ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

М.К.ПОТАПОВ В.В.АЛЕКСАНДРОВ
П.И.ПАСИЧЕНКО

Алгебра, тригонометрия и элементарные функции

ВЫСШАЯ ШКОЛА

Высшая математика

Под общей редакцией академика Российской Академии наук В.А. Садовничего

Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.
Лекции по математическому анализу

Виноградов И.М.
Элементы высшей математики (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел)

Привалов И.И.
Введение в теорию функций комплексного переменного

Садовничий В.А.
Теория операторов

Гашков С.Б., Чубариков В.Н.
Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений

Нечаев В.И.
Элементы криптографии. Основы теории защиты информации

Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.
Задачи и упражнения по математическому анализу

Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.
Численные методы в задачах и упражнениях

Яблонский С.В.
Введение в дискретную математику

Благодатских В.И.
Введение в оптимальное управление (линейная теория)

М.К. ПОТАПОВ В.В. АЛЕКСАНДРОВ
П.И. ПАСИЧЕНКО

Алгебра, тригонометрия и элементарные функции

Допущено
научно-методическим
Советом по математике и механике
Учебно-методического объединения
университетов России
в качестве учебного пособия
для студентов университетов
и педагогических вузов

Москва
«Высшая школа» 2001

УДК 512
ББК 22.14
П64

Рецензент:
чл.-корр. РАН, проф. *Ю. В. Нестеренко*

Потапов, М. К.

П64 Алгебра, тригонометрия и элементарные функции: Учеб. пособие/М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко; Под ред. В. А. Садовничего. — М.: Высш. шк., 2001. — 735 с.: ил.

ISBN 5-06-004178-6

В книге систематизированы сведения по арифметике, алгебре, тригонометрии и началам анализа. Большое внимание уделено теоретическому материалу, приведены основные понятия и определения, необходимые при изучении математики.

Для студентов университетов и педагогических вузов. Может быть полезна учителям, учащимся средних школ с углубленным изучением математики, абитуриентам, слушателям подготовительных курсов и отделений вузов.

УДК 512
ББК 22.14

ISBN 5-06-004178-6

© ГУП «Издательство «Высшая школа»
2001

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

Предисловие

В России исторически сложилось так, что представление об образовании включает в себя органичное единство школы как системы приобретения знаний, фундаментальной науки как показателя уровня подготовки специалистов и гуманитарной культуры как основы духовного богатства человека.

Формулируя задачи образования, академик А. Н. Крылов говорил : «Школа не может дать вполне законченного знания, главная задача школы — дать общее развитие, дать необходимые навыки, одним словом... главная задача школы — научить учиться, и для того, кто в школе *научится учиться*, практическая деятельность всю его жизнь будет наилучшей школой».

Отметим, что особенность отечественной школы состоит в сочетании четкости рассуждений с глубиной содержания и простотой, доступностью, конкретностью изложения материала, которые всегда предпочитаются формальным конструкциям. Практическое воплощение данных идей подразумевает наличие высококвалифицированных и творчески мыслящих преподавателей.

Математическое образование и математическая культура составляют стержень научного знания, и значение математики как основы фундаментальных исследований постоянно возрастает.

Для решения этих задач требуются учебники, отражающие в определенной полноте современное состояние исследований и мировоззренческие принципы данной области науки.

Предлагаемые к публикации в серии «Высшая математика» учебники по математике реализуют указанный выше подход. Они написаны, в основном, профессорами Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Книга «Алгебра, тригонометрия и элементарные функции» М. К. Потапова, В. В. Александрова и П. И. Пасиченко написана на основе лекций, прочитанных авторами в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

В книге систематизированы сведения по арифметике, алгебре, тригонометрии и началам анализа.

Книга способствует воспитанию активных знаний, творческому усвоению навыков оперирования с математическими объектами, она призвана обеспечить повышение уровня общеобразовательной подготовки читателя, созданию у него прочного фундамента знаний.

Можно сказать, что книга содержит то количество знаний по элементарной математике, которое необходимо любому образованному человеку в течение всей его сознательной жизни.

Так как в книге содержатся основы школьного курса математики, то она будет полезна студентам педагогических вузов, учителям, школьникам, готовящимся к поступлению в вузы, учащимся школ и классов с углубленным изучением математики.

В данной серии уже изданы учебники Г. И. Архипова, В. А. Садовничего, В. Н. Чубарикова «Лекции по математическому анализу», И. М. Виноградова «Элементы высшей математики (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел)», И. И. Привалова «Введение в теорию функций комплексного переменного», В. А. Садовничего «Теория операторов», С. Б. Гашкова, В. Н. Чубарикова «Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений», В. И. Нечаева «Элементы криптографии (основы теории защиты информации)», И. А. Виноградовой, С. Н. Олехника, В. А. Садовничего «Задачи и упражнения по математическому анализу» (тома 1 и 2), Н. С. Бахвалова, А. В. Лапина, Е. В. Чижонкова «Численные методы в задачах и упражнениях», С. В. Яблонского «Введение в дискретную математику».

Кроме практической ценности эта серия призвана подвести некоторые итоги работы российских ученых и педагогов-математиков по созданию базовых учебников по математике на рубеже второго и третьего тысячелетий. Серия не ограничивается указанными книгами. В дальнейшем предполагается продолжить отбор и издание как современных, так и классических учебников, которые отвечают изложенной выше концепции, не потеряли своей новизны и актуальности и пользуются заслуженной популярностью и авторитетом у студентов и педагогов.

Академик Российской академии наук
В. А. Садовничий

Глава I. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

Ряд натуральных чисел. Понятие натуральных чисел возникло из потребностей счета. Натуральные числа можно сравнивать между собой, при этом ясно, какое из двух чисел больше. Все натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют ряд натуральных чисел: первое число — единица, второе — два, третье — три и т.д. У каждого натурального числа есть свое место в этом ряду. В дальнейшем ряд натуральных чисел будем обозначать буквой N.

Чтобы обозначить, что число m *больше* числа n, употребляется запись $m > n$. Для обозначения того, что число m *меньше* числа n, употребляется запись $m < n$. Называют эти записи *неравенствами* натуральных чисел. Чтобы обозначить, что число m и число n — *одно и то же число*, употребляют запись $m = n$ и называют ее *равенством* натуральных чисел.

Сложение натуральных чисел можно определить, используя ряд натуральных чисел, следующим образом.

Сложить два натуральных числа m и n — значит найти в ряду натуральных чисел число p ($p > m$), находящееся на n-м месте от числа m, причем счет начинается с числа $m + 1$. Это число p называется *суммой* чисел m и n и обозначается $m + n$, а числа m и n называются *слагаемыми*. Например, $m + 3$ — число, стоящее после числа m на третьем месте. Чтобы сложить несколько натуральных чисел, надо сложить сначала первые два, затем к полученной сумме прибавить следующее натуральное число и т.д.

Умножить натуральное число m на натуральное число n — значит найти натуральное число q, равное: а) n, если

$m = 1$; б) сумме m чисел, каждое из которых есть n, если $m > 1$. Это число q называется ***произведением*** чисел m и n и обозначается mn, а числа m и n называются ***сомножителями***. Например, умножить натуральное число 2 на число n — значит найти натуральное число q, равное сумме двух чисел, каждое из которых есть число n. Это число обозначается $2n$, т.е. $q = 2n$. Чтобы перемножить несколько натуральных чисел, надо сначала перемножить первые два, затем полученное натуральное число умножить на следующее натуральное число и т.д.

Приведем основные законы сложения и умножения натуральных чисел:

а) $m + n = n + m$ (коммутативность сложения);

б) $(l + m) + n = l + (m + n)$ (ассоциативность сложения);

в) $mn = nm$ (коммутативность умножения);

г) $(lm)n = l(mn)$ (ассоциативность умножения);

д) $(l + m)n = ln + mn$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Если число m взято сомножителем k раз (k — натуральное число, больше единицы), то произведение

$$\underbrace{mm \ldots m}_{k\ \text{раз}}$$

называют ***k-й степенью числа m*** и обозначают m^k, т.е. по определению

$$m^k = \underbrace{mm \ldots m}_{k\ \text{раз}}$$

Кроме того, по определению

$$m^1 = m.$$

Справедливы следующие свойства степеней:

а) $m^k m^n = m^{k+n}$;

б) $(m^k)^n = m^{kn}$;

в) $m^k l^k = (ml)^k$.

Эти свойства доказываются с помощью основных законов сложения и умножения натуральных чисел.

Определим действия, обратные сложению и умножению натуральных чисел, — действия вычитания и деления для натуральных чисел.

Вычесть из натурального числа n натуральное число m — значит найти натуральное число p такое, что

$$m + p = n. \tag{1}$$

Не для любых натуральных чисел n и m существует такое натуральное число p, что выполняется равенство (1). Если $n > m$, то такое число существует и единственно. Оно называется *разностью* чисел n и m и обозначается $n - m$, число n называется *уменьшаемым*, а число m — *вычитаемым*.

Разделить натуральное число n на натуральное число m — значит найти натуральное число q такое, что

$$mq = n. \tag{2}$$

Не для любых натуральных чисел n и m существует такое натуральное число q, что выполняется равенство (2). Если такое число существует, то числа m и q называются *делителями* числа n и обозначаются

$$q = n : m; \quad m = n : q.$$

Опираясь на основные законы сложения и умножения натуральных чисел и определения действий вычитания и деления, можно доказать следующие утверждения или, другими словами, теоремы.

Теорема 1. *Если число m есть делитель чисел n_1 и n_2, то m есть делитель суммы $n_1 + n_2$.*

Доказательство. Поскольку m есть делитель числа n_1, то $n_1 = mq_1$. Аналогично $n_2 = mq_2$. Применяя закон дистрибутивности сложения относительно умножения натуральных чисел, имеем $n_1 + n_2 = mq_1 + mq_2 = m(q_1 + q_2)$. Следовательно, число $n_1 + n_2$ делится на число m.

Теорема 2. *Если число m есть делитель чисел n_1 и n_2 и $n_1 > n_2$, то число m есть делитель разности $n_1 - n_2$.*

Справедливость этого утверждения доказывается аналогично.

Отметим еще несколько очевидных свойств равенств натуральных чисел:

а) если $m = n$, то $m + k = n + k$ для любого натурального числа k;

б) если $m = n$, то $m - l = n - l$ для любого натурального числа l такого, что $m > l$;

в) если $m = n$, то $mp = np$ для любого натурального числа p;

г) если $m = n$, то $m : q = n : q$ для любого натурального числа q, являющегося делителем числа m.

Расширенный ряд натуральных чисел. Рассмотрим новое число — число нуль. Для его обозначения употребляется символ 0. *Нуль* не является натуральным числом и считается числом, предшествующим всем натуральным числам. Ряд натуральных чисел вместе с числом нуль называется *расширенным натуральным рядом*. Расширенный натуральный ряд будем обозначать буквой Z_0.

В расширенном натуральном ряду можно определить действия сложения и умножения; для этого к определениям сложения и умножения натуральных чисел достаточно добавить определения сложения и умножения, в которых участвует число нуль:

а) $0 + n = n + 0 = n$;

б) $0 + 0 = 0$;

в) $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$;

г) $0 \cdot 0 = 0$.

По определению нулевая степень любого натурального числа m есть единица, т.е. $m^0 = 1$.

Деление на нуль и возведение нуля в нулевую степень являются запрещенными действиями.

Чтобы производить действия над числами из расширенного натурального ряда, надо уметь их записывать. Запись одного и того же натурального числа зависит от системы счисления.

В основе всякой системы счисления лежит следующий принцип: некоторое количество единиц составляет новую единицу следующего разряда. Это число называется *осно-*

ванием системы счисления. Если за основание системы принято число два, то система счисления называется *двоичной*, если за основание принято число двенадцать — система называется *двенадцатиричной* и т.д.

Дальше будем рассматривать только *десятичную* систему счисления. В этой системе вводится десять знаков, называемых цифрами; для обозначения первых десяти натуральных чисел — знаки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а для числа нуль — знак 0. В этой системе счисления число десять обозначается символом 10, а каждое натуральное число p представляется в виде

$$p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad (3)$$

где n — число из расширенного натурального ряда, a_n — одно из чисел 1, 2, 3, ..., 9, каждое из a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} — одно из чисел 0, 1, 2, 3, ..., 9. Заметим, что если число n будет больше, чем число девять, то оно само должно быть записано в виде (3).

Для записи числа p обычно употребляется другая форма записи, основанная на принципе *позиционного значения цифр*. Суть этого принципа заключена в том, что каждая цифра, кроме своего значения получает еще и так называемое позиционное значение. Например, цифра 5 может иметь значения: пять единиц, если стоит в изображении числа p на первом месте справа; пять десятков, если стоит в изображении числа p на втором месте справа, и т.д. На этом принципе и основана обычная запись натуральных чисел. Запись 2705 означает, что число состоит из двух тысяч, семи сотен, нуля десятков и пяти единиц, т.е.

$$2705 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5.$$

Если взять число p, представленное в виде (3), то его запись, основанная на позиционном принципе, будет такая:

$$p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$$

(черта сверху ставится для того, чтобы отличать это число от произведения $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$). В дальнейшем будут употребляться две формы записи натурального числа p:

а) $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$,

б) $p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$,
т.е. дальше будем пользоваться равенством

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} =$$
$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0. \quad (4)$$

Признаки делимости. Ранее уже отмечалось, что не всегда одно натуральное число делится на другое. Поэтому представляет интерес выделение тех случаев, когда деление возможно. Выделению этих случаев весьма помогают так называемые признаки делимости. Приведем некоторые из них. Заметим предварительно, что из вышеизложенного вытекает, что:

а) нуль делится на любое натуральное число,

б) любое натуральное число делится на единицу.

Теорема 3 *Чтобы натуральное число* $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *делилось на* 2, *необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц* a_0 *этого числа делилась на* 2.

Доказательство. Докажем, что если число a_0 делится на 2, то число p также делится на 2. Запишем число p в виде

$$p = \alpha + \beta, \quad (5)$$

где

$$\alpha = (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot 10,$$
$$\beta = a_0.$$

Каждое слагаемое в правой части равенства (5) делится на 2, следовательно, и вся сумма делится на 2, т.е. число p делится на 2.

Докажем обратное утверждение. Если число p делится на 2, то число a_0 также делится на 2. По свойству б) равенств из равенства (5) вытекает, что

$$a_0 = p - (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot 10.$$

Каждый член разности правой части равенства делится на 2, следовательно, вся разность делится на 2, т.е. число a_0 делится на 2. Теорема доказана.

Натуральные числа, делящиеся на два, и число нуль называют *четными числами.* Все остальные натуральные числа называются *нечетными.* Теорему 3 можно переформулировать так: для четности любого натурального числа $p = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц a_0 этого числа была бы числом четным.

Рассмотрим характерные черты доказательства теоремы 3. В самой теореме сформулированы, а затем доказаны два утверждения: а) из делимости числа a_0 на 2 следует делимость на 2 числа p (*достаточное условие* делимости числа p на 2); б) из делимости числа p на 2 следует делимость на 2 числа a_0 (*необходимое условие* делимости числа p на 2). Если свойство делимости числа a_0 на 2 обозначим буквой A, а свойство делимости числа p на 2 обозначим буквой B, то первое утверждение можно кратко сформулировать так: из A следует B ($A \Rightarrow B$), а второе утверждение — из B следует A ($A \Leftarrow B$). Теорему с помощью введенных символов можно записать так: $A \Leftrightarrow B$.

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает также, что свойство A, более простое и легко проверяемое, является необходимым и достаточным условием для выполнения более сложного свойства B.

Так как свойство A является достаточным условием для свойства B ($A \Rightarrow B$), то на практике, убедившись в том, что цифра единиц числа является четной, можно быть уверенным, что и все число делится на 2. Так как свойство A является необходимым условием для свойства B ($A \Leftarrow B$), то, установив, что число a_0 не делится на 2, можно утверждать, что и число p не делится на 2, т.е. теорему 3 можно сформулировать так: если цифра единиц числа p делится на 2, то число p делится на 2, если она не делится на 2, то число p не делится на 2.

Отметим, что если некоторое свойство C является достаточным условием для свойства D, то это еще не означает, что нет чисел, обладающих свойством D, но не обладающих свойством C. Например, достаточным условием делимости числа p на 4 является условие $a_1 = a_0 = 0$. Справедливость последнего утверждения следует из представления числа p в виде

$$p = (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 10^2$$

и делимости числа 100 на 4. В то же время, например, число 252 делится на 4, хотя две последние его цифры не нули.

Если доказано, что некоторое свойство E является необходимым условием для свойства D, то это еще не означает, что нет чисел, обладающих свойством E, но не обладающих свойством D. Например, необходимым условием делимости числа p на 4 является четность числа p. Справедливость последнего утверждения очевидна, ибо если число p делится на 4, то тем более оно делится на 2. В то же время, например, число 1222 не делится на 4, хотя оно четное.

Если же доказано, что свойство S является необходимым и достаточным условием для свойства Q, а свойство S легко проверяется для любого числа p, то, найдя все числа, обладающие свойством S, можно сказать, что найдены все числа, обладающие более сложным свойством Q.

В дальнейшем для краткости будем часто пользоваться символами $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ в следующем смысле: запись $M \Rightarrow L$ будет означать, что из утверждения M, стоящего слева от символа $\Rightarrow$, следует утверждение L, стоящее справа. Запись $Q \Leftarrow S$ будет означать, что из утверждения S, стоящего справа от символа $\Leftarrow$, следует утверждение Q, стоящее слева. Запись $E \Leftrightarrow F$ будет означать, что утверждения, стоящие слева и справа от символа $\Leftrightarrow$, равносильны, т.е. одновременно и из утверждения F, стоящего справа от символа $\Leftrightarrow$, вытекает утверждение E, стоящее слева, и из утверждения E, стоящего слева от символа $\Leftrightarrow$, вытекает утверждение F, стоящее справа.

Сформулируем и докажем признаки делимости натуральных чисел на 4 и на 9.

Теорема 4. *Для того чтобы натуральное число* $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *делилось на* 4, *необходимо и достаточно, чтобы число* $\overline{a_1 a_0}$ *делилось на* 4.

Доказательство. Достаточность. Пусть число $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4. Запишем число p в виде

$$p = \varphi + \psi, \qquad (6)$$

где

$$\varphi = (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 10^2,$$
$$\psi = \overline{a_1 a_0}.$$

Каждое слагаемое в правой части равенства (6) делится на 4, следовательно, и вся сумма делится на 4, т.е. число p делится на 4.

Необходимость. Пусть число p делится на 4. По свойству б) равенств из равенства (6) вытекает, что

$$\overline{a_1 a_0} =$$
$$= p - (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 10^2.$$

Каждый член разности правой части равенства делится на 4, следовательно, вся разность делится на 4, т.е. число $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4. Теорема доказана.

Например, число 1232 делится на 4, так как число 32 делится на 4, а число 15126 не делится на 4, так как число 26 не делится на 4.

Теорема 5. *Для того чтобы натуральное число* $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *делилось на* 9, *необходимо и достаточно, чтобы сумма всех цифр данного числа делилась на* 9.

Доказательство. Достаточность. Пусть сумма цифр данного числа делится на 9. Запишем число p в виде

$$p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Легко видеть, что справедливо равенство

$$10^k = 9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \ldots + 9 \cdot 10 + 9 + 1.$$

Пользуясь этим равенством, перепишем p в виде

$$p = \gamma + \lambda, \tag{7}$$

где

$$\gamma = a_k(9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \ldots + 9 \cdot 10 + 9) + \\ + a_{n-1}(9 \cdot 10^{k-2} + 9 \cdot 10^{k-3} + \ldots + 9 \cdot 10 + 9) + \ldots \\ \ldots + a_2(9 \cdot 10 + 9) + a_1 \cdot 9,$$

$$\lambda = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0.$$

Каждое слагаемое в правой части равенства (7) делится на 9, следовательно и вся сумма делится на 9, т.е. p делится на 9.

Необходимость. Пусть число p делится на 9. По свойству б) равенств из равенства (7) вытекает, что

$$\lambda = p - \gamma.$$

Каждый член разности правой части равенства делится на 9, следовательно, вся разность делится на 9, т.е. число $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ делится на 9. Теорема доказана.

Например, число 1215 делится на 9, так как $1 + 2 + 1 + 5 = 9$, а число 4232 не делится на 9, так как $4 + 2 + 3 + 2 = 11$, и 11 не делится на 9.

Простые и составные числа. Множество натуральных чисел состоит из единицы, простых и составных чисел. Натуральное число, большее единицы, называется *простым*, если оно не имеет делителей, кроме единицы и самого себя. Натуральное число, большее единицы, называется *составным*, если оно имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого себя.

Пользуясь этим определением можно показать, что любое составное число имеет хотя бы один делитель, который является простым числом.

Теорема 6. *Простых чисел бесконечно много.*

Доказательство. Допустим, что существует лишь конечное число простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда каждое натуральное число, большее 1 и не совпадающее ни с одним из этих чисел, будет составным. Число $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots$ $\ldots \cdot p_n + 1$ не совпадает ни с одним из чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, так как оно больше каждого из них. По нашему предположению, простых чисел, кроме p_1 , $p_2, \ldots, p_n$, нет. Следовательно, число p составное и поэтому делится на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

С другой стороны, число p не делится ни на одно число из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, поскольку произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ делится на каждое из этих чисел, а число 1 ни на одно из них не делится.

Таким образом, предположив, что существует лишь конечное число простых чисел, приходим к противоречию. Следовательно, множество простых чисел бесконечно.

Теорема 6 доказана способом от противного. Этот способ заключается в следующем: строится отрицание утверждения, сформулированного в теореме. Затем на основании построенного отрицания приходим к выводу, который либо не верен, либо противоречит сделанному отрицанию. Тем самым из двух логически возможных ситуаций (либо верно данное утверждение, либо его отрицание) остается только одна — верно данное утверждение.

Всякое составное число p можно записать в виде произведения простых чисел: так, например, $221 = 13 \cdot 17$. В этом случае говорят, что число p разложено на простые множители.

При разложении числа на простые множители некоторые из них могут встретиться в разложении не один раз. Принято писать этот простой множитель в степени, показывающей, сколько раз он является сомножителем, например, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Любое натуральное число p можно записать в виде

$$p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}, \tag{8}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые делители числа p, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — соответственные числа их повторений в разложении числа p. Разложение (8) натурального числа p на простые множители единственно, т.е. не существует других простых чисел, являющихся делителями числа p, и степени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ не могут быть заменены другими степенями. Итак, справедлива следующая теорема, принимаемая здесь без доказательства.

Теорема 7 (основная теорема арифметики). *Для каждого натурального числа $p > 1$ существует единственное его разложение на простые множители.*

Если натуральные числа p_1 и p_2 делятся на одно и то же натуральное число p, то число p называется *общим делителем* чисел p_1 и p_2. Наибольшее натуральное число, на которое делятся p_1 и p_2, называется *наибольшим общим делителем* этих чисел (НОД). Например, НОД чисел $p_1 = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ и $p_2 = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ равен $2 \cdot 3 = 6$.

Если НОД двух чисел равен 1, то они называются *взаимно простыми*. Взаимно простыми являются, например, числа $33 = 3 \cdot 11$ и $35 = 5 \cdot 7$.

Теорема 8. *Если натуральные числа p_1 и p_2 взаимно простые, а натуральное число p делится и на p_1 и на p_2, то p делится на произведение p_1p_2.*

Доказательство теоремы опустим.

Заметим, что если числа p_1 и p_2 не являются взаимно простыми, то утверждение теоремы не всегда верно. Например, натуральное число 180 делится на 4 и на 6, но не делится на их произведение — на 24.

Наименьшим общим кратным (НОК) двух натуральных чисел p_1, p_2, называется наименьшее натуральное число, которое делится и на p_1 и на p_2. Например, НОК чисел 132 и 90 есть число $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 1980$.

Деление с остатком. Если в результате деления натурального числа p на натуральное число m получилось натуральное число q такое, что $p = mq$, то говорят, что p делится на m. Как следует из вышеизложенного, не всегда в результате деления получается такое число q. Однако всегда возможно деление с остатком.

Разделить натуральное число p на натуральное число m с остатком — это значит найти два числа q и r из расширенного натурального ряда такие, что справедливо равенство

$p = mq + r$, причем r удовлетворяет условию $0 \le r < m$. Число q называется *частным*, а число r — *остатком*. Если $r = 0$, что натуральное число p делится на натуральное число m *без остатка*.

Теорема 9. *Пусть p и m — любые натуральные числа. Тогда существует единственная пара чисел q и r из расширенного натурального ряда, удовлетворяющая условиям: $p = mq + r$ и $0 \le r < m$.*

Доказательство. Если $p < m$, то пара чисел $q = 0$, $r = p$ удовлетворяет условиям теоремы.

Если $p = m$, то пара чисел $q = 1$, $r = 0$ удовлетворяет условиям теоремы.

Если $p > m$ и p делится на m, то существует натуральное число q_1 такое, что $p = mq_1$, тогда пара чисел $q = q_1$ и $r = 0$ удовлетворяет условиям теоремы.

Если $p > m$ и p не делится на m, то пара чисел $q_1 = 1$ и $r_1 = p - m$ будет удовлетворять условиям

$$p = m \cdot 1 + r_1, \qquad r_1 > 0.$$

Поскольку p не делится на m, то $r_1 \ne m$. Значит, либо $r_1 < m$, либо $r_1 > m$. Если $r_1 < m$, то пара чисел $q = 1$ и $r = r_1$ удовлетворяет условиям теоремы.

Если $r_1 > m$, то число $r_2 = r_1 - m$ таково, что $r_1 = m + r_2$ и $0 < r_2 < r_1$. А потому справедливо равенство

$$p = m \cdot 2 + r_2.$$

Так как p не делится на m, то $r_2 \ne m$. Значит, либо $r_2 < m$, либо $r_2 > m$. Если $r_2 < m$, то пара чисел $q = 2$ и $r = r_2$ удовлетворяет условиям теоремы.

Если же $r_2 > m$, то повторяем этот процесс до тех пор, пока на каком-то k-м шаге окажется, что

$$p = mk + r_k, \qquad 0 < r_k < m.$$

А это означает, что пара чисел $q = k$ и $r = r_k$ удовлетворяет условиям теоремы. Существование такого k-го шага вытекает из следующей аксиомы для натуральных чисел: *для* *любых натуральных чисел p и m таких, что $p > m$, найдется натуральное число l такое, что $p < ml$.*

Итак, доказано существование пары чисел q и r, удовлетворяющих условиям теоремы.

Теперь докажем единственность такой пары чисел. Предположим, что есть две пары чисел q, r и q_0, r_0, удовлетворяющие условиям теоремы, т.е. такие, что

$$p = mq + r \quad \text{и} \quad 0 \le r < m,$$
$$p = mq_0 + r_0 \quad \text{и} \quad 0 \le r_0 < m.$$

Следовательно, $mq + r = mq_0 + r_0$.

Предположим для определенности, что $r_0 > r$, тогда $0 < r_0 - r < m$ и $q - q_0 > 0$ и $m(q - q_0) = r_0 - r$. В этом случае в последнем равенстве в правой части стоит натуральное число, меньшее чем m, а в левой части — большее чем m или равное ему, и, следовательно, равенство $m(q - q_0) = r_0 - r$ является неверным. Аналогично, рассматривая случай $r_0 < r$, приходим к противоречию. Следовательно, $r = r_0$. Тогда из равенства $m(q - q_0) = r_0 - r = 0$ следует равенство $q = q_0$, т.е. пара чисел q и r, удовлетворяющая условиям теоремы, единственна. Теорема доказана.

Приведем пример применения теоремы 9.

Докажем, что если p — простое число, большее трех, то одно из двух чисел $(p - 1)$ или $(p + 1)$ делится на три. Действительно, число p не делится на три, так как оно простое и больше трех. Следовательно, остаток при делении на 3 может быть 1 или 2. Если остаток равен единице, т.е. если $p = 3q_1 + 1$, то ясно, что число $p - 1$ делится на 3. Если остаток равен двум, т.е. если $p = 3q_2 + 2$, то ясно, что число $p + 1$ делится на 3.

Доказанная теорема дает способ нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел. Возьмем два числа p и m из расширенного натурального ряда и пусть, для определенности, $p > m$. Если $m = 0$, то НОД$(p; 0) = p$. Если $m \ne 0$, то $p = mq + r$, причем, либо p делится на m без остатка, т.е. $r = 0$, либо p делится на m с остатком r, где $0 < r < m$. В первом случае НОД$(p; m) = m$, но НОД$(m; 0) =$

$= m$, т.е. справедливо равенство НОД(p; m) = НОД(m; r). Оказывается, что аналогичное равенство

$$\text{НОД}(p;\ m) = \text{НОД}(m;\ r) \qquad (9)$$

имеет место и в случае $0 < r < m$.

Действительно, пусть l — общий делитель чисел p и m, т.е. пусть $p = lk$ и $m = ln$, где k, l, и n — натуральные числа. Так как $p = mq + r$ и $r > 0$, то $lk - lnq > 0$, т.е. $l(k - nq) > 0$. Но тогда $k - nq > 0$ и $r = ls$, где $s = k - nq$ — натуральное число, т.е. l является делителем числа r.

Значит, каждый общий делитель чисел p и m является общим делителем чисел m и r. Рассуждая аналогично, получим и обратное утверждение: каждый общий делитель чисел m и r является общим делителем чисел p и m. Отсюда следует, что совпадают и наибольшие общие делители этих пар, т.е. что верно равенство (9). Так как $m < p$ и $r < m$, то задача нахождения НОД(m; r) является более простой, чем задача нахождения НОД(p; m).

Рассмотрим следующий пример. Найти НОД(1428; 420).

Так как $1428 = 420 \cdot 3 + 168$, то НОД(1428; 420) =
= НОД(420; 168).

Так как $420 = 168 \cdot 2 + 84$, то НОД(420; 168) = НОД(168; 84).

Так как $168 = 84 \cdot 2$, то НОД(168; 84) = НОД(84; 0) = 84, т.е. НОД(1428; 420) = 84.

Таким образом, способ нахождения НОД(p; m) заключается в применении равенства (9).

После нахождения НОД(p; m) оказывается возможным найти наименьшее общее кратное этих чисел: НОК(p; m). Для этого надо воспользоваться теоремой 10, доказательство который мы опустим.

Теорема 10. НОД(p; m) $\cdot$ НОК(p; m) = $p \cdot m$.

Например, найдем НОК (1428; 420). Из предыдущего примера следует, что НОД(1428; 420) = 84. Следовательно, НОК(1428; 420) = $\frac{1428 \cdot 420}{84}$ = 7140.

§ 2. Дроби

Выше отмечалось, что деление не всегда выполнимо в множестве натуральных чисел. Например, в множестве натуральных чисел нельзя 5 разделить на 4. Чтобы деление было выполнимо всегда, приходится рассматривать новые числа — части натуральных чисел, или дроби.

Обыкновенные дроби. Число, равное k-й части числа единица (k — натуральное число, большее единицы), обозначают $\frac{1}{k}$. Если эта часть берется m раз (m — натуральное число), то получаемое в результате этого новое число обозначают $\frac{m}{k}$. Число, определяемое по этому правилу при помощи двух натуральных чисел p и q ($q > 1$) и записываемое как $\frac{p}{q}$, называют *дробью* или *частным* натуральных чисел p и q, при этом p называют *числителем* этой дроби, а число q — *знаменателем*.

