу (3) можно записать следующим образом:

$$\bar{A}_n^m = n^m. \tag{4}$$

Кортеж длины m, составленный из элементов множества X, однозначно определяет отображение множества $N_m = \{1, 2, ..., m\}$ в X (числу k ставится в соответствие k-й элемент кортежа). Обратно, каждое такое отображение задает кортеж указанного вида. Поэтому из формулы (4) следует вывод:

если $|X| = n$, *то число отображений* N_m *в* X *равно* n^m.

Очевидно, что множество N_m можно заменить любым множеством из m элементов. Поэтому получаем следующий вывод:

если X *и* Y — *конечные множества, то число отображений множества* Y *в множество* X *равно* $|X|^{|Y|}$.

Любое подмножество A множества X задает отображение X в множество $\{0, 1\}$. Именно $f(x) = 1$, если $x \in A$, и $f(x) = 0$, если $x \notin A$. Поэтому число подмножеств множества A равно числу отображений A в множество $\{0, 1\}$. Из формулы (4) получаем вывод:

число подмножеств конечного множества X *равно* $2^{|X|}$.

В комбинаторных задачах часто возникает ситуация, когда рассматриваются не все пары (x, y), такие, что $x \in X$, $y \in Y$, а лишь пары, подчиненные некоторым дополнительным требованиям. Каждое множество пар A задает некоторое соответствие R между X и Y. Сосчитать число пар в A легко, если для всех $x \in A$ множество $R(x)$ имеет одно и то же число элементов k. В этом случае ясно, что $|A| = k|X|$. Итак, справедливо следующее утверждение:

пусть множество X *состоит из* n *элементов и пусть каждому* $x \in X$ *поставлено в соответствие подмножество* $R(x) \subset Y$, *содержащее* k *элементов. Тогда число пар* (x, y), *таких, что* $x \in X$, $y \in R(x)$, *состоит из* nk *элементов.*

Это утверждение также без труда обобщается на кортежи длины m:

Пусть кортеж $(x_1, ..., x_m)$ *выбирается так, что* x_1 *можно выбрать* k_1 *способами, для каждого выбора* x_1 *компоненту* x_2 *можно выбрать* k_2 *способами, для каждого выбора пары* (x_1, x_2) *компоненту* x_3 *можно выбрать* k_3 *способами, ..., для каждого выбора кортежа* $(x_1, x_2, ..., x_{m-1})$ *компоненту* x_m *можно выбрать* k_m *способами. Тогда общее число выбора кортежа равно* $k_1k_2 \ldots k_m$.

В самом деле, перенумеруем для каждого выбора кортежа $(x_1, ..., x_m)$ все способы выбора компоненты x_s числами $1, 2, ..., k_s$. Тогда каждому кортежу $(x_1, ..., x_m)$ соответствует кортеж, составленный из чисел, причем первая компонента принимает значения $1, ..., k_1$, вторая — значения $1, ..., k_2$, ..., m-я — значения $1, ..., k_m$. Соответствие между выбираемыми кортежами и числовыми кортежами биективно, и потому достаточно найти количество числовых кортежей. Но множество числовых кортежей указанного вида является декартовым произведением $N_{k_1} \times ... \times N_{k_m}$, где $N_k = \{1, 2, ..., k\}$, а потому их количество равно $k_1 \cdot ... \cdot k_m$. Значит, и число выбираемых кортежей равно $k_1 \cdot ... \cdot k_m$.

2. Основные формулы комбинаторики. Применим полученный в конце п. 1 результат к решению следующей задачи:

Дано множество X *из* n *элементов. Сколько кортежей длины* m *можно составить из элементов этого множества так, чтобы в каждом кортеже все элементы были различны?*

Из условия на выбор кортежей следует, что первую компоненту можно выбрать n способами, вторую — $n-1$ способом (повторять сделанный выбор нельзя), третью — $n-2$ способами, ..., m-ю — $n-m+1$ способами. Поэтому общее число кортежей равно

$$n(n-1)\ \dots\ (n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Кортежи описанного выше вида называются *размещениями без повторений из n элементов по m*, а их число обозначают A_n^m. Мы доказали, что

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1)$$

Отметим частный случай разобранной задачи, когда $m=n$. В этом случае кортежи называются *перестановками множества X*, а их число обозначают P_n. Из формулы (1) следует, что

$$P_n=n!. \qquad (2)$$

Полученные результаты также тесно связаны с отображениями конечных множеств. Именно размещения без повторений из n элементов по m можно определить следующим образом. Рассмотрим инъективные отображения множества $N_m=\{1, 2, \dots, m\}$ в множество Y, состоящее из n элементов. В силу инъективности будут получаться кортежи длины m без повторяющихся элементов, т. е. размещения без повторений.

Таким образом, равенство (1) можно сформулировать так:

Пусть множество X содержит m элементов, а множество Y содержит n элементов. Тогда множество инъективных отображений множества X в множество Y равно A_n^m, т. е. $\frac{n!}{(n-m)!}$.

Формула же (2) имеет следующий смысл:

Если множество X содержит n элементов, то множество биективных отображений X на X равно $n!$

Разберем теперь следующую задачу:

Дано множество X, состоящее из n элементов. Найти число подмножеств множества X, состоящих из m элементов.

Обозначим искомое число подмножеств через C_n^m. Пусть $A=\{x_1, \dots, x_m\}$ — одно из этих подмножеств. Из него можно составить $m!$ перестановок элементов $x_1, \dots, x_m$. Каждая из этих перестановок является размещением без повторений из n элементов по m, причем каждое такое размещение может быть получено указанным способом. Ясно, что если подмножества A и B различны, то и соответствующие им размещения различны.

Таким образом, множество всех размещений без повторений из n элементов по m распадается на C_n^m классов, каждый из которых содержит по $m!$ размещений. Отсюда следует, что $A_n^m=m!\,C_n^m$ и потому

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \qquad (3)$$

И эта формула тесно связана с подсчетом отображений. Именно предположим, что множества X и Y, содержащие соответственно m и n элементов, линейно упорядочены, и пусть рассматриваются отображения X в Y, сохраняющие порядок (т. е. такие, что из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$). Каждое такое отображение однозначно определяется образом $f(X)$ множества X. Поскольку из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, то отображение f инъективно, а потому $|f(X)| = m$. Значит, *число сохраняющих порядок отображений X в Y равно числу подмножеств в Y, состоящих из m элементов, т. е. C_n^m.*

Остановимся теперь на перестановках и сочетаниях с повторениями. Возьмем кортеж $a = (a_1, \ldots, a_n)$, компоненты которого являются элементами множества $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$ (эти элементы перенумерованы). Назовем *составом кортежа* числовой кортеж $(n_1, \ldots, n_t)$, где n_k показывает, сколько раз в a встречается элемент x_k множества X.

Решим следующую задачу:

Дано множество $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$. Сколько кортежей, имеющих состав $(n_1, \ldots, n_t)$, можно составить из элементов этого множества?

Отметим, что длина n составляемых кортежей равна $n_1 + \ldots + n_t$. Каждому элементу x_k множества X поставим в соответствие n_k символов вида $x_k^{(s)}$, $1 \leqslant s \leqslant n_k$. Общее число таких символов равно $n = n_1 + \ldots + n_t$ и потому из них можно составить $n!$ перестановок. Заменяя в каждой такой перестановке все $x_k^{(s)}$, $1 \leqslant s \leqslant n_k$ на x_k, $1 \leqslant k \leqslant t$, получим кортеж искомого состава.

Заметим, что символы $x_k^{(s)}$, $1 \leqslant s \leqslant n_k$, входящие в состав перестановки, сами образуют перестановку из n_k элементов. Если «стереть» верхние значки, то любая перестановка этих символов ничего не изменяет. Число таких перестановок равно $n_k!$. По правилу произведения получаем, что общее число перестановок символов $x_k^{(s)}$, $1 \leqslant k \leqslant t$, $1 \leqslant s \leqslant n_k$, не изменяющих данную перестановку с повторениями, равно $n_1! \ldots n_t!$. Поэтому число различных перестановок с повторениями равно

$$P(n_1, \ldots, n_t) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_t!},$$

где, напомним, $n = n_1 + \ldots + n_t$.

Другой задачей о кортежах длины n, компоненты которых принадлежат множеству $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$, является подсчет числа различных составов этих кортежей. Такие составы называют *сочетаниями с повторениями из t элементов по n*. Чтобы найти число этих сочетаний, заметим, что любой состав кортежа, т. е. кортеж $(n_1, \ldots, n_t)$ из неотрицательных целых чисел, можно закодировать перестановкой из $t-1$ белых и n черных шаров, где $n = n_1 + \ldots + n_t$. Для этого достаточно расположить n_1 черных шаров, потом один белый шар, далее n_2 черных шаров и снова один белый шар и т. д. вплоть до n_t черных шаров. Поэтому число перестановок с повторениями из $t-1$ белых и n черных шаров равно числу кортежей $(n_1, \ldots, n_t)$ неотрицательных целых чисел, для которых $n = n_1 + \ldots + n_t$. Но число таких перестановок с повторениями равно

$$P(t-1,\ n) = \frac{(n+t-1)!}{(t-1)!\ n!} = C_{n+t-1}^{n}.$$

Поэтому и *число* $\overline{C}_t^n$ *сочетаний с повторениями равно* C_{n+t-1}^{n}:

$$\overline{C}_t^n = C_{n+t-1}^{n}.$$

Заметим, что $\overline{C}_t^n$ *равно числу отображений линейно упорядоченного множества* X *из* n *элементов в линейно упорядоченное множество* Y *из* t *элементов, при которых из* $x_1 \leqslant x_2$ *следует* $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. В самом деле, любое такое отображение однозначно определяется кортежем $(n_1, \ldots, n_t)$, где n_k — число элементов в $f^{-1}(y_k)$ (первые n_1 элементов отображаются в y_1, следующие n_2 — в y_2 и т. д.). Так как число этих кортежей равно $\overline{C}_t^n$, то и число отображений рассматриваемого вида равно тому же числу.

Теоретико-множественный подход к комбинаторным задачам позволяет облегчить доказательство комбинаторных тождеств, а также ставить новые комбинаторные задачи.

Глава IV

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

§ 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И АЛГЕБРЫ

1. Алгебраические операции. Понятие алгебраической операции было введено в курсе «Алгебра и теория чисел». Напомним основные относящиеся к нему определения и утверждения (см. [29], [35]).

а) *n-арной алгебраической операцией* в непустом множестве X называют отображение $f : X^n \to X$. При $n = 0$ операцию называют *нульарной*, при $n = 1$ — *унарной*, при $n = 2$ — *бинарной*, при $n = 3$ — *тернарной*. Число n называют *рангом* операции.

Нульарная алгебраическая операция сводится к выделению в X некоторого элемента, а унарная является отображением X в X.

б) Чаще всего рассматриваются *бинарные алгебраические операции*. Поэтому в дальнейшем «алгебраическая операция» или «операция» будет, как правило, обозначать: «бинарная алгебраическая операция». Образ пары (a, b), где $a, b \in X$, при алгебраической операции $*$ обозначается $a * b$.

в) Операция $*$ в X задает тернарное отношение в X. Оно выполняется для тройки (a, b, c) тогда и только тогда, когда $a * b = c$. Обратное утверждение неверно: не любое тернарное отношение в X является бинарной алгебраической операцией в X. Для того чтобы тернарное отношение R в X было бинарной операцией в X, необходимо и достаточно, чтобы любой паре (a, b), $a, b \in X$ соответствовал один и только один элемент $c \in X$, такой, что для (a, b, c) имеет место отношение R.

г) Если $*$ — бинарная алгебраическая операция в X, то любому элементу $a \in X$ соответствуют два отображения L_a и R_a множества X в X, называемые соответственно *левым* и *правым сдвигами* на X. Они задаются формулами: $L_a(x) = a * x$, $R_a(x) = x * a$.

д) Операция $*$ называется *сократимой слева*, если для любого $a \in X$ отображение L_a инъективно, и *сократимой справа*, если для любого $a \in X$ инъективно отображение R_a. Операция, сократимая и слева и справа, называется *сократимой*. Иными словами, операция $*$ сократима слева, если

$$\forall a, b, c \in X\ (a * b = a * c \to b = c),$$

и сократима справа, если

$$\forall a, b, c \in X\ (b * a = c * a \to b = c).$$

е) Элемент $e \in X$ называется *нейтральным слева* относительно операции $*$ в X, если L_e — тождественное отображение, и *нейтральным справа*, если R_e — тождественное отображение.

Иными словами, элемент e нейтрален слева относительно $*$, если $e * x = x$ для всех $x \in X$, и нейтрален справа, если $x * e = x$ для всех $x \in X$.

ж) Если в X есть элемент $e_л$, нейтральный слева относительно $*$, и элемент $e_п$, нейтральный справа относительно $*$, то $e_л = e_п$, причем в X нет иных элементов, нейтральных относительно $*$ слева или справа. Элемент $e_л = e_п$ называется *нейтральным* относительно $*$, Мы будем обозначать его e.

з) Элемент $\omega \in X$ называется *поглощающим слева* относительно $*$, если $L_\omega(X) = \{\omega\}$, т. е. если $\omega * x = \omega$ для всех $x \in X$. Элемент ω называется *поглощающим справа*, если $R_\omega(X) = \{\omega\}$, т. е. если $x * \omega = \omega$ для всех $x \in X$.

и) Если в X есть элемент $\omega_л$, поглощающий слева относительно операции $*$, и элемент $\omega_п$, поглощающий справа относительно $*$, то $\omega_л = \omega_п$, причем в X нет иных элементов, поглощающих относительно $*$ слева или справа. В этом случае элемент $\omega_л = \omega_п$ называется *поглощающим* относительно x. Мы будем обозначать такой элемент ω.

к) Операция $*$ в X называется *коммутативной*, если

$$\forall a, b \in X \quad a * b = b * a.$$

л) Операция $*$ в X называется *ассоциативной*, если

$$\forall a, b, c \in X \quad (a + b) * c = a * (b * c).$$

м) Пусть в X есть элемент e, нейтральный относительно операции $*$. Элемент b называется *симметричным слева* элементу a относительно $*$, если $b * a = e$, и *симметричным справа* относительно $*$, если $a * b = e$.

н) Пусть операция $*$ ассоциативна и пусть в X есть элемент ${}^\wedge a$, симметричный a слева, и элемент $a^\wedge$, симметричный a справа. Тогда ${}^\wedge a = a^\wedge$, причем в X нет иных элементов, симметричных a слева или справа. Элемент ${}^\wedge a = a^\wedge$ называется *симметричным* элементу a. Мы будем обозначать его $\hat{a}$.

о) Имеют место равенства: $\hat{\hat{a}} = a$ и $\widehat{a * b} = \hat{b} * \hat{a}$.

п) Операция $*$ называется *идемпотентной*, если

$$\forall a \in X \quad a * a = a.$$

р) Операция $*$ называется *дистрибутивной слева* относительно операции $\circ$, если

$$\forall a, b, c \in X \quad a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c).$$

Операция $*$ *дистрибутивна справа* относительно $\circ$, если

$$\forall a, b, c \in X \quad (b \circ c) * a = (b * a) \circ (c * a).$$

Операция $*$, дистрибутивная относительно $\circ$ и слева, и справа, называется *дистрибутивной* относительно $\circ$.

с) Пусть в множествах X_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ заданы алгебраические операции, обозначаемые соответственно $*_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда в множестве $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ задана алгебраическая операция $*$, называемая *прямым произведением* операций $*_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Она задается следующим образом: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, то $x * y = (x_1 *_1 y_1, \ldots, x_n *_n y_n)$.

т) Наряду с алгебраическими операциями, определенными для всех пар вида (a, b), $a, b \in X$, рассматривают *частичные алгебраические операции*, т. е. отображения *из* X^2 *в* X. Примером такой операции может служить вычитание в множестве натуральных чисел (отображение $(a, b) \to a - b$ определено лишь при $a > b$).

у) Подмножество Y множества X называется *замкнутым* относительно операции $*$ в X, если для любых двух элементов a и b из Y элемент $a * b$ принадлежит Y. Если Y замкнуто в X относительно $*$, то $*$ определяет алгебраическую операцию в Y. В противном случае $*$ определяет в Y лишь частичную алгебраическую операцию.

ф) Отображение $\Omega \times X \to X$ называют *внешней алгебраической операцией в* X *с областью операторов* Ω. Такая операция ставит в соответствие каждой паре (ω, x) элемент $\omega(x)$ из X. Если выполняется условие $\omega(x * y) = \omega(x) * \omega(y)$, то действие операторов называют *дистрибутивным в* X. Если в Ω задана операция $\circ$ и $\omega_1(\omega_2(x)) = (\omega_1 \circ \omega_2)(x)$, то действие операторов называют *ассоциативным*. При $\omega_1(\omega_2(x)) = \omega_2(\omega_1(x))$ это действие называют *коммутативным*.

2. Обратные операции. Пусть алгебраическая операция $*$ в X сократима слева. Тогда при любых a и c уравнение $a * x = c$ либо не имеет корней, либо имеет лишь один корень. Тем самым определена частичная алгебраическая операция $\urcorner$, сопоставляющая некоторым из пар $(a, c) \in X^2$ элемент $b = c \urcorner a$, такой, что $a * b = c$. Иными словами, $b = c \urcorner a$ в том и только в том случае, когда $a * b = c$. Операцию $\urcorner$ назовем *обратной слева* операции $*$. Она является алгебраической (а не только частичной алгебраической) операцией в X, если для любого $a \in X$ оператор L_a биективен, т. е. если уравнение $a * x = c$ имеет единственное решение при любых a и c из X.

Точно так же, если алгебраическая операция $*$ в X сократима справа, то определена частичная алгебраическая операция $\ulcorner$, сопоставляющая паре $(c, b) \in X^2$ элемент $a = c \ulcorner b$, такой, что $a * b = c$. В случае, когда операция $*$ коммутативна, операции $\urcorner$ и $\ulcorner$ совпадают.

Отметим некоторые свойства обратных операций[1].

а) *Для любых* a *и* b *из* X *имеем*

$$(a * b) \urcorner a = b \text{ и } (a * b) \ulcorner b = a.$$

Это следует из определения операций $\urcorner$ и $\ulcorner$

б) *Если существует* $x = c \urcorner a$ (соответственно $c \ulcorner a$), *то*

[1] В дальнейшем предполагается, что операция $*$ сократима слева (соответственно справа), если речь идет об операции $\urcorner$ (соответственно $\ulcorner$).

$$a * (c \urcorner a) = c \text{ (соответственно } (c \ulcorner a) * a = c). \tag{2}$$

В самом деле, если $x = c \urcorner a$, то $c = a * x$, т. е. $c = a * (c \urcorner a)$. Равенство $(c \ulcorner a) * a = c$ доказывается так же.

в) *Если элемент e нейтрален слева относительно операции $*$, то он нейтрален справа относительно операции* $\urcorner$.

В самом деле, из $e * b = b$ следует, что $b \urcorner e = b$.

Элемент, нейтральный справа относительно $*$, нейтрален справа и относительно $\ulcorner$.

г) *Если элемент b симметричен слева элементу a, то*

$$a = e \urcorner b \text{ и } b = e \ulcorner a. \tag{3}$$

В самом деле, если $b * a = e$, то $a = e \urcorner b$ и $b = e \ulcorner a$.

д) *Если операция $*$ ассоциативна и $b * a = a * b = e$, то*

$$c \urcorner a = b * c \text{ и } c \ulcorner b = c * a. \tag{4}$$

В самом деле, имеем $a * (c \urcorner a) = c$ и $a * (b * c) = (a * b) * c = e * c = c$. Значит, $a * (c \urcorner a) = a * (b * c)$ и потому $c \urcorner a = b * c$. Равенство $c \ulcorner b = c * a$ доказывается так же.

е) *Если операция $*$ ассоциативна, причем существует $b \urcorner c = x$, то*

$$b \urcorner c = (a * b) \urcorner (a * c). \tag{5}$$

В самом деле, из $b \urcorner c = x$ следует, что $b = c * x$ и потому $a * b = a * (c * x) = (a * c) * x$. Это значит, что $x = (a * b) \urcorner (a * c)$, т. е. $b \urcorner c = (a * b) \urcorner (a * c)$.

Так же доказывается, что *если операция $*$ ассоциативна, причем существует $b \ulcorner c$, то*

$$b \ulcorner c = (b * a) \ulcorner (c * a). \tag{6}$$

ж) *Если операция $*$ ассоциативна, причем существует элемент $a \urcorner (b * c)$, то справедливо тождество*[1]

$$a \urcorner (b * c) = a \urcorner b \urcorner c. \tag{7}$$

В самом деле, если $x = a \urcorner (b * c)$, то $(b * c) * x = a$. В силу ассоциативности операции $*$ отсюда следует, что $b * (c * x) = a$. Но тогда $c * x = a \urcorner b$ и потому $x = (a \urcorner b) \urcorner c$, т. е. $a \urcorner (b * c) = a \urcorner b \urcorner c$.

Точно так же доказывается, что если операция $*$ ассоциативна, причем существует элемент $a \ulcorner (b * c)$, то справедливо тождество

$$a \ulcorner (b * c) = a \ulcorner c \ulcorner b. \tag{8}$$

з) *Если операция $*$ ассоциативна, причем существует элемент $b \urcorner c$, то*

$$(b \urcorner c) * a = (b * a) \urcorner c \tag{9}$$

---

[1] В случае отсутствия скобок операция выполняется слева направо (например, $a \urcorner b \urcorner c$ означает $(a \urcorner b) \urcorner c$).

В самом деле, по (2) имеем $c * (b \urcorner c) * a = b * a$ и потому $(b \urcorner c) * * a = (b * a) \urcorner c$.

Точно так же доказывается, что *если операция* $*$ *ассоциативна, причем существует* $b \ulcorner c$, *то*

$$a * (b \ulcorner c) = (a * b) \ulcorner c. \tag{10}$$

и) *Если операция* $*$ *ассоциативна, причем существуют элементы* $b \urcorner c$ и $a \urcorner (b \urcorner c)$, *то*

$$a \urcorner (b \urcorner c) = (c * a) \urcorner b. \tag{11}$$

В самом деле, если $a \urcorner (b \urcorner c) = x$, то $a = (b \urcorner c) * x$, и потому $c * a = c * (b \urcorner c) * x$. Но $c * (b \urcorner c) = b$, а потому $c * a = b * x$, т. е. $x = (c * a) \urcorner b$.

Аналогично доказывается, что *если операция* $*$ *ассоциативна, причем существуют элементы* $b \ulcorner c$ и $a \ulcorner (b \ulcorner c)$, *то*

$$a \ulcorner (b \ulcorner c) = (a * c) \ulcorner b. \tag{12}$$

к) *Если операция* $*$ *коммутативна, то операции* $\urcorner$ *и* $\ulcorner$ *совпадают.*

Доказанные свойства обратных операций применимы к ряду вопросов школьной математики. Для операции сложения обратной является операция вычитания. Поэтому, заменяя в доказанных формулах $*$ на $+$, а $\urcorner$ на $-$, получаем формулы:

$$\begin{aligned}
&(a + b) - a = b, \quad a - (b + c) = a - b - c,\\
&a + (c - a) = c, \; a + (b - c) = (a + b) - c,\\
&c - (-b) = c + b, \; a - (b - c) = c + a - b,\\
&b - c = (a + b) - (a + c).
\end{aligned}$$

Операция деления в множестве отличных от нуля чисел обратна операции умножения. Заменяя в доказанных выше формулах знак $*$ на $\cdot$, а знак $\urcorner$ на $:$, получаем, что

$$\begin{aligned}
&(a \cdot b) : a = b, &&a : (bc) = a : b : c,\\
&a \cdot (c : a) = c, &&a \cdot (b : c) = (ab) : c,\\
&c : (1 : b) = cb, &&a : (b : c) = (ca) : b,\\
&b : c = (ab) : (ac).
\end{aligned}$$

Операция возведения в степень $(a, b) \to a^b$ в множестве положительных чисел не является ни ассоциативной (так как $a^{b^c} \neq (a^b)^c$), ни коммутативной (так как $a^b \neq b^a$). Поэтому указанная операция имеет две обратные операции — левую и правую. Левая обратная операция $c \urcorner a$ ставит в соответствие паре чисел (c, a) такое число b, что $a * b = c$, т. е. $a^b = c$. Это число называется *логарифмом* c *по основанию* a *и обозначается* $\log_a c$. Правая обратная операция ставит в соответствие паре чисел (c, b) такое число $a = c \ulcorner b$, что $a^b = c$. Это число называют *корнем* b*-й степени из* c и обозначают $\sqrt[b]{c}$ (или $c^{1/b}$).

Из соотношений (1) вытекает, что $\log_a a^b = b$ и $\sqrt[b]{a^b} = a$ (напомним, что мы рассматриваем лишь положительные действительные числа).

3. Основные алгебраические операции школьной математики. Понятие алгебраической операции пронизывает весь школьный курс математики. Уже в I классе изучается операция сложения чисел от 1 до 100, которая ведет в дальнейшем к алгебраической операции сложения во всем множестве натуральных чисел. Далее вводятся операция умножения натуральных чисел и частичные алгебраические операции вычитания и деления в том же множестве. По мере расширения запаса чисел эти операции переносятся на полученные расширения, причем некоторые частичные операции становятся определенными на всем множестве. Например, вычитание является алгебраической (а не лишь частичной алгебраической) операцией в множествах целых чисел, рациональных чисел, действительных чисел. Деление — алгебраическая операция в множествах положительных рациональных чисел, отличных от нуля рациональных чисел, аналогичных множествах действительных чисел. На факультативных курсах изучают соответствующие операции над комплексными числами.

В дальнейшем операции сложения, вычитания, умножения и деления переносят с чисел на функции (сначала — сложение многочленов и рациональных функций, потом — сложение любых функций, аналогично для других операций).

Операция возведения в степень является одним из первых примеров некоммутативной и неассоциативной основной операции (разумеется, вычитание и деление тоже не являются ни коммутативными, ни ассоциативными операциями, но они соответственно обратны операциям сложения и умножения, которые коммутативны и ассоциативны). Некоммутативность операции возведения в степень приводит к тому, что она имеет две обратные операции — левую и правую (логарифмирование и извлечение корня). Следует иметь в виду, что возведение в степень является алгебраической операцией в множествах натуральных чисел и положительных действительных чисел, но не является алгебраической операцией в множествах целых чисел и положительных рациональных чисел (поскольку, например, 2^{-3} не является целым числом, а число $5^{1/3}$ иррационально).

Наряду с указанными основными бинарными операциями в множестве натуральных чисел рассматривают такие алгебраические операции, как образование наименьшего общего кратного ($(a, b) \to K(a, b)$), наибольшего общего делителя ($(a, b) \to D(a, b)$), образование $\max(a, b)$ и $\min(a, b)$ — наибольшего или наименьшего из двух чисел и т. д. По аналогии с записью иных операций следовало бы вместо $K(a, b)$ и $D(a, b)$ писать aKb и aDb, но запись $a \max b$ уже явно неудобна.

Основной алгебраической операцией, изучаемой в геометрии, является композиция геометрических преобразований (ее изучают и для числовых функций). Многие совокупности геометрических преобразований замкнуты относительно этой операции (перемещения, параллельные переносы, повороты вокруг фиксированной точки, преобразования подобия и т. д.).

В школе рассматривают и бинарные алгебраические операции над множествами, т. е. операции, ставящие в соответствие двум данным

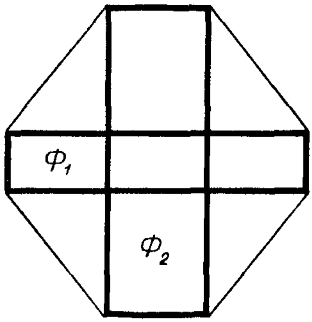

Рис. 9

множествам третье множество. Такими операциями являются пересечение множеств, их объединение, вычитание множеств, образование симметрической разности (т. е. множества $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus \Delta)$. Несколько особняком стоит операция образования декартова произведения множеств. Если ранее указанные операции, примененные к подмножествам некоторого универсального множества U, дают подмножество в U, то для декартова произведения дело обстоит иначе: если $A \subset U$, $B \subset U$, то $A \times B$, вообще говоря, не является подмножеством U — это подмножество в U^2. Отметим еще унарную операцию перехода к дополнению множества, определенную в совокупности подмножеств универсального множества.

Если выбрать в качестве универсального множества Π_2 или Π_3 (множества точек плоскости или пространства), то указанные выше алгебраические операции над множествами (исключая декартово произведение) задают алгебраические операции над фигурами (пересечение фигур, их объединение и т. д.). Существуют иные алгебраические операции над фигурами, не изучаемые в школе. Например, любым двум выпуклым фигурам Φ_1 и Φ_2 можно поставить в соответствие выпуклое замыкание их объединения $\Phi_1 \cup \Phi_2$, т. е. наименьшее выпуклое множество, содержащее $\Phi_1 \cup \Phi_2$ (рис. 9).

4. Алгебры. Понятие алгебры было введено в курсе «Алгебра и теория чисел». Напомним основные определения, связанные с этим понятием (см. [29], [35], [38]).

а) *Алгеброй* называется пара множеств $(A; O)$, где элементами O являются алгебраические операции в A, имеющие, быть может, различные ранги. Элементы O обозначаются $*_k$, а их ранги — n_k.

Примерами алгебр могут служить

$$(\boldsymbol{N}; +),\ (\boldsymbol{N}; \cdot),\ (\boldsymbol{N}; +, \cdot),\ (\boldsymbol{Z}; +, -, \cdot),\ (\boldsymbol{Q}_+; +, \cdot, :),\ (\boldsymbol{P}(U); \cup, \cap, ').$$

Здесь через $'$ обозначена унарная операция, отображающая подмножество $A \subset U$ в его дополнение A'.

б) *Подалгеброй* алгебры $(A; O)$ называется пара $(B; O)$, где B — подмножество в A, замкнутое относительно всех операций из O (в частности, B содержит все элементы, отмеченные в A). *Ослабленной подалгеброй* алгебры $(A; O)$ называется пара $(B; O_1)$, где $B \subset A$, $O_1 \subset O$ и B замкнуто относительно всех операций из O_1.

Например, $(\boldsymbol{N}; +, \cdot)$ — подалгебра алгебры $(\boldsymbol{Z}; +, \cdot)$, а $(\boldsymbol{N}; +)$ — ослабленная подалгебра алгебры $(\boldsymbol{Z}; +, \cdot)$.

в) *Гомоморфизмом алгебры* $(A_1; O_1)$ в алгебру $(A_2; O_2)$ называют пару отображений $(f; \varphi)$, где $f: A_1 \to A_2$, $\varphi: O_1 \to O_2$, причем для любого $*_k \in O_1$ и любых $x_1, \ldots, x_{n_k}$ из A имеем

$$(x = *_k (x_1, \ldots, x_{n_k})) \to (f(x) = \varphi(*_k)(y_1, \ldots, y_{n_k})),$$

где для краткости положено $y_s = f(x_s)$, $1 \leqslant s \leqslant n_k$.

г) *Изоморфизмом алгебр* $(A_1; O_1)$ и $(A_2; O_2)$ называется пара биективных отображений $(f; \varphi)$, где $f : A_1 \to A_2$, $\varphi : O_1 \to O_2$, причем для любого $*_k \in O_1$ и любых $x_1, \ldots, x_{n_k}$ из A_1 имеем

$$(x = *_k (x_1, \ldots, x_{n_k})) \leftrightarrow (f(x) = \varphi(*_k)(y_1, \ldots, y_{n_k}))$$

(обозначения те же, что и в в)).

Изоморфное отображение алгебры на себя называют *автоморфизмом* этой алгебры.

Примеры.

1. Алгебры $(\boldsymbol{R}; +)$ и $(\boldsymbol{R}_+; \cdot)$ изоморфны. В самом деле, положим $f(x) = e^x$, $\varphi(+) = \cdot$. Тогда f является биективным отображением $\boldsymbol{R}$ на $\boldsymbol{R}_+$. При этом равенство $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ показывает, что $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, т. е. что $(f; \varphi)$ — изоморфное отображение $(\boldsymbol{R}; +)$ на $(\boldsymbol{R}_+; \cdot)$.

2. Обозначим через $\boldsymbol{P}(X)$ булеан множества X. Тогда отображения $f : \boldsymbol{P}(X) \to \boldsymbol{P}(X)$ и $\varphi : (\cup, \cap, ') \to (\cup, \cap, ')$, где $f(A) = A'$, $\varphi(\cup) = \cap$, $\varphi(\cap) = \cup$, $\varphi(') = '$, задают автоморфизм алгебры $(P(X); \cup, \cap, ')$. В самом деле, по формулам Де Моргана имеем $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

5. Некоторые роды алгебр.

а) Алгебра $(A; *)$ называется *полугруппой*, если операция $*$ ассоциативна. Если эта операция, кроме того, коммутативна, $(A; *)$ называется *коммутативной полугруппой*.

б) Полугруппа $(A; *)$ называется *полугруппой с левыми* (соответственно *правыми*) *сокращениями*, если операция $*$ сократима слева (соответственно справа).

в) Полугруппа $(A; *)$ называется *группой*, если в A есть элемент e, нейтральный относительно $*$, причем любой элемент из A имеет в A симметричный с ним элемент.

В любой группе $(A; *)$ однозначно разрешимы все уравнения вида $a * x = b$ и $x * a = b$, $a, b \in A$.

г) Обычно в полугруппах операцию обозначают как умножение, т. е. вместо $a * b$ пишут $a \cdot b$. В этом случае симметричный с a элемент обозначают a^{-1}, а нейтральный элемент называют *единицей* и обозначают 1.

В коммутативных полугруппах применяют и аддитивную запись, т. е. вместо $a * b$ пишут $a + b$. В этом случае симметричный к a элемент обозначается $-a$, а нейтральный элемент называют *нулем* и обозначают 0.

д) Алгебра $(A; +, \cdot)$ называется *полукольцом*, если $(A; +)$ — коммутативная полугруппа, причем умножение дистрибутивно относительно сложения.

Алгебра $(A; +, \cdot)$ называется *кольцом*, если $(A; +)$ — коммутативная группа, причем умножение дистрибутивно относительно сложения. В зависимости от свойств умножения различают классы полуколец и колец: *ассоциативные*, *коммутативные*, *с сокращениями*, *имеющие единицу* и т. д.

е) Полукольцо $(A;\ +,\ \cdot)$ называется *полутелом*, если $(A_0;\ \cdot)$, где $A_0 = A \setminus \{0\}$ является группой[1]. Кольцо $(A;\ +,\ \cdot)$ называется *телом*, если $(A_0;\ \cdot)$ — группа. Накладывая дополнительно на полукольцо (соответственно *кольцо*) условие коммутативности, получаем определение *полуполя* (соответственно *поля*).

ж) Алгебра $(A;\ +,\ \cdot,\ ',\ 0,\ 1)$ называется *булевой алгеброй*, если $(A;\ +,\ \cdot)$ и $(A;\ \cdot,\ +)$ — коммутативные и ассоциативные полукольца, причем элемент 0 нейтрален относительно операции $+$ и поглощающий относительно операции $\cdot$, элемент 1 нейтрален относительно $\cdot$ и поглощающий относительно $+$, а элементы a и a' симметричны как относительно операции $+$, так и относительно операции $\cdot$.

Иными словами, для любых $a, b, c \in A$ имеем:

1) $a + b = b + a$,	1′) $a \cdot b = b \cdot a$,
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$,	2′) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,	3′) $a \cdot b + c = (a + c) \cdot (b + c)$,
4) $a + \mathbf{0} = a$,	4′) $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$,
5) $a + \mathbf{1} = \mathbf{1}$,	5′) $a \cdot \mathbf{1} = a$,
6) $a + a' = \mathbf{1}$.	6′) $a \cdot a' = \mathbf{0}$.

В любой булевой алгебре можно ввести структуру упорядоченного множества, положив, что $x \leqslant y$, если $x \cdot y = x$. Из $x \leqslant y$ следует, что $x + y = y$. В любой булевой алгебре выполняются равенства:

$$(x')' = x,\ (x + y)' = x' \cdot y',\ (xy)' = x' + y'.$$

Кроме того, если $x \cdot y = \mathbf{0}$, то $y \leqslant x'$.

з) Пусть V — коммутативная группа, P — некоторое поле. Группу V с заданным отображением $f: P \times V \to V$ называют линейным пространством над полем P, если выполняются следующие требования (через λx, где $\lambda \in P$; $x \in V$, обозначен образ пары (λ, x)):

1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,	3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
2) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,	4) $1 \cdot x = x$.

6. Основные типы алгебр в школьной математике. Поскольку одной из основных задач школьной математики является изучение арифметических действий над числами и операций над функциями, в ней изучаются различные алгебры, элементами которых являются числа или функции. В начальной школе изучают полукольцо $(\boldsymbol{N}_0;\ +,\ \cdot)$ (объединение множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел и нуля). Как известно, это полукольцо коммутативно, ассоциативно, операции сложения и умножения в нем сократимы (исключая сокращение произведения на нуль), нуль является нейтральным элементом относительно сложения и поглощающим элементом относительно умножения, а единица нейтральна относительно умножения. Сократимость сложения и умножения в $\boldsymbol{N}_0$ позволяет определить в $\boldsymbol{N}_0$ частичные алгебраические

[1] Если полугруппа $(A;\ +)$ не содержит нуля, то $A_0 = A$.

операции вычитания и деления, обратные операциям сложения и умножения (исключая, разумеется, деление на нуль).

По мере расширения запаса чисел последовательно возникают следующие алгебры: полукольцо $(\boldsymbol{D}_0; +, \cdot)$, состоящее из неотрицательных десятичных дробей[1], кольцо $(\boldsymbol{D}; +, \cdot)$, состоящее из всех десятичных дробей, поле $(\boldsymbol{Q}; +, \cdot)$ рациональных чисел и, наконец, поле $(\boldsymbol{R}; +, \cdot)$ действительных чисел. На факультативных курсах изучают поле $(\boldsymbol{C}; +, \cdot)$ комплексных чисел.

Отметим, что расширение запаса чисел может идти в школе и иными путями. Например, от $(\boldsymbol{N}_0; +, \cdot)$ можно перейти к кольцу $(\boldsymbol{Z}; +, \cdot)$ целых чисел, потом к полю $(\boldsymbol{Q}; +, \cdot)$ и, наконец, к полю $(\boldsymbol{R}; +, \cdot)$. Возможен и путь, при котором от $(\boldsymbol{N}_0; +, \cdot)$ переходят к полуполю $(\boldsymbol{Q}_0; +, \cdot)$ неотрицательных рациональных чисел, от него — к полуполю $(\boldsymbol{R}_0; +, \cdot)$ и потом к полю $(\boldsymbol{R}; +, \cdot)$. Вопрос об оптимальном варианте изучения понятия числа в школе относится к методике математики, и мы не будем его здесь рассматривать.

Изучение операций над иррациональными выражениями приводит к рассмотрению чисел вида $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8-\sqrt{5}}$ и т. д. Числа, имеющие вид $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$, где α — корень n-й степени из данного рационального числа r, а коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ рациональны, образуют поле. Его называют *расширением поля* $\boldsymbol{Q}$ *с помощью числа* α и обозначают $\boldsymbol{Q}[\alpha]$. Присоединяя к $\boldsymbol{Q}[\alpha]$ корни из чисел этого поля, получают новое поле и т. д. В алгебре доказывают, что любое такое поле можно получить, присоединив к полю $\boldsymbol{Q}$ одно число, являющееся корнем некоторого уравнения

$$b_0x^n + \ldots + b_n = 0$$

с рациональными коэффициентами. Это утверждение лежит в основе освобождения от иррациональностей в знаменателе.

Поля и кольца можно составлять не только из чисел, но и из функций. Например, совокупность всех многочленов с действительными (а также с целыми или с рациональными) коэффициентами от данных переменных $x_1, \ldots, x_n$ образует кольцо, изучение которого является предметом школьной алгебры. Это кольцо составляет часть поля рациональных функций (или, по школьной терминологии, алгебраических дробей). Более общим примером кольца является совокупность функций, непрерывных на данном множестве X. Это следует из того, что сумма и произведение функций, непрерывных на множестве X, также непрерывны на X. Поля непрерывные функции не образуют, так как в точках, где знаменатель обращается в нуль, функция $\frac{f(x)}{y(x)}$ может иметь разрыв.

Изучение операций над множествами (пересечения, объединения, дополнения) приводит к важному примеру булевых алгебр — *совокупности подмножеств данного универсального множества* U (т. е. $\boldsymbol{P}(U)$). В этой алгебре операцией сложения является объединение

[1] Точнее говоря, чисел, записываемых в виде таких дробей.

множеств, операцией умножения — пересечение множеств, операцией $a \to a'$ — переход от подмножества к его дополнению в U, а отмеченными элементами **0** и **1** — пустое множество $\varnothing$ и универсальное множество U. Впрочем, $\boldsymbol{P}(U)$ останется булевой алгеброй, и если определить сложение как пересечение, а умножение как объединение множеств, взяв в качестве **0** множество U, а в качестве **1** множество $\varnothing$.

Если T — некоторая совокупность подмножеств множества U, содержащая вместе с любыми двумя подмножествами их объединение и пересечение, а вместе с каждым подмножеством его дополнение до U, то T тоже образует булеву алгебру относительно указанных выше операций. Можно доказать, что эта конструкция булевых алгебр является исчерпывающей — *любая булевая алгебра изоморфна булевой алгебре, составленной из подмножеств некоторого универсального множества.*

Булевые алгебры можно составить и из высказываний, пользуясь операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания (в этом случае роль нуля играет заведомо ложное высказывание, а роль единицы — заведомо истинное высказывание).

В школьной геометрии существенную роль играют группы геометрических преобразований. Другой алгеброй, используемой в геометрии, являются линейные пространства. Структуру линейного пространства над полем $\boldsymbol{R}$ имеют совокупность векторов в пространстве (и на плоскости), множество многочленов, степень которых не превосходит n, множество функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и т. д.

§ 2. ТЕРМЫ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Термы в алгебрах. Пусть $(A; O)$ — некоторая алгебра, а X — множество, не пересекающееся с A и O. Элементы множества X назовем переменными. Определим понятие *терма* (или, иначе, алгебраического выражения) в алгебре $(A; O)$:

1) *Все элементы из A и все элементы из X являются термами.*

2) *Если $*_k \in O$ и имеет ранг n_k, а $B_1, \ldots, B_{n_k}$ — термы, то $*_k(B_1, \ldots, B_{n_k})$ также является термом.*

3) *Иных термов не существует.*

Если все операции $*_k$ бинарны, то 2) заменяется условием

2'): если B_1 и B_2 — термы, то $(B_1) *_k (B_2)$ также является термом.

Примеры.

1. В алгебре $(\boldsymbol{N}; +)$ выражение

$$((2 + x) + (x + 3)) + (y + 4)$$

является термом с переменными x и y, а выражение $(2 + x) \cdot (y + 4)$ термом не является (так как в $(\boldsymbol{N}; +)$ не определена операция умножения).

2. В алгебре $(\boldsymbol{P}(X); \cap, \cup)$ выражение $(x \cap y) \cup (x \cap z)$ является термом.

Пусть терм T содержит переменные $x_1, \ldots, x_n$. Тогда каждому кортежу $(a_1, \ldots, a_n)$, составленному из элементов множества A, соответствует элемент b этого множества, получаемый следующим образом: каждое вхождение переменной x_k заменяется элементом a_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, после чего выполняются указанные операции.

Например, терму $((2 + x) + (x + 3)) + (y + 4)$ и кортежу $(1; 5)$ соответствует терм $((2 + 1) + (1 + 3)) + (5 + 4)$. Выполняя указанные операции, получаем число 16.

Таким образом, любой терм, содержащий n переменных, определяет n-арную алгебраическую операцию в A, порождаемую операциями $*_k$ из O. В частности, сложение n натуральных чисел является n-арной алгебраической операцией в алгебре $(\boldsymbol{N}; +)$, порождаемой бинарной операцией сложения в этой алгебре.

Любая n-арная алгебраическая операция является отображением A^n в A. Назовем два терма, не содержащие иных переменных, кроме $x_1, \ldots, x_n$, *тождественными*, если они задают одно и то же отображение A^n в A.

Например, термы $x + y$ и $y + x$ тождественны, так как для любых чисел a в b верно равенство $a + b = b + a$.

Одной из задач алгебраической науки является установление того, при каких условиях два терма являются тождественными, и отыскание стандартного вида термов. Решение этих задач зависит от свойств алгебраических операций, встречающихся в этих термах.

2. Степени и кратные. Пусть в алгебре A задана одна бинарная алгебраическая операция $*$. С ее помощью можно для любого n определить несколько n-арных алгебраических операций, задаваемых той или иной расстановкой скобок. Например, при $n = 4$ получаем пять операций, сопоставляющих кортежу (a_1, a_2, a_3, a_4) элементов из A соответственно элементы

$$(a_1 * a_2) * (a_3 * a_4), \quad ((a_1 * a_2) * a_3) * a_4,$$
$$(a_1 * (a_2 * a_3)) * a_4, \quad a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4),$$
$$a_1 * (a_2 * (a_3 * a_4)).$$

В случае, когда операция $*$ ассоциативна (т. е. когда $(A; *)$ — полугруппа), все эти операции при фиксированном n совпадают друг с другом. В частности, все они совпадают с операцией $\Pi(a_1, \ldots, a_n)$, которая определяется с помощью индукции по n следующим образом:

1) $\Pi(a_1) = a_1$,
2) $\Pi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \Pi(a_1, \ldots, a_{n-1}) * a_n$.

Чтобы доказать это утверждение, достаточно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Для любого кортежа* $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m})$ *элементов полугруппы* A *имеет место равенство*

$$\Pi(a_1, \ldots, a_n) * \Pi(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}) = \Pi(a_1, \ldots, a_{n+m}). \tag{1}$$

Доказательство. При $m = 1$ равенство (1) очевидно по определению символа Π. Пусть это равенство уже доказано для некоторого m. Тогда для $m + 1$ имеем по определению, что

$$\Pi(a_1, \ldots, a_n) * \Pi(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m+1}) = \Pi(a_1, \ldots a_n) *$$
$$* [\Pi(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}) * a_{n+m+1}].$$

В силу ассоциативности операции $*$ и предположения индукции, получаем отсюда, что

$$\Pi(a_1, \ldots, a_n) * \Pi(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m+1}) = [\Pi(a_1, \ldots, a_n) * \\ * \Pi(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m})] * a_{n+m+1} = \Pi(a_1, \ldots, a_{n+m}) * a_{n+m+1} = \\ = \Pi(a_1, \ldots, a_{n+m}, a_{n+m+1}).$$

Теорема доказана.

В случае, когда $a_1 = \ldots = a_n = a$, будем обозначать $\Pi(a_1, \ldots, a_n)$ через a^n (в частности, $a^1 = a$). Из теоремы 1 вытекают следующие правила действия со степенями:

$$a^n * a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}. \tag{2}$$

Если операция $*$ записывается в виде $a * b = a + b$, то вместо a_n пишут na и называют *na кратным* элемента a. Равенства (2) принимают при этом вид

$$na + ma = (n + m)a, \; m\,(na) = (mn)\,a. \tag{3}$$

Для идемпотентных операций при любом n справедливо равенство $a^n = a$.

