Фото Л. Рословой

Х ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

ооо

Я сразу вынул из конверта
Штрих-код к своим грядущим баллам;
Я расчертил крестами лето,
В тест вылив знаний Ниагару.

В квадратиках простого бланка
Прочёл я зовы пяти вузов,
А вы смогли бы также гладко
Избавиться от знаний груза?

18.05.12

Что требуется от участников конкурса? Обычные учительские навыки — умение решать задачи и находить ошибки в решениях. О результатах заочного конкурса 2014 года читайте в электронном приложении.

Что дает участие в конкурсе? Победители и призеры конкурса, как и в предыдущие годы, награждаются дипломами журнала «Математика» и учебно-методической литературой по математике. Участники, не ставшие победителями или призерами, но показавшие достойные результаты, получат сертификаты участников.

Кроме того, победители и призеры конкурса, которые в следующем учебном году будут иметь учебную нагрузку не менее 9 часов в неделю, будут традиционно приглашены к участию в XII очном конкурсе, который пройдет в Москве в сентябре 2015 года.

Что нужно делать? Вам предлагается выполнить девять заданий, разбитых на три блока: математический (задания № 1–5), методический (задания № 6–8) и аналитический (задание 9).

Работы (не ксерокопированные и не сканированные) с пометкой «На конкурс» следует выслать по адресу: редакция журнала «Математика. Первое сентября»,, ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165.

Срок отправки работ — до 20 апреля 2015 года (по почтовому штемпелю).

Вместе с работой необходимо выслать заполненный бланк заявки.

К участию допускаются и коллективные работы (в составе коллектива авторов — не более трех человек).

Всем участникам конкурса будет обеспечена анонимность участия и объективность проверки.

Приглашаем вас к участию в конкурсе и желаем успеха!

I. Решите задачи

1. Какую часть сотрудников фирмы надо уволить, чтобы при уменьшении фонда заработной платы на 20% повысить среднюю зарплату оставшихся сотрудников на 20%?

2. На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком и к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли оказаться так, что на каждом построенном перпендикуляре лежат ровно две отмеченные точки?

3. Известно, что при любых целых значениях x выражение $ax^3 + bx^2 + cx$ принимает целые значения. Докажите, что $6a$ — целое число.

4. В шахматном турнире участвуют 2014 игроков. В каждом туре они произвольным образом разбиваются на пары так, чтобы

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Условия и решения заданий конкурса).

шахматисты в каждой паре ранее в этом турнире между собой не играли. Турнир заканчивается, когда такое разбиение провести невозможно. Какое наибольшее количество туров можно гарантированно провести в таком турнире?

5. В равнобедренном треугольнике ABC проведена окружность с центром C, касающаяся основания AB, которая пересекает боковые стороны в точках A' и B'. В образовавшейся трапеции $AA'B'B$ проведен отрезок DE, параллельный ее основаниям и разбивающий ее на две подобные трапеции. Сравните длину DE и длину дуги окружности, лежащей внутри трапеции.

II. Методический блок

В предложенных текстах (№ 6–8) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. «Задача». При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

«Ответ»: при $a = 0{,}25$.

«Решение». Подставив значение $x^2 - 2x$ из первого уравнения во второе, получим: $y^2 + a^2 - 2ay + y = 0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно y, тогда

$$y^2 + y(1 - 2a) + a^2 = 0.$$

Для того, чтобы решение было единственным, потребуем равенства нулю дискриминанта:

$$D = 1 - 4a + 4a^2 - 4a^2 = 1 - 4a = 0,$$

откуда $a = 0{,}25$.

7. «Задача». Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?

«Ответ»: $4C_{51}^{9}$.

«Решение». Поскольку требуется туз, то сначала выберем его, это можно сделать четырьмя способами. Затем достаточно выбрать произвольные 9 карт из 51. Количество способов, которыми это можно сделать, равно C_{51}^{9}. Так как оба выбора происходят независимо, то искомое количество способов равно $4C_{51}^{9}$.

8. «Задача». Даны три окружности, α, β и γ. Никакие две из этих окружностей не лежат в одной плоскости, но каждые две из них имеют ровно две общие точки. Докажите, что все три окружности принадлежат одной сфере.

«Решение». Пусть окружности α и β пересекаются в точках P и Q. Докажем, что существует сфера, на которой лежат обе окружности. Действительно, каждая окружность однозначно задается тремя точками, то есть окружность α задается точками, A, P и Q, а окружность β — точками B, P и Q. Значит, пара окружностей задается четырьмя точками, A, B, P и Q, а через любые четыре точки пространства можно провести сферу. Третья окружность γ имеет с этой сферой четыре общие точки (две — с α, и две — с β), поэтому γ принадлежит сфере.

III. Аналитический блок

9. При изучении темы «Арифметический квадратный корень» рассматриваются два тождества:

1) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$; 2) $\sqrt{x^2} = |\,x\,|$.

1. Запишите все известные вам аналогичные пары тождеств из других разделов школьного курса.
2. Что общего у всех пар тождеств такого вида?
3. Чем принципиально различаются два тождества в каждой паре и в связи с чем возникает это различие?
4. Какие общие свойства функций используются при доказательстве тождества 2 и ему аналогичных тождеств в других парах?

Заявка участника конкурса

Форма участия (нужное подчеркнуть): индивидуальная / коллективная		
Фамилия		
Имя		
Отчество		
Домашний адрес		Индекс
Телефон		
e-mail		
Место работы		
Должность		
Недельная нагрузка в 2014/2015 учебном году		