Всякое натуральное число можно считать *дробью со знаменателем единица*, т.е. любое натуральное число n можно записать как дробь $\frac{n}{1}$. Поэтому дальше ограничение $q > 1$ на знаменатель дроби снимается и говорят, что частное двух любых натуральных чисел p и q есть дробь $\frac{p}{q}$ и при этом множество всех дробей содержит в себе множество всех натуральных чисел.

Две дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{k}$ считаются *равными*, если произведение числителя первой дроби на знаменатель второй равно произведению числителя второй на знаменатель первой, т.е. $\frac{p}{q} = \frac{m}{k}$, если $pk = qm$.

Аналогично $\frac{p}{q} > \frac{m}{k}$, если $pk > mq$; $\frac{p}{q} < \frac{m}{k}$, если $pk < mq$.

Суммой двух дробей называется дробь, числитель которой равен сумме произведений числителя первой дроби на знаменатель второй и числителя второй дроби на знаменатель первой, а знаменатель равен произведению знаменателей этих дробей, т.е.

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{k}=\frac{pk+qm}{qk}.$$

Произведением двух дробей называется дробь, числитель которой равен произведению числителей этих дробей, а знаменатель — произведению знаменателей, т.е.

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{k}=\frac{pm}{qk}.$$

Справедливы следующие основные законы сложения и умножения дробей:

а) $\frac{p}{q}+\frac{m}{k}=\frac{m}{k}+\frac{p}{q}$ (коммутативность сложения);

б) $\left(\frac{p}{q}+\frac{m}{k}\right)+\frac{l}{n}=\frac{p}{q}+\left(\frac{m}{k}+\frac{l}{n}\right)$ (ассоциативность сложения);

в) $\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{k}=\frac{m}{k}\cdot\frac{p}{q}$ (коммутативность умножения);

г) $\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{k}\right)\cdot\frac{l}{n}=\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{m}{k}\cdot\frac{l}{n}\right)$ (ассоциативность умножения);

д) $\left(\frac{p}{q}+\frac{m}{k}\right)\cdot\frac{l}{n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{l}{n}+\frac{m}{k}\cdot\frac{l}{n}$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Разделить дробь $\frac{p}{q}$ на дробь $\frac{m}{n}$ — значит найти дробь $\frac{l}{k}$ такую, что

$$\frac{l}{k}\cdot\frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$$

В отличие от натуральных чисел, деление для дробей всегда выполнимо. Используя определение равенства двух дробей, легко показать, что

$$\frac{l}{k}=\frac{pn}{qm}.$$

Вычесть из дроби $\frac{p}{q}$ дробь $\frac{m}{n}$ — значит найти дробь $\frac{r}{s}$ такую, что

$$\frac{m}{n}+\frac{r}{s}=\frac{p}{q}.$$

Вычитание так же, как и для натуральных чисел, не всегда выполнимо. Если $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$ или $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, то не существует дроби, которая бы при сложении с дробью $\frac{m}{n}$ давала бы дробь $\frac{p}{q}$. Если же $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$, то вычитание выполнимо и легко видеть, что в этом случае

$$\frac{r}{s} = \frac{pn - mq}{nq}.$$

Из определения равенства двух дробей вытекает *основное свойство дробей: если числитель и знаменатель данной дроби умножить и разделить на одно и то же натуральное число k, то получится дробь, равная данной*:

$$\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}.$$

Дробь $\frac{p}{q}$ называется *несократимой*, если числа p и q взаимно простые.

Теорема 1. *Если $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то дробь $\frac{m}{n}$ равна ей тогда и только тогда, когда $m = pk$ и $n = qk$, где k — некоторое натуральное число.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $m = pk$ и $n = qk$. Тогда дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ равны по основному свойству дробей.

Необходимость. Пусть $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$. По определению равенства дробей $pn = mq$. Левая часть этого равенства делится на число p, следовательно, согласно основной теореме арифметики (см. § 1, теорема 7) и правая часть делится на p. Так как числа p и q взаимно простые, а произведение mq делится на p, то на p делится m (т.е. существует натуральное число k такое, что $m = pk$). Подставляя значение m в равенство $pn = mq$, получаем $np = pkq$, откуда $n = qk$. Теорема доказана.

Конечные десятичные дроби. Рассмотрим те дроби $\frac{p}{q}$, у которых знаменатель $q = 10^k$, где k — некоторое натуральное число. Для каждой такой дроби принята специальная форма записи, а именно: пишут числитель дроби и, отсчитав с правой стороны k цифр, отделяют их запятой; если в числителе меньше цифр, чем k, например n цифр ($n < k$), то пишут числитель и перед его первой цифрой дописывают $k - n$ нулей, затем ставят запятую и перед ней еще один нуль; если же в числителе k цифр, то пишут числитель, перед его первой цифрой ставят запятую и перед ней дописывают нуль.

Так, например, дроби $\frac{3721}{100}$, $\frac{21}{10\,000}$, $\frac{131}{1000}$ могут быть записаны так: 37,21; 0,0021; 0,131.

Дробь, записанная в таком виде, называется *конечной десятичной дробью.*

Значит, дроби 37,21; 0,0021; 0,131 могут служить примерами конечных десятичных дробей. Вообще, каждую конечную десятичную дробь будем дальше обозначать так:

$$a_0,\ a_1a_2a_3 \ldots a_k, \tag{1}$$

где k — натуральное число, a_0 — число из расширенного натурального ряда, каждое из a_1, a_2, ..., a_k — одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Часто конечную десятичную дробь называют просто десятичной дробью, опуская слово «конечная».

Любая конечная десятичная дробь легко переводится в обыкновенную. Для этого надо записать в числитель целое число, которое получается, если отбросить запятую у десятичной дроби, а в знаменатель написать число 10 в такой степени, сколько цифр стоит у десятичной дроби после запятой, после чего дробь можно сократить на общий множитель, если он есть, например $0{,}34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$.

Записать обыкновенную дробь в виде конечной десятичной — значит найти конечную дробь, равную данной. Естественно поставить вопрос: любую ли обыкновенную дробь можно записать в виде конечной десятичной дроби?

Оказывается, что дело здесь обстоит намного сложнее, чем с переводом конечной десятичной дроби в обыкновенную.

Теорема 2. *Всякая дробь* $\frac{p}{q}$, *где натуральное число* q *не имеет простых делителей, отличных от* 2 *и* 5, *может быть записана в виде конечной десятичной дроби.*

Доказательство. Пусть дана дробь $\frac{p}{q}$, где $q = 2^m \cdot 5^n$. По основному свойству дроби любая обыкновенная дробь не изменится, если числитель и знаменатель ее умножить на одно и то же число. Умножая числитель и знаменатель дроби $\frac{p}{q}$ на 2^n5^m, получим

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^m \cdot 5^n} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^n \cdot 5^m} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{2^{n+m} \cdot 5^{n+m}} = \frac{2^n5^mp}{10^{n+m}}.$$

Так как произведение $2^n \cdot 5^m p$ — натуральное число, то, обозначая его через l, запишем дробь в виде $\frac{p}{q} = \frac{l}{10^{n+m}}$, откуда видно, что дробь $\frac{p}{q}$ может быть записана конечной десятичной дробью. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если данная несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *может быть записана конечной десятичной дробью, то ее знаменатель не содержит простых множителей, отличных от* 2 *и* 5.

Доказательство. Если $q = 1$, то теорема очевидна. Рассмотрим случай, когда $q \neq 1$. Дробь $\frac{p}{q}$ по условию представлена в виде конечной десятичной дроби, значит справедливо равенство $\frac{p}{q} = \frac{l}{10^k}$, где l и k — натуральные числа. Так как $\frac{p}{q}$ несократимая дробь, то из теоремы 1 вытекает, что $l = pm$ и $10^k = qm$. Число 10^k содержит только простые множители 2 и 5. Значит, и число qm не имеет других простых множителей, кроме 2 и 5, что вытекает из единственности разложения числа на простые множители. Следовательно, число q не содержит других простых множителей, кроме 2 и 5. Теорема доказана.

Теорема 4. *Для того чтобы несократимая дробь $\frac{p}{q}$ могла быть записана конечной десятичной дробью, необходимо и достаточно, чтобы ее знаменатель не содержал никаких других простых множителей, кроме* 2 *и* 5.

Справедливость теоремы 4 вытекает из теорем 2 и 3.

Теперь рассмотрим дробь $\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые числа, и q содержит простые множители, отличные от 2 и 5. Как вытекает из теоремы 4, эта дробь не может быть записана конечной десятичной дробью. Но такие дроби могут быть записаны при помощи так называемых бесконечных десятичных дробей.

Бесконечные периодические десятичные дроби. Выше конечной десятичной дробью была названа дробь, записанная в виде (1), где после запятой стоит конечное число цифр. Естественно *бесконечной периодической десятичной дробью* назвать десятичную дробь, у которой после запятой стоит бесконечно много цифр, причем одна цифра или упорядоченная совокупность цифр, начиная с некоторого места после запятой, повторяется. Более точно это можно сказать так: бесконечной периодической десятичной дробью называется дробь, которая может быть записана в виде

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots, \tag{2}$$

где

1. a_0 — число из расширенного натурального ряда;
2. в записи (2) — для любого натурального числа m на m-м месте после запятой стоит одно из чисел 0, 1, 2, ..., 9, при этом или a_0 отлично от нуля, или, если a_0 равно нулю, то существует хотя бы одно натуральное число q такое, что на q-м месте после запятой стоит одно из чисел 1, 2, ..., 9;
3. существуют такие натуральные числа l и p, что для любого натурального $n \geq l$ справедливо равенство $a_{n+p} = a_n$, при этом упорядоченная совокупность цифр $(a_la_{l+1} \ldots a_{l+p-1})$ называется *периодом бесконечной периодической десятичной дроби* (2).

Обычно при записи бесконечной периодической десятичной дроби многоточие ставится после несколько раз повторенного периода, т.е. тогда, когда становится понятным, какое число является периодом этой дроби.

Например, очевидно, что дробь

$$4{,}27131313\ \ldots \tag{3}$$

есть бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом (13).

Вместо того чтобы писать период несколько раз и потом ставить многоточие, принято писать период один раз, заключая его в круглые скобки:

$$\begin{aligned} 4{,}27131313\ \ldots &= 4{,}27(13), \\ 0{,}454545\ \ldots &= 0{,}(45). \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема, доказательство которой опускается.

Теорема 5. *Всякая дробь $\frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты и q содержит хотя бы один простой множитель, отличный от* 2 *и* 5, *может быть единственным образом записана в виде бесконечной периодической десятичной дроби.*

Объединяя теоремы 4 и 5, получаем, что любую обыкновенную дробь можно записать в виде либо конечной десятичной дроби либо бесконечной периодической десятичной дроби. Приведем без доказательства правило перевода бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную (это правило будет доказано в гл. IX).

Чтобы сократить бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 *столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.* Например:

$$0{,}1172(0) = \frac{11\,720 - 1172}{90\,000} = \frac{10\,548}{90\,000} = \frac{1172 \cdot 9}{9 \cdot 10\,000} = \frac{293 \cdot 4}{4 \cdot 2500} = \frac{293}{2500};$$

$$0{,}(45) = \frac{45 - 0}{99} = \frac{5 \cdot 9}{9 \cdot 11} = \frac{5}{11};$$

$$4{,}27(13) = \frac{42\,713 - 427}{9900} = \frac{42\,286}{9900} = \frac{2 \cdot 21\,143}{2 \cdot 4950} = \frac{21\,143}{4950}.$$

Пользуясь этим правилом, можно показать, что любую конечную дробь также можно представить в виде бесконечной периодической дроби, причем двумя способами.

Например:

$$0{,}172 = 0{,}172(0) = \frac{1720 - 172}{9000} = \frac{1548}{9000} = \frac{172 \cdot 9}{9 \cdot 1000} = 0{,}172;$$

$$0{,}172 = 0{,}171(9) = \frac{1719 - 171}{9000} = \frac{1548}{9000} = \frac{172 \cdot 9}{9 \cdot 1000} = 0{,}172.$$

Чтобы не было двух разных представлений одной и той же конечной десятичной дроби, принято не иметь число 9 в периоде. Тогда каждая десятичная конечная дробь может быть единственным образом записана в виде бесконечной периодической десятичной дроби с периодом 0 и, наоборот, каждая такая дробь есть конечная десятичная дробь. Итак, имеет место

Теорема 6. *Каждая обыкновенная дробь* $\frac{p}{q}$ *может быть единственным образом представлена в виде бесконечной десятичной периодической дроби и, наоборот, каждая бесконечная десятичная дробь может быть единственным образом представлена в виде обыкновенной дроби* $\frac{p}{q}$.

Таким образом, можно сказать, что каждая бесконечная периодическая десятичная дробь есть другая форма записи некоторой вполне определенной обыкновенной дроби.

§ 3. Целые числа

Выше уже отмечалось, что вычитание не всегда выполнимо в множестве натуральных чисел. Например, в множестве натуральных чисел нельзя вычесть из числа 3 число 5. Поэтому возникает необходимость в расширении натуральных чисел.

Введем в рассмотрение новые числа — натуральные числа со знаком минус, т.е. числа вида $(-m)$, где m — натуральное число, и будем называть такие числа *отрицательными* целыми числами. Отрицательное целое число $(-m)$ называют иногда числом, *противоположным* натуральному числу m.

Будем говорить, что два целых отрицательных числа $(-m)$ и $(-n)$ равны, если равны натуральные числа m и n. Теперь рассмотрим множество чисел, состоящее из всех натуральных чисел, нуля и всех целых отрицательных чисел. Будем считать, что два числа из этого множества равны, если либо они — равные натуральные числа, либо они — равные целые отрицательные числа, либо каждое из них есть нуль. Определим теперь действия сложения и умножения для чисел из этого множества. Если оба числа, которые надо сложить или умножить, есть числа из расширенного натурального ряда, то действия сложения и умножения для этих двух чисел определяются так же, как в § 1. Если же одно число или оба числа, которые надо сложить или умножить, есть отрицательные целые числа, то действия сложения и умножения для этих двух чисел производятся следующим образом:

а) $(-m)+(-n)=-(m+n)$;

б) $(-m)+0=0+(-m)=-m$;

в) $(-m)+n=\begin{cases} -(m-n), & \text{если } m>n; \\ n-m, & \text{если } m<n; \\ 0, & \text{если } m=n; \end{cases}$

г) $(-m)n=m(-n)=-(mn)$;

д) $(-m)(-n)=mn$;

е) $(-m)\cdot 0=0\cdot(-m)=0$.

Множество чисел, состоящее из всех натуральных чисел, нуля и всех отрицательных целых чисел, с только что введенными определениями равенства и действий сложения и умножения, называется *множеством целых чисел* и обозначается буквой Z, а сами эти числа называются *целы-*

ми числами. Натуральные числа иногда называются также целыми положительными числами.

Основные законы сложения и умножения целых чисел аналогичны основным законам сложения и умножения натуральных чисел и поэтому здесь не приводятся.

Для действий сложения и умножения целых чисел вводятся обратные действия — вычитание и деление (кроме деления на нуль). При этом действие вычитания теперь всегда выполнимо, а действие деления не всегда. Но как и для натуральных чисел, для целых чисел всегда выполнимо деление с остатком. Ниже рассматривается подробно лишь деление с остатком целого числа на натуральное число.

Деление с остатком. *Разделить целое число a на натуральное число m с остатком* — это значит найти два целых числа q и r таких, что справедливо равенство $a = mq + r$, причем число r удовлетворяет условию $0 \leq r < m$.

Если $r = 0$, то говорят, что целое число a делится нацело на натуральное число m.

Теорема 1. *Пусть a — любое целое число и m — любое натуральное число. Тогда существует единственная пара целых чисел q и r, удовлетворяющая условиям: $a = mq + r$ и $0 \leq r < m$.*

Доказательство. Случай, когда a — натуральное число, был разобран в § 1.

Если $a = 0$, то пара чисел $q = 0$ и $r = 0$ удовлетворяют условиям теоремы.

Пусть $a = -n$ — целое отрицательное число. Тогда n — натуральное число, и по уже доказанному получаем, что существует пара целых чисел q_1 и r_1 такая, что $n = mq_1 + r_1$ и $0 \leq r_1 < m$. В случае, если $r_1 = 0$, из равенства $n = mq_1 + r_1$ вытекает равенство $a = mq$, где $q = (-q_1)$, т.е. пара чисел $q = -q_1$ и $r = 0$ удовлетворяет условиям теоремы. Если $0 < r_1 < m$, то из равенства $n = mq_1 + r_1$ вытекает равенство $a = (-q_1 - 1)m + (m - r_1)$, и тогда пара чисел $q = -q_1 - 1$ и $r = m - r_1$ удовлетворяет условиям теоремы.

Итак, для любого целого числа a и любого натурального числа m существует пара целых чисел q и r таких, что $a = mq + r$ и $0 \leq r < m$.

Единственность пары целых чисел q и r доказывается так же, как и в теореме 9 § 1. Так же, как и в § 1, целое число, делящиеся на 2 нацело, будем называть *четным* числом, а делящиеся на 2 с остатком $r = 1$ — *нечетным*.

Приведем некоторые следствия теоремы 1.

а) *Любое четное число a может быть записано в виде $a = 2q$, где q — некоторое целое число.*

б) *Любое нечетное число a может быть записано в виде $a = 2q_1 + 1$, где q_1 — некоторое целое число.*

в) *Любое целое число a, делящиеся нацело на три, может быть записано в виде $a = 3q$, где q — некоторое целое число.*

г) *Любое целое число a, не делящиеся нацело на три, может быть записано в одном из следующих видов: $a = 3l + 1$ или $a = 3n + 2$, где l и n — некоторые целые числа.*

д) *Любое целое число a, делящиеся нацело на некоторое натуральное число k, может быть записано в виде $a = kq$, где q — некоторое целое число.*

е) *Любое целое число a, не делящиеся нацело на некоторое натуральное число k, может быть записано в виде $a = kq + r$, где r — одно из чисел $1, 2, ..., (k - 1)$, а q — некоторое целое число.*

В зависимости от делимости целых чисел на данное натуральное число k множество целых чисел можно разбить на k классов. Например, если $k = 2$, то множество всех целых чисел разбивается на два класса: четные числа и нечетные числа.

Множество всех целых чисел можно разбить также и на три класса:

а) числа, кратные числу три, т.е. числа вида $3q$, где q — любое целое число;

б) числа, имеющие при делении на три остаток единицу, т.е. числа вида $3l + 1$, где l — любое целое число;

в) числа, имеющие при делении на три остаток два, т.е. числа вида $3n + 2$, где n — любое целое число.

Из приведенных примеров ясно, как разбить множество целых чисел на 4 класса, 5 классов и т.д.

Приведем примеры, показывающие, как разбиение целых чисел на классы помогает решать ряд задач.

1. Доказать, что при любом целом b число $b(2b + 1)(7b + 1)$ делится на три.

Доказательство. Разобьем множество всех целых чисел на три класса: а) $3q$; б) $3q + 1$; в) $3q + 2$, где q — любое целое число.

Пусть b — любое число из класса а). Тогда $b(2b + 1)(7b + 1) = 3q(6q + 1)(21q + 1)$, откуда видно, что при любом целом q это число делится на 3.

Пусть b — любое число из класса б). Тогда $b(2b + 1)(7b + 1) = (3q + 1) \cdot 3 \cdot (2q + 1)(21q + 8)$, откуда видно, что при любом целом q число делится на 3.

Пусть b — любое число из класса в). Тогда $b(2b + 1)(7b + 1) = (3q + 2)(6q + 5) \cdot 3 \cdot (7q + 5)$, откуда видно, что при любом целом q число делится на 3.

2. Доказать, что среди любых k последовательных целых чисел есть число, делящееся нацело на k.

Доказательство. Все целые числа можно разбить на следующие k классов:

$$\begin{array}{l} kq, \\ kq + 1, \\ kq + 2, \\ \quad\vdots \\ kq + (k - 1), \end{array}$$

где q — любое целое число.

Пусть даны k последовательных целых чисел, начинающихся с некоторого целого числа b, т.е. b, $(b + 1)$, $(b + 2)$, ..., $[b + (k - 1)]$, и пусть число b содержится в классе $kq + i$ для некоторого i $[i = 0, 1, 2, ..., (k - 1)]$, т.е. пусть $b = kq + i$, где q — некоторое целое число. Поскольку среди k последовательных чисел есть число

$$[b + (k - i)] = [kq + i + (k - i)] = k(q + 1),$$

которое делится нацело на k, то утверждение 2 доказано.

§ 4. Рациональные и иррациональные числа

Рациональные числа. Как уже отмечалось выше, в множестве натуральных чисел не всегда выполнимы действия вычитания и деления. В § 2 множество натуральных чисел было расширено до множества обыкновенных дробей, и в этом множестве деление уже всегда выполнимо; однако действие вычитания выполнимо не всегда. Поэтому возникает необходимость во введении новых чисел.

Введем в рассмотрение новые числа — *дроби со знаком минус* т.е. числа вида $\left(-\frac{m}{n}\right)$, где m и n — натуральные числа. Дробь $\left(-\frac{m}{n}\right)$ называют иногда числом, *противоположным* дроби $\frac{m}{n}$.

Теперь рассмотрим множество чисел, состоящее из всех дробей, нуля и всех дробей со знаком минус. Можно считать, что каждое число из этого множества есть отношение целого числа к натуральному. Поэтому будем считать, что это множество состоит из чисел вида $\frac{p}{q}$, где q — натуральное число, а p — целое число.

Будем считать, что два числа $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ из этого множества равны, если справедливо равенство $pn = qm$. Будем считать, что сложение и умножение чисел из этого множества производятся по следующим правилам:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+qm}{qn} \quad \text{и} \quad \frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}.$$

Множество чисел, состоящее из всех чисел вида $\frac{p}{q}$, где q — натуральное число, а p — целое число, с только что введенными определениями равенства и действий сложения и умножения, называется *множеством рациональных чисел* и обозначается буквой Q, а сами эти числа называются *рациональными числами*.

Если p — натуральное число, то число $\frac{p}{q}$ называется *положительным рациональным числом*, или *положительной дробью*.

Если же p — отрицательное число, то число $\frac{p}{q}$ называется *отрицательным рациональным числом*, или *отрицательной дробью*. Ясно, что множество целых чисел — часть множества рациональных чисел.

Для действий сложения и умножения рациональных чисел вводятся обратные действия — вычитание и деление, при этом оба эти действия, за исключением запрещенного деления на нуль, всегда выполнимы.

Основные законы сложения и умножения рациональных чисел аналогичны основным законам сложения и умножения целых чисел и поэтому здесь не приводятся.

Если рациональное число r взято сомножителем k раз ($k > 1$), то произведение $\underbrace{rr \dots r}_{k \text{ раз}}$ называют *k-й степенью числа r* и обозначают r^k. Кроме того, по определению $r^1 = r$.

Как и для натуральных чисел, справедливы следующие свойства степеней рациональных чисел:

а) $r^m r^k = r^{m+k}$;

б) $r_1^m r_2^m = (r_1 r_2)^m$;

в) $(r^k)^m = r^{km}$;

г) $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k = \frac{r_1^k}{r_2^k}$, если $r_2 \neq 0$;

д) $\frac{r^k}{r^m} = r^{k-m}$, если $k > m$, $r \neq 0$.

По определению $r^0 = 1$ для любого рационального числа r, кроме числа нуль.

В связи с понятием степени рационального числа часто возникает задача: для данного натурального числа k и для данного положительного числа r_1 найти другое положительное рациональное число r_2 такое, что $r_2^k = r_1$.

Эта задача не всегда имеет решение.

Теорема 1. *Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.*

Доказательство. Предположим, что существует рациональное число $\frac{p}{q}$ такое, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Не ограничивая общности, будем считать p и q взаимно простыми (если числитель и знаменатель данного рационального числа имеют общие множители, то число $\frac{p}{q}$, полученное после сокращения, равно данному). Пользуясь свойством г) степеней рациональных чисел, запишем наше предположение в виде $\frac{p^2}{q^2} = \frac{2}{1}$.

Из определения равенства рациональных чисел вытекает, что $p^2 = 2q^2$. Поскольку правая часть этого равенства делится на 2, то и левая должна делится на 2. Но число p^2 делится на 2 только в случае, если число p делится на 2 (если p не делится на 2, то p^2 также не делится на 2). Поскольку p делится на 2, то существует целое число k такое, что $p = 2k$. Подставляя это значение p в равенство $p^2 = 2q^2$, получаем, что $q^2 = 2k^2$. Поскольку правая часть этого равенства делится на 2, то и левая делится на 2, значит, число q делится на 2, т.е. $q = 2m$.

Итак, получили, что числа p и q имеют общий множитель — число 2, а по предположению в равенстве $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ числа p и q взаимно простые. Это противоречие и означает, что сделанное предположение неверно, а верно утверждение теоремы.

Таким образом, возникает необходимость ввести новые числа, отличные от рациональных, такие, например, как число, квадрат которого равен 2.

Иррациональные числа. В § 2 были введены в рассмотрение бесконечные периодические десятичные дроби. Теперь расширим это понятие, введя в рассмотрение новые числа, которые будем называть бесконечными десятичными дробями.

Бесконечной десятичной дробью назовем число, которое может быть записано в виде

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots, \tag{1}$$

или в виде

$$- a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots, \qquad (2)$$

где a_0 — число из расширенного натурального ряда, a_1, a_2, ..., a_k ... — числа из множества чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Многоточие означает, для любого натурального числа m на m — м месте после запятой стоит число a_m.

Если среди чисел a_0, a_1, a_2, ..., a_k ... хотя бы одно отлично от нуля, то число, записанное в виде (1), будем называть *положительной бесконечной десятичной дробью*, а число, записанное в виде (2), будем называть *отрицательной бесконечной десятичной дробью*. Если среди чисел a_0, a_1, a_2, ..., a_k ... нет чисел, отличных от нуля, то число, записанное в виде (1), будем считать равным числу, записанному в виде (2), и называть нулевой бесконечной периодической десятичной дробью и обозначать так: 0,(0). Очевидно, что множество всех бесконечных десятичных дробей содержит в себе:

1) множество всех положительных периодических бесконечных десятичных дробей;

2) множество всех отрицательных периодических бесконечных десятичных дробей;

3) нулевую бесконечную периодическую десятичную дробь.

Покажем теперь, что только что перечисленными периодическими бесконечными десятичными дробями не исчерпывается множество всех бесконечных десятичных дробей.

Теорема 2. *Бесконечная десятичная дробь*

$$0,\ 1010010001000010000010000001 \dots,$$

образуемая по правилу: за каждой единицей идет группа нулей, содержащая на один нуль больше, чем предыдущая группа, — не является периодической десятичной дробью.

Доказательство. Предположим, что это периодическая дробь. Пусть ее период состоит из n цифр и первый период начинается с k-го места. Ясно, что в рассматриваемой дроби с некоторого m-го места, каждой единице будут предшествовать $(2n + 1)$ или более подряд идущих нулей. Рассмотрим каждую из таких групп нулей, начинающуюся с любого p — го места, где $p > k$ и $p > m$. Возьмем теперь нуль, стоящий посередине этой группы. Этот нуль находится либо в начале, либо в конце, либо внутри некоторого периода длины n, но во всех перечисленных случаях этот период целиком лежит на взятом отрезке из $(2n + 1)$ или более нулей. Значит, период состоит из одних нулей, и, следовательно, в записи дроби с k-го места должны быть только нули, а это неверно. Теорема доказана.

Из вышеизложенного вытекает, что каждое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Поэтому естественно *иррациональным числом* называть число, которое может быть записано в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

В дальнейшем будем считать, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь есть вполне определенное рациональное число, а любая бесконечная непериодическая десятичная дробь есть вполне определенное иррациональное число. Заметим, что в силу этих определений нулевая бесконечная периодическая дробь есть число нуль.

§ 5. Действительные числа

Множество всех бесконечных десятичных дробей (с вводимыми ниже определениями равенства, суммы и произведения этих чисел) называется *множеством действительных чисел* и обозначается буквой R, а каждая бесконечная десятичная дробь называется *действительным числом*. Положительная бесконечная дробь будет называться *положительным действительным числом*, отрицательная бесконечная десятичная дробь — *отрицательным действительным числом*, нулевая бесконечная периодическая дробь (с периодом нуль) — *числом нуль*. Поскольку бесконечные десятичные дроби есть периодические и непериодические, то каждое действительное число является либо рациональным, либо иррациональным.

Два положительных действительных числа

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots,$$
$$b_0, b_1b_2 \dots b_k \dots$$

равны, если $b_k = a_k$ для всех чисел k из расширенного натурального ряда.

Из двух положительных действительных чисел

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots,$$
$$b_0, b_1b_2 \dots b_k \dots$$

первое *больше* второго, если либо $a_0 > b_0$, либо если $a_0 = b_0$, но $a_1 > b_1$, либо если $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$ (для некоторого натурального числа n), но $a_{n+1} > b_{n+1}$.

Два действительных числа

$$a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots \quad \text{и} \quad -b_0, b_1b_2 \dots b_k \dots$$

называются *противоположными*, если $b_k = a_k$ для всех k из расширенного натурального ряда. *Два отрицательных действительных числа равны*, если равны противоположные им числа. *Из двух отрицательных чисел больше то*, у которого противоположное (положительное) число меньше. Положительное число больше нуля и любого отрицательного числа. Нуль больше любого отрицательного числа.

Рассмотрим *приближенные значения бесконечных дробей*. Оборвем на каком-то месте бесконечную положительную десятичную дробь, изображающую данное положительное действительное число. Получим конечную десятичную дробь (которую можно записать в виде бесконечной с периодом нуль). Эта дробь будет меньше данного числа (или равна ему). Такая дробь называется *приближенным значением данного положительного действительного числа с недостатком*.

Если положительную бесконечную десятичную дробь оборвать на каком-то k-м месте и к полученной дроби прибавить дробь $\frac{1}{10^k}$, то получим конечную десятичную дробь, которая больше данного действительного числа. Такая дробь называется *приближенным значением данного положительного действительного числа с избытком*.

Если отрицательную бесконечную дробь оборвать на каком-то месте, то получим конечную десятичную дробь, которая больше данного действительного числа (или равна ему). Такая дробь называется *приближенным значением данного отрицательного действительного числа с избытком.*

Если отрицательную бесконечную дробь оборвать на каком-то k-м месте и к полученной дроби прибавить дробь $\left(-\frac{1}{10^k}\right)$, то получим десятичную дробь, которая меньше данного действительного числа. Такая дробь называется *приближенным значением данного отрицательного числа с недостатком.*

Примеры. 1. Приближенным значением числа 0,4(31) с недостатком будут следующие конечные дроби: 0,4; 0,43; 0,431; 0,4313; 0,43131; ... Приближенным значением этого же числа с избытком будут дроби 0,5; 0,44; 0,432; 0,4314; 0,43132; ...

2. Приближенным значением числа — 3,2(17) с недостатком будут следующие конечные дроби: — 3,3; — 3,22; — 3,218; — 3,2172; — 3,21718; ... Приближенным значением этого же числа с избытком будут дроби — 3,2; —3,21; — 3,217; — 3,2171; — 3,21717; ...

Определим теперь действия сложения и умножения для действительных чисел.

Суммой двух действительных чисел называется число, которое больше (или равно) суммы двух любых приближенных их значений с недостатком, но меньше (или равно) суммы двух любых приближенных их значений с избытком.

Без доказательства примем, что такое число всегда существует и притом только одно.

Отметим частный случай: сумма действительного числа а и противоположного ему числа (которое будем обозначать $(-a)$) есть число нуль.

Произведением двух действительных положительных чисел a_0, a_1a_2 ... a_k ... и b_0, b_1b_2 ... b_k ... называется число, которое больше (или равно) произведения их значения с недостатком, но меньше (или равно) произведения двух любых приближенных их значений с избытком.