Отображение $(a, n) \to a_n$ является внешней операцией в алгебре A, для которой множеством операторов является совокупность $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел. В случае, когда $A = \boldsymbol{N}$, отображение $(a, n) \to \to a^n$ задает бинарную алгебраическую операцию в $\boldsymbol{N}$ (умножения, если $*$ — сложение в $\boldsymbol{N}$, и возведения в степень, если $*$ — умножение в $\boldsymbol{N}$). Отметим, что операция возведения в степень в множестве $\boldsymbol{N}$, которая не является ни коммутативной, ни ассоциативной, сократима и слева и справа (исключая случай сокращения слева при $a = 1$ — из $1^m = 1^n$ не следует, что $m = n$).

В случае, когда в A есть нейтральный элемент e и элемент a имеет симметричный элемент $\widehat{a}$ в A, принимают по определению, что

$$a^0 = e, \; a^{-n} = (\widehat{a})^n, \; n \in \boldsymbol{N}.$$

В этом случае формулы (2) верны при любых целых значениях m и n. Для доказательства достаточно заметить, что $a * a^{-1} = a * \widehat{a} = e$, а нейтральный элемент e можно опустить в термах $c * e$ и $e * c$, не меняя их значения. Поэтому, например, имеем:

$$a^2 * a^{-4} = ((a * (a * \widehat{a}) * \widehat{a}) * \widehat{a}) * \widehat{a} = \\ = (a * \widehat{a}) * \widehat{a} * \widehat{a} = \widehat{a} * \widehat{a} = a^{-2}.$$

Мы видим, таким образом, что совокупность правил действий над степенями с натуральными показателями верна в любой полугруппе $(A; *)$, а совокупность правил действий над степенями с целыми показателями — в любой группе $(A; *)$.

Назовем полугруппу $(A; *)$ *безгранично делимой*, если для любого $a \in A$ и любого натурального числа n существует один и только один элемент $b \in A$, такой, что $b^n = a$. Например, полугруппа $(\boldsymbol{R}_+; +)$

положительных чисел безгранично делима, равно как и группа ($\mathbf{R}_+$; $\cdot$).

Для безгранично делимых полугрупп имеет смысл понятие степени с положительным рациональным показателем: по определению полагаем $a^r = b$, если $r = {}^p/_q$ и $a^p = b^q$, $p, q \in N$. Мы опускаем проверку того, что значение a^r не зависит от способа записи рационального числа r в виде дроби, а также того, что равенства (2) сохраняются и для степеней с неотрицательными показателями. В случае, когда (A; $*$) — безгранично делимая группа, сказанное переносится и на степени с произвольными рациональными показателями.

Отметим, что полугруппа ($\mathbf{R}$; $\cdot$) не является безгранично делимой, поскольку из отрицательных чисел нельзя извлечь корня четной степени, а для положительных чисел можно получить два значения корня. Поэтому нецелесообразно применять обозначение $a^{\frac{m}{n}}$ в случае, когда $a < 0$.

3. Одночлены и коммутативные полугруппы. Если полугруппа (A; $*$) коммутативна, то имеет место равенство $a * b = b * a$. Это позволяет преобразовывать не только термы, содержащие степени одного переменного x (например, заменять $x^3 * x^4$ на x^7), но и преобразовывать любые одночлены, т. е. термы, образованные из любых элементов полугруппы A и любого числа переменных $x_1, \ldots, x_n$ с помощью операции $*$. Именно справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть (A; $*$) — коммутативная полугруппа и $a_k \in A$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Для любой перестановки $\varphi(1), \ldots, \ldots, \varphi(n)$ индексов $1, \ldots, n$ имеет место равенство*

$$\Pi(a_1, \ldots, a_n) = \Pi(b_1, \ldots, b_n),$$

где $b_k = a_{\varphi(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для некоторого n, и докажем его для $n + 1$. Пусть $\varphi(k) = n + 1$, т. е. $b_k = a_{n+1}$. Тогда по определению символа $\Pi(b_1, \ldots, b_{n+1})$ и ассоциативности операции $*$ имеем, что

$$\Pi(b_1, \ldots, b_{n+1}) = \Pi(b_1, \ldots, b_k) * \Pi(b_{k+1}, \ldots, b_{n+1}) =$$
$$= \Pi(b_1, \ldots, b_{k-1}) * [b_k * \Pi(b_{k+1}, \ldots, b_{n+1})].$$

Применяя коммутативность операции $*$ и еще раз ее ассоциативность, получаем отсюда, что

$$\Pi(b_1, \ldots, b_{n+1}) = [\Pi(b_1, \ldots, b_{k-1}) * \Pi(b_{k+1}, \ldots, b_{n+1})] * b_k.$$

Заключенное в скобки выражение содержит лишь элементы $a_1, \ldots, \ldots, a_n$ в некотором порядке (поскольку, напомним, $b_k = a_{n+1}$). По предположению индукции это выражение равно $\Pi(a_1, \ldots, a_n)$. Значит,

$$\Pi(b_1, \ldots, b_{n+1}) = \Pi(a_1, \ldots, a_n) * a_{n+1} = \Pi(a_1, \ldots, a_{n+1}).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что *любой терм вида $\Pi(a_1, \ldots, a_m)$, где некоторые из a_k — элементы коммутативной полугруппы A, а другие —*

переменные $x_1, \ldots, x_n$, *тождественно равен терму вида* $a * x_1^{\alpha_1} * \ldots * * x^{\alpha_n}$, *где* $a \in A$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — *неотрицательные целые числа. Будем называть термы* $\Pi(a_1, \ldots, a_m)$ *одночленами от переменных* $x_1, \ldots, \ldots, x_n$, *а термы вида* $a * x_1^{\alpha_1} * \ldots * x_n^{\alpha_n}$ — *стандартным видом этих одночленов.*

В случае, когда $(A; *)$ — коммутативная группа, можно рассматривать одночлены более общего вида $\Pi(a_1, \ldots, a_m)$, где a_k могут быть элементами из A, переменными $x_1, \ldots, x_n$ или термами вида $\widehat{x_1}, \ldots, \widehat{x_n}$. Такие одночлены тоже приводятся к виду $a * x_1^{\alpha_1} * \ldots * x_n^{\alpha_n}$, только теперь показатели α_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ могут принимать и целые отрицательные значения.

Если же полугруппа (соответственно группа) $(A; *)$ безгранично делима, то аналогичным образом приводятся к стандартной форме термы вида $\Pi(a_1, \ldots, a_m)$, где a_k — элементы из A, либо термы вида $x_k^{r_k}$ где $r_k \in \boldsymbol{Q}$.

Мы видим, таким образом, что большой раздел школьной алгебры, связанный с тождественными преобразованиями одночленов и одночленных иррациональных выражений, основан на теории коммутативных полугрупп и групп. С той же теорией связаны тождественные преобразования линейных выражений с рациональными коэффициентами (т. е. выражений вида $r_1 a_1 + \ldots + r_m a_m$, где $r_k \in \boldsymbol{Q}$, $1 \leqslant k \leqslant m$). Для этого достаточно перейти в группах к аддитивной записи. Рассмотрение линейных выражений с действительными коэффициентами требует привлечения внешней алгебраической операции умножения на действительные числа.

4. Рациональные термы. До сих пор мы рассматривали алгебры с одной операцией. Перейдем теперь к изучению термов, связанных с алгебрами, имеющими две операции, которые обозначим как сложение и умножение. Для школьной алгебры среди таких алгебр наиболее важны коммутативные ассоциативные кольца с единицей (в частности, кольцо целых чисел) и поля (в частности, поля рациональных, действительных и комплексных чисел).

Целыми рациональными термами от переменных $x_1, \ldots, x_n$ *над ассоциативным и коммутативным кольцом с единицей* A называются:

а) элементы кольца A и переменные $x_1, \ldots, x_n$,

б) суммы вида $(X) + (Y)$, где X и Y — целые рациональные термы,

в) произведения вида $(X) \cdot (Y)$, где X и Y — целые рациональные термы.

Одной из задач школьной алгебры является преобразование целых рациональных термов над числовыми кольцами к стандартному виду. Пользуясь свойствами коммутативности и ассоциативности операций сложения и умножения, а также свойством дистрибутивности умножения относительно сложения, можно доказать следующее утверждение:

Любой целый рациональный терм от переменных $x_1, \ldots, x_n$ *над числовым кольцом* A *с единицей приводится к однозначно определенному* *стандартному виду, а именно сумме*

$$\sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ *— элементы из* A, $\alpha_k \in N_0 = N \cup \{0\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *а слагаемые расположены в лексикографическом порядке* (т. е. $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ предшествует $a_{\beta_1 \dots \beta_n}, x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$, если $\alpha_1 < \beta_1$ или если существует такое k, что $\alpha_j = \beta_j$ при $1 \leqslant j \leqslant k$ и $\alpha_{k+1} < \beta_{k+1}$).

Доказательство этого утверждения проводится следующим образом: предполагают, что X и Y имеют указанный стандартный вид, и доказывают, что к этому виду приводятся выражения[1] $(X) + (Y)$ и $(X) \cdot (Y)$.

В частности, для любого кольца A верна формула бинома Ньютона:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Если заменить в целом рациональном терме $R(x_1, \dots, x_n)$ переменные $x_1, \dots, x_n$ элементами числового кольца A, получится терм без переменных, значение которого принадлежит тому же кольцу.

Более широким классом выражений является совокупность *рациональных термов от переменных* $x_1, \dots, x_n$ *над числовым полем* P. Эта совокупность определяется так же, как и совокупность целых рациональных термов над P с добавлением условия, что выражение $(X) : (Y)$ тоже является рациональным, если только Y не равно тождественно нулю.

Любое рациональное выражение можно привести к виду $B(x_1, \dots, x_n) : C(x_1, \dots, x_n)$, где $B(x_1, \dots, x_n)$ и $C(x_1, \dots, x_n)$ — целые рациональные термы от $x_1, \dots, x_n$, приведенные к стандартному виду. Однако такая запись не является однозначно определенной. Условились считать термы $B : C$ и $D : E$ тождественно равными, если выполняется равенство $B \cdot E = C \cdot D$ (следует отметить, что при этом нарушается принятое условие о тождественном равенстве выражений, поскольку, например, термы $2x^2 : x$ и $2x : 1$ считаются тождественно равными, хотя и имеют различные области определения; терм $2x^2 : x$ не определен при $x = 0$, а $2x : 1$ определено при этом значении x).

Среди всех термов, тождественно равных терму $B(x_1, \dots, x_n) : C(x_1, \dots, x_n)$, стандартным считается несократимый терм, у которого коэффициент при старшем члене у $C(x_1, \dots, x_n)$ равен единице.

Преобразовывать можно не только целые рациональные термы над кольцами, но и аналогичные термы над булевыми алгебрами. Этот вопрос рассматривается в курсе «Математическая логика» для булевых алгебр, составленных из высказываний.

Мы не будем останавливаться здесь на преобразовании термов над неассоциативными кольцами и другими алгебрами, поскольку они не играют существенной роли для школьной математики.

---

[1] Здесь, разумеется, в соответствии с правилами алгебры опущены лишние скобки.

1. Отношение порядка в полугруппах. В полугруппе $(N; +)$ существует естественное отношение порядка $m < n$. Операция сложения связана с этим отношением порядка следующим условием: $m < n$ в том и только в том случае, когда существует такое $p \in N$, что $m + p = n$.

Аналогичным образом можно ввести отношение порядка в некоторых других коммутативных полугруппах. Введем следующее определение:

Определение 1. Коммутативная полугруппа $(A; +)$ называется *направленной*, если для любых a и b из A выполняется неравенство $a + b \neq a$.

Из этого определения следует, что в направленных полугруппах нет нулевого элемента, а следовательно, нет ни одной пары противоположных элементов. Примерами направленных полугрупп могут служить $(N; +)$, $(N'; \cdot)$, где $N' = N - \{1\}$, и $(R_+; +)$. Отношение порядка в направленных полугруппах может быть задано следующим образом:

Определение 2. Пусть $(A; +)$ — направленная полугруппа и $a, b \in A$. Скажем, что *а меньше b*, $a < b$, если существует такое $p \in A$, что $a + p = b$.

Докажем, что введенное отношение «меньше» транзитивно и асимметрично, т. е. действительно является отношением порядка. В самом деле, если $a < b$ и $b < c$, то найдутся такие p и q в A, что $a + p = b$ и $b + q = c$. Но тогда имеем $c = b + q = (a + p) + q = a + (p+q)$. Так как $p + q \in A$, то отсюда следует, что $a < c$. Значит, транзитивность введенного отношения «меньше» доказана. Предположим теперь, что $a < b$ и $b < a$. Тогда в силу транзитивности имеем $a < a$, т. е. $a = a + p$, где $p \in A$. Но это противоречит предположению о направленности полугруппы A.

Итак, в любой направленной полугруппе определено отношение строгого порядка указанным выше образом. Это отношение *устойчиво* относительно сложения, т. е. из $a < b$ следует, что $a + c < b + c$ для любого $c \in A$. В самом деле, существует $p \in A$, такое, что $a + p = b$. Но тогда $a + c + p = a + p + c = b + c$ и потому $a + c < b + c$.

Если сложение в A сократимо, то, обратно, из $a + c < b + c$ следует: $a < b$. В самом деле, в этом случае $b + c = a + c + p = a + p + c$, где $p \in A$, и потому $b = a + p$, т. е. $a < b$.

Вообще говоря, введенный в направленную полугруппу порядок не является линейным. Если это так, т. е. если для любых a и b в A выполняется одно из соотношений: $a < b$, $a = b$, $b < a$, то назовем A *линейной полугруппой*. Заметим, что выполнение одного из указанных соотношений исключает выполнение двух других.

Примерами линейных полугрупп могут служить $(N; +)$ и $(R_+; +)$. Полугруппа $(N'; \cdot)$ направленна (поскольку $1 \notin N'$, то $ab \neq a$), но не линейна: например, $3 \in N'$, $5 \in N'$, но в N' нет ни такого элемента p, что $3p = 5$, ни такого элемента q, что $5q = 3$.

2. Симметризации алгебр. В процессе развития понятия числа происходит переход от полукольца ($\boldsymbol{N}$; $+$, $\cdot$) к полуполю ($\boldsymbol{Q}_+$; $+$, $\cdot$), а потом к полю ($\boldsymbol{Q}$; $+$, $\cdot$). С алгебраической точки зрения эти переходы состоят в том, что от алгебры, в которой некоторая операция не имеет обратной, переходят к алгебре, где эта обратная операция определена: при переходе от ($\boldsymbol{N}$; $+$, $\cdot$) к ($\boldsymbol{Q}_+$; $+$, $\cdot$) появляется всюду определенная обратная операция для умножения, а при переходе от ($\boldsymbol{Q}_+$; $+$, $\cdot$) к ($\boldsymbol{Q}$; $+$, $\cdot$) — для сложения.

В общем случае переход от алгебры (A; $*$) к содержащей ее алгебре, в которой определена обратная операция, назовем симметризацией данной алгебры. При этом нас будут интересовать лишь минимальные симметризации. Чтобы уточнить соответствующие понятия, введем следующее определение:

Определение. Пусть дана коммутативная алгебра (A; $*$), принадлежащая некоторому роду алгебраических структур. Ее *симметризацией* называют алгебру (B; $\circ$), обладающую следующими свойствами:

а) (B; $\circ$) принадлежит тому же роду структур, что и (A; $*$).

б) $A \subset B$, причем для элементов a, b из A выполняется равенство $a \circ b = a * b$.

в) Для любой пары элементов a, b из B найдется однозначно определенный элемент x, такой, что $a \circ x = b$.

г) Если (C; $\top$) — алгебра, обладающая свойствами а) — в), то существует изоморфное отображение (B; $\circ$) в (C; $\top$), оставляющее неподвижными элементы из A.

Условия а) и б) выражают тот факт, что (B; $\circ$) является расширением алгебры (A; $*$), условие в) — существование в расширенной алгебре обратной операции, а условие г) — минимальность полученного расширения. В силу условия б) будем и в алгебре B обозначать операцию тем же символом, что и в A.

Начнем с симметризации коммутативных полугрупп. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы коммутативная полугруппа* (A; $+$) *была симметризуемой, необходимо и достаточно, чтобы операция* $+$ *была сократимой. В этом случае операция* $+$ *сократима и в симметризации* A.

Доказательство. Сначала докажем необходимость условия. Если полугруппа (A; $+$) симметризуема, то для любых a и b из A существует в B элемент x, такой, что $a + x = a + b$. Но таким элементом является $x = b$. Поэтому из $a + c = a + b$ следует, что $c = b$.

Теперь докажем достаточность условия. Начнем с анализа. Предположим, что существует коммутативная полугруппа (B; $+$) с сокращением, являющаяся симметризацией для (A; $+$). Тогда для любой пары (a, b), где $a, b \in A$, найдется один и только один элемент $x \in B$, такой, что $b + x = a$. Примем (a, b) за обозначение этого элемента. Один и тот же элемент $x \in B$ может иметь несколько обозначений. Если (a, b) и (c, d) обозначают один и тот же элемент $x \in B$, то должны выполняться равенства $b + x = a$, $d + x = c$. Из них следует, что $(b + x) + d = a + d$, $(d + x) + b = c + b$, и потому, в силу ассоциативности и коммутативности сложения в B, $a+d=c+b$. Обратно, если $a+d=c+b$ и $x=(a, b)$, то $b+x=a$, а потому $c+(b+x)=c+a$, откуда $a+d+x=c+a$. Но по условию операция сложения в A сократима, и потому получаем, что $d+x=c$, $x=(c, d)$. Это значит, что из $a+d=c+b$ следует равенство $(a, b)=(c, d)$.

Операции над парами определяются следующим образом: если $x=(a, b)$ и $y=(c, d)$, то $b+x=a$ и $d+y=c$. Но в этом случае имеем $(b+x)+(d+y)=a+c$, т. е. $(b+d)+(x+y)=a+c$. Это означает, что элемент $x+y$ из B обозначается парой $(a+c, b+d)$. Иными словами,

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d).$$

Проведенный анализ указывает путь к доказательству достаточности условия: мы убедимся сейчас, что $(B; +)$ можно построить, разбив на классы эквивалентности множество A^2 по отношению эквивалентности:

$$(a, b) \sim (c, d) \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} a+d=b+c. \tag{1}$$

Итак, обозначим через B фактор-множество $A^2/\sim$, где $(a, b) \sim (c, d)$ определено равенством (1). Введем в B операцию сложения следующим образом: если в классе эквивалентности x есть пара (a, b), а в классе эквивалентности y — пара (c, d), то через $x+y$ обозначим класс эквивалентности, содержащий пару $(a+c, b+d)$. Докажем, что это определение корректно, т. е. что результат операции не зависит от выбора пар в x и y. В самом деле, если $(a, b) \sim (a_1, b_1)$ и $(c, d) \sim (c_1, d_1)$, то имеем $a+b_1=a_1+b$ и $c+d_1=c_1+d$. Но тогда $(a+c)+(b_1+d_1)=(b+d)+(a_1+c_1)$, а это означает, что

$$(a+c, b+d) \sim (a_1+c_1, b_1+d_1).$$

Мы построили алгебру $(B; +)$. Каждому элементу $a \in A$ поставим в соответствие элемент в B, состоящий из пар вида $(a+b, b)$. Так как сумме $a+c$, где $a, c \in A$, соответствуют пары $(a+b, b)+(c+d, d)=(a+c+b+d, b+d)$, то вложение A в B сохраняет операцию, т. е. выполнено условие б) определения 1. Равенства

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)=(c+a, d+b)=(c, d)+(a, b)$$

и

$$[(a, b)+(c, d)]+(e, f)=[(a+c)+e, (b+d)+f]=$$
$$=[a+(c+e), b+(d+f)]=(a, b)+[(c, d)+(e, f)]$$

показывают, что $x+y=y+x$ и $(x+y)+z=x+(y+z)$, т. е. что B является коммутативной полугруппой. Далее, из $(a, b)+(e, f) \sim (c, d)+(e, f)$ следует, что $(a+e, b+f) \sim (c+e, d+f)$, т. е. $a+e+d+f=b+f+c+e$. Но A — полугруппа с сокращениями, и потому $a+d=b+c$, т. е. $(a, b) \sim (c, d)$. Мы доказали, что $(B; +)$ — коммутативная полугруппа с сокращениями, т. е. принадлежит тому же роду структур, что и $(A; +)$. Значит, выполнено и условие а).

Докажем, теперь, что операция $+$ в B имеет обратную, т. е. что для любых двух элементов x и y из B найдется элемент $z \in B$, такой, что $x + z = y$. В самом деле, если x содержит пару (a, b), а y — пару (c, d), то нам надо найти такую пару (e, f), чтобы выполнялось соотношение $(a, b) + (e, f) \sim (c, d)$, т. е. чтобы имело место равенство $a+e+ + d = c + b + f$. Для этого достаточно положить $e = c + b$, $f = = a + d$. Следовательно, условие в) тоже выполнено.

Осталось показать минимальность $(B; +)$, т. е. выполнение условия г). Это сразу вытекает из проведенного выше анализа — любая симметризация $(C; +)$ полугруппы $(A; +)$ содержит часть, изоморфную $(B; +)$ (она состоит из элементов, обозначаемых парами вида (a, b), $a, b \in A$).

Конструкция симметризации заметно упрощается, если полугруппа $(A; +)$ линейна[1] (см. п. 1). В этом случае имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Симметризация $(B; +)$ линейной коммутативной полугруппы $(A; +)$ является объединением трех множеств: A_+, A_- и $\{0\}$, где A_+ состоит из пар вида $(+, a)$, $a \in A$, а A_- — из пар вида $(-, a)$, где $a \in A$. Операция сложения в B определяется следующим образом:*

а) $(+, a) + (+, b) = (+, a + b)$,

б) $(-, a) + (-, b) = (-, a + b)$,

в) $(+, a) + (-, b) = \begin{cases} (+, a - b), \text{ если } b < a \\ (-, b - a), \text{ если } a < b, \end{cases}$

г) $(+, a) + 0 = (+, a)$, $(-, a) + 0 = (-, a)$, $0 + 0 = 0$.

Через $a - b$ обозначен такой элемент $x \in A$, что $b + x = a$.

Доказательство. Обозначим класс всех пар вида (a, a), где $a \in A$, через 0. Далее, если $b > a$, то существует элемент $a - b \in A$. Обозначим класс пар, содержащий (a, b), через $(+, a - b)$.

Если $a - b = c - d$, то $a + d = b + c$ и потому классы $\overline{(a, b)}$ и $\overline{(c, d)}$ совпадают. Это показывает корректность обозначения $(+, a - b)$. Наконец, если $a < b$, то существует элемент $b - a \in A$. Обозначим класс пар, содержащий (a, b), через $(-, b - a)$. Поскольку полугруппа $(A; +)$ линейна, то для любой пары $(a, b) \in A^2$ имеем либо $a = b$, либо $a < b$, либо $b < a$. Поэтому любой элемент из A^2 (т. е. любой класс пар) принадлежит объединению $A_+ \cup A_- \cup \{0\}$.

Указанные выше правила сложения в $A_+ \cup A_- \cup \{0\}$ непосредственно вытекают из правил сложения классов (a, b).

Доказанная теорема поясняет, почему при симметризации линейных полугрупп $(\boldsymbol{N}; +)$ и $(\boldsymbol{R}_+; +)$ получаются множества, элементы которых имеют вид $+a$, $-a$ или 0 (где $a \in \boldsymbol{N}$ или $a \in \boldsymbol{R}_+$), а при симметризации нелинейной полугруппы $(\boldsymbol{N}; \cdot)$ появляется алгебра, эле-

[1] В этом случае $(A; +)$ — полугруппа с сокращениями.

менты которой приходится обозначать парами $(m, n) \in N^2$ (которые обычно записывают в виде дробей $\frac{m}{n}$).

3. Расширение полуколец. Алгебры, изучаемые в школе, обладают обычно двумя операциями (сложение и умножение). Их можно симметризовать по любой из этих операций. В связи с этим возникает вопрос о переносе на симметризованную алгебру второй операции. Ответ на этот вопрос дают следующие две теоремы:

Теорема 1. *Пусть полукольцо $(A; +, \cdot)$ таково, что $(A; \cdot)$ — коммутативная полугруппа с сокращением. Тогда его можно симметризовать по операции умножения и ввести в получившуюся алгебру операцию сложения так, чтобы возникло полуполе. Эта симметризация однозначна с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Существование симметризации $(B; \cdot)$ полугруппы $(A; \cdot)$ вытекает из теоремы 1 п. 2.

Элементы из B будем записывать в виде дробей $\frac{m}{n}$, $m, n \in A$. Нам надо ввести в B операцию сложения так, чтобы получилось полуполе. Так как $\frac{m}{n} \sim \frac{mq}{nq}$ и $\frac{p}{q} \sim \frac{pn}{nq}$, то достаточно определить сумму для дробей с одинаковыми знаменателями. Поскольку умножение в полуполе дистрибутивно относительно сложения, то должно выполняться равенство

$$\frac{an}{a} \cdot \left(\frac{b}{n} + \frac{c}{n}\right) = \frac{an}{a} \cdot \frac{b}{n} + \frac{an}{a} \cdot \frac{c}{n} \sim b + c,$$

из которого следует, что сложение надо определить так:

$$\frac{b}{n} + \frac{c}{n} \sim \frac{a(b+c)}{an} \sim \frac{b+c}{n}.$$

Легко проверить, что это определение сложения не зависит от выбора дробей, изображающих складываемые элементы из B. В самом деле, если $\frac{b}{n} \sim \frac{p}{q}$, $\frac{c}{n} \sim \frac{s}{q}$, то $bq = np$, $cq = ns$ и потому $bq + cq = np + ns$, $(b + c)\, q = (p + s)n$. Это значит, что $\frac{b+c}{n} \sim \frac{p+s}{q}$.

Предоставляем читателю проверить, что сложение в B обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и что умножение дистрибутивно относительно сложения.

Поскольку $(B; \cdot)$ — симметризация полугруппы $(A; \cdot)$, то для любых двух элементов $x, y \in B$ найдется одно и только одно $z \in B$, такое, что $xz = y$ (если в x содержится дробь $\frac{m}{n}$, а в y — дробь $\frac{p}{q}$, то z задается дробью $\frac{np}{mq}$). Этим доказано, что B — полуполе.

Однозначность построенной симметризации вытекает из того, что $(B; \cdot)$ определено однозначно (с точностью до изоморфизма), а сложение в B можно ввести лишь одним образом так, чтобы выполнялось условие дистрибутивности.

Отметим еще, что если в полукольце $(A;\ +,\ \cdot)$ сложение обладало свойством сократимости, то это имеет место и в полуполе $(B;\ +,\ \cdot)$. В самом деле, если $\frac{m}{n}+\frac{x}{n}=\frac{p}{n}+\frac{x}{n}$, то $\frac{m+x}{n}=\frac{p+x}{n}$, откуда $m+x=p+x$ и потому $m=p$. Значит, из $\frac{m}{n}+\frac{x}{n}=\frac{p}{n}+\frac{x}{n}$ следует: $\frac{m}{n}=\frac{p}{n}$.

Вторая теорема касается симметризации относительно сложения.

Теорема 2. *Пусть $(A;\ +,\ \cdot)$ — коммутативное и ассоциативное полукольцо, такое, что $(A;\ +)$ — полугруппа с сокращением. Тогда его можно симметризовать относительно операции сложения так, что получается коммутативное и ассоциативное кольцо $(B;\ +,\ \cdot)$. Эта симметризация определена однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Обозначим через $(B;\ +)$ симметризацию полугруппы $(A;\ +)$, существующую в силу теоремы 1 п. 2. Нам надо ввести в $(B;\ +)$ операцию умножения так, чтобы получилось коммутативное и ассоциативное кольцо. Положим

$$(a,\ b)\cdot(c,\ d)=(ac+bd,\ ad+bc).$$

Проверим, что если $(a,\ b)\sim(a_1,\ b_1)$ и

$$(c,\ d)\sim(c_1,\ d_1),\ \text{то}\ (a,\ b)\cdot(c,\ d)\sim(a_1,\ b_1)\cdot(c_1,\ d_1).$$

В самом деле, имеем $a+b_1=b+a_1$. Но тогда

$$(a+b_1)\,c=(a_1+b)\,c,\quad (a_1+b)\,d=(a+b_1)\,d$$

и потому

$$(a+b_1)\,c+(a_1+b)\,d=(a_1+b)\,c+(a+b_1)\,d,$$

откуда

$$(ac+bd,\ ad+bc)\sim(a_1c+b_1d,\ a_1d+b_1c).$$

Итак, из $(a,\ b)\sim(a_1,\ b_1)$ следует, что $(a,\ b)\cdot(c,\ d)\sim(a_1,\ b_1)\cdot(c,\ d)$. Если, кроме того, $(c,\ d)\sim(c_1,\ d_1)$, то $(a_1,\ b_1)\cdot(c,\ d)\sim(a_1,\ b_1)\,(c_1,\ d_1)$ и потому $(a,\ b)\cdot(c,\ d)\sim(a_1,\ b_1)\,(c_1,\ d_1)$.

Поскольку

$$(a,\ b)\cdot(c,\ d)=(ac+bd,\ ad+bc),$$
$$(c,\ d)\cdot(a,\ b)=(db+ca,\ cb+da),$$

то умножение в B коммутативно. Аналогично доказывается ассоциативность умножения и его дистрибутивность относительно сложения.

Поскольку в полугруппе $(B;\ +)$ уравнения $a+x=b$ имеют единственное решение, то $(B;\ +)$ является кольцом.

Нам осталось доказать, что данное выше определение умножения в $(B;\ +)$ однозначно определено требованием дистрибутивности относительно сложения и совпадения с имевшимся ранее умножением на A. Для этого удобно сначала присоединить к A элемент 0 (с обычными операциями $0+a=a+0=a$, $0\cdot a=a\cdot 0=0$), что позволяет записывать пары (a, b) в виде сумм: $(a, 0) + (0, b)$. Поскольку пара $(a, 0)$ изображает число a, то должно выполняться равенство $(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$. Далее, из того, что $(a, 0) + (0, a) = (a, a) \sim 0$, следует равенство $(c, 0) \cdot (a, 0) + (c, 0) \cdot (0, a) = 0$. Отсюда имеем $(ca, 0) + (c, 0)(0, a) = 0$ и потому $(c, 0) \cdot (0, a) = (0, ca)$.

Так же доказывается, что $(0, a) \cdot (0, c) = (ac, 0)$.
Но тогда

$$\begin{gathered}(a, b) \cdot (c, d) = [(a, 0) + (0, b)] \cdot [(c, 0) + (0, d)] = \\ = (a, 0) \cdot (c, 0) + (a, 0) \cdot (0, d) + (0, b) \cdot (c, 0) + \\ + (0, b) \cdot (0, d) = (ac, 0) + (0, ad) + (0, bc) + \\ + (bd, 0) = (ac + bd, ad + bc).\end{gathered}$$

Теорема доказана.

В случае, когда $(A; +, \cdot)$ — полуполе, описанная выше конструкция дает поле $(B; +, \cdot)$. Применяя теорему 1 к полукольцу $(\boldsymbol{N}; +, \cdot)$, получаем сначала полуполе $(\boldsymbol{Q}; +, \cdot)$, а применяя к этому полуполю теорему 2, получаем поле $(\boldsymbol{Q}; +, \cdot)$. Чтобы провести расширение в ином порядке (от $(\boldsymbol{N}; +, \cdot)$ к $(\boldsymbol{Z}; +, \cdot)$, а потом к $(\boldsymbol{Q}; +, \cdot)$), надо было бы доказать теорему о симметризации коммутативного кольца без делителей нуля, которая аналогична теореме 1.

§ 4. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Введение. Понятие натурального числа является одним из основных понятий математики, и, как уже говорилось, лежит в основе большинства математических моделей действительности. Отправляясь от него, можно построить последовательно понятия целого числа, рационального числа, действительного числа, комплексного числа, числовой функции числового аргумента, координатного пространства. Иными словами, оно является фундаментом всего здания элементарной математики.

Ввиду фундаментальной важности понятия натурального числа полезно разобрать различные ведущие к нему подходы. В курсе «Числовые системы (см. [43]) была изложена одна из аксиоматик натуральных чисел, в которой за неопределяемые понятия выбирались «натуральный ряд чисел» (или «множество натуральных чисел»), «единица», «сумма» и «произведение». Наряду с этой аксиоматикой существуют иные, в частности аксиоматика Пеано, в которой за неопределяемые понятия выбираются «натуральный ряд чисел», «единица» и «следовать за», а также аксиоматика, основанная на операции сложения. Каждая из этих аксиоматик освещает понятие натурального числа со своей стороны, но все они эквивалентны друг другу, поскольку все они категоричны и фактически описывают один и тот же математический объект.

Мы покажем ниже, что вопрос о непротиворечивости аксиоматики Пеано сводится к вопросу о непротиворечивости системы аксиом Цермело — Френкеля для теории множеств. Связь между понятиями конечного множества и натурального числа на первый взгляд представляется совершенно очевидной — натуральное число есть общее свойство класса равномощных конечных множеств. Операция сложения натуральных чисел очевидным образом связана с операцией объединения попарно непересекающихся множеств, а операция умножения натуральных чисел — с операцией декартова умножения таких множеств.

К сожалению, вся эта конструкция опирается на кажущуюся ясность идеи конечного множества. Существуют различные определения этого понятия. Одно из них, восходящее к Дедекинду, означает, по сути дела, что множество конечно, если оно не содержит подмножества, равномощного множеству натуральных чисел. Тем самым понятие конечности сводится обратно к понятию натурального числа. Поэтому более целесообразен иной подход, при котором сначала аксиоматически определяется множество натуральных чисел, а потом конечное множество определяется как множество, равномощное некоторому отрезку натурального ряда чисел. Именно поэтому, при всем удобстве теоретико-множественного языка и простейших теоретико-множественных моделей, не выдерживают критики попытки «научного» построения начальной арифметики на основе понятия множества. Множества и язык теории множеств могут служить лишь для пояснения вводимых понятий, для их «квазиопределений».

2. Аксиоматика Пеано. Аксиомы Пеано непосредственно отражают тот очевидный факт, что натуральный ряд чисел начинается с числа 1, за каждым натуральным числом следует одно и только одно натуральное число, причем ни одно число не следует за двумя различными числами, и, наконец, отправляясь от числа 1 и переходя по порядку к следующим друг за другом натуральным числам, мы получим все множество этих чисел. За неопределяемые понятия выбирают «натуральное число», «единица», за неопределяемое отношение — «следовать за». Аксиомы таковы:

1. *Единица является натуральным числом.* В дальнейшем будем обозначать единицу символом 1.

2. *Единица не следует ни за одним натуральным числом.*

3. *Для каждого натурального числа существует натуральное число, которое следует за ним.*

4. *Ни за одним натуральным числом не следуют два различных числа* (если b следует за a и c следует за a, то $b = c$).

Число, следующее за a, будем в дальнейшем обозначать a'.

5. *Числа, следующие за двумя различными числами, различны* (если $a' = b'$, то $a = b$).

6. *Любое подмножество множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел, содержащее число* 1 *и вместе с любым числом a содержащее a', совпадает с $\boldsymbol{N}$.*

Эти аксиомы можно сформулировать короче, если использовать понятие отображения:

1$'$. *Существует инъективное отображение f множества натуральных чисел в себя, такое, что* $1 \notin f(\boldsymbol{N})$.

2$'$. *Любое подмножество A в $\boldsymbol{N}$, содержащее* 1 *и вместе с любым n содержащее $f(n)$, совпадает с $\boldsymbol{N}$.*

Аксиому 6 (или 2$'$) называют *аксиомой индукции.*

Всякое множество N, в котором заданы начальный элемент и отношение следования (или отображение f) со свойствами, заданными аксиомами 1—6 (или 1′, 2′), будем называть системой Пеано и обозначать (N; 1; ′) (или (N; f)).

Докажем, что система аксиом 1—6 является независимой. На рисунке 10 изображены множества с отношением следования в них и элементами 1, причем на каждом рисунке изображена система, в которой выполнены все аксиомы, кроме одной.

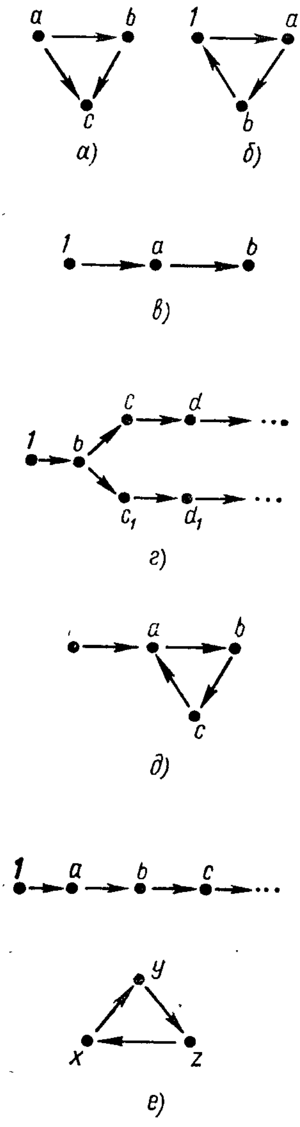

Рис. 10

Из аксиом Пеано вытекает следующее утверждение:

Теорема 1. *Для каждого элемента $b \in N$, отличного от 1, найдется единственный элемент $a \in N$, такой, что $b = a'$.*

Доказательство. Образуем подмножество A в N, состоящее из элемента 1 и всех элементов b, для которых можно найти такое a, что $a' = b$. Тогда $1 \in A$ и вместе с a в A входит a'. Поэтому $A = N$. Это и значит, что любой элемент из N, кроме 1, имеет хотя бы один предшествующий ему элемент. Единственность этого элемента вытекает из аксиомы 5.

3. Основная теорема об индуктивных построениях. При определении операций в множестве N основную роль играет следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть (N; 1; ′) — система Пеано, S — некоторое множество, c — элемент в S и F — отображение множества S в себя. Тогда существует однозначно определенное отображение $G: N \to S$, такое, что:*

а) $G(1) = c$,

б) $G(n') = F[G(n)]$ для всех $n \in N$.

Разобьем доказательство этой теоремы на ряд лемм.

Лемма 1. *Отображение $G: N \to S$ со свойствами* а) — б) *из теоремы 1 однозначно определено.*

Доказательство. Предположим, что существуют два отображения G_1 и G_2 с требуемыми свойствами. Докажем, что для всех $n \in N$ выполняется равенство $G_1(n) = G_2(n)$. Обозначим через A множество элементов из N, для которых оно выполняется. Так как $G_1(1) = G_2(1) = c$, то $1 \in A$. Далее, пусть $n \in A$, т. е. $G_1(n) = G_2(n)$.

Тогда по условию б) имеем: $G_1(n') = F[G_1(n)]$ и $G_2(n') = F[G_2(n)]$. Поскольку $G_1(n) = G_2(n)$, то $G_1(n') = G_2(n')$, и, следовательно, $n' \in A$. Итак, $1 \in A$ и из $n \in A$ вытекает: $n' \in A$. По аксиоме индукции получаем, что $A = \boldsymbol{N}$, т. е. из $n \in \boldsymbol{N}$ следует $G_1(n) = G_2(n)$.

Перейдем к доказательству существования отображения с требуемыми свойствами. Обозначим через $\boldsymbol{M}$ совокупность соответствий R между $\boldsymbol{N}$ и S, таких, что

в) $(1, c) \in R$,

г) если $(n, s) \in R$, то $(n', F(s)) \in R$.

Множество этих соответствий непусто: к нему принадлежит, например, полное соответствие $\boldsymbol{N} \times S$. Обозначим через G пересечение всех таких соответствий: $G = \bigcap\limits_{R \in \boldsymbol{M}} R$ — и докажем, что G является искомым отображением $\boldsymbol{N}$ в S.

Лемма 2. *Построенное выше соответствие G принадлежит совокупности $\boldsymbol{M}$ (т. е. обладает свойствами в) и г)).*

Доказательство. Так как для всех $R \in \boldsymbol{M}$ имеем $(1, c) \in R$, то $(1, c) \in \bigcap\limits_{R \in \boldsymbol{M}} R$, т. е. $(1, c) \in G$. Далее, покажем, что если $(n, s) \in G$, то $(n', F(s)) \in G$. В самом деле, если $(n, s) \in G$, то для любого $R \in \boldsymbol{M}$ имеем $(n, s) \in R$. По определению совокупности $\boldsymbol{M}$ отсюда следует, что для всех $R \in \boldsymbol{M}$ имеем $(n', F(s)) \in R$. А тогда $(n', F(s)) \in \bigcap\limits_{R \in \boldsymbol{M}} R$, т. е. $(n', F(s)) \in G$. Итак, если $(n, s) \in G$, то $(n', F(s)) \in G$.

Поскольку G является пересечением всех соответствий между $\boldsymbol{N}$ и S, обладающих свойствами в) и г), то ни одно собственное подмножество в G не может обладать этими свойствами вместе.

Лемма 3. *Соответствие G всюду определено на $\boldsymbol{N}$.*

Доказательство. Обозначим через A подмножество $\boldsymbol{N}$, состоящее из элементов n, для которых найдется такое $s \in S$, что $(n, s) \in G$. Нам надо доказать, что $A = \boldsymbol{N}$. Но $1 \in A$, так как $(1, c) \in G$. Далее, пусть $n \in A$. Тогда найдется такое s, что $(n, s) \in G$. По лемме 2 отсюда вытекает, что $(n', F(s)) \in G$, причем $F(s) \in S$, и потому $n' \in A$. Итак, $1 \in A$ и из $n \in A$ следует, что $n' \in A$. Значит, $A = \boldsymbol{N}$.

Мы хотим доказать теперь, что соответствие G функционально, т. е. что для любого элемента $n \in \boldsymbol{N}$ из того, что $(n, s_1) \in G$ и $(n, s_2) \in G$, вытекает равенство $s_1 = s_2$. Это доказательство будет проведено по индукции — сначала мы докажем утверждение для $n = 1$, а потом из его справедливости для n выведем, что оно истинно и для n'.

Лемма 4. *Если $(1, z) \in G$, то $z = c$.*

Доказательство. Предположим, что существует z, отличное от c и такое, что $(1, z) \in G$. Удалим из множества G пару $(1, z): W = G \setminus (1, z)$. Поскольку $c \neq z$, причем $(1, c) \in G$, то $(1, c) \in W$. Далее, если $(n, s) \in W$, то $(n, s) \in G$, а потому в силу леммы 2 имеем $(n', F(s)) \in G$. Но $n' \neq 1$ и потому $(n', F(s)) \neq (1, z)$, а следовательно, $(n', F(s)) \in W$. Итак, соответствие W обладает свойствами в) и г), чего не может быть, поскольку $W \subset G$ и $W \neq G$.

Лемма 5. *Если $(n', w) \in G$, то найдется такое $z \in S$, что $w = F(z)$ и $(n, z) \in G$.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что существует такое w, для которого $(n', w) \in G$, но для любого $z \in S$ из $(n, z) \in G$ следует $w \neq F(z)$. Докажем, что тогда отношение $W = G \setminus (n', w)$ принадлежит совокупности M. В самом деле, $(1, c) \neq (n', w)$ и $(1, c) \in G$, а потому $(1, c) \in W$.

Далее, пусть $z \in S$ и $(m, z) \in W$. Тогда $(m, z) \in G$ и потому $(m', F(z)) \in G$. По аксиоме 5 для системы Пеано из $m \neq n$ следовало бы $m' \neq n'$. Тогда $(m', F(z)) \neq (n', w)$ и потому пара $(m', F(z))$ принадлежала бы соответствию $W = G \setminus (n', w)$. Если же $m = n$ и $(m', F(z)) = (n', w)$, то $w = F(z)$, где $z \in S$, а это противоречит сделанному допущению относительно w. Итак, $(m', F(z)) \neq (n', w)$, а тогда снова $(m', F(z)) \in W = G \setminus (n', w)$.

Итак, $(1, c) \in W$ и из $(m, z) \in W$ следует, что $(m', F(z)) \in W$. Значит W обладает свойствами в) и г), чего не может быть, поскольку W — собственное подмножество в G. Полученное противоречие доказывает лемму 5.

Лемма 6. *Соответствие G функционально.*

Доказательство. Нам надо доказать, что для любого $n \in \boldsymbol{N}$ из $(n, s_1) \in G$, $(n, s_2) \in G$ следует $s_1 = s_2$. Обозначим через A множество $n \in \boldsymbol{N}$, для которых это справедливо. В силу леммы 4 имеем $1 \in A$. Докажем, что если $n \in A$, то $n' \in A$, т. е. что если из $(n, s_1) \in G$, $(n, s_2) \in G$ следует $s_1 = s_2$, то из $(n', u_1) \in G$, $(n', u_2) \in G$ следует $u_1 = u_2$. В самом деле, по лемме 5 из $(n', u_1) \in G$, $(n', u_2) \in G$ вытекает существование таких элементов s_1 и s_2 из S, что $u_1 = F(s_1)$, $u_2 = F(s_2)$, $(n, s_1) \in G$, $(n, s_2) \in G$.

Но тогда, поскольку $n \in A$, имеем $s_1 = s_2$, а следовательно, $F(s_1) = F(s_2)$, т. е. $u_1 = u_2$. Значит, $n' \in A$.

Итак, $1 \in A$ и из $n \in A$ вытекает $n' \in A$. Значит, по аксиоме индукции $A = \boldsymbol{N}$, т. е. соответствие G функционально.

Из лемм 3 и 5 следует, что G является отображением $\boldsymbol{N}$ в S. Так как по лемме 2 имеем $G(1) = c$ и из $(n, s) \in G$ следует $(n', F(s)) \in G$, то G обладает свойствами, требуемыми по теореме 1. Теорема 1 доказана.

Сформулируем теорему, несколько более общую, чем теорема 1, но доказываемую почти так же:

Теорема 2. *Пусть $(\boldsymbol{N}; 1, ')$ — система Пеано, S — некоторое множество, $c \in S$ и F — отображение множества $\boldsymbol{N} \times S$ в S. Тогда существует однозначно определенное отображение G множества $\boldsymbol{N}$ в S, такое, что*

а) $G(1) = c$,

б) $G(n') = F(n, G(n))$ *для всех* $n \in \boldsymbol{N}$.

Теоремы 1 и 2 лежат в основе различных построений, связанных с системами Пеано. Выберем, например, в системе Пеано некоторый элемент n и положим $S = \boldsymbol{N}$, $c = n'$ и $F(m) = m'$. Тогда в силу теоремы 1 существует однозначно определенное отображение $G_n : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, такое, что $G_n(1) = n'$ и $G_n(m') = [G_n(m)]'$ для всех $m \in \boldsymbol{N}$. Образ элемента m при этом отображении называется *суммой* n и m и обозначается $n + m$, $G_n(m) = n + m$. Алгебраическая операция $(n, m) \to n + m$ называется *сложением* в $\boldsymbol{N}$.

Если положить $S = \boldsymbol{N}$, $c = n$, $F(m) = n + m$, то элементу n соответствует однозначно определенное отображение $H_n : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, такое, что $H_n(1) = n$ и $H_n(m') = H_n(m) + n$ для всех $m \in \boldsymbol{N}$. Образ элемента m при этом отображении называется *произведением* элементов n и m и обозначается nm, $H_n(m) = nm$. Алгебраическая операция $(n, m) \to nm$ называется *умножением* в $\boldsymbol{N}$.