Без доказательства примем, что такое число всегда существует и притом только одно.

Произведение двух действительных отрицательных чисел $(-a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots)$ и $(-b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots)$ равно произведению противоположных им положительных чисел $a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots$ и $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$. Произведение двух действительных чисел, имеющих разные знаки $a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots$ и $(-b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots)$ или $(-a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots)$ и $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$, равно отрицательному числу, противоположному произведению чисел $a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots$ и $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$.

Произведение двух чисел, одно из которых есть нуль, равно нулю.

Справедливы следующие основные законы сложения и умножения действительных чисел:

а) $a + b = a + b$ (коммутативность сложения);

б) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);

в) $ab = ba$ (коммутативность умножения);

г) $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения);

д) $(a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Для действий сложения и умножения действительных чисел вводятся обратные действия — вычитание и деление.

Вычесть из действительного числа a действительное число b — значит найти действительное число c такое, что $b + c = a$.

Разделить действительное число a на отличное от нуля действительное число b — значит найти действительное число d такое, что $bd = a$.

На множестве действительных чисел действия вычитания и деления, за исключением запрещенного деления на нуль, всегда выполнимы.

Если действительное число a взято множителем n раз (n — натуральное число, $n > 1$), то произведение $\underbrace{aa \ldots a}_{n\ \text{раз}}$ называют *n-й степенью* числа a и обозначают a^n.

Кроме того, по определению $a^1 = a$. Свойства степени действительных чисел аналогичны свойствам степени рациональных чисел и поэтому здесь не приводятся. В связи с понятием степени действительных чисел часто возникает такая задача: для данного натурального числа n и для данного неотрицательного действительного числа a найти другое неотрицательное число b такое, что $b^n = a$.

Неотрицательное число b такое, что его n-я степень есть данное число a, т.е. $b^n = a$, называется ***арифметическим корнем*** степени n неотрицательного числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$, т.е. $b = \sqrt[n]{a}$.

Теорема. *Для любого натурального числа $n > 1$ и любого неотрицательного числа a существует и притом единственный в множестве неотрицательных чисел арифметический корень степени n из числа a.*

Доказательство теоремы опустим.

В случае $n = 2$ в обозначении корня цифру 2 не пишут; в случае $n = 1$ корень 1-й степени из числа a есть само число a. Арифметические корни могут быть рациональными и иррациональными числами.

Например, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ есть рациональное число $\frac{2}{3}$; $\sqrt{2}$ — есть иррациональное число (это вытекает из теоремы 1 § 4).

Заметим, что по определению арифметический корень из числа 0 есть нуль.

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа a называется: само это число, если a — положительное число; нуль, если a — нуль; число противоположное числу a, если a — отрицательное число. Абсолютная величина действительного числа a обозначается $|a|$. Сформулированное выше определение можно коротко записать так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0; \\ 0, & \text{если } a = 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Основные свойства абсолютных величин действительных чисел будут приведены в главе II.

Заметим, что в силу определения арифметического корня из неотрицательного числа для любого действительного числа справедливо равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.

Поставим более общую задачу: для любого действительного числа a и любого натурального числа n найти действительные числа b такие, что $b^n = a$. Если такие числа существуют, то они называются *действительными алгебраическими корнями n-й степени* из действительного числа a. Если число a неотрицательное, то, как говорилось выше, существует одно неотрицательное число b такое, что $b^n = a$, т.е. для любого неотрицательного числа a существует хотя бы один алгебраический корень b, для обозначения которого есть специальный символ $\sqrt[n]{a}$ (арифметический корень). В случае существования других алгебраических корней, кроме арифметического корня, для их обозначения нет специальных символов.

Рассмотрим вопрос существования алгебраического корня из действительного числа. Заметим, что в этом параграфе утверждения о количестве действительных корней для данного действительного числа принимаются без доказательства. Их справедливость будет вытекать из общей теоремы о количестве корней из комплексного числа (гл. XI).

Пусть $a = 0$, тогда для любого натурального числа n существует и притом только один алгебраический корень n-й степени — число b, равное 0.

Пусть a — положительное число и n — нечетное натуральное число ($n = 2k + 1$). Тогда существует и притом только один арифметический корень $b_1 = \sqrt[2k+1]{a}$ из этого числа и других действительных алгебраических корней из этого числа нет. Таким образом, существует только один алгебраический корень нечетной степени из положительного числа, а именно арифметический корень.

Пусть a — положительное число и n — четное натуральное число ($n = 2k$). Тогда существует и притом только один арифметический корень $b_1 = \sqrt[2k]{a}$ и действительный алгебраический корень $b_2 = -\sqrt[2k]{a}$ из этого числа. Таким образом, существуют два действительных алгебраических корня четной степени из положительного числа a: $b_1 = \sqrt[2k]{a}$ и $b_2 = -\sqrt[2k]{a}$.

Пусть a — отрицательное число и n — четное натуральное число ($n = 2k$). Поскольку любое не равное нулю действительное число в четной степени есть положительное число, а число 0 в любой натуральной степени есть нуль, то нет ни одного действительного числа b такого, что b^{2k} — отрицательное число. Значит, нет действительного алгебраического корня четной степени из отрицательного числа.

Пусть a — отрицательное число и n — нечетное натуральное число ($n = 2k + 1$). Покажем, что есть одно действительное отрицательное число b такое, что $b^n = a$. Обозначим $c = -a$. Тогда $c > 0$, и потому существует единственный арифметический корень d степени $(2k + 1)$ из числа c: $d^{2k+1} = c$, или $d = \sqrt[2k+1]{c} = \sqrt[2k+1]{-a} = \sqrt[2k+1]{|a|}$. Положим теперь $b = -d$. Тогда $b^{2k+1} = (-1)^{2k+1} d^{2k+1} = (-1)c = (-1) \times$ $\times (-a) = a$. Значит, $b = -\sqrt[2k+1]{|a|}$ есть отрицательное число такое, что $b^{2k+1} = a$, т.е. $(-\sqrt[2k+1]{|a|})$ — действительный алгебраический корень из отрицательного числа a.

Примеры. 1. Пусть $a = -7$, $n = 5$, тогда вещественный алгебраический корень 5-й степени из числа (-7) есть число $b = -\sqrt[5]{|-7|} = -\sqrt[5]{7}$.

2. Пусть $a = -8$, $n = 3$, тогда вещественный алгебраический корень 3-й степени из числа (-8) есть число $b =$ $= \sqrt[3]{|-8|} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Замечание. Иногда корень нечетной степени из отрицательного числа a записывают в виде $b = \sqrt[2k+1]{a}$, понимая под этим число $b = -\sqrt[2k+1]{|a|}$. Например, вместо $b = -\sqrt[5]{7}$ пишут $b = \sqrt[5]{-7}$. Но в дальнейшем такая запись употребляться не будет.

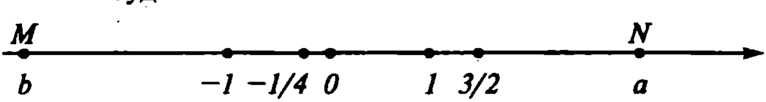


Рис. 1.

Перейдем теперь к *геометрической интерпретации* действительных чисел. Пусть дана горизонтальная прямая (рис. 1). Она имеет два взаимно противоположных направления. Назовем одно из этих направлений положительным, а другое отрицательным. Для определенности за положительное направление выберем направление вправо (если смотреть по рисунку). Зафиксируем на прямой некоторую точку O и назовем эту точку *началом отсчета*. Точка O разбивает прямую на две части, называемые *лучами*. Луч, направленный вправо, назовем *положительным* лучом, а луч, направленный вправо, — *отрицательным* лучом. Пусть задан отрезок, принятый за единицу длины; в таких случаях говорят, что введен масштаб.

Прямую, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и введен масштаб, называют *числовой прямой*.

Каждой точке числовой прямой можно поставить в соответствие действительное число по следующему правилу:

— выбранной точке O поставим в соответствие число нуль;

— каждой точке N на положительном луче поставим в соответствие положительное число a, где a — длина отрезка ON;

— каждой точке M на отрицательном луче поставим в соответствие отрицательное число b, где $|b|$ — длина отрезка OM.

Таким образом, каждой точке числовой прямой (при выбранном масштабе) поставлено в соответствие единственное действительное число.

Покажем, что этим процессом перебраны все действительные числа. Предположим противное, т.е. пусть некоторое действительное число c не поставлено в соответствие некоторой точке на числовой прямой. Если число c положительное, то найдется отрезок, длина которого равна c. Отложив этот отрезок вправо от точки O на числовой прямой, получим точку, которой число c должно соответствовать, т.е. получим противоречие. Если же число c отрицательное, то найдется отрезок, длина которого равна $|c|$, отложив этот отрезок влево от точки O на числовой прямой, получим точку, которой должно соответствовать число c, т.е. опять получим противоречие.

Итак:

1. каждой точке на числовой прямой поставлено в соответствие одно и только одно число;

2. разным точкам числовой прямой поставлены в соответствие разные числа;

3. нет ни одного действительного числа, которое не соответствовало бы какой-либо точке на числовой прямой.

В таких случаях говорят, что между множеством всех точек числовой прямой и множеством всех действительных чисел установлено *взаимно однозначное соответствие.*

Отметим, что часто при этом точки числовой прямой отождествляются с числами, которые им поставлены в соответствие. Пользуясь этим, легко сформулировать, какое из двухдействительных чисел больше: *больше то, которое расположено на числовой прямой правее другого.*

Система координат на прямой. Если на прямой выбрано начало отсчета, положительное направление и введен масштаб, то говорят еще, что на прямой задана *система координат.* При этом сама прямая называется *координатной осью,* а точка O — *началом координат.* Каждой точке M этой прямой ставят в соответствие число, называемое *координатой* точки M в заданной системе координат. Это число определяется по правилу: если точка M находится на положительном луче, то это число равно положительному числу — длине отрезка OM; если точка M находится на отрицательном луче, то это число равно отрицательному числу — длине отрезка OM со знаком минус; если же точка M совпадает с началом координат, то это число равно нулю.

Пусть данная координатная ось расположена горизонтально, причем так, что положительный луч направлен вправо. Тогда любая точка, лежащая справа от начала координат O, имеет положительную координату, а любая точка, лежащая слева от начала координат O, — отрицательную координату. Координата точки O, начала координат, равна нулю. Легко видеть, что координата любой точки M координатной оси равна действительному числу, поставленному в соответствие точке на числовой прямой.

Если рассматривается несколько разных фиксированных точек оси l, то часто их обозначают некоторой заглавной буквой с разными номерами, например M_1, M_2, M_3, ..., M_n, ... ; координаты этих точек обозначают буквой оси с соответствующими номерами т.е. t_1, t_2, t_3, ..., t_n, ... Чтобы указать, что данная точка имеет данную координату, записывают эту координату в круглых скобках рядом с обозначением самой точки, например $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$, ..., $M_n(t_n)$, ... Говоря, что дана точка, понимают, что дана ее координата; говоря, что надо найти точку, ищут ее координату.

Теорема 1. *При любом расположении на координатной оси двух разных точек $M_1(t_1)$ и $M_2(t_2)$ расстояние d между этими точками равно модулю разности их координат, т.е.*

$$d = |t_1 - t_2|.$$

Доказательство. Если точки M_1 и M_2 совпадают, то утверждение теоремы очевидно. Пусть точки M_1 и M_2 не совпадают и пусть для определенности точка $M_2(t_2)$ лежит правее точки $M_1(t_1)$ (если точка $M_1(t_1)$ лежит правее точки $M_2(t_2)$, то доказательство повторяется с заменой t_2 на t_1, а t_1 на t_2).

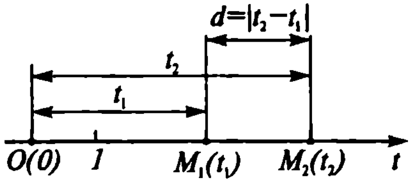


Рис. 2.

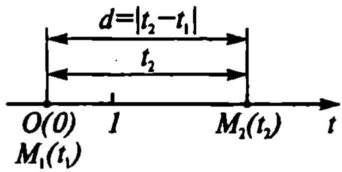


Рис. 3.

Пусть $M_1(t_1)$ и $M_2(t_2)$ — любые не совпадающие точки, лежащие правее начала координат O (рис. 2). Тогда длина отрезка M_1M_2 равна длине отрезка OM_2, которая равна t_2, минус длина отрезка OM_1, которая равна t_1, т.е.

$$d = t_2 - t_1 = |t_2 - t_1|.$$

Пусть $M_1(t_1)$ совпадает с началом координат $O(0)$, т.е. $t_1 = 0$, а $M_2(t_2)$ — любая точка, лежащая правее начала координат O (рис. 3). Тогда длина d отрезка M_1M_2 равна длине отрезка OM_2, которая равна t_2, т.е.

$$d = t_2 = |t_2 - 0| = |t_2 - t_1|.$$

Пусть $M_1(t_1)$ — любая точка, лежащая левее начала координат, а точка $M_2(t_2)$ — любая точка, лежащая правее начала координат (рис. 4). Тогда длина d отрезка M_1M_2 равна длине

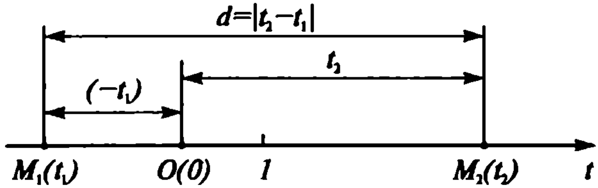


Рис. 4.

отрезка OM_2, которая равна t_2, плюс длина отрезка OM_1, которая равна $(- t_1)$, т.е.

$$d = t_2 + (- t_1) = t_2 - t_1 = |t_2 - t_1|.$$

Пусть $M_1(t_1)$ — любая точка, лежащая левее начала координат, а точка $M_2(t_2)$ совпадает с началом координат $O(0)$, т.е. $t_2 = 0$ (рис. 5). Тогда длина d отрезка M_1M_2 совпадает с длиной отрезка M_1O, которая равна $(- t_1)$, т.е.

$$d = - t_1 = |0 - t_1| = |t_2 - t_1|.$$

Пусть $M_1(t_1)$ и $M_2(t_2)$ — любые несовпадающие точки, лежащие левее начала координат O (рис. 6). Тогда длина d

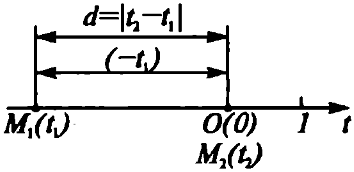


Рис. 5.

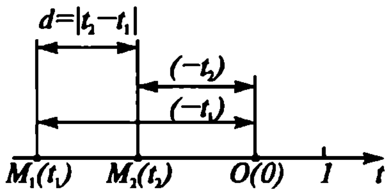


Рис. 6.

отрезка M_1M_2 равна длине отрезка OM_1, которая равна $(- t_1)$, минус длина отрезка OM_2, которая равна $(- t_2)$, т.е.

$$d = (- t_1) - (- t_2) = t_2 - t_1 = |t_2 - t_1|.$$

Итак, во всех случаях $d = |t_2 - t_1|$. Теорема доказана.

Примеры. 1. Найти расстояние между точками $M(3)$ и $P(-2)$.

$$d = |3 - (-2)| = |3 + 2| = 5 \text{ или } d = |-2 - 3| = |-5| = 5.$$

2. Найти расстояние между точками $M(-4)$ и $P(-10)$.

$$d = |-4 - (-10)| = |6| = 6 \quad \text{или}$$
$$d = |(-10) - (-4)| = |-6| = 6.$$

Итак, можно сказать, что модуль любого действительного числа a, т.е. $|a|$, есть расстояние от точки $M(a)$ до начала координат.

§ 6. Числовые равенства и неравенства

В § 5 упоминалось о сравнении чисел и были приведены определения, по которым можно выяснить, равны ли два данных действительных числа или одно больше другого. Все эти определения можно записать иначе, используя сравнение действительных чисел с числом нуль, а именно так: два действительных числа a и b равны тогда и только тогда, когда их разность равна нулю, т. е. $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$; число a больше числа b тогда и только тогда, когда разность $(a - b)$ положительна, т.е. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$; число a меньше числа b тогда и только тогда, когда разность $(b - a)$ положительна или когда разность $(a - b)$ отрицательна, т.е. $a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow b - a > 0$.

Если два числа соединены знаком равенства, то принято говорить, что задано числовое равенство. Однако это равенство может быть и верным, и неверным. Например, $2 = 5 - 3$, $\frac{4}{7} = \frac{\sqrt{16}}{7}$ — верные, а $3 = 5 - 1$, $6 = \frac{7}{3}$ — неверные равенства.

Аналогично, если два числа соединены любым знаком неравенства, то принято говорить, что задано числовое неравенство, которое может быть верным и неверным.

Например, $110{,}1 < 11^2$, $\sqrt{10} > 3$ — верные, $-5 > \sqrt{2}$, $\frac{7}{5} > 3$ — неверные неравенства.

Справедливость или несправедливость некоторых числовых равенств и неравенств не всегда очевидна. Например, справедливость неравенства

$$(100)^{50} < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 99 \cdot 100$$

не очевидна. В таких случаях числовые равенства и неравенства надо доказывать. Большую роль при этом играют рассмотренные ниже основные свойства неравенств.

1. *Если числа a, b и c таковы*, что $a = b$ *и* $b = c$, *то* $a = c$ (свойство транзитивности равенств).

2. *Если числа a, b, c, d таковы, что* $a = b$ *и* $c = d$, *то* $a + c = b + d$.

3. *Если числа a, b, c, d таковы*, что $a = b$, $c = d$, *то* $ac = bd$.

4. *Для любых действительных чисел a, b и c равенства* $a = b$ *и* $a + c = b + c$ *равносильны, т. е. из справедливости равенства* $a = b$ *следует справедливость равенства* $a + c = b + c$, *и наоборот, из справедливости равенства* $a + c = b + c$ *следует справедливость равенства* $a = b$, *т. е.* $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$.

5. *Для любых действительных чисел a и b и для любого действительного отличного от нуля числа c равенства* $a = b$ *и* $ac = bc$ *равносильны, т. е. если* $c \neq 0$, *то* $a = b \Leftrightarrow ac = bc$.

Приведем аналогичные свойства для числовых неравенств.

1. *Если числа a, b и c таковы, что* $a > b$ *и* $b > c$, *то* $a > c$ (свойство транзитивности неравенств).

Доказательство. $a - c = (a - c) + (b - b) = (a - b) + (b - c)$. Так как $a > b$, то $a - b > 0$, так как $b > c$, то $b - c > 0$, но сумма двух положительных чисел положительна, поэтому $a - c > 0$ т.е. $a > c$.

2. *Если числа a, b, c, d таковы, что* $a > b$, $c > d$, *то* $a + c > b + d$.

Доказательство. $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$. Так как $a > b$, то $(a - b)$ положительное число; так как $c > d$, то $(c - d)$ также положительное число; сумма двух положительных чисел положительна, поэтому $(a + b) - (b + d) > 0$, т.е. $a + c > b + d$.

2а. *Если числа a, b, c, d таковы, что $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.*

Доказательство. $(a - c) - (b - d) = (a - b) + (d - c)$. Так как $a > b$, то $(a - b)$ — положительное число; так как $c < d$, то $(d - c)$ — также положительное число; сумма двух положительных чисел положительна, поэтому $(a - c) - (b - d) > 0$, т.е. $a - c > b - d$.

3. *Если a, b, c, d — положительные числа и $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$.*

Доказательство. $ac - bd = (ac - bd) + (bc - bc) = (ac - bc) + (bc - bd) = c(a - b) + b(c - d)$. Так как $a > b$, то $(a - b)$ — положительное число; так как c — положительное число и так как произведение положительных чисел положительно, то $c(a - b)$ — положительное число; аналогично показывается, что $b(c - d)$ — положительное число; сумма положительных чисел положительна, поэтому $ac - bd > 0$, т.е. $ac > bd$.

4. *Для любых действительных чисел a, b и c неравенства $a > b$ и $a + c > b + c$ равносильны, т. е. из справедливости неравенства $a > b$ следует справедливость неравенства $a + c > b + c$ и наоборот, из справедливости неравенства $a + c > b + c$ следует справедливость неравенства $a > b$, т. е. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.*

Доказательство. Пусть $a > b$. Тогда $(a + c) - (b + c) = (a - b) + (c - c) = (a - b) > 0$, т.е. $a + c > b + c$. Пусть $(a + c) > (b + c)$. Тогда $a - b = (a - b) + (c - c) = (a + c) - (b + c) > 0$, т.е. $a > b$.

5. *Для любых действительных чисел a и b и любого положительного числа c неравенства $a > b$ и $ac > bc$ равносильны, т. е. если $c > 0$, то $a > b \Leftrightarrow ac > bc$.*

Доказательство. Пусть $a > b$, тогда $ac - bc = (a - b)c$. Так как c и $(a - b)$ — положительное числа, то их произведение положительное число, т.е. $ac - bc > 0$, или $ac > bc$. Пусть $ac > bc$, тогда $(a - b)c = ac - bc > 0$.

Если произведение двух чисел положительно и одно из них также положительно, то положительно и другое число, т.е. так как $c > 0$, то $a - b > 0$, т.е. $a > b$.

5а. *Для любых действительных чисел a и b и для любого отрицательного числа c неравенства $a > b$ и $ac < bc$ равносильны, т. е. если $c < 0$, то $a > b \Leftrightarrow ac < bc$.*

Доказательство этого факта аналогично доказательству свойства 5.

Итак, имеют место следующие основные свойства равенств и неравенств:

0) $a = b \Leftrightarrow b = a$;	0) $a > b \Leftrightarrow b < a$;
1) $a = b,\ b = c \Rightarrow a = c$;	1) $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$;
2) $a = b,\ c = d \Rightarrow a + c = b + d$;	2) $a > b,\ c > d \Rightarrow$ $\Rightarrow a + c > b + d$;
	2а) $a > b,\ c < d \Rightarrow$ $\Rightarrow a - c > b - d$;
3) $a = b,\ c = d \Rightarrow ac = bd$;	3) $a > b > 0,\ c > d > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow ac > bd$;
4) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$;	4) $a < b \Leftrightarrow a + c > b + c$;
5) $a = b \Leftrightarrow ac = bc$ при $c \neq 0$;	5) $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ при $c > 0$;
	5а) $a > b \Leftrightarrow ac < bc$ при $c < 0$.

Выше употреблялись знаки равенства (=) и строго неравенства (< или >). Иногда этих знаков не хватает. Есть задачи, где необходимы нестрогие неравенства.

Пример. Сегодня в Москве 0°, а в Ленинграде температура не выше.

Если температуру в Ленинграде обозначить буквой T, тогда либо $T = 0°$, либо $T < 0°$. В таких случаях принято писать $T \leq 0°$.

Приведем определения нестрогих неравенств $a \geq b$ и $a \leq b$. Числовое неравенство $a \leq b$ считается верным и при $a < b$ и при $a = b$ и неверным лишь в случае $a > b$. Например, неравенства $6 \leq 9$ и $3 \leq 2 + 1$ — оба верные неравенства, а неравенство $7 \leq 6$ неверное. (Запись $a \leq b$ читается либо как «a не больше b», либо как «a меньше или равно b».)

Числовое неравенство $a \geq b$ считается верным и при $a > b$, и при $a = b$; оно считается неверным лишь в случае

$a < b$. (Запись $a \geq b$ читается либо как «a не меньше b», либо как «a больше или равно b».)

Для нестрогих неравенств справедливы свойства 1 — 5а, если в них знак строго неравенства заменить на знак нестрогого неравенства.

Будем говорить, что

справедливо двойное неравенство $a < b < c$, если одновременно справедливы два неравенства $a < b$ и $b < c$;

справедливо двойное неравенство $a \leq b < c$, если одновременно справедливы два неравенства $a \leq b$ и $b < c$;

справедливо двойное неравенство $a < b \leq c$, если одновременно справедливы два неравенства $a < b$ и $b \leq c$;

справедливо двойное неравенство $a \leq b \leq c$, если одновременно справедливы два неравенства $a \leq b$ и $b \leq c$;

§ 7. Числовые множества

Понятие множества и элемента множества относятся к основным понятиям, т.е. к понятиям, которые не определяются.

В этом параграфе рассматриваются числовые множества, элементами которых являются действительные числа.

Если число a принадлежит множеству M, то пишут $a \in M$, если a не принадлежит множеству M, то пишут $a \notin M$.

Например: $2 \in N$, $0 \notin N$.

Выше были введены следующие числовые множества:

N — множество всех натуральных чисел (ряд натуральных чисел);

Z — множество всех целых чисел;

Z_0 — множество всех неотрицательных целых чисел (расширенный ряд натуральных чисел);

Q — множество всех рациональных чисел;

R — множество всех действительных чисел.

Приведем примеры других числовых множеств и условимся, как будем их обозначать дальше.

Множество, не имеющее элементов, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$.

Если множество состоит из конечного количества элементов, то такое множество принято записывать так: в фигурных скобках записывают все элементы множества (в любом порядке), отделяя их друг от друга точкой с запятой. Например, множество M, состоящие из шести первых чисел натурального ряда, можно записать так: $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, а множество L, состоящее из одного числа $\frac{\sqrt{2}-3}{4}$, запишется так: $L = \left\{\frac{\sqrt{2}-3}{4}\right\}$.

Если множество состоит из бесконечного количества элементов или из элементов, которые в свою очередь являются множествами, то введенные фигурные скобки сохраняются, а внутри них приводится краткое описание множества. Например, множество всех пар чисел a и b, из которых a есть любое целое число, а b есть любое действительное число, записывается так:

$$M = \{(a; b) \mid a \in Z, b \in R\}.$$

Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то множество A называется *подмножеством* множества B. В этом случае принято писать $A \subset B$ или $B \supset A$.

Например, $N \subset Z$; $\{(a; b) \mid a \in N;\ b \in Z\} \subset \{(a; b) \mid a \in Z;\ b \in R\}$.

Множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $-1 < t < 2$, принято обозначать $(-1; 2)$ и называть *интервалом* $(-1; 2)$. В силу взаимно однозначного соответствия между множеством всех точек числовой прямой об интервале $(-1; 2)$ принято говорить, что это есть множество всех точек числовой прямой, расположенных между точками (-1) и (2), не включая эти точки (рис. 7).

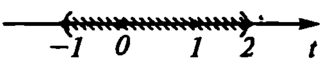


Рис. 7.

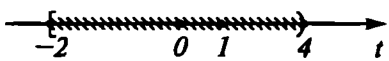


Рис. 8.

Множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $-2 \leq t < 4$, принято обозначать [— 2; 4) и называть *полуинтервалом* [— 2;4). Принято также говорить, что полуинтервал [— 2; 4) есть множество всех точек числовой прямой, расположенных между точками (— 2) и (4), включая точку (— 2) (рис. 8).

Множество всех действительных чисел t, для каждого их которых справедливо двойное неравенство $0 < t \le 3$, принято обозначать (0; 3] и называть *полуинтервалом* (0; 3]. Принято также говорить, что полуинтервал (0; 3] есть множество всех точек числовой прямой, расположенных между точками (0) и (3), включая точку (3) (рис. 9).

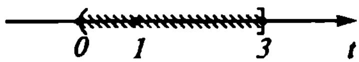


Рис. 9.

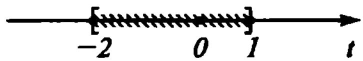


Рис. 10.

Множество всех действительных чисел t, для каждого их которых справедливо двойное неравенство $-2 \le t \le 1$, принято обозначать [— 2; 1] и называть *отрезком* [— 2; 1]. Принято также говорить, что отрезок [— 2; 1] есть множество всех точек числовой прямой, расположенных между точками (— 2) и (1), включая обе эти точки (рис. 10).

В общем случае, если $a < b$, то

отрезком $[a; b]$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $a \le t \le b$;

полуинтервалом $[a; b)$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $a \le t < b$;

полуинтервалом $(a; b]$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $a < t \le b$;

интервалом $(a; b)$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $a < t < b$;

лучом $[a; +\infty)$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо неравенство $t \ge a$;

открытым лучом $(a; +\infty)$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо неравенство $t > a$;

лучом $(-\infty; a]$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо неравенство $t \leq a$;

открытым лучом $(-\infty; a)$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо неравенство $t < a$;

Заметим, что иногда говорят — *«промежуток»*, понимая под этим либо луч, либо отрезок, либо интервал, либо полуинтервал. Наконец, иногда множество R всех действительных чисел обозначается так: $(-\infty; +\infty)$.

Объединение и пересечение множеств.

Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех таких элементов, каждый из которых содержится хотя бы в одном из данных множеств A и B. Для объединения множеств употребляется символ: $C = A \cup B$.

Примеры. 1. Если $A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $B = \{2; 3; 4; 5\}$, то $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

2. $N \cup Z_0 \cup \{0\} = Z_0$; 3. $(-1; 2) \cup (0; 3] = (-1; 3]$;

4. $(-1; 2) \cup [-2; 1) = [-2; 2)$; 5. $[-2; 1] \cup (0; 3] = [-2; 3]$;

6. $(-1; 2] \cup (2; 4) = (-1; 4)$; 7. $(0; 1) \cup (-1; +\infty) = (-1; +\infty)$.

Пересечением множеств A и B называется множество L, элементами которого будут те и только те элементы, которые одновременно являются элементами и первого и второго множества, т.е. пересечение двух множеств есть *общая часть* этих множеств. Для пересечения множеств употребляется знак : $L = A \cap B$.

Примеры. 1. Если $A = \{0; 1; 2; 3\}$ и $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$, то $A \cap B = \{2; 3\}$;

2. $N \cap Z_0 = N$; 3. $N \cap Z = N$;

4. $\{1; 2; 3; 4\} \cap \{2; 3; 4; 5\} = \{2; 3; 4\}$; 5. $(-1; 2) \cap (0; 3] = (0; 2)$;

6. $(-\infty; 1] \cap (0; 3) = (0; 1]$; 7. $(-1; 3) \cap (3; +\infty) = \varnothing$.

Упорядоченные множества. Перестановки и размещения. При рассмотрении числового множества можно числа, принадлежащие этому множеству, расположить в определенном порядке. Тогда имеет смысл говорить об упорядоченном множестве. Одним из примеров упорядоченного множества является ряд натуральных чисел. Если два упорядоченных множества содержат одни и те же элементы, но расположенные в разном порядке, то будем говорить, что эти упорядоченные множества отличаются порядком расположения элементов. Например, из трех чисел 4, 7, 1 можно составить шесть различных упорядоченных множеств: {1; 4; 7}, {1; 7; 4}, {4; 7; 1}, {4; 1; 7}, {7; 1; 4}, {7; 4; 1}.

Рассмотрим более подробно этот вопрос для конечных множеств, т.е. для множеств, состоящих из конечного числа элементов, например чисел.

Определение. *Установленный в конечном множестве порядок называется перестановкой его элементов.* Число перестановок — это число различных упорядоченных множеств, составленных из одних и тех же элементов. Число перестановок из n элементов обозначают через P_n. Для того, чтобы ответить на вопрос, — чему равно число перестановок из n элементов, рассмотрим общую задачу. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Выделим m элементов, где $m \leq n$, из этого множества и расположим их в некотором порядке. Полученное конечное упорядоченное множество будем называть *размещением*. Общую задачу можно сформулировать так: «Сколько существует размещений из n элементов по m элементов?» Ответим сначала на вопрос, сколько существует размещений из n элементов по два элемента. На первом месте такого размещения может быть любой элемент из n элементов, на втором месте может быть любой из $(n - 1)$ оставшихся. Пусть на первом месте стоит элемент a_1, тогда на втором месте может стоять любой из элементов a_2, a_3, ..., a_n. При этом получим $(n - 1)$ размещений. Если на первом месте стоит элемент a_2, то на втором месте может стоять любой из элементов a_1, a_3, a_4, ..., a_n, т.е. будет еще $(n - 1)$ размещений. Перебрав все элементы a_1, a_2, a_3, ..., a_n, получим n групп, в каждой из которых содержится $(n - 1)$ размещений. Следовательно, число всех размещений из n элементов по два будет $n(n-1)$.

Если нужно узнать число размещений из n элементов по три, то следует к каждому размещению из n элементов по два добавить по очереди один элемент из $(n - 2)$ оставшихся. Тогда получится $n(n - 1)$ групп, в каждой из которых будет по $(n - 2)$ размещений. Следовательно, всего размещений из n элементов по три будет $n(n - 1)(n - 2)$. Если число размещений из n элементов по m обозначить A_n^m, то можно записать следующие формулы:

$$A_n^2 = n(n - 1), \quad A_n^3 = n(n - 1)(n - 2). \qquad (1)$$

Перепишем формулы (1) в ином виде:

$$A_n^2 = n[n - (2 - 1)], \quad A_n^3 = n(n - 1)[n - (3 - 1)]. \qquad (2)$$

Можно подметить определенную закономерность в формулах (2): число размещений равно произведению последовательных натуральных чисел начиная с n и кончая $[n - (k - 1)]$, где $k = 2, 3$. Рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$A_n^m = n(n - 1)(n - 2) \ldots [n - (m - 1)], \quad 1 \le m \le n. \qquad (3)$$

Пример. В 1-м классе 6 учебных предметов и 4 урока в день. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня (более одного урока в день по каждому предмету не допускается)?

Для того чтобы решить эту задачу, надо найти число размещений из 6 элементов по 4: $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Итак, возможно 360 способами составить расписание на день. Очевидно, что перестановка — это размещение из n элементов по n. По формуле (3)

$$P_n = n(n - 1)(n - 2) \ldots 2 \cdot 1. \qquad (4)$$

Если воспользоваться символом $n!$ (читается: «n факториал»), который обозначает произведение n первых чисел натурального ряда ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$), то формулу (4) можно записать так:

$$P_n = n!. \qquad (5)$$

Формулу (3) тоже можно записать, используя этот символ:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]\cdot[(n-m)\ldots 2\cdot 1]}{[(n-m)\ldots 2\cdot 1]} = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (6)$$

Чтобы формула (6) совпадала с формулой (5) при $m = n$, принято считать, что $0! = 1$.

Сочетания и их свойства. Часто возникают задачи, когда из данного конечного множества из n элементов надо образовать множество из m элементов ($m \le n$), но во вновь построенном множестве порядок следования элементов не важен, а важно лишь их наличие.

Например, пусть спрашивается, сколькими способами можно выбрать трех учеников из десяти для уборки класса. В этом случае упорядоченность в группе из трех человек необязательна. Такие множества из n элементов по m, которые отличаются друг от друга только элементами, но не порядком их расположения, называются *сочетаниями*, и их число обозначается через C_n^m. Очевидно, что число сочетаний из n элементов по n равно единице: $C_n^n = 1$. Рассмотрим общий случай, когда $1 \le m \le n$.

Пусть составлены все сочетания C_n^m из n элементов по m. Возьмем любое из этих сочетаний и переставим в нем элементы всевозможными способами. Тогда число полученных всевозможных упорядоченных множеств из n элементов по m равно $C_n^m P_m$. Покажем, что это число совпадает с числом всех размещений из n элементов по m. Действительно, возьмем всевозможные размещения и запишем их по группам. В каждую группу включим размещения, составленные из одинаковых элементов, отличающихся порядком их расположения. Таким образом, в каждую группу войдет столько размещений, сколько можно образовать перестановок из данных m элементов, т.е. $m!$ размещений. Все размещения, расположенные в одной группе, рассматриваемые как сочетания, одинаковы, так как содержат одинаковые элементы. Следовательно, число групп — это число различных сочетаний из n элементов по m, т.е.

$$A_n^m = C_n^m m!. \tag{7}$$

Из равенства (7) получим формулу для подсчета числа сочетаний

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$$

или, используя формулу (6):

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}. \tag{8}$$

Отметим, что в силу принятого соглашения: $0! = 1$, формула (8) справедлива и при $m = 0$, а именно $C_n^0 = 1$. Решим сформулированную выше задачу о выборе трех учеников. Число возможных способов выбора учеников равно

$$C_{10}^3 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)(1\cdot2\cdot3)} = 120.$$

Если подсчитаем C_{10}^7, то получим тот же результат:

$$C_{10}^7 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{(1\cdot2\cdot3)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)} = 120.$$

Покажем в общем случае, что $C_n^m = C_n^{n-m}$ $(0 \le m \le n)$. Действительно,

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{[n-(n-m)]!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{9}$$

Формула (9) позволяет легко подсчитать число сочетаний из n по m, когда m близко к n. Например,

$$C_9^8 = C_9^1 = \frac{9!}{8!} = 9.$$

Покажем справедливость еще одного свойства числа сочетаний:

$$C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}. \tag{10}$$

Действительно, используя формулу (8) имеем

$$C_n^{m+1} + C_n^m = \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!} + \frac{n!}{m!\,(n-m)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!\,(m+1)\,(n-m-1)!} + \frac{n!}{m!\,(n-m-1)!\,(n-m)} =$$

$$= \frac{n!}{m!\,(n-m-1)!}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n-m}\right) = \frac{n!\,(n+1)}{m!\,(n-m-1)!\,(m+1)\,(n-m)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,[(n+1)-(m+1)]!}.$$

Используя еще раз формулу (8), получаем, что формула (10) верна.

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить (1 — 10):

1. $3\frac{5}{14} - \left[1\frac{11}{49} : \left(76 \cdot \frac{25}{38} - 47\frac{3}{7}\right)\right] \cdot \frac{12}{55}.$

2. $\left\{5\frac{68}{126} \cdot \left[5\frac{5}{9} - 8\frac{3}{4} : \left(\frac{8}{11} \cdot 9\frac{3}{16} - 1\frac{2}{5}\right)\right] + 5\frac{2}{19}\right\} : 12\frac{3}{5} + \frac{5}{4}.$

3. $\left\{\left[\left(6\frac{9}{16} - 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{9}{14}\right) \cdot 0,53\right] : 0,75\right\} : 6\frac{2}{3}.$

4. $\left[\dfrac{3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{9} - 6\frac{5}{6}}{5\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4} - 0,5} : \left(13\frac{8}{11} - 8\frac{50}{99}\right)\right] \cdot \left(2\frac{3}{8} - 1\frac{5}{8}\right) + \dfrac{\left(3\frac{6}{7} - 1\frac{5}{3} - \frac{4}{21}\right) : 47}{9\frac{5}{51} - 3\frac{2}{9} + 5\frac{7}{18} - 10\frac{9}{34}}.$

5. $\left\{\dfrac{4\frac{1}{3} + 5,4 + 0,2(6)}{\frac{13}{15} + 0,0(3) + 0,1} : \left[\left(4 - 0,8(3) - 2\frac{7}{8}\right) : \left(8\frac{7}{24} - 7,91(6)\right)\right]\right\} : \left(\frac{3}{14} + \frac{9}{42}\right).$

6. $\left[\left(\frac{3,25}{5,5} : \frac{3,125}{341}\right) : \frac{0,341}{6,875}\right] : \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + 0,125} \cdot \frac{8}{13}\right) + \dfrac{1,01 - \frac{1}{5}}{3\frac{1}{2} - 0,8} \cdot \frac{2 - 0,04}{1 - 0,11}.$

7. $\dfrac{\left[\left(17\frac{3}{100}-11{,}27\right)\cdot 2\right]:3\frac{1}{3}}{12:[2{,}28:(28{,}57-5{,}03)]}+4\frac{1}{2}\left\{\left[3:\left(0{,}2-\frac{1}{10}\right)\right]:\left[2\frac{1}{2}\left(0{,}8+\frac{6}{5}\right)\right]\right\}$.

8. $\left\{\left[\dfrac{(4{,}6+5:6{,}25)\cdot 14}{4\cdot 0{,}125+2{,}3}\right]:\dfrac{7}{6}\right\}:\dfrac{2}{12{,}4+4\frac{2}{5}}+\left(4\frac{5}{8}-\frac{13}{6}:8\frac{2}{3}\right):\left(3{,}25-2\frac{1}{4}\right)$.

9. $\dfrac{2{,}(3)-\left(2\frac{3}{16}-\frac{2}{3}\right):\frac{3}{8}}{\left[10-0{,}21:\left(4{,}2-3\frac{4}{5}\right)\right]:\left(1{,}3\cdot 1\frac{19}{24}\right)}+\dfrac{\left[\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 3\frac{1}{2}\right]:0{,}05}{\left(1\frac{22}{25}+2{,}12\right)\left(0{,}1+\frac{1}{40}\right)}$.

10. $\dfrac{4\frac{8}{37}\cdot\left(2{,}8(4):2\frac{2}{5}\right)+\left[18\frac{13}{17}+\left(15\frac{13}{137}-\frac{2068}{137}\right):8{,}01\right]\cdot 5\frac{2}{3}}{\left[\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):0{,}(571428)\right]:\left[\left(6{,}(5)-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}\right]}$.

Доказать следующие утверждения (11 — 33):

11. Для того чтобы натуральное число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы либо $a_0 = 0$, либо $a_0 = 5$.

12. Для того чтобы натуральное число делилось на 6, необходимо, чтобы оно делилось на 3.

13. Для того чтобы натуральное число делилось на 3, достаточно, чтобы оно делилось на 6.

14. Для того чтобы натуральное число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, $n \geq 1$, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_1 a_0}$ делилось на 4.

15. Для того чтобы натуральное число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, $n \geq 2$, делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делилось на 8.

16. Натуральное число тогда и только тогда делится на 11, когда разность между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой его цифр, стоящих на четных местах, делится на 11.

17. Для любого натурального числа n число $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ натуральное.

18. Произведение двух последовательных натуральных чисел при делении на три дает в остатке нуль или два.

19. Число, являющееся квадратом натурального числа, или делится на три, или при делении на три дает в остатке единицу.

20. Число, являющееся кубом натурального числа, при делении на 9 дает в остатке либо 0, либо 1, либо 8.

21. При любом натуральном n число $n(n^2 + 5)$ делится на 6.

22. Сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

23. Произведение трех последовательных натуральных чисел, среднее из которых есть квадрат натурального числа, делится на 60.

24. Для любых целых n и m число $[nm(n - m)]$ является четным.

25. Произведение двух последовательных четных чисел делится на восемь.

26. Разность между кубом нечетного числа и самим числом делится на 24.

27. Квадрат всякого нечетного числа, уменьшенный на 1, делится на 8.

28. Сумма двух последовательных нечетных чисел делится на 4.

29. Два последовательных нечетных числа — числа взаимно простые.

30. Для любого натурального числа n числа n, $n + 1$ и $2n + 1$ попарно взаимно простые.

31. Сумма четырех последовательных натуральных чисел не может быть простым числом.

32. Каждая из двух дробей $\frac{14n+3}{21n+4}$ и $\frac{2n+3}{5n+7}$ несократима ни при каком натуральном n.

33. Если данная дробь несократима, то дробь с числителем, равным сумме числителя и знаменателя данной дроби, и знаменателем, равным произведению числителя и знаменателя данной дроби, тоже несократима.

34. Сколько раз число 2 содержится множителем в разложении числа 100! на простые множители?

35. Сколько раз число 5 содержится множителем в разложении числа 1980! на простые множители?

36. Найти остаток от деления числа: ф) 2^{1980} на 5; б) $7^{7^{100}}$ на 3.

37. Какой цифрой оканчивается число, получаемое в результате следующего возведения в степень: а) 2^{1980}; б) 7^{1980}.

38. Можно ли число 101010 представить в виде разности квадратов двух целых чисел?

39. Делится ли число $1 \cdot 10^{80} + 1 \cdot 10^{79} + 1 \cdot 10^{78} + ... + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + + 1$ на 81?

40. Найти НОД(247, 221), НОД(323; 187; 209).

41. Найти числа a и b, если: НОД(a; b) = 13, НОК(a; b) = 1989.

42. При каких цифрах x и y число $\overline{34x5y}$ делится на 36?

43. Разность двух чисел равна 5, а сумма квадратов равна 157. Найти эти числа.

44. Найти все такие трехзначные числа, каждое из которых в 12 раз больше суммы своих цифр.

45. Найти правильную дробь, не превышающую $\frac{1}{3}$, зная, что от увеличения ее числителя на некоторое целое число и умножения знаменателя на то же число величина дроби не меняется.

46. Дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Выяснить, сократима или несократима сумма двух дробей $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{a+b}$.

47. Найти все такие натуральные числа n, для каждого из которых число $\frac{3n+4}{5}$ — натуральное число.

48. Верно ли утверждение: сумма двух натуральных чисел, каждое из которых не делится на 7, также не делится на 7?

49. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 дает остаток 6, а при делении на 9 дает остаток 8.

50. Найти наибольшее трехзначное число, которое при делении на 6 дает остаток 5, а при делении на 4 дает остаток 3.

51. Найти все натуральные числа, большие 200, но меньшие 1500, каждое из которых как при делении на 7, так и при делении на 21, дает в остатке 2.

52. Найти все натуральные числа, меньшие 150, каждое из которых как при делении на 6, так и при делении на 8, дает в остатке 5.

53. Пусть p ($p \geq 5$) — простое число. Доказать, что число ($p^2 - 1$) делится на 24.

54. Пусть p ($p \geq 7$) — простое число. Доказать, что число ($p^2 - 13$) не делится на 24.

55. Найти простые числа p и q такие, что $p^2 - 2q^2 = 1$.

56. Будет ли число $(4p + 1)$ простым, если известно, что числа p и $(2p + 1)$ простые и $p > 3$?

57. Найти число p, если известно, что p, $(p + 2)$ и $(p + 4)$ — простые числа.

58. Показать, что сумма (разность, произведение, частное) двух иррациональных чисел может быть рациональным числом.

59. Доказать иррациональность чисел $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{49}$; $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$; $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})$.

60. Доказать, что бесконечная десятичная дробь 0, 1234567891011 ..., где после запятой выписаны подряд все натуральные числа, является непериодической дробью.

61. Дано: $a \geq b > 0$; $c > d > 0$. Доказать, что $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

62. Доказать, что $|a| = |-a|$; $|a| \geq a$; $|a| \geq -a$.

Найти множество всех чисел, для каждого из которых справедливо равенство (**63** — **73**):

63. $|-a| = a$. **64**. $|-a| = -a$. **65**. $a + |a| = 0$. **66**. $a - |a| = 0$. **67**. $a + |a| = 2a$. **68**. $a|a| = -a^2$. **69**. $\frac{a}{|a|} = 1$. **70**. $\frac{a}{|a|} = -1$. **71**. $\sqrt{a^2} = -a$. **72**. $a\sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$. **73**. $\sqrt{3a^2} = -a\sqrt{3}$.

74. Какие из следующих неравенств справедливы: $5 \geq 2$; $3 \geq 3$; $\sqrt{4} \leq 2$; $6 \leq \sqrt{49}$ и $38 \leq \sqrt{912}$?

Если два действительных числа $a > b$, то справедливо ли неравенство (**75**, **76**): **75**. $a^2 > b^2$; **76**. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$?

Найти множество всех чисел, для каждого из которых справедливо неравенство (**77** — **88**):

77. $|-a| \leq a$. **78**. $|a| \leq -a$. 79. $|a| \leq |-a|$. **80**. $a|a| \geq a^2$.

81. $\frac{a}{|a|} \leq -1$. **82**. $\frac{a}{|a|} \geq 1$. **83**. $\sqrt{a^2} \leq -a$. **84**. $a\sqrt{5} \leq \sqrt{5a^2}$.

85. $\sqrt{7a^2} \leq -a\sqrt{7}$. **86**. $|a| - a \leq 0$. **87**. $|a| + a \leq 2a$. **88**. $|a| + a \leq 0$.

Найти пересечение следующих двух множеств (**89** — **96**):

89. $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ и $[-6; 2]$. **90**. $\left[\sqrt{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$ и $\left[1\frac{2}{5}; \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right]$.

91. $[-\sqrt{3}; 2]$ и $\left(1\frac{18}{25}; 4\right)$. **92**. $(-\sqrt{5}; 4]$ и $[4; \sqrt{17}]$.

93. $\left(1; \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; 2\right]$. **94**. $(-\infty; 2)$ и $(-\sqrt{3}; 10]$.

95. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $\left[\frac{-\sqrt{2}-0{,}6}{2}; +\infty\right)$.

96. $(-\sqrt{17}; \sqrt{5})$ и $\left[\frac{\sqrt{3}+2}{2}; 6\right]$.

Найти объединение следующих двух множеств (**97** — **105**):

97. $[-1{,}5; 4]$ и $[-2; 1]$. **98**. $[1; 5]$ и $[0; 6)$. **99**. $[2; 4]$ и $[4; 7]$. **100**. $(-1; 4)$ и $(0; 3]$.

101. $(-\infty; 2]$ и $[-3; 5)$. **102**. $(0; 1)$ и $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

103. $(-\infty; 2]$ и $\left[\frac{\sqrt{7}}{2}; \sqrt{17}\right)$. **104**. $(-4; 3)$ и $(2; 4]$.

105. $[-1; 1)$ и $(0{,}2; 2]$.

На числовой оси указать множество всех чисел, удовлетворяющих условию (**106** — **113**):

106. $|x| = 1$. **107**. $|x| < 3$. **108**. $|x| \geq 2$. **109**. $1 < x \leq 4$. **110**. $-3 \leq x < 0$. **111**. $(x-1)(x+2) = 0$. **112**. $(x-1)^2(x+3) \leq 0$. **113**. $(x-2)^2(x^2+4) \leq 0$.

114. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5, если в записи каждого такого числа никакая цифра не повторяется?

115. Сколько различных семизначных телефонных номеров можно набрать с помощью диска, имеющего десять отверстий с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0?

116. Сколькими способами в группе из 25 человек можно выбрать профорга, физорга и культорга?

117. Сколькими способами можно отобрать несколько книг (не менее одной) из 5 одинаковых учебников алгебры и 4 одинаковых учебников геометрии?

118. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выбрать наряд, состоящий из одного офицера, 2 сержантов и 20 рядовых?

119. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 3 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

120. У одного человека есть 7 книг, а у другого 9. Сколькими способами они могут обменять друг с другом по две книги?

Глава II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Определения и основные свойства

Математические и алгебраические выражения. В предыдущей главе были рассмотрены действительные числа и некоторые действия над ними. С помощью чисел, знаков действий и скобок составлялись различные *числовые выражения*. Приведем примеры некоторых числовых выражений:

$$(27 : 9);\ \sqrt{8+1};$$
$$\frac{\left(\frac{3}{11}-\frac{7}{2}\right)\frac{11}{71}-\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{7}\right)\frac{35}{47}}{\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{2}\right)\frac{19}{17}};$$
$$2\cdot 10^3+7\cdot 10^2+10-5.$$

Если в числовом выражении можно выполнить все указанные в нем действия, то полученное в результате действительное число называют *числовым значением данного числового выражения*, а о числовом выражении говорят, что *оно имеет смысл*. В приведенных примерах каждое из первых трех числовых выражений имеет числовое значение 3, а четвертое — 2705.

Если числовое выражение состоит из одного действительного числа, то его числовым значением является само это число.

Иногда числовое выражение не имеет числового значения, т.к. не все указанные в нем действия выполнимы; о таком числовом выражении говорят, что *оно не имеет* *(лишено) смысла.* Например, числовые выражения $\frac{7}{3\cdot 2-6}$; $\sqrt{10-18}$ и $(2-2)^0$ лишены смысла.

Таким образом, любое числовое выражение либо имеет одно числовое значение, либо лишено смысла.

Числовое выражение часто употребляют для описания какого-либо свойства числа, являющегося числовым значением этого выражения. Так, например, свойство числа (-17) давать при делении на 2 остаток 1 записывают числовым выражением $2(-9)+1$. Чтобы описать свойство каждого нечетного числа из отрезка $[-2; 14]$ давать при делении на 2 остаток 1, надо написать соответствующее числовое выражение для каждого из чисел $-1, 1, 3, 5, 7, 9, 11$ и 13, т.е. восемь следующих числовых выражений:

$$2\cdot(-1)+1;\quad 2\cdot 0+1;\quad 2\cdot 1+1;\quad 2\cdot 2+1;$$
$$2\cdot 3+1;\quad 2\cdot 4+1;\quad 2\cdot 5+1;\quad 2\cdot 6+1.$$

Это же свойство можно записать, используя буквенную символику, следующим образом: $2l+1$, где $l\in\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Приведенный пример говорит о том, что часто вместо числовых выражений удобнее рассматривать выражения, в которых на некоторых местах вместо чисел могут стоять буквы. Всякое такое выражение называют *математическим выражением.* Примеры математических выражений:

$$\frac{7}{a}+2^{b+3};\quad \sin\frac{b-a}{c};\quad \sqrt{3+\lambda};\quad \operatorname{arctg}\frac{7}{15};\quad \log_c\frac{3+\sqrt{m}}{n}.$$

Отметим, что понятие «математическое выражение» является простейшим, и потому оно не определяется, а лишь описывается, что и было сделано выше. Математическое выражение, в котором над числами и буквами, входящими в это выражение, производятся не более чем действия сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения арифметического корня, называется *алгебраическим выражением.*

Примеры алгебраических выражений:

$$a + b;\quad \frac{a-c}{a-b};\quad 2 - \frac{\sqrt[3]{4}}{13};\quad \sqrt{2\alpha\beta} - 1;\quad \frac{\sqrt{3}(a^2-b^2)}{(m-n)+\sqrt{xy}} + abc.$$

Алгебраическое выражение называется *рациональным*, если в нем может быть участвуют относительно входящих в него букв лишь действия: сложение, умножение, вычитание, деление и возведение в натуральную степень (рациональное алгебраическое выражение может содержать любые числа, в том числе и иррациональные). Примеры рациональных алгебраических выражений:

$$7;\quad \frac{\alpha}{2m} + \sqrt{3}a^7;\quad \frac{a-b}{c-a};\quad \frac{3b+m}{\sqrt{5}(m-n)} + xy;\quad 2x - \pi ab.$$

Рациональное выражение называется *целым относительно данной буквы*, если оно не содержит деления на данную букву или на выражение, содержащее эту букву.

Дробное рациональное выражение относительно данной буквы — это рациональное выражение, содержащее деление на некоторое выражение, содержащее эту букву, или на саму букву.

Например, рациональное выражение $\frac{a+b+c}{3a+4b}$ — целое относительно буквы c, но дробное относительно букв a и b; рациональное выражение $\frac{3a}{7} + \frac{\sqrt{2}}{b}$ — целое относительно a, но дробное относительно b.

Алгебраическое выражение называется *иррациональным*, если в нем участвует относительно входящих в него букв действие извлечения арифметического корня.

Примеры иррациональных алгебраических выражений:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2ab;\quad \sqrt{c+1};\quad 2\sqrt{3}l + \sqrt[3]{3l-1}.$$

Действия над алгебраическими выражениями. Пусть даны два алгебраических выражения, которые обозначены буквами A и B. Определим для них арифметические операции.

Сложить два алгебраических выражения A и B — значит формально написать алгебраическое выражение $A + B$, которое называется суммой выражений A и B.

Например, суммой алгебраических выражений $\frac{a-b}{c-a}$ и $\frac{\alpha}{2p}$ будет алгебраическое выражение $\frac{a-b}{c-a}+\frac{\alpha}{2p}$.

Умножить два алгебраических выражения A и B — значит формально написать алгебраическое выражение AB, которое называется *произведением* выражения A и B.

Например, произведением алгебраических выражений $\frac{3b}{\sqrt{x+y}}$ и (a^2-b^2) будет алгебраическое выражение $\frac{3b}{\sqrt{x+y}}\times$ $\times(a^2-b^2)$.

Если надо сложить несколько алгебраических выражений, то сначала складывают два первых выражения, затем к полученной сумме прибавляют третье выражение и т.д. Вот, например, как выглядит сумма пяти алгебраических выражений: $\{[(A+B)+C]+D\}+E$. Аналогично определяется и произведение нескольких алгебраических выражений.

Если в произведении одно и то же алгебраическое выражение A является множителем n раз ($n>1$, $n\in N$), то пишут A^n вместо произведения $AA\ \dots\ A$.

Например, вместо произведения $(a+b)(a+b)(a+b)$ пишут $(a+b)^3$. Вместо A^1 обычно пишут A.

Вычесть из алгебраического выражения A алгебраическое выражение B — это значит формально написать алгебраическое выражение $A-B$, которое называется *разностью* выражений A и B.

Например, разностью алгебраических выражений abc^3 и $\frac{a^{2mn}}{pq}$ будет алгебраическое выражение $abc^3-\frac{a^{2mn}}{pq}$.

Разделить алгебраическое выражение A на алгебраическое выражение B — это значит формально написать алгебраическое выражение $A:B$, которое называется *частным* от деления выражения A на выражение B.

Например, частным от деления алгебраического выражения $(a-b^2)$ на алгебраическое выражение $\frac{p}{5l}$ будет алгебраическое выражение $(a-b^2):\frac{p}{5l}$. Отметим, что частное от деления алгебраического выражения A на алгебраическое выражение B часто записывается в виде $\frac{A}{B}$.

Область допустимых значений алгебраического выражения. Ясно, что под областью допустимых значений алгебраического выражения следует понимать ту область, в которой это алгебраическое выражение имеет смысл. Однако это понятие необходимо уточнить.

Пусть дано некоторое алгебраическое выражение. Множество всех букв, входящих в это выражение, называется *буквенным набором* данного алгебраического выражения.

Если в алгебраическое выражение входит n букв a_1, a_2, ..., a_n, то буквенный набор этого алгебраического выражения записывают в виде $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Каждая буква, сколько бы раз она ни встречалась в алгебраическом выражении, пишется в буквенном наборе только один раз. При составлении буквенного набора данного алгебраического выражения порядок следования букв может быть любым возможным, но раз навсегда зафиксированным.

Например, для алгебраического выражения $\frac{2a-7b}{\sqrt{19ac}}$ буквенным набором может служить набор (a, b, c), для алгебраического выражения $\sqrt[3]{\frac{a}{2}+a^3b^k}-\alpha$ — набор (k, α, a, b).

Если в буквенном наборе (α, β, γ) вместо буквы α взять, например, число $\left(-\frac{7}{16}\right)$, вместо буквы β — число $\sqrt{2}$, вместо буквы γ — число 0,3, то набор чисел $\left(-\frac{7}{16}\right)$, $\sqrt{2}$, 0,3 называют числовым набором, соответствующим данному буквенному набору (α, β, γ), и записывают в виде $\left(-\frac{7}{16}, \sqrt{2}, 0{,}3\right)$. При этом говорят, что числовой набор $\left(-\frac{7}{16}, \sqrt{2}, 0{,}3\right)$ соответствует буквенному набору (α, β, γ) при $\alpha=-\frac{7}{16}$, $\beta=\sqrt{2}$, $\gamma=0{,}3$.

Аналогично определяется числовой набор, соответствующий буквенному набору $(a_1, a_2, ..., a_n)$, и для любого набора из n букв (n — любое натуральное число).

Одному и тому же буквенному набору можно поставить в соответствие бесконечно много разных числовых наборов.

Два числовых набора считают *разными*, если хотя бы на одном, но на одном и том же в каждом наборе, например, i-м месте этих числовых наборов стоят неравные числа (т.е. вместо одной и той же буквы, стоящей на i-м месте буквенного набора, в этих двух числовых наборах взяты неравные числа). Например, числовые наборы $\left(1, -3, -5-\sqrt{2}, \frac{7}{3}\right)$ и $\left(1, -3, -4-\sqrt{2}, \frac{7}{3}\right)$, соответствующие буквенному набору (a, b, c, d, e), разные, т.к. у них на одном и том же третьем месте стоят неравные числа (-5) и (-4) (т.е. в первом наборе $c = -5$, а во втором $c = -4$). Числовые наборы $\left(-3, -\frac{9}{7}\right)$ и $\left(-\frac{9}{7}, -3\right)$, соответствующие буквенному набору (x, y), разные, так как у них на первом месте стоят неравные числа (т.е. в первом наборе $x = -3$, а во втором $x = -\frac{9}{7}$); кроме того, они разные, так как у них на втором месте стоят неравные числа (т.е. в первом наборе $y = -\frac{9}{7}$, а во втором $y = -3$).

Пусть даны некоторое алгебраическое выражение и его буквенный набор. Рассмотрим некоторый числовой набор, соответствующий этому буквенному набору. Этот числовой набор называется *числовым набором* для букв данного алгебраического выражения. Если в это алгебраическое выражение подставить вместо каждой буквы, где бы она в нем ни стояла, соответствующее ей число из данного числового набора, то получим числовое выражение, которое либо имеет смысл, либо лишено смысла. Например, рассмотрим алгебраическое выражение $\frac{b-3a}{\sqrt{5}+a}$. Запишем его буквенный набор в виде (a, b). Для числового набора $(4, 5)$, соответствующего буквенному набору (a, b) (т.е. при $a = 4$, $b = 5$), это алгебраическое выражение записывается в виде числового выражения $\frac{5-3\cdot 4}{\sqrt{5}+4}$ и имеет числовое значение $\left(-\frac{7}{3}\right)$. Для числового набора $(-6, 5)$ (т.е. при $a = -6$, $b = 5$) это алгебраическое выражение запишется в виде числового выражения $\frac{5-3(-6)}{\sqrt{5-6}}$, которое лишено смысла.

Числовой набор, соответствующий буквенному набору данного алгебраического выражения, называется *допустимым* для этого выражения, если имеет смысл числовое выражение, которое получается из данного алгебраического выражения, если вместо каждой буквы, где бы она в нем ни стояла, подставить соответствующее ей число из данного числового набора.

Совокупность всех допустимых числовых наборов, соответствующих буквенному набору данного алгебраического выражения, называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) данного алгебраического выражения.

Отметим, что существуют алгебраические выражения, ОДЗ которых пуста. Например, пуста ОДЗ алгебраического выражения $\frac{1}{2a-(a+a)}$, ибо для любого числового значения буквы a, соответствующее числовое выражение лишено смысла. Такие выражения называются выражениями, не имеющими смысла, и в дальнейшем рассматриваться не будут. Обычно ОДЗ алгебраического выражения записывают в виде набора множеств, причем указывают, какой букве соответствует каждое множество. Так, например, ОДЗ алгебраического выражения $\frac{b-3}{\sqrt{5+a}}$ записывается в виде $\{(a, b) \mid a \in (-5; +\infty);\ b \in (-\infty; +\infty)\}$.

Числовым значением, или *числовой величиной*, алгебраического выражения для данного числового набора из ОДЗ называют числовое значение того числового выражения, которое получится, если в данное алгебраическое выражение вместо каждой буквы, где бы она в нем ни стояла, подставить соответствующее ей число из данного числового набора.

Например, числовым значением алгебраического выражения $\frac{b-3}{\sqrt{5+a}}$ при $a=4$ и $b=5$ будет число $\frac{2}{3}$, а при $a=0$ и $b=4$ — число $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Часто алгебраические выражения рассматриваются не на всей своей ОДЗ, а лишь на ее части — некоторой области M.