Выбирая $S = \boldsymbol{N}$, $c = n$, $F(m) = n \cdot m$, получаем аналогичным образом операцию *возведения в степень* в множестве $\boldsymbol{N} : Z_n(m) = n^m$.

С теоремой 2 связаны операции образования конечных сумм и произведений. Обозначим через Φ некоторое отображение $\boldsymbol{N}$ в $\boldsymbol{N}$ и обозначим $\Phi(n)$ через a_n. Положим теперь $S = \boldsymbol{N}$, $c = a_1$ и $F(k, m) = m + a_{k'}$. Тогда по теореме 2 существует отображение $T : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, такое, что $T(1) = a_1$, $T(k') = F(k, T(k)) = T(k) + a_{k'}$.

Очевидно, что $T(k)$ — не что иное, как сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ (сложение производится слева направо). Так же определяются конечные произведения, цепные дроби и т. д.

4. Категоричность аксиоматики Пеано. Интуитивно ясно, что аксиомы Пеано описывают лишь один объект, т. е. что эта аксиоматика категорична. Проведем доказательство этого утверждения:

Теорема 1. *Пусть* $(\boldsymbol{N}; 1, ')$ и $(M; e, *)$ — *две системы Пеано. Тогда существует такое биективное отображение* $G : \boldsymbol{N} \to M$, *что* $G(1) = e$ и $G(n') = [G(n)]^*$ *для всех* $n \in \boldsymbol{N}$.

Доказательство. Применим теорему 1 п. 3 к системе Пеано $(\boldsymbol{N}; 1, ')$ и множеству M, положив $S = M$, $c = e$, $F(m) = m^*$, $m \in M$. Получим отображение G множества $\boldsymbol{N}$ в M, такое, что $G(1) = e$, и из $G(n) = m$ следует $G(n') = m^*$. Докажем, что это отображение биективно. Для доказательства сюръективности этого отображения достаточно показать, что множество $A = G(\boldsymbol{N})$ совпадает с M. Но $e \in A$, поскольку $e = G(1)$. Далее, если $m \in A$, то $m = G(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, а тогда $m^* = G(n') \in A$.

Итак, множество A содержит элемент e и вместе с любым m оно содержит m^*. По аксиоме индукции для системы Пеано $(M; e; *)$ получаем, что $A = M$, т. е. что отображение G сюръективно.

Осталось доказать инъективность G. Обозначим через B множество таких $n \in \boldsymbol{N}$, что для всех $k \in \boldsymbol{N}$ из $G(k) = G(n)$ следует $k = n$. Нам надо доказать, что $B = \boldsymbol{N}$. Для этого применим индукцию в системе Пеано $(\boldsymbol{N}; 1, ')$. Сначала докажем, что $1 \in \boldsymbol{N}$, т. е. что из $G(k) = G(1) = e$ следует $k = 1$. В противном случае нашлось бы такое $k \in \boldsymbol{N}$, что $G(k) = e$, но $k \neq 1$. По теореме 1 п. 2 существует такое m, что $k = m'$. Но тогда $e = G(k) = G(m') = [G(m)]^*$. Полученное равенство $e = [G(m)]^*$ невозможно, так как противоречит аксиоме 2 для системы Пеано $(M; e, *)$. Поэтому $1 \in B$.

Теперь докажем, что из $n \in B$ следует $n' \in B$, т. е., что из $G(k) = G(n')$ следует $k = n'$. Предположим, что $n \in B$ и $G(k) = G(n') = [G(n)]^*$. Тогда $G(k) \neq e$, а потому $k \neq 1$. По теореме 1 п. 2 найдется такое m, что $k = m'$, и потому $G(k) = G(m') = [G(m)]^*$. Значит, $[G(n)]^* = [G(m)]^*$. Поскольку $(M; e; *)$ — система Пеано, то из этого равенства следует, что $G(n) = G(m)$, а так как по условию $n \in B$, то $n = m$, и потому $n' = m' = k$. Значит, $n' \in B$.

Мы доказали, что $1 \in B$, и из $n \in B$ следует $n' \in B$, а потому $B = N$. Иными словами, отображение G не только сюръективно, но и инъективно, а потому оно биективно.

Мы построили биективное отображение G множества $\boldsymbol{N}$ на множество M, такое, что $G(1) = e$, и из $G(n) = m$ следует $G(n') = m^*$. Это и значит, что модели ($\boldsymbol{N}$; 1, ') и (M; e, $*$) системы аксиом Пеано изоморфны.

Мы доказали категоричность системы аксиом Пеано. Эти аксиомы определяют множество натуральных чисел однозначно, с точностью до изоморфизма. Поэтому достаточно изучать одну из моделей этой системы аксиом. Зафиксируем одну из этих моделей и будем называть ее в дальнейшем *множеством натуральных чисел* (*или натуральным рядом чисел*).

5. Непротиворечивость аксиоматики Пеано. Докажем теперь относительную непротиворечивость аксиоматики Пеано, т. е. ее непротиворечивость в предположении непротиворечивости аксиоматики Цермело — Френкеля теории множеств.

Теорема 1. *Если система аксиом Цермело — Френкеля непротиворечива, то и система аксиом Пеано непротиворечива.*

Чтобы доказать эту теорему, надо построить теоретико-множественную модель для системы аксиом Пеано. Введем следующее определение:

Определение 1. *Последователем* множества A называется объединение этого множества с множеством, единственным элементом которого является A:

$$A' = A \cup \{A\}.$$

Например, последователем пустого множества $\varnothing$ является множество $\{\varnothing\}$, поскольку $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$. Последователем множества $\{\varnothing\}$ является множество $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (объединение множества $\{\varnothing\}$ с множеством $\{\{\varnothing\}\}$, единственным элементом которого является $\{\varnothing\}$).

Определение 2. Совокупность множеств M называется *индуктивной*, если вместе с каждым множеством A она содержит его последователь A'.

Аксиому бесконечности Цермело — Френкеля (см. аксиома V п. 2, § 1, глава II) можно сформулировать так:

Существует хотя бы одна индуктивная совокупность множеств, содержащая пустое множество $\varnothing$.

Представляется очевидным, что наименьшая индуктивная совокупность множеств, содержащая пустое множество $\varnothing$, и даст искомую модель аксиоматики Пеано. Несколько точнее это формулируется следующим образом.

Возьмем одну из индуктивных совокупностей множеств, содержащих пустое множество $\varnothing$, и обозначим ее $\boldsymbol{M}$. Через Φ обозначим семейство всех индуктивных совокупностей подмножеств в $\boldsymbol{M}$, а через $\boldsymbol{N}$ — пересечение всех совокупностей из Φ. Тогда $\boldsymbol{N}$ и будет искомой моделью, в которой начальным элементом является пустое множество $\varnothing$, а B следует за A, если B — последователь A (т. е. $B = A' = A \cup \{A\}$).

Доказательство этого утверждения (т. е. доказательство теоремы 1) распадается на несколько лемм.

Лемма 1. *Совокупность* $\boldsymbol{N}$ *содержит пустое множество* $\varnothing$.

Доказательство. По условию, любая совокупность $\boldsymbol{K}$ из Φ содержит $\varnothing$. Поэтому и пересечение этих совокупностей содержит $\varnothing$.

Лемма 2. *Если* $A \in \boldsymbol{N}$, *то* $A' \in \boldsymbol{N}$.

Доказательство. Если $A \in \boldsymbol{N}$, то для любого $\boldsymbol{K} \in \Phi$ имеем $A \in \boldsymbol{K}$. Поскольку все совокупности $\boldsymbol{K}$ из Φ индуктивны, то все они наряду с A содержат и множество A' — последователь A. Но тогда $A' \in \bigcap\limits_{K \in \Phi} \boldsymbol{K} = \boldsymbol{N}$.

Лемма 3. *Для любого* $A \in \boldsymbol{N}$ *имеем* $A' \neq \varnothing$.

Доказательство. Множество A' содержит, по крайней мере, элемент $\{A\}$ и потому непусто.

Лемма 4. *Если* $A \in \boldsymbol{N}$, $B \in \boldsymbol{N}$, *то из* $A \in B$ *следует, что* $A' \subset B$.

Доказательство. Обозначим через S совокупность таких множеств B из $\boldsymbol{N}$, что для любого $A \in \boldsymbol{N}$ из $A \in B$ следует $A' \subset B$. Поскольку при $B = \varnothing$ и любом A ложно $A \in \varnothing$, то тривиально истинна импликация $A \in \varnothing \rightarrow A' \subset \varnothing$ и потому $\varnothing \in S$. Пусть, далее, $B \in S$ и пусть $A \in B' = B \cup \{B\}$. Тогда $A \in B$ или $A = B$. В первом случае $A \subset B$ по определению множества B, а во втором $A \subset B$ в силу равенства этих множеств. Следовательно, $A \subset B \subset B'$ и потому $B' \in S$. Итак, подмножество S в $\boldsymbol{N}$ содержит пустое множество и индуктивно, а потому $S = \boldsymbol{N}$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если* $A \in \boldsymbol{N}$, $B \in \boldsymbol{N}$ *и* $A' = B'$, *то* $A = B$.

Доказательство. Из $A' = A \cup \{A\} = B'$ вытекает, что $A \in B'$, и потому $A \in B$ или $A = B$. По лемме 4 выводим, что $A \subset B$. Аналогично доказывается, что $B \subset A$. Таким образом, $A = B$.

Из лемм 1—5 и того, что в $\boldsymbol{N}$ нет индуктивных подмножеств, содержащих $\varnothing$ и отличных от $\boldsymbol{N}$, следует, что в $\boldsymbol{N}$ выполнены аксиомы Пеано (если положить $1 \neq \varnothing$ и считать A' следующим за A). Отсюда вытекает, что если непротиворечива аксиоматика теории множеств Цермело — Френкеля, то непротиворечива и аксиоматика натуральных чисел Пеано.

6. Множество натуральных чисел, как вполне упорядоченное полукольцо. Аксиомы Пеано и данные выше определения операций сложения и умножения в множестве натуральных чисел влекут за собой аксиомы, принятые для этого множества в курсе «Числовые системы». Поэтому из них следуют все доказанные в упомянутом курсе свойства указанных операций. Приведем их:

Свойства сложения натуральных чисел.

1. *Сложение натуральных чисел ассоциативно.*
2. *Сложение натуральных чисел коммутативно.*
3. *Сложение натуральных чисел сократимо.*

Не доказано в курсе «Числовые системы», но легко доказывается свойство:

4. *Сумма натуральных чисел* a *и* b *отлична от* a.

Свойства умножения натуральных чисел.

1. Умножение натуральных чисел дистрибутивно относительно сложения.

2. *Умножение натуральных чисел коммутативно.*

3. *Умножение натуральных чисел ассоциативно.*

4. *Умножение натуральных чисел сократимо.*

Введем в множество натуральных чисел отношение $<$ (меньше), положив, что $a < b$ в том и только в том случае, когда найдется такое c, что $b = a + c$. Аналогично определяются отношения $a \leqslant b$, $b > a$, $b \geqslant a$.

Свойства отношения порядка в множестве натуральных чисел.

1. *Отношение $<$ является отношением строгого порядка в $\boldsymbol{N}$.*

2. *Отношение порядка $<$ в $\boldsymbol{N}$ линейно.*

3. *Если $a < b$, то для любого c имеем $a + c < b + c$* (монотонность относительно сложения).

4. *Если $a < b$, то для любого c имеем $ac < bc$* (монотонность относительно умножения).

5. *Для любых a и b найдется такое c, что $ac > b$.*

6. *Любое непустое ограниченное сверху подмножество в $\boldsymbol{N}$ имеет наибольший элемент.*

7. *Любое непустое подмножество в $\boldsymbol{N}$ имеет наименьший элемент.*

Свойства сложения показывают, что алгебра $(\boldsymbol{N};\ +)$ является направленной коммутативной полугруппой, свойства умножения — что алгебра $(\boldsymbol{N};\ \cdot)$ — коммутативная полугруппа с сокращениями, причем алгебра $(\boldsymbol{N};\ +, \cdot)$ является коммутативным полукольцом. Свойства порядка показывают, что $\boldsymbol{N}$ вполне упорядочено, причем $(\boldsymbol{N};\ +, \cdot)$ является упорядоченным полукольцом.

7. Конечные и бесконечные множества. Понятие натурального числа, введенное выше, позволяет вывести из аксиом теории множеств основные свойства конечных и бесконечных множеств.

Пусть m — натуральное число. Обозначим через $\boldsymbol{N}_m$ совокупность натуральных чисел, меньших или равных m.

Определение 1. Множество A *имеет m членов*, где $m \in \boldsymbol{N}$ (пишут $|A| = m$), если существует биективное отображение φ множества $\boldsymbol{N}_m$ на A[1]. Если множество A пусто, то оно имеет 0 членов.

Определение 2. Множество A называется *конечным*, если оно пусто или если оно имеет m членов, где $m \in \boldsymbol{N}$. В противном случае оно называется *бесконечным*.

Например, множество $\boldsymbol{N}_m$ имеет m членов.

Теорема 1. *Если f — биективное отображение множества A на множество B, то из $|A| = m$ следует, что $|B| = m$.*

Доказательство. Так как $|A| = m$, то существует биективное отображение φ: $\boldsymbol{N}_m \to A$. Но тогда $f \circ \varphi$ является биективным отображением $\boldsymbol{N}_m$ на B и потому $|B| = m$.

Лемма 1. *Если f — биективное отображение множества $A \cup \{a\}$ на множество $B \cup \{b\}$, причем $a \notin A$ и $b \notin B$, то существует биективное отображнение g: $A \to B$.*

[1] Пока еще не исключается, что $|A| = m$ и $|A| = n$ при $m \neq n$.

Доказательство. Пусть $f(a) = a_1$, $f^{-1}(b) = b_1$. Если $a_1 = b$, то $b_1 = a$ и потому $f(A) = B$. При этом сужение g отображения f на A также биективно. Значит, при $a_1 = b$ существует биективное отображение $g\colon A \to B$.

Если $a_1 \neq b$, то $a_1 \in B$ и, аналогично, $b_1 \in A$. Легко проверить, что отображение g, задаваемое равенствами

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq b, \\ a, & \text{если } x = b, \end{cases}$$

биективно отображает A на B.

Теорема 2. *Пусть $m \in \boldsymbol{N}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $|A| = m'$.

б) *Существуют множество $A_1 \subset A$ и элемент $a_1 \notin A_1$, такие, что $|A_1| = m$ и $A = A_1 \cup \{a_1\}$.*

в) $A \neq \varnothing$, *причем если для множества A_2 и не принадлежащего ему элемента a_2 имеем $A = A_2 \cup \{a_2\}$, то $|A_2| = m$.*

Доказательство. Покажем, что из а) следует б). Пусть φ — биективное отображение множества $\boldsymbol{N}_{m'}$ на A. Так как $\boldsymbol{N}_{m'} = \boldsymbol{N}_m \cup \{m'\}$, то $A = \varphi(\boldsymbol{N}_{m'}) = \varphi(\boldsymbol{N}_m) \cup \varphi(m')$. Значит, полагая $A_1 = \varphi(\boldsymbol{N}_m)$, $a_1 = \varphi(m')$, получим, что

$$A = A_1 \cup \{a_1\}, \text{ где } |A_1| = m \text{ и } a_1 \notin A_1.$$

Теперь докажем, что из б) следует в). Так как по условию $a_1 \in A$, то $A \neq \varnothing$. Пусть A_1 и a_1 — множество и элемент из условия б). Тогда имеем $A_1 \cup \{a_1\} = A_2 \cup \{a_2\}$, а потому существует биективное отображение $A_1 \cup \{a_1\}$ на $A_2 \cup \{a_2\}$. По лемме существует биективное отображение A_1 на A_2. Следовательно, в силу теоремы 1, из того, что $|A_1| = m$, следует, что $|A_2| = m$. Утверждение доказано.

Наконец, докажем, что из в) следует а). Пусть a — произвольный элемент множества A и $A_1 = A \setminus \{a\}$. По условию в) имеем $|A_1| = m$, а потому существует биективное отображение ψ множества $\boldsymbol{N}_m$ на A. Полагая $\varphi(k) = \psi(k)$ для $k \in \boldsymbol{N}_m$ и $\varphi(m') = a$, получаем биективное отображение $\varphi\colon \boldsymbol{N}_{m'} \to A$, откуда и следует, что $|A| = m'$.

Теорема 3. *Если $|A| = m$, $|B| = n$, то $m \leqslant n$ в том и только в том случае, когда существует биективное отображение f множества A на некоторое непустое подмножество B_1 множества B.*

Доказательство. Если $m \leqslant n$, то $\boldsymbol{N}_m \subset \boldsymbol{N}_n$. Пусть φ — биективное отображение $\boldsymbol{N}_m$ на A, а ψ — биективное отображение $\boldsymbol{N}_n$ на B. Тогда $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ является биективным отображением A на множество $B_1 = \psi(\boldsymbol{N}_m)$, являющееся подмножеством в B.

Обратно, пусть существует непустое подмножество B_1 в B и биективное отображение f множества A на B_1. Проведем доказательство неравенства $m \leqslant n$ с помощью индукции по n. Если $n = 1$, то B состоит из одного элемента, поэтому $B_1 = B$ и, значит, $m = 1$, $m \leqslant n$. Пусть для некоторого n доказано, что из $|A| = m$ и $A \sim B_1 \subset B$ следует $m \leqslant n$. Возьмем такое множество B, что $|B| = n'$, и пусть $B_1 = \varphi(A) \subset B$, где φ — биекция. По теореме 2 имеем $B = B_2 \cup \{b\}$, где $|b_2| = n$ и $b \notin B_2$. Так как $A = f^{-1}(B_1)$, то $A = f^{-1}(B_1 \cap B_2) \cup f^{-1}(B_1 \cap \{b\})$.

Множество $B_1 \cap \{b\}$ или пусто или равно $\{b\}$. Если $B_1 \cap \{b\} = \varnothing$, то $A = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ и потому $|B_1 \cap B_2| = |A| = m$. Тогда поскольку $B_1 \cap B_2 \subset B_2$ и $|B_2| = n$, то по индукции получаем, что $m \leqslant n$, а тогда, в силу транзитивности отношения «меньше» в $\boldsymbol{N}$, получаем, что $m < n'$. Во втором случае в силу теоремы 1 имеем $m = p'$, где $p = |B_1 \cap B_2|$. По предположению индукции $p \leqslant n$, откуда $m = p' \leqslant n'$; теорема доказана и в этом случае.

Теорема 4. *Если* $|A| = m$, $|B| = n$ *и* $A \cap B = \varnothing$, *то* $|A \cup B| = m + n$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ имеем $B = \{b\}$, причем в силу $A \cap B = \varnothing$ получаем, что $b \notin A$. Из теоремы 2 вытекает, что в этом случае $|A \cup B| = m' = m + 1 = m + n$. Пусть теорема верна для некоторого n и пусть $|B| = n'$. Тогда $B = B_1 \cup \{b\}$, где $|B_1| = n$, $b \notin B_1$, $b \notin A$, и потому $A \cup B = A \cup B_1 \cup \{b\}$, где $b \notin A \cup B$. По предположению индукции тогда $|A \cup B_1| = m + n$. Из теоремы 2 следует, что в этом случае

$$|A \cup B| = |A \cup B_1| + 1 = m + n + 1.$$

Итак, теорема верна при $n = 1$, а из ее истинности для некоторого n следует, что она истинна и для $n' = n + 1$. Значит, теорема истинна для любого n.

Следствие. *Совокупность конечных множеств вместе с каждым множеством содержит любое его подмножество, а вместе с любыми двумя множествами — их объединение.*

Непосредственно вытекает из теорем 3 и 4.

Сформулированное следствие обобщается на объединение любой конечной совокупности конечных множеств. Но декартово произведение конечных множеств A и B, где $|A| = m$, $|B| = n$, состоит из n подмножеств, каждое из которых содержит по m пар:

$$A \times B = A_1 \cup \ldots \cup A_n,$$

где

$$A_k = \{(a_1; b_k), \ \ldots, \ (a_m; b_k)\}.$$

Отсюда следует, что декартово произведение конечных множеств A и B конечно. При этом поскольку множества A_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ попарно не пересекаются, то имеем

$$|A \times B| = |A_1| + \ldots + |A_n| = \underbrace{m + \ldots + m}_{n \text{ раз}} = mn.$$

В примечании к определению 1 было отмечено, что запись $|A| = m$ не исключает возможности $|A| = n$ при $m \neq n$. Покажем теперь, что значение $|A|$ определено однозначно.

Теорема 5. *Если* $|A| = m$, $|B| = n$, *то равносильны условия:*

а) *Существует биективное отображение* A *на* B.

б) $m = n$.

Доказательство. Если $m = n$, то утверждение следует из теоремы 1. Обратно, пусть существует биективное отображение f множества A на B. Тогда $m \leqslant n$ и $n \leqslant m$, откуда $m = n$.

Из теоремы 5 вытекает известный *принцип Дирихле*, служащий для доказательства различных теорем о конечных множествах. Он формулируется следующим образом:

Если $|A| = m$ и $|B| = n$, причем $m > n$, то любое сюръективное отображение A на B не является инъективным.

Более наглядная формулировка такова:

Если m предметов разместить в n ящиков, где $m > n$, то хотя бы один ящик будет содержать не менее двух предметов.

Из доказанных теорем о конечных множествах выводятся утверждения о бесконечных множествах.

Теорема 6. *Если A бесконечно и $A \subset B$, то и B бесконечно.*

Это непосредственно следует из теоремы 3.

Теорема 7. *Если A бесконечно, а B конечно, то разность $A \setminus B$ бесконечна.*

Это следует из теоремы 4.

Теорема 8. *Множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел бесконечно.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что $|\boldsymbol{N}| = m$, где $m \in \boldsymbol{N}$. Тогда существовало бы биективное отображение $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}_m$ и тем самым инъективное отображение $\boldsymbol{N}_{m+1} \to \boldsymbol{N}_m$, что невозможно по теореме 3. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 1. *Если множество A является биективным образом множества $\boldsymbol{N}$, то оно бесконечно.*

В самом деле, если бы A было конечным, то и $\boldsymbol{N}$ было бы конечным.

Следствие 2. *Если множество имеет подмножество, являющееся биективным образом множества $\boldsymbol{N}$, то оно бесконечно.*

Выше мы определили конечность множества как его эквивалентность некоторому отрезку $\boldsymbol{N}_m$ натурального ряда чисел, а бесконечность — как отсутствие такой эквивалентности. Следствие 2 дает достаточный признак бесконечности множества. Дедекинд определял, по сути дела, бесконечность множества A как существование в нем подмножества, являющегося биективным образом множества $\boldsymbol{N}$. Мы видим, что бесконечность множества в смысле Дедекинда влечет за собой его бесконечность в принятом нами смысле (т. е. отсутствие биективного соответствия с одним из отрезков натурального ряда чисел). Можно доказать и обратное утверждение, однако доказательство требует применения аксиомы выбора.

Теорема 9. *Если множество A бесконечно (в принятом нами смысле), то оно бесконечно и в смысле Дедекинда.*

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество, $M = \boldsymbol{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ — семейство его непустых подмножеств и A — функция выбора (т. е. функция, ставящая в соответствие каждому непустому подмножеству какой-либо его элемент). Продолжим f, полагая $f(\varnothing) = b$, где b — произвольный фиксированный элемент из A.

Определим теперь по индукции отображение φ множества $\boldsymbol{N}$ в A и отображение ψ множества $\boldsymbol{N}$ в $\boldsymbol{P}(A)$, положив

$$\varphi(1) = b, \psi(1) = \{b\},$$

$$\varphi(n') = f(A \setminus \psi(n)), \psi(n') = \psi(n) \cup \{\varphi(n')\}.$$

Легко доказать по индукции, что все множества $\psi(n)$ конечны, причем $\psi(m) \subset \psi(n)$, если $m \leqslant n$. Отсюда следует, что для любого n множество $A \setminus \psi(n)$ непусто, а потому $\varphi(n') \in A \setminus \psi(n)$ и $\varphi(n) \in \in \psi(n)$ для каждого $n \in N$. Отсюда следует, что отображение φ инъективно. В самом деле, если $k < j$, то $\varphi(k) \in \psi(k)$, но $\varphi(j) \notin \psi(k)$, так как, полагая $j = n'$, получаем $\psi(k) \subset \psi(n)$ и $\varphi(j) = \varphi(n') \in \in X \setminus \psi(n) \subset X \setminus \psi(k)$. Поэтому $\varphi(j) \neq \varphi(k)$. Итак, имеем в A подмножество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$, являющееся биективным образом $\boldsymbol{N}$, а потому A бесконечно в смысле Дедекинда.

8. Аксиоматика множества натуральных чисел, основанная на сложении. Система аксиом Пеано не является единственной системой аксиом, описывающей множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел. Приведем другую систему аксиом, в которой за основное понятие принимается «сложение чисел».

Определение. Множество $\boldsymbol{N}$ называется *множеством натуральных чисел*, если в нем определена алгебраическая операция, называемая *сложением*, которая каждой паре чисел (a, b) ставит в соответствие их сумму $a + b$, причем выполняются следующие аксиомы:

1) Операция сложения коммутативна.

2) Операция сложения ассоциативна.

3) Для любых m и n из $\boldsymbol{N}$ выполняется условие $m + n \neq m$.

Из аксиом 1)—3) следует, что $(\boldsymbol{N}; +)$ — направленная полугруппа и потому в $\boldsymbol{N}$ определено отношение строгого порядка: $m < n$ в том и только в том случае, когда существует $p \in \boldsymbol{N}$, такое, что $m + p = n$.

4) Множество $\boldsymbol{N}$ вполне упорядочено.

Аксиомы 1)—4) можно кратко сформулировать так:

Множество $\boldsymbol{N}$ является направленной коммутативной полугруппой, вполне упорядоченной относительно порядка, определяемого в $\boldsymbol{N}$ операцией сложения.

В п. 6 было отмечено, что операция сложения в $\boldsymbol{N}$, построенная на основе системы аксиом Пеано, обладает свойствами 1)—4). Мы докажем сейчас, что и обратно, отправляясь от аксиом 1)—4), можно определить в $\boldsymbol{N}$ отношение «следует за», причем это отношение обладает свойствами, требуемыми аксиомами Пеано. Иными словами, докажем, что аксиоматика, основанная на сложении, эквивалентна аксиоматике Пеано.

Из аксиомы 4) вытекает, что в множестве $\boldsymbol{N}$ есть наименьший элемент. Обозначим этот элемент 1 и назовем единицей.

Положим теперь $a' = a + 1$. Тогда каждому $a \in \boldsymbol{N}$ соответствует один и только один следующий за ним элемент a', а потому выполнены аксиомы 3) и 4) Пеано. Так как 1 — наименьший элемент в $\boldsymbol{N}$, то для любого $a \in \boldsymbol{N}$, $a \neq 1$ имеем $1 < a$ и потому $1 \neq a'$. Значит, выполнены аксиомы 1 и 2 Пеано. Чтобы доказать выполнение аксиом 5 и 6, нам понадобятся следующие утверждения:

а) Отношение порядка в $\boldsymbol{N}$, индуцированное операцией сложения, линейно.

В самом деле, если $a \neq b$, то по аксиоме 4) в множестве $\{a; b\}$ есть наименьший элемент и потому либо $a < b$, либо $b < a$.

б) Операция сложения в N монотонна и сократима. Это утверждение вытекает из а) и результатов п. 1 § 3.

Из сократимости сложения вытекает, что равенство $a+1=b+1$ влечет за собой $a=b$, т. е. в N выполнена аксиома 5 Пеано.

в) Для любого натурального числа a, отличного от 1, существует одно и только одно натуральное число b, такое, что $a=b'$ (т. е. число, непосредственно предшествующее a).

В самом деле, если $a \neq 1$, то $1<a$, и потому найдется такое b, что $a=1+b=b+1$. Покажем, что других непосредственных предшественников у a нет. В самом деле, если $b+1=c+1=a$, то, в силу сократимости сложения, $b=c$.

Наконец, докажем аксиому индукции. Пусть A — подмножество в N, содержащее число 1 и такое, что из $a \in A$ следует $a+1 \in A$. Если бы A не совпадало с N, его дополнение A' в N было бы не пусто, $A' \neq \varnothing$. Значит, по аксиоме 4 в A' было бы наименьшее число a. Так как $1 \in A$, то $a \neq 1$, а потому существует число b, непосредственно предшествующее a, $a=b'$. Так как $b<a$ и a — наименьшее число в A', то $b \in A$. Но тогда и число $a=b'$ должно принадлежать A, в то время как $a \in A'$. Получившееся противоречие показывает, что $A=N$. Итак, если $1 \in A$ и из $a \in A$ следует, что $a' \in A$, то $A=N$. Выполнение аксиомы 6 Пеано тоже доказано.

Таким образом, системы аксиом Пеано и 1)—4) этого пункта эквивалентны, а потому система аксиом 1)—4) категорична и относительно непротиворечива.

§ 5. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Аксиоматика множества положительных скалярных величин. Натуральные числа служат для пересчета элементов конечных множеств. Для измерения величин нужен больший запас чисел, который будет построен в этом параграфе. Мы начнем с изучения общего понятия положительной скалярной величины, частными случаями которого являются понятия длины, площади, объема и т. д.

Чтобы получить наглядное представление о положительных скалярных величинах, рассмотрим ненулевые отрезки, расположенные на луче OA, одним из концов которых служит точка O. Любым двум таким отрезкам OA и OB соответствует такая точка C на луче, что B лежит между A и C, причем $|AC|=|OB|$ (рис. 11). Назовем отрезок OC суммой отрезков OA и OB. Очевидно, что операция сложения отрезков обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, причем сумма двух отрезков отлична от слагаемых. Отсюда следует (см. п. 1 § 3), что операция сложения отрезков превращает луч в упорядоченное множество, причем ясно, что порядок линеен и непрерывен. Положим сказанное в основу следующего определения положительной скалярной величины:

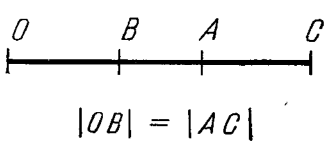

Рис. 11

Определение 1. Положительной скалярной величиной называется коммутативная направленная безгранично делимая полугруппа, $(V_+; +)$, в которой порядок линеен и непрерывен.

Данное выше определение означает, что операция сложения для положительной скалярной величины должна удовлетворять следующим условиям:

а) ассоциативность; б) коммутативность; в) для любых $a, b \in \in V_+$ имеем $a + b \neq a$; г) для любых $a \in V_+$ и $n \in N$ найдется $b \in V_+$, такое, что $a = nb$; д) для любых a и b из V выполняется одно из соотношений $a < b$, $a > b$, $a = b$; е) если A и B — непустые подмножества в V_+, причем B лежат справа от A, то существует хотя бы один элемент c, разделяющий эти подмножества.

Мы докажем ниже, что эта система аксиом категорична и непротиворечива относительно системы аксиом Пеано.

Отметим, что условие безграничной делимости в V_+ можно ослабить, потребовав лишь делимости на 2, т. е. существования для любого $a \in V_+$ такого элемента $b \in V_+$, что $a = b + b = 2b$. В самом деле, из делимости на 2 следует делимость на любое число вида 2^n. Далее, для любого $n > 1$ найдется такое m, что $2^m > n$ и такое $x \in \in V_+$, что $2^m x = a$. Так как $n < 2^m$, то $nx < 2^m x = a$, и потому множество $X = \{x \mid nx \leqslant a,\ n \in N\}$ непусто. Поскольку $na > a$, то непусто и множество $Y = \{y \mid ny \geqslant a,\ n \in N\}$. При этом, если $x \in X$, $y \in Y$, то $nx \leqslant a \leqslant ny$, и потому $x \leqslant y$. Это значит, что множество Y лежит справа от X, и потому есть элемент b, разделяющий X и Y.

Докажем, что имеет место равенство $nb = a$. Предположим, что $nb < a$. Тогда $a - nb \in V_+$. Найдется такой элемент d, что $2^m d = = a - nb$, где $2^m > n$. Но тогда имеем $n(b + d) = nb + nd < nb + + 2^m d = a$, и потому $b + d \in X$, хотя $b + d$ больше, чем разделяющий X и Y элемент b. Полученное противоречие показывает, что $nb < a$ невозможно. Так же доказывается невозможность $nb > a$. Значит, $nb = a$.

Осталось показать, что b однозначно определено. Но если $c < b$, то $nc < nb = a$, а если $c > b$, то $nc > nb = a$. Утверждение доказано.

Теорема 1. *Любое непустое подмножество A в V_+, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Обозначим через Y множество верхних граней для A (т. е. таких элементов y, что $y \geqslant a$ для всех $a \in A$). Нам надо доказать, что в Y есть наименьший элемент. Так как множества A и Y непусты (Y — в силу ограниченности A сверху) и из $a \in A$, $y \in Y$ следует $a \leqslant y$, то Y расположено справа от A, и потому есть элемент c, разделяющий A и Y. Но для всех $a \in A$ имеем $a \leqslant c$ и потому c — верхняя грань для A, т. е. $c \in Y$. С другой стороны, для всех $y \in Y$ имеем $c \leqslant y$ и потому c — наименьший элемент в Y, т. е. точная верхняя грань для A.

Теорема 2. *Для любых a и b из V_+ найдется такое натуральное число n, что $na > b$.*

Доказательство. Обозначим через $V(a)$ множество всех кратных для a: $V(a) = \{na \mid n \in N\}$. Если бы мы имели $b \geqslant na$ для всех $n \in N$, то множество $V(a)$ было бы ограничено сверху элементом b и потому оно имело бы точную верхнюю грань y. Поскольку $y - a < y$, то $y - a$ не является верхней гранью для $V(a)$ и потому найдется такое n, что $na > y - a$. Но тогда $(n+1)a = na + a > y$ вопреки тому, что y — верхняя грань для $V(a)$. Полученное противоречие показывает ложность предположения о выполнении неравенства $na \leqslant b$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$.

Теорема 3. *Пусть подмножество B из V_+ расположено справа от A. Для того, чтобы A и B разделялись лишь одним элементом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для любого $v \in \boldsymbol{V}_+$ найдутся такие $a \in A$ и $b \in B$, что $b - a < v$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие. Если бы множества A и B разделялись элементами c и d, $c < d$, то для любых $a \in A$, $b \in B$ имели бы $a \leqslant c < d \leqslant b$ и потому $b - a > d - c$, вопреки условию (при $v = d - c$). Обратно, пусть A и B разделяются единственным элементом c и пусть $v \in V_+$. Найдется такое $w \in V_+$, что $w < c$ и $2w < v$. Так как $c - w < c$, то $c - w$ не разделяет A и B. Но $a < c$ для всех $a \in A$, и потому найдется такое $a \in A$, что $c - w < a < c$. Аналогично доказывается существование такого $b \in B$, что $c < b < c + w$. Но тогда $b - a < (c + w) - (c - w) = 2w = v$, и потому условие выполнено.

В заключение отметим, что каждой паре (m, n) натуральных чисел и каждому $a \in \boldsymbol{V}_+$ соответствует единственный элемент $b \in \boldsymbol{V}_+$, такой, что $ma = nb$. Обозначим этот элемент $\frac{m}{n}a$. Тем самым каждой паре (m, n) $\left(\text{которую будем писать в виде дроби } \frac{m}{n}\right)$ соответствует оператор в $\boldsymbol{V}_+$, отображающий a в $\frac{m}{n}\,a$. Простая проверка показывает, что дробям $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ соответствует один и тот же оператор в $\boldsymbol{V}_+$ тогда и только тогда, когда $mq = np$. Далее, без труда проверяются соотношения

$$\frac{m}{n}\,a + \frac{p}{q}\,a = \frac{mq + np}{nq}\,a \text{ и } \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}\,a\right) = \left(\frac{mp}{nq}\right)a.$$

Эти соотношения позволяют определить сумму операторов и их произведение формулами

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}, \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

При этом, очевидно, несуществен выбор дроби, с помощью которой записывается оператор.

Обозначим совокупность дробей с введенными выше отношениями эквивалентности и операцией сложения через $\widehat{\boldsymbol{Q}}_+$. Разбивая эту совокупность на классы эквивалентности, получаем множество $\boldsymbol{Q}_+$ положительных рациональных чисел с операцией сложения и порождаемым этой операцией отношением порядка. Числа, которые можно записать в виде дроби $\frac{m}{2^n}$, называются двоично-рациональными. Их можно представить в виде двоичных дробей, т. е. символов вида $A, a_1 \ldots a_n$, где A — двоичная запись натурального числа или нуль, а $a_k = 0$ или 1 для всех k_n, $1 \leqslant k \leqslant n$.

2. Непротиворечивость аксиоматики положительных скалярных величин. Чтобы показать непротиворечивость системы аксиом а) — е) из п. 1, достаточно построить хотя бы одну ее модель. В качестве такой модели выберем множество бесконечных двоичных дробей, т. е. символов вида $A, a_1 \ldots a_n \ldots$, где $A \in \boldsymbol{N}$ или $A = 0$ и $a_k = 0$ или 1 для всех $k \in \boldsymbol{N}$. Отбросим символы, заканчивающиеся последовательностью единиц (т. е. такие, как 101,100101111 ...), и символ 0,0...0..., а оставшееся множество символов обозначим V_+. Мы докажем сейчас, что в множество V_+ можно ввести операцию сложения так, чтобы выполнялись аксиомы а)—е) из п. 1.

Каждому символу $\alpha = A, a_1 \ldots a_n \ldots$ из V_+ и каждому $k \in \boldsymbol{N}$ поставим в соответствие символ, получаемый из α заменой нулями всех цифр, начиная с $(k+1)$-й после запятой. Этот символ обозначим α_k и назовем k-м приближением по недостатку для α. Через α_k' обозначим символ, изображающий число $\alpha_k + 2^{-k}$. Назовем его k-м приближением по избытку для α.

Сложение в V_+ определяется следующим образом. Пусть $\alpha = A, a_1 \ldots a_n \ldots$, $\beta = B, b_1 \ldots b_n \ldots$. Сложим α_k' и β_k' по обычному правилу сложения двоично-рациональных чисел (что, как известно, сводится к сложению натуральных чисел). Так как для любого k имеем $\alpha_k' \geqslant \alpha_{k+1}'$, то целые части сумм $\alpha_k' + \beta_k'$ образуют монотонно невозрастающую последовательность натуральных чисел, которая, начиная с некоторого номера n, стабилизируется: $[\alpha_k' + \beta_k'] = [\alpha_{k+1}' + \beta_{k+1}']$ при $k \geqslant n$. Тогда $c = [\alpha_n' + \beta_n']$ и даст целую часть суммы $\alpha + \beta$. Последовательность значений первой цифры после запятой при $k \geqslant n$ образует монотонно невозрастающую последовательность, которая тоже стабилизируется либо на 0, либо на 1. Этим определяется первая цифра после запятой в сумме $\alpha + \beta$. Далее таким же образом определяем вторую цифру суммы после запятой и т. д. Этим определяется символ $C, c_1 \ldots c_n \ldots$, который мы и принимаем за сумму $\alpha + \beta$. Очевидно, что при этом не получится символ вида 0, 00...0... Можно показать, что не получается и символ, оканчивающийся последовательностью единиц. Таким образом, если $\alpha \in \boldsymbol{V}_+$ и $\beta \in \boldsymbol{V}_+$, то $\alpha + \beta \in \boldsymbol{V}_+$.

Тем самым в множестве V_+ определена алгебраическая операция сложения. Она коммутативна, поскольку $\alpha_k' + \beta_k' = \beta_k' + \alpha_k'$. Можно доказать, что эта операция ассоциативна и что для любых α и β имеем $\alpha + \beta \neq \alpha$. Далее, если дан символ $\alpha = a_{-n} \ldots a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$, то символ $\beta = a_{-n} \ldots a_{-1}, a_0 a_1 \ldots a_n \ldots$ обладает тем свойством, что $2\beta = \alpha$.

Введенная в V_+ операция сложения определяет порядок в V_+. Нетрудно проверить, что если $\alpha = A, a_1 \ldots a_n \ldots$, $\beta = B, b_1 \ldots b_n \ldots$, то $\alpha < \beta$ в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих условий:

а) $A < B$.

б) $A = B$, $a_1 < b_1$.

в) $A = B$, $a_1 = b_1$, причем существует такое k, что $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$, но $a_{k+1} < b_{k+1}$.

Очевидно, что при $\alpha \neq \beta$ выполняется либо $\alpha < \beta$, либо $\beta < \alpha$, и потому порядок в $\boldsymbol{V}_+$ линеен.

Докажем, наконец, что любое ограниченное снизу множество B в $\boldsymbol{V}_+$ имеет точную нижнюю грань. Так как B ограничено снизу, то найдется такое $b \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, что $b \leqslant x$ для всех $x \in B$, но существует такое $x \in B$, что $x < b + 1$. Примем b за целую часть $\inf B$. После этого разделим отрезок $[b, b+1]$ пополам и положим $b_1 = 0$, если на $\left[b, b+\frac{1}{2}\right]$ есть хоть один элемент из B и $b_1 = 1$ в противном случае. Продолжая этот процесс, получим одну за другой цифры числа $\inf B = b, b_1 \ldots b_n \ldots$, которое, как несложно проверить, является точной нижней гранью для B.

Если множество B расположено справа от A, причем оба множества непусты, то $\inf B$ разделяет A и B. Таким образом, из доказанного утверждения следует, что порядок в $\boldsymbol{V}_+$ непрерывен.

3. Категоричность аксиоматики положительных скалярных величин. Мы докажем сейчас утверждение, из которого непосредственно следует категоричность системы аксиом а) — е) из п. 1.

Теорема 1. *Пусть* $(\boldsymbol{V}_+; +)$ *и* $(\boldsymbol{W}_+; +)$ — *две модели системы аксиом* а) — е) *из* п. 1 *и* $a \in \boldsymbol{V}_+$, $b \in \boldsymbol{W}_+$ (*для простоты операции сложения в* $\boldsymbol{V}_+$ *и* $\boldsymbol{W}_+$ *обозначены одним и тем же знаком* $+$). *Тогда существует одно и только одно биективное отображение* $f\colon \boldsymbol{V}_+ \to \boldsymbol{W}_+$, *такое, что* $f(a) = b$ и $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ *для любых* x_1 и x_2 из $\boldsymbol{V}_+$.

Доказательство. Сначала определим отображение f на элементах вида ra, $r \in \boldsymbol{Q}_+$ (т. е. соизмеримых с a), положив $f\left(\frac{m}{n}a\right) = \frac{m}{n}b$. Ясно, что это отображение не зависит от записи рационального числа в виде дроби, а также что $f(ra + sa) = f(ra) + f(sa)$ для любых r и s из $\boldsymbol{Q}_+$. Поэтому из $r < q$ следует $f(ra) < f(qa)$. Иными словами, построено сохраняющее сложение и порядок отображение f множества $\boldsymbol{Q}_+(a)$ элементов, соизмеримых с a на множество $\boldsymbol{Q}_+(b)$ элементов, соизмеримых с b.

Если x_0 несоизмеримо с a, то обозначим через X множество $\{x \mid x \in \boldsymbol{Q}_+(a),\ x \leqslant x_0\}$, а через $\widetilde{X}$ множество $\{x \mid x \in \boldsymbol{Q}_+(a),\ x \geqslant x_0\}$ и положим $Y = f(X)$, $\widetilde{Y} = f(\widetilde{X})$. Из монотонности отображения f на $\boldsymbol{Q}_+(a)$ следует, что $\widetilde{Y}$ расположено справа от Y и потому есть хотя бы один элемент $y_0 \in \boldsymbol{W}_+$, разделяющий Y и $\widetilde{Y}$. Покажем, что этот элемент однозначно определен. В самом деле, если $w \in \boldsymbol{W}_+$, то найдется такое $n \in \boldsymbol{N}$, что $\frac{1}{n} f(a) < w$ и $\frac{1}{n} a < x_0$. Далее, найдется такое натуральное число m, что $\frac{m}{n} a < x_0 < \frac{m+1}{n} a$. Но тогда $f\left(\frac{m+1}{n} a\right) -$

$-f\left(\frac{m}{n}a\right)=f\left(\frac{1}{n}a\right)=\frac{1}{n}f(a)<w$, причем $f\left(\frac{m}{n}a\right)\in Y$, $f\left(\frac{m+1}{n}a\right)\in\widetilde{Y}$. Это значит, что y_0 — единственный элемент, разделяющий Y и y (см. теорему 3 п. 1). Положим $f(x_0)=y_0$.

Мы определили отображение f: $V_+\to W_+$. Если x_1, $x_2\in Q_+(a)$, то имеет место равенство

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2). \tag{1}$$

Оно имеет место и для любых x_1, x_2, поскольку элементы $f(x_1)+f(x_2)$ и $f(x_1+x_2)$ разделяют одни и те же множества Y_1+Y_2 и $\widetilde{Y_1}+\widetilde{Y_2}$ (здесь через $A+B$ обозначается множество сумм вида $a+b$, $a\in A$, $b\in B$). Легко показать, что эти множества разделяются лишь одним элементом, и потому верно (1).

Докажем, что построенное отображение f биективно. Если $x_1<x_2$, то найдется $v\in Q_+(a)$, такое, что $x_1\leqslant v<x_2$ (достаточно рассмотреть элементы вида $\frac{m}{n}a$, где $\frac{1}{n}a<x_2-x_1$). Но тогда имеем $f(x_1)\leqslant f(v)<f(x_2)$, и потому $f(x_1)<f(x_2)$. Значит, f инъективно. Далее, если $y\in W_+$, то, рассуждая так же, как при построении f, находим такой элемент $x\in V_+$, что $f(x)=y$. Значит, f и сюръективно, а потому биективно.

Осталось доказать, что отображение f однозначно определено. Но значение $f(x)$, $x\in Q_+(a)$ однозначно определяется из условий (1) и $f(a)=b$, а тогда значение $f(x)$ для любых $x\in V_+$ однозначно определяется в силу того, что f сохраняет порядок.

Из доказанной теоремы вытекает, что все модели системы а)—е) изоморфны и потому эта система аксиом категорична.

4. Множество R_+ положительных действительных чисел. При измерении скалярных величин (длины, площади, объема) их сравнивают с некоторой единицей измерения. Поэтому введем следующее определение:

Определение 1. Множество R_+, в котором определена структура положительной скалярной величины и выделен единичный элемент, называют множеством *положительных действительных чисел*.

Единичный элемент обозначим e и назовем единицей. Итак, структура положительных действительных чисел имеет вид $(R_+;\ +;\ e)$, где, напомним, сложение удовлетворяет аксиомам а) — е) из п. 1. По теореме 1 п. 3 каждому элементу $a\in R_+$ соответствует автоморфизм f_a структуры $(R_+;\ +)$, такой, что $f_a(e)=a$.

Определим умножение в множестве R_+.

Определение 2. *Произведением* положительных действительных чисел a и b называется число $f_a(b)$ (т. е. образ числа b при автоморфизме f_a, отображающем e в b):

$$ab=f_a(b). \tag{1}$$

Алгебраическую операцию $(a, b)\to ab$ называют *умножением* в множестве R_+.