Например, рассмотрим алгебраическое выражение vt. ОДЗ этого выражения $\{(v, t) \mid v \in R;\ t \in R\}$. Пусть это алгебраическое выражение vt определяет путь, пройденный за время t со скоростью v. Тогда по физическому смыслу задачи следует наложить на v и t ограничения: $v \geq 0$ и $t \geq 0$. Другими словами надо рассмотреть алгебраическое выражение vt на следующей области M — части ОДЗ этого выражения: $M = \{(v, t)\ v \in [0; +\infty);\ t \in [0;\ +\infty)\}$. Алгебраическое выражение обычно дается вместе с областью M, на которой оно рассматривается. Если область M не указана, то алгебраическое выражение следует рассматривать на всей ОДЗ, которую предварительно надо найти.

Пусть даны два алгебраических выражения A и B. Множество всех букв этих двух выражений называют *буквенным набором двух выражений A и B*. Числовой набор, соответствующий буквенному набору двух алгебраических выражений, называют *допустимым*, если одновременно имеют смысл оба числовых выражения, которые получаются из данных алгебраических выражений, если в них вместо каждой буквы, где бы она в них ни стояла, подставить соответствующее ей число из этого числового набора.

Совокупность всех допустимых числовых наборов, соответствующих буквенному набору двух алгебраических выражений, называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) этих алгебраических выражений.

Пример. $A = \dfrac{b+7}{\sqrt{b+3}\,(a-2)}$; $B = \dfrac{(a+b)\sqrt{a+1}}{b+8}$. ОДЗ этих двух алгебраических выражений записывается в виде $\{(a, b) \mid a \in$ $\in [-1; 2) \cup (2;\ +\infty);\ b \in (-3; +\infty)\}$.

Аналогично определяется ОДЗ n алгебраических выражений. Два алгебраических выражения можно рассматривать не на всей ОДЗ, а лишь на некоторой ее части — некоторой области M. Поэтому дальше под областью M, принадлежащей ОДЗ алгебраических выражений, будет пониматься либо вся эта ОДЗ, либо какая-нибудь явно указываемая ее часть.

§ 2. Равенства и неравенства алгебраических выражений

Равенства алгебраических выражений. Два алгебраических выражения называются *тождественно равными на области M*, если для любого числового набора из области M соответствующие числовые значения этих выражений равны.

Например, два алгебраических выражения $(a+1)^2$ и (a^2+2a+1) тождественно равны как на всей ОДЗ этих выражений, т.е. на области $\{(a) \mid a \in (-\infty; +\infty)\}$, так и на любой ее части. Два алгебраических выражения $m + d + \frac{a-b}{3+c}$ и $\frac{d(3+c)+(a-b)}{3+c}$ тождественно равны не на всей ОДЗ этих двух выражений, которой является область $\{(a, b, m, c, d) \mid a \in R;\ b \in R;\ m \in R;\ c \in (-\infty;\ -3) \cup (-3; +\infty);\ d \in R\}$, а лишь на ее части — области M, где $M = \{(a, b, m, c, d) \mid a \in R; b \in R; m \in \{0\}; c \in (-\infty;\ -3) \cup (-3; +\infty); d \in R\}$. Для записи тождественного равенства на области M двух алгебраических выражений иногда употребляется знак равенства, над которым сверху написана буква M, т.е. если буквами A и B обозначены некоторые алгебраические выражения, то запись $A \overset{M}{=} B$ обозначает, что алгебраические выражения A и B тождественно равны на области M, а область M входит в ОДЗ двух выражений A и B.

Например, запись

$$\frac{a-b}{3+c} \overset{\text{ОДЗ}}{=} \frac{a}{3+c} - \frac{b}{3+c}$$

означает, что алгебраические выражения $\left(\frac{a-b}{3+c}\right)$ и $\left(\frac{a}{3+c} - \frac{b}{3+c}\right)$ тождественно равны на ОДЗ этих выражений, т.е. на области $\{(a, b, c) \mid a \in R;\ b \in R,\ c \in (-\infty;\ -3) \cup \cup (-3; +\infty)\}$, а запись $\sqrt{a^2} \overset{M}{=} a$, где $M = \{(a) \mid a \in [0; +\infty)\}$, означает, что утверждается тождественное равенство алгебраических выражений $\sqrt{a^2}$ и a лишь на области M.

Замена алгебраического выражения A алгебраическим выражением B, тождественно равным ему на области M, принадлежащей ОДЗ выражений A и B, называется *тождественным преобразованием на области M* алгебраического выражения A. Если не указана область M, на которой происходит тождественное преобразование, то принято считать, что это преобразование происходит на ОДЗ двух выражений: данного и преобразованного.

Например, замена алгебраического выражения $(a + 1)^2$ алгебраическим выражением $a^2 + 2a + 1$ является тождественным преобразованием на ОДЗ этих выражений, т.е. на области M, где $M = \{(a) \mid a \in R\}$.

Законен вопрос, а возможна ли запись $A = B$ без буквы M над знаком равенства и что эта запись означает?

Конечно, формально можно сделать запись $A = B$, но если рядом нет слов, поясняющих, как следует понимать такую запись, то такая запись не несет никакой смысловой нагрузки. Следовательно, такая запись должна употребляться только с некоторыми сопровождающими эту запись пояснениями, которые и разъяснят, как следует понимать эту запись.

Приведем теперь наиболее часто встречающиеся случаи употребления записи $A = B$ с соответствующими пояснениями, как следует понимать такую запись.

а) Пусть известно, что на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ двух алгебраических выражений A и B, эти два выражения тождественно равны. Тогда это утверждение записывают так: *«Известно (или дано), что $A = B$ на области M»*. В этом случае говорят также, что на области M *дано тождественное равенство $A = B$*.

б) Пусть требуется доказать справедливость утверждения: алгебраические выражения A и B тождественно равны на области M, принадлежащей ОДЗ этих выражений. Тогда пишут: *«Доказать, что $A = B$ на области M»*. В этом случае говорят также, что требуется *доказать справедливость на области M тождественного равенства $A = B$*.

в) Пусть требуется найти область M, принадлежащую ОДЗ двух алгебраических выражений A и B, такую, что для любого числового набора из области M соответствующее числовое значение выражения A равно соответствующему числовому значению выражения B, а для любого числового набора, не входящего в область M, но входящего в ОДЗ этих выражений, соответствующие числовые значения данных выражений не равны. В таких случаях говорят: «*Решить уравнение* $A = B$».

Прежде всего отметим, что сложение и умножение алгебраических выражений производятся с использованием следующих утверждений:

1. *На ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное равенство* $A + B = B + A$.

2. *На ОДЗ трех выражений A, B, и C справедливо тождественное равенство* $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. *На ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное равенство* $AB = BA$.

4. *На ОДЗ трех выражений A, B и C справедливо тождественное равенство* $(AB)C = A(BC)$.

5. *На ОДЗ трех выражений A, B и C справедливо тождественное равенство* $A(B + C) = AB + AC$.

Поскольку метод доказательства справедливости этих утверждений один и тот же, то приведем здесь доказательство лишь утверждения 1.

Возьмем некоторый числовой набор из ОДЗ двух выражений A и B и обозначим соответствующие числовые значения этих выражений соответственно через A_0 и B_0. Тогда для чисел A_0 и B_0 по свойству коммутативности сложения чисел справедливо числовое равенство $A_0 + B_0 = B_0 + A_0$. Значит, показано, что для данного числового набора из ОДЗ двух выражений A и B соответствующие числовые значения выражений $A_0 + B_0$ и $B_0 + A_0$ равны. Так как это рассуждение можно провести для любого числового набора из ОДЗ двух выражений A и B, то справедливость на ОДЗ этих выражений тождественного равенства $A + B = B + A$ доказана.

Аналогично доказываются и следующие утверждения.

6. *На ОДЗ выражения A справедливы тождественные равенства* $A + 0 = A$, $0 + A = A$.

7. *На ОДЗ выражения A справедливы тождественные равенства* $A \cdot 1 = A$, $1 \cdot A = A$.

8. *На ОДЗ выражения A справедливы тождественные равенство $A + (-A) = 0$.*

9. *На области M — части ОДЗ выражения A, на которой ни для одного числового набора соответствующее числовое значение выражения A не равно нулю, — справедливо тождественное равенство $A \cdot \frac{1}{A} = 1$.*

Используя утверждения 1 — 9, можно показать, что действия вычитания и деления алгебраических выражений являются соответственно обратными к действиям сложения и умножения алгебраических выражений. А именно, справедливы следующие утверждения.

10. *На ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное равенство $B + (A - B) = A$.*

11. *На области M — части ОДЗ двух выражений A и B, на которой ни для одного числового набора соответствующее числовое значение выражения B не равно нулю, — справедливо тождественное равенство $B\left(\frac{A}{B}\right) = A$.*

Приведем теперь утверждения, которые часто используются при доказательстве равенств алгебраических выражений.

12. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, одновременно справедливы тождественные равенства $A = B$ и $B = C$, то на области M справедливо и тождественное равенство $A = C$* (транзитивность равенств).

13. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ четырех алгебраических выражений A, B, C и D одновременно справедливы тождественные равенства $A = B$ и $C = D$, то на области M справедливо и тождественное равенство $A + C = B + D$.*

14. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ четырех алгебраических выражений A, B, C и D одновременно справедливы тождественные равенства $A = B$ и $C = D$, то на области M справедливо и тождественное равенство $AC = BD$.*

Метод доказательства утверждений 10 — 14 является тем же самым, что и при доказательстве утверждений 1 — 9. Докажем, например, утверждение 12.

Возьмем некоторый числовой набор из области M. Обозначим соответствующие числовые значения выражений A, B и C соответственно через A_0, B_0 и C_0. Из справедливости на области M тождественных равенств $A = B$ и $B = C$ вытекает справедливость числовых равенств $A_0 = B_0$ и $B_0 = C_0$. По свойству транзитивности числовых равенств тогда справедливо и числовое равенство $A_0 = C_0$. Таким образом, показано, что для данного числового набора из области M соответствующие числовые значения выражений A и C равны. Поскольку это рассуждение можно провести для любого числового набора из области M, то справедливость на области M тождественного равенства $A = C$ доказана.

Принято следующее соглашение: если не указана явно область M, на которой рассматривается тождественное равенство $A = B$, то оно рассматривается на ОДЗ двух выражений A и B. Поэтому слова «дано, что $A = B$» означают, что на ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное равенство $A = B$. Слова «доказать, что $A = B$» означают, что сначала надо найти ОДЗ двух выражений A и B, а затем доказать тождественное равенство $A = B$ на этой ОДЗ.

В частности, исходя из этого, *утверждения* 1 — 5, называемые обычно законами сложения и умножения алгебраических выражений, можно переписать и так:

Справедливы следующие законы сложения и умножения алгебраических выражений:

1. $A + B = B + A$ (коммутативность сложения);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения);
3. $AB = BA$ (коммутативность умножения);
4. $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность умножения);
5. $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Прежде чем рассмотреть применение данных утверждений для доказательства равенств, дадим определение равносильного перехода от одного равенства к другому.

Если на некоторой области M из справедливости одного тождественного равенства вытекает справедливость второго, а из справедливости второго вытекает справедливость первого, то говорят, что такие два тождественные равенства *равносильны на области* M, а замену одного из них другим называют *равносильным переходом на области* M от первого равенства ко второму.

В дальнейшем, если это не будет вызывать недоразумений, для краткости слово «тождественное» будем опускать.

Равносильный переход на области M от одного равенства к другому обозначается двойной стрелкой, над которой сверху написана буква M, т.е. запись $A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} C = D$ означает, что на области M равенства $A = B$ и $C = D$ равносильны.

Тогда из справедливости утверждений 13, 14 следует справедливость следующих равносильных переходов.

15. *Пусть M — ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, тогда $A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} A + C = B + C$.*

16. *Пусть некоторая область M принадлежит ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C и обладает следующим свойством: ни для какого числового набора из области M соответствующее числовое значение выражения C не равно нулю. Тогда $A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} AC = BC$.*

Докажем, например, утверждение 15. Так как $C = C$, то из утверждения 13 следует справедливость перехода от равенства $A = B$ к равенству $A + C = B + C$. Обратно, имея равенства $A + C = B + C$ и $(-C) = (-C)$ и используя утверждения 13 и 8, получим справедливость перехода от равенства $(A + C) = (B + C)$ к равенству $A = B$. Следовательно, справедлив равносильный переход

$$A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} A + C = B + C.$$

Приведенные утверждения 1 — 16 позволяют доказывать равенства алгебраических выражений. Докажем, например, что на ОДЗ двух выражений A и B справедливо равенство

$$A - B = A + (-B).$$

На основании утверждения 15 это равенство равносильно равенству

$$A - B + B = A + (-B) + B.$$

Согласно утверждениям 1, 2 и 10 справедливы следующие равенства:

$$A - B + B = B + (A - B) \quad \text{и} \quad B + (A - B) = A.$$

Следовательно, $A - B + B = A$.

Аналогично, используя утверждения 2, 8, имеем $A + (-B) + B = A$.

Таким образом, доказано, что равенство $A - B + B = A + (-B) + B$ справедливо на ОДЗ алгебраических выражений A и B. Следовательно, на этой ОДЗ справедливо и равенство $A - B = A + (-B)$.

Неравенства алгебраических выражений. Перейдем теперь к употреблению знака неравенства для алгебраических выражений. Знак неравенства $>$ ($\geq$, $<$ или $\leq$) так же, как и знак равенства, употребляется для алгебраических выражений только с некоторыми пояснениями, как следует понимать такую запись. Приведем наиболее часто встречающиеся случаи употребления этих знаков.

а) Пусть известно, что на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ двух алгебраических выражений A и B, для любого числового набора из M соответствующее числовое значение выражения A больше соответствующего числового значения выражения B. Тогда это утверждение записывается так: «*Известно* (или *дано*), *что* $A > B$ *на области* M». В этом случае говорят также, что на области M *справедливо тождественное неравенство* $A > B$.

б) Пусть требуется доказать справедливость утверждения: «Для любого числового набора из области M, принадлежащей ОДЗ двух выражений A и B, соответствующее числовое значение выражения A больше соответствующего числового значения выражения B». Тогда пишут: «*Доказать, что* $A > B$ *на области* M». В этом случае говорят также, что *требуется доказать справедливость на области* M *тождественного неравенства* $A > B$.

в) Пусть требуется найти область M, принадлежащую ОДЗ двух алгебраических выражений A и B, такую, что для любого числового набора из области M соответствующее числовое значение выражения A больше соответствующего числового значения выражения B, а для любого числового набора из ОДЗ, не входящего в область M, соответствующее числовое значение выражения A меньше или равно соответствующему числовому значению выражения B. В таких случаях говорят: *«Решить неравенство $A > B$»*.

При доказательстве тождественных неравенств часто приходится пользоваться следующими утверждениями.

17. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, одновременно справедливы тождественные неравенства $A > B$ и $B > C$, то на области M справедливо и тождественное неравенство $A > C$* (свойство транзитивности неравенств).

18. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ четырех алгебраических выражений A, B, C и D, одновременно справедливы тождественные неравенства $A > B$ и $C > D$, то на области M справедливо и тождественное неравенство $A + C > B + D$.*

19. *Если для любого числового набора из некоторой области M, принадлежащей ОДЗ четырех алгебраических выражений A, B, C и D, соответствующие числовые значения этих выражений A, B, C и D положительны и если на этой области одновременно справедливы тождественные неравенства $A > B$ и $C > D$, то справедливо и тождественное неравенство $AC > BD$.*

Дадим теперь определение равносильного перехода от одного неравенства к другому.

Если на некоторой области M из справедливости первого тождественного неравенства вытекает справедливость второго, а из справедливости второго вытекает справедливость первого, то говорят, что такие два тождественные неравенства *равносильны на области M*, а замену одного из них другим называют *равносильным переходом* от первого неравенства ко второму. При этом употребляется знак равносильного перехода $\Leftrightarrow$.

Из справедливости утверждений 17 — 19 следует справедливость следующих равносильных переходов.

20. *Пусть M — ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, тогда* $A > B \overset{M}{\Leftrightarrow} A + C > B + C$.

21. *Пусть некоторая область M принадлежит ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C и обладает следующим свойством: для любого числового набора из области M соответствующее числовое значение выражения C положительно. Тогда* $A > B \overset{M}{\Leftrightarrow} AC > BC$.

Принято следующее соглашение, если не указана явно область M, на которой рассматривается тождественное неравенство $A > B$, то оно рассматривается на ОДЗ двух выражений A и B. Поэтому слова *«дано, что $A > B$»* означают, что на ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное неравенство $A > B$; слова *«доказать, что $A > B$»* означают доказать, что на ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное неравенство $A > B$ (при этом имеется в виду, что эту ОДЗ обязательно следует отыскать). Если дано неравенство $A > B$, то ОДЗ двух выражений A и B называют часто ОДЗ неравенства $A > B$.

Следует отметить, что утверждения 17 — 21 останутся верными и в случае нестрогих неравенств. Например, свойство транзитивности неравенств может быть сформулировано так.

17а. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, одновременно справедливы тождественные неравенства $A \geq B$ и $B > C$, то на области M справедливо и тождественное неравенство $A > C$.*

17б. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, одновременно справедливы тождественные неравенства $A > B$ и $B \geq C$, то на области M справедливо и тождественное неравенство $A > C$.*

Если оба неравенства являются нестрогими, то неравенство, вытекающее из них, будет также нестрогим. Например, в этом случае утверждение о транзитивности неравенств имеет вид.

17в. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, одновременно справедливы тождественные неравенства $A \geq B$ и $B \geq C$, то на области M справедливо и тождественное неравенство $A \geq C$.*

В дальнейшем, также, как и в случае равенств, слово тождественное будем опускать.

Рассмотрим теперь некоторые способы доказательств равенств и неравенств.

1. Перебор всех возможных случаев. Докажем этим способом свойства абсолютных величин действительных чисел типа равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} &1.\ |a+b| \leq |a| + |b|; \\ &2.\ |a| - |b| \leq |a-b|; \\ &3.\ |ab| = |a|\,|b|; \\ &4.\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ \text{если } b \neq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Начнем, например, со свойства 3. Рассмотрим все возможные случаи:

α) $\{(a, b) \mid a \in [0; +\infty);\ b \in [0; +\infty)\}$,

β) $\{(a, b) \mid a \in [0; +\infty);\ b \in (-\infty; 0]\}$,

γ) $\{(a, b) \mid a \in (-\infty; 0];\ b \in [0; +\infty)\}$,

δ) $\{(a, b) \mid a \in (-\infty; 0];\ b \in (-\infty; 0]\}$

и доказательство проведем отдельно в каждом случае.

В случае α) по определению абсолютной величины $|a| = a$ и $|b| = b$, поэтому $|ab| = ab$. Значит, в случае α) равенство $|ab| = |a|\,|b|$ может быть записано в виде $ab = ab$, после чего оно становится очевидным.

В случае β) $ab \leq 0$, поэтому по определению абсолютной величины $|a| = a$, $|b| = -b$, $|ab| = -ab$. Значит, в этом случае свойство 3 может быть записано в виде $-ab = a(-b)$ или $-ab = -ab$, после чего оно становится очевидным.

В случае γ) или δ) свойство 3 доказывается аналогично. Из справедливости свойства 3 во всех возможных случаях вытекает его справедливость в той формулировке, в которой оно записано.

Докажем теперь свойство 1. Рассмотрим следующие 6 случаев:

α) $a \geq 0$; $b \geq 0$;

β) $a \geq 0$; $b \leq 0$; $a + b \geq 0$;

γ) $a \geq 0$; $b \leq 0$; $a + b \leq 0$;

δ) $a \leq 0$; $b \geq 0$; $a + b \geq 0$;

λ) $a \leq 0$; $b \geq 0$; $a + b \leq 0$;

ν) $a \leq 0$; $b \leq 0$.

В случае α) $|a + b| = a + b = |a| + |b|$, поэтому свойство 1 в этом случае может быть записано в виде $a + b = |a| + |b|$, после чего оно становится очевидным.

В случае β) $|a + b| = a + b = a - (-b) = |a| - |b|$, поэтому свойство 1 в этом случае может быть записано в виде $a - b \leq a + b$, после чего оно становится очевидным.

В случае γ) $|a + b| = -(a + b) = (-b) - a = |b| - |a|$, поэтому свойство 1 в этом случае может быть записано в виде $|b| - |a| \leq |a| + |b|$, после чего оно становится очевидным.

В случаях δ), λ) и ν) и доказательства свойства 1 аналогичны предыдущим. Из справедливости свойства 1 во всех возможных случаях вытекает его справедливость в той формулировке, в которой оно записано. Свойства 2 и 4 абсолютных величин (1) доказываются аналогично.

2. Использование законов действий над алгебраическими выражениями и вытекающих из них свойств (1 — 21). Докажем этим способом равенство

$$(a + b)(a^2 + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3. \qquad (2)$$

Отметим, что равенство (2) доказывается на ОДЗ трех выражений $(a + b)$, $(a^2 + b^2)$ и $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$, т.е. на множестве $\{(a, b) \mid a \in R;\ b \in R\}$. На основании закона дистрибутивности действий над алгебраическими выражениями можно утверждать справедливость равенства

$$(a + b)(a^2 + b^2) = a(a^2 + b^2) + b(a^2 + b^2). \qquad (3)$$

На основании закона коммутативности умножения справедливы равенства

$$a(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)a, \tag{4}$$
$$b(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)b. \tag{5}$$

На основании закона дистрибутивности справедливы равенства

$$(a^2 + b^2)a = a^2a + b^2a, \tag{6}$$
$$(a^2 + b^2)b = a^2b + b^2b. \tag{7}$$

На основании законов коммутативности и ассоциативности умножения справедливы равенства

$$a^2a = a^3, \tag{8}$$
$$b^2a = ab^2, \tag{9}$$
$$a^2b = a^2b, \tag{10}$$
$$b^2b = b^3. \tag{11}$$

Вследствие того что равенства можно складывать (см. свойство 13 равенств), складывая равенства (8) и (9), а затем (10) и (11), получаем справедливость равенств

$$a^2a + b^2a = a^3 + ab^2,$$
$$a^2b + b^2b = a^2b + b^3.$$

Складывая эти равенства, а затем равенства (6) и (7), получаем справедливость равенств

$$a^2a + b^2a + a^2b + b^2b = a^3 + ab^2 + a^2b + b^3, \tag{12}$$
$$(a^2 + b^2)a + (a^2 + b^2)b = a^2a + b^2a + a^2b + b^2b. \tag{13}$$

Складывая равенства (4) и (5), получаем справедливость равенств

$$a(a^2 + b^2) + b(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)a + (a^2 + b^2)b. \tag{14}$$

Применяя свойства транзитивности равенств, из справедливости равенств (3), (14), (13) и (12) получаем справедливость равенства (2).

Отметим, что все предшествующие выкладки записывают в виде следующей цепочки равенств:

$(a+b)(a^2+b^2)=$
$$= a(a^2+b^2)+b(a^2+b^2)=(a^2+b^2)a+(a^2+b^2)b=$$
$$= a^2a+b^2a+a^2b+b^2b= a^3+a^2b+ab^2+b^3.$$

Из справедливости этой цепочки равенств делается вывод о справедливости равенства (2). В дальнейшем при доказательстве этим и другими способами будем писать лишь цепочку очевидных равенств.

3. Прямое доказательство. Часто в процессе поиска доказательства, переходя от данного неравенства к следующим, приходят в конце к очевидному неравенству. Если при этом совершались только равносильные переходы, т.е. в результате перехода каждый раз получали неравенство, равносильное предыдущему, то тем самым получено доказательство исходного неравенства. Докажем этим способом следующее неравенство: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ на области $M = \{(a, b) \mid a \in (0; +\infty);\ b \in (0; +\infty)\}$. Напишем цепочку равносильных на области M переходов:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \overset{M}{\Leftrightarrow} a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \overset{M}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{M}{\Leftrightarrow} (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0 \overset{M}{\Leftrightarrow} (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Поскольку справедливость последнего неравенства очевидна, то из равносильности первого и последнего неравенств вытекает справедливость первого неравенства.

Доказанное неравенство часто формулируют так: *среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.*

4. Метод от противного. Этот метод уже использовался в главе 1 при доказательстве теоремы о том, что простых чисел бесконечно много. Можно его применять и при доказательстве равенств и неравенств.

Докажем, например, этим методом, что для любого положительного числа a справедливо неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Предположим противное, т.е. предположим, что существует хотя бы одно положительное число a такое, что для него справедливо неравенство а + $\frac{1}{a}$ < 2. Так как a — положительное число, то это неравенство на основании утверждения 21 равносильно неравенству $(a + \frac{1}{a})a < 2a$, т.е. неравенству $a^2 + 1 < 2a$, которое на основании утверждения 20 равносильно неравенству $(a^2 + 1) - 2a < 2a - 2a$, т.е. неравенству $a^2 - 2a + 1 < 0$. Перепишем последнее неравенство в виде $(a - 1)^2 < 0$. Приходим к противоречию с очевидным фактом, что квадрат любого действительного числа неотрицателен. Полученное противоречие говорит о том, что сделанное предположение неверно. Следовательно, неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$ выполняется для любого положительного a.

5. Использование свойства транзитивности неравенств. Пусть требуется доказать на области M неравенство $A < C$. Если известно или уже доказано, что на области M справедливы неравенства $A < B$, $B < C$, или неравенства $A \leq B$, $B < C$, или неравенства $A < B$, $B \leq C$, то по свойству транзитивности неравенств будет справедливо и исходное неравенство.

Докажем этим способом следующее неравенство:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$$

на множестве $M = \{(n) \mid n \in N\}$.

Для $n = 1$ неравенство очевидно. Рассмотрим теперь любое натуральное $n \geq 2$. Каждое слагаемое суммы, начиная со второго, заменим на большее: $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} < \frac{1}{k(k-1)}$, где $2 \leq k \leq n$. Таким образом, имеем справедливое неравенство $A_n < B_n$, где $A_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ и $B_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)}$. Следует отметить, что неравенство $A_n < B_n$ является строгим при любом натуральном $n \geq 2$.

Алгебраическое выражение B_n можно упростить, если каждое слагаемое, начиная со второго, заменить алгебраической суммой: $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}$.

Получим

$$B_n = \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \\ + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}.$$

Неравенство $B_n < 2$ является, как легко заметить, справедливым для любого натурального n. Следовательно, по свойству транзитивности неравенств имеем $A_n < 2$, что и требовалось доказать.

Докажем в заключение свойства возведения алгебраических выражений в натуральную степень, которые часто используются при решении уравнений и неравенств (см. гл. III).

Теорема 1. *Пусть некоторая область M принадлежит ОДЗ двух алгебраических выражений A и B и обладает следующим свойством: для любого числового набора из области M соответствующие числовые значения выражений A и B положительны. Тогда на области M для любого натурального числа n* ($n \geq 2$):

а) *равенства $A = B$ и $A^n = B^n$ равносильны*;

б) *неравенства $A > B$ и $A^n > B^n$ равносильны.*

Доказательство. Обозначим алгебраическое выражение $A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}$ через C. В § 6 будет доказана справедливость следующего равенства алгебраических выражений:

$$A^n - B^n = (A - B)C. \qquad (15)$$

Очевидно, что для любого числового набора из области M соответствующее числовое значение выражения C положительно.

Докажем утверждение а). Пусть дано, что $A = B$ на области M. Тогда на основании утверждения 15 на M справедливо равенство $A - B = 0$, а отсюда по утверждению 16 получим, что на M справедливо равенство $(A - B)C = 0$. По свойству транзитивности равенств из этого равенства и равенства (15) вытекает, что $A'' - B'' = 0$, откуда по утверждению 15 следует, что на области M справедливо равенство $A'' = B''$.

Итак, доказано, что на области M из справедливости равенства $A = B$ следует справедливость равенства $A'' = B''$.

Пусть теперь дано, что $A'' = B''$ на области M. Тогда на области M по утверждению 15 справедливо равенство $A'' - B'' = 0$. Отсюда и из равенства (15) на области M на основании свойства транзитивности равенств имеем, что $(A - B)C = 0$, а отсюда по утверждению 16 вытекает, что $A - B = 0$, и наконец, по утверждению 15 получаем, что $A = B$. Значит, на области M из справедливости равенства $A'' = B''$ вытекает справедливость равенства $A = B$. Утверждение а) доказано.

Докажем теперь утверждение б). Пусть дано, что $A > B$ на области M. Тогда на основании утверждения 20 на M справедливо и неравенство $A - B > 0$, а отсюда по утверждению 21 получим справедливость неравенства $(A - B)C > 0$. Учитывая справедливость равенства (15) получим, что $A'' - B'' > 0$. Наконец, по утверждению 20 получим, что на M справедливо неравенство $A'' > B''$.

Итак, доказано, что на области M из справедливости неравенства $A > B$ следует справедливость неравенства $A'' > B''$.

Пусть теперь дано, что $A'' > B''$ на области M. Тогда на области M по утверждению 20 справедливо неравенство $A'' - B'' > 0$. Отсюда и из равенства (15) получим, что $(A - B)C > 0$ на области M. Применяя теперь утверждение 21, находим, что $A - B > 0$ на M. Наконец, по утверждению 20 имеем $A > B$ на M. Итак, на области M из справедливости неравенства $A'' > B''$ вытекает справедливость неравенства $A > B$. Утверждение б) доказано. Теорема доказана полностью.

§ 3. Многочлены

Рациональное выражение, содержащее относительно входящих в него букв только два действия — умножение и возведение в натуральную степень, называется *одночленом*.

Примеры одночленов: $3a$, $2abc\frac{23ab}{7}abc$, $\frac{2ab}{3}$.

Рациональное выражение называется *многочленом*, если оно является целым относительно каждой буквы, входящей в это выражение.

Например, рациональное выражение $\sqrt{35}abc - \frac{16ad}{7} + 0{,}3dc$ является многочленом, ибо это выражение является целым относительно букв a, b, c и d.

В частности, рациональное выражение, содержащее только одну букву и являющее целым относительно этой буквы, называется многочленом относительно одной буквы.

Из определения многочлена и правил действий над алгебраическими выражениями следует, что сумма, разность и произведение двух многочленов будут многочленами.

Если в многочлен входит n букв, то многочлен имеет смысл для любого числового набора из n чисел. Поэтому обычно, рассматривая многочлен, не говорят о его ОДЗ. Обычно одночлены тождественно преобразуют по законам действий, приведенных в § 2, собирая вместе все числа, входящие в одночлен, и записывая их перед буквами одночлена, а также собирая вместе одинаковые буквы, входящие в одночлен, и записывая их в виде натуральной степени этой буквы. После такого преобразования одночлен считается записанным в *стандартном виде*, а числовой множитель, стоящий перед буквами одночлена, называется *коэффициентом* данного одночлена.

Например, одночлен $3abc2cb\frac{3}{7}ac$ преобразуется к стандартному виду $\frac{18}{7}a^2b^2c^3$, и число $\frac{18}{7}$ есть его коэффициент.

Согласно правилам действий над алгебраическими выражениями многочлен всегда можно тождественно преобразовать к виду, в котором многочлен состоит из нескольких одночленов, записанных в стандартном виде и соединенных знаками сложения и вычитания; поэтому обычно говорят, что *многочлен есть алгебраическая сумма одночленов.*

Подобные члены многочлена — это его одночлены, записанные в стандартном виде и отличающиеся не более чем коэффициентами. *Привести подобные члены* многочлена — это значит заменить алгебраическую сумму подобных членов одним членом, тождественно равным этой сумме.

Исходя из правил действий над алгебраическими выражениями, можно следующим образом конкретизировать законы действий над многочленами.

Чтобы *сложить* два многочлена, следует записать подряд все члены первого многочлена, а затем все члены второго многочлена, сохраняя у каждого члена знак, стоящий перед его коэффициентом, после чего необходимо привести подобные члены.

Например: $(2cd + 5a) + (x + 7a - 4cd) = 2cd + 5a + x + 7a - 4cd = 12a + x - 2cd$.

Чтобы *вычесть* из одного многочлена другой многочлен, следует записать подряд все члены первого многочлена, сохраняя у каждого одночлена знак, стоящий перед его коэффициентом, затем все члены второго многочлена, изменив на противоположные знаки, стоящие перед коэффициентами одночленов второго многочлена, после чего необходимо привести подобные члены.

Например: $(x^2 - y^2) - (-7x^2 + 8y^2 - 5a) = x^2 - y^2 + 7x^2 - 8y^2 + 5a = 8x^2 - 9y^2 + 5a$.

Чтобы *умножить одночлен на многочлен*, следует умножить этот одночлен на каждый член многочлена, записать члены подряд с теми знаками, какие были у членов многочлена, если перед коэффициентом одночлена стоит знак плюс, и с противоположными знаками — если перед коэффициентом одночлена стоит знак минус, каждый одночлен произведения записать в стандартном виде, а затем привести подобные члены.

Например: $(-4ab)(3ab - 2 + 3a^2b^2) = -(4ab)(3ab) + (4ab)\cdot 2 - (4ab)(3a^2b^2) = -12a^2b^2 + 8ab - 12a^3b^3$; $5c(2ab + 1 - 3b) = (5c)(2ab) + (5c)\cdot 1 - (5c)(3b) = 10abc + 5c - 15bc$.

Чтобы *умножить многочлен на многочлен*, следует каждый одночлен (вместе со знаком, стоящим перед его коэффициентом) первого многочлена умножить на второй многочлен, записать подряд все произведения, каждый полученный одночлен записать в стандартной форме, а затем привести подобные члены.

Например: $(ab - cd)\cdot(ab + cd) = (ab)(ab) + (ab)(cd) - (cd)(ab) - (cd)(cd) = a^2b^2 + abcd - abcd - c^2d^2 = a^2b^2 - c^2d^2$.

Пользуясь правилами сложения и умножения многочленов и свойствами равенств алгебраических выражений, получим тождественные равенства, которые часто называют *формулами сокращенного умножения*.

Начнем с перемножения одинаковых многочленов вида $(a + b)$. Используя законы действий над алгебраическими выражениями, можно написать следующую цепочку тождественных равенств:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = (a)(a) + (a)(b) + (b)(a) + (b)(b) = \\ = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (1)$$

Формула (1) имеет следующую словесную формулировку: *квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.*

Теперь используя предыдущую формулу, можно написать следующую цепочку тождественных равенств:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ = (a)(a^2) + (a)(2ab) + (a)(b^2) + (b)(a^2) + (b)(2ab) + (b)(b^2) = \\ = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (2)$$

Формула (2) имеет следующую словесную формулировку: *куб суммы двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго числа и плюс куб второго числа.*

Напишем еще одну цепочку тождественных равенств:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) = \\
&= (a)(a^3)+(a)(3a^2b)+(a)(3ab^2)+(a)(b^3)+(b)(a^3)+ \\
&+ (b)(3a^2b)+(b)(3ab^2)+(b)(b^3) = a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+ \\
&+ a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.
\end{aligned}
$$

Приведенные формулы позволяют заметить некоторую закономерность, с помощью которой можно записать формулу для $(a+b)^n$, где n — любое натуральное число. А именно легко заметить, что всех членов будет $(n+1)$; первый член есть первое число в степени n; в каждом последующем члене степень первого числа на единицу меньше его степени в предшествующем члене, а в последнем члене оно в нулевой степени; второе число находится в первом члене в нулевой степени, во втором члене в первой степени, в каждом последующем члене степень второго числа на единицу больше его степени в предшествующем члене, а в последнем члене второе число в степени n.

Коэффициент же при каждом члене можно найти при помощи «треугольника Паскаля»:

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
.	. . . .

Правило образование строк «треугольника Паскаля» простое. Каждая строка может быть получена из предыдущей верхней строки следующим образом. В промежутке между любыми соседними числами верхней строки (но ниже их) пишется сумма этих чисел, а по краям пишутся единицы. Номер строки показывает, в какую степень возводится двучлен $(a+b)$, а числа этой строки являются коэффициентами соответствующих членов, записанных в рассмотренном выше порядке.

Конечно, если надо написать формулу для $(a+b)^n$, где n — большое число (например, 100), то ясно, что по треугольнику Паскаля вычислять коэффициенты правой части долго. Поэтому желательно знать общую формулу вычисления $(a+b)^n$. Эта формула носит название формулы *бинома Ньютона* и имеет вид

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n b^n, \quad (3)$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ (следовательно, $C_n^k = C_n^{n-k}$), $0! = 1$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ для любого $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Доказательство равенства (3) будет дано в § 6.

Применим формулу бинома Ньютона, например, для вычисления $(a+b)^5$:

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5.$$

Вычислим коэффициенты C_5^m, где $m \in \{0, 1, 2\}$. Для вычислением остальных коэффициентов воспользуемся равенством.

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{[n-(n-m)]!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \quad \text{для } 0 \le m \le n,$$

доказанным в главе 1.

Таким образом,

$$C_5^0 = C_5^5 = 1,\ C_5^1 = C_5^4 = \frac{5!}{1!\,4!} = 5,\ C_5^2 = C_5^3 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$$

Следовательно,

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Из формулы бинома Ньютона легко получить формулу для $(a-b)^n$. Обозначим $d = -b$ и применим формулу бинома Ньютона:

$$(a-b)^n=(a+d)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}d+\ldots$$
$$\ldots+C_n^ka^{n-k}d^k+\ldots+C_n^nd^n.$$

Подставляя $(-b)$ вместо d, получим

$$(a-b)^n=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+(-1)^nC_n^nb^n.$$

Частные случаи этой формулы для $n=2$ и $n=3$:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Формула бинома Ньютона $(a+b)^n$ и вытекающая из нее формула $(a-b)^n$ являются *формулами сокращенного умножения*, в которых берется произведение одинаковых многочленов (биномов) n раз.

Докажем теперь некоторые формулы, в которых берется произведение разных многочленов. Очевидна следующая цепочка тождественных равенств:

$$(a-b)(a+b)=(a)(a)+(a)(b)-(b)(a)-(b)(b)=$$
$$=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

Эта формула обычно запоминается в записи, где меняются местами правая и левая части: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Приведем ее словесную формулировку: *разность квадратов двух чисел равна произведению разности этих чисел на их сумму.*

Выведем формулу разности кубов этих чисел (a^3-b^3). Поскольку

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a)(a^2)+(a)(ab)+(a)(b^2)-$$
$$-(b)(a^2)-(b)(ab)-(b)(b^2)=a^3+a^2b+ab^2-$$
$$-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3,$$

то

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Приведем словесную формулировку этой формулы: *разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат суммы этих чисел.*

Приведенные формулы позволяют заметить закономерность, с помощью которой легко записать формулу $a^n - b^n$ для любого натурального числа n. Эта формула имеет вид

$$a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Доказательство этой формулы будет проведено в § 6 методом математической индукции.

Наконец, выведем следующую формулу:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Действительно,

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$$
$$= (a)(a^2) - (a)(ab) + (a)(b^2) + (b)(a^2) - (b)(ab) + (b)(b^2) =$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Словесная формулировка этой формулы следующая: *сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат разности этих чисел.*

Приведем формулы, которые желательно запомнить:

$$\begin{aligned}
&(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\\
&(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\
&(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\\
&(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,\\
&a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),\\
&a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),\\
&a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).
\end{aligned}$$

Формулы, доказанные в этом параграфе, справедливы для любых числовых значений букв a и b. Иногда эти формулы употребляются и тогда, когда буквами a и b обозначены некоторые алгебраические выражения, но тогда очевидно, что эти формулы будут справедливы уже на ОДЗ двух алгебраических выражений a и b.

В ряде вопросов при действиях с многочленами удобнее рассматривать их не стандартном виде, а в виде произведения.

Тождественное преобразование многочлена к виду произведения многочленов называется *разложением многочлена на множители.* Собственно говоря, все формулы сокращенного умножения и есть формулы разложения многочлена на множители.

Кроме применения формул сокращенного умножения, есть и другие приемы для разложения многочлена на множители, например, *вынесение за скобки общего множителя, группировка.* Для разложения многочлена на множители употребляются все приемы.

Рассмотрим пример разложения многочлена на множители. Группируя, вынося за скобки общий множитель и пользуясь формулой сокращенного умножения, получаем цепочку тождественных равенств:

$$a^2c + 2abc + b^2c + (a + b)^2d = c(a^2 + 2ab + b^2) + d(a + b)^2 =$$
$$= c(a + b)^2 + d(a + b)^2 = (a + b)^2(c + d).$$

§ 4. Алгебраические дроби

Алгебраической дробью называется дробное рациональное выражение, являющееся частным от деления одного многочлена на другой.

Алгебраическая дробь, которая есть частное от деления многочлена A на многочлен B, обычно записывается в виде $\frac{A}{B}$, причем многочлен A *называется числителем* алгебраической дроби, а многочлен B — ее *знаменателем.*

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{3a + b}{a^3 + 1}; \quad \frac{ab - b}{d + a}; \quad \frac{a^2 + b^2}{a - b}; \quad \frac{xy + 6y}{7x + 8y}.$$

ОДЗ алгебраической дроби $\frac{A}{B}$, в которую входит n букв, есть множество всех числовых наборов, соответствующих буквенному набору дроби $\frac{A}{B}$, кроме тех, для каждого из которых соответствующее числовое значение многочлена B равно нулю.

Например, ОДЗ алгебраической дроби $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ есть множество $\{(a, b) \mid a \in R;\ b \in R;\ a \neq b\}$.

Докажем несколько утверждений о равенстве алгебраических дробей.

1. *Если обозначить алгебраическую дробь* $\frac{A}{B}$ *одной буквой* C, *то на ОДЗ этой дроби равносильны тождественные равенства* $C = \frac{A}{B}$ *и* $A = CB$.

Справедливость этого свойства вытекает из справедливости утверждения 14 § 2.

2. *Равенства* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ *и* $AD = BC$ *равносильны на ОДЗ первого из них.*

Это свойство часто формулируют так: *две дроби* $\frac{A}{B}$ *и* $\frac{C}{D}$ *тождественно равны на ОДЗ тогда и только тогда, когда на этой ОДЗ справедливо равенство* $AD = BC$.

Доказательство. Пусть область M — ОДЗ двух дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$. Рассмотрим случай, когда $A = 0$ на M. Тогда $\frac{A}{B} = 0$ и из равенства $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ следует, что и $\frac{C}{D} = 0$ на M. Поэтому $C = 0$ на M, а это значит, что $AD = BC$ на M.

Наоборот, пусть $AD = BC$ и $A = 0$ на M. Так как на M $D \neq 0$ и $B \neq 0$, то $C = 0$ на M. Следовательно, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Рассмотрим теперь случай, когда ни для одного набора из области M многочлен A не обращается в нуль, т.е. рассмотрим случай, когда $A \neq 0$ на M. Пусть $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, тогда отсюда следует, что $C \neq 0$ на M. Обозначим $\frac{A}{B}$ через α и $\frac{C}{D}$ через β. По свойству 1 алгебраических дробей $A = \alpha B$ и $\beta C = D$. По утверждению 14 § 2 имеем

$$A\beta D = C\alpha B. \qquad (1)$$

Так как $\alpha = \beta \neq 0$ на M, что по утверждению 14 § 2 из (1) следует, что $AD = CB$.

Наоборот, пусть $AD = BC$, тогда, так как $A \neq 0$, $D \neq 0$ и $B \neq 0$ на M, то и $C \neq 0$ на M. Следовательно, $\alpha = \frac{A}{B}$ и $\beta = \frac{C}{D}$ не равны нулю на M. Тогда умножим данное равенство $AD = BC$ на $\alpha\beta$. Получим равносильное равенство

$$\alpha\beta AD = \alpha\beta BC. \qquad (2)$$

Но $\alpha B = A$, $\beta D = C$, и равенство (2) примет вид

$$\alpha AC = \beta AC. \qquad (3)$$

Используя утверждение 14 § 2, получим $\alpha = \beta$, что и требовалось доказать.

Таким образом, свойство 2 алгебраических дробей доказано.

3. *На ОДЗ алгебраической дроби* $\frac{A}{B}$ *справедливы тождественные равенства* $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B}$.

Каждое из этих равенств становится очевидным, если воспользоваться только что доказанным свойством 2.

4. *Для любого многочлена K, не обращающегося в нуль на ОДЗ алгебраической дроби* $\frac{A}{B}$, *справедливо тождественное равенство* $\frac{A}{B} = \frac{AK}{BK}$.

Поскольку на ОДЗ дроби $\frac{A}{B}$ это равенство по свойству 2 равносильно равенству $A(BK) = B(AK)$, которое является очевидным, то столь же очевидна и справедливость свойства 4.

5. *Ча ОДЗ алгебраической дроби* $\frac{A}{B}$ *справедливо тождественное равенство* $\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}$.

Действительно, по утверждению 9 § 2

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B}\left(B \cdot \frac{1}{B}\right).$$

Используя ассоциативность умножения алгебраических выражений, имеем

$$\frac{A}{B}\left(B\cdot\frac{1}{B}\right)=\left(\frac{A}{B}\cdot B\right)\cdot\frac{1}{B}.$$

Применяя утверждение 11 § 2 получаем, что

$$\frac{A}{B}=A\cdot\frac{1}{B}.$$

6. *На ОДЗ алгебраической дроби* $\frac{1}{AB}$ *справедливо тождественное равенство* $\frac{1}{AB}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}.$

Действительно, на ОДЗ дроби $\frac{1}{AB}$ очевидна справедливость цепочки тождественных равенств

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}\left(B\cdot\frac{1}{B}\right)\left(A\cdot\frac{1}{A}\right)=\left(\frac{1}{AB}\cdot AB\right)\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}\right)=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}.$$

7. *На ОДЗ двух алгебраических дробей* $\frac{A}{B}$ *и* $\frac{B}{A}$ *справедливо тождественное равенство* $\frac{A}{B}=\frac{1}{\frac{B}{A}}.$

Действительно, применяя сначала свойство 5 дробей, затем свойства действий над алгебраическими выражениями, затем свойства 5 и 6 дробей, имеем цепочку тождественных равенств

$$\frac{A}{B}=A\cdot\frac{1}{B}=A\cdot\frac{1}{B}\cdot\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\frac{1}{A}}\right)=\left(A\cdot\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{\frac{1}{A}}\right)=\frac{1}{B\cdot\frac{1}{A}}=\frac{1}{\frac{B}{A}}.$$

Напомним следующее соглашение: если не указана явно область M, на которой рассматривается некоторое тождественное равенство, то оно рассматривается на ОДЗ двух выражений, стоящих в левой и правой частях равенства. Поэтому дальше не будет явно указываться область, на которой будет справедливо тождественное равенство, имея в виду, что оно справедливо на ОДЗ двух выражений, стоящих в левой и правой частях равенства.

Пользуясь свойствами сложения и умножения алгебраических выражений и свойствами алгебраических дробей, легко доказать справедливость тождественных равенств

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}; \quad \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$

Действительно, используя свойства алгебраических дробей, получим

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}+\frac{CB}{DB}=AD\cdot\frac{1}{BD}+CB\cdot\frac{1}{BD}.$$

Применяя теперь свойства сложения и умножения алгебраических выражений, а затем опять свойства алгебраических дробей, имеем

$$AD\cdot\frac{1}{BD}+CB\cdot\frac{1}{BD}=(AD+CB)\frac{1}{BD}=\frac{AD+CB}{BD},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается второе равенство:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\left(A\cdot\frac{1}{B}\right)\left(C\cdot\frac{1}{D}\right)=AC\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{D}=AC\cdot\frac{1}{BD}=\frac{AC}{BD}.$$

Так же доказываются и равенства

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{AD-BC}{BD}; \quad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{AD}{BC}.$$

Часто надо привести алгебраические дроби к *общему знаменателю*, т.е. записать их так, чтобы у всех этих дробей был один и тот же знаменатель. Для этого существует следующий способ: надо разложить каждый знаменатель на множители, а затем числитель и знаменатель каждой дроби умножить на произведение тех множителей знаменателей остальных дробей, которые не содержатся в данном знаменателе, что по свойству дробей их не изменит.

Пример. Привести к общему знаменателю следующие алгебраические дроби:

$$\frac{a}{a^3 - b^3};\quad \frac{c}{a^2 - b^2};\quad \frac{d}{a^2 + ab + b^2}.$$

Разлагая знаменатели на множители, перепишем дроби так:

$$\frac{a}{(a - b)(a^2 + ab + b^2)};\quad \frac{c}{(a - b)(a + b)};\quad \frac{d}{a^2 + ab + b^2}.$$

Теперь, умножая числитель и знаменатель первой дроби на $(a + b)$, второй — на $(a^2 + ab + b^2)$, третий — на $(a - b) \times$ $\times (a + b)$, получаем

$$\frac{a(a + b)}{(a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)};\quad \frac{c(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)};$$
$$\frac{d(a - b)(a + b)}{(a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)}.$$

У этих дробей одинаковые знаменатели, т.е. первоначальные дроби приведены к общему знаменателю.

В ряде случаев требуется представить дробь в виде суммы дробей с более простыми знаменателями. Это можно сделать только в том случае, когда многочлен, стоящий в знаменателе дроби, разлагается на произведение многочленов меньшей степени. Покажем на примере, как это делается.

Пусть надо разложить алгебраическую дробь $\frac{1}{x^2 - 1}$ на простейшие. Так как многочлен $x^2 - 1$ разлагается на произведение многочленов $(x - 1)$ и $(x + 1)$, то это можно сделать. Для этого нужно найти алгебраические дроби $\frac{A}{x - 1}$ и $\frac{B}{x + 1}$ такие, чтобы было выполнено тождественное равенство $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$. Рассмотрим сумму $\frac{A}{x - 1} +$ $+ \frac{B}{x + 1}$. По только что сформулированным правилам

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{(A + B)x + (A - B)}{(x - 1)(x + 1)}.$$

Так как эта дробь должна тождественно равняться дроби $\frac{1}{x^2-1}$ (заметим, что эти рассуждения проводятся для любого x, кроме $x = 1$ и $x = -1$), то по свойству 2 эти две дроби равны только тогда, когда $[(A + B)x + (A - B)](x - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)$. Так как это равенство должно выполняться для любого x, кроме $x = 1$ и $x = -1$, то, полагая, например, $x = 0$, затем $x = 2$, получаем, что это будет верно только тогда, когда одновременно $A - B = 1$ и $3A + B = 1$. А эти два равенства справедливы одновременно только для $A = \frac{1}{2}$ и $B = -\frac{1}{2}$. Значит, данная дробь разложена на простейшие, а именно, справедливо следующее тождественное равенство:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}.$$

Этот способ разложения дроби в сумму более простых дробей называется *способом неопределенных коэффициентов*. Действительно, полагая числа A и B вначале неизвестными, получаем на ОДЗ равенство двух многочленов, один из которых с известными коэффициентами, другой с неизвестными, выраженными через A и B. Это дает возможность выписать алгебраические равенства относительно неизвестных коэффициентов (в данном случае $A - B = 1$, $3A + B = 1$). Найдя числовые значения неизвестных коэффициентов, обращающие данные алгебраические равенства в верные числовые равенства, тем самым решим поставленную задачу о представлении дроби в виде суммы более простых дробей.

Неравенства алгебраических дробей. Докажем два утверждения, которые часто применяются при рассмотрении алгебраических дробей.

8. *На ОДЗ алгебраической дроби* $\frac{A}{B}$ *равносильны следующие неравенства*: $\frac{A}{B} > 0$ *и* $AB > 0$.

Докажем, что из справедливости первого неравенства следует справедливость второго неравенства.

Доказательство. Обозначим алгебраическую дробь $\frac{A}{B}$ одной буквой C, т.е. $C = \frac{A}{B}$. На ОДЗ данной алгебраической дроби алгебраическое выражение C положительно, так как любое числовое значение алгебраического выражения C является положительным числом. По свойству 1 равенств алгебраических дробей имеем $A = CB$ на ОДЗ дроби. Следовательно, алгебраическое выражение AB равно CB^2: $AB = CB^2$. По определению на ОДЗ дроби $\frac{A}{B}$ алгебраическое выражение B в нуль не обращается, т.е. алгебраическое выражение B^2 положительно на ОДЗ дроби $\frac{A}{B}$. Произведение положительных алгебраических выражений C и B^2 будет также положительным. Аналогично доказывается, что на ОДЗ алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ из справедливости неравенства $AB > 0$ следует справедливость неравенства $\frac{A}{B} > 0$.

9. *На ОДЗ алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ равносильны неравенства $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ и $AD^2B > CB^2D$.*

Доказательство. Используя утверждение 20, получим равносильные неравенства: $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ и $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} > 0$.

Выше было доказано равенство

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - BC}{BD},$$

которое позволяет сделать еще один равносильный переход:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D} \Leftrightarrow \frac{AD - BC}{BD} > 0.$$

Последнее неравенство по утверждению 8 на ОДЗ алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ равносильно неравенству $(AD - BC)BD > 0$, которое равносильно неравенству $AD^2B > CB^2D$. Утверждение 9 полностью доказано.

Утверждения 8, 9 используются при доказательстве других неравенств.

Докажем, например, что неравенства $\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b}$ и $a > b$ равносильны для любых, не равных друг другу положительных чисел a и b.

Действительно, по утверждению 9 равносильны следующие неравенства:

$$\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b} \text{ и } (a^2 - b^2)[(a+b)^2 - (a-b)^2] > 0.$$

Так как $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$, то последнее неравенство равносильно неравенству $(a - b)(a + b)\,4ab > 0$, которое в силу положительности a и b равносильно неравенству $a > b$. Следовательно, $\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow a > b$ для любых, не равных друг другу, положительных a и b.

§ 5. Многочлены относительно одной буквы

Многочлен относительно одной буквы x имеет одночлены разных степеней, ибо в противном случае можно привести подобные члены. Одночлены разных степеней можно упорядочить относительно возрастания или убывания степеней буквы x. Обычно многочлен относительно одной буквы записывают в порядке убывания степеней.

Многочлен, записанный в виде $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, называется *расположенным многочленом*. Если $a_0 \neq 0$, то говорят, что этот многочлен имеет степень n.

Если не известно, равен или не равен нулю коэффициент a_0, то говорят, что этот многочлен степени не выше, чем n.

Из этого определения в частности вытекает, что многочлены нулевой степени — это отличные от нуля числа. Число нуль также считается многочленом, причем это единственный многочлен, степень которого не определена. Для сокращенного обозначения многочленов обычно употребляют следующие записи:

$$P(x),\ Q(x),\ T(x),\ R(x),\ p(x),\ q(x),\ r(x),$$

при этом, если хотят подчеркнуть, что многочлен $P(x)$ — степени n, то пишут $P_n(x)$.

Для нахождения *суммы* многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ нужно записать подряд все члены этих двух многочленов и затем сделать приведение подобных членов.

Для нахождения *произведения* многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ нужно каждый одночлен многочлена $P_n(x)$ умножить на каждый одночлен многочлена $Q_m(x)$, сложить полученные произведения и привести подобные члены.

Теорема 1. *Два многочлена относительно x тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их степени и равны коэффициенты при одинаковых степенях x.*

Доказательство этой теоремы опускается.

В этом параграфе для обозначения тождественного равенства двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ будет употребляться запись $P(x) = Q(x)$, т.е. в этом параграфе знак «=», связывающий два многочлена, будет пониматься в смысле тождественного равенства этих многочленов. В частности, запись $P(x) = 0$ будет означать, что многочлен $P(x)$ тождественно равен нулю, т.е. есть число нуль.

Теорема 1 может быть применена для разложения многочлена на множители. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Суть применения этого метода состоит в следующем. Пусть дан многочлен $P_n(x)$ степени n и его надо представить в виде произведения многочленов степеней k и $(n - k)$, где $k < n$. Тогда выписываются два многочлена $P_k(x)$ и $P_{n-k}(x)$; первый — степени k и второй — степени $(n - k)$, с коэффициентами, обозначенными некоторыми буквами, скажем, у первого α_0, α_1, ..., α_k, у второго β_0, β_1, ..., β_{n-k}. Перемножая многочлены $P_k(x)$ и $P_{n-k}(x)$ получаем многочлен $T_n(x)$ степени n с коэффициентами, зависящими от α_i ($i = 0, 1, ..., k$) и β_j ($j = 0, 1, ...$ $..., n - k$). Из условия, что многочлены $P_n(x)$ и $T_n(x)$ тождественно равны, получаем $n + 1$ равенство, в которых участвуют $n + 2$ коэффициента α_i и β_j, которые надо найти. Полагая, например, коэффициент $\alpha_0 = 1$, приходим к $n + 1$ равенству, из которых надо найти $n + 1$ коэффициент α_i

($i = 1, 2, ..., k$) и β_j ($j = 0, 1, ..., n - k$). Найдя их, найдем и многочлены $P_k(x)$ и $P_{n-k}(x)$.

Пример. Разложить многочлен $x^3 + 3x + 4$ на множители, среди которых один — многочлен первой степени, а второй — многочлен второй степени. Будем искать многочлены $(x + \alpha_1)$ и $(\beta_0 x^2 + \beta_1 x + \beta_2)$ такие, что справедливо тождественное равенство $(x + \alpha_1)(\beta_0 x^2 + \beta_1 x + \beta_2) = x^3 + 3x + 4$. Применяя теорему 1, получаем четыре равенства: $\beta_0 = 1$, $\beta_0\alpha_1 + \beta_1 = 0$, $\beta_1\alpha_1 + \beta_2 = 3$, $\alpha_1\beta_2 = 4$. Этим равенствам удовлетворяют $\beta_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 4$. Значит, многочлен $x^3 + 3x + 4$ разлагается на множители $(x + 1)$ и $(x^2 - x + 4)$, т.е.

$$x^3 + 3x + 4 = (x + 1)(x^2 - x + 4).$$

Заметим, что не всякий многочлен можно разложить на множители. Например, многочлен $x^2 + x + 1$ нельзя разложить в произведение двух многочленов первой степени.

Теорема 2. *Если произведение двух многочленов тождественно равно нулю, то хотя бы один из этих многочленов тождественно равен нулю.*

Доказательство этого утверждения опускается.

Вычесть из многочлена $P(x)$ многочлен $T(x)$ — это значит найти такой многочлен $Q(x)$, что $P(x) = T(x) + Q(x)$.

Нетрудно проверить, что для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$ такой многочлен $Q(x)$ существует и при этом только один, он называется *разностью многочленов $P(x)$ и $T(x)$* и обозначается $Q(x) = P(x) - T(x)$.

Разделить нацело многочлен $P(x)$ на многочлен $T(x)$, отличный от нуля — это значит найти многочлен $Q(x)$ такой, что $P(x) = T(x)Q(x)$.

Если такой многочлен $Q(x)$ существует, то говорят, что многочлен $T(x)$ является делителем многочлена $P(x)$, а многочлен $Q(x)$ является частным от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$. Не всегда многочлен $P(x)$ можно разделить нацело на многочлен $T(x)$. Например, многочлен $x^2 + 1$ не делится нацело на многочлен $x + 1$. Значит в множестве многочленов не всегда выполнимо деление нацело. Зато, как будет показано ниже, в множестве многочленов всегда выполнимо деление с остатком.

Деление с остатком. *Разделить с остатком* многочлен $P(x)$ на многочлен $T(x)$, отличный от нуля, — это значит найти два многочлена $q(x)$ и $r(x)$ такие, что

$$P(x) = T(x)q(x) + r(x), \tag{1}$$

причем либо степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $T(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.

В случае, если выполнимо равенство (1), говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком $r(x)$ и частным $q(x)$; если $r(x) = 0$, т.е. если остаток есть число нуль, то говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком нуль или многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $T(x)$.

Пример. Пусть $P(x) = x^7 - x^6 + 2x^5 + x^2$, $T(x) = x^2 - x + 2$. Тогда легко видеть, что $P(x) = T(x)(x^5 + 1) + x - 2$, т.е. многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком $r(x) = x - 2$ и частным $x^5 + 1$. Отметим, что из равенства $P(x) = T(x)x^5 + x^2$ не вытекает, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком x^2, ибо нарушено условие: степень остатка $r(x)$ должна быть строго меньше степени многочлена $T(x)$.

Теорема 3. *Для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$, где $T(x) \neq 0$, существует пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$* таких, что $P(x) = T(x)q(x) + r(x)$, *причем либо степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $T(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.*

Доказательство. Пусть $P(x) = 0$, а $T(x)$ — любой отличный от нуля многочлен, тогда многочлены $q(x) = 0$ и $r(x) = 0$ удовлетворяют условиям теоремы.

Пусть $P(x) \neq 0$, а многочлен $T(x)$ имеет степень бóльшую, чем степень многочлена $P(x)$, тогда многочлены $q(x) = 0$ и $r(x) = P(x)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Наконец, пусть $P(x) \neq 0$, а многочлен $T(x)$ имеет степень, меньшую или равную степени многочлена $P(x)$. Если $T(x) = c$, где c — константа, отличная от нуля, то многочлены $q(x) = P(x)/c$ и $r(x) = 0$ удовлетворяют условиям теоремы.

Остается рассмотреть случай, когда многочлен $P(x)$ имеет степень n, причем $n \geq 1$, а многочлен $T(x)$ имеет степень m, причем $0 < m \leq n$. Пусть $P(x) = P_n(x)$, $T(x) = T_m(x)$, где $0 < m \leq n$, $n \geq 1$, т.е.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$T_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Построим последовательность многочленов $Q_{n_k}(x)$ следующим образом. Положим

$$Q_{n_1}(x) = P_n(x) - \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}T_m(x).$$

Тогда либо $Q_{n_1}(x) = 0$, либо $Q_{n_1}(x)$ можно записать в виде

$$Q_{n_1}(x) = a_0^{(1)}x^{n_1} + a_1^{(1)}x^{n_1-1} + \ldots + a_{n_1-1}^{(1)}x + a_{n_1}^{(1)}$$

причем $a_0^{(1)} \neq 0$ и степень многочлена $Q_{n_1}(x)$ меньше, чем n, т.е. $n_1 < n$; если окажется, что $n_1 < m$ или $Q_{n_1}(x) = 0$, то многочлены $q(x) = \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$ и $r(x) = Q_{n_1}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы; если же $n_1 \geq m$, то делаем следующий шаг: положим

$$Q_{n_2}(x) = Q_{n_1}(x) - \frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-1}T_m(x).$$

Ясно, что либо $Q_{n_2}(x) = 0$, либо $n_2 < n_1 < n$ и $Q_{n_2}(x)$ можно записать в виде

$$Q_{n_2}(x) = a_0^{(2)}x^{n_2} + a_1^{(2)}x^{n_2-1} + \ldots + a_{n_2-1}^{(2)}x + a_{n_2}^{(2)},$$

причем $a_0^{(2)} \neq 0$. Если окажется, что $n_2 < m$ или $Q_{n_2}(x) = 0$, то многочлены $q(x) = \frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + \frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m}$, $r(x) = Q_{n_2}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы; если же $n_2 \geq m$, то делаем следующий шаг и продолжаем этот процесс. Поскольку на каждом шагу степень уменьшается: $n > n_1 > n_2 > \ldots$, то на некотором k-м шагу натуральное число n_k станет меньше натурального числа m или $Q_{n_k}(x) = 0$ и процесс закончится. В результате получим, что

$$P_n(x) = \left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + \frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m} + \ldots + \frac{a_0^{(k-1)}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}\right)T_m(x) + Q_{n_k}(x).$$

Тогда многочлены $r(x) = Q_{n_k}(x)$ и $q(x) = \left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + \frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m} + \ldots + \frac{a_0^{(k-1)}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}\right)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Итак, утверждение теоремы о существовании многочленов $q(x)$, $r(x)$ доказано.