Поскольку f_a — автоморфизм структуры $(R_+;\ +)$, то для любых b, $c\in R_+$ имеет место равенство $f_a(b+c)=f_a(b)+f_a(c)$, т. е.

$$a\,(b + c) = ab + bc. \tag{2}$$

Следовательно, *умножение в* $\boldsymbol{R}_+$ *дистрибутивно относительно сложения.*

Поскольку композиция двух автоморфизмов снова является автоморфизмом, то $f_a \circ f_b$ — автоморфизм $(\boldsymbol{R}_+;\ +)$. При этом $(f_a \circ f_b)\,(e) = f_a\,[f_b\,(e)] = f_a\,(b) = ab$ и потому автоморфизм $f_a \circ f_b$ совпадает с f_{ab}, $f_a \circ f_b = f_{ab}$. Отсюда вытекает, что для любых a, b, c из $\boldsymbol{R}_+$ имеем

$$(f_a \circ f_b)\,(c) = f_{ab}\,(c).$$

Но

$$(f_a \circ f_b)\,(c) = f_a\,[f_b\,(c)] = f_a\,(bc) = a\,(bc),$$
$$f_{ab}\,(c) = (ab)c,$$

и потому $a\,(bc) = (ab)c$. Следовательно, *умножение в* $\boldsymbol{R}_+$ *ассоциативно.*

Автоморфизм f_a имеет весьма простой вид, если $a = \frac{m}{n}e$. В этом случае выполняется равенство

$$f_{\frac{m}{n}e}(x) = \frac{m}{n}x. \tag{3}$$

В самом деле, отображение $x \to \frac{m}{n}x$ является автоморфизмом в $(\boldsymbol{R}_+;\ +)$, отображающим e в $\frac{m}{n}e$. Из равенства (3) вытекает, что $f_{\frac{m}{n}e}\left(\frac{p}{q}e\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}\right)e$, т. е. $\left(\frac{m}{n}e\right)\cdot\left(\frac{p}{q}e\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}e\right) = \left(\frac{mp}{nq}\right)e$. С другой стороны, $\left(\frac{p}{q}e\right)\cdot\left(\frac{m}{n}e\right) = \frac{p}{q}\left(\frac{m}{n}e\right) = \left(\frac{pm}{qn}\right)e$. Но $\frac{mp}{nq} = \frac{pm}{qn}$, и потому $\left(\frac{m}{n}e\right)\cdot\left(\frac{p}{q}e\right) = \left(\frac{p}{q}e\right)\cdot\left(\frac{m}{n}e\right)$. Это доказывает, что операция умножения коммутативна на совокупности элементов из $\boldsymbol{R}_+$, соизмеримых с единицей (т. е. на множестве $\boldsymbol{Q}_+$ положительных рациональных чисел). Используя монотонность этой операции, легко доказать, что для любых a, $b \in \boldsymbol{R}_+$ имеем $ab = ba$, т. е. что *умножение в* $\boldsymbol{R}_+$ *коммутативно.*

Сократимость умножения в $\boldsymbol{R}_+$ следует из того, что отображение f_a биективно.

Мы построили, таким образом, множество $\boldsymbol{R}_+$ положительных действительных чисел и определили в нем операции сложения и умножения. Операция умножения в $\boldsymbol{R}_+$ имеет обратную, поскольку для любых b и c из $\boldsymbol{R}_+$ есть единственный автоморфизм f_a, такой, что $f_a\,(b) = c$, т. е. такой, что $ab = c$. Число a называют *частным* чисел c и b и обозначают $c : b$.

Симметризуя полуполе $(\boldsymbol{R}_+;\ +,\ \cdot)$ по операции сложения, получаем поле $(\boldsymbol{R};\ +,\ \cdot)$ действительных чисел, свойства которого рассматривались в курсе «Числовые системы».

Данная в п. 2 модель структуры $((V;\ +)$ позволяет записать любое $x \in \boldsymbol{R}_+$ в виде бесконечной двоичной дроби.

Глава V

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. ВЕКТОРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ

1. **Введение.** В основе всех современных теорий евклидова пространства лежит понятие числа. В этом состоит коренное отличие современных теорий от классической теории Евклида — Гильберта, в которой число рождается в рамках самой теории как отношение отрезков или мера длины.

В современных теориях система действительных чисел либо непосредственно используется в определении структуры евклидова пространства, либо является вспомогательной структурой для определения других вспомогательных структур (векторного пространства, метрического пространства). Более того, категоричность теории евклидова пространства позволяет рассматривать его как арифметическое пространство R^n, в котором должным образом определены необходимые понятия и отношения.

Использование числа значительно упрощает построение теории евклидова пространства, однако во многом лишает это построение наглядности и того конструктивного характера, который присущ теории Евклида — Гильберта. В этом состоит существенный методический недостаток таких теорий с точки зрения их использования для построения начал школьного курса геометрии. Этот недостаток частично компенсируют различными способами, о которых будет сказано ниже.

В 1918 г. известным математиком Г. Вейлем (1885—1955) было предложено так называемое «векторное» обоснование евклидовой геометрии. В качестве вспомогательной структуры Г. Вейль использует евклидово векторное пространство, элементы которого играют роль операторов в пространстве точек. Размерность векторного пространства определяет размерность точечного пространства. Аксиоматика Вейля переводит теорию евклидова (точечного) пространства на язык линейной алгебры.

Простота этой аксиоматики, ее пригодность для обоснования геометрий многомерных пространств, алгоритмизация теории на основе линейной алгебры сделали аксиоматику Вейля наиболее употребительной в современной геометрии и ее приложениях. Использование векторных пространств позволяет построить «в духе Вейля» аксиоматики неевклидовых пространств, придав тем самым известное единообразие обоснованию различных геометрий.

2. Аксиоматика Вейля. Прежде чем излагать аксиоматику Вейля, введем понятие векторного пространства.

Множество $V \neq \varnothing$ называется (действительным) *векторным пространством*, а его элементы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ — *векторами*, если на нем заданы:

а) внутренний закон композиции (алгебраическая операция)

$$f: V \times V \to V,$$

который мы назовем сложением и обозначим $f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$, обладающий свойствами:

1) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V, \ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

2) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

3) $\exists \vec{0} \in V \mid \forall \vec{a} \in V, \ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) $\forall \vec{a} \in V, \ \exists (-\vec{a}) \in V \mid \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;

б) внешний закон композиции (внешняя алгебраическая операция),

$$h: \boldsymbol{R} \times V \to V,$$

который мы назовем умножением вектора на число и обозначим $h(\alpha, \vec{a}) = \alpha \cdot \vec{a} \ (\alpha \in \boldsymbol{R})$, обладающий свойствами:

5) $\forall \vec{a} \in V, \ 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;

6) $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}, \ \forall \vec{a} \in V, \ \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$;

7) $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}, \ \forall \vec{a} \in V, \ (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$;

8) $\forall \alpha \in \boldsymbol{R}, \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \ \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$.

Свойства 1)—8) законов сложения и умножения на число называются *аксиомами векторного пространства*. Векторное пространство называют также *линейным пространством*.

Заметим, что в определении структуры векторного пространства числа выступают в роли операторов, действующих в V по закону: $\alpha(\vec{a}) = \alpha \cdot \vec{a}$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если равенство $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ выполняется только в том случае, когда все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю. Если же указанное равенство выполняется в том случае, когда некоторые из α_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) отличны от нуля, то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*.

Векторное пространство V называют *n-мерным* и пишут $\dim V = n$, если в V существуют n линейно независимых векторов и всякие $n + 1$ векторов из V линейно зависимы. Эти условия составляют *аксиому размерности* векторного пространства V. Если $\dim V = n$, то любые n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ из V составляют *базис* этого векторного пространства. Из аксиомы размерности следует, что всякий вектор $\vec{a} \in V$ разлагается и притом однозначно по векторам базиса: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n$ $(a_i \in R)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *координатами вектора* $\vec{a}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Евклидовым векторным пространством называется векторное пространство V, на котором определено отображение

$$g\colon V \times V \to R,$$

которое мы назовем *скалярным умножением векторов* и обозначим $g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, обладающее свойствами:

9) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$

10) $\forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V, \quad (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \cdot \vec{c} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{c});$

11) $\forall \vec{a} \in V, \quad \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{a} \cdot \vec{a} > 0.$

Число $\vec{a} \cdot \vec{b}$ называют *скалярным произведением векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а число $\vec{a} \cdot \vec{a}$ — *скалярным квадратом вектора* $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$.

Заметим, что аксиомы 1)—4) векторного пространства определяют на множестве V структуру абелевой группы. Введение нового отношения (умножения вектора на число) придает абелевой группе новые свойства: появляется возможность говорить о линейно зависимых и линейно независимых векторах, о линейной оболочке системы векторов, о размерности векторного пространства и др. Поэтому говорят, что векторное пространство получено *обогащением* структуры абелевой группы. В свою очередь, евклидово векторное пространство получено обогащением структуры векторного пространства: в нем введено новое отношение — скалярное умножение, позволяющее говорить о длине вектора ($\sqrt{\vec{a}^2}$), об ортогональности векторов ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$) и др.

Отображение $g\colon V \times V \to R$, обладающее свойствами 9)—11), является симметрической билинейной положительной формой, определенной на векторном пространстве V. Она определяет положительную квадратичную форму $\varphi\colon V \to R$ по закону $\varphi(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{x})$ для $\vec{x} \in V$.

Обратно, по квадратичной форме $\varphi(\vec{x})$, заданной на V, можно восстановить билинейную форму $g(\vec{x}, \vec{y})$ по формуле

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(\varphi(\vec{x} + \vec{y}) - \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y})).$$

Значит, векторное пространство V можно превратить в евклидово векторное пространство, задав на V положительно определенную (симметрическую) квадратичную форму.

3. Другие варианты аксиоматики Вейля. Известны разные варианты аксиоматики Вейля. Рассмотрим один из них.

Пусть V — n-мерное евклидово векторное пространство и E — непустое множество, элементы которого A, B, C, ... будем называть *точками*. Пусть на множестве E задано отображение

$$\sigma : E \times E \to V.$$

Обозначим вектор $\sigma(A, B) = \overrightarrow{AB}$ и назовем его переносом, переводящим точку A в точку B. Потребуем, чтобы отображение σ обладало свойствами:

I. Для любой фиксированной точки $A \in E$ отображение σ_A: $E \to V$ по закону: $\sigma_A(B) = \overrightarrow{AB}$, $\forall B \in E$ является биекцией.

II. $\forall A, B, C \in E$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Тогда множество E называется *n-мерным евклидовым пространством*, а векторное пространство V — его *пространством переносов*. Свойства I, II отображения σ называются *аксиомами Вейля*.

Поясним требования этих аксиом. Отображение σ каждой паре точек (A, B) ставит в соответствие вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ из V. Если первую точку A пары зафиксируем, а вторая точка B будет пробегать все множество E, то получим отображение σ_A: $E \to V$. Аксиома I требует, чтобы полученное отображение σ_A было биективным отображением E на V. Требование аксиомы I можно истолковать как требование биективности соответствия между точками $B \in E$ и радиусами-векторами $\overrightarrow{AB} \in V$ этих точек при фиксированном начале A.

Требование аксиомы II означает следующее. Если вектор $\vec{b}$ переводит точку A в точку B $(\vec{b} = \overrightarrow{AB})$, а вектор $\vec{c}$ переводит точку B в точку C $(\vec{c} = \overrightarrow{BC})$, то вектор $\vec{b} + \vec{c}$ должен переводить точку A в точку C $(\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AC})$.

Таким образом, в определении структуры евклидова пространства по Вейлю векторы играют роль операторов на множестве точек: $\vec{b}(A) = B \Leftrightarrow \vec{b} = \overrightarrow{AB}$, аналогичную роли чисел в определении структуры векторного пространства.

Если в определении структуры евклидова пространства не требовать евклидовости его пространства переносов (т. е. не вводить отображение g, обладающее свойствами 9)—11)), то мы получим определение *n-мерного аффинного пространства*. Поэтому евклидово пространство можно рассматривать как обогащенную структуру аффинного пространства: в пространстве переносов V аффинного пространства вводится новое отношение — скалярное умножение или положительно определенная квадратичная форма (называемая *метрической формой* евклидова пространства). Это новое отношение позволяет определить в E новые понятия, о которых не может идти речь в аффинном пространстве: «расстояние между точками» ($\rho(A, B) = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$), «движение» (преобразование пространства E, сохраняющее расстояния) и др.

Замечание. В аксиоматике Вейля основное отношение σ каждой паре точек $(A, B) \in E \times E$ сопоставляет вектор $\sigma(A, B) = \overrightarrow{AB} \in \boldsymbol{V}$. В силу аксиомы I каждой паре $(\vec{A}, \vec{b}) \in E \times V$ сопоставляется единственная точка $B = \sigma_A^{-1}(\vec{b}) \in E$ и, значит, возникает отображение $\tau: E \times \boldsymbol{V} \to E$. Это позволяет придать аксиоматике Вейля иной вид (см. [52]).

В качестве основного отношения задают отображение

$$\tau: E \times \boldsymbol{V} \to V$$

и обозначают $\tau(A, \vec{b}) = \vec{b}(A)$. Операцию, сопоставляющую точке A и вектору $\vec{b}$ точку $\vec{b}(A) = B$, называют «откладыванием вектора $\vec{b}$ от точки A».

В этом случае аксиомы Вейля — свойства отображения τ — формулируют следующим образом:

I′. $\forall A, B \in E, \ \exists! \, \vec{b} \in V \mid \vec{b}(A) = B$,

т. е. существует и единственный вектор, который переводит заданную точку A в любую заданную точку B.

II′. $\forall A \in E, \ \forall \vec{b}, \vec{c} \in \boldsymbol{V}, \ \vec{c}(\vec{b}(A)) = (\vec{b} + \vec{c})(A)$.

Существование отображения $\sigma: E \times E \to \boldsymbol{V}$ здесь обеспечивается аксиомой I′.

При таком подходе особо подчеркивается роль векторов как операторов на множестве точек. Этот подход хорошо сочетается с истолкованием вектора как параллельного переноса в школьном курсе геометрии. Напротив, первый из указанных вариантов аксиоматики Вейля, в котором вектор связывается с парой точек, более подходит к такому изложению школьного курса геометрии, в котором вектор выступает как направленный отрезок или класс эквивалентных направленных отрезков.

Таким образом, если заключительная часть школьного курса геометрии строится на основе аксиоматики Вейля, то имеется возможность выбрать тот из ее вариантов, который наиболее близок изложению предыдущего материала.

4. Непротиворечивость и категоричность аксиоматики Вейля. Для доказательства непротиворечивости системы аксиом Вейля n-мерного евклидова пространства нужно построить какую-нибудь ее модель. Сначала построим модель вспомогательной структуры n-мерного евклидова векторного пространства.

Возьмем $V = \boldsymbol{R}^n$. Сумму векторов, произведение вектора на число и скалярное произведение векторов определим следующим образом: если $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, то

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha \cdot \vec{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Тогда, очевидно, все аксиомы n-мерного евклидова векторного пространства будут выполняться и, значит, эта система аксиом непротиворечива (если непротиворечива арифметика действительных чисел).

Теперь в качестве множества E точек возьмем то же множество $\boldsymbol{R}^n$ таким, каким оно было до наделения его структурой векторного пространства: $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ — точки множества $E = \boldsymbol{R}^n$. Основное отношение — отображение σ: $E \times E \to V$ определим следующим образом: $\sigma(A, B) = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$. Тогда легко проверить, что аксиомы I, II Вейля будут выполняться. Следовательно, система аксиом Вейля n-мерного евклидова (а также и аффинного) пространства непротиворечива, если непротиворечива арифметика. Построенная модель евклидова пространства называется *арифметической*.

Зафиксировав какую-нибудь точку $A \in E$ и воспользовавшись биективностью отображения σ_A: $E \to V$, можно отождествить пространства E и $\boldsymbol{V}$. Но все n-мерные евклидовы векторные пространства изоморфны. Следовательно, *система аксиом Вейля n-мерного евклидова пространства категорическая*, т. е. все ее модели изоморфны. Поэтому для изучения геометрии такого пространства можно использовать какую-нибудь одну ее модель, например арифметическую. Так часто и поступают, рассматривая евклидово пространство как $\boldsymbol{R}^n$.

Арифметическая модель n-мерного евклидова пространства, в которой и векторы, и точки — кортежи действительных чисел, наталкивает на мысль построить модель евклидова пространства в рамках теории любого евклидова векторного пространства.

Именно пусть V — n-мерное евклидово векторное пространство. Положим $E = \boldsymbol{V}$, т. е. точками будем называть векторы из $\boldsymbol{V}$. Пусть $\vec{A}, \vec{B} \in E$. Отображение σ: $E \times E \to \boldsymbol{V}$ определим законом:

$$\sigma(\vec{A}, \vec{B}) = \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}.$$

Тогда аксиомы Вейля будут выполняться так же, как в арифметической модели. Эту модель евклидова пространства назовем *векторной*.

5. Реперы и координаты. При построении той или иной аксиоматической теории не столько важно количество аксиом, их независимость или, напротив, избыточность системы аксиом, сколько важно другое: просто или сложно развивается теория на основе выбранной системы аксиом, как далеко от аксиом отстоят основные факты теории, какие методы обусловливаются аксиомами.

В этом отношении аксиоматика Вейля структуры евклидова пространства находится, пожалуй, вне конкуренции. Основная идея здесь состоит в следующем.

Возьмем какую-нибудь точку $O \in E$ и базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ пространства переносов $\boldsymbol{V}$. Тогда будут определены n точек $E_i \mid \overrightarrow{OE_i} = \vec{e}_i$. Упорядоченное множество точек $(O, E_1, \ldots, E_n)$ называется *аффинным репером* в пространстве E. Если базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ евклидова векторного пространства $\boldsymbol{V}$ ортонормированный, то репер называют *ортонормированным* или *прямоугольной системой координат.* Репер обозначают также $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Координаты точки $M \in E$ относительно репера $R = (O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ определяются условиями:

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n)_R \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n.$$

Дальнейшее развитие теории в случае $n = 2, 3$ сводится к построению обычной «аналитической геометрии» лишь с одним, но принципиальным отличием: все геометрические понятия (такие, как прямая, луч, отрезок, плоскость и др.) нуждаются в специальных определениях, опирающихся на аксиомы Вейля или следствия из них. Аналогичным образом строится и геометрия многомерного пространства.

Построение теории может проводиться либо в векторной форме, либо в координатной. В последнем случае вводимые понятия не должны зависеть от выбора системы координат. Обычно координатный метод используют наряду с векторным, что позволяет упростить развитие теории.

В построении геометрии многомерного пространства иногда идут дальше, опираясь на следующие соображения. При фиксированной точке O в силу аксиомы I каждой точке $M \in E$ соответствует единственный радиус-вектор $\overrightarrow{OM} \in V$ и, обратно, каждый вектор $\vec{m} \in V$. является радиусом-вектором вполне определенной точки $M \in E$. Значит, при фиксированной точке O множество радиусов-векторов всех точек пространства E совпадает с векторным пространством V.

Отождествив точки пространства E с их радиусами-векторами (см. векторную модель точечного пространства), мы оказываемся в рамках теории векторного пространства, и возникает возможность истолковывать геометрию как линейную алгебру. Этим и пользуется Ж. Дьедонне в своей известной книге [25].

Указанным путем можно пойти еще дальше. Задав репер в точечном пространстве E (или базис в векторном пространстве $V = E$), мы получим биекцию $E \to \boldsymbol{R}^n$ по закону $M(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_n)$, которая является изоморфизмом (см. арифметическую модель точечного пространства). Она позволяет в качестве евклидова пространства рассматривать $\boldsymbol{R}^n$. Таким истолкованием евклидова пространства часто пользуются в различных приложениях геометрии.

Заметим, однако, что отождествление точечного пространства с векторным или числовым производится при фиксированной точке $O \in E$, которая в пространстве E — обычная, рядовая точка, равноправная со всеми остальными точками этого пространства. Поэтому векторное или числовое пространство можно рассматривать лишь как евклидово точечное пространство с фиксированной точкой и, значит, обладающее некоторыми дополнительными свойствами по отношению к этой точке (например, свойством прямой проходить через эту точку и т. п.). По существу, фиксирование точки O приводит к обогащению структуры евклидова пространства E. Впрочем, в приложениях исключительность точки игнорируется и поэтому не мешает указанному подходу к понятию евклидова пространства.

Из вышеизложенного с очевидностью следует, что построение геометрии в школе по Вейлю требует значительной пропедевтики аналитических методов в геометрии. При этом элементы «аналитической геометрии» могут быть построены на любой основе: на интуитивном уровне или в рамках какой-либо другой аксиоматики. Без указанной пропедевтики теория Вейля теряет свою простоту и становится недоступной учащимся. В этом состоит одна из причин непригодности аксиоматики Вейля для построения начал систематического курса геометрии в VI классе. Однако необходимая пропедевтика элементов стереометрии и аналитических методов в принципе позволяет строить стереометрию или, что предпочтительней, заключительный обобщающий раздел школьного курса геометрии.

Рассмотрим первые важные следствия аксиом Вейля.

1) $\forall A \in E, \ \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Для этого достаточно доказать, что $\forall \vec{b} \in \boldsymbol{V}, \ \overrightarrow{AA} + \vec{b} = \vec{b}$. По аксиоме I существует точка $B \mid b = \overrightarrow{AB}$. В силу аксиомы II

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

2) $\forall A, B \in E, \ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Это следует из того, что по аксиоме II $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$, но по доказанному выше $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Значит, вектор $\overrightarrow{AB}$ противоположен вектору $\overrightarrow{BA}$.

3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow B = C$,

так как по аксиоме I каждый вектор $\vec{x} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ переводит точку A в единственную вполне определенную точку.

4) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow A = B$.

Возьмем какую-нибудь точку C. Тогда по аксиоме II $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$. Но $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Значит, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ и по доказанному выше $A = B$.

5) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

По аксиоме II $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. Поэтому $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. Вычитая из обеих частей этого равенства вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, получим $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

6) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \ \forall A, B, O \in E$

является прямым следствием аксиомы II.

Эти предложения выполняются в пространстве E любой размерности $n \in N$. Отметим, что каждое из этих пространств содержит бесконечное множество точек. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть множество точек, в которые векторы $\alpha\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0},\ \alpha \in \boldsymbol{R})$ переводят точку $A \in E$ $(E \neq \varnothing$ по определению).

В дальнейшем мы ограничимся построением фрагмента теории трехмерного пространства, причем сначала рассмотрим аффинное пространство, а потом превратим его в евклидово.

6. Прямая. Пусть E — трехмерное аффинное пространство и V — его пространство переносов ($\dim V = 3$). Возьмем точку $A \in E$ и вектор $\vec{a} \in V$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Прямой назовем множество точек:

$$d = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{a},\ \alpha \in \boldsymbol{R}\}.$$

Вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором* прямой d. Он может быть заменен любым ненулевым вектором, коллинеарным $\vec{a}$:

$$\vec{b} = \beta\vec{a},\ \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \gamma\vec{b},\ \text{где } \gamma \in \boldsymbol{R},\quad \left(\gamma = \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Точку A также можно заменить любой другой точкой этой прямой. Действительно, возьмем какую-нибудь точку $B \in d$. Тогда $\exists\alpha_0 \in \boldsymbol{R} \mid \overrightarrow{AB} = \alpha_0\vec{a}$. Рассмотрим прямую

$$d' = \{N \in E \mid \overrightarrow{BN} = \gamma\vec{a},\ \gamma \in \boldsymbol{R}\}.$$

Для любой точки $M \in d$:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = (\alpha - \alpha_0)\,\vec{a} \Rightarrow M \in d'.$$

Обратно, для любой точки $N \in d'$:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = (\gamma + \alpha_0)\vec{a} \Rightarrow N \in d.$$

Следовательно, $d' = d$.

Множество всех векторов $\alpha\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0},\ \alpha \in R)$ представляет собой одномерное векторное пространство $V' \subset V$. Поэтому прямая $d = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in V'\}$ одномерна. Сужение $\sigma|_{d\times d}$ отображения σ удовлетворяет аксиомам I, II, и поэтому *прямая d является одномерным аффинным пространством* (в евклидовом пространстве — евклидовым) с пространством переносов V'.

В пространстве E существуют точки, не лежащие на прямой d. Действительно, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, то точка $N \in E \mid \overrightarrow{AN} = \vec{b}$ не лежит на прямой d.

Теорема 1. *Через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая.*

Доказательство. Пусть $A, B \in E$, $A \neq B$. Прямая $d = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB},\ \alpha \in R\}$ проходит через точки A и B, ибо для $\alpha = 0 : \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Rightarrow M = A$,

для $\alpha = 1 : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow M = B$.

Пусть d' — какая-нибудь прямая, проходящая через точки A и B. Тогда можно записать:

$$d' = \{M \in E | \overrightarrow{AM} = \gamma\vec{a},\ \gamma \in \boldsymbol{R}\}.$$

$B \in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \gamma_0\vec{a}\ (\gamma_0 \neq 0)$ и $\overrightarrow{AM} = \gamma\vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, где $\alpha \in \boldsymbol{R}, \left(\alpha = \frac{\gamma}{\gamma_0}\right)$. Значит, $d' = d$.

Теорема доказана.

Прямую, проходящую через две различные точки A и B, будем обозначать (AB). Поэтому можно записать:

$$(AB) = \{M \in E | \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB},\ \alpha \in \boldsymbol{R}\}. \tag{1}$$

Прямая d называется *параллельной* прямой l, если их направляющие векторы линейно зависимы (коллинеарны). Отсюда следует, что отношение параллельности ($\|$) является отношением эквивалентности на множестве D всех прямых пространства E. Элементы фактор-множества $D/\ \|$ называются *связками параллельных прямых*.

Точкой A и вектором $\vec{a} \neq \vec{0}$ (определенным с точностью до коллинеарного) определяется единственная прямая, проходящая через A и имеющая $\vec{a}$ направляющим вектором. Отсюда следует, что *через данную точку проходит единственная прямая, параллельная данной прямой*.

Теорема 2. *Две параллельные прямые либо совпадают, либо не имеют общих точек.*

Доказательство. Пусть две прямые параллельны. Тогда можно считать, что они имеют один и тот же направляющий вектор $\vec{a}$. Если эти прямые имеют общую точку A, то и та, и другая прямая есть множество точек $\{M \in E | \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{a},\ \alpha \in \boldsymbol{R}\}$, т. е. эти прямые совпадают.

Прямые $d = \{M \in E | \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{a},\ \alpha \in \boldsymbol{R}\}$, и $l = \{N \in E | \overrightarrow{CN} = \beta\vec{a},\ \beta \in \boldsymbol{R}\}$, где $C \notin d$, параллельны и $d \neq l$. Они не имеют общих точек, ибо если бы у них была общая точка, то по доказанному выше $d = l$, чего нет.

7. Луч. Пусть $A, B \in E$, $A \neq B$. *Лучом с началом A, проходящим через точку B, называется множество точек*

$$[AB) = \{M \in E | \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB},\ t \geqslant 0\}. \tag{1}$$

Вместо точки B можно взять любую другую точку B_1 луча $[AB)$, отличную от точки A. Действительно, возьмем точку $B_1 \in [AB) | \overrightarrow{AB_1} =$

$= t_1 \cdot \overrightarrow{AB}$, $t_1 > 0$, и, значит, $B_1 \neq A$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{t_1}\overrightarrow{AB_1}$ и $(\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB}, t \geqslant 0) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} = s \cdot \overrightarrow{AB_1}, s \geqslant 0)$, где $s = \frac{t}{t_1}$.

Сравнив (1) и (1) п. 6, заключаем, что $[AB) \subset (AB)$, но $[AB) \neq (AB)$, ибо на прямой (AB) есть точки, не принадлежащие лучу $[AB)$: они отвечают значениям $\alpha < 0$ в формуле (1) п. 6. Например, такой точкой является точка $B' \in (AB) | \alpha = -1$, т. е. для которой $\overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AB}$. Луч $[AB')$ называется *дополнительным* к лучу $[AB)$:

$$[AB') = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = t' \cdot \overrightarrow{AB'},\ t' \geqslant 0\}.$$

Так как $\overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AM} = -t \cdot \overrightarrow{AB}$, и, положив $t' = -t$, получим

$$[AB') = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = t' \cdot \overrightarrow{AB}, t' \leqslant 0\}.$$

Сравнивая теперь лучи $[AB)$, $[AB')$ и прямую (AB), заключаем:

$$[AB) \cap [AB') = A,\ [AB) \cup [AB') = (AB).$$

Лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются *одинаково направленными*, если $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$, $\alpha > 0$. Очевидно, что отношение ($\uparrow\uparrow$) одинаковой направленности является отношением эквивалентности на множестве L всех лучей пространства E. Элементы фактор-множества $L/\uparrow\uparrow$ называются *направлениями* в пространстве E.

8. **Отрезок.** Пусть $A, B \in E$, $A \neq B$. Отрезком с концами A и B называется множество точек

$$[AB] = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB},\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}. \qquad (1)$$

Сравнивая (1), (1) п. 6, (1) п. 7, приходим к выводу: $[AB] \subset [AB) \subset (AB)$.

Мы скажем, что точка M лежит между точками A и B $(A \neq B)$, и запишем: $\mu\,(AMB)$, если

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB},\ 0 < t < 1.$$

Следовательно, отрезок $[AB]$ состоит из точек A $(t = 0)$, B $(t = 1)$ и точек M $(0 < t < 1)$, лежащих между ними. Эти точки M называются *внутренними точками* отрезка $[AB]$.

Заметим, что $\mu\,(AMB) \to M \in (AB)$ и $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = (1 - t) \cdot \overrightarrow{BA}$, причем $0 < 1 - t < 1$. Поэтому $\mu\,(AMB) \Rightarrow \mu\,(BMA)$. Отсюда следует, что $[AB] = [BA]$.

Пусть дана прямая $p = \{M \in E \mid \overrightarrow{OM} = x\vec{e},\ x \in \boldsymbol{R}\}$. Число x является координатой точки M в репере $(0, \vec{e})$ на прямой p.

Пусть A, B, C — три различные точки прямой p:

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{e},\ \overrightarrow{OB} = x_B\vec{e},\ \overrightarrow{OC} = x_C\vec{e}.$$

Тогда нетрудно доказать, что

$$\mu\,(ACB) \Leftrightarrow (x_A < x_C < x_B \text{ или } x_A > x_C > x_B).$$

Теорема 1. *Любая точка O прямой p разбивает множество всех отличных от O точек прямой p на два непустых множества так, что:*

а) *для любых двух точек A и B, принадлежащих разным множествам, точка O лежит между A и B;*

б) *если точки A и B принадлежат одному и тому же множеству, то одна из них лежит между другой точкой и точкой O.*

Доказательство. Пусть $p = \{M \in E \mid \overrightarrow{OM} = x\vec{e},\ x \in \boldsymbol{R}\}$. Рассмотрим фигуры

$$p_O' = \{M \in E \mid \overrightarrow{OM} = x\vec{e},\ x > 0\},$$
$$p_O'' = \{M \in E \mid \overrightarrow{OM} = x\vec{e},\ x < 0\}.$$

Очевидно, что $p \setminus \{O\} = p_O' \cup p_O''$, $p_O' \neq \varnothing$, $p_O'' \neq \varnothing$, $p_O' \cap p_O'' = \varnothing$. В репере $(O, \vec{e})$ на прямой p: $O\,(0)$, $A\,(x_A)$, $B\,(x_B)$. Если $A \in p_O'$, $B \in p_O''$, то $x_A > 0 > x_B$ и, значит, $\mu\,(AOB)$. Если A, $B \in p_O'$ $(A \neq B)$, то $0 < x_A < x_B$ или $0 < x_B < x_A$ и, значит, $\mu\,(OAB)$ или $\mu\,(OBA)$. К тому же выводу придем и в случае A, $B \in p_O''$.

Заметим, что фигуры $p_O' \cup \{O\}$ и $p_O'' \cup \{O\}$ являются лучами с началом O, дополнительными друг к другу.

9. Плоскость. Возьмем точку $A \in E$ и неколлинеарные (линейно независимые) векторы $\vec{a}$, $\vec{b} \in \boldsymbol{V}$. Плоскостью назовем множество точек

$$\Pi = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b};\ \alpha,\ \beta \in \boldsymbol{R}\}.$$

Линейная оболочка $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ $(\alpha, \beta \in R)$, натянутая на векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, представляет собой двумерное векторное пространство $\boldsymbol{V}'' \subset \boldsymbol{V}$. Поэтому

$$\Pi = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in \boldsymbol{V}''\},$$

и вместо векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ можно взять любой другой базис векторного пространства $\boldsymbol{V}''$.

Сужение $\sigma|_{\Pi\times\Pi}$ отображения σ удовлетворяет аксиомам I, II, и поэтому *плоскость* Π *является двумерным аффинным* (в евклидовом пространстве — евклидовым) *пространством с пространством переносов* $\boldsymbol{V}''$.

Точку A можно заменить любой другой точкой плоскости Π. Действительно, если $B \in \Pi$, то $\overrightarrow{AB} \in \boldsymbol{V}''$. Так как $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AM} \in \boldsymbol{V}'' \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \in \boldsymbol{V}''$.

В пространстве E существуют точки, не лежащие на плоскости Π. Действительно, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы, то точка $N \in E \mid \overrightarrow{AN} = \vec{c}$ не лежит на плоскости Π.

Теорема 1. *Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.*

Доказательство. Пусть A, B, C — точки, не лежащие на одной прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ линейно независимы. Плоскость

$$\Pi = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC};\ \alpha,\ \beta \in \boldsymbol{R}\}$$

проходит через точки A, B, C, ибо

для $\alpha = \beta = 0$: $\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Rightarrow M = A$;

для $\alpha = 1$, $\beta = 0$: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow M = B$;

для $\alpha = 0$, $\beta = 1$: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow M = C$.

Пусть Π' — какая-нибудь плоскость, проходящая через точки A, B, C. Тогда можно записать:

$$\Pi' = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in V''\}.$$

Так как B, $C \in \Pi'$, то $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \in V''$ и образуют базис этого двумерного векторного пространства. Следовательно, $\Pi' = \Pi$.

Плоскость, проходящую через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, будем обозначать (ABC):

$$(ABC) = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC};\ \alpha,\ \beta \in \boldsymbol{R}\}. \qquad (1)$$

Теорема 2. *Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть прямая.*

Доказательство. Пусть Π и $\widetilde{\Pi}$ — две различные плоскости, V'', $\widetilde{V}''$ — их пространства переносов, $A \in \Pi$, $A \in \widetilde{\Pi}$. Тогда можно записать:

$$\Pi = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in V''\},\quad \widetilde{\Pi} = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in \widetilde{V}''\}.$$

Так как $\Pi \neq \widetilde{\Pi}$, то $V'' \neq \widetilde{V}''$. Очевидно, что $M \in \Pi \cap \widetilde{\Pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in V'' \cap \widetilde{V}''$. Известно, что два различных двумерных подпространства трехмерного векторного пространства V пересекаются по одномерному подпространству $V' \subset V$. Следовательно, $\Pi \cap \widetilde{\Pi} = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in V'\}$ — прямая.

Плоскость Π называется *параллельной* плоскости $\widetilde{\Pi}$, если эти плоскости имеют одно и то же пространство переносов. Отсюда следует, что отношение параллельности является отношением эквивалентности на множестве P всех плоскостей пространства E. Элементы фактор-множества $P/\|$ называются *пучками параллельных плоскостей*.

Легко доказать (аналогично теореме 2 п. 6), что две параллельные плоскости либо совпадают, либо не имеют общих точек. Верно и обратное предложение. Действительно, если $\Pi = \widetilde{\Pi}$, то $\Pi \parallel \widetilde{\Pi}$ по определению. Докажем, что $\Pi \cap \Pi' = \varnothing \Rightarrow V'' = \widetilde{V}''$.

Предположим, что $V'' \neq \widetilde{V}''$. Пусть $(\vec{a}, \vec{b})$ — базис векторного пространства V''. Тогда $\exists \vec{c} \in \widetilde{V}'' \mid \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независимы и, значит, составляют базис трехмерного векторного пространства V. Если

$A \in \Pi$, $B \in \widetilde{\Pi}$, то $\overrightarrow{AB} \in \boldsymbol{V}$ и $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Точка $M \in E | \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ принадлежит П. Так как $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = -\gamma\vec{c}$, то $M \in \widetilde{\Pi}$. Следовательно, плоскости П и $\widetilde{\Pi}$ имеют общую точку M, что противоречит условию. Поэтому $V'' = \widetilde{V}''$ и $\Pi'' \| \widetilde{\Pi}$.

Доказанное необходимое и достаточное условие параллельности двух плоскостей можно было бы принять за определение параллельных плоскостей и доказать, в качестве признака, что две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их пространства переносов совпадают. Такой подход позволяет сделать несколько более наглядной сильно алгебраизированную теорию.

Теорема 3. *Прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости.*

Доказательство. Пусть дана плоскость П и A, $B \in \Pi$, $A \neq B$. Если V'' — пространство переносов плоскости П, то $\overrightarrow{AB} \in \boldsymbol{V}''$. Тогда можно записать:

$$(AB) = \{M \in E | \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB};\ \alpha \in \boldsymbol{R}\},$$

$$\Pi = \{M \in E | \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta\vec{b};\ \alpha,\ \beta \in \boldsymbol{R}\},$$

где $\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}$ — линейно независимые векторы из $\boldsymbol{V}''$. Точки плоскости П, для которых $\beta = 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, составляют прямую (AB). Следовательно, $(AB) \subset \Pi$.

10. Полуплоскость. Пусть на плоскости П даны прямая (AB) и точка $C \notin (AB)$. *Полуплоскостью с границей* (AB), *проходящей через точку* C, называется множество точек

$$[(AB), C) = \{M \in E | \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}; \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}, \beta \geqslant 0\} \quad (1)$$

Заметим, что множество точек полуплоскости, для которых $\beta = 0$, есть прямая (AB).

В определении полуплоскости точки A и B можно заменить любыми другими точками прямой (AB), а точку C — любой другой точкой этой полуплоскости, не лежащей на прямой (AB).

Сравнивая (1) и (1) п. 9, заключаем, что $[(AB), C) \subset (ABC)$, но $[(AB), C) \neq (ABC)$, ибо на плоскости (ABC) есть точки, не принадлежащие полуплоскости $[(AB), C)$: им отвечают значения $\beta < 0$ в формуле (1) п. 9. Например, такой точкой является точка $C' \in (ABC) | \alpha = 0$, $\beta = -1$, т. е. для которой $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AC}$. Полуплоскость $[(AB), C')$ называется *дополнительной* к полуплоскости $[(AB), C)$:

$$[(AB), C') = \{M \in E | \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC'};\ \alpha \in \boldsymbol{R},\ \beta \geqslant 0\}$$

или

$$[(AB), C') = \{M \in E | \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta'\overrightarrow{AC}; \alpha, \beta' \in \boldsymbol{R},\ \beta' \leqslant 0\}.$$

Теперь становится очевидным, что

$$[(AB), C) \cap [(AB), C') = (AB),$$

$$[(AB), C) \cup [(AB), C') = (ABC).$$

Числа α, β в формуле (5) являются координатами точки M в репере $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ на плоскости П. Поэтому можно записать:

$$[(AB), C) = \{M(\alpha, \beta) \in \Pi | \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \ \beta \geqslant 0\},$$
$$[(AB), C') = \{M(\alpha, \beta) \in \Pi | \alpha, \beta \in , \mathbf{R} \ \beta \leqslant 0\}.$$

Говорят, что прямая p разделяет не принадлежащие ей точки M и N, если $p \cap [MN] \neq \varnothing$, т. е. если прямая p проходит через внутреннюю точку отрезка $[MN]$.

Теорема 1. *Любая прямая p, лежащая в плоскости* П, *разбивает множество не принадлежащих ей точек этой плоскости на два непустых множества так, что:*

а) *любые две точки, принадлежащие разным множествам, разделены прямой p;*

б) *любые две точки, принадлежащие одному и тому же множеству, не разделены прямой p.*

Доказательство. На плоскости П зададим аффинный репер $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, такой, что $O \in p$, $\vec{e}_1$ — направляющий вектор прямой p. Тогда

$$\Pi = \{M \in E | \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2; \ x, \ y \in \mathbf{R}\}.$$

Множество точек плоскости П, для которых $y = 0$, есть прямая p.

Рассмотрим фигуры

$$\Pi'_p = \{M(x, y) \in \Pi | x, y \in \mathbf{R}, \ \ y > 0\},$$
$$\Pi''_p = \{M(x, y) \in \Pi | x, y \in \mathbf{R}, \ \ y < 0\}.$$

Очевидно, что $\Pi \setminus p = \Pi'_p \cup \Pi'_p$, $\Pi'_p \neq \varnothing$, $\Pi''_p \neq \varnothing$, $\Pi'_p \cap \Pi''_p = \varnothing$. Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ — две различные точки плоскости П. Будем искать точку P пересечения прямых (M_1M_2) и p. Координаты такой точки $(x, 0)$ должны удовлетворять условию $\overrightarrow{M_1P} = t \cdot \overleftrightarrow{M_1M_2}$, которое в координатной форме имеет вид:

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1),$$
$$-y_1 = t(y_2 - y_1). \qquad (2)$$

а) Пусть $M_1 \in \Pi'_p$, $M_2 \in \Pi''_p$. Тогда $y_1 > 0$, $y_2 < 0$ и $t = \dfrac{y}{y_1 - y_2}$ удовлетворяет условию: $0 < t < 1$. Следовательно, точка P существует и $\mu(M_1pM_2)$, т. е. прямая p, разделяет точки M_1 и M_2.

б) Пусть M_1, $M_2 \in \Pi'_p$. Тогда $y_1 > 0$, $y_2 > 0$. Если $y_1 = y_2$, то второе уравнение системы (2) не имеет решения и, значит, $(M_1M_2) \cap$ $\cap \ p = \varnothing$. Если $y_1 > y_2$, то из второго уравнения системы (6) найдем t, причем $t > 1$, а если $y_1 < y_2$, то $t < 0$. В каждом из этих случаев прямая p не разделяет точки M_1 и M_2.

К тому же выводу придем и в случае, когда M_1, $M_2 \in \Pi''_p$.

Заметим, что фигуры $\Pi'_p \cup p$ и $\Pi''_p \cup p$ являются полуплоскостями с границей p, дополнительными друг к другу.

11. Измерение длин и углов. Пусть E — трехмерное евклидово пространство. Следовательно, его пространство переносов $\boldsymbol{V}$ является трехмерным евклидовым векторным пространством. Из аксиом евклидова векторного пространства следует, что $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 > 0$ для $\forall a \in \boldsymbol{V}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Для нулевого вектора

$$\vec{0}^2 = (\vec{a} - \vec{a})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a}^2 = 0.$$

Таким образом, $\vec{a}^2 \geqslant 0$ для $\forall \vec{a} \in \boldsymbol{V}$, причем $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

Число $\sqrt{\vec{a}^2}$ обозначим $|\vec{a}|$ и назовем *нормой* или *длиной вектора* $\vec{a}$. Отсюда следует, что $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Вектор $\vec{e}$ называется *единичным вектором* или *ортом*, если $|\vec{e}| = 1$. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектор $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ — орт вектора $\vec{a}$, так как $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)^2 = \frac{\vec{a}^2}{|\vec{a}|^2} = 1$

Для любых двух векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{V}$ имеет место неравенство

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|. \tag{1}$$

Действительно, если один из этих векторов нулевой, например $\vec{a} = \vec{0}$, то $|\vec{a}| = 0$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0} \cdot \vec{b} = (\vec{c} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$. Следовательно, в этом случае неравенство (1) выполняется.

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тогда $(t\vec{a} + \vec{b})^2 \geqslant 0$ или $\vec{a}^2 t^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})t + \vec{b}^2 \geqslant 0$ для $\forall t \in \boldsymbol{R}$. Поэтому дискриминант полученного квадратного трехчлена

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \leqslant 0,$$

откуда и следует доказываемое неравенство (1).

Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получаем из неравенства (1):

$$-1 \leqslant \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leqslant 1.$$

Следовательно, в числовом промежутке $[0, \pi] \subset \boldsymbol{R}$ существует число φ такое, что

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{2}$$

Это число φ называют *величиной угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$* и обозначают $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.

Из равенства (2) вытекает следующее свойство скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}.$$

Равенство (2) используют для определения величины φ выпуклого угла AOB:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\ |\overrightarrow{OB}|}.$$

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b} \in \boldsymbol{V}$ называются *ортогональными*, если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Расстояние $\rho(A, B)$ между точками A, $B \in E$ определяется равенством

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}|.$$

Теорема 1. Для любых трех точек A, B, $C \in E$:

1) $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,
2) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$,
3) $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Доказательство. 1) Так как $\rho(A, B) = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$, то $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$. 2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BA}^2 \Rightarrow \rho(A, B) = \rho(B, A)$. 3) В силу (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} \leqslant \sqrt{\overrightarrow{AB}^2)^2} \times \sqrt{\overrightarrow{BC}^2}$, поэтому $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 \leqslant \overrightarrow{AB}^2 + 2\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}\cdot\sqrt{\overrightarrow{BC}^2} + \overrightarrow{BC}^2 = \left(\sqrt{\overrightarrow{AB}^2} + \sqrt{\overrightarrow{BC}^2}\right)^2$ Отсюда $|\overrightarrow{AC}| \leqslant |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ или $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Теорема 2. *Для любого расстояния $a \in \boldsymbol{R}_+$ на заданном луче с началом O существует одна и только одна точка A, расстояние от которой до точки O равно a.*

Доказательство. Возьмем луч

$$[OB) = \{M \in E|\overrightarrow{OM} = t\cdot\overrightarrow{OB},\ t \geqslant 0\}.$$

Пусть $\vec{e}$ — орт вектора $\overrightarrow{OB}$. Тогда $\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OB}|\cdot\vec{e}$ и

$$[OB) = \{M \in E|\overrightarrow{OM} = x\vec{e},\ x \geqslant 0\}.$$

Точка $A \in [OB)|x = a$ удалена от начала луча на расстояние a, так как $\overrightarrow{OA} = a\cdot\vec{e} \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = a$.

Если $A' \in [OB)$ и $|\overrightarrow{OA'}| = a$, то $\overrightarrow{OA'} = x\vec{e}$, $|\overrightarrow{OA'}| = x$ и $x = a$. Следовательно, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow A' = A$.

12. Движение. В евклидовом пространстве Е зададим две точки O и O' и рассмотрим ортогональное преобразование φ его пространства переносов $\boldsymbol{V}$, т. е. линейное преобразование:

$$\varphi(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\cdot\varphi(\vec{a}) + \beta\cdot\varphi(\vec{b}),\ \forall\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{V},\ \forall\alpha, \beta \in \boldsymbol{R},$$

сохраняющее скалярное произведение: $\varphi(\vec{a})\cdot\varphi(\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}$, $\forall\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{V}$.

Возьмем произвольную точку $M \in E$. Вектор $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ переводит точку O в точку M. Вектор $\varphi(\vec{m})$ переводит точку O' в точку M'. Таким образом, ортогональное преобразование φ: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ порождает преобразование f: $E \to E$ по закону

$$f(M) = M', \text{ если } \varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'}.$$

Полученное преобразование f называется *движением* (или *перемещением*) евклидова пространства E.

Движение f сохраняет расстояние между точками:

$$\rho(f(A), f(B)) = \rho(A, B), \ \forall A, B \in E.$$

Действительно, пусть $f(A) = A'$, $f(B) = B'$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{O'B'} - \overrightarrow{O'A'}$. В силу линейности преобразования φ

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \varphi(\overrightarrow{OB}) - \varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O'B'} - \overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Так как φ сохраняет скалярное произведение, то оно сохраняет и длину вектора: $|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}|$, а значит, и расстояние:

$$\rho(A', B') = \rho(A, B).$$

Можно доказать и обратное предложение: *если преобразование f евклидова пространства сохраняет расстояние между любыми двумя точками, то f — движение.* Поэтому движение евклидова пространства можно определить как такое его преобразование, которое сохраняет расстояние между любыми двумя точками. Отсюда следует, что движения евклидова пространства E образуют группу. Обозначим ее D.

Две фигуры F и $F' \subset E$ называются *конгруэнтными*, если существует движение, переводящее фигуру F в фигуру F'. Так как D — группа, то отношение *конгруэнтности* является отношением эквивалентности, определенным на множестве всех фигур пространства E.

Линейность преобразования φ, порождающего движение f, приводит к очевидному выводу, что движение сохраняет отношение «лежать между» и переводит прямую в прямую, луч в луч, отрезок в отрезок, плоскость в плоскость, полуплоскость в полуплоскость.

Ортогональное преобразование φ переводит ортонормированный базис, составленный из векторов $\vec{e}_i = \overrightarrow{OE_i}$, в ортонормированный базис, составленный из векторов $\vec{e}_i' = \overrightarrow{O'E_i'}$. При этом вектор $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ перейдет в вектор $\overrightarrow{O'M'} = x_1\vec{e}_1' + \ldots + x_n\vec{e}_n'$ с теми же координатами $x_1, \ldots, x_n$. Поэтому движение f, порожденное преобразованием φ, переведет ортонормированный репер $R = (O, E_1, \ldots, E_n)$ в ортонормированный репер $R' = (O', E_1', \ldots, E_n')$ и точку $M(x_1, \ldots, x_n)_R$ в точку $M'(x_1, \ldots, x_n)_{R'}$. Таким образом, точка $M' = f(M)$ имеет те же координаты относительно репера $R' = f(R)$, что и точка M относительно репера R.

Обратно, зададим в пространстве E два ортонормированных репера

R и R' и рассмотрим преобразование f пространства E по закону

$$M(x_1, \ldots, x_n)_R \xrightarrow{f} M'(x_1, \ldots, x_n)_{R'}. \qquad (1)$$

Если $N' = f(N)$, то векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M'N'}$ будут иметь одинаковые координаты в ортонормированных базисах $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ и $(\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n)$ соответственно. Поэтому равны их длины: $\sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{\overrightarrow{M'N'}^2}$, а значит, равны расстояния: $\rho(M, N) = \rho(M', N')$, т. е. f — движение.

Следовательно, движение f евклидова пространства E можно определить как преобразование этого пространства по закону (1), где R, R' — заданные ортонормированные реперы.

Задание движения парой (R, R') ортонормированных реперов обладает высокой степенью наглядности, позволяет легко строить образы заданных точек (по их координатам) и провести классификацию движений в зависимости от взаимного расположения реперов R и R'. Такой подход позволяет также легко получить формулы, определяющие движение в ортонормированном репере R. Действительно, если $M(x_1, \ldots, x_n)_R$, то $M'(x_1, \ldots, x_n)_{R'}$. Поэтому координаты точки M и ее образа $M'(y_1, \ldots, y_n)_R$ относительно одного и того же репера R связаны формулами преобразования координат при переходе от репера R к реперу R'.

В предыдущем изложении мы не фиксировали размерность пространства E, чтобы иметь возможность рассматривать в дальнейшем как движения трехмерного пространства, так и движения плоскости.

Замечание. Линейное преобразование φ пространства переносов аффинного пространства E порождает по указанному выше закону преобразование f: $E \to E'$, которое называется аффинным. Отношение «лежать между», отношение трех точек, свойство фигуры быть отрезком, лучом, прямой, плоскостью — инварианты аффинных преобразований.

Теорема 1. *Если точки A, B, A', B' принадлежат плоскости* Π *и расстояние* $\rho(A, B) = \rho(A', B') > 0$, *то существует два и только два движения этой плоскости, каждое из которых переводит точку A в точку A' и точку B в точку B'. Если Π_0 — полуплоскость, ограниченная прямой (AB), то она этими двумя движениями переводится в две различные полуплоскости, ограниченные прямой $(A'B')$.*

Доказательство. Возьмем ортонормированный репер $R = (A, E_1, E_2) | E_1 \in [AB)$. Если существует движение, переводящее A в A' и B в B', то оно переводит луч $[AB)$ в луч $[A'B')$ и, значит, точку $E_1 \in [AB)$ в точку $E'_1 \in [A'B')$. При этом ортонормированный репер R перейдет в ортонормированный репер $R' = (A', E'_1, E'_2)$. Поэтому точка E'_2 должна удовлетворять условиям:

$$\overrightarrow{A'E'_2} \cdot \overrightarrow{A'E'_1} = 0, \qquad (2)$$

$$|\overrightarrow{A'E'_2}| = 1. \qquad (3)$$

Таких точек на плоскости П есть только две, так как в пространстве переносов плоскости П существуют только два единичных вектора, ортогональных вектору $\overrightarrow{A'E'_1}$.

Действительно, пусть в некотором ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ пространства переносов плоскости П

$$\overrightarrow{A'E'_1} = x\vec{i} + y\vec{j}, \ \overrightarrow{A'E'_2} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

Тогда из (10) следует:

$$xx' + yy' = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y \\ -y' & x' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = \varepsilon y, \\ y' = -\varepsilon x. \end{cases} \qquad (4)$$

Векторы $\overrightarrow{A'E'_1}$ и $\overrightarrow{A'E'_2}$ единичные, поэтому

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1.$$

Отсюда в силу (4) получаем: $\varepsilon = \pm 1$. Значит, существуют только два вектора: $\overrightarrow{A'E'_2}$ и $\overrightarrow{A'E''_2}$, удовлетворяющие условиям (2), (3), и эти векторы противоположные. Таким образом, если существуют движения, переводящие A в A' и B в B', то их не более двух.

Теперь возьмем ортонормированные реперы $R = (A, E_1, E_2) \mid E_1 \in [AB)$, $R' (A', E'_1, E'_2) \mid E'_1 \in [A'B')$, $R'' = (A', E'_1, E''_2) \mid \overrightarrow{A'E''_2} = -\overrightarrow{A'E'_2}$ и обозначим $\rho(A, B) = \rho(A', B') = a$. Тогда $B(a, 0)_R$, $B'(a, 0)_{R'}$, $B'(a, 0)_{R''}$. Значит, движение $f \mid f(R) = R'$ и движение $g \mid g(R) = R''$ переводят точку A в точку A' и точку B в точку B'.

Таким образом, мы доказали существование двух и только двух движений, переводящих A в A' и B в B'.

Пусть полуплоскость Π_0 определяется неравенством $y \geqslant 0$ в репере R. Тогда $f(\Pi_0) = \Pi'_0$ и $g(\Pi_0) = \Pi''_0$ определяются тем же неравенством в реперах R' и R'' соответственно и, следовательно, являются полуплоскостями с границей $(A'B')$. В репере R' полуплоскость Π''_0 определяется неравенством $y \leqslant 0$, поэтому $\Pi'_0 \neq \Pi''_0$.

Изложенное в пп. 6—12 показывает, что в евклидовом трехмерном пространстве, определенном системой аксиом Вейля, прямые, плоскости и расстояния обладают теми свойствами, которые в школьном курсе геометрии приняты за аксиомы (см. [19], [20]).

13. Точечно-векторные аффинные пространства. При построении теории евклидова пространства по Вейлю структура евклидова векторного пространства выступает в качестве вспомогательной, заранее известной. Следовательно, такой подход к геометрии предусматривает предварительное изучение теории евклидова векторного пространства вообще говоря, в алгебраическом плане, вне связи с геометрией евклидова (точечного) пространства. Успешное овладение достаточно сложной и весьма абстрактной теорией евклидова векторного пространства обычно обеспечивается предварительным изучением более простых алгебраических структур, таких, как структуры группы, кольца, поля, векторного пространства. Однако школьный курс математики в настоящее время вряд ли может включать эти вопросы.

Эти методические затруднения позволяет отчасти преодолеть один из вариантов аксиоматики Вейля, разработанный П. К. Рашевским [46]. Здесь в качестве вспомогательной структуры используется только множество действительных чисел, а структура векторного пространства определяется одновременно и в непосредственной связи со структурой точечного пространства, т. е. в рамках геометрии.

Сначала определяется структура аффинного пространства. Базу такой структуры составляют два множества: $E \neq \varnothing$ и V. Элементы множества E называют *точками* и обозначают A, X и т. п., а элементы множества V называют векторами и обозначают, $\vec{a}$, $\vec{x}$ и т. п. Заметим, что множество V пока еще не наделено структурой векторного пространства.

Пусть задано отображение

$$\sigma\colon\ E \times E \to V,$$

которое каждой паре (A, B) точек ставит в соответствие один и только один вектор. Этот вектор обозначим $\overrightarrow{AB}$.

Тогда из условия существования по крайней мере одной точки $A \in E$ вытекает существование по крайней мере одного вектора $\overrightarrow{AA} \in V$. Поэтому $V \neq \varnothing$.

Требуется выполнение следующих аксиом:

I″. (Аксиома откладывания вектора.) Существует отображение $\tau\colon E \times V \to E$ по закону $\tau(A, \vec{b}) = B | \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, т. е. для каждой точки A и каждого вектора $\vec{b}$ существует одна и только одна точка B, такая, что $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

II″. (Аксиома параллелограмма.) Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Паре точек (A, A) отвечает вектор $\overrightarrow{AA} \in V$. Этот вектор назовем *нулевым* и обозначим $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Нулевой вектор $\vec{0} \in V$ мы определили с помощью точки A, но он не зависит от выбора точки A, т. е.

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} \text{ для } \forall A, B \in E.$$

Это утверждение прямо следует из аксиомы II″, примененной к равенству $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

Возьмем вектор $\vec{b}$ и какую-нибудь точку A. По аксиоме I″ существует точка $B | \overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Паре точек (B, A) отвечает вектор $\overrightarrow{BA}$, его назовем *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$ и обозначим $\overrightarrow{BA} = -\vec{b}$. Отсюда получаем: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Понятие вектора, противоположного вектору $\vec{b}$, мы связали с точкой A. Покажем, что оно не зависит от выбора точки A, т. е. для каждого вектора существует единственный ему противоположный вектор.

Для этого возьмем какую-нибудь точку C. Тогда существует точка $D | \overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Поэтому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и по аксиоме II″ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Применив аксиому II″ к равенству $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, получим $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$. Следовательно, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{b}$, то $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} = -\vec{b}$.

Теперь введем операцию сложения векторов. Пусть дана пара векторов $(\vec{x}, \vec{y})$. Возьмем какую-нибудь точку A и отложим от нее вектор $\vec{x}$ (аксиома I″), получим точку $B | \overrightarrow{AB} = \vec{x}$. Теперь от точки B отложим вектор $\vec{y}$, получив тем самым точку $C | \overrightarrow{BC} = \vec{y}$. Паре точек (A, C) отвечает вектор $\overrightarrow{AC}$. Этот вектор назовем *суммой векторов* $\vec{x}$ и $\vec{y}$ (взятых в указанном порядке) и запишем: $\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{AC}$ или, что то же, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Сумму векторов $\vec{x} + \vec{y}$ мы определили, используя точку A. Докажем, что вектор $\vec{x} + \vec{y}$ не зависит от выбора точки A, т. е. он определяется однозначно заданными векторами.

Действительно, возьмем какую-нибудь другую точку A' и повторим для нее построение суммы векторов $\vec{x} + \vec{y}$:

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'},$$

где

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \vec{x}, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} = \vec{y}. \tag{2}$$

Тогда по аксиоме II″ и из (1) $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B}$, и из (2): $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C}$. Следовательно, $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{C'C}$, откуда по аксиоме II″ $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} = \vec{x} + \vec{y}$.

Таким образом на множестве V векторов определена алгебраическая операция f: $V \times V \to V$ — сложение, причем трем произвольным точкам A, B, C отвечают векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, такие, что

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Нетрудно доказать коммутативность сложения: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$. Для этого от произвольной точки A отложим вектор $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, затем вектор $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$. Тогда получим

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{x} + \vec{y}. \tag{3}$$

От той же точки A отложим вектор $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$. Так как $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, т. е. $\overrightarrow{DC} = \vec{x}$. Поэтому

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{y} + \vec{x} \tag{4}$$

и из (3), (4) следует, что $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

Ассоциативность сложения: $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ — доказывается обычным образом, и на этом мы останавливаться не будем.

Нулевой вектор $\vec{0}$ является нейтральным элементом относительно сложения:

$$\vec{x} + \vec{0} = x \text{ для } \forall \vec{x} \in V,$$

ибо, положив $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$, по определению сложения будем иметь $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

Вектор $-\vec{x}$, противоположный вектору $\vec{x}$, является элементом, симметричным $\vec{x}$ относительно сложения:

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \text{ для } \forall \vec{x} \in V.$$

Действительно, если $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, то $-\vec{x} = \overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Этим, собственно, и исчерпывается специфика рассматриваемого варианта аксиоматики Вейля. Далее задается отображение

$$h\colon \mathbf{R} \times V \to V$$

— умножение вектора на число, удовлетворяющее обычным четырем аксиомам. В результате множества V становится векторным пространством. Вводя аксиому размерности, мы приходим к структуре n-мерного аффинного пространства.

П. К. Рашевский называет построенную аксиоматику аксиоматикой *точечно-векторного аффинного пространства*, ибо аксиомы точечного и векторного пространств здесь неразрывно связаны. Этот подход ближе к традиционному введению векторов в геометрии, чем первоначальный, использующий «готовую» структуру векторного пространства. Однако и при этом подходе векторы, по существу, играют роль операторов на точечном пространстве E.

Наконец, введением на V билинейной симметрической положительно определенной формы g превращают аффинное пространство в евклидово.

Выше мы изложили научные основы векторного построения евклидовой геометрии. Адаптация этой теории для школьного преподавания производится по-разному. С некоторыми из таких методических разработок можно познакомиться в работах [13], [37], [47], [50].

14. Аксиоматика Вейля и школьная геометрия. Наиболее сильной стороной теории Вейля является ее алгебраизация. Это обеспечивает возможность в значительной мере алгоритмизировать доказательства теорем и поэтому открывает «царский путь» в изучении геометрии.

Однако при первоначальном изучении геометрии (особенно, стереометрии) указанное достоинство теории Вейля оборачивается ее существенным недостатком: она не развивает пространственных представлений учащихся, не развивает их геометрической интуиции. Этот недостаток можно частично компенсировать возвращением к традиционным определениям и теоремам с последующим их использованием для построения теории. Пример такого подхода мы указали выше, при рассмотрении вопроса о параллельных плоскостях. Приведем еще один пример.

Прямая, перпендикулярная к плоскости, определяется «в духе Вейля» как такая прямая, пространство переносов которой является ортогональным дополнением к пространству переносов плоскости. Вместо этого можно принять традиционное определение, доказать обычный признак перпендикулярности прямой и плоскости и воспользоваться им, например, для доказательства теоремы о трех перпендикулярах.

Заметим, что именно так и сделано в школьном учебнике [20], хотя использование скалярного произведения позволяет доказать эту теорему, не опираясь на указанный признак (см., например, [13]).

Сильная алгебраизация вейлевской теории предъявляет повышенные требования к алгебраической и общелогической культуре учащихся. Однако в процессе обучения нужный уровень не достигается не только к началу систематического курса геометрии (VI класс), но и к началу изучения стереометрии (IX класс). Пожалуй, это является наиболее серьезным препятствием для внедрения векторного построения геометрии в школьное преподавание.

Принимая, кроме того, во внимание необходимость значительной пропедевтики аналитических методов в геометрии, мы приходим к выводу о возможности завершать школьное геометрическое образование ознакомлением с обоснованием геометрии по Вейлю. Предварительное изучение геометрии может в значительной мере исходить из интуитивно-наглядных представлений о простейших свойствах пространства, фиксируемых в качестве аксиом.

Всеобщее среднее образование создает благоприятные возможности для выделения общих, достаточно сложных и идейно глубоких вопросов школьной математики в завершающий концентр. На этом пути, мы надеемся, удастся совместить расширение и углубление школьной математики с ее доступностью.

Однако в нашей стране и за рубежом не прекращается поиск такой аксиоматики евклидова пространства, на которой можно было бы построить начала систематического курса геометрии в форме, доступной для учащихся соответствующего возраста.

Отдавая должное векторному обоснованию геометрии как «царскому пути» в геометрию, видный французский математик Г. Шоке в своей книге [60] пишет о том, что понятиями векторного пространства и скалярного произведения «нельзя овладеть штурмом, без всякой подготовки, особенно в том возрасте, когда у ученика еще не совсем сформировалось понятие алгебраической операции». Поэтому нужна новая аксиоматика, позволяющая «так одеть сам по себе совершенный, но слишком абстрактный для ребенка логический каркас, чтобы он превратился в нечто знакомое и приветливое».

В указанной книге Г. Шоке наиболее четко сформулировал требования к такой аксиоматике:

«...Нам надо найти простую аксиоматику с аксиомами, которые были бы сильными, т. е. позволяющими очень быстро вывести неочевидные теоремы, и интуитивно ясными, т. е. представляющими свойства окружающего нас пространства в форме, которая допускает простую проверку».

Аксиоматика должна быть такой, «чтобы в этой системе было удобно выявить векторную структуру пространства».

В построении теории следует «отдать предпочтение методам, основанным на фундаментальных понятиях, выкристаллизовавшихся за двадцать веков развития математики: понятиях множества, отношений эквивалентности и порядка, алгебраических законах, векторном пространстве, симметрии и геометрических преобразованиях».

Мы осмелимся утверждать, что самому Г. Шоке не удалось разработать такую теорию даже при существенном изменении традиционного содержания школьного курса геометрии. В большей степени перечисленным требованиям удовлетворяет теория А. Н. Колмогорова, положенная в настоящее время в основу наших школьных учебников. Эта теория базируется на структуре метрического пространства.

§ 2. МЕТРИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ

1. Логическая схема построения структуры евклидовой плоскости по Колмогорову. В настоящее время школьный курс геометрии строится на основе системы аксиом, предложенной академиком А. Н. Колмогоровым. Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением аксиом евклидовой плоскости. Аксиоматика трехмерного евклидова пространства основана на тех же принципах.

Геометрия евклидова пространства строится на основе теории множеств, является ее расширением или, как еще говорят, она «сильнее» теории множеств. Имея это в виду, понятие множества и отношение $\in$ принадлежности не упоминают в числе основных понятий и отношений структуры евклидова пространства.

Аксиоматика Колмогорова евклидова пространства использует вспомогательную структуру — систему $(\mathbf{V}_+; +)$ положительных скалярных величин (см. п. 1 § 5 главы IV).

Свойства вспомогательных структур предполагаются известными и в аксиоматику рассматриваемой структуры обычно не включаются. Так, например, система аксиом действительного векторного пространства не содержит аксиом системы действительных чисел. Аналогичным образом аксиомы евклидова пространства не описывают свойства положительных скалярных величин, хотя их и называют «расстояниями» и в аксиоматике имеется группа «аксиом расстояния».

Ядром аксиоматики Колмогорова является структура метрического пространства, определяемая второй группой аксиом — аксиомами расстояния (см. п. 4 § 2 главы II).

При этом в аксиоматике Колмогорова под расстоянием понимается, строго говоря, не число, а положительная скалярная величина, т. е. $\rho\colon E \times E \to V_+$. Формулировка аксиом расстояния с использованием структуры скалярных величин имеет методические преимущества: устанавливается естественная связь с практическим опытом учащихся, с практикой измерения конкретных величин в младших классах.

Числовое значение величины зависит от выбора единицы измерения. Разным единицам измерения в системе V_+ отвечают разные метрики пространства E. Поэтому, заменяя величины из V_+ их числовыми значениями из $\boldsymbol{R}_+$, мы получаем одно метрическое пространство из множества метрических пространств, определяемых аксиомами II группы. Это метрическое пространство мы и будем рассматривать.

В метрическом пространстве определением вводится отношение «лежать между»: $\mu(ABC)$, если точки A, B, C различные и $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$. В силу аксиомы II_2

$$\mu(ABC) \Leftrightarrow \mu(CBA).$$

Известно, что евклидово пространство, определяемое, например, по Вейлю, является метрическим пространством (см. теорему 1 п. 11). Обратное, вообще говоря, неверно: понятие метрического пространства более широкое, чем понятие евклидова пространства. Последующие аксиомы Колмогорова и служат тому, чтобы метрическое пространство превратить в евклидово. Таким образом, в теории Колмогорова структура евклидова пространства выступает как обогащенная структура метрического пространства.

Для этого прежде всего из множества E выделяется набор L некоторых подмножеств, каждое из которых называется «прямой». Этой цели служит аксиома I_1.

Аксиома I_1. *Каждая прямая есть множество точек.*

Задание множества L есть задание подмножества в булеане $\boldsymbol{P}(E)$. Фигура $l \in \boldsymbol{P}(E)$ принадлежит L, если l — прямая.

Аксиома I_3: $L \neq \varnothing$; $l \neq \varnothing$ *для* $\forall l \in L$ *и* аксиома I_2: *если* $A, B \in E$, $A \neq B$, *то* $\exists! \, l \in L \mid A, B \in l$, *описывают свойства* L.

Таким образом, аксиомы I группы в системе аксиом Колмогорова — «аксиомы принадлежности» — описывают не свойства теоретико-множественного отношения $\in$ принадлежности, а свойства множества прямых L. Их было бы естественней назвать «аксиомами прямой». Совместные свойства ρ и L описывают остальные аксиомы системы.

Аксиомы I и II групп не позволяют доказать, что каждая прямая содержит по крайней мере три точки. Действительно, рассмотрим такой пример (модель):

E — бесконечное или конечное множество, содержащее по крайней мере два элемента;

отображение ρ определено законом: $\rho(A, B) = \begin{cases} 0, & \text{если } A = B, \\ 1, & \text{если } A \neq B; \end{cases}$

прямая $(AB) = \{A, B\}$, где $A \neq B$.

Здесь аксиомы I группы и аксиомы II_1, II_2, очевидно, выполняются. Покажем, что выполняется и аксиома II_3: $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Если $\rho(A, C) = 0$, т. е. $A = C$, то это неравенство выполняется, ибо в его правой части каждое слагаемое либо 0, либо 1. Если $\rho(A, C) = 1$, т. е. $A \neq C$, то доказываемое неравенство будет ложным только в том случае, когда каждое слагаемое в его правой части равно нулю. Но тогда $A = B$, $B = C$ и, значит, $A = C$, что противоречит условию.

Аксиома III_1: *Любая точка O прямой p разбивает множество $p \setminus \{O\}$ на два непустых множества так, что:*

а) *для любых двух точек A и B, принадлежащих разным множествам, точка O лежит между точками A и B;*

б) *если точки A и B принадлежат одному и тому же множеству, то одна из них лежит между другой точкой и точкой O.*

Эта аксиома постулирует существование на каждой прямой по крайней мере трех точек. Кроме того, она позволяет ввести понятие «луча» и описывает его свойства. Сверх того, эта аксиома обеспечивает бесконечность (но только лишь счетность!) множества точек любой прямой.

Чтобы убедиться в этом, докажем предварительно два вспомогательных предложения.

Лемма 1. *Из трех различных точек не более одной лежит между двумя другими.*

Доказательство. Предположим, например, что $\mu(ABC)$ и $\mu(BAC)$. Тогда

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C),$$
$$\rho(B, A) + \rho(A, C) = \rho(B, C).$$

Складывая эти равенства и учитывая аксиому II_2, получим $\rho(A, B) = 0$, откуда по аксиоме II_1 $A = B$, что противоречит условию.

Лемма 2. *Если точки A, B, C лежат на одной прямой p и B лежит между A и C, то B и C принадлежат одному и тому же лучу с началом A.*

Доказательство. По аксиоме III_1 точка A определяет разбиение множества $p \setminus \{A\}$ на два открытых луча. Предположим, что точки B и C принадлежат разным лучам с началом A. Тогда по аксиоме III_1 $\mu(BAC)$, что противоречит условию $\mu(ABC)$ в силу леммы 1.

Теорема 1. *Всякая прямая p содержит по крайнем мере счетное множество точек.*

Доказательство. По аксиоме I_3 $\exists O \in p$. По аксиоме III_1 точка O определяет разбиение множества $p\setminus\{O\}$ на два открытых луча:

$$p\setminus\{O\} = p'_O \cup p''_O, \quad p'_O \neq \varnothing, \quad p''_O \neq \varnothing, \quad p'_O \cap p''_O = \varnothing.$$

Поэтому $\exists A_1 \in p'_O$ $(A_1 \neq O)$. Точка A_1 определяет разбиение множества $p\setminus\{A_1\}$ на два открытых луча: p'_{A_1} и p''_{A_1}. Пусть $O \in p''_{A_1}$. Тогда $\exists A_2 \in p'_{A_1}$ и $A_2 \neq A_1$, $A_2 \neq O$. Так как $O \in p''_{A_1}$, $A_2 \in p'_{A_1}$, то $\mu(OA_1A_2)$, а значит, $\mu(A_2A_1O)$, и по лемме 2 точки O, A_1 принадлежат одному лучу с началом A_2.

Пусть O, $A_1 \in p''_{A_2}$. Тогда $\exists A_3 \in p'_{A_2}$ и $A_3 \neq A_2$, $A_3 \neq A_1$, $A_3 \neq O$ и т. д.

Равномощность множества точек прямой и множества действительных чисел доказать на основе аксиом I и II групп и аксиомы III_1 нельзя. Это вытекает из следующего примера:

$E = \boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел;

отображение ρ определено законом $\rho(A, B) = |A - B|$;

«прямая» $= \boldsymbol{Q}$ (т. е. E содержит единственную прямую). Здесь аксиомы I группы, II_1, II_2, III_1, очевидно, выполняются. Выполняется и аксиома II_3:

$$|A - C| = |(A - B) + (B - C)| \leqslant |A - B| + |B - C|.$$

Значит, множество точек «прямой» разве лишь счетно.

Несчетность множества точек любой прямой постулируется аксиомой III_2.

Аксиома III_2. *Для любого расстояния a на заданном луче с началом O существует одна и только одна точка A, расстояние которой от точки O равно a.*

В аксиоматике Колмогорова эта аксиома играет роль аксиомы непрерывности.

Аксиомы I, II групп, III_1, III_2 не позволяют доказать существование точек, не лежащих на одной прямой. Это следует из предыдущего примера, если в нем вместо $\boldsymbol{Q}$ взять $\boldsymbol{R}$. Этот «дефект» построенной структуры восполняется аксиомой III_4.

Аксиома III_4. *Любая прямая p разбивает множество $E \setminus p$ на два непустых множества так, что:*

а) *любые две точки, принадлежащие разным множествам, разделены прямой p;*

б) *любые две точки, принадлежащие одному и тому же множеству, не разделены прямой p.*

При этом говорят, что точки A и B разделены прямой p, если $A \neq B$, $A, B \notin p$ и $[AB] \cap p \neq \varnothing$. Этой аксиомой вводится понятие «полуплоскости» и описываются ее свойства.

Теорема 2. *Предложение III_3 «Если точка C лежит между точками A и B, то точки A, B, C принадлежат одной прямой» является следствием аксиом* I, II *групп*, III_1, III_4.

Доказательство. Обозначим $(AB) = p$. Надо доказать: $\mu(ACB) \Rightarrow C \in p$. По аксиоме III_1 точка A разбивает множество $p \setminus \{A\}$ на два открытых луча: p'_A и p''_A. Пусть $B \in p'_A$. Тогда $\exists M \in p''_A$ и $\mu(MAB)$. Точки $M, A, B \in p$, поэтому по лемме 2 точки A, B принадлежат одному открытому лучу с началом M.

Пусть $A, B \in p'_M$. Тогда $\exists N \in p''_M$ и

$$\mu(AMN), \ \mu(BMN), \qquad (1)$$

причем точки A, B, M, N все различные.

Предположим, что $C \notin p$. Тогда $C \neq M$ (ибо $M \in p$) и по аксиоме I_2 $\exists (MC) = d$.

Если d проходит через точку A, то d содержит точки A, M, C и, значит, $C \in (AM) = p$, что противоречит предположению. К аналогичному выводу придем в предположении, что d проходит через точку B или точку N.

Пусть d не проходит ни через одну из точек A, B, N. Тогда из условия теоремы $\mu(ACB)$ следует, что точки A и B разделены прямой d и поэтому A и B принадлежат разным открытым полуплоскостям с границей d.

Учитывая (1), аналогично заключаем, что как точки A и N, так и точки B и N принадлежат разным открытым полуплоскостям с границей d. Последние три заключения, очевидно, несовместны.

Таким образом, предложение III_3 может быть доказано. Оно включено в состав аксиом для упрощения построения начал теории. Это предложение вместе с очевидным следствием аксиомы III_1: «Из трех различных точек, лежащих на одной прямой, одна лежит между двумя другими», позволяет сформулировать критерий принадлежности трех точек одной прямой: *Три различные точки принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда одна из них лежит между двумя другими.*

Метрическое пространство может обладать высокой «степенью подвижности». Так, в метрическом пространстве E с метрикой

$$\rho \mid \rho(A, B) = \begin{cases} 0, \text{ если } A = B, \\ 1, \text{ если } A \neq B, \end{cases}$$

всякое преобразование множества E переводит различные точки в различные и поэтому сохраняет расстояния, т. е. является перемещением. И если при этом E — бесконечное множество, то существует бесконечное множество перемещений, переводящих две заданные точки $A \neq B$ в две заданные точки $A_1 \neq B_1$ соответственно. Аксиомы III группы лишают метрическое пространство такой «излишней» подвижности. Имеет место теорема 3.

Теорема 3. *Если $\rho(A, B) = \rho(A_1, B_1) > 0$, то существует не более двух перемещений, каждое из которых переводит A в A_1 и B в B_1.*

Мы ограничимся схемой доказательства этого предложения. Пусть существует перемещение, переводящее A в A_1 и B в B_1 соответственно. Возьмем точку $C \notin (AB)$. Этим перемещением она переводится в точку, не лежащую на прямой (A_1B_1) и удаленную от точки A_1 на расстояние $\rho(A, C)$ и от точки B_1 на расстояние $\rho(B, C)$. Но в каждой из двух полуплоскостей с границей (A_1B_1) существует не более одной точки, удаленной от A_1 и B_1 на заданные расстояния.

Тремя точками общего положения и их образами перемещение плоскости определяется однозначно. Поэтому существует не более двух перемещений, переводящих A в A_1 и B в B_1.

Доказательства вспомогательных предложений, которыми мы здесь пользовались, можно найти в пособиях [11], [25].

Опираясь на те же предложения, нетрудно доказать, что имеет место следующее утверждение:

Теорема 4. *Если $\rho(A, B) = \rho(A_1, B_1)$ и существуют два (различных) перемещения, переводящих A в A_1 и B в B_1, то эти перемещения переводят полуплоскость, ограниченную прямой (AB), в две различные полуплоскости, ограниченные прямой (A_1B_1).*

Однако существование двух таких перемещений на основе предыдущих аксиом доказать нельзя, и это предложение постулируется (в избыточном виде) аксиомой IV подвижности плоскости.

Аксиома IV. *Если $\rho(A, B) = \rho(A_1, B_1) > 0$, то существуют два и только два перемещения, каждое из которых переводит точку A*

в точку A_1 и точку B в точку B_1. Если α — полуплоскость, ограниченная прямой (AB), то она этими двумя перемещениями отображается на две различные полуплоскости α_1 и β_1, ограниченные прямой (A_1B_1).

Рассмотренных четырех групп аксиом все еще недостаточно для того, чтобы E стало евклидовой плоскостью: этим аксиомам удовлетворяет и плоскость Лобачевского. Поэтому приходится вводить аксиому параллельных Евклида.

Аксиома V. *Существует не более одной прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.*

Структура, полученная указанным путем из структуры метрического пространства, есть структура евклидовой плоскости. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать эквивалентность системы аксиом Колмогорова и системы аксиом Вейля для плоскости.

2. Связь аксиоматик Вейля и Колмогорова. В § 1 показано, что в теории Вейля выполняются все предложения системы аксиом Колмогорова. Остается доказать обратное, но это почти полностью сделано в школьных учебниках [19], [20], [21].

В теории Колмогорова вектор определяют как параллельный перенос. Композицию параллельных переносов называют их *суммой* и записывают в аддитивной форме. При этом роль нулевого вектора выполняет тождественное преобразование, а роль вектора, противоположного к данному, — параллельный перенос, обратный данному. В результате аксиомы Вейля оказываются выполненными. Доказывая свойства сложения векторов, тем самым доказывают выполнимость соответствующих аксиом векторного пространства.

Далее известным определением вводят операцию умножения вектора на число и, по существу, доказывают выполнимость соответствующих аксиом векторного пространства с одной лишь «погрешностью». Так как эти доказательства проводят в VII классе, то ограничиваются доказательством закона дистрибутивности

$$r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b} \tag{1}$$

лишь для рациональных чисел r. Докажем, что он имеет место для любого действительного числа α.

Если $\vec{a}=\vec{0}$, то доказываемое равенство очевидно выполняется. Пусть $\vec{a}\neq\vec{0}$. Рассмотрим вектор $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}-\alpha(\vec{a}+\vec{b})$. Нужно доказать, что $\vec{c}=\vec{0}$. Так как равенство (1) имеет место, то $r\vec{a}+r\vec{b}-r(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}$, и можно записать: $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}-\alpha(\vec{a}+\vec{b})-r\vec{a}-r\vec{b}+r(\vec{a}+\vec{b})=(\alpha-r)\vec{a}+(\alpha-r)\vec{b}-(\alpha-r)(\vec{a}+\vec{b})$. Здесь мы воспользовались доказанным ранее законом $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$, где α, β — любые действительные числа. Далее находим

$$|\vec{c}| = |(\alpha-r)\vec{a}+(\alpha-r)\vec{b}-(\alpha-r)(\vec{a}+\vec{b})| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha-r|\cdot|\vec{a}|+|\alpha-r|\cdot|\vec{b}|+|\alpha-r|\cdot|\vec{a}+\vec{b}| =$$
$$= |\alpha-r|\cdot(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}|).$$

Если теперь задать произвольное число $\varepsilon > 0$, то, взяв r такое, что $|\alpha - r| < \varepsilon (|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}|)^{-1}$, получим $|\vec{c}| < \varepsilon$. Так как ε — любое положительное число, то $|\vec{c}| = 0$ и, значит, $\vec{c} = \vec{0}$.

Доказательством признака коллинеарности двух векторов и теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам фиксируется размерность векторного пространства, образованного параллельными переносами плоскости.

Наконец, введением скалярного произведения и доказательством его свойств завершается доказательство того, что пространство переносов плоскости является двумерным ѐвклидовым векторным пространством.

Остановимся на небольшой методической тонкости перехода от понятия параллельного переноса к понятию вектора. Вообще говоря, параллельные переносы векторами не являются. Они становятся векторами, как только на множестве параллельных переносов вводится должным образом определенная операция умножения переноса на число, ибо тогда на этом множестве определены две операции — сложение (композиция) и умножение на число, удовлетворяющие аксиомам векторного пространства.

Полученной новой структуре дают и новое название (см. переход от аффинного пространства к евклидову). В школьном курсе геометрии это выражается в переименовании «параллельного переноса» в «вектор».

Преждевременное переименование, а тем более отождествление этих понятий является логически не обоснованным.

Строго дедуктивное развитие теории, основанной на системе аксиом Колмогорова, является непростым делом. С доказательством некоторых предложений этой теории мы познакомились выше. Развитая и достаточно далеко продвинутая теория имеется в пособиях [9], [16]. Этот материал полезен для учителя, для анализа методических достоинств и недостатков этой теории, но не может быть предметом изучения в школе.

В этих пособиях теория развивается не только на основе системы аксиом Колмогорова, но и в предположении, что никаких других аксиоматик евклидова пространства и других методов доказательств мы не знаем. Между тем если нас интересует лишь принципиальный вопрос, как доказать то или иное предложение, то ничто не мешает нам воспользоваться векторным или координатным методом и вести доказательство «в смысле Вейля», не изобретая специфических доказательств, характерных для теории Колмогорова.

Собственно, такой подход обнаруживается в ряде мест учебника стереометрии [20], [21].

Простота перехода от любой аксиоматики евклидова пространства к вейлевской (с ее простой теорией) составляет важное методическое качество этой теории.

§ 3. ИЗМЕРЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

1. Общее определение величины. Измерение геометрических величин является одной из важнейших частей школьного курса геометрии, имеющей ясно выраженную прикладную направленность — к измерению геометрических и физических величин приводят в конечном счете почти все задачи естествознания. При измерении величин каждому объекту α из некоторого множества Ω сопоставляется некоторое значение $f(\alpha)$ положительной скалярной величины (отрезку сопоставляется его длина, плоской фигуре — ее площадь и т. д.). При этом выполняются некоторые естественные соотношения между измеряемыми объектами и результатами измерения. Чтобы аксиоматизировать эти соотношения, предположим, что в множестве измеряемых объектов Ω заданы отношение эквивалентности $\sim$ и частичная алгебраическая операция $\oplus$. Равенство $\alpha = \beta \oplus \gamma$ читается так: α состоит из β и γ.

Определение 1. Пусть в множестве Ω заданы $\sim$ и $\oplus$, а $(V_+; +)$ — положительная скалярная величина. Отображение f: $\Omega \to V_+$ называется *аддитивным*, если из $\alpha \sim \beta$ следует $f(\alpha) = f(\beta)$, а из $\alpha = \beta \oplus \gamma$ следует $f(\alpha) = f(\beta) + f(\gamma)$.

Определение 2. Множество Ω, в котором заданы $\sim$ и $\oplus$, называется *полем определения величины*, если существует аддитивное отображение Ω в V_+, однозначно определенное с точностью до постоянного множителя[1] (иными словами, если f и g — два аддитивных отображения Ω в V_+, то существует такое $\lambda > 0$, что $f(\alpha) = \lambda g(\alpha)$ для всех $\alpha \in \Omega$).

Будем обозначать область определения величины так: $(\Omega; \sim, \oplus)$. Назовем элементы α и β из Ω *равновеликими*, если $f(\alpha) = f(\beta)$ для любого аддитивного отображения Ω в V_+ (достаточно, чтобы это равенство выполнялось хотя бы для одного аддитивного отображения). Обозначим отношение равновеликости через $\approx$. Ясно, что из $\alpha \sim \beta$ следует $\alpha \approx \beta$ и что $\approx$ тоже является отношением эквивалентности в Ω (не обязательно совпадающим с первоначальным отношением $\sim$).

Чтобы выразить результат измерения числом, надо выбрать в Ω какой-нибудь элемент ε и назвать его единицей измерения данной величины. Тогда каждому $\alpha \in \Omega$ ставится в соответствие число $m > 0$, такое, что $f(\alpha) = mf(\varepsilon)$. Это число называют мерой α при единице измерения ε и обозначают $m_\varepsilon(\alpha)$. Из определения 2 вытекает, что значение $m_\varepsilon(\alpha)$ не зависит от выбора отображения f, а зависит лишь от α и ε. При этом очевидно, что из $\alpha = \beta \oplus \gamma$ следует равенство

$$m_\varepsilon(\alpha) = m_\varepsilon(\beta) + m_\varepsilon(\gamma). \tag{1}$$

(свойство *аддитивности* меры).

Для любых α, β из Ω имеем

$$m_\varepsilon(\alpha) = m_\varepsilon(\beta) \cdot m_\beta(\alpha) \tag{2}$$

(свойство *мультипликативности* меры). Равенство (2) показывает

[1] Здесь $\alpha \to \lambda\alpha$ — автоморфизм структуры $(V_+; +)$.

связь между операцией умножения положительных действительных чисел и переходом к новой единице измерения.

2. Непосредственное измерение величин. Пусть $\sim$ и $\oplus$ в Ω обладают следующими свойствами:

а) Если $\alpha = \beta \oplus \gamma$, то $\alpha = \gamma \oplus \beta$.

б) Если $\alpha = (\beta \oplus \gamma) \oplus \delta$, то существует элемент $\gamma \oplus \delta$, причем $\alpha = \beta \oplus (\gamma \oplus \delta)$.

в) Если $\alpha = \beta \oplus \gamma$, то α и β не эквивалентны друг другу.

г) Если $\alpha = \beta \oplus \gamma$ и $\alpha_1 = \beta_1 \oplus \gamma_1$, то из $\beta \sim \beta_1$ и $\gamma \sim \gamma_1$ следует, что $\alpha \sim \alpha_1$.

д) Если $\alpha \sim \alpha_1$, $\alpha = \beta \oplus \gamma$, то в Ω существуют такие β_1 и γ_1, что $\beta_1 \sim \beta$, $\gamma_1 \sim \gamma$, причем $\alpha_1 = \beta_1 \oplus \gamma_1$.

В этом случае можно говорить о разложении элемента на произвольное число составляющих, т. е. $\alpha = \beta_1 \oplus \ldots \oplus \beta_n$.

Назовем элементы α и β из Ω *равносоставленными*, если в Ω существуют такие элементы α_k и β_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, что $\alpha = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n$, $\beta = \beta_1 \oplus \ldots \oplus \beta_n$, причем $\alpha_k \approx \beta_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Из ассоциативности сложения в V_+ следует, что

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k), \quad f(\beta) = \sum_{k=1}^{n} f(\beta_k).$$

Поскольку для всех k имеем $\alpha_k \sim \beta_k$, то $f(\alpha_k) = f(\beta_k)$ и потому $f(\alpha) = f(\beta)$.

Итак, *равносоставленные элементы в Ω равновелики*. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Если все n составляющих элемента α эквивалентны друг другу, их называют *n-ми долями элемента α*. Из условий а)—д) легко выводится, что *при $m \neq n$ m-я доля элемента α не эквивалентна его n-й доле*. Кроме того, ясно, что *m-я доля от n-й доли элемента α является mn-й долей α*.

Назовем элемент ε *безгранично делимым*, если существует последовательность разбиений этого элемента на $n_1 < n_2 < \ldots < n_n < \ldots$ долей соответственно, такая, что каждое следующее разбиение является подразбиением предыдущего. Элемент $\alpha \in \Omega$ назовем *соизмеримым* с ε, если можно указать такое n, что при $k \geqslant n$ существует разбиение α на доли, эквивалентные n_k-м долям ε, причем каждое следующее разбиение является подразбиением предыдущего. Обозначим число этих долей через P_k. Ясно, что $\frac{P_k}{n_k} = \frac{P_i}{n_i}$ при $n \leqslant i \leqslant k$ и потому дроби $\frac{P_k}{n_k}$, $k \geqslant n$ определяют некоторое положительное рациональное число r. Этим задается отображение $\alpha \to m(\alpha) = r \in Q_+$.

Обозначим через Ω' подмножество всех элементов из Ω, соизмеримых с ε. Легко показать, что отображение m: $\Omega' \to Q_+$ обладает свойствами, указанными в определении 2, причем является единственным таким отображением, при котором $m(\varepsilon) = 1$. Этим определяется мера на совокупности Ω'. Измерение величин по указанной схеме назовем *непосредственным измерением*.

3. Измерение объемов в R^k. Начиная отсюда, будем считать, что Ω состоит из геометрических фигур в k-мерном координатном пространстве R^k. При этом будем рассматривать лишь фигуры, являющиеся замыканиями своих открытых ядер (такие, как круг или квадрат на плоскости, шар или куб в трехмерном пространстве и т. д.). Для таких фигур отношение $\alpha \sim \beta$ означает, что одна фигура получается из другой параллельным переносом, а $\alpha = \beta \oplus \gamma$ — что $\alpha = \beta \cup \gamma$, причем $\beta \cap \gamma$ не содержит внутренних точек. Тогда, очевидно, выполнены условия а) — д) п. 2. Выберем в качестве ε единичный куб и рассмотрим последовательность его разбиений на 10^k, 10^{2k}, ..., 10^{nk}, ... частей. Тогда все прямоугольные параллелепипеды в R^k, у которых длины сторон выражаются десятично-рациональными числами, а сами стороны параллельны осям, соизмеримы с ε. Мы опускаем тривиальное доказательство того, что при этом мера такого параллелепипеда будет равна произведению длин его измерений.

Соизмеримыми с ε будут те и только те фигуры, которые можно разбить на конечное число таких параллелепипедов, никакие два из которых не имеют общей внутренней точки (не налегают друг на друга). Ясно, что мера такой фигуры равна сумме мер прямоугольных параллелепипедов, из которых она состоит, причем эта сумма не зависит от способа разбиения фигуры на части.

Распространим теперь отображение m: $\Omega' \to Q_+ \subset R_+$ на более широкую совокупность фигур. Поставим каждой фигуре α в R^k в соответствие два числовых множества:

$$X_\alpha = \{m(\beta) \mid \beta \in \Omega' \wedge \beta \subset \alpha\}, \quad Y_\alpha = \{m(\gamma) \mid \gamma \in \Omega' \wedge \alpha \subset \gamma\}.$$

Ясно, что если $a \in X_\alpha$, $b \in Y_\alpha$, то $a \leqslant b$ и потому X_α лежат слева от Y_α. Но тогда есть хотя бы одно число, разделяющее эти множества. Если такое число единственно, то фигуру α называют *измеримой по Жордану*, а разделяющее число обозначают $m(\alpha)$ и называют *мерой Жордана* фигуры α.

Из общего условия единственности разделяющего числа (см. теорему 3 п. 1 § 5) главы IV или [18]) получаем необходимое и достаточное условие измеримости по Жордану.

Для любого $d > 0$ найдутся фигуры β и γ из Ω', такие, что $\beta \subset \alpha \subset \gamma$, причем $m(\gamma) - m(\beta) < d$.

Легко видеть, что если $k = 1$ и α — отрезок, то $m(\alpha)$ является длиной этого отрезка, причем $m(\alpha) = |b - a|$, где a и b — координаты концов отрезка α.

Покажем, что в случае $k \geqslant 2$ отображение m: $\widetilde{\Omega} \to R_+$ совокупности Ω измеримых по Жордану фигур обладает свойствами, указанными в определении 2. Сначала докажем, что мера любого параллелепипеда α, стороны которого параллельны осям координат, равна произведению длин его сторон. В самом деле, пусть эти длины равны $l_1, l_2, \ldots, l_k$; их десятичные приближения по недостатку — числам $\widetilde{l_1^n}, \widetilde{l_2^n}, \ldots$ ..., $\widetilde{l_k^n}$, $n \in N$, а десятичные приближения по избытку — числам

$l_1^n, l_2^n, \ldots, l_k^n$. Тогда и $l_1 \cdot l_2 \cdot \ldots \cdot l_k$ и $m(\alpha)$ разделяют числовые множества $\{\widetilde{l_1^n} \cdot \widetilde{l_2^n} \cdot \ldots \cdot \widetilde{l_k^n} | n \in N\}$ и $\{l_1^n \cdot l_2^n \cdot \ldots \cdot l_k^n | n \in \boldsymbol{N}\}$, а эти множества разделяются лишь одним числом.