Теорема 4. *Пара многочленов $q(x)$, $r(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 3, единственная.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. предположим, что существуют две пары многочленов $q(x)$, $r(x)$ и $q_1(x)$, $r_1(x)$, таких, что $P(x) = T(x)q(x) = r(x)$ и $P(x) = T(x)q_1(x) + r_1(x)$. Пользуясь определением равенства многочленов, имеем

$$T(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \qquad (2)$$

Возможны два случая: либо $r_1(x) - r(x) = 0$, либо $r_1(x) - r(x) \neq 0$. В первом случае, так как $T(x) \neq 0$, то $q(x) - q_1(x) = 0$, и единственность имеет место.

Во втором случае, так как степень $r_1(x) - r(x)$ не больше ни степени $r_1(x)$, ни степени $r(x)$, то степень $r_1(x) - r(x)$ меньше степени многочлена $T(x)$. В то же время степень многочлена $T(x)[q(x) - q_1(x)]$ либо больше, либо равна степени многочлена $T(x)$. Значит, в равенстве (2) многочлены, стоящие в левой и правой частях, имеют разные степени, что противоречит теореме 1. Полученное противоречие означает, что $r_1(x) - r(x) = 0$, а в этом случае единственность уже доказана. Объединяя теоремы 3 и 4, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. *Для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$, где $T(x) \neq 0$, существует и притом единственная пара многочленов $Q(x)$ и $r(x)$ таких, что $P(x) = T(x)q(x) + r(x)$, причем либо* *степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $T(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.*

Для определения коэффициентов многочленов $q(x)$, $r(x)$ существует несколько способов. Наиболее распространенным среди них является метод неопределенных коэффициентов, уже рассмотренный раньше.

Пусть даны многочлены $P_n(x)$ и $T_m(x)$, где $n > m$. Положим

$$q(x) = c_0x^{n-m} + c_1x^{n-m-1} + \ldots + c_{n-m},$$
$$r(x) = d_0x^{m-1} + d_1x^{m-2} + \ldots + d_{m-1},$$

где коэффициенты c_i и d_j пока не определены (отметим, что их всего $n + 1$ и $c_0 \neq 0$). Потребуем, чтобы было справедливо равенство

$$P_n(x) = T_m(x)q(x) + r(x).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получим $n + 1$ равенство, в которых участвует $n + 1$ коэффициент c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-m}, d_0, d_1, d_2, ..., d_{m-1}; найдя их, тем самым найдем многочлены $q(x)$ и $r(x)$.

Пример. Пусть $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2$, $T(x) = 2x^2 - 3x$. Полагая $q(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$ $(c_0 \neq 0)$, $r(x) = d_0x + d_1$, напишем равенство

$$2x^4 - 5x^3 + 2 = (2x^2 - 3x)(c_0x^2 + c_1x + c_2) + (d_0x + d_1),$$

которое можно переписать в виде

$$2x^4 - 5x^3 + 2 =$$
$$= 2c_0x^4 + (2c_1 - 3c_0)x^3 + (2c_2 - 3c_1)x^2 + (d_0 - 3c_2)x + d_1.$$

Согласно теореме 1 справедливы равенства

$$\begin{cases} 2c_0 = 2, \\ 2c_1 - 3c_0 = -5, \\ 2c_2 - 3c_1 = 0, \\ d_0 - 3c_2 = 0, \\ d_1 = 2. \end{cases}$$

Из этих равенств находим $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = -\frac{3}{2}$, $d_0 = -\frac{9}{2}$, $d_1 = 2$, и тогда получаем, что $q(x) = x^2 - x - \frac{3}{2}$, $r(x) = -\frac{9}{2}x + 2$.

Схема Горнера. Рассмотрим деление многочлена на двучлен $(x - \alpha)$.

Пусть даны многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0 \neq 0$, $n \geq 1$, и двучлен $(x - \alpha)$. По теореме 5 существуют многочлен $q(x)$ и число r такие, что $P_n(x) = (x - \alpha)q(x) + r$. Степень многочлена $q(x)$ равна $(n - 1)$. Поэтому $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, где $b_0 \neq 0$. Найдем числа b_0, b_1, b_2, .., b_{n-1} и r методом неопределенных коэффициентов. Подставим $Q(x)$ в равенство $P(x) = (x - \alpha)q(x) + r$, получим, что

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n &= \\ = b_0x^n + (b_1 - \alpha b_0)x^{n-1} - (b_2 - \alpha b_1)x^{n-2} + \ldots& \\ \ldots + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2})x + (r - \alpha b_{n-1}).& \end{aligned}$$

По правилу равенства многочленов отсюда получаем, что

$$\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1 - \alpha b_0, \\ a_2 = b_2 - \alpha b_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2}, \\ a_n = r - \alpha b_{n-1}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_1 + \alpha b_0, \\ b_2 = a_2 + \alpha b_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}, \\ r = a_n + \alpha b_{n-1}. \end{cases} \qquad (3)$$

Итак, коэффициенты частного $q(x)$ и остаток r выражаются через коэффициенты многочлена $P(x)$ и число α при помощи действий сложения и умножения согласно формулам (3), откуда следует:

а) если $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ и α — рациональные числа, то b_0, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и r — также рациональные числа;

б) если $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ и α — целые числа, то $b_0, b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_{n-1}$ и r — также целые числа.

Из формул (3) вытекает следующее правило для вычисления коэффициентов $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и остатка r.

Выписать подряд, начиная с a_0, в строку все коэффициенты многочлена $P_n(x)$. Во второй строке под a_0 написать коэффициент b_0, равный коэффициенту a_0. Умножить α на b_0 и, прибавляя произведение αb_0 к a_1, получить коэффициент b_1 и написать его во второй строчке под a_1. Умножить α на b_1 и, прибавляя произведение αb_1 к a_2, получить коэффициент b_2 и написать его во второй строчке под a_2. Продолжая этот процесс, получить коэффициент b_{n-1} и написать его во второй строчке под a_{n-1}. Умножить, наконец, α на b_{n-1} и, прибавляя произведение αb_{n-1} к a_n, получить остаток r и написать его во второй строке под a_n.

Это правило записывается в виде следующей таблицы, которая называется *схемой Горнера*:

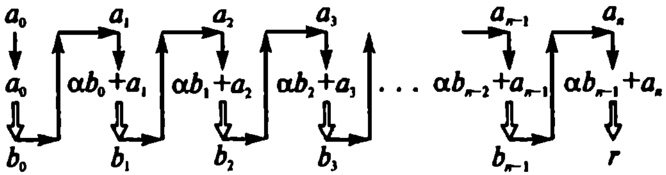


Схема Горнера позволяет легко разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x - \alpha$, т.е. найти коэффициенты частного $q(x)$ и остаток r.

П р и м е р. Применяя схему Горнера, найдем частное $q(x)$ и остаток r при делении многочлена $P(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3$ на многочлен $T(x) = x - 3$.

Схема Горнера имеет вид:

2	-1	-3	0	1	-3
2	$3 \cdot 2+(-1)$	$3 \cdot 5+(-3)$	$3 \cdot 12+0$	$3 \cdot 36+1$	$3 \cdot 109+(-3)$
2	5	12	36	109	324

Таким образом, $2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3 = (x - 3)(2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109) + 324$.

Т е о р е м а 6 (теорема Безу). *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - \alpha)$ равен значению многочлена $P(x)$ при $x = \alpha$, т.е. $r = P(\alpha)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставив в равенство $P(x) = (x - \alpha)q(x) + r$ вместо x значение, получим $P(x) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r$, откуда и вытекает, что $r = P(\alpha)$.

Т е о р е м а 7. *Многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $(x - \alpha)$ тогда и только тогда, когда значение многочлена при $x = \alpha$ равно нулю, т.е. $P(\alpha) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $(x - \alpha)$. Это значит, что остаток r равен нулю. По теореме Безу остаток $r = P(\alpha)$. Следовательно, $P(\alpha) = 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $P(\alpha) = 0$. С другой стороны, по теореме Безу $r = P(\alpha)$. Значит, $r = 0$, т.е. $P(x)$ делится нацело на $x - \alpha$.

Приведем несколько с л е д с т в и й из этой теоремы.

1. *Многочлен $P_n(x) = x^n - \alpha^n$ делится нацело на двучлен $(x - \alpha)$ при любом натуральном n.*

Действительно, $P_n(\alpha) = \alpha^n - \alpha^n = 0$.

2. *Многочлен $P_n(\alpha) = x^n - \alpha^n$ делится нацело на двучлен $(x + \alpha)$ при любом четном n (т.е. $n = 2m$).*

Действительно, $P_{2m}(-\alpha) = (-\alpha)^{2m} - \alpha^{2m} = 0$.

3. *Многочлен* $P_n(x) = x^n + \alpha^n$ *делится нацело на двучлен* $(x + \alpha)$ *при любом нечетном* n (*т.е.* $n = 2m + 1$).

Действительно, $P_{2m+1}(-\alpha) = (-\alpha)^{2m+1} + \alpha^{2m+1} = 0$. Приведем пример на применение этих следствий.

Требуется доказать, что при любом четном натуральном n число $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$ делится на 19. Так как $n = 2m$, где $m \in N$, то воспользуемся формулами сокращенного умножения:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^{2m} - 1) + (16^{2m} - 3^{2m}) =$$
$$= (20^m - 1)(20^m + 1) + (16^m + 3^m)(16^m - 3^m). \quad (4)$$

В первом слагаемом первый сомножитель при любом $m \in N$ делится без остатка на число $(20 - 1)$, т.е. на 19. Во втором слагаемом первый сомножитель при $m = 2k + 1$, $k \in N$, делится без остатка на число $(16 + 3)$, т.е. 19. При $m = 2k$ второй сомножитель можно представить в виде произведения сомножителей $(16^k + 3^k)(16^k - 3^k)$. Если k нечетно, то разложение второго слагаемого на сомножители заканчивается. Если же k четно, то разложение продолжается. Через конечное число шагов, не превышающее $(n - 1)$, разложение будет закончено и один из сомножителей этого разложения будет иметь вид $16^s + 3^s$, где s — нечетное число. Тогда этот сомножитель делится на 19. Таким образом, и первое и второе слагаемые в равенстве (4) при любом $m \in N$ делятся на 19, значит, и $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$ делится на 19 при любом четном натуральном n.

Корни многочлена. Число α называется *корнем* многочлена $P(x)$, если $P(\alpha) = 0$. Переформулируем теорему 7, используя определение корня многочлена.

Теорема 8. *Число* α *является корнем многочлена* $P(x)$ *тогда и только тогда, когда многочлен* $P(x)$ *делится нацело на двучлен* $x - \alpha$.

Докажем теорему о нахождении целых корней многочлена.

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена степени* n, *где* $n \geq 1$, — *целые числа и корень* α *этого многочлена* —

также целое число, то число α — делитель свободного члена многочлена.

Доказательство. Пусть дан многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

степени n, где $n \geq 1$, и пусть α — корень этого многочлена. Разделим с остатком многочлен $P_n(x)$ на двучлен $(x - \alpha)$, тогда частное есть многочлен $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ...$ $... + b_{n-1}$, а остаток — число r. Как показано выше, если все коэффициенты многочлена $P_n(x)$ и α — целые числа, то числа b_0, b_1, ..., b_{n-1} и r — также целые числа. По схеме Горнера $r = a_n + \alpha b_{n-1}$, а по теореме 8, если α — корень многочлена, то $r = 0$. Поэтому имеем равенство $a_n+\alpha b_{n-1} =$ $= 0$, откуда $a_n = \alpha(- b_{n-1})$. Так как a_n, α, $(- b_{n-1})$ — целые числа, то отсюда вытекает, что α — делитель числа a_n, и теорема доказана.

Следствие. *Целыми корнями многочлена с целыми коэффициентами могут быть лишь делители свободного члена многочлена.*

Это следствие позволяет находить все целые корни многочлена с целыми коэффициентами, применяя схему Горнера.

Пример. Выяснить, имеет ли целые корни многочлен

$$P_4(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x + 5. \tag{5}$$

Делители свободного члена: 1, — 1, 5, — 5. Найдем значение многочлена в этих точках:

$$P_4(1) = 1 + 2 - 2 - 6 + 5 = 0,$$
$$P_4(-1) = 1 - 2 - 2 + 6 + 5 = 8 \neq 0,$$
$$P_4(5) = 625 + 250 - 50 - 30 + 5 = 800 \neq 0,$$
$$P_4(-5) = 625 - 250 - 50 + 30 + 5 = 360 \neq 0.$$

Итак, многочлен (5) имеет целый корень $x_1 = 1$, а числа 5, — 5 и — 1 не являются его корнями. Применив схему Горнера, разложим многочлен (5) на множители. Схема Горнера имеет вид:

1	2	−2	−6	5
1	$1\cdot 1+2$	$1\cdot 3+(-2)$	$1\cdot 1+(-6)$	$1\cdot(-5)+5$
1	3	1	−5	0

Следовательно, $x^4+2x^3+2x^2-6x+5=(x-1)(x^3+3x^2+$
$+x-5)$.

Теперь будем искать корни многочлена $P_3(x)=x^3+3x^2+$
$+x-5$. Делители его свободного члена: 1, — 1, 5, — 5. Нет необходимости искать значение многочлена $P_3(x)$ в точках — 1, 5, — 5, так как эти числа заведомо не являются корнями многочлена $P_4(x)$, а значит, и многочлена $P_3(x)$ в силу того, что многочлен $P_4(x)$ в них не обращается в нуль. Поэтому проверим только число 1:

$$P_3(x)=1+3+1-5=0.$$

Применив опять схему Горнера:

1	3	1	−5
1	$1\cdot 1+3$	$1\cdot 4+1$	$1\cdot 5+(-5)$
1	4	5	0

получим $P_3(x)=(x-1)(x^2+4x+5)$, а потому многочлен $P_4(x)$ можно записать так: $P_4(x)=(x-1)^2(x^2+4x+5)$.

Так как квадратный трехчлен x^2+4x+5 целых корней не имеет, то следовательно многочлен $P_4(x)$ имеет два целых корня $x_1=1$, $x_2=1$. В таких случаях целесообразно ввести понятие кратности корня. Если многочлен $P_n(x)$ делится нацело на $(x-\alpha)^k$, где k — некоторое фиксированное натуральное число, но не делится нацело на $(x-\alpha)^{k+1}$, то число α называется корнем кратности k многочлена $P_n(x)$. Корни кратности единица называются простыми корнями многочлена. Таким образом, многочлен $P_4(x)$ в вышеприведенном примере (5) имеет один корень $x=1$ кратности два.

Замечание. Если найден один корень $x_1 = \alpha$ многочлена $P(x)$, то этот многочлен можно записать в виде $P(x) = (x - \alpha)q(x)$, где коэффициенты многочлена $q(x)$ легко вычисляются по схеме Горнера. Чтобы найти другие корни многочлена $P(x)$, следует найти корни многочлена $q(x)$. Важно отметить, что многочлен $q(x)$ может иметь корнем то же число α, которое находится также по схеме Горнера.

Если не искать корни многочлена $q(x)$, а отыскивать корни многочлена $P(x)$, то корень, который уже найден, во второй раз этим же способом не будет обнаружен. Поэтому после нахождения одного корня надо искать корни частного, т.е. корни многочлена $q(x)$.

Теорема 10. *Если многочлен*

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом, равным единице, имеет рациональный корень, то этот корень — целое число.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проведем методом от противного. Предположим, что многочлен $P_n(x)$ имеет корень $\alpha = p/q$, где p и q — взаимно простые целые числа. Так как число p/q — корень многочлена $P_n(x)$, то справедливо числовое равенство

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0,$$

которое можно записать в равносильной форме

$$\frac{p^n}{q^n} = -\left(a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n\right).$$

Умножая это равенство на q^{n-1} получим равносильное равенство

$$\frac{p^n}{q} = -a_1p^{n-1} - a_2p^{n-2}q - \ldots - a_{n-1}pq^{n-2} - a_nq^{n-1}.$$

Так как числа p и q — взаимно простые, то число $\frac{p^n}{q}$ — не целое, а справа в последнем равенстве стоит целое число. Такое равенство не возможно, значит, предположение неверно, а верна теорема.

Следствие. *Если у многочлена все коэффициенты — целые числа, а старший коэффициент равен единице, то все рациональные корни этого многочлена — целые числа.*

Рассмотрим многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами и многочлен

$$Q_n(x) = a_0^{n-1}P_n(x) = (a_0x)^n + a_1(a_0x)^{n-1} + \ldots + a_na_0^{n-1}.$$

Ясно, что многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ имеют одинаковые корни. Обозначим $y = a_0x$, тогда

$$Q_n(x) = T_n(y) = y^n + a_1y^{n-1} + a_2a_0y^{n-2} + a_3a_0^2y^{n-3} + \ldots + a_na_0^{n-1}.$$

Многочлен $T_n(y)$ имеет по теореме 10 только целые корни, которые можно найти. Пусть это будут числа $y_1, y_2, \ldots, y_m$, тогда числа $x_k = y_k/a_0$, где $k \in \{1; 2; \ldots; m\}$, и только они будут рациональными корнями многочлена $P_n(x)$. Итак, у любого многочлена с целыми коэффициентами можно найти все его рациональные корни.

Если коэффициенты многочлена — рациональные числа, то после приведения их к общему знаменателю можно искать лишь корни числителя, который есть многочлен с целыми коэффициентами.

Пример. Найти корни многочлена $P_3(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$. Рассмотрим многочлен $Q_3(x) = 8P_3(x) = (2x)^3 + (2x)^2 - 2x - 1$ или $T_3(t) = t^3 + t^2 - t - 1$, где $t = 2x$. Делители свободного члена многочлена $T_3(t)$: $+1$, -1. Найдем значение многочлена $T_3(t)$ в этих точках:

$$T_3(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0,$$
$$T_3(-1) = -1 + 1 + 1 - 1 = 0.$$

Применив схему Горнера, получим $T_3(t) = (t - 1)(t^2 + 2t + 1)$. Многочлен $(t^2 + 2t + 1)$ есть полный квадрат бинома $(t + 1)$. Следовательно, многочлен $T_3(t)$ имеет три корня: $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = -1$, а многочлен $P_3(x)$ — соответственно три корня: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, или два различных корня; один простой корень $x_1 = \frac{1}{2}$ и другой корень $x_2 = -\frac{1}{2}$ кратности два.

В заключение остановимся на корнях двучлена $P_n(x) = x^n - a$. Как следует из § 5 предыдущей главы, при четном n двучлен $P_n(x)$ имеет: если $a > 0$, то два корня: $\sqrt[n]{a}$ и $-\sqrt[n]{a}$; если $a = 0$, то один корень 0; если $a < 0$, то не имеет корней. Если n — нечетное число, то двучлен $P_n(x)$ имеет: если $a \geq 0$ — один корень $\sqrt[n]{a}$, если $a < 0$ — один корень $(-\sqrt[n]{|a|})$. Например, двучлен $x^3 + 11$ имеет один корень $(-\sqrt[3]{11})$.

§ 6. Метод математической индукции

Существует очень много утверждений, зависящий от натурального числа n. Как понимать такие утверждения?

Поскольку натуральных чисел бесконечно много, то на самом деле каждое такое утверждение содержит в себе бесконечно много утверждений. Например, утверждение — сумма n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$ — содержит в себе следующие утверждения:

для $n = 1$: первое натуральное число, т.е. число единица, равно $\frac{1(1+1)}{2}$;

для $n = 2$: сумма двух первых натуральных чисел, т.е. сумма чисел единица и два, равна $\frac{2(2+1)}{2}$;

для $n = 3$: сумма трех первых натуральных чисел, т.е. сумма чисел единица, два и три, равна $\frac{3(3+1)}{2}$;

. . . .

для $n = 10000$: сумма десяти тысяч первых натуральных чисел равна $\frac{10\,000(10\,000+1)}{2}$ и т.д.,

т.е. рассматриваемое утверждение действительно содержит бесконечно много утверждений.

Аналогично и любое другое утверждение, зависящее от натурального числа n, на самом деле есть простая форма записи бесконечного числа утверждений.

Возникает вопрос, а как убедиться в справедливости утверждения, зависящего от натурального числа?

Для доказательства утверждений, зависящих от натурального числа n, часто применяется общий метод доказательства — *метод математической индукции*. Этот метод основан на аксиомах натуральных чисел. Но поскольку ранее эти аксиомы не приводились, то метод полной математической индукции принимается здесь без доказательства.

Для доказательства некоторого утверждения, зависящего от натурального числа n, делается следующее:

1. Проверяется справедливость этого утверждения для $n = 1$.

2. Предполагается справедливость этого утверждения для $n = k$.

3. Доказывается справедливость этого утверждения для $n = k + 1$ с учетом предполагаемой справедливости его для $n = k$.

После чего делается вывод, что утверждение справедливо для любого натурального числа n.

Пользуясь этим методом, докажем, что для любого натурального числа n справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Проверяем справедливость равенства (1) для $n = 1$. Для $n = 1$ оно запишется так: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, и очевидно, что это равенство верное. Предположим, что равенство (1) справедливо для $n = k$, т.е. предположим, что справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \qquad (2)$$

Используя равенство (2), докажем, что равенство (1) справедливо для $n = k + 1$, т.е. докажем справедливость равенства

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}. \qquad (3)$$

Действительно, рассмотрим сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1)$. Используя сначала свойство ассоциативности сложения, затем равенство (2) и делая простейшие преобразования, получаем

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1) = (1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k + 1) =$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

т.е. получаем справедливость равенства (3). На основании метода полной математической индукции делаем вывод, что равенство (1) справедливо для любого натурального числа n.

Рассмотрим еще пример. Докажем, что для любого натурального числа n справедливо равенство

$$n \le 2^{n-1}. \qquad (4)$$

Доказательство. Для $n = 1$ неравенство (4) превращается в верное числовое неравенство $1 \le 2^{1-1}$. Предположим, что неравенство (4) справедливо для $n = k$, т.е. предположим справедливость неравенства

$$k \le 2^{k-1}. \qquad (5)$$

Используя неравенство (5), докажем справедливость неравенства (4) для $n = k + 1$, т.е. докажем справедливость неравенства

$$(k + 1) \le 2^{(k+1)-1}. \qquad (6)$$

Действительно, очевидно, что $k+1 \le 2k$. Отсюда, используя неравенство (5) и свойство транзитивности неравенств, получим, что $k+1 \le 2 \cdot 2^{k-1}$. Правая часть последнего неравенства может быть записана в виде $2^{(k+1)-1}$, откуда и следует справедливость неравенства (6). На основании метода полной математической индукции делаем вывод, что неравенство (4) справедливо для любого натурального числа n.

Обобщенный метод полной математической индукции. Часто метод полной математической индукции применяется к доказательству утверждений, справедливых не для всех натуральных чисел n, а лишь для n, больших или равных некоторого натурального числа p. Тогда формулировка сути метода полной математической индукции остается почти такой же, но с заменой пункта 1 на пункт 1а): «Проверяется справедливость этого утверждения для $n = p$». В этом случае для доказательства справедливости утверждения для любого натурального n ($n \ge p$) делается следующее:

1. Проверяется справедливость утверждения для $n = p$.

2. Предполагается справедливость этого утверждения для $n = k$, (где $k \ge p$).

3. Доказывается справедливость этого утверждения для $n = k + 1$ с учетом его справедливости для $n = k$. После этого делается вывод, что утверждение справедливо для любого натурального $n \ge p$.

Приведем пример доказательства неравенства с помощью обобщенного метода полной математической индукции: докажем, что если α — фиксированное число такое, что $\alpha > -1$ и $\alpha \ne 0$, то для любого натурального $n \ge 2$ справедливо *неравенство Бернулли*

$$(1+\alpha)^n > 1 + \alpha n. \tag{7}$$

Действительно, при $n = 2$ неравенство (7) имеет вид

$$(1+\alpha)^2 > 1 + 2\alpha. \tag{8}$$

Неравенство (8) равносильно неравенству

$$\alpha^2 > 0. \qquad (9)$$

Неравенство (9) при $\alpha \neq 0$ очевидно. Следовательно, неравенство (8) справедливо для рассматриваемых α. Предположим, что для рассматриваемых α при $n = k$ ($k \geq 2$) неравенство (7) справедливо, т.е.

$$(1 + \alpha)^k > 1 + \alpha k. \qquad (10)$$

Докажем, используя неравенство (10), справедливость неравенства (7) для $n = k + 1$, т.е. докажем неравенство

$$(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + \alpha(k + 1). \qquad (11)$$

Для доказательства умножим обе части неравенства (10) на положительное число $(1 + \alpha)$ (так как $\alpha > -1$, то $1 + \alpha > 0$). Получим неравенство

$$(1 + \alpha)^{k+1} > (1 + \alpha k)(1 + \alpha), \qquad (12)$$

равносильное неравенству (10), т.е. получим, что неравенство (12) справедливо.

Докажем теперь справедливость неравенства

$$(1 + \alpha k)(1 + \alpha) > 1 + \alpha(k + 1). \qquad (13)$$

Перенеся все члены неравенства (13) в одну сторону, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим равносильное неравенство $\alpha^2 k > 0$, которое справедливо, так как $\alpha \neq 0$ и $k \geq 2$. Следовательно, неравенство (13) справедливо, но тогда, используя справедливость неравенств (12), (13) и свойство транзитивности неравенств, получим, что справедливо и неравенство (11). Таким образом, неравенство Бернулли доказано для любого натурального $n \geq 2$.

Это неравенство имеет смысл запомнить, так как с его помощью можно доказать справедливость многих других неравенств, например, справедливость для любого натурального n неравенства

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \qquad (14)$$

Действительно, сделав несложные преобразования, получим цепочку равносильных неравенств:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n}>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1}\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n>1 \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n>1. \quad (15)$$

Для доказательства неравенства (15) для $n \geq 2$ к выражению $\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n$, считая $\alpha=-\frac{1}{(n+1)^2}$, применим неравенство Бернулли (7). Получим

$$\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n>1-\frac{n}{(n+1)^2}.$$

Умножая обе части этого неравенства на положительное число $\frac{n+2}{n+1}$, получим

$$\frac{n+2}{n+1}\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n>\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right).$$

Поскольку

$$\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1,$$

то, используя свойство транзитивности неравенств, имеем

$$\frac{n+2}{n+1}\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n>\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)>1.$$

Таким образом, неравенство (15) доказано.

Так как неравенство (15) равносильно неравенству (14), то и неравенство (14) справедливо для $n \geq 2$. Поскольку при $n=1$ оно очевидно, то справедливость неравенства (14) доказано для любого натурального n.

Решение задач на делимость. Метод математической индукции применяется также и для решения задач на делимость.

Докажем, например, что для любого натурального числа n число $N(n) = n^3 + 5n$ делится на 6.

Доказательство. Для $n = 1$ число $N(1) = 6$, и потому $N(1)$ делится на 6, т.е. утверждение справедливо, если $n = 1$. Предположим, что утверждение справедливо для $n = k$, т.е. предположим, что число $N(k) = (k^3 + 5k)$ делится на 6. Используя то, что число $N(k)$ делится на 6, докажем справедливость утверждения для $n = k + 1$, т.е. докажем, что число $N(k + 1) = [(k + 1)^3 + 5(k + 1)]$ делится на 6.

Действительно, используя свойства коммутативности и ассоциативности действий над числами и алгебраическими выражениями, имеем

$$N(k + 1) = [(k + 1)^3 + 5(k + 1)] = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 +$$
$$+ 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 6 + 3k^2 + 3k = N(k) + 6 + 3k(k + 1).$$

Поскольку k и $k + 1$ — два рядом стоящих натуральных числа, то одно из них четное, поэтому число $3k(k + 1)$ делится на 6. Учитывая, что число $N(k)$ делится на 6 и число 6 делится на 6, получаем, что число $N(k + 1)$ также делится на 6. На основании метода полной математической индукции делаем вывод, что число $N(n) = n^3 + 5n$ делится на 6 для любого натурального числа n.

Рассмотрим решение более сложной задачи на делимость, когда метод полной математической индукции приходится применять несколько раз.

Требуется доказать, что при любом натуральном n число $(3^{2^n} - 1)$ не делится нацело на число 2^{n+3}.

При $n = 1$ утверждение очевидно, так как 8 не делится на 16. Предположим теперь, что утверждение справедливо при $n = k$, т.е. число $(3^{2^k} - 1)$ не делится нацело на число 2^{k+3}. Докажем тогда, что число $(3^{2^{k+1}} - 1)$ не делится нацело на число 2^{k+4}, т.е., что утверждение справедливо при

$n = k + 1$. Представим выражение $(3^{2^{k+1}} - 1)$ в виде произведения:

$$(3^{2^{k+1}} - 1) = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1).$$

По предположению первый сомножитель произведения не делится нацело на число 2^{k+3}, т.е. в представлении составного числа $(3^{2^k} - 1)$ в виде произведения простых чисел число два повторяется не более, чем $(k + 2)$ раза. Таким образом, чтобы доказать, что число $(3^{2^{k+1}} - 1)$ не делится нацело на число 2^{k+4}, надо доказать, что число $(3^{2^k} + 1)$ не делится на 4.

Для доказательства этого утверждения докажем вспомогательное утверждение: для любого натурального n число $(3^{2n} + 1)$ не делится на 4. Для $n = 1$ это утверждение очевидно, так как 10 не делится на 4 без остатка. При предположении, что $(3^{2k} + 1)$ не делится на 4, докажем, что и $(3^{2(k+1)} + 1)$ не делится на 4. Представим последнее выражение в виде суммы $(3^{2(k+1)} + 1) = (3^{2k} + 1) + 8 \cdot 3^{2k}$. Второе слагаемое суммы делится на 4 нацело, а первое не делится. Следовательно, вся сумма не делится на 4 без остатка. Вспомогательное утверждение доказано.

Теперь ясно, что $(3^{2^k} + 1)$ не делится на 4, так как число 2^k является четным числом. Окончательно получаем на основании метода полной математической индукции, что число $(3^{2^n} - 1)$ не делится нацело на число 2^{n+3} ни при каком натуральном n.

В заключение докажем методом математической индукции два утверждения, приведенные выше (§§ 2, 3 гл. II). В § 3 была приведена формула бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n. \tag{16}$$

Здесь C_n^m — биномиальные коэффициенты, вычисляемые по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$.

Докажем равенство (16).