Отсюда вытекает, что мера ступенчатой фигуры, т. е. фигуры, разложимой на прямоугольные параллелепипеды со сторонами, параллельными осям координат, равна сумме мер составляющих ее параллелепипедов.

Если фигура β получается из α параллельным переносом, то $X_\alpha = X_\beta$, $Y_\alpha = Y_\beta$, а потому $m(\alpha) = m(\beta)$.

Теперь докажем, что *если* $\alpha = \beta \oplus \gamma$, *причем* β *и* γ *измеримы по Жордану, то и* α *измерима по Жордану, причем* $m(\alpha) = m(\beta) + m(\gamma)$.

В самом деле, зададим $d > 0$. Найдутся такие ступенчатые фигуры $\beta_1, \beta_2, \gamma_1$ и γ_2, что $\beta_1 \subset \beta \subset \beta_2, \gamma_1 \subset \gamma \subset \gamma_2$, причем $m(\beta_2) - m(\beta_1) < \frac{d}{2}$, $m(\gamma_2) - m(\gamma_1) < \frac{d}{2}$. Легко видеть, что $\alpha_1 = \beta_1 \cup \gamma_1$ и $\alpha_2 = \beta_2 \cup \gamma_2$ тоже будут ступенчатыми фигурами, причем $m(\alpha_1) = m(\beta_1) + m(\gamma_1)$, $m(\alpha_2) \leqslant m(\beta_2) + m(\gamma_2)$, и потому $m(\alpha_2) - m(\alpha_1) < d$. При этом $\alpha_1 \subset \alpha \subset \alpha_2$. Отсюда вытекает, что α измеримо по Жордану. При этом как $m(\beta) + m(\gamma)$, так и $m(\alpha)$ разделяют одни и те же множества $\{m(\beta_1) + m(\gamma_1)\}$ и $\{m(\beta_2) + m(\gamma_2)\}$, где $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2$ — ступенчатые фигуры, такие, что $\beta_1 \subset \beta \subset \beta_2$, $\gamma_1 \subset \gamma \subset \gamma_2$. Так как эти множества разделяются лишь одним числом, то $m(\alpha) = m(\beta) + m(\gamma)$.

Очевидно, что мера единичного куба ε равна 1. Значит, мера Жордана обладает следующими свойствами:

а) *Если фигура* α *имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то* $m(\alpha) > 0$ (*положительность*).

б) *Если фигура* β *получается из фигуры* α *параллельным переносом, то* $m(\beta) = m(\alpha)$ (*T-инвариантность*).

в) *Если фигура* α *состоит из фигур* β *и* γ, *то* $m(\alpha) = m(\beta) + m(\gamma)$ (*аддитивность*).

г) *Мера единичного куба равна* 1, $m(\varepsilon) = 1$ (*нормированность*).

Поскольку для ступенчатых фигур эти четыре условия однозначно определяют меру, а мера любой измеримой по Жордану фигуры однозначно определяется заданием мер ступенчатых фигур, то свойства положительности, T-инвариантности, аддитивности и нормированности однозначно определяют понятие меры в $\boldsymbol{R}^k$.

Обозначение «T-инвариантность» обозначает инвариантность относительно параллельных переносов (трансляций). Но мера в $\boldsymbol{R}^k$ обладает и более сильным свойством: она инвариантна относительно любых перемещений. Иными словами, она обладает следующим свойством:

Если фигуры α *и* β *конгруэнтны, то* $m(\alpha) = m(\beta)$.

Прежде чем доказывать это свойство, отметим, что любая фигура, ограниченная конечным числом гиперповерхностей вида $x_i = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k)$ в $\boldsymbol{R}^k$, измерима по Жордану (это легко вытекает из необходимого и достаточного условия измеримости по

Жордану). Поэтому, в частности, измеримы по Жордану все прямоугольные параллелепипеды в R^k независимо от того, как направлены их стороны.

Как известно, любое перемещение в R^k является композицией конечного числа симметрий относительно гиперплоскостей. Но при любой такой симметрии параллелепипед, одна из граней которого параллельна этой гиперплоскости, переходит в параллелепипед, который можно получить из него и с помощью параллельного переноса. Значит, указанная симметрия не изменяет меру параллелепипеда. Но любую измеримую по Жордану фигуру можно с любой степенью точности аппроксимировать изнутри и извне ступенчатыми фигурами, состоящими из параллелепипедов указанного вида. Поскольку мера каждого из них не изменяется при симметрии, то не меняется мера и аппроксимирующих ступенчатых тел, а тем самым и мера всей фигуры. Утверждение доказано.

4. Длина кривой. В курсе математического анализа понятие длины кривой вводится обычно двумя способами: либо как предел длин вписанных в эту кривую ломаных при условии, что наибольший из диаметров дуг разбиения стремится к нулю, либо как точную верхнюю грань этих длин. Доказывается, что оба определения дают один и тот же результат (см. [6] т. V).

Однако для гладких кривых можно рассматривать не только вписанные, но и описанные ломаные, и возникает вопрос, эквивалентно ли соответствующее определение обычно даваемым. Наряду с этими определениями возможны и иные. Обозначим через O_d (Г) множество точек, удаленных хотя бы от одной точки кривой Г меньше чем на d (рис. 12).

Очевидно, что площадь O_d (Г) примерно равна $2d \cdot l$ (Г), где l (Г) — длина этой кривой Г, причем это равенство тем точнее, чем меньше ширина полоски (рис. 12). При соответствующем уточнении это замечание также ведет к определению длины кривой как предела $\lim\limits_{d\to 0}\frac{S(d)}{2d}$, где $S(d)$ — площадь O_d (Г). Существует и определение длины кривой, связанное с «растяжениями», т. е. отображениями данной кривой, не уменьшающими расстояний между точками.

Когда для одного и того же объекта появляется слишком много конструктивных определений, естественно попытаться выявить свойства соответствующего понятия, лежащие в основе всех этих определений, т. е. попытаться дать аксиоматическое определение понятия. Мы укажем в этом пункте аксиоматику понятия длины кривой. Сначала определим, что такое кривая линия.

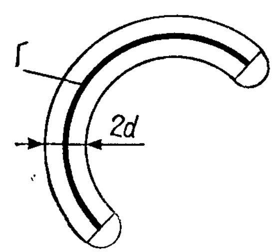

Рис. 12

Пусть дан отрезок $\alpha = [a;\ b]$ и отображение $f : t \to M(t)$ этого отрезка в множество точек плоскости. Если это отображение гомеоморфно, то образ Г отрезка α называется простой дугой. Образы точек a и b называются концами A и B этой дуги.

Мы определим сначала понятие длины

для некоторых простых дуг, а потом распространим его на более широкий класс линий.

Определение 1. Инъективное отображение f простой дуги Γ_1 в простую дугу Γ_2 назовем *растяжением*, если, во-первых, оно сохраняет порядок точек на дуге, а во-вторых, таково, что для любых двух точек M и N дуги Γ_1 имеем $|MN| \leqslant |M'N'|$, где $M' = f(M)$, $N' = f(N)$.

Интуитивно ясно, что растяжение увеличивает длину линии.

Обозначим через Ω совокупность всех простых дуг, которые можно растянуть на отрезок конечной длины. К Ω принадлежат, в частности, все ломаные линии, состоящие из конечного числа отрезков. Мы покажем сейчас, что существует одно и только одно отображение $l: \Omega \to \boldsymbol{R}_+$, обладающее свойствами положительности, инвариантности, аддитивности, нормированности и удовлетворяющие условию:

(*) Если существует растяжение простой дуги Γ_1 в простую дугу Γ_2, то $l(\Gamma_1) \leqslant l(\Gamma_2)$.

Образ дуги Γ при этом отображении обозначим $l(\Gamma)$ и назовем длиной дуги.

5. Существование длины кривой. Пусть Γ — простая дуга, являющаяся образом отрезка $[a; b]$. Тогда любому разбиению $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ этого отрезка соответствует разбиение дуги Γ на части точками $M_0, M_1, \ldots, M_n$, где M_k — образ t_k. Соединив по порядку эти точки, получим *ломаную* γ, *вписанную в дугу* Γ. Возможны два случая:

а) множество $\{l(\gamma)\}$ длин вписанных ломаных неограничено сверху;

б) это множество ограничено сверху.

В первом случае говорят, что длина дуги Γ равна бесконечности, $l(\Gamma) = +\infty$, а во втором — что дуга *спрямляема*, причем ее длиной называют точную верхнюю грань числового множества $\{l(\gamma)\}$: $l(\Gamma) = \sup\{l(\gamma_{\text{впис}})\}$.

Очевидно, что тем самым каждой спрямляемой простой дуге сопоставляется положительное число $l(\Gamma)$, причем конгруэнтным дугам соответствуют равные числа, т. е. выполнено условие инвариантности. Выполнение условия нормированности очевидно, а потому нам осталось доказать аддитивность длины и выполнение условия (*).

Пусть дуга Γ разбита на две спрямляемые дуги Γ_1 и Γ_2, имеющие общий конец C. Не теряя общности, можно считать, что C — одна из вершин рассматриваемых вписанных ломаных (присоединение добавочной вершины лишь увеличивает длину ломаной). Тогда любая ломаная γ, вписанная в Γ, является объединением ломаных γ_1 и γ_2, вписанных соответственно в дуги Γ_1 и Γ_2. Так как $l(\gamma_1) \leqslant l(\Gamma_1)$, $l(\gamma_2) \leqslant l(\Gamma_2)$, то $l(\gamma) \leqslant l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$ и потому $l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$ — одна из верхних граней для множества $\{l(\gamma_{\text{впис.}})\}$. Но для любого $d > 0$ найдутся ломаные γ_1 и γ_2, вписанные в Γ_1 и Γ_2 соответственно и такие, что $l(\gamma_1) > l(\Gamma_1) - \frac{d}{2}$, $l(\gamma_2) > l(\Gamma_2) - \frac{d}{2}$. Обозначим через γ объединение этих ломаных. Тогда имеем

$$l(\gamma)=l(\gamma_1)+l(\gamma_2)>l(\Gamma_1)-\frac{d}{2}+l(\Gamma_2)-\frac{d}{2}=l(\Gamma_1)+l(\Gamma_2)-d.$$

Это означает, что $l(\Gamma_1)+l(\Gamma_2)$ — точная верхняя грань для $\{l(\gamma_{\text{впис.}})\}$, а потому дуга Γ спрямляема, причем $l(\Gamma)=l(\Gamma_1)+l(\Gamma_2)$. Аддитивность длины доказана.

Перейдем к доказательству того, что выполнено условие (*). Пусть $f: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ — растяжение и пусть γ_1 — ломаная, вписанная в дугу Γ_1. Обозначим через $A_0, A_1, \ldots, A_n$ вершины этой ломаной и положим $B_k = f(A_k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда точки $B_0, B_1, \ldots, B_n$ являются вершинами ломаной γ_2, вписанной в Γ_2. При этом для любого k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ имеем $l(A_kA_{k+1}) \leqslant l(B_kB_{k+1})$, и поэтому $l(\gamma_1) \leqslant l(\gamma_2)$. Таким образом, для любой ломаной, вписанной в Γ_1, найдется вписанная в Γ_2 ломаная не меньшей длины, а потому $l(\Gamma_1) \leqslant l(\Gamma_2)$. Выполнение условия (*), а тем самым существование длины доказано.

6. Единственность длины. Покажем теперь, что условия инвариантности, аддитивности, нормированности вместе с условием (*) однозначно определяют длину дуги, если потребовать еще, чтобы все спрямляемые дуги имели конечную длину (без последнего условия можно было бы приписать бесконечную длину любой дуге, содержащей криволинейный участок). В самом деле, пусть $\lambda: \Omega \to \boldsymbol{R}_+$ — отображение множества Ω спрямляемых линий в $\boldsymbol{R}_+$, удовлетворяющее указанным условиям. Мы хотим доказать, что для всех спрямляемых линий $\lambda(\Gamma)=l(\Gamma)$, где $l(\Gamma)$ — определенная в п. 5 длина линий Γ. Разобьем доказательство этого утверждения на несколько лемм.

Лемма 1. *Для всех ломаных γ выполняется равенство $\lambda(\gamma)=l(\gamma)$.* Это утверждение непосредственно вытекает из условий инвариантности, аддитивности и нормированности отображения λ.

Лемма 2. *Для всех спрямляемых кривых выполняется неравенство $\lambda(\Gamma) \leqslant l(\Gamma)$.*

Доказательство. Если дуга Γ спрямляема, то поставим в соответствие каждой точке M линии $\Gamma = \smile AB$ длину дуги AM: $M \to l(\smile AM)$. Этим определяется отображение φ дуги Γ на отрезок $[0;\ l(\Gamma)]$. Оно является растяжением. В самом деле, если M_1 и M_2 — две точки дуги Γ, то расстояние между точками $\varphi(M_1)$ и $\varphi(M_2)$ отрезка $[0;\ l(\Gamma)]$ равно длине дуги M_1M_2, а расстояние между M_1 и M_2 — длине хорды M_1M_2. Поэтому

$$|M_1M_2| \leqslant |\varphi(M_1)\varphi(M_2)|.$$

Поскольку отображение φ является растяжением Γ на $\Delta = [0;\ l(\Gamma)]$, то по условию (*) имеем $\lambda(\Gamma) \leqslant \lambda(\Delta)$. Но $\lambda(\Delta)=l(\Gamma)$, и потому $\lambda(\Gamma) \leqslant l(\Gamma)$.

Лемма 3. *Для любой дуги $\Gamma = \smile AB$ выполняется неравенство $|AB| \leqslant \lambda(\Gamma)$.*

Доказательство. Покажем, что хорду AB можно растянуть на дугу Γ. Для этого восстановим в каждой точке N этой хорды перпендикуляр к ней. В силу непрерывности линии Γ этот перпендикуляр пересекается с ней в одной или нескольких точках.

Поставим в соответствие точке N ту точку пересечения, которая на кривой ближе всех к точке A.

Очевидно, что построенное отображение хорды AB в стягиваемую ею дугу Г сохраняет порядок точек и что оно является растяжением. Поэтому $|AB| = \lambda([AB]) \leqslant \lambda(\Gamma)$.

Лемма 4. *Для любой кривой* Г *выполняется неравенство* $l(\Gamma) \leqslant \lambda(\Gamma)$.

Доказательство. Впишем в линию Г любую ломаную γ. Пусть ее вершинами являются точки $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Для каждой хорды A_kA_{k+1} имеем по лемме 3 $|A_kA_{k+1}| \leqslant \lambda(\smile A_k A_{k+1})$. Поэтому

$$l(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} |A_kA_{k+1}| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\smile A_kA_{k+1}) = \lambda(\Gamma).$$

Таким образом, число $\lambda(\Gamma)$ является одной из верхних граней для длин ломаных, вписанных в Г. Значит, $l(\Gamma) \leqslant \lambda(\Gamma)$.

Из лемм 2 и 4 следует, что $\lambda(\Gamma) = l(\Gamma)$.

7. Полунепрерывность снизу длины дуги. Будем говорить, что простая дуга Γ_1 *d-близка* простой дуге Г, если концы дуги Γ_1 отстоят от соответствующих концов дуги Г меньше чем на d, причем $\Gamma_1 \subset O_d(\Gamma)$. Наглядно очевидно, что при достаточно малом d всякая дуга, которая d-близка дуге Г, повторяет ее извивы и потому ее длина не может быть много меньше, чем длина Г. Иными словами, можно предположить, что справедлива следующая теорема:

Теорема. *Пусть* Г *— спрямляемая простая дуга и* $d > 0$. *Тогда найдется такое* $d_1 > 0$, *что всякая простая дуга* Г, d_1*-близкая к* Г, *имеет длину, большую, чем* $l(\Gamma) - d$.

Читатель найдет доказательство этой теоремы в «Энциклопедии элементарной математики», (см. [6], т. V). Это свойство называется полунепрерывностью длины снизу.

Можно доказать, что всякое отображение множества Ω спрямляемых линий в $\boldsymbol{R}_+$, обладающее свойствами инвариантности, аддитивности, нормированности и полунепрерывности снизу, имеет вид $\Gamma \to l(\Gamma)$, где $l(\Gamma)$ — определенная в п. 5 длина дуги.

8. Площадь поверхности. Понятие площади поверхности является еще более сложным, чем понятие длины кривой. Известный пример «гармошки Шварца» (см. [55] т. 1) показывает, что даже площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра нельзя определить как предел площадей вписанных многогранников,— эти многогранники могут быть сколь угодно близкими к данной поверхности, в то время как их площадь окажется сколь угодно большой. Дело в том, что на поверхности можно выбрать три близкие друг к другу точки так, что плоскость, проходящая через эти три точки, образует почти прямой угол с плоскостью, касающейся поверхности в одной из этих точек. Поэтому вписанная поверхность оказывается весьма «складчатой» и имеет большую площадь.

Понятие площади поверхности можно ввести несколькими различными способами. При этом мы ограничимся простыми кусками, т. е. гомеоморфными образами квадрата (к числу таких поверхностей относятся полусфера, боковая поверхность кругового конуса конечной высоты и т. д.). Образ границы квадрата называется *краем простого куска*. Можно доказать, что край простого куска будет одним и тем же при любых гомеоморфизмах квадрата на этот кусок.

Назовем простой кусок *гладким*, если в каждой точке к нему можно провести касательную поверхность, причем ее направление непрерывно зависит от точки касания.

Для гладких простых кусков площадь поверхности можно определить следующим образом. Назовем два таких куска *d-близкими*, если существует биективное отображение этих кусков друг на друга, такое, что расстояние любой пары соответствующих точек не превосходит d, равно как и угол между касательными плоскостями в этих точках, причем точкам края одного куска отвечают точки края другого куска. Аналогично определяется d-близость гладкого и многогранного простых кусков (в этом случае в точках многогранной поверхности, принадлежащих ребрам, берем любую из примыкающих к этому ребру граней).

Назовем число $S(\Omega)$ *площадью* гладкого простого куска Ω, если для любого $d > 0$ найдется такой многогранный простой кусок ω, d-близкий Ω, что $S(\omega) > S(\Omega) - d$, где $S(\omega)$ — площадь поверхности ω. Можно доказать, что при таком определении площадь поверхности обладает свойствами инвариантности, аддитивности, нормированности и полунепрерывности снизу.

Это определение площади наиболее близко к используемому в школьной математике, так как там обычно приближают кривые поверхности близкими к ним многогранными поверхностями (например, боковые поверхности цилиндра и конуса приближают боковыми поверхностями вписанных призм и пирамид). Но оно не годится для негладких поверхностей. Скажем, что простой кусок Ω является *слабо d-близким* к простому куску Ω, если:

а) *для любой точки $A \in \Omega$ найдется такая точка $A_1 \in \Omega_1$, что* $|AA_1| < d$;

б) *между краями этих кусков можно установить биективное соответствие, при котором соответствующие точки удалены друг от друга не более чем на d.*

Назовем простой кусок Ω *квадрируемым*, если существует такое число S, что для любого $d > 0$ найдется многогранный простой кусок ω, который слабо d-близок к Ω, причем $S(\omega) > S - d$. Точная нижняя грань множества таких чисел S и называется площадью поверхности Ω.

В заключение укажем, что требования положительности, инвариантности, аддитивности, нормированности и полунепрерывности снизу однозначно определяют понятие площади поверхности. Точно так же однозначно определяют это понятие требования положительности, инвариантности, аддитивности, нормированности и увеличения при растяжениях. Однако, в отличие от длины кривой, эти два понятия площади поверхности, вообще говоря, различны. Совпадение заведомо имеет место для гладких поверхностей и для поверхностей, задаваемых уравнением вида $z = f(x, y)$, где точка $M(x, y)$ принадлежит некоторой измеримой по Жордану плоской области.

Глава VI
ЯЗЫК ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1. ИМЯ, ЗНАЧЕНИЕ, СМЫСЛ

1. Имена. Школьная математика является сложным образованием, включающим начальные фрагменты различных математических теорий (арифметики, алгебры, геометрии, математического анализа) в содержательном (неформальном) изложении. Поэтому язык школьной математики является языком этих начальных фрагментов математических теорий. Прежде чем изучать связанные с ним вопросы, остановимся на некоторых общих понятиях, относящихся к языкам как естественным, так и искусственным, символическим.

Имя — это языковый объект, связываемый с предметом для обозначения его в речи. Именем мы называем примерно то, что в грамматике называют именем собственным ('Москва', 'Людмила', 'два'). Предмет является *носителем*, или *значением*, своего имени.

Слово «предмет» мы будем понимать в самом широком смысле. Это может быть как конкретный физический объект, так и абстрактный предмет из области математики (уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, треугольник ABC, производная показательной функции), а также любое понятие, свойство, отношение, процесс, событие или серия событий и т. д.

Имена предметов могут быть простыми и составными. *Простыми* называются имена, произвольно закрепляемые за предметами и рассматриваемые в качестве неделимых единиц ('Саша', 'сто', '5'). *Составными* называются имена, содержащие другие имена в качестве своих частей и обладающие строением, отражающим тот способ, которым они обозначают своего носителя ('14516', '$2 + 3$', 'автор «Анны Карениной»', 'центр окружности, вписанной в треугольник ABC').

Если рассматривают не сами предметы, а их имена, имя предмета заключают в одинарные кавычки. Например, пишут: «Слово 'Ваня' мужского рода» или «число '123' трехзначно» (само натуральное число существует независимо от способа его записи в той или иной системе счисления, поэтому трехзначно не само число, а лишь его имя, т. е. форма его записи). Такое употребление имени называют *цитированием*. Однако для простоты таких кавычек обычно не пишут, если из контекста ясно, идет ли речь о предмете или о его имени.

Одним из основных принципов употребления имен является п р и н ц и п п р е д м е т н о с т и:

Предложение говорит о предметах, имена которых встречаются в этом предложении (а не об их именах).

Один и тот же предмет может иметь много различных имен (синонимов). Например, записи $5 - 3$, $8 \cdot 2 - 14$, $(7 + 13) : 10$, $2^3 : 2^2$ можно рассматривать как различные имена числа 2 (после выполнения вычислений во всех случаях получается значение 2). Равенство $5 - 3 = (7 + 13) : 10$ выражает то, что имена, стоящие в левой и правой частях этого равенства, обозначают один и тот же предмет (число, имеющее имя 2).

В естественном языке слово 'коса' имеет три значения. В языке математики такое явление недопустимо. В нем должен выполняться следующий принцип однозначности:

Каждый символ, используемый в качестве имени, обозначает не более одного предмета.

Наряду с принципами предметности и однозначности при использовании имен постоянно используется еще один важный принцип замены имен:

Предложение не должно менять своего значения истинности, когда одно из входящих в него имен заменяется другим именем, имеющим то же самое значение.

Например, предложение «$3 > 7$» ложно. Оно остается ложным и при замене имени '7' на имя '$2 + 5$', имеющее то же значение: «$3 > 2 + 5$».

Приведем несколько примеров из школьной математики, показывающих важность различения предметов и их имен.

1. Результат деления числа 66 пополам равен 33, но при делении записи 66 пополам получаем цифру 6.

2. Утверждая, что число 1 нельзя делить на 0, мы не говорим, что невозможна запись $1 : 0$: такая запись столь же допустима, как, например, запись $1 : 2$. Утверждается лишь, что $1 : 0$ не является именем какого-либо числа.

3. Множество $A = \{1, 2, 1, 3, 1, 4\}$ состоит не из шести, а лишь из четырех элементов. Дело в том, что набор знаков $\{1,2, 1,3, 1,4\}$ является именем множества A, причем знаки не сами элементы множества, а лишь их имена. То же самое множество можно записать иначе: $\{1, 2, 3, 4\}$ или $\{3, 2, 1, 4\}$ — все это различные имена одного и того же множества.

2. Имя и смысл. Как уже отмечалось, один и тот же предмет может иметь различные имена. Эти имена по-разному характеризуют данный предмет. В силу принципа замены имен предложение, в которое входит одно из имен предмета, сохраняет свою истинность или ложность при замене этого имени другим. Однако смысл предложения при этом может измениться. Например, Лев Толстой и автор «Анны Карениной»— одно и то же лицо. Поэтому оба предложения «Лев Толстой написал «Анну Каренину»» и «Автор «Анны Карениной» написал «Анну Каренину»» истинны. Однако первое из них имеет определенную познавательную ценность, а второе никакой познавательной ценности не имеет. Таким образом, смысл имен 'Лев Толстой' и 'автор «Анны Карениной»' различен.

Чтобы отразить различие между содержаниями предложений, в которые входят различные имена одного и того же объекта, условились каждому имени сопоставлять, кроме его носителя, определенный *смысл*. Примерно говоря, смысл имени — это то, что бывает усвоено, когда понято имя. Вообще говоря, возможно понимать смысл имени, ничего не зная об его носителе (денотате), кроме того, что он определяется этим смыслом.

Примеры.

1. Смысл имени 'Английский король, правивший в 1525 году' совершенно ясен даже в случае, когда мы не знаем имени этого короля. Можно утверждать, например, что предложение «Английский король, правивший в 1525 году, короновался в Нью-Йорке», ложно (потому что в 1525 году города Нью-Йорка еще не существовало), а предложение «Английский король, правивший в 1525 году, был англичанином», по-видимому, истинно.

2. Смысл имени 'Наименьший из действительных корней уравнения $x^5 - 5x^3 + 1 = 0$' ясен, хотя мы и не знаем формулы для решения уравнения 5-й степени. Пользуясь смыслом этого имени, можно вычислить данный корень с любой степенью точности.

Возможность понимать смысл имени, не зная о его носителе ничего, кроме того, что он определяется этим смыслом, лежит в основе нашей способности узнавать новое с помощью языка. Раскрыв справочник, можно узнать, что число x, такое, что $x^3 = 2$, с точностью до 0,001 равно 1,260, и, найдя куб этого значения, выяснить, является ли оно приближением по недостатку или по избытку. Но сделать все это можно, лишь понимая смысл данных имен. Заметим, что одной из важнейших причин формализма в усвоении математики является попытка некоторых учащихся запомнить имена математических объектов, не понимая смысла данных имен.

Итак, в отношении именования участвуют три различных понятия: «имя», «значение», «смысл». Говорят, что имя *называет* свое значение и *выражает* свой смысл (или что оно имеет такое-то значение и такой-то смысл), а смысл *определяет* значение.

Из сказанного вытекает, что надо различать термины «не имеет смысла» и «не имеет значения». Например, в области натуральных чисел имя 'корень уравнения $x + 4 = 3$' не имеет значения. В то же время это имя имеет ясный смысл: это такое число, что после подстановки его вместо x в данное уравнение слева и справа от знака равенства получатся имена одного и того же числа. Точно так же в области действительных чисел имя $\sqrt{-4}$ не имеет значения, но имеет смысл (такое число, что после возведения его в квадрат получится число -4).

В школьном преподавании необходимо тщательно следить за тем, чтобы употребляемые термины имели определенные смысл и значение.

Заметим, что при расширении предметной области имя, имевшее только смысл, может приобрести и значение. Например, имя 'корень уравнения $x + 4 = 3$' получает значение -1 при расширении множества натуральных чисел до множества целых чисел.

3. **Предложение.** Имя называет предмет, однако оно не выражает суждения о нем. Этой цели служат предложения, т. е. построенные в соответствии с законами языка знакосочетания, выражающие законченную мысль.

Предложения можно рассматривать как особого рода имена, принимающие лишь два значения: «истина» и «ложь». При этом суждение, выражаемое предложением, играет роль смысла этого имени. В дальнейшем для сокращения записи мы обозначим значения «истина» и «ложь» цифрами 1 и 0 (1 — истина, 0 — ложь) и положим $B = \{0, 1\}$. Множество B будем называть *множеством истинностных значений*.

Таким образом, предложения '$2 + 2 = 4$' и '$3 + 9 = 12$' имеют разный смысл (они выражают разные суждения), но одно и то же значение («истина», или, что то же самое, 1), а предложения 'Лондон находится в Японии' и '$8 + 6 > 20$', тоже имеющие разный смысл, имеют одно и то же значение («ложь», или, что то же самое, 0).

Смысл предложения (т. е. выраженное в нем суждение) еще не несет нового знания. Этим свойством обладает только соединение суждения и его истинностного значения. Например, суждение 'Лондон находится в Японии' нового знания не несет. А соединение этого суждения с его значением «ложь» дает новое знание.

Смысл предложения называют его *суждением*. Мы будем говорить, что предложение *имеет* то или иное *истинностное значение* и *выражает* (или имеет) такое-то *суждение* (такой-то смысл). Об отношении между суждением и истинностным значением будем говорить, что *суждение определяет истинностное значение*.

Все сказанное выше о смысле имен относится, таким образом, к суждениям. В частности, одно и то же суждение может выражаться различными предложениями (иметь различные имена). Например, все следующие предложения выражают одно и то же суждение:

$$2 + 3 = 5.$$

Сумма чисел 2 и 3 равна 5.
Два плюс три равно пяти.
Two plus three equal five.

Смысл предложения можно понимать, не зная, истинно это предложение или ложно. Могут быть и предложения, имеющие смысл, но не имеющие истинностного значения.

Перечислим в применении к предложениям основные соглашения, сделанные выше относительно имен:

1) *Смысл предложения не меняется, если заменить одно из входящих в него имен другим, имеющим тот же, что и у заменяемого, смысл.*

2) *Истинность предложения не изменится, если заменить одно из входящих в него имен другим, имеющим то же, что и у заменяемого, значение.*

3) *Если предложение имеет значение, то оно имеет и смысл, причем смысл однозначно определяет значение.*

4) *Предложение не имеет значения, если хотя бы одно из встречающихся в нем имен не имеет значения.*

Примерами предложений являются числовые равенства и неравенства, например: $3 + 8 = 11$, $8 - 3 < 10$ и т. д. Они, как и любые предложения, могут быть истинными или ложными. Если хотя бы одно содержащееся в числовом равенстве или неравенстве «имя» (т. е. часть числового выражения) не имеет значения, равенство или неравенство не имеет истинностного значения. Например, не имеет смысла говорить, истинно ли равенство $\frac{1}{3-3} + 5 = 5$.

4. Константы и переменные. В математике символы, всегда обозначающие один и тот же предмет, называют *константами* (постоянными). Поэтому будем называть константами имена — каждое имя имеет согласно принципу однозначности одно значение. Например, константами являются имена '1', 'sin' (для обозначения функции), '$\boldsymbol{N}$' (для обозначения множества натуральных чисел) и т. д.

Один и тот же символ может быть константой в одном контексте и не быть ею в другом. Например, знак '+' — константа в контексте начальной арифметики, поскольку обозначает в ней сложение натуральных чисел. Но в других областях математики он может обозначать сложение функций, векторов и т. д., т. е. иметь иное значение. Поэтому в контексте всей математики этот символ не является константой. Так, в равенстве

$$\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$$

символ '+' слева обозначает сложение векторов, а справа — сложение чисел. Точно так же в равенстве

$$(f + g)\,(a) = f\,(a) + f\,(a)$$

этот символ слева обозначает сложение функций, а справа — сложение чисел.

Помимо констант в математике есть категория символов, играющих роль местоимений. В предложении «Он пошел гулять» слово «он» не имеет фиксированного значения: это слово может обозначать и Петра, и Константина, и кота Мура, но не может обозначать ни дом, ни Анну, ни слониху. Иными словами, предметы, обозначаемые в данном предложении местоимением «он», должны выбираться из определенного множества.

Подобно этому в математических текстах встречаются символы, обозначающие, как говорят, «произвольный предмет» данного множества. Такие символы используются при доказательстве общих предложений. Например, пусть надо доказать, что произведение любого натурального числа на следующее за ним число делится на 2. Ввиду бесконечности множества N натуральных чисел провести доказательство с помощью перебора невозможно. Поэтому начинают доказательство так: «Возьмем любое натуральное число n» и применяют дальнейшие аргументы к этому числу, говоря «если n четно, то произведение $n\,(n + 1)$ четно, а если n нечетно, то $n + 1$ четно, а потому произведение $n\,(n + 1)$ четно». Таким образом, доказательство проводится в применении к «произвольному натуральному числу n», хотя значение этого числа остается нам неизвестным (да и ненужным).

Заменяя в таком доказательстве символ, обозначающий произвольный элемент рассматриваемого множества, именем конкретного элемента этого множества, получаем доказательство того, что этот конкретный элемент обладает данным свойством (например, если $n = 3$, то убеждаемся, что число $3(3+1)$ четно).

Таким образом, символы, подобные символу n в проведенном выше рассуждении, служат заместителями конкретных имен так же, как местоимения служат заместителями имен в обычной речи. В математике вместо слова «местоимение» говорят «переменная».

Итак, *переменной* называют символ, значение которого совпадает с содержанием собственного имени или константы, за исключением лишь того, что единственное значение константы заменено здесь возможностью различных значений переменной.

При этом, как и в случае местоимения, данный символ обозначает не произвольный предмет, а лишь предмет, принадлежащий некоторому множеству. Это множество, состоящее из элементов, которые можно подставлять вместо переменной, называют *множеством значений* этой переменной. Обычно предполагают, что оно непусто. Свойства математических выражений существенно зависят от того, на каком множестве значений они рассматриваются (например, утверждение о четности $n(n+1)$ ложно, если n пробегает все множество действительных чисел). Поэтому область значений переменной должна явно указываться.

Итак, указывая, что некоторый символ будет использован в качестве переменной, нужно еще указать множество всех возможных значений этой переменной.

5. Формы. Знакосочетание, содержащее переменную, вообще говоря, не является именем определенного предмета. Например, знакосочетание '$x^2 + 6x$', где 'x' — переменная со значениями в множестве $\boldsymbol{R}$, не является числом. Однако, если заменить переменную x именем какого-нибудь числа, это знакосочетание превратится в имя числа, например в '$5^2 + 6 \cdot 5$' или в '$(-7)^2 + 6 \cdot (-7)$'.

Точно так же существуют знакосочетания, грамматически имеющие форму предложений, но не являющиеся предложениями. Таково, например, знакосочетание '$x^2 + 6x = 0$', где 'x' — переменная со значениями в множестве $\boldsymbol{R}$. Об этом знакосочетании нельзя сказать, истинно оно или ложно, поскольку переменная 'x' не имеет определенного значения. Но, заменяя эту переменную именем какого-либо числа, получим предложения, например: $5^2 + 6 \cdot 5 = 0$, $(-7)^2 + 6 \cdot (7) = 0$.

Отметим, что переменные в таких знакосочетаниях могут иметь не только числовые значения, но и значения из множества $B = \{$истина, ложь$\}$. Например, рассмотрим знакосочетание:

'Если x, то число 27 делится на 3'.

Заменяя здесь x на высказывание '27 больше чем 3', получаем истинное высказывание 'если 27 больше чем 3, то 27 делится на 3'.

Поскольку значениями переменной x являются в данном случае высказывания, такие переменные называют *высказывательными*. А переменные, принимающие значения из $\boldsymbol{R}$ или C, называют *числовыми*.

Не всегда переменную, входящую в некоторое знакосочетание, можно заменить ее значением. Например, знакосочетание

$$'\sum_{n=1}^{n=6} \frac{1}{n(n+1)}', \tag{1}$$

казалось бы, содержит переменную n. Однако при попытке заменить здесь n значением 3 получим бессмысленное знакосочетание

$$'\sum_{3=1}^{3=6} \frac{1}{3(3+1)}'.$$

Дело в том, что $'\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n(n+1)}'$ является единым символом, который обозначает сумму

$$\frac{1}{1 \cdot (1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \frac{1}{4(4+1)} + \frac{1}{5(5+1)} + \frac{1}{6(6+1)}, \tag{2}$$

не содержащую переменных.

В подобных случаях принято говорить, что переменная n или x входит в знакосочетание *связанным образом*. Например, знак $'\sum_{n=1}^{n=6}'$ «связывает» переменную n в знакосочетании $'\frac{1}{n(n+1)}'$, где n—*свободная переменная*, принимающая любое натуральное значение. Существуют записи, в которых одна и та же буква выступает и как свободная, и как связанная переменная, например: $\int_1^x x^3 dx$.

Отметим, что если переменная связана, то ее можно заменить любым другим символом, не меняя смысла выражения. Например, обозначения $'\sum_{n=1}^{n=6} \frac{1}{n(n+1)}'$ и $'\sum_{k=1}^{k=6} \frac{1}{k(k+1)}'$ имеют один и тот же смысл — они выражают сумму (2). А если переменная входит в выражение свободно, то при ее замене другой буквой оно меняет смысл: выражения $'3x + 6'$ и $'3y + 6'$ различны.

Дадим теперь основное определение этого пункта.

Определение. *Формой* называется знакосочетание, содержащее одну или несколько свободных переменных и обращающееся в имена всякий раз, когда свободные вхождения встречающихся в нем переменных замещаются именами.

При этом, разумеется, на место каждой переменной подставляются имена предметов, принадлежащих ее области значений, причем все (свободные) вхождения одной и той же переменной замещаются одним и тем же именем.

Форму, содержащую ровно одну свободную переменную, называют *унарной* или *сингулярной*. Если она содержит ровно две свободные переменные, ее называют *бинарной*, ровно три — *тернарной*, ..., ровно n — *n-арной*.

Предмет, в имя которого обращается форма при той или иной замене, называется *значением формы* при данных значениях ее свободных переменных. Если получающееся при такой замене имя не имеет значения, то говорят, что при данных значениях переменных форма значения не имеет.

Формы разделяют не только по числу входящих в них переменных, но и по типу этих переменных и значений формы. Будем считать, что и переменные и форма принимают либо числовые, либо высказывательные значения. В соответствии с этим получаем четыре типа форм:

1) *числовые формы числовых переменных*;
2) *высказывательные формы числовых переменных*;
3) *числовые формы высказывательных переменных*;
4) *высказывательные формы высказывательных переменных.*

§ 2. ОСНОВНЫЕ ЗНАКИ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

1. Математический язык. Математический язык является искусственным. Он возник под влиянием потребностей математики в точных, ясных и сжатых формулировках, как результат совершенствования естественного языка по трем направлениям: а) устранения громоздкости, б) устранения омонимии (многозначности), в) расширения выразительных возможностей.

Устранение громоздкости языка связано с широким использованием символики, специальных математических знаков и соглашений о правилах пользования этими знаками. Каждый знак математического языка (цифра, буква, знак операции или отношения) обозначает понятие, которое в естественном языке выражается словом или совокупностью слов.

Важными этапами развития математического языка были:

а) Создание системы обозначения натуральных чисел и дробей, в частности введение позиционной системы счисления и особого обозначения для нуля. Достаточно сравнить записи чисел в непозиционной римской системе счисления и в позиционной системе счисления: MCMLXXVIII и 1978.

Создание позиционной системы счисления позволило сделать короче записи алгоритмов арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления).

б) Развитие алгебраической символики, позволившей наглядно изображать алгебраические преобразования и правила решения уравнений.

в) Развитие символики, связанной с появлением дифференциального и интегрального исчислений (обозначения $f'(x)$ и $\frac{dy}{dx}$ для производных, $\int_a^b f(x)\,dx$ — для интеграла и т. д.). Относительно роли этих символов Лейбниц писал:

«Следует заботиться, чтобы обозначения были удобны для открытий. Это большей частью бывает, когда обозначения коротко выражают и как бы отображают интимнейшую сущность вещей. Тогда поразительным образом сокращается работа мысли...».

Как известно, созданные Лейбницем обозначения без существенных изменений дошли до наших дней.

г) Происходящее сейчас развитие и внедрение в математику теоретико-множественных и логических символов. Например, вместо того чтобы писать:

«Функция f называется равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых x_1 и x_2 из отрезка $[a, b]$, таких, что $|x_2 - x_1| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$», пишут:

«Функция f равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1 \in [a, b] \ \forall x_2 \in [a, b]$$
$$|x_2 - x_1| < \delta \rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Такая запись облегчает образование отрицания данного свойства путем замены кванторов и отрицания неравенства:

«Функция f не является равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$, если

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_1 \in [a, b] \ \exists x_2 \in [a, b]$$
$$|x_2 - x_1| < \delta \wedge |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant \varepsilon.$$

Внедрение символов теории множеств и математической логики в преподавание наталкивается сейчас на такое же сопротивление, как и в свое время внедрение алгебраической символики, но вряд ли можно сомневаться в том, что (во всяком случае, в высшей школе) эти символы станут вскоре общеупотребительными.

д) Серьезное влияние на развитие математической символики оказывает создание быстродействующих вычислительных машин — символика должна стать удобной для введения в эти машины. В частности, из-за того, что программа должна состоять из строк без индексов и показателей, отказались от применения обычных обозначений степени и корня. В программах (а теперь и в математических текстах, написанных специалистами по программированию) вместо x^2 пишут $x \uparrow 2$, а вместо $\sqrt[3]{x}$ пишут $x \uparrow (1.0 / 3.0)$.

Развитие символики приводит и к расширению выразительных возможностей математического языка: пользуясь лишь алгебраическими символами и операцией перехода к пределу, нельзя было бы отразить все многообразие понятий математического анализа и проанализировать их взаимоотношения (хотя в значительной степени эти понятия и сводятся к алгебре и предельному переходу). С появлением каждой новой области математики возникает присущая ей символика.

2. Математические знаки. В *семиотике* (науке об общей теории знаков) различают *знаки-индексы*, *иконические знаки* и *знаки-символы*. Для воспринимающего лица знак-индекс ассоциируется с обозначаемым им объектом в силу действительно существующей между ними связи (запах цветов может свидетельствовать о приближении к саду еще до того, как мы его увидим). Иконический знак (от греческого eikon — изображение) ассоциируется с обозначаемым объектом в силу их сходства (знак опасного поворота действительно напоминает поворот). Между же знаком-символом и объектом, к которому он отсылает, никакой природно обусловленной обязательной связи не существует. Знак-символ является знаком объекта «на основании соглашения».

Часто бывает, что знак, впервые возникший как иконический, впоследствии становится знаком-символом. Например, буква α («альфа») в финикийской азбуке называлась «алеф» — бык (она напоминает голову быка). Тогда она была иконическим знаком. В греческом же языке эта буква не связана с быком и становится знаком-символом. По мере развития математической символики также происходит замена иконических знаков символами. Например, римская цифра V напоминала раскрытую руку (пять пальцев), а современная цифра 5 является символом.

В математике знаки-индексы практически не встречаются, поскольку математический текст состоит не из самих объектов, а из их имен. Но различие между иконическими знаками и знаками-символами можно увидеть и на математических примерах. Иконическими знаками являются $\parallel$ (параллельность), $\perp$ (перпендикулярность), $=$ (равенство; введший этот знак английский ученый Гэрриот говорил, что ничто не может быть столь равно, как два параллельных отрезка одинаковой длины), знак $\triangle$ для треугольника и т. д. Символами являются знаки арифметических действий ($+$, $-$ и т. д.), цифры 2, 3 и т. д. (а цифра 1 — иконический знак: одна палочка или один палец), знаки конгруэнтности $\cong$, подобия $\sim$ и многие другие.

Поскольку математический знак связан с названиями изучаемых понятий, то существует тесная связь между названиями понятий и применяемыми для соответствующих объектов обозначениями. Например, функцию обозначают символами f, F; φ — по-латыни «функция» — functio. В настоящее время совокупность всех отображений множества X в множество Y иногда обозначают Map (X, Y) — от английского mapping — отображение, а множество линейных отображений X в Y обозначают Lin (X, Y) или $L(X, Y)$.

Так как в математике приходится иметь дело с объектами разной природы, бывает удобно использовать буквы различных алфавитов и шрифтов. Иногда, чтобы отличить векторы от чисел, их набирают полужирным курсивом (скажем, $\boldsymbol{a}$), числа же набирают курсивом (скажем, a). В геометрии точки обозначают прописными буквами (A, B, C), а прямые — строчными буквами (l, m, n), в теории множеств прописными буквами обозначают множества, а строчными — их элементы.

Употребляемые знаки должны образовывать определенную *знаковую систему*, а не выбираться произвольно и независимо друг от друга. Например, в установившейся сейчас символике знаки алгебраических действий и знаки соответствий и отношений обычно помещают между именами объектов, к которым они относятся. Такое употребление знаков называется *инфиксным*. Если соответствующий знак ставят перед именами объектов (например, пишут $+a, b$ вместо $a+b$), то говорят о *префиксном* употреблении знака, наконец, если знак поставлен после имен объектов, то — о *суффиксном* употреблении знаков. При изучении знаковых систем различают три круга вопросов: *об отношении знаков друг к другу, об отношении знаков к обозначаемым ими объектам и об отношении знаков к воспринимающему индивиду или устройству*. В соответствии с этим семиотику разделяют на три части: *синтактику*, изучающую синтаксис знаков, т. е. их взаимосвязи, *семантику*, изучающую смысл знаков, и *прагматику*, изучающую восприятие знаков. Например, вопрос о том, имеет ли смысл запись $a + : b$, относится к синтактике, вопрос о том, чему равно значение выражения $ab + c$, если $a = 3$, $b = 4$, $c = 8$, — к семантике, а вопрос о том, какое из обозначений интервала наиболее удобно для целей обучения,— к прагматике. Мы рассмотрим сейчас вопросы синтактики и семантики для школьной математики.

3. Алфавит школьной математики. При изучении математики в школе наряду с обычными предложениями, записываемыми с помощью букв русского алфавита и знаков препинания (например: «Рассмотрим ось симметрии равнобедренного треугольника»), используется ряд специфических знаков. Из них можно выделить некоторое множество основных (исходных) знаков, образующих *алфавит* языка школьной математики. Эти знаки по аналогии со знаками алфавита естественного языка будем называть *буквами*. Из этих букв составляются знакосочетания, называемые *словами* языка школьной математики, а из слов — *предложения* этого языка. Во многих случаях повторяющиеся знакосочетания получают особые обозначения и их можно также считать буквами (так же как в естественном языке сочетание «йу» заменяется на «ю», а сочетание «йа» — на «я»). Поэтому в дальнейшем среди букв будут указаны и некоторые производные знакосочетания.

Специфические для языка школьной математики знаки можно классифицировать следующим образом:

а) Имена предметов, называемые иначе *предметными постоянными*.

б) *Предметные переменные*, принимающие значения из некоторых множеств предметных постоянных.

в) *Функциональные буквы*, служащие для обозначения различных отображений (в том числе геометрических преобразований и алгебраических операций).

г) *Предикатные буквы*, служащие для обозначения различных соответствий и отношений.

д) *Знаки препинания, скобки и точки*.

Другим основанием для классификации знаков школьной математики может служить разделение по областям математической науки, в которых встречаются те или иные знаки.

Наиболее общими являются знаки теории множеств и математической логики, используемые в большинстве областей школьной математики. Для теории множеств предметными постоянными являются:

а) Обозначения конкретных множеств, в частности обозначения $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{C}$, $]a; b[$, $[a; b]$, $[a; b[$, $]a; b]$, $]a; +\infty[$, $[a; +\infty[$, $]-\infty; a[$, $]-\infty, a]$
для числовых множеств, а также обозначения для конкретных множеств, возникающих в ходе решения той или иной задачи или при доказательстве некоторой теоремы.

Сюда относятся также обозначение $\varnothing$ для пустого множества, U для универсального множества, $\{a, b, c\}$ для множества, состоящего из элементов a, b, c и $\{x \mid p(x)\}$ для множества, состоящего из элементов, для которых выполняется высказывательная форма $p(x)$.

б) Обозначения конкретных элементов множества (например, обозначение 145 для одного из элементов множества натуральных чисел). Сюда относятся также обозначения (a, b) для упорядоченной пары элементов a и b, (a, b, c) для упорядоченной тройки элементов и т. д.

Предметными переменными в теории множеств являются:

а) Обозначения произвольных множеств из некоторой совокупности множеств (например, в предложении «для любых множеств A и B имеем $A \cap B = B \cap A$» или в предложении «любое счетное множество A содержит собственное подмножество той же мощности»).

б) Обозначения произвольных элементов данных множеств (например, в предложении «для любого элемента a, принадлежащего множествам A и B, справедливо, что $a \in A \cap B$»).

Функциональными буквами в теории множеств являются:

а) Обозначения булевых операций:

$$\cap, \cup, \setminus, \triangle, '.$$

Эти операции ставят в соответствие подмножествам данного универсального множества U другие подмножества того же множества. При этом операции $\cap$, $\cup$, $\setminus$ и $\triangle$ бинарны, а операция $'$ унарна.

б) Обозначения $\times$ и Π для операции декартова произведения множеств (эта операция уже не является булевой).

в) Обозначение $f: A \to B$ для отображения f множества X в множество Y.

Тождественное преобразование в школьной математике обозначают буквой E, хотя более целесообразно было бы рассматривать это преобразование как переменное в зависимости от того, для какого множества A оно рассматривается, и обозначать его E_A (или $1A$). Отображение, обратное инъективному отображению $f: A \to B$, обозначают f^{-1}, а композицию отображений f и g обозначают $g \circ f$.

Предикатными буквами в теории множеств являются:

а) Обозначение $=$ для равенства множеств.

б) Обозначение $\subset$ для включения множеств. Отметим, что иногда различают знаки $\subseteq$ (множество A является подмножеством в B, причем может совпадать с B) и $\subset$ (множество A является подмножеством в B и отлично от B). В школьной математике применяется лишь знак $\subset$, понимаемый как $\subseteq$.

в) Знак $\in$ принадлежности элемента множеству.

г) Знаки $\neq$, $\not\subset$, $\notin$ для отрицания указанных отношений и соответствий.

Заметим, что в теории множеств множества обычно обозначаются прописными латинскими буквами, а их элементы — строчными латинскими буквами. Однако в геометрии точки (т. е. элементы точечных множеств) обозначаются прописными буквами, а прямые (точечные множества) — строчными буквами.

В школьной математике не употребляются обозначения математической логики, хотя соответствующие понятия, по сути дела, употребляются. Отметим те знаки математической логики, которые заменяются в школьной математике словами.

Предметными постоянными являются обозначения конкретных высказываний, а также обозначения «Л» и «И» для заведомо ложного и заведомо истинного высказывания. Предметными переменными являются буквы для обозначения произвольных высказываний (например, в формулировке «для любого высказывания A высказывание $A \wedge \bar{A}$ заведомо ложно), а также предикаты — переменные вида $p(x)$, заданные на некогором множестве x и принимающие значения «истина» и «ложь».

Функциональными буквами в математической логике являются обозначения логических операций:
$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $|$, — или $\neg$ (знак отрицания). При этом операции $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $|$ бинарны, а операция $\neg$ унарна.

Особым видом функциональных букв являются $\exists$ и $\forall$, обозначающие кванторы существования и всеобщности. Эти функциональные буквы ставят в соответствие предикатам $p(x)$ высказывания вида «существует такое $x \in X$, что $p(x)$» или «для всех $x \in X$ имеем $p(x)$». Полная запись имеет вид $(\exists x \in X)\ p(x)$ и $(\forall x \in X)\ p(x)$.

Предикатными буквами в математической логике являются $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$, обозначающие логическое следование и логическую эквивалентность (вместо $\Leftrightarrow$ пишут также $\equiv$).

Помимо перечисленных выше знаков и в теории множеств и в математической логике применяются «знаки препинания» — скобки, служащие для разделения множеств, а также высказываний, и точки, обозначающие конец выражения.

В школьной математике можно обойтись без символов для операций конъюнкции и дизъюнкции, поскольку применение слов «и» и «или» не делает запись математических предложений намного длиннее, чем их символическая запись с использованием соответствующих обозначений «$\wedge$» и «$\vee$», а корректность записей не зависит от того, обозначаем ли мы эти операции словами или специальными символами.

Отсутствие в школьной математике специального обозначения для отрицания компенсируется тем, что во многих часто встречающихся случаях отрицание предложения обозначается перечеркиванием знака отношения, входящего в состав отрицаемого предложения (например, $\neq$, $\nparallel$, $\notin$, $\not\subset$, $\not\equiv$, и т. п.).

Отсутствие же в школьной математике принятых в современном математическом языке специальных обозначений для кванторов общности и существования представляет собой неудобство, приводя к значительному удлинению записей без того, чтобы сделать их более понятными. В частности, затрудняется корректное определение понятия тождества.

4. Алфавит школьной алгебры. В школьной алгебре мы имеем дело с операциями над числами и с отношениями между ними. Этим и определяется алфавит школьной алгебры. Для обозначения чисел в десятичной системе счисления нужны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и знак для разделения целой и дробной частей числа (запятая или точка), а также знак «—» (минус) для обозначения отрицательных чисел. При использовании двоичной системы счисления достаточно двух цифр: 0 и 1, запятой и минуса. Из цифр, разделительного знака и минуса строятся имена чисел. Заметим, что при этом конечные имена (т. е. имена, состоящие лишь из конечного числа десятичных знаков) можно дать лишь счетной совокупности чисел — так называемым десятично-рациональным числам. Для других чисел нужны «псевдоимена», состоящие из счетной совокупности знаков. Некоторым числам, также образующим лишь счетное множество, можно приписать имена, связанные с тем или иным алгоритмом их вычисления (например, $\frac{3}{7}\sqrt{2}$, e, π, $\ln 14 + \sin^3 3$ и т. д.).

В качестве числовых переменных применяют строчные буквы латинского алфавита (a, b, c, d, ..., x, y, z), а также буквы этого алфавита с индексами: x_1, a_3 и т. д. Функциональными буквами в школьной алгебре являются знаки операций:

$$+,\ -,\ \cdot,\ :$$

Основными являются знаки «+» и «·», а знаки «—» и «:» можно определить с помощью этих основных знаков. Как говорилось выше, знаки операций применяются в школьной математике инфиксным образом (ставятся между компонентами действий).

Наряду со знаком «:» для обозначения деления применяется черта (прямая или косая, например: $\frac{3}{5}$ или $^3/_5$).

Наконец, в школьной алгебре применяются предикатные буквы $=$, $<$, $>$ и «знаки препинания» — скобки и точки.

Наряду со скобками в качестве знака препинания сохраняется черта (в обозначении $\sqrt{a+b}$, состоящем из знака радикала $\sqrt{\ }$ и подкоренного выражения под чертой).

Комбинируя определенным образом указанные знаки, получают такие знакосочетания школьной алгебры, как $\leqslant$, $\geqslant$, $\neq$, ! (факториал) и т. д. При изучении приближенных вычислений вводится знак приближенного равенства $\approx$, получающий определенный смысл лишь в случае, когда указана наибольшая абсолютная погрешность приближенного значения. Для краткости применяют еще функциональную букву $\sqrt{\ }$ и запись a^n для обозначения степени. Эти буквы сводятся к ранее разобранным. Отметим, что знак «минус» играет двоякую роль — он обозначает и алгебраическую операцию вычитания, и знак числа. Избегнуть этой нежелательной омонимии можно было бы, записывая отрицательные числа с помощью черточки над ними (например, $\bar{4}$). Но удобнее считать, что запись -4 обозначает сокращенную запись вида $0-4$ — тогда знаки минус в обоих случаях являются символом вычитания.

В школьной комбинаторике используются обозначения A_n^m, P_n, C_n^m. Они сводятся соответственно к $\frac{n!}{(n-m)!}$, $n!$, $\frac{n!}{m!\,(m-n)!}$, т. е. в конечном счете к операции умножения чисел.

5. Алфавит школьной геометрии. В связи с построением школьной геометрии на новой системе исходных понятий (точка, прямая, плоскость, расстояние) вместе с понятием расстояния в геометрию с самого начала входит число, а следовательно, и язык алгебры.

Этот язык расширяется в связи с введением понятия вектора и элементов векторной алгебры. Поэтому в языке геометрии должны быть знаки, применяемые в качестве имен и переменных не только для точек, но и для векторов, и для операций над векторами (сложения, умножения на число и скалярного умножения).

Прописные буквы латинского алфавита A, B, C, ... X, Y, Z применяются в качестве постоянных (обозначения имен) и переменных для точек (точечных переменных).

Строчные буквы латинского алфавита со стрелками сверху $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ применяются в качестве постоянных для обозначения имен векторов, а также в качестве переменных для векторов.

Эти различные применения в языке геометрии одних и тех же букв обычно распознаются по контексту.

Например, в предложении «$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого $\vec{a}$» ясно, что $\vec{a}$ — переменная для векторов (к тому же связанная квантором общности «для любого»). Буква «$\vec{0}$» — постоянная, обозначающая нулевой вектор (имя нулевого вектора). Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$.

В предложении же «Обозначим через $\vec{a}$ вектор, определяемый парой точек (A (0; 0), B (1; 1)), т. е. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$» буквы A и B применяются в качестве имен для точек, а буква $\vec{a}$ также применяется здесь в качестве постоянной (имя вектора). Вообще, вектор, определяемый парой точек, обозначается $\overrightarrow{AB}$, а его длина обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, определяемый парой точек (O, A) где O имеет координаты (0; 0), а A — координаты (x; y), обозначается $\vec{a}$ (x; y). Сами точки обозначаются O (0; 0) и A (x; y). Аналогичные обозначения применяются в пространственной геометрии.

Для операций над векторами применяются те же знаки: «+», «—» и «·», что и для операций над числами. Но лишь «+» и «—» являются обозначениями бинарных операций сложения и вычитания векторов. Знак «·» применяется для обозначения скалярного произведения векторов, которое не является алгебраической операцией, поскольку сопоставляет двум векторам число. Если λ — число, то через $\lambda\vec{a}$ обозначают произведение вектора $\vec{a}$ на это число. В векторной алгебре используют также знак $\times$ (или [,]) для обозначения векторного произведения векторов.

В настоящее время в школьной геометрии четко различают обозначения геометрических объектов и их величин. Например, $[AB]$ — отрезок с концами A и B, $|AB|$ — его длина, $\angle A$ — угол с вершиной A, $\hat{A}$ — его величина, $\smile AB$ — дуга с концами A и B, $\overset{\smile}{AB}$ — ее величина. Для обозначения прямой, проходящей через точки A и B, пишут: (AB), а для обозначения луча с началом A, проходящего через точку B, пишут: $[AB)$. Величину угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$, а величину угла между плоскостями α и β обозначают $\widehat{(\alpha, \beta)}$.

В связи с тем что идея отображения стала одной из основ принятой системы школьной геометрии, в языке геометрии имеются специальные знаки для обозначения изучаемых отображений плоскости (пространства) на себя (одноместные функциональные буквы):

E — тождественное преобразование;

S_l — осевая симметрия с осью l;

R_O^α — поворот с центром O на угол α;

Z_O — центральная симметрия с центром O;

$\overrightarrow{AB}$ — вектор, отображающий точку A на точку B;

H_O^k — гомотетия с центром O и коэффициентом k.

Если l, O, α, A, B, k — постоянные, то и S_l, R_O^α, Z_O, $\overrightarrow{AB}$, H_O^k также постоянные. Эти знаки можно также рассматривать как обозначения унарных операций над точками плоскости (пространства).

В языке геометрии мы также имеем знаки для различных бинарных отношений, изучаемых в геометрии (предикатные буквы), употребляемые инфиксным образом, например, $\|$, $\perp$ и т. д.

6. Язык начал математического анализа. Основными в началах анализа являются понятие числовой функции и операции нахождения предела функции в точке, дифференцирования и интегрирования функций. Поэтому естественно отнести к основным математическим знакам языка школьной математики соответствующие обозначения.

Буквы латинского алфавита f, F, φ применяются в школьной математике в качестве постоянных и переменных для функций.

Например, в предложении «Функция $f: x \to \{x\}$ непрерывна во всех точках x, кроме целочисленных, в которых она разрывна» буква f применяется в качестве постоянной, т. е. как имя определенной функции. В предложении же «Функция f непрерывна в точке a, если ...» буква f применяется в качестве переменной (причем, подразумевается квантор общности «любая функция f ...»).

Часто в школьной математике пользуются выражениями типа «Функция $f(x) = x^2$», в смысле «Функция $f : x \to x^2$». В этих выражениях буква f также применяется в качестве постоянной.

В языке школьной математики имеются имена для ряда изучаемых в школе функций (sin, cos, tg, ctg, arctg, $\exp_a$, lg и др.).

Мы имеем здесь примеры, когда в качестве постоянных применяются не отдельные буквы латинского алфавита, а последовательность букв, представляющая собой сокращение некоторого слова. Так, например, «sin» применяется в качестве постоянной для обозначения функции синус, «$\exp_a$» — для обозначения показательной функции с основанием a ($\exp_a(x) = a^x$).

Наряду с обозначениями функций, содержащих имена этих функций, в школьной математике применяют обозначения функций, содержащие в явном виде аргумент этой функции, например: $|x|$, $[x]$, $\{x\}$, $\sqrt{x}$. Конечно, можно было бы обозначать эти функции так: $| \, |$, $[\;]$, $\{\;\}$, $\sqrt{\;}$, но это малоудобно. Особенно неудобным становится безаргументное обозначение для функций, задаваемых рациональными и иррациональными выражениями. Приходится писать: «Функция f такая, что для всех x из множества X имеем $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$». Принято писать короче: «функция $\sqrt{x^2 + 4}$, $x \in X$». Разумеется, следует тщательно различать выражение и задаваемую им функцию.

Для обозначения упомянутых выше трех (унарных) операций над функциями в язык школьной математики введены известные знаки:

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ — предел функции f в точке a;

$f'(a)$ — производная функция f в точке a;

$\int\limits_a^b f(x)dx$ — интеграл функции f в пределах от a до b.

Отметим, что, по существу, мы здесь привели не знаки операций, а выражения, в которых они встречаются, или результаты их применения к некоторой функции f.

Отметим также существенное различие между вхождениями переменной x в выражении $f(x)$ и в выражениях $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\int\limits_a^b f(x)dx$.

В '$f(x)$' переменная x входит свободно и допустима операция подстановки вместо переменной каких-нибудь ее значений. Например, выражение $f(2)$ имеет смысл «значение функции f для значения x, равного 2». В двух других выражениях переменная x входит связанно. В одном она связана оператором $\lim\limits_{x \to a}$, в другом — $\int\limits_a^b \ldots dx$. Здесь подстановка значений переменной x недопустима (она приводит к бессмыслице).

В математическом анализе применяют также знаки ∞, $+\infty$ и $-\infty$. Как правило, они входят в знакосочетания вида $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, а в интегральном исчислении и в знаковые сочетания вида $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$. Для пределов функции f при $x \to a$ слева и справа применяют знакосочетания $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

Приращение переменной x обозначают Δx, а соответствующее ему приращение функции обозначают Δy. Через $\max\limits_{[a;\ b]} f$ и $\min\limits_{[a;\ b]} f$ обозначают соответственно наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[a; b]$.

Подведем некоторые итоги обзора основных математических знаков языка современной школьной математики.

Во-первых, совершенно очевидно значительное обогащение символики школьной математики новыми собственно математическими знаками (не включая пока логических знаков), в том числе теоретико-множественными.

Во-вторых, язык современной школьной математики, в отличие от языка прежней школьной математики, применяют переменные не только для чисел, но и для точек, векторов, функций, а также, как будет видно дальше, для множеств и предложений. Применение разного рода переменных значительно расширяет выразительные возможности языка школьной математики.

В-третьих, новая система школьной геометрии, в отличие от прежней, широко пользуется математическим языком, в частности языком алгебры и начал анализа.

О проникновении в геометрию языка алгебры уже было сказано выше (п. 2).

Введение в геометрию идеи отображения в качестве одной из основ обусловливает проникновение в геометрию функциональной символики, применяемой в началах анализа.

Сопоставим применение некоторых обозначений в геометрии и в началах анализа:

В геометрии	В началах анализа
f — преобразование[1], т. е. $f: M \to N$, где $M, N \in \Pi$ (Π — плоскость или пространство).	f — числовая функция, т. е. $f: x \to y$, где $x, y \in \boldsymbol{R}$.
$f(x)$ — образ точки x при преобразовании f.	$f(x)$ — значение функции f в точке (для значения аргумента) x.
f^{-1} — преобразование, обратное f.	f^{-1} — функция, обратная f.
$g \circ f$ — композиция преобразований f и g.	$g \circ f$ — композиция функций f и g.

[1] Под преобразованием фигуры (плоскости, пространства) в геометрии понимают обратимое отображение фигуры (плоскости, пространства) на себя.

7. Синтактика языка школьной алгебры. Из перечисленных выше «букв», т. е. знаков математического языка, по определенным правилам строятся выражения (т. е. аналоги слов и предложений естественного языка), имеющие определенный смысл и значение. Эти выражения разделяются на формулы и термы в зависимости от того, входят в них или нет предикатные буквы. Мы рассмотрим сейчас лишь синтаксис термов языка школьной алгебры, поскольку для термов, содержащих теоретико-множественные и логические операции, он строится аналогичным образом.

Применяя общее определение терма, данное в п. 1 § 2 главы IV, приходим к следующему определению терма школьной алгебры:

Определение 1. *Термами в школьной алгебре* являются:

1) все имена чисел и числовых переменных (такие термы называются *элементарными*);

2) выражения вида $(A)+(B)$, $(A)-(B)$, $(A)\cdot(B)$, $(A):(B)$, где A и B — термы;

3) термов иного вида не бывает.

Для каждого слова, составленного из имен чисел, числовых переменных, алгебраических операций и скобок, можно за конечное число шагов выяснить, является ли оно термом. Например, термом является знакосочетание $((3)+(a))-((6)\cdot(x))$, что видно из следующей последовательности выводов (синтаксического разбора терма):

1. 3 — терм	(п. 1 определения)
2. a — терм	(п. 1)
3. $(3)+(a)$ — терм	(из 1-го, 2-го и п. 2 определения)
4. 6 — терм	(п. 1)
5. x — терм	(п. 1)
6. $(6)\cdot(x)$ — терм	(из 4-го, 5-го и п. 2)
7. $((3)+(a))-((6)\cdot(x))$ — терм	(из 3-го, 6-го и п. 2).

Отметим, что ни в определении терма, ни в синтаксическом разборе выражения мы не касаемся смысла знаков, входящих в терм. Синтаксический разбор сразу показывает, что знакосочетания $((x)+(1)$ или $(x)+\cdot(1)$ не являются термами (ясно, что в терме должно быть столько же открывающих скобок, сколько и закрывающих, а два знака операции не могут стоять рядом).

Чтобы не писать слишком много скобок, условимся опускать скобки, содержащие лишь имя числа или числовой переменной. Например, вместо $(3)+(b)$ будем писать $3+b$. Синтаксический разбор таких упрощенных термов облегчается применением излагаемого ниже правила.

Пусть дано знакосочетание, составленное из линейно расположенных открывающих и закрывающих скобок, причем число тех и других одинаково и перед каждой закрывающей скобкой больше открывающих скобок, чем закрывающих. Тогда можно установить одно и только одно соответствие между множествами скобок двух видов, такое, что между любыми двумя соответствующими друг другу скобками либо нет скобок, либо имеются лишь пары соответствующих друг другу скобок. Доказательство этого утверждения ведется с помощью индукции по числу скобок и предоставляется читателю (чтобы перейти от n к $n+1$ в знакосочетании из $(n+1)$-й пары скобок, надо найти две соседние скобки разного вида и поставить их друг другу в соответствие).

Назовем знакосочетание, составленное из линейно расположенных имен чисел и числовых переменных (элементарных термов), знаков операций «+», «—», «·», «:» и скобок, *правильно построенным*, если:

а) число открывающих скобок равно числу закрывающих скобок, причем перед каждой закрывающей скобкой больше открывающих скобок, чем закрывающих;

б) между любыми двумя соответствующими друг другу скобками число знаков операций на 1 больше, чем число пар скобок, а число элементарных термов на 1 больше, чем знаков операций;

в) каждый знак операции стоит между закрывающей и открывающей скобками, либо между закрывающей скобкой и элементарным термом, либо между элементарным термом и открывающей скобкой, либо между двумя элементарными термами.

Справедливо следующее утверждение:

Знакосочетание указанного выше вида является упрощенной записью терма в том и только в том случае, когда оно правильно построено.

Для доказательства заметим, во-первых, что элементарные термы правильно построены и что из правильности построения знакосочетаний A и B следует, что и знакосочетания $(A)+(B)$ и т. д. (или $(A)+B$ и т. д. в случае, когда B — элементарный терм) тоже правильно построены. Во-вторых, если знакосочетание правильно построено, то находим в нем пару соответствующих друг другу соседних скобок. Между ними находятся два элементарных терма и знак операции, стоящий между этими термами. Заменяя скобки вместе с элементарными термами и знаком операции одной буквой, получаем правильно построенное знакосочетание, содержащее на одну операцию меньше. По индукции убеждаемся в справедливости утверждения.

Полученная запись термов все еще слишком сложна. Чтобы упростить ее, отбросив лишние скобки, условились не писать скобки, если подряд выполняется несколько аддитивных операций (сложение или вычитание) или несколько мультипликативных операций (умножение или деление), а также выполнять мультипликативные операции перед выполнением аддитивных операций. Эти правила тоже можно формализовать (ниже под *А-операциями* понимают аддитивные операции, а под *М-операциями* — мультипликативные; название понятия, заключенное в ломаные скобки, обозначает имя одного из объектов, принадлежащих этому понятию). Введем следующие связанные друг с другом определения:

Множителями называют слова вида: ⟨число⟩, ⟨числовая переменная⟩, ⟨терм⟩.

Одночленами называют слова вида: ⟨множитель⟩, ⟨одночлен⟩, ⟨*М*-операция⟩, ⟨множитель⟩.

Термами называют слова вида: ⟨одночлен⟩ и ⟨терм⟩, ⟨A-операция⟩, ⟨одночлен⟩.

Нетрудно проверить, что теперь знакосочетания вида $a + b + c + d$ или $a \cdot b + c \cdot d$ становятся термами. Иными словами, эта запись совпадает с общепринятой алгебраической записью термов. Заметим, что по определению любой терм становится множителем, если заключить его в скобки.

Мы описали множество правил, порождающих обычные выражения, встречающиеся в алгебре. Такие множества порождающих правил называют *грамматикой* данного формального языка. Описанная грамматика алгебры не является единственной. Для некоторых видов вычислительных машин удобнее не инфиксная, а суффиксная (или, как ее еще называют, *польская*) запись. Такая запись позволяет не применять скобок.

8. Семантика языка школьной алгебры. Как уже говорилось, различные аспекты, связанные с интерпретацией выражений, с их смыслом, отношением к предметной области, обычно называют *семантикой* этих выражений.

В различных контекстах используются разные семантики арифметических выражений. Наиболее общий смысл можно приписать арифметическому выражению, заметив, что ему соответствует либо число (если оно не содержит переменных), либо функция, определенная в некоторой области значений переменных (может случиться, что данному выражению ничего не соответствует, например такому выражению, как $7 : (x - x)$). При такой семантике, которую можно назвать *функциональной*, приходится считать эквивалентными многие выражения, имеющие совершенно различный вид, например такие, как $(a + b)(a - b)$, $a^2 - b^2$ и $a^2 + 2c - b^2 - c - c$. Кроме того, можно либо требовать, чтобы имена переменных совпадали, либо отказаться от этого требования и считать, что выражения $a + b$ и $x + y$ задают одну и ту же функцию двух переменных. С точки зрения вычислительной математики такая интерпретация не является самой удобной, поскольку приходится пренебрегать смыслом выражения, или, точнее говоря, программой его вычисления. Разумеется, можно было бы считать, что два выражения совпадают, если они описываются одним и тем же знакосочетанием. Тогда выражения $(a) + (b)$, $a + (b)$ и $a + b$ имели бы разный смысл. Это определение еще менее удобно, так как в нем учитывается все, даже лишние скобки.

Компромиссом между этими подходами является подход, при котором два выражения эквивалентны, если они дают одну и ту же программу вычисления. При этом выражения $(a + b) + c$ и $a + (b + c)$ считаются различными.

При установлении эквивалентности выражений часто используется приведение этих выражений к стандартному виду — два выражения, имеющие один и тот же стандартный вид, эквивалентны. Однако, такой стандартный вид не всегда существует (например, для некоторых типов тригонометрических выражений, содержащих знак модуля).

9. Формулы. Мы подвергли синтаксическому и семантическому анализу термы школьной алгебры (арифметические выражения). Два арифметических выражения, соединенные знаком отношения (равенства или неравенства), образуют формулу, например:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ x^2 - 6x + 5 = 0,\ x^2 - 4 < x + 3,$$

$$8 - 9 > 5 + 6 \text{ и т. д.}$$

Если формула не содержит переменных, то она является высказыванием о числах (которое может быть как истинным, так и ложным). Например, высказывания $3 + 5 = 8$, $8 - 6 < 5$, $13 + 2 \neq 4 + 10$ истинны, а высказывания $3 + 5 < 8$, $8 - 6 > 5$, $13 + 2 = 4 + 10$ ложны. Если же формула содержит переменные, то она является *высказывательной формой*. Задача отыскания множества истинности этой формы называется в школьной математике задачей о решении уравнения или неравенства. Включая в язык школьной алгебры логические операции дизъюнкции и конъюнкции, получаем возможность записывать и системы уравнений, а также более сложные задачи об уравнениях и неравенствах. Например,

$$(x + y = 5) \wedge (x^2 + y^2 = 13)$$

— система уравнений,

$$(x + y < 5) \wedge (x^2 + y^2 > 13)$$

— система неравенств и т. д.

Термами и формулами исчерпываются выражения языка школьной алгебры.

10. Термы и формулы в геометрии и началах анализа. Кроме термов и формул, заимствованных из алгебры, в школьной геометрии и началах анализа применяется и собственный язык из термов и формул, образованных из введенных функциональных букв и постоянных или переменных для точек или чисел.

Например, в школьной геометрии имеем ряд одноместных функциональных букв (обозначающие унарные операции — отображения плоскости или пространства на себя). На языке школьной геометрии выражения $S_l(A)$, $R_O^\alpha(A)$, $Z_O(A)$, $\vec{a}(A)$ — термы, представляющие собой имена точек (образов точки A в соответствующих отображениях), если A — постоянная (имя точки), или именные формы, если A — переменная.

Выражения $S_l(A) = A_1$, $R_O^\alpha(A) = A_1$, $Z_O(A) = A_1$, $\vec{a}(A) = A_1$ — формулы (образованы соединением двух термов знаком «=»), обозначающие высказывания, если A и A_1 — постоянные (имена точек), или высказывательные формы, если A и A_1 — переменные (формы для имен точек).

Знак «=» в этих «геометрических» формулах, так же как в «алгебраических», обозначает совпадение значений двух соединенных этим знаком выражений. Следовательно, если этим знаком соединены имена различных объектов, то образованная таким способом формула обозначает ложное высказывание.

Аналогично термы и формулы образуются с помощью одноместных функциональных букв (sin, tg, $\exp_2$, ln и др.), используемых в школьном курсе начал анализа: $\sin x$, $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{tg} x$, $\sin(x+1)$, $\exp_2 x$, $\exp_2 3$, $\ln(a+2)$ и т. п. — термы, а выражения $\operatorname{tg} 2 = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}$, $\sin x = \sin(x+1)$, $y = \exp_2 x$, $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ и т. п. — формулы.

С введением в школьную математику понятия вектора язык векторной алгебры стал составной частью языка школьной геометрии.

Язык векторной алгебры включает язык «числовой» алгебры, представляя собой определенное расширение этого языка.

На этом языке (векторной алгебры) опять различаем два класса знакосочетаний — термы и формулы.

Например, $\vec{a}$, $\vec{0}$, $2\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $0\vec{a}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ представляют собой термы — имена или именные формы для чисел или для векторов, записи же $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, $0\vec{a}=\vec{0}$, $2\vec{a}\neq 3\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=k$, $\vec{0}\cdot\vec{a}=\vec{0}$, $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ — формулы, обозначающие высказывания или высказывательные формы.

Такие же записи, как $\vec{0}\cdot\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{a}+\vec{b}=c$, ошибочны и ни термами, ни формулами не являются.

Собственно геометрический язык содержит обозначения для ряда бинарных отношений (параллельности, сонаправленности, перпендикулярности, скрещивания, конгруэнтности, подобия и др.). С помощью знаков этих отношений и постоянных или переменных для прямых, лучей, плоскостей, фигур образуются формулы вида $a \parallel b$, $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$, $a \parallel \alpha$, $\alpha \perp \beta$, $\Phi_1 \cong \Phi_2$, $\Phi_1 \sim \Phi_2$ и т. п.

11. Элементарные формулы. Все рассмотренные в этом параграфе формулы, образованные из двух термов, соединенных знаком некоторого отношения, принадлежат классу *элементарных формул*, аналогов простых повествовательных предложений естественного языка.

Мы говорили выше, что формула, не содержащая переменных, обозначает высказывание, а формула, содержащая переменные, — высказывательную форму. Однако среди элементарных формул есть такие, которые, хотя и содержат переменные, обозначают высказывания. Например, формулы $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ и $\int\limits_1^2 x^2dx = \frac{7}{3}$ содержат переменную x и обозначают истинные высказывания.

В этих двух формулах переменная x входит как связанная переменная (в первой она связана оператором «$\lim\limits_{x\to 2}$», в другой —«$\int\limits_1^2 ...dx$»).

В формулах же $x^2 = 4$ и $x < 10$ переменная x входит свободно (является свободной переменной).

Формула, не содержащая свободных вхождений переменных, обозначает высказывание, а содержащая (хотя бы одно) свободное вхождение переменных — высказывательную форму.

Глава VII

ЛОГИКА ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Математические предложения в школьной математике. Из формул с помощью логических операторов (словесных выражений или знаков, обозначающих различные логические операции над предикатами) определенным образом конструируются математические предложения.

Например, из формул «$x \in A$» и «$x \in B$» с помощью логических связок «и» и «или» (обозначающие конъюнкцию и дизъюнкцию) образуются предложения, выражающие характеристические свойства пересечения $A \cap B$, и объединения $A \cup B$ соответственно:

$$A \cap B \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\},$$

$$A \cup B \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

(здесь и далее мы будем пользоваться союзами «и» и «или» для обозначения конъюнкции и дизъюнкции соответственно).

Некоторые составные предложения записываются сокращенно в виде формул (без употребления слов), например, формула «$A \subset B$» обозначает то же, что и предложение «Для всякого x если $x \in A$, то $x \in B$», образованное из (элементарных) формул «$x \in A$» и «$x \in B$» с помощью логических операторов «для всякого» (квантора общности) и «если ..., то» (импликации).

Аналогично формула «$A = B$» по определению обозначает предложение «Для всякого x $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$», образованное из формул $x \in A$ и $x \in B$ с помощью логических операторов «для всякого», «тогда и только тогда, когда».

Приведенные примеры составных предложений получены из двух формул $x \in A$ и $x \in B$ теоретико-множественного языка.

Таким же образом получают составные математические предложения из других формул.

Примеры.

1) «Неверно, что $x = 0$» (сокращенно «$x \neq 0$»).
2) «$x < 3$ или $x = 3$» (сокращенно «$x \leqslant 3$»).
3) «$x > 1$ и $x < 5$» (сокращенно «$1 < x < 5$»).
4) «Если $x = 3$, то $x^2 = 9$».
5) «$x(x - 3) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ или $x = 3$».
6) «Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$».

7) «Для всякого x существует y такое, что $y = x^2$».

8) «Для всяких x, y если $x \neq y$, то $x < y$ или $y < x$».

9) «Для любых точек A, B $|AB| \geqslant 0$, и если $A \neq B$, то $|AB| > 0$».

Как видно из приведенных примеров, математические предложения строятся из элементарных формул и логических операторов. Записанные на символическом языке математической логики, эти предложения также называются формулами (*сложными, составными*). В школьной математике логические операторы выражаются словами естественного языка и словесно-символические образования из формул (элементарных или представляющих собой сокращенные символические записи составных предложений, как «$x \leqslant 3$») и логических операторов обычно называют *математическими предложениями*.

Математические предложения строятся из формул и логических операторов по простым правилам, которые можно объединить в виде следующего определения (с точностью до перечня используемых в школьной математике формул):

1. *Всякая формула — предложение.*

2. *Если A — предложение, то «неверно, что A» — предложение.*

3. *Если A и B — предложения, то «A и B», «A или B», «если A, то B», «A тогда и только тогда, когда B» — предложения.*

4. *Если A (x) — предложение, содержащее свободную переменную x, то «для всякого x, A (x)» и «существует x такое, что A (x)» — предложения (в которых x — связанная переменная).*

5. *Других предложений, кроме формул или образуемых из формул в соответствии с пп. 2—4, нет.*

Сделаем три замечания к этому определению:

1) Для того чтобы уточнить сформулированное выше определение, необходимо приложить перечень формул, используемых в школьной математике.

2) В русском языке имеются выражения-синонимы для тех из них, с помощью которых в определении обозначены логические операторы («из ... следует», «влечет» и др. для «если ..., то»; «если и только если», «необходимо и достаточно» для «тогда и только тогда, когда» и т. п.).

3) В определении не введены скобки, так как порядок логических операций в словесно-символических записях определяется грамматическими правилами словесного языка.

Смысл математического предложения определяется смыслом элементарных формул (простых предложений), из которых оно построено, порядком и смыслом логических операторов, с помощью которых оно построено из этих формул (т. е. своей логической структурой, формой). Из математической логики известны определения всех логических операторов, с помощью которых из элементарных формул строятся математические предложения (в приведенном определении «или» понимается в неразделительном смысле).

2. Логическая эквивалентность и логическое следование. Рассмотрим два предложения, образованные с помощью союзов «если ..., то»: (1) «Если $x = 3$, то $x^2 = 9$» и (2) «Если $x^2 = 9$, то $x = 3$».

О предложении (1) говорят, что оно верно (истинно), о предложении (2) — что оно неверно (ложно). В каком же смысле понимают в них словосочетание «если ..., то»?

Если понимать его в смысле импликации, то обе импликации (1) $x = 3 \to x^2 = 9$ и (2) $x^2 = 9 \to x = 3$ — высказывательные формы. При этом (1) обращается в истинное высказывание при любом значении x, т. е. высказывание $(\forall x \in \boldsymbol{R})$ $(x = 3 \to x^2 = 9)$ истинно, а (2) представляет собой высказывательную форму, обращающуюся при одних значениях (например, при $x = 0, 1, 2, 3$) в истинное высказывание, при других (например, при $x = -3$) — в ложное, т. е. высказывание $(\forall x \in \boldsymbol{R})$ $(x^2 = 9 \to x = 3)$ ложно.

Таким образом, когда говорят, что (1) истинно, а (2) ложно, то словосочетание «если ..., то» понимается не в смысле импликации, а как выражение отношения следования. Иными словами, в (1) утверждается, что если $x = 3$ истинно, то и $x^2 = 9$ истинно или $x^2 = 9$ истинно по крайней мере при всех тех значениях x, при которых истинно $x = 3$. Это и означает, что $x^2 = 9$ следует из $x = 3$, что в школьной математике и обозначается через «$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$».

Вообще, пусть $A(x)$ и $B(x)$ — высказывательные формы, содержащие x в качестве свободной переменной. Говорят, что из $A(x)$ *следует* $B(x)$ и пишут $A(x) \Rightarrow B(x)$, если $B(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x, при которых $A(x)$ обращается в истинное высказывание. Это значит, что импликация $A(x) \to B(x)$ обращается в истинное высказывание при любых значениях x, т. е. высказывание $(\forall x \in X)$ $(A(x) \to B(x))$ истинно.

Таким образом, «$\Rightarrow$» — знак, обозначающий определенное отношение между математическими предложениями, но не входящий в качестве составной части этих предложений.

В школьной математике введен еще один логический знак — «$\Leftrightarrow$» для обозначения отношения *равносильности* предложений («Алгебра 7», п. 21): «Если из первого предложения следует второе и из второго следует первое, то эти предложения называются равносильными», т. е. $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ тогда и только тогда, когда $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $B(x) \Rightarrow A(x)$.

Равносильность можно определить еще и так: предложения $A(x)$ и $B(x)$ равносильны, если при любых значениях x оба обращаются в истинные высказывания или оба — в ложные высказывания, иными словами, $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ в том и только в том случае, когда высказывание $(\forall x \in X)$ $(A(x) \leftrightarrow B(x))$ истинно («$\leftrightarrow$» — знак эквиваленции).

Так же как «$A(x) \Rightarrow B(x)$» запись «$A(x) \Leftrightarrow B(x)$» высказывание, а не высказывательная форма. Это высказывание о равносильности двух математических предложений: $A(x)$ и $B(x)$, и оно истинно или ложно одновременно с высказыванием $(\forall x \in X)$ $(A(x) \leftrightarrow B(x)$. Таким образом, запись $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0$ представляет собой не формулу, а истинное высказывание о равносильности двух формул (уравнений): $x^2 - 3x = 0$ и $x(x-3) = 0$, так как формула $(\forall x \in \boldsymbol{R})$ $(x^2 - 3x = 0 \leftrightarrow x(x-3) = 0$ выражает истинное высказывание.

С отношениями следования и равносильности связаны часто применяющиеся в математике, в том числе и в школьной, выражения:

«необходимое условие», «достаточное условие», «необходимое и достаточное условие».

Если из предложения P следует предложение Q, т. е. истинно следование $P \Rightarrow Q$, то говорят также, что P — *достаточное* условие для Q, а Q — *необходимое* условие для P.

Таким образом, обороты речи: «Из P следует Q», «P достаточное условие для Q» и «Q — необходимое условие для P» применяются в качестве синонимов.

Если каждое из двух предложений P и Q является следствием другого ($P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$), т. е. эти предложения равносильны ($P \Leftrightarrow Q$), то, исходя из приведенных выше синонимов для «следует», можно утверждать, что каждое из предложений P и Q является *необходимым и достаточным условием* для другого. Таким образом, обороты речи: «P равносильно Q», «P необходимо и достаточно для Q», «Q необходимо и достаточно для P» применяются в качестве синонимов.

Встречаются случаи, когда следование $P \Rightarrow Q$ истинно, а обратное следование $Q \Rightarrow P$ ложно, т. е. P и Q не равносильны. В таком случае P достаточное, но не необходимое условие для Q, а Q необходимое, но не достаточное условие для P.

3. Полная логическая формулировка. Математические предложения могут быть сформулированы и записаны на обычном словесном (русском, английском и т. д.) языке, разумеется, с применением соответствующих математических терминов. Они могут быть записаны на полностью символическом, логико-математическом языке или на частично словесном, частично символическом (словесно-символическом) языке, каким мы пользуемся, в частности, в школьной математике.

Переход от словесной формулировки предложения к ее символической записи часто осуществляется через так называемую *полную логическую формулировку*, отличающуюся от обычной явным выражением всех логических операторов, кванторов и связок (словами естественного языка).

Рассмотрим в качестве примера различные формулировки и записи определения параллельности прямых.

(1) Две прямые называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки или совпадают (Геометрия 6, п. 29; Геометрия 9, § 3).

(2) Две прямые называются *параллельными*, если существует плоскость, в которой они обе лежат, и они не имеют общей точки или совпадают.

(3) По определению $a \parallel b$ тогда и только тогда, когда существует плоскость α, такая, что $a \subset \alpha$ и $b \subset \alpha$ и a и b не имеют общей точки или совпадают.

(4) По определению $a \parallel b$ тогда и только тогда, когда существует плоскость α такая, что $a \subset \alpha$ и $b \subset \alpha$ и ($a \cap b = \varnothing$ или $a = b$).

(5) $a \parallel b \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow}$ (существует плоскость α такая, что $a \subset \alpha$ и $b \subset \alpha$ и ($a \cap b = \varnothing$ или $a = b$)).

(6) $a \parallel b \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \exists \alpha$ ($a \subset \alpha$ и $b \subset \alpha$) и ($a \cap b = \varnothing$ или $a = b$).

(7) $a \parallel b \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \exists\, \alpha\, (a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha) \wedge (a \cap b = \varnothing \vee a = b)$.

Как видно, (1) — обычная словесная (нормальная с точки зрения русского языка) формулировка, удобная для устного ответа;

(2) — полная логическая словесная формулировка, не используемая в обычной устной речи, но облегчающая переход к символической записи;

(3), (4) — промежуточные словесно-символические записи, неудобные ни в качестве формулировок, ни в качестве записей;

(5) — словесно-символическая запись, возможная в школьной математике, но неудобная из-за длинного словесного выражения квантора существования;

(6) — словесно-символическая запись, удобная и целесообразная в обучении, но для ее применения необходимо ввести в школьную математику знак «$\exists$» для квантора существования;

(7) — символическая запись на логико-математическом языке.

Стоящие рядом записи (6) и (7) наглядно подтверждают высказанное выше утверждение, что слова «и» и «или» могут применяться в записях математических предложений на тех же правах, что и знаки «$\wedge$» и «$\vee$».

Рядом стоящие записи (5) и (6) наглядно подтверждают целесообразность введения в школьную математику специального знака для квантора существования.

Приведенные формулировки и записи (1) — (7), разумеется, не исчерпывают все возможные выражения определения параллельности прямых. Имеется много различных языковых вариантов выражения одной и той же мысли. Очевидно, что целесообразными для школьного обучения являются словесная формулировка (1), взятая из школьного учебника, и краткая, но полная словесно-символическая запись (6).

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Введение. Развертывание какой-либо научной дисциплины, в том числе и какой-либо области математики, включает в себя, в частности, наращивание совокупности понятий, которые в данном разделе рассматриваются. И школьный курс математики обогащается введением все новых и новых понятий, причем для удобства изучения каждому новому важному понятию принято сопоставлять подходящее наименование. Именно сам факт наименования выделяет новое понятие из необозримой совокупности возможных, как то, что именно нужно и следует изучать. «Введем в рассмотрение, — говорим мы, например, — множество тех точек плоскости, сумма расстояний которых от двух заданных точек некоторое постоянное число, и назовем так возникающую кривую эллипсом». Сразу же возникает проблема изучения именно так введенного в рассмотрение геометрического объекта.

Известный польский математик Г. Штейнгауз пишет в своей книге [62]:

«Определение, по существу, сводится к тому, что вместо определенной комбинации старых символов используется один новый символ.

Это позволяет сократить формулировки утверждений и теорем, которые в противном случае были бы трудно обозримыми. Например, словесный символ «иррациональное число» служит стенограммой, сокращением длинного выражения «Разбиение рациональных чисел на два класса, удовлетворяющее условиям Дедекинда»...[1] Выбор определения предопределяет направление, в котором мы собираемся развивать математику, поскольку указывает, какую комбинацию символов мы считаем важной и заслуживающей особого сокращенного обозначения.

Формализм математического метода основан на том, что в математических рассуждениях понятия разрешается использовать лишь в том смысле, какой вложен в них определением. Приписывать какой-нибудь другой, не содержащийся в определении смысл, запрещается. Более того, из самого определения по возможности изгоняется все, что может привести к неясности или допустить неоднозначное толкование».

2. Номинальные и реальные определения. В зависимости от того, что определяется — знаковое выражение (термин, символ) или объект, обозначаемый им, — определения подразделяются на *номинальные* и *реальные*.

С помощью номинального определения (от латинского «nomen» — имя) вводится новый термин, символ или выражение как сокращение для более сложных выражений из ранее введенных терминов или символов или же поясняется (уточняется) значение уже введенного термина, символа или выражения. Таким образом, номинальные определения являются средством обогащения языка науки и уточнения семантики его выражений.

Примером номинального определения может служить такое: «Квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число x, что $x^2 = a$». Здесь определяется смысл термина «квадратный корень из неотрицательного числа a».

С помощью реальных определений фиксируются характеристические свойства самих определяемых объектов, разумеется, также с помощью соответствующих терминов, символов или выражений языка. Деление определений на номинальные и реальные вообще не связано с их формальной структурой. Одно и то же определение часто можно представить и как номинальное, и как реальное, т. е. можно говорить об определении термина или об определении обозначаемого этим термином понятия или объекта (отражаемого этим понятием). Номинальные определения (за исключением чисто синтаксических, о которых пойдет речь дальше) переводимы в реальные, и обратно. Эти переводы связаны с интерпретацией терминов (символов, выражений) и соответствующих понятий с помощью объектов определенной предметной области.

Например, определение «Прямоугольник есть параллелограмм с прямым углом» можно рассматривать и как номинальное, вводящее

---

[1] Здесь имеется в виду определение иррационального числа с помощью множеств его рациональных приближений по недостатку и по избытку.

новый термин «прямоугольник» как сокращение для более сложного выражения «параллелограмм с прямым углом», и как реальное, выделяющее из множества объектов, называемых параллелограммами, подмножество прямоугольников, с помощью характеристического свойства — наличия прямого угла.

В семантике номинальные определения подразделяются на *синтаксические* и *семантические*.

С помощью синтаксических определений из одних языковых (знаковых) выражений конструируются другие, задаются правила оперирования с такими выражениями.

Примерами синтаксических определений являются следующие:

$$a^{-1} \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{a}, (a \neq 0), a^{\frac{p}{q}} \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \sqrt[q]{a^p},\ a > 0.$$

С помощью семантических определений устанавливается (или уточняется) значение знака (выражения) посредством явного упоминания предмета, обозначаемого этим знаком (выражением) или же с помощью интерпретации определяющего выражения.

Возможность перехода синтаксического определения в семантическое подтверждает, что целесообразно говорить о синтаксическом и семантическом аспектах определения.

Необходимо подчеркнуть значимость этих аспектов номинальных определений в математике, в том числе, разумеется, и в школьной. С одной стороны, они лежат в основе формальных правил операций с выражениями математического языка (синтаксический аспект), с другой — они устанавливают связь выражений математического языка с обозначаемым ими содержанием (семантический аспект).

3. Определяемое и определяющее. Так называемые явные определения связывают два понятия: «определяемое» и «определяющее». Например, если мы говорим, что слова «целое число x делит целое число y» означает существование такого целого числа z, что $y = x \cdot z$, то мы имеем дело здесь с двумя отношениями: «целое число x делит целое число y» и «существует такое целое число z, что $y = x \cdot z$». Их можно записать символически так: $x \mid y$ и $\exists z \in \boldsymbol{Z}\ (y = x \cdot z)$. Связь между этими понятиями имеет вид

$$x \mid y \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \exists z \in \boldsymbol{Z}\ (y = x \cdot z).$$

То, что определяется в данном примере — отношение «x делит y», называется определяемым (по латыни definiendum — сокращенно Dfd). Выражение же в правой части («существует такое число z, что $y = x \cdot z$») называется определяющим (по латыни definiens, сокращенно Dfn). Между определяемым и определяющим помещается специальный знак $\overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow}$, который читается: «эквивалентно по определению» или же более просто: «означает». Общая схема номинального определения выглядит так:

$$Dfd \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} Dfn.$$

Такое определение понятий применяется при построении сетки понятий, отправляющейся от некоторых исходных понятий. Например, в данном случае мы свели отношение «делит» к понятиям целого числа и арифметической операции умножения целых чисел. Покажем, как к тем же понятиям сводится более сложное понятие наибольшего общего делителя двух целых чисел. Сначала определим, что такое *общий делитель* двух целых чисел (при этом мы можем уже пользоваться определенным выше понятием «делит»). Определение трехместного предиката «c есть общий делитель чисел a и b» (сокращенно ОД (c, a, b)) с использованием логической символики записывается так:

$$(1)\ \text{ОД}\,(c,\ a,\ b) \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} (c \mid a) \wedge (c \mid b)$$

(«c есть общий делитель чисел a и b» означает, что «c делит a» и «c делит b»).

В определяющем содержится уже ранее определенное выражение $x \mid y$. Его, в свою очередь, можно заменить согласно его определению и выразить новый предикат ОД (c, a, b) через исходные — базовые арифметические и логические понятия:

$$(2)\ \text{ОД}\,(c,\ a,\ b) \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \exists\,(k)\,(a = k \cdot c) \wedge \exists\,(l)\,(b = l \cdot c).$$

НОД будем определять так: «Наибольший общий делитель двух чисел a и b — это, по определению, такой их общий делитель, который делится на все другие общие делители этих чисел». В символической записи это выглядит так:

$$(3)\ \text{НОД}\ (d,\ a,\ b) \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \text{ОД}\,(d,\ a,\ b) \wedge \forall\,(c)\,(\text{ОД}\,(c,\ a,\ b) \to (c \mid d).$$

Конечно, предикат ОД (x, y, z) можно опять-таки, согласно (3), выразить через исходные термины, и мы получим номинальное определение, в котором определяющее содержало бы лишь базовые понятия. Такое сведение определения к исходным, далее в рамках данной теории не определяемых выражений, называется *элиминацией* определения.

Но мы не будем осуществлять сейчас указанной элиминации, так как она приводит к достаточно громоздкому и малообозримому выражению.

Аналогично можно развернуть сетку понятий элементарной геометрии и других областей математики: анализа, комбинаторики (теории конечных множеств) и др. С большей или меньшей строгостью это осуществляется в школьных учебниках. Мы выбрали кусочек сетки понятий элементарной арифметики, так как, по нашему мнению, на этом примере особенно удобно пояснить процедуру номинальных определений.

Словесные формулировки номинальных определений, задаваемые в символической записи в форме $Dfd \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} Dfn$, не являются высказываниями в смысле математической логики. Хотя с точки зрения грамматики приведенные выше примеры являются повествовательными предложениями, но в них не хватает существенного и характерного свойства высказывания в математической логике — бессмысленно говорить об истинности или ложности данных предложений. Поэтому, в частности, нет смысла их доказывать или опровергать. С логической точки зрения словесные формулировки номинальных определений ближе к повелительным, чем к повествовательным предложениям. В разговорном языке их естественней было бы выражать в форме «приказа»: «Пользуйся вместо ... (определяющее) выражением ... (определяемое)».

Например, при определении понятия общего делителя вместо: «Число *c* является делителем числа *a*, и число *c* является делителем числа *b*», говорят: «Число *c* является общим делителем чисел *a* и *b*». Это не констатация какого-либо обстоятельства, а «руководство», как следует действовать в данном случае. Вводится новый термин — «общий делитель», во-первых, из соображений удобства, как более краткое наименование, которым в дальнейшем придется часто пользоваться, и, во-вторых, — может быть, это более важное соображение, присутствующее в данной связи, — сам факт введения нового термина должен указывать на то, что именно этим новым понятием, общими делителями нескольких чисел, мы и намерены заниматься.

Отмеченное отсутствие у определений значений истинности относится к номинальным определениям. Реальные же определения, напротив, могут быть истинными или ложными в зависимости от того, выделены или нет в определяющем предложении характерные черты объекта, являющимися предметом этого определения.

4. Корректные и некорректные определения. Хотя для номинальных определений не определено значение истинности, для них требуется выполнение ряда правил, которые должны выполняться, чтобы процедура определений могла служить для построения какой-либо области математики. Если такие правила выполняются, то про определение или систему определений говорят, что они *корректны*. Мы укажем лишь важнейшие правила корректности.

Первое и самое важное требование, которое очень существенно и в школьном преподавании, — это отсутствие *порочного круга* и связанная с ним возможность исключения (элиминируемости) нововведенных терминов. Для каждого отдельного определения нарушение этого требования проявляется в том, что определяемое содержится в определяющем (или даже с ним совпадает), например: «Решение уравнения — это то число, которое является его решением».

Такая ошибка в определении приводит к тому, что мы не сможем выразить новые термины через исходные.

Порочный круг может относиться не к отдельному определению, а к цепочке последовательных определений. Требование отсутствия порочного круга состоит тогда в том, что не только определяющее не должно содержать определяемое, но не должно даже содержать терминов, которые были на каком-то этапе определены через определяемое. Если такое требование нарушается, то при попытке исключения нового термина процедура элиминации «зацикливается» и сведение к определению в исходных терминах не может быть осуществлено. Неверно говорить, что «окружностью называют границу круга», а «кругом называют часть плоскости, ограниченной окружностью».

Другое требование, выполнение которого необходимо для корректности определения, — это *отсутствие омонимии*: каждый термин должен встретиться не более одного раза в качестве определяемого. Если это не так, то, очевидно, нельзя обеспечить однозначность: можно будет понимать данный термин то одним, то другим образом.

С точки зрения преподавания математики нарушение этого требования особенно пагубно: многие ошибки проистекают из того, что один и тот же термин употребляется в различных смыслах. При этом оказывается, что опасность ошибки особенно велика, когда смыслы терминов близки. Если оба смысла ничего общего между собой не имеют, то их и трудно бывает спутать. Конечно, никто не перепутает смысл слова «поле» в словосочетании «поля и леса» со смыслом слова «поле» в алгебре. Более того, даже внутри математики значение термина «поле» в алгебре существенно отлично от соответствующего слова в анализе в сочетании «векторное поле» и др. Возможность недоразумения исключается, так как термин употребляется в различных контекстах. Хуже обстоит дело, когда термин в той же самой области знания употребляется в близких смыслах.

Например, раньше через $\sqrt{9}$ обозначали не только число 3, но и пару чисел $\{3, -3\}$ (так называемый алгебраический корень из числа). Сейчас эта омонимия устранена. Запись AB обозначала как отрезок с концами A и B, так и его длину, слово «круг» часто использовалось для обозначения окружности, слово «цифра» — для обозначения соответствующего однозначного числа и т. д.

5. Существование и единственность. Важный и трудный вопрос, возникающий в связи с номинальными определениями, — это вопрос о существовании определяемого термина. Может случиться, что в данной области математики вообще нет объекта, описываемого определяющим. Сюда относятся случаи «противоречия в определении», когда от определяемого объекта требуют выполнения противоречащих друг другу свойств («круглый квадрат», «пятисторонний четырехугольник» и т. д.). Иногда такое противоречие скрыто глубоко и для своего выяснения требует доказательства некоторого утверждения. Например, определение «треугольник с двумя тупыми углами» определяет пустое множество объектов, но для доказательства этого надо сначала доказать, что сумма величин углов треугольника равна 180°.

Вопрос о том, существует ли объект с требуемыми в определении свойствами, может зависеть и от состояния науки на сегодняшний день. Например, до сих пор неизвестно, существует ли четное число, которое нельзя представить в виде суммы двух простых чисел (в этом состоит известная проблема Гольдбаха). Поэтому если мы определим «негольдбахово число» как наименьшее натуральное четное число, которое нельзя представить в виде суммы двух простых чисел, то вопрос о существовании таких чисел является открытым.

По вопросу, включать или нет существование определяемого объекта в качестве одного из условий корректности определения, мнения специалистов расходятся. Большинство логиков считает, что этого не следует делать: определение не предрешает существования определяемого объекта, так же как, например, грамматически правильно построенная фраза может быть абсурдной или ложной: «Идея яростно спит» или «Луна состоит из зеленого сыра». Но все логики считают, что заведомо несуществующие объекты нецелесообразно определять.

Кроме того, определение должно определять лишь одно понятие, иначе будет нарушено требование отсутствия омонимии: один и тот же термин будет обозначать различные объекты. Приведем некоторые примеры из школьной математики, показывающие важность требований существования и единственности определяемых понятий.

а) Нельзя говорить «квадратным корнем из числа a называется такое число x, что $x^2 = a$». Если $a < 0$, то (по крайней мере, в области действительных чисел) этим не определяется никакой объект. Если же $a > 0$, то чисел x с требуемым свойством два и потому неизвестно, о каком из них идет речь.

б) По той же причине при определении логарифма числа b по основанию a добавляют требования, что $b > 0$ и что $a > 0$, $a \neq 1$. В частности, требование $a \neq 1$ налагается потому, что при $b \neq 1$ уравнение $1^x = b$ не имеет корней, а при $b = 1$ этих корней бесконечно много.

в) Длину окружности определяют как предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в эту окружность. Из этого определения можно вывести ряд свойств длины окружности (например, ее пропорциональность длине радиуса), но все эти свойства «висят в воздухе», пока не доказано существование такого предела.

6. Дескрипции. Указанные выше определения длины окружности и арифметического корня относятся к так называемым *дескрипциям*, т. е. определениям объектов путем указания их свойств. Примерами дескрипций могут служить данные выше определения показательной функции и геометрических величин (см. главу III § 2 п. 5 и главу V § 3).

В словесной формулировке дескрипций встречается или подразумевается местоимение «тот, который», — например, вместо того чтобы сказать: «А. С. Пушкин», мы можем сказать: «Автор «Евгения Онегина» («тот, который написал роман «Евгений Онегин»).

В языках, обладающих артиклями, вместо «тот, который» обычно применяются определенные артикли. Но некорректно говорить: «тот, который написал роман «Золотой теленок»», так как мы не знали бы, о ком из двух авторов речь: об Ильфе или о Петрове. Словосочетание «тот, который» используется здесь некорректно, так как не выполняется единственность.

Дескрипции часто употребляются в математике для введения новых объектов и их наименований:

«То число, которое будучи умножено на длину диаметра, дает длину его окружности», — одна из возможных дескрипций числа π (именно та, которой пользуются в школьной математике); или: «то число, к которому сходится последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; $n = 1, 2, \ldots$» — одна из дескрипций числа e — основания натуральных логарифмов.

Некорректной дескрипцией было бы: «корень уравнения $x^2 + x - 6 = 0$», так как таких корней два, а именно 2 и —3, но корректной была бы дескрипция «положительный корень уравнения $x^2 + x - 6 = 0$», здесь имеют место и существование и единственность.

И, конечно, некорректна дескрипция «то число, которое является суммой гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$», так как здесь нарушено условие существования.

Следует отметить, что дескрипция может определять и множества элементов, например:

«Неопределенным интегралом на промежутке Δ от функции f называют множество функций, производные которых при любом $x \in \Delta$ имеют значение $f(x)$».

Хотя функций с требуемым свойством бесконечно много, это определение не нарушает требования единственности, поскольку здесь определяется не одна функция, а множество функций. В то же время условие существования определяемого здесь, вообще говоря, не выполнено, поскольку не все функции имеют первообразную. Если после слов «от функции f» добавить «непрерывной на этом промежутке», то и требование существования окажется выполненным.

7. Аксиоматические определения. К дескриптивным определениям близки, хотя и отличаются от них, так называемые *аксиоматические определения*. Как отмечалось в п. 3 § 4 главы I, при аксиоматическом построении математической теории некоторые понятия остаются неопределенными (например, понятия точки, прямой, плоскости, инцидентности, конгруэнтности, порядка и параллельности в аксиоматике Гильберта или понятия точки, плоскости и расстояния в аксиоматике А. Н. Колмогорова). Определением этих понятий можно считать совокупность аксиом, описывающих их свойства. При этом непротиворечивость системы аксиом заменяет доказательство существования определяемых понятий, а категоричность этой системы — доказательство единственности.

При этом, однако, следует иметь в виду, что у одной и той же системы аксиом могут быть различные модели, а потому единственность здесь понимается в особом смысле слова (с точностью до изоморфизма). Так, например, для системы аксиом планиметрии, сформулированной Гильбертом, в качестве модели можно выбрать следующую:

точки — пары действительных чисел (a, b),

прямые — линейные уравнения с действительными коэффициентами $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, для которых $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

При этом точка (a, b) инцидентна прямой $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, если $\alpha a + \beta b + \gamma = 0$.

Разумеется, свойства определяемых понятий должны быть логически прозрачными. Нельзя, например, считать удовлетворительными определения основных геометрических понятий, данные в книге Евклида «Начала»:

1. *Точка есть то, что не имеет частей.*
2. *Линия есть длина без ширины.*
3. *Концы линии суть точки.*
4. *Прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно лежащих на ней точек.*
5. *Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.*
6. *Границы поверхности суть линии.*
7. *Плоскость есть такая поверхность, которая одинаково расположена по отношению к лежащим на ней прямым.*
8. *Плоский угол есть взаимное наклонение линий на плоскости, которые друг друга встречают, но не расположены на одной прямой.*
9. *И если линии, образующие угол, прямые, то угол называется прямолинейным.*

Про такие определения можно сказать, что в них темное определяется через темнейшее: ведь понятия длины, ширины, части, границы ничуть не более прозрачны, чем определяемые понятия точки, прямой или плоскости. Несовершенство таких определений видно из того, что в дальнейшем изложении Евклид нигде на них не опирается — на самом деле он использует существующие у читателя наглядные представления о соответствующих понятиях, а не только аксиомы, описывающие их свойства.

В отличие от Евклида Гильберт в своей книге «Основания геометрии» пишет:

«Мы мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем точками и обозначаем A, B, C, ...; вещи второй системы мы называем прямыми и обозначаем a, b, c ...; вещи третьей системы мы называем плоскостями и обозначаем α, β, γ, ...

Мы мыслим точки, прямые и плоскости в определенных соотношениях и обозначаем эти соотношения различными словами, как-то: «лежат», «между», «конгруэнтный», «параллельный», «непрерывный». Точное и для математических целей полное описание этих соответствий достигается аксиомами геометрии».

При этом Гильберт не использует в дальнейшем изложении никаких свойств определенных аксиомами понятий, кроме логически вытекающих из этих аксиом. В этом и состоит косвенность даваемых определений основных понятий: для математического построения теории несущественно, чем являются на самом деле точки, прямые и плоскости, а также отношения «лежать», «между» и т. д., — важны лишь свойства этих понятий (разумеется, если речь пойдет о прикладных вопросах, то понадобятся более конкретные пояснения, что же представляют собой изучаемые понятия).

Многие логики и специалисты по основаниям математики полагают, что аксиоматические определения нельзя рассматривать как определения в собственном смысле слова. Мы считаем, что это вопрос терминологии. Ясно, что они не являются определениями в традиционном понимании этого слова, а представляют собой некоторую процедуру, возникшую в математике в явном виде сравнительно недавно и оказавшуюся весьма плодотворной как в самой математике, так и в ее приложениях.

Отметим в заключение сходство и различие между дескриптивными и аксиоматическими определениями. В обоих случаях определяемые понятия задаются своими свойствами. Но в дескриптивных определениях эти свойства задают отношения определяемых объектов к уже известным объектам (например, площадей фигур к этим фигурам), а при аксиоматических определениях речь идет о понятиях, ранее не рассматривавшихся.

8. Классические определения. В классической логике Аристотеля значительную роль играли определения понятий через *род* и *видовое отличие*. Их можно также рассматривать как частный вид номинальных определений. Из школьной математики можно привести такие примеры:

а) параллелограмм $\overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow}$ четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны;

б) ромб $\overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow}$ параллелограмм, стороны которого конгруэнтны;

в) квадрат $\overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow}$ ромб, углы которого прямые.

Определения через род и видовое отличие часто называются классическими.

Уже из приведенных примеров видна их общая структура: в определяющем указывается некоторое множество (род), которому принадлежит определяемое, а затем указывается некоторое свойство, которое выделяет определяемый объект среди других объектов этого же рода. Надо иметь в виду, что сам Аристотель пользовался определениями через род и видовое отличие как реальными определениями: не для введения новых объектов, а для характеристики уже известных. Но, конечно, классическими определениями можно пользоваться и как номинальными. Так поступают, скажем, ботаники и зоологи, когда вводят наименование новооткрытого, ранее неизвестного вида.

Вообще, следует сказать, что по форме реальные и номинальные определения могут совпадать. Различие состоит в том, намереваемся ли мы ввести термин для обозначения нововводимого в рассмотрение объекта или же указать на те свойства, которые характеризуют уже известный нам объект. Именно для этих целей определение через род и видовое отличие часто применяется.

Весьма распространенным в математике, в том числе и в школьной, видом определения является *определение через абстракцию* — способ выделения (абстрагирования) нового понятия путем установления в некотором множестве отношения эквивалентности. Это отношение порождает разбиение множества на классы эквивалентности (классы абстракции). Каждый из этих классов (или соответствующее характеристическое свойство) принимается за новое понятие (см. п. 4 § 3 главы I).

9. Рекурсивные определения. Остановимся на одной форме определений, все чаще встречающейся в математике и в ее приложениях. Это так называемые *рекурсивные определения*. Рекурсивные определения встречаются в основаниях математики и математической логике, в теории алгоритмов и в языках программирования на ЭВМ.

Особенно в этой последней области разработана и далее разрабатывается система рекурсивных определений.

Приведем пример рекурсивного определения.

Пусть $A = \{а, б, в, ..., ю, я\}$ — (конечный) алфавит, состоящий из букв а, б, в, ... я.

Рекурсивно определяется понятие *слова в алфавите А*. Для этого используются следующие три условия:

1) каждая буква из A есть слово;

2) если α и β — слова, то словом будет также и $\alpha\beta$. ($\alpha\beta$ следует понимать так: сперва записывается уже построенное слово α, а затем справа к нему приписывается слово β);

3) словом считается *лишь* такой объект, который получается в результате применения условий 1) и 2). (Отдельно в данном случае обычно в понятие слова над A включается «пустое слово», состоящее из пустого множества букв. Но такое дополнительное определение не обязательно, оно не всегда вводится и не характерно для рекурсивных определений.)

Важнейший объект математики — натуральные числа, часто вводятся как слова в однобуквенном алфавите, состоящем из единственной буквы. Так, например, поступает А. А. Марков в своей известной книге «Теория алгорифмов» [41] (и вообще это принятая процедура в теории алгоритмов и теории рекурсивных функций). Таким образом, согласно такой точке зрения числа 1, 2, 3, 4 ... — это слова I, II, III, IIII и т. д.

Можно также — и эта точка зрения использующих современные ЭВМ — рассматривать натуральные числа как слова в двубуквенном алфавите $\{0; 1\}$, условливаясь при этом, что слова должны начинаться на 1, т. е. отождествляя натуральные числа с их двоичной записью: 1 — 1, 2 — 10, 3 — 11, 4 — 100 и т. д.

Если воспринимать вышеприведенное определение «слова в алфавите» буквально, то, как нетрудно видеть в пункте 2), в определяющем встречается уже определяемый термин («слово»), так что нарушается основное требование для корректности номинального определения — отсутствие порочного круга. Но на самом деле элиминируемость сохраняется и порочный круг в определении является лишь кажущимся явлением. Это характерная особенность рекурсивного определения.

Рекурсивные определения оказались особенно полезны при построении искусственных языков, а среди них в первую очередь в языках программирования АЛГОЛ, ФОРТРАН и др., служащих для того, чтобы однозначно записывать процедуры решения задач на ЭВМ.

Чтобы свести рекурсивно определенное понятие к исходным понятиям, нужно в каждом случае строить так называемое «дерево разбора», позволяющее последовательно сводить понятие более высокой ступени к понятиям низших ступеней, пока мы не дойдем до исходных понятий.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1. Формальные и содержательные доказательства. Слово «доказательство», как и слово «рассуждение», применяется в обыденной речи в весьма широком (и недостаточно уточненном, расплывчатом) смысле.

Мы пользуемся термином «доказательство» в смысле «доказательства математических предложений» или, точнее, «доказательства предложений в рамках какой-нибудь математической теории».

Исходя из такого понимания этого термина, мы различаем *содержательные* (неформальные) и *формальные* доказательства, применяющиеся соответственно в содержательных (неформальных) или полуформальных и в формальных математических теориях.

Школьная математика включает начальные фрагменты некоторых математических теорий (алгебры, геометрии, анализа) в неформальном (содержательном) изложении. Поэтому и доказательства в школьной математике строятся как содержательные доказательства, в которых используются обычные рассуждения, а правила логического вывода не фиксируются.

По заданному содержательному доказательству теоремы можно построить соответствующее формальное доказательство с использованием определенного набора правил вывода. Перевод обычного, содержательного доказательства в формальное выявляет логику доказательств, т. е. те средства вывода, которые обычно неявно используются в доказательствах.

Приведем пример перевода содержательного доказательства в формальное.

Теорема о трех перпендикулярах (Геометрия 9, § 36):

«Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной».

Так как теорема сформулирована как необходимое и достаточное условие, для доказательства ее расчленяют на две взаимно-обратные теоремы, одна из которых выражает достаточность условия:

(1) $m \subset \alpha,\ (CB) = \text{Пр}\,\alpha\,(AB),\ m \perp (BC) \rightarrow m \perp (AB),$

а вторая — необходимость:

(2) $m \subset \alpha,\ (CB) = \text{Пр}\,\alpha\,(AB),\ m \perp (AB) \rightarrow m \perp (BC)$

(В этих записях сохранены обозначения учебника, с. 83, рис. 131.)

Рассмотрим доказательство достаточности (доказательство необходимости аналогично).

а) Неформальное доказательство, приведенное в учебнике (Геометрия 9, с. 83): «Пусть прямая m, лежащая в плоскости α, перпендикулярна (CB). Из определения перпендикуляра к плоскости следует, что $(AC) \perp m$. Итак, прямая m перпендикулярна прямым CB и AC, лежащим в плоскости ABC. Тогда $m \perp (ABC)$ (§ 28, теорема 14) и $m \perp (AB)$».

Это доказательство можно записать в виде следующей последовательности предложений:

(а) $(CB) = \text{Пр}\ \alpha\ (AB) \to (AC) \perp \alpha$	(по определению проекции наклонной к плоскости);
(б) $(AC) \perp \alpha$ и $m \subset \alpha \to$ $\to (AC) \perp m$	(по определению перпендикуляра к плоскости);
(в) $m \perp (AC)$ и $m \perp (BC) \to$ $\to m \perp (ABC)$	(по признаку перпендикулярности прямой и плоскости);
(г) $m \perp (ABC)$ и $(AB) \subset$ $\subset (ABC) \to m \perp (AB)$	(по определению перпендикуляра к плоскости)

Последовательность предложений (а) — (г) представляет собой другую, несколько уточненную, символическую запись процитированного выше из школьного учебника содержательного (неформального) доказательства, в которой по-прежнему не выявлена логика доказательства. Однако такое представление доказательства является промежуточным между обычным словесным изложением содержательного доказательства и соответствующим формальным доказательством. Оно помогает нам строить последнее, отыскать недостающие предложения, чтобы получить конечную последовательность предложений, удовлетворяющую определению формального доказательства.

Для одного содержательного доказательства можно построить различные формальные доказательства, отличающиеся своей логикой, т. е. применяемыми правилами вывода. Приведем один из возможных вариантов формального доказательства рассматриваемой теоремы.

Доказательство	Анализ доказательства
1. $(CB) = \text{Пр}\ \alpha\ (AB)$	1. посылка;
2. $((CB) = \text{Пр}\ \alpha\ (AB) \to (AC) \perp \alpha$	2. из определения проекции;
3. $(AC) \perp \alpha$	3. 1, 2, MP[1];
4. $m \subset \alpha$	4. посылка;
5. $(AC) \perp \alpha \wedge m \subset \alpha$	5. 3, 4, BK[2];
6. $(AC) \perp \alpha \wedge m \subset \alpha \to$ $\to (AC) \perp m$	6. из определения перпендикулярности прямой и плоскости
7. $(AC) \perp m$	7. 5, 6, MP;
8. $m \perp (BC)$	8. посылка;
9. $m \perp (AC) \wedge m \perp (BC)$	9. 7, 8, BK;
10. $m \perp (AC) \wedge m \perp (BC) \to$ $\to m \perp (ABC)$	10. ранее доказ. теорема;
11. $m \perp (ABC)$	11. 9, 10, MP;
12. $(AB) \subset (ABC)$	12. аксиома;
13. $m \perp (ABC) \wedge (AB) \subset (ABC)$	13. 11, 12, BK;
14. $m \perp (ABC) \wedge (AB) \subset (ABC) \to$ $\to m \perp (AB)$	14. из определения;
15. $m \perp (AB)$	15. 13, 14, MP.

[1] «3, 1, 2, MP» обозначает: «Предложение 3 получено из предложений 1 и 2 по правилу вывода Modus ponens (из $A \to B$ и A выводимо B)».

[2] «ВК» — правило введения конъюнкции (из A и B выводима $A \wedge B$).

Нетрудно заметить, что предложения (а) — (г), с помощью которых мы записали выше содержательное доказательство, входят и в состав формального доказательства (на 2, 6, 10 и 14-м местах).

Сопоставление двух последовательностей предложений, (а) — (г) и 1 — 15, показывает, какими предложениями необходимо дополнить первую, чтобы получить вторую, а также как из формального доказательства получить корректное содержательное доказательство, т. е. что опускается во второй последовательности предложений, чтобы получить первую.

2. Правила следования. В приведенном выше формальном доказательстве использованы два правила вывода (MP и BK). Эти и другие применяемые в формальных доказательствах правила вывода имеют семантические аналоги, основанные на отношении следования, и в таком (семантическом) толковании их называют *правилами следования.*

Приведем перечень некоторых простейших и широко применяемых правил вывода и их семантических аналогов.

Правила

вывода	следования
$A, A \to B \vdash B$ (МР)	$A, A \to B \Rightarrow B$ Называется также правилом заключения — (ПЗ)
$A, B \vdash A \wedge B$ (ВК)	$A, B \Rightarrow A \wedge B$ (ВК)
$A \wedge B \vdash A$ (УК — *правило удаления конъюнкции*)	$A \wedge B \Rightarrow A$ (УК)
$A \to B, \neg B \vdash \neg A$ (ПО — *правило отрицания*);	$A \to B, \neg B \Rightarrow \neg A$ (ПО)
$A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ (ПК — *правило контрапозиции*)	$A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$ (ПК)
$A \wedge B \to C \vdash A \wedge \neg C \to \neg B$ (ПРК — *правило расширенной контрапозиции*)	$A \wedge B \to C \Rightarrow A \wedge \neg C \to \to \neg B$ (ПРК)
Если Г, $A \to B$ (Г — список посылок), то $\Gamma \vdash A \to B$ (ТД — *теорема дедукции*)	Если Г, $A \Rightarrow B$, то $\Gamma \Rightarrow A \to \to B$ (семантический аналог теоремы дедукции)
Если Г, $A \vdash B$ и Г, $A \vdash \neg B$, то $\Gamma \to \neg A$ (RA — *приведение к абсурду*).	Если Г, $A \Rightarrow B$ и Г, $A \Rightarrow \neg B$, то $\Gamma \Rightarrow \neg A$ (RA).

Правила вывода (за исключением исходных, в качестве одного из которых при различных формализациях математических теорий обычно принимается МР) устанавливаются с помощью соответствующих формальных выводов, их семантические аналоги (правила следования) — с помощью неформальных рассуждений на основе отношения следования.

Приведем в качестве примера **обоснование *правила силлогизма*** (ПС): а) как правила вывода и б) как **правила следования.**

а) $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$.

Установим сначала выводимость.

Вывод	Анализ вывода
1. $A \to B$;	1. посылка;
2. A;	2. посылка;
3. B;	3. 1, 2, MP;
4. $B \to C$;	4. посылка;
5. C.	5. 3, 4, MP.

Применив теперь к доказанной выводимости ТД, получаем

$$A \to B,\ B \to C \vdash A \to C \text{ (ПС)}.$$

б) Отметим прежде всего, что приведенный формальный вывод может служить и доказательством следования

$$A \to B,\ B \to C \Rightarrow A \to C,$$

если заменить в нем ссылку на MP ссылкой на ПЗ, а ссылку на ТД ссылкой на семантический аналог ТД.

Но это правило следования можно установить и исходя из определения следования. Допустим, что $A \to C$ не следует из посылок $A \to B$ и $B \to C$. Тогда возможен случай, при котором $A \to B$ и $B \to C$ истинны, а $A \to C$ ложно. Последнее означает, что в этом случае A истинно, а C ложно. Но если C ложно, а $B \to C$ истинно, то B ложно, и так как $A \to B$ истинно, то и A ложно. Мы получили противоречие (A истинно и A ложно). Значит, наше допущение ложно, а стало быть, имеет место следование

$$A \to B,\ B \to C \Rightarrow A \to C.$$

Аналогично обосновывается семантический аналог теоремы дедукции.

Пусть $\Gamma,\ A \Rightarrow B$, но неверно, что $\Gamma \Rightarrow A \to B$. Это означает, что возможен случай, когда все посылки из Γ истинны, а $A \to B$ ложно. В этом случае A истинно, а B ложно, поэтому неверно, что $\Gamma,\ A \Rightarrow B$, что противоречит условию.

Необходимо отметить, что это правило широко применяется (разумеется, неявно) в школьной математике, как и вообще в математике.

Доказать теорему — значит установить, что она следует из каких-нибудь предшествующих ей предложений (аксиом, теорем, определений) данной теории.

Очень часто приходится доказывать теоремы, представленные в виде импликации $A \to B$, где A — условие, а B — заключение теоремы.

Если обозначить через Γ список предшествующих предложений теории (посылок), то доказать теорему $A \to B$ означает установить следование $\Gamma \Rightarrow A \to B$.

В практике доказательства обычно присоединяют условие A к посылкам Г и доказывают следование $\Gamma, A \Rightarrow B$, после чего утверждают, что «теорема доказана». Это утверждение означает неявный переход от $\Gamma, A \Rightarrow B$ к $\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B$, т. е. неявное применение семантического аналога теоремы дедукции.

3. Косвенное доказательство. В математике часто используются различные формы *косвенного доказательства* (известного из школьного курса под не совсем удачным названием доказательства способом «от противного»).

Рассмотрим логические основы косвенного доказательства.

Косвенное доказательство некоторой теоремы Т состоит в том, что исходят из отрицания Т, называемого *допущением* косвенного доказательства (ДКД), и выводят из него ложное заключение применением (чаще всего в неявном виде) правила приведения к абсурду (RD — Reductio ad absurdum).

Пусть Г — множество посылок, включающее аксиомы, определения и ранее доказанные теоремы теории, на языке которой выражено и доказываемое предложение Т. Тогда допущением косвенного доказательства будет $\neg$Т. Устанавливается следование $\Gamma, \neg T \Rightarrow \neg A$, где $A \in \Gamma$. По свойствам следования имеем также $\Gamma, \neg T \Rightarrow A$. Но из $\Gamma, \neg T \Rightarrow \neg A$ и $\Gamma, \neg T \Rightarrow A$ по правилу RA получаем $\Gamma \Rightarrow \neg\neg T$ или $\Gamma \Rightarrow T$, т. е. Т доказана.

В практике доказательства часто доводят приведение к абсурду до получения противоречия в виде конъюнкции $A \wedge \neg A$ и доказательство завершается утверждением «полученное противоречие доказывает теорему». Выясним точный смысл этих слов.

Так как $A \wedge \neg A$ тождественно-ложно, то $\neg(A \wedge \neg A)$ тождественно-истинно и поэтому имеем $\Gamma, \neg T \Rightarrow A \wedge \neg A$ и $\Gamma, \neg T \Rightarrow \neg (A \wedge \neg A)$, откуда по RA получаем опять $\Gamma \Rightarrow T$.

Так как в школьной математике доказываемое предложение очень часто представляется в виде импликации $T : A \rightarrow B$, то ДКД в таком случае будет $\neg(A \rightarrow B)$, или равносильное предложение $A \wedge \neg B$.

Приведем пример. Допустим, что a, b, c — различные прямые на плоскости и мы хотим доказать предложение

$$P \rightarrow Q : a \parallel c \wedge b \parallel c \rightarrow a \parallel b. \tag{1}$$

ДКД:

$$P \wedge \neg Q : a \parallel c \wedge b \parallel c \wedge \neg (a \parallel b). \tag{2}$$

Из этого допущения, применяя правило УК (удаления конъюнкции), получаем

$$P : a \parallel c \wedge b \parallel c \tag{3}$$

и

$$\neg Q : \neg (a \parallel b). \tag{4}$$

Из определения параллельных прямых получаем

$$\neg Q \rightarrow R : \neg (a \parallel b) \rightarrow \exists C (C \in a \wedge C \in b). \tag{5}$$

Из (4) и (5) по ПЗ получаем

$$R : \exists C\,(C \in a \wedge C \in b). \qquad (6)$$

Из (3) и (6) по ВК:

$$P \wedge R : a \parallel c \wedge b \parallel c \wedge \exists C\,(C \in a \wedge C \in b). \qquad (7)$$

Из аксиомы параллельных следует

$$\neg (P \wedge R) : \neg\,(a \parallel c \wedge b \parallel c \wedge \exists C\,(C \in a \wedge C \in b). \qquad (8)$$

Наконец, из (7) и (8) по ВК получаем противоречие

$$(P \wedge R) \wedge \neg\,(P \wedge R),$$

которое и доказывает теорему (в уточненном выше смысле этих слов).

Часто при косвенном доказательстве предложения $P \to Q$ исходя из $P \wedge \neg Q$ выводят $\neg P$. Дальше можно различными способами вывести доказываемое предложение $P \to Q$: во-первых, получением противоречия $P \wedge \neg P$, которое «доказывает теорему»; во-вторых, выводом контрапозиции $\neg Q \to \neg P$. Контрапозитивная форма косвенного доказательства — одна из наиболее простых. После получения $\neg P$ доказательство завершается следующим образом:

1. $P \wedge \neg Q$	1. ДКД
2. $\neg Q$	2. 1, УК.
3. ...	3. ...
. . . .	. . . .
n. $\neg P$	n . . .
$n+1$ $\neg Q \to \neg P$	$n+1$. 2, n, ТД
$n+2$, $P \to Q$	$n+2$. $n+1$, ПК

Имеется ряд специальных форм косвенного доказательства. Рассмотрим часто встречающуюся в практике доказательства форму, известную под названием доказательства методом исключения.

Допустим, что нам нужно доказать предложение $P \to Q_1$, т. е. установить, что $\Gamma \Rightarrow P \to Q_1$, или, используя ТД, что $\Gamma, P \Rightarrow Q_1$.

Наряду с заключением Q_1 рассматриваются все остальные возможности $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$, т. е. такие, что дизъюнкция $\bigvee\limits_{i=1}^{n} Q_i$ принадлежит к посылкам $(\bigvee\limits_{i=1}^{n} Q_i \in \Gamma)$, т. е. является аксиомой, определением, ранее доказанной теоремой или следствием из них. Затем доказывают, что каждая из остальных возможностей $Q_2, \ldots, Q_n$ ведет к противоречию, и таким образом получают $\neg Q_2, \neg Q_3, \ldots, \neg Q_n$, а следовательно, конъюнкцию $\bigwedge\limits_{i=2}^{n} \neg Q_i$, или равносильное предложение $\neg\,(\bigvee\limits_{i=2}^{n} Q_i)$.

Из $Q_1 \vee (\bigvee\limits_{i=2}^{n} Q_i)$ и $\neg(\bigvee\limits_{i=2}^{n} Q_i)$, применяя УД (из $A \vee B$ и $\neg B$ следует A), получаем Q_1.

В качестве иллюстрации проведем логический анализ доказательства методом исключения теоремы: «Если любая плоскость, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то эти прямые параллельны», т. е. $\Gamma \Rightarrow P \to Q_1 : \Gamma \Rightarrow \forall \alpha\,(\alpha \times a \to \alpha \times b) \to a \parallel b$, или

$$\Gamma,\ P \Rightarrow Q_1 : \Gamma \Rightarrow \forall\, \alpha\, (\alpha \times a \to \alpha \times b) \Rightarrow a \parallel b.$$

Исходим из предложения

$$Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 : a \parallel b \vee a \times b \vee a \dot{-} b, \tag{1}$$

принадлежащего Г («$\times$», «$\dot{-}$» обозначают соответственно отношения пересечения и скрещивания прямых).

Допущение $Q_2 : a \times b$ дает $a \times b \to (\exists\, \alpha)\ (\alpha \times a \wedge \neg \alpha \times b)$ (достаточно провести произвольную плоскость α через b, отличную от плоскости, определяемой пересекающимися прямыми a, b) или, так как $(\exists\, \alpha)\, (\alpha \times a \wedge \neg \alpha \times b) \Leftrightarrow \neg\, (\forall\, \alpha)\, (\alpha \times a \to \alpha \times b)$, получаем $Q_2 \to \neg P : a \times b \to \neg (\forall\, \alpha)\, (\alpha \times a \to \alpha \times b)$. (2). Из $Q_2 \to \neg P$ и P по ПО (правилу отрицания: из $A \to B$ и $\neg B$ следует $\neg A$) получаем

$$\neg\, Q_2 : \neg\, a \times b. \tag{3}$$

Аналогично допущение $Q_3 : a \dot{-} b$ приводит к

$$Q_3 \Rightarrow \neg\, P : a \dot{-} b \to \neg\, (\forall\, \alpha)\, (\alpha \times a \to \alpha \times b) \tag{4}$$

(достаточно через b и какую-нибудь точку прямой a провести плоскость α). Из (4) и P по ПО получаем

$$Q_3 \Rightarrow \neg\, Q_3 : \neg\, a \dot{-} b. \tag{5}$$

Из (3) и (5) по ВК получаем $\neg\, Q_2 \wedge \neg\, Q_3$ или равносильное предложение

$$\neg\, (Q_2 \vee Q_3) : \neg\, (a \times b \vee a \dot{-} b). \tag{6}$$

Из (1) и (6) по УД получаем $Q_1 : a \parallel b$.

4. Доказательство методом математической индукции. Метод математической индукции — специальный метод доказательства, применяющийся к предложениям типа

$$(\forall\, x \in \boldsymbol{N})\ P\,(x) \tag{1}$$

(т. е. к предложениям, выражающим некоторое свойство, присущее любому натуральному числу) или

$$(\forall\, x \in \boldsymbol{N})\ (x > k \to P\,(x)) \tag{2}$$

(любому натуральному числу, большему некоторого натурального числа k).

Так как непосредственная проверка наличия свойства P у любого натурального числа невозможна ввиду бесконечности множества $\boldsymbol{N}$, то поступают так: устанавливают наличие этого свойства у числа 1, т. е. истинность предложения P (1), и доказывают, что из допущения о наличии его для некоторого x следует наличие этого свойства и для x', т. е. для числа «непосредственно следующего за x». После этого заключают об истинности предложения (1), т. е. что свойством P обладает любое натуральное число.

Для обоснования этого заключения достаточны ссылки на следующие три аксиомы, характеризующие структуру $(\boldsymbol{N}, ')$:

a1. $1 \in \boldsymbol{N}$

a2. $\forall x\,(x \in \boldsymbol{N} \to x' \in \boldsymbol{N})$

a3. Других натуральных чисел нет.

Система a1 — a3, по существу, эквивалентна аксиоме математической индукции, которую можно сформулировать на языке множеств $1 \in M \wedge (\forall x)\,(x \in M \to x' \in M) \to M = \boldsymbol{N}$, или на языке свойств (одноместных предикатов)

$$P(1) \wedge (\forall x)\,(P(x) \to P(x')) \to (\forall x)\,P(x) \tag{3}$$

(если x обладает некоторым свойством P и для всякого натурального числа из того, что оно обладает этим свойством, следует, что и непосредственно следующее за ним натуральное число обладает им, то всякое натуральное число обладает свойством P).

Используя форму (3), можно следующим образом представить схему доказательства методом математической индукции:

1. $P(1)$.	1. Устанавливается проверкой;
2. $(\forall x)\,(P(x) \to P(x'))$.	2. доказывается;
3. $P(1) \wedge (\forall x)\,(P(x) \to P(x'))$.	3. 1, 2, ВК;
4. $P(1) \wedge (\forall x)\,(P(x) \to P(x') \to$ $\to (\forall x)\,P(x)$.	4. аксиома математической индукции;
5. $(\forall x)\,P(x)$.	5. 3, 4, ПЗ.

Эта схема, по существу, обосновывает правило следования (или правило вывода), называемое *правилом индукции*. Это правило и применяется (неявно) в практике доказательства при переходе от посылок $P(1)$ и $(\forall x)\,(P(x) \to P(x'))$ к заключению $(\forall x)\,P(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд.
2. Ленин В. И. Полн. собр. соч. 5-е изд.

Справочная литература

3. Б.С.Э., М., Советская энциклопедия. 3-е изд.
4. Математическая энциклопедия. М., Советская энциклопедия, 1979, т. 1—2.
5. Философская энциклопедия. М., Советская энциклопедия, 1960—1967, т. I—IV.
6. Энциклопедия элементарной математики. М., ГИТТЛ, 1951—1966, т. I—V.
7. Математика, ее содержание, методы и значение. Изд-во АН СССР, 1956, т. I—III.
8. История и методология естественных наук. М., Изд-во МГУ, 1974, вып. 16.

Монографии, учебники, статьи

9. Абрамов А. М. Логические основы курса геометрии восьмилетней школы. М., НИИ школ Минпроса РСФСР, 1974.
10. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия I. М., Просвещение, 1974.
11. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия II. М., Просвещение, 1975.
12. Биркгоф Г., Барти Ф. Современная прикладная алгебра. Пер. с англ. М., Мир, 1976.
13. Болтянский В. Г., Милин Н. Я. О преподавании геометрии на основе векторной аксиоматики. — Математика в школе, 1975, № 2.
14. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. Пер. с франц. М., ИЛ, 1963.
15. Бурбаки Н. Теория множеств. Пер. с франц. М., Мир, 1965.
16. Вернер А. Л., Франгулов С. А., Юзвинский С. А. Аксиоматическое построение геометрии (по Колмогорову). Л., ЛГПИ, 1978.
17. Виленкин Н. Я. Математика, 4—5 классы (теоретические основы). М., Просвещение, 1974.
18. Виленкин Н. Я., Куницкая Е. С. Введение в анализ. М., Просвещение, 1973.
19. Геометрия 6—8. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., Просвещение, 1979.
20. Геометрия 9. Под ред. З. А. Скопеца. М., Просвещение, 1979.
21. Геометрия 10. Под ред. З. А. Скопеца. М., Просвещение, 1979.
22. Гильберт Д. Основания геометрии. Пер. с немец. М., ГТТИ, 1948.
23. Горский Д. П. О видах определений и их значений в науке. Сб.: Проблемы логики научного познания. М., Наука, 1964.
24. Донеддю А. Евклидова планиметрия. Пер. с франц. Наука, 1978.
25. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. Пер. с франц. М., Наука, 1972.
26. Евклид. Начала. Пер. с греч. М.—Л., 1950.
27. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., Наука, 1970.

28. Каган В. Ф. Основания геометрии. М., ГТТИ, 1949, ч. 1; 1956, ч. 2.
29. Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру. М., Наука, 1973.
30. Калужнин Л. А. Элементы теории множеств и математической логики в школьном курсе математики. М., Просвещение, 1978.
31. Клини С. Математическая логика. Пер. с англ. М., Мир, 1973.
32. Кудрявцев Л. Д. Мысли о современной математике и ее изучении. М., Наука, 1977.
33. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. Пер. англ. М., Просвещение, 1967.
34. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. Пер. с англ. М., Мир, 1970.
35. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М., Наука, 1973.
36. Линдон Р. Заметки по логике. Пер. с англ. М., Мир, 1968.
37. Малько Л. Т. Из опыта построения курса стереометрии на основе системы аксиом Г. Вейля. — Математика в школе, 1973, № 4.
38. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., Наука, 1970.
39. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., Наука, 1965.
40. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое. М., Советское радио, 1979.
41. Марков А. А. Теория алгорифмов. М. Труды математ. института АН СССР, 1954, т. 42.
42. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Пер. с англ. Наука, 1976.
43. Нечаев В. И. Числовые системы. М., Просвещение, 1977.
44. Нивергельт Ю., Фаррар Дж., Рейнгольд Э. Машинный подход к решению математических задач. Пер. с англ. М., 1977.
45. Попа К. Теория определений. Пер. с румын. М., Прогресс, 1976.
46. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., ГИТТЛ, 1953.
47. Рогановский Н. М. и Столяр А. А. Векторное построение стереометрии. Минск, Народна асвета, 1974.
48. Рогановский Н. М., Столяр А. А. Основы современной школьной математики. Минск, Народна асвета, 1975, ч. I; 1977, ч. 2.
49. Рыбников К. А. Введение в методологию математики. М., Изд-во МГУ, 1979.
50. Рыжик В. И. Из опыта преподавания стереометрии на основе аксиом Вейля. — Математика в школе, 1974, № 4.
51. Столл Р. Множества, логика, аксиоматические теории. Пер. с англ. М., Просвещение, 1968.
52. Тышкевич Р. И., Феденко А. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск, Высшая школа, 1968.
53. Люсьенн Феликс. Элементарная математика в современном изложении. Пер. с франц. М., Просвещение, 1967.
54. Феферман С. Числовые системы. Пер. с англ. М., Наука, 1971.
55. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Наука, 1969, т. 1—3.
56. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика. Пер. с франц. М., Мир, 1966.
57. Фрейденталь Х. Язык логики. Пер. с англ. М., Наука, 1969.
58. Черч А. Введение в математическую логику. М., ИЛ, 1960, т. I.
59. Шиханович Ю. А. Введение в современную математику. М., Наука, 1965.
60. Шоке Г. Геометрия. Пер. с франц. М., Мир, 1970.
61. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М., Наука, 1971.
62. Штейнгауз Г. Задачи и размышления. М., Мир, 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Наум Яковлевич Виленкин
Константин Иванович Дуничев
Лев Аркадьевич Калужнин
Абрам Аронович Столяр

СОВРЕМЕННЫЕ ОСНОВЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Спец. редактор В. А. Гусев
Редактор В. И. Ефимов
Художник обложки Б. Л. Николаев
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технические редакторы С. Н. Терехова, Е. В. Кузьмина
Корректор К. А. Иванова

ИБ № 4560

Сдано в набор 30.10.79. Подписано к печати 04.06.80. 60×90[1]/16. Бумага типограф. № 1. Гарнит. литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 16,22. Тираж 72 000 экз. Заказ 5712. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Саратовского Ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината в областной типографии управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, 153628, г. Иваново, ул. Типографская, 6.