Для $n=1$ формула (16) запишется в виде $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$. Учитывая правило для вычисления биномиальных коэффициентов, перепишем эту формулу в виде $(a+b)^1 = a^1 + b^1$, т.е. убеждаемся в справедливости формулы (16) для $n=1$. Предположим, что формула (16) справедлива для $n=k$, т.е. предположим, что справедлива формула

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^{l-1} a^{k-(l-1)} b^{l-1} + \\ + C_k^l a^{k-l} b^l + C_k^{l+1} a^{k-(l+1)} b^{l+1} + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k. \tag{17}$$

Докажем, используя справедливость формулы (17), что формула (16) верна для $n=k+1$, т.е. докажем справедливость формулы

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^{(k+1)-1} b + \ldots \\ \ldots + C_{k+1}^l a^{(k+1)-l} b^l + C_{k+1}^{l+1} a^{(k+1)-(l+1)} b^{l+1} + \ldots \\ \ldots + C_{k+1}^{(k+1)-1} a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}. \tag{18}$$

Действительно, используя сначала свойства степени с натуральным показателем, затем формулу (17), затем правило перемножения многочленов, получим

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = \\ = (a+b)(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots \\ \ldots + C_k^{l-1} a^{k-(l-1)} b^{l-1} + C_k^l a^{k-l} b^l + C_k^{l+1} a^{k-(l+1)} b^{l+1} + \ldots \\ \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k) = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots \\ \ldots + C_k^{l-1} a^{k-l+2} b^{l-1} + C_k^l a^{k-l+1} b^l + C_k^{l+1} a^{k-l} b^{l+1} + \ldots \\ \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \ldots \\ \ldots + C_k^{l-1} a^{k-l+1} b^l + C_k^l a^{k-l} b^{l+1} + C_k^{l+1} a^{k-l-1} b^{l+2} + \ldots \\ \ldots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1}. \tag{19}$$

Приводя в этой сумме подобные члены, получим, что

$$(a+b)^{k+1}=C_k^0a^{k+1}+(C_k^1+C_k^0)a^kb+(C_k^l+C_k^{l-1})a^{k-1}b^2+\ldots$$
$$\ldots+(C_k^{l+1}+C_k^l)a^{k-l+1}b^l+(C_k^{k-1}+C_k^{k-2})a^{k-l}b^{l+1}+\ldots$$
$$\ldots+(C_k^1+C_k^1)a^2b^{k-1}+(C_k^k+C_k^{k-1})ab^k+C_k^kb^{k+1}. \quad (20)$$

Так как коэффициент C_n^k есть число сочетаний из n элементов по k элементов (см. § 7 гл. I), то

$$C_n^{m+1}+C_n^m=C_{n+1}^{m+1}.$$

Пользуясь этим равенством, а также очевидными равенствами $C_k^0=1=C_{k+1}^0$ и $C_k^k=1=C_{k+1}^{k+1}$, из справедливости формулы (20) получим справедливость формулы (18). На основании метода полной математической индукции делаем вывод, что формула бинома Ньютона (16) справедлива для любого натурального числа n.

В § 2 было приведено равенство алгебраических выражений

$$(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\ldots+AB^{n-2}+B^{n-1})=$$
$$=A^n-B^n. \quad (21)$$

Для доказательства этого равенства при $n\geq 2$ воспользуемся обобщенным методом полной математической индукции.

При $n=2$ имеем следующую цепочку равенств: $(A-B)\times\times(A+B)=A^2+AB-BA-B^2=A^2-B^2$, т.е. равенство (21) верно.

Предположим, что при $n=k$ $(k\geq 2)$ равенство (21) справедливо, т.е. справедливо равенство

$$(A-B)(A^{k-1}+A^{k-2}B+A^{k-3}B^2+\ldots+AB^{k-2}+B^{k-1})=$$
$$=A^k-B^k. \quad (22)$$

Докажем, используя равенство (22), справедливость равенства (21) для $n=k+1$, т.е. докажем равенство

$$(A-B)(A^k+A^{k-1}B+A^{k-2}B^2+\ldots+AB^{k-1}+B^k)=$$
$$=A^{k+1}-B^{k+1}. \quad (23)$$

Действительно, используя свойства действий над алгебраическими выражениями и равенство (22), имеем цепочку тождественных равенств

$$(A-B)(A^k+A^{k-1}B+A^{k-2}B^2+\ldots+AB^{k-1}+B^k)=$$
$$=(A-B)(A^k+A^{k-1}B+A^{k-2}B^2+\ldots+AB^{k-1})+$$
$$+(A-B)B^k=(A-B)(A^{k-1}+A^{k-2}B+A^{k-3}B^2+\ldots$$
$$\ldots+B^{k-1})A+(A-B)B^k=(A^k-B^k)A+(A-B)B^k=$$
$$=A^{k+1}-B^kA+AB^k-B^{k+1}=A^{k+1}-B^{k+1}.$$

Тем самым равенство (23) доказано, а значит, доказано и равенство (21) для любого натурального $n\geq 2$.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти числовое значение следующего алгебраического выражения при $a=-0{,}1$ (1 — 5):

1. $\dfrac{a^2-2a+1}{a-3}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right].$
2. $\left(\dfrac{2}{2a-1}+\dfrac{6}{1-4a^2}-\dfrac{4}{2a+1}\right):\left(1-\dfrac{4a^2+1}{4a^2-1}\right).$
3. $\left(\dfrac{a-2}{a^3+1}+\dfrac{1}{a^3-a^2+a}\right)\cdot\dfrac{a^3-a}{a^2+1}+\dfrac{2}{a^3+a^2+a+1}.$
4. $\left\{\left[\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2-\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2\right]:\dfrac{8a^3+8a}{a^3+a^2-a-1}+\dfrac{1}{a+1}\right\}\cdot(1-a^2).$
5. $\left(\dfrac{a^2-2a+4}{4a^2-1}\cdot\dfrac{2a^2-a}{a^3+8}-\dfrac{a+2}{2a^2+a}\right):\dfrac{4}{a^2+2a}-\dfrac{a+4}{3-6a}.$

Найти числовое значение следующего алгебраического выражения при $a=1$ и $b=-2$ (6 — 10):

6. $\dfrac{a^2(a+b^2)(a^3-b^3)(a^2-b)}{(a^2+b^2)(2a-3b^2)}.$ 7. $\dfrac{a^3+b(b^2+3a)-1}{a(a-b+1)+b(b+1)}.$
8. $\dfrac{a^4+64}{b(a+2)^2-4(a-b)-a^2-8}.$
9. $\dfrac{3}{2}\left\{4b-b\left[a-b:\left(\dfrac{b-2a}{b+4a}-a\right)\right]\right\}+10.$
10. $\dfrac{b}{2}\left\{ab^2-2\left[\dfrac{4{,}75(2a^2+4b)-b^2}{a^2b^4+0{,}3(b^4-6a)}-3a(4-b)\right]\right\}-10b.$

Найти числовое значение следующего алгебраического выражения при $m = 10$, $n = 4$ и $p = 5$ (11 — 15):

11. $$\left\{[3(n+5)]^m - p(m-1)^8 \cdot \left(\frac{p+10}{5}\right)^{m+2} + 4(3n-3)^{m-2} \cdot 3^{2p-1}\right\} : 41 \cdot \left(\frac{n+5}{3}\right)^{24}.$$

12. $$\left(m^{12} + p^{n+1} \cdot 2^{m-1} - p^{3n+1} \cdot 2^{\frac{m+n+10}{3}}\right) : [(20-4n) \cdot 5^{n+1} \cdot (2n+2)^{m-n}].$$

13. $$\frac{[2(p-4)]^{2m-1} \cdot (3p+12)^{\frac{10-n}{2}} + 15 \cdot n^{3(p-2)} \cdot (m-1)^{n+p-5}}{6^{m+5} \cdot [2(n-5)]^{p+5} + (32-4p)^{20-m}}.$$

14. $$\frac{5 \cdot 4^{3p} \cdot (2m-11)^{n+5} - 4(p-4) \cdot 3^{2m} \cdot (2n)^9}{5 \cdot 2^{2p-1} \cdot 6^{2m-1} - 7 \cdot (m-8)^{2m+9} \cdot 27^{10-n}}.$$

15. $$\frac{(m+26) \cdot (3m-12)^{20-4n} - 8 \cdot 2^n \cdot (p+n)^4 - 3^{n+1} \cdot (m-4)^p}{(2n+4m-22)^{p-2}}.$$

Найти числовое значение следующего алгебраического выражения при $a = -\sqrt{3}$, $b = 1$, $c = 3$, $x = -\frac{3}{2}$ (16 — 20):

16. $$\frac{x^2}{ab} + \frac{(x-a)^2}{a(a-b)} - \frac{(x-b)^2}{b(a-b)} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ac} + \frac{a-b}{ab}.$$

17. $$\frac{1}{2(x-a)} - \frac{1}{2(x+a)} + \frac{4}{a^2-x^2} + \left(\frac{x^2}{a^2b^2} : \frac{c^3x}{ab^3}\right) \cdot \frac{a^4}{xb} \cdot \frac{c^3}{a^3}.$$

18. $$\frac{a^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x^3-x}{a^3+2a^2} + \frac{3ab^2}{5b^3c} \cdot \frac{15b^2c^2}{9a^2b} - \frac{3b}{(b+1)^2} + \frac{2}{b+1}.$$

19. $$\left[\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}\right] : \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{3x^3+x}.$$

20. $$\left\{\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + 3\right] : \left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + c\right]\right\} : \frac{a^c+1}{a^3-1} - \frac{2a}{a-1} + \frac{x-3}{x+c}.$$

Найти ОДЗ следующего алгебраического выражения (21 — 25):

21. $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

22. $$\left(\frac{2}{2a-b} + \frac{6b}{b^2-4a^2} - \frac{4}{(2a+b)}\right) : \frac{a^2}{4a^2-b^2}.$$

23. $\dfrac{a^2-2a+1}{a-3}:\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2-a}\right]$.

24. $\left[\left(\dfrac{a}{m(b-c)}+\dfrac{b}{n(a-c)}\right):\dfrac{9a^2-b^2}{ab(m-c)}\right]:\dfrac{m-4}{(m-2)(a+1)}$.

25. $\left[\dfrac{a+t}{(a-t)^2}-\dfrac{2a}{a^2-t^2}+\dfrac{a-t}{(t+a)^2}\right]:\dfrac{ab^3t^2}{a^4-t^4}-\dfrac{bt^2}{t^2-a^2}$.

Найти ОДЗ двух следующих алгебраических выражений (26 — 30):

26. $\dfrac{4a^2+12a+9}{2a^2-a-6}:\dfrac{a^2+6a+3}{a^2+a-6}$ и $\dfrac{2a+3}{a+3}$.

27. $\dfrac{2a}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{ab(b+2)}$ и $\dfrac{a^2-2a}{a^2(a+1)^2-1}$.

28. $\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}\right)$ и $\dfrac{1}{a^2-c^2}+\dfrac{b}{b-2bc}$.

29. $\dfrac{c-b}{bc}:\dfrac{b^2-c^2}{a^2-1}$ и $\dfrac{b+1}{(m-a)(b+1)}+\dfrac{1}{bcm}$.

30. $\left[\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2+4\right]:\left[\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2+4\right]:\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$ и $\dfrac{x+a}{2x+a}:\dfrac{ax+a^2}{4x^2-a^2}$.

Найти ОДЗ следующего алгебраического выражения и упростить это выражение на его ОДЗ (31 — 40):

31. $(3a^2x+a^2x-18a^2x):\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{2}+x-\dfrac{2x}{3}\right)$.

32. $(2x^2yx^5y^7\cdot 6x^2y^2):(-3x^4y\cdot 4x^5y^9xy)$.

33. $[3a^4b^7x^3\cdot 5a^3bx\cdot(-6a^3x^2)]:(15ax\cdot 2yxa\cdot 7ayx)$.

34. $\dfrac{2x^2y}{3yz}\cdot\dfrac{5z^2x}{7xy^2}:\dfrac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$.

35. $\left(\dfrac{8a^2b}{12b^2c}:\dfrac{abc}{a^3b^2c}\right):\dfrac{15a^2b^2c}{3abc}$.

36. $\left[\left(\dfrac{y^2b^2}{a^2x}:\dfrac{ya}{b}\right):\dfrac{ab^4}{x^3y}\right]:\dfrac{b^2}{a^2}$.

37. $\left(\dfrac{a^2-5a+6}{a^2+5a+4}:\dfrac{a^2-4a+3}{2a^2+3a+1}\right)\cdot\dfrac{a^2+3a-4}{2a^2-3a-2}$.

38. $\dfrac{b^2-100}{a^2-b^2}:\dfrac{b+10}{a-b}+\dfrac{a-b}{a^2+2ab+b^2}\cdot\dfrac{b^2+ab}{b^2-ab}$.

39. $\left[\dfrac{c^3-8}{c+a}:\left(\dfrac{c-2}{4c}\cdot\dfrac{8c^3}{c^2+ac}\right)\right]:\dfrac{c^2+2c+4}{2b(a-c)}$.

40. $\left(\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-4ab-21b^2}\cdot\dfrac{a^2+2ab-3b^2}{a^3-b^3}\right):\dfrac{1}{a-7b}+\dfrac{a^2-t^2}{5a^3c^3}$;

$$:\left(\frac{a+l}{10a^4}\cdot\frac{2a-2l}{ac^4}\right).$$

Упростить следующее алгебраическое выражение (41 — 65):

41. $3(x-2)-2(x-1)$.

42. $18-5(x+2)-3(x+1)$.

43. $6(x-2)-13(x-3)-2x+4$.

44. $3(x-4)-4(x-3)-5(x-2)-9(8-x)+20$.

45. $2x-5[7-(x-6)+3x]-21$.

46. $1-x+2\{3-2[x+2(x-2)]-x\}$.

47. $2+3[x-4(1-x)]-x-\{(x-1)-3[x+2(x-1)]-2x\}$.

48. $\frac{x}{3}+1\frac{1}{2}-\frac{2x}{9}+\frac{x}{6}-4x$.

49. $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}(x-1)$.

50. $3+\frac{x}{4}-\frac{1}{3}\left(4-\frac{x}{3}\right)-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-11\right)$.

51. $\frac{0{,}75-x}{3}-\frac{2x+4}{1{,}5}-x-4\frac{1}{3}$.

52. $0{,}5x-3+\frac{0{,}25-3x}{4\frac{1}{4}}-1\frac{1}{2}x$.

53. $\frac{3x+5}{3}+4\frac{1}{6}-0{,}1\left(\frac{7x}{2}+8\right)$.

54. $\frac{7x+2}{2}-1{,}5-\frac{4x-1}{3}-\frac{0{,}75x}{6}$.

55. $5\frac{1}{2}+0{,}5x-\frac{3x}{4}+2(x+0{,}(3)-1)$.

56. $\frac{8}{3}\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x}{12}\right)-0{,}5\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5x}{6}-\frac{x}{12}+\frac{x}{9}\right)+2\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{12}\right)\right]$.

57. $a-\{2a-[3b-2(4c-2a)]-3(b-c)\}$.

58. $2x-4[5x-(11y-3x)]-3[5y-2(3x-6y)]$.

59. $3y-\{16y-2[3x-2(x-12y)-5x]+x\}$.

60. $-2[a-2(b-a)]-3[b-4(2a-3b)]+2a$.

61. $6\{2a-3[b-2(c+a)]-3b\}-4\{b-2[a-4(c-a)-2c]+3a\}$.

62. $0{,}5a-\frac{1}{2}\left(\frac{2b}{3}-0{,}5a\right)-\left\{a-\left[1\frac{1}{2}a-\left(\frac{b}{3}-0{,}25a\right)\right]-\left(\frac{2a}{3}-\frac{b}{4}\right)\right\}$.

63. $\frac{1}{4}[c-4(b-c)-2b]-1\frac{1}{2}\left\{0{,}5\left(b-\frac{c}{3}\right)-\frac{2}{3}\left[2c-0{,}75\left(b-\frac{4c}{5}\right)\right]\right\}$.

64. $\frac{1}{8}\left(\frac{2a}{5}-\frac{4b}{15}\right)-2\left[0{,}4\left(\frac{5a}{4}-\frac{a}{6}-\frac{b}{10}\right)-0{,}2\left(b-\frac{a}{3}\right)-\frac{b-2a}{4}\right]$.

65. $0{,}2(3)+a-0{,}5\left[2\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{9}\right)-1\frac{1}{2}\left(\frac{a}{5}+0{,}(6)-\frac{b}{4}\right)\right]-\frac{a+b-1}{15}$.

Следующий многочлен разложить в произведение не менее чем двух многочленов (66 — 85):

66. $5mx+3ny-5my-3nx$. **67.** $5x+xy+5y+y^2$.

68. $ax + bx + by + cy - cx - ay$. **69.** $3a^5 - 6a^4b + 3a^3b^2$.
70. $36x^2y^2 - 100$. **71.** $25 - 49a^2b^6c^4$. **72.** $4p^2q^4 - 81z^2$.
73. $(2a - 3b)^2 - (3a - 2b)^2$. **74.** $(m + 2n)^2 - 4(3m - n)^2$.
75. $9(a - 3b)^2 - 16(b - 2a)^2$. **76.** $a^4 - c^2 + 9y^2 - 6a^2y$.
77. $c^6 - 6c^3 - c^2 - 2cx - x^2 + 9$. **78.** $a^3b^3 - 27m^3$.
79. $1 + 1000y^6$. **80.** $m^3b^6c^9 - 8k6$. **81.** $125a^3 - 343b^3$.
82. $8a^3 + (b - 2a)^3$. **83.** $64(m - n)^3 + 1$.
84. $(2a - b)^3 - (3b - a)^3$. **85.** $8(x - y)^3 + 27(y - 2x)^3$.

Следующий многочлен разложить в произведение не менее, чем четырех многочленов (**86 — 100**):

86. $25b^2 \cdot 81y^2z^2 - 121a^2 \cdot 81y^2z^2 - 25b^2 \cdot 169a^2 + 121a^2 \cdot 169a^2$.

87. $144a^2b^8 \cdot 25a^{10} - 49c^4 \cdot 25a^{10} - 144a^2b^8 + 49c^4$.

88. $125x^3 \cdot (a + b)^2 - 125x^3 \cdot (3a - 2b)^2 - 8(a + b)^2 + 8(3a - 2b)^2$.

89. $25(a - 3b)^2 - \frac{1}{4}(3a + 7b)^2 - 125z^3y^6(a - 3b)^2 + \frac{125}{4}z^3y^6(3a + 7b)^2$.

90. $16x^2 \cdot 64a^6b^6 - 225(3m - n)^2 \cdot 64a^6b^6 + 16x^2 - 225(3m - n)^2$.

91. $9(x + y)^2 \cdot 27a^6b^3 - 16(x + 2y)^2 \cdot 64a^6b^3 + 9(x + y)^2 \cdot 125m^3 - 16(x + 2y)^2 \cdot 125m^3$.

92. $2a^2y^5 + aby^5 - aby^3 - 2a^2y^3$.

93. $13x^2y^2 \cdot 3a - 39y^4 \cdot 3a - 13x^2y^2 \cdot 9a^2 + 39y^4 \cdot 9a^2$.

94. $36a^3 \cdot 49x^2 - 9ab^2 \cdot 49x^2 + 36a^3\ 7xy - 9ab^2 \cdot 7xy + 36a^3 \cdot 14x - 9ab^2 \cdot 14x$.

95. $15b \cdot 4a^2 + 45mb^2 \cdot 4a^2 + 15b \cdot 16ab + 15mb^2 \cdot 16ab$.

96. $(1 - x^2)(y^2 - m^2) + (6x - 9)(y^2 - m^2) - (1 - x^2)(2mn + n^2) - (6x - 9)(2mn + n^2)$.

97. $(25x^2 + b^2)(a^2 + 6ab) + 9(25x^2 + b^2)(b^2 - c^2) - 9(y^2 + 10xb)(b^2 - c^2) - (y^2 + 10xb)(a^2 + 6ab)$.

98. $(x + y)^4(a^3 + b^3) - a^3b^3 + (x + y)^4(a + b) - (a + b)$.

99. $(y^3 - y^2 + y)(121 - 25x^2 - 10x) - (121 - 25x^2 - 10x) - (y^3 - y^2 + y) + 1$.

100. $16(a^3 - b^3 - b)(9x^3y - 4xy^3) + 16a(9x^3y - 4xy^3)$.

Привести к общему знаменателю следующие три алгебраические дроби (**101 — 110**):

101. $\frac{1}{xy + x^2},\ \frac{1}{x^2 - y^2},\ \frac{1}{2x^2 - 2xy}$.

102. $\frac{1}{(a + b)^2},\ \frac{1}{a^3 - a^2b},\ \frac{1}{a^2 - b^2}$.

103. $\frac{1}{a^2 - 4},\ \frac{1}{a^2 + 3a + 2},\ \frac{1}{a^2 + 2a}$.

104. $\frac{1}{a^2 + a - 2},\ \frac{1}{a^2 - 4a + 3},\ \frac{1}{a^2 - 1}$.

105. $\frac{1}{20a - 4},\ \frac{1}{50a^2 + 2},\ \frac{1}{75a^2c - 3c}$.

106. $\dfrac{1}{9bx+4by}$, $\dfrac{1}{18cx+12cy}$, $\dfrac{1}{81x^2-16y^2}$.

107. $\dfrac{1}{a^2+ab}$, $\dfrac{1}{b^2+ab}$, $\dfrac{1}{a^3b-b^3a}$.

108. $\dfrac{1}{x^2-x-20}$, $\dfrac{1}{x^2-9x+20}$, $\dfrac{1}{8x-32}$.

109. $\dfrac{1}{(2a^2-3ab)^2}$, $\dfrac{1}{(4a-6b)^3}$, $\dfrac{1}{4a^2-9b^2}$.

110. $\dfrac{1}{x^3-y^3}$, $\dfrac{1}{2x^2+2xy+2y^2}$, $\dfrac{1}{ax^2-ay^2}$.

Найти ОДЗ следующего алгебраического выражения и упростить это выражение на его ОДЗ (**111 — 130**):

111. $\dfrac{a^3-a^2b-ab^2-2b^3}{a^3+3a^2b+3ab^2+2b^3}$.

112. $\dfrac{4b^4+11b^2+25}{4b^4-9b^2+30b-25}$.

113. $\dfrac{3a^2+6a}{a^2+4a+4}\cdot\dfrac{a^3-2a}{a^4-4a^2+4}$.

114. $\dfrac{b^2-5b}{b^2-4b-5}:\dfrac{5a^3b+10a^2b^2}{3a^2b^2+6ab^3}$.

115. $\left(\dfrac{x^2+y^2+xy}{x^3-y^3}:\dfrac{a^3b-2a^2b+4ab}{a^3+8}\right):\dfrac{x^2-2x+1}{3x^3+7x-10}$.

116. $\dfrac{b^2-17b+72}{b^2-25}\cdot\dfrac{b^2-1}{b^2-8b-9}:\dfrac{b^2-9b+8}{b^2+4b-5}$.

117. $\dfrac{c^2-c-20}{c^2+5c+4}\cdot\dfrac{c^2-c}{c^2+c-2}:\left(\dfrac{c^2}{c^2+3c+2}\cdot\dfrac{c^2-3c-15}{c+3}\right)$.

118. $\dfrac{6xy-14y}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x+4x^2-14}\cdot\dfrac{4x-7}{4x^2}:\dfrac{3x^2-x-14}{2x^2+4x}$.

119. $\left(\dfrac{a^2-4a-45}{a^2-14a-15}:\dfrac{a^2-12a-45}{a^2-6a-27}\right):\left(\dfrac{b^2-4}{b^2-121}\cdot\dfrac{b+11}{b+2}\right)$.

120. $\left(\dfrac{12a^3+24a^2}{14a^2-7a}:\dfrac{a^2+2a}{2a-1}\right):\left(\dfrac{16a^2-49}{4a^2+a-14}:\dfrac{2a^2-a-1}{2a^2+5a+2}\right)$.

121. $\dfrac{a}{a+2}+\dfrac{a^2+3a}{4-a^2}-\dfrac{a+1}{3a-6}$.

122. $\dfrac{6a^3+48a^2}{a^3+64}+\dfrac{a^2-4}{a+4}-\dfrac{3a^2}{a^2-4a+16}$.

123. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{3}{(x+1)(x^2+5x+6)}$.

124. $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

125. $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}-$

$$-\frac{2}{a-b}-\frac{2}{b-c}-\frac{2}{c-a}.$$

126. $\dfrac{1}{a^2+a}+\dfrac{1}{a^2+3a+2}+\dfrac{1}{a^2+5a+6}+\dfrac{1}{a^2+7a+12}$.

127. $\dfrac{a^6-b^6}{a^2-b^2}-\dfrac{a^6+b^6}{a^2+b^2}-\dfrac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a-b)}$.

128. $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)[(x-y)^2+xy]+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)[(x+y)^2-xy]$.

129. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$.

130. $\left(\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right)\cdot\dfrac{x^6-y^6}{x^2y^2}+\dfrac{x^3-y^3}{xy}$.

Найти ОДЗ двух следующих алгебраических выражений A и B и доказать, что на этой области справедливо тождественное равенство $A = B$ (131 — 160):

131. $A=\dfrac{a^2-2}{6ab}\cdot\dfrac{18b^3}{5a^4-10a^2}$, $B=\dfrac{3b^2}{5a^3}$.

132. $A=\dfrac{a^3-b^3}{a^2-2ab+b^2}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2+ab}$, $B=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a}$.

133. $A=\dfrac{a^2-16}{a^2-8a+16}:\dfrac{2a+8}{3a-9}$, $B=\dfrac{3(a-3)}{2(a-4)}$.

134. $A=\dfrac{a^3+9a^2+20a}{a^2+5a+4}:\dfrac{a^2+7a+10}{a^2+3a+2}$, $B=a$.

135. $A=\dfrac{2a-3}{2a^2+13a-24}\cdot\dfrac{4a^2-3a-7}{4a-7}\cdot\dfrac{a^2+5a-24}{a^2-2a-3}$, $B=1$.

136. $A=\dfrac{2a^2+3ab-2b^2}{a^2+2ab+4b^2}\cdot\dfrac{a^3-8b^3}{a^2+3ab+2b^2}:\dfrac{2a^2-5ab+2b^2}{a^2+2ab+b^2}$, $B=a+b$.

137. $A=\dfrac{a^2-9}{5a^3b^3}:\left(\dfrac{a+3}{10a^4}\cdot\dfrac{2a-6}{ab^4}\right)$, $B=a^2b$.

138. $A=\left(\dfrac{m^3+4m^2n+4mn^2}{3m^2n-5mn^2-2n^3}:\dfrac{(m+2n)^3}{27m^3+n^3}\right)\cdot\dfrac{m^2-4n^2}{9m^2-3mn+n^2}$, $B=\dfrac{m}{n}$.

139. $A=\dfrac{c^2-4m^2}{c^2-2cm}-\dfrac{c^2+2cm-8m^2}{c^2-4m^2}$, $B=\dfrac{4m^2}{c(c+2m)}$.

140. $A=\dfrac{1+a^2+a}{1-a^3}+\dfrac{a-a^2}{(1-a)^3}$, $B=\dfrac{1}{(1-a)^2}$.

141. $A=\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\frac{(a+y)^2}{yx-y^2}$, $B=1$.

142. $A=\frac{3a-5}{3a^2-2a-5}-\frac{3a+5}{3a^2+7a+2}-\frac{1}{6a^2-a-1}$, $B=2$.

143. $A=\frac{5(2b-3)}{11(6b^2+b-1)}+\frac{7b}{6b^2+7b-3}-\frac{12(3b+1)}{11(4b^2+8b+3)}$, $B=12b+1$.

144. $A=\frac{a-1}{a-2}+\frac{a+1}{a+2}-\frac{4}{4-a^2}+\frac{2}{2-a}$, $B=0$.

145. $A=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{3}{1-x}-\frac{1}{3-x}$, $B=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}$.

146. $A=\frac{a}{(a-x)^2}+\frac{3a}{x^2+ax-2a^2}+\frac{1}{2a+x}$, $B=\frac{x}{(a-x)^2}$.

147. $A=\frac{1+x}{(x-y)(x-z)}+\frac{1+y}{(y-z)(y-x)}+\frac{1+z}{(z-x)(z-y)}$, $B=0$.

148. $A=\frac{m^2nr}{(m-n)(m-r)}+\frac{n^2mr}{(n-r)(n-m)}+\frac{r^2mn}{(r-m)(r-n)}$, $B=0$.

149. $A=\frac{(ac+bm)^3-(am+bc)^3}{(a-b)(c-m)}-\frac{(ac+bm)^3+(am+bc)^3}{(a+b)(c+m)}$,

$B=2(ac+bm)(am+bc)$.

150. $A=\frac{3}{2c-3}-\frac{2c+15}{4c^2+9}-\frac{2}{2c+3}+\frac{18(2c+15)}{81-16c^4}$, $B=0$.

151. $A=\frac{x^3+3x^2+5x+15}{x^3+2x^2+5x+10}-\frac{x^4+x^3+3x^2+x-2}{x^4+2x^3+3x^2+4x-4}$, $B=2$.

152. $A=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}:\frac{x^4-y^4}{2xy(x-y)}$, $B=\frac{1}{x+y}$.

153. $A=\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(z-x)^2}{(x+y)^2-z^2}-\frac{(x-y)^2-z^2}{(y+z)^2-x^2}$, $B=1$.

154. $A=\frac{(x-y)^4-xy(x-y)^2-2x^2y^2}{(x-y)(x^3-y^3)+2x^2y^2}$, $B=\frac{x^2-4xy+y^2}{x^2+y^2}$.

155. $A=\frac{z^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\left(x-\frac{za^2}{a^2+b^2}\right)^2$, $B=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z-x}{b}\right)^2$.

156. $A=\left(\frac{a+5}{5a-1}+\frac{a+5}{a+1}\right):\frac{a^2+5a}{1-5a}+\frac{a^2+5}{a+1}$, $B=a-1$.

157. $A=\left(\frac{b-3}{7b-4}-\frac{b-3}{b-4}\right)\cdot\frac{7b-4}{9b-3b^2}+\frac{b^2-14}{4-b}$, $B=-(b+4)$.

158. $A=\left(\frac{1+6ac}{8c^3-a^3}-\frac{1}{2c-a}\right):\left(\frac{1}{a^3-8c^3}-\frac{1}{a^2+2ac+4c^2}\right)$,

$B=1-2c+a$.

159. $A=\frac{b-4}{b-2}:\left(\frac{80b}{b^3-8}+\frac{2b}{b^2+2b+4}-\frac{b-16}{2-b}\right)-\frac{6b+4}{(4-b)^2}$, $B=\frac{b}{b-4}$.

160. $A=\frac{9m}{(3-m)^2}-1:\left(\frac{m}{m-3}+\frac{12m^2-9m}{27-m^3}+\frac{9}{m^2+3m+9}\right)$, $B=-1$.

Для любых положительных чисел a и b доказать, что справедливо неравенство (**161 — 165**):

161. $(a^2-b^2)^2\geq 4ab(a-b)^2$. **162.** $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$.

163. $(a+b)^4\leq 8a^4+8b^4$. **164.** $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$.

165. $\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо следующее неравенство (**166 — 168**):

166. $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$.

167. $(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc$.

168. $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

169. Доказать, что для любого действительного числа a справедливо неравенство

$$a^2+1\geq\frac{2a}{a^2+1}.$$

170. Доказать, что если $a\geq b\geq c>0$, то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\geq 3.$$

171. Доказать, что если $a_1>0$, $a_2>0$, ..., $a_n>0$ и $a_1+a_2+...+a_n=1$, то

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\geq\frac{1}{n}.$$

Доказать, что при любом натуральном n справедливо следующее неравенство (**172 — 173**):

172. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$.

173. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{1}{n!}<2$.

Доказать, что для любых натуральных m и p справедливо следующее неравенство (**174 — 176**):

174. $\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\frac{1}{(m+3)(m+4)}+...$

$$\ldots + \frac{1}{(m+p)(m+p+1)} < \frac{1}{m+1}.$$

175. $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ldots + \frac{1}{m+p} > \frac{p}{m+p}.$

176. $\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \frac{1}{(m+3)^2} + \ldots + \frac{1}{(m+p)^2} < \frac{1}{p}.$

Доказать, что для любого натурального $n \geq 2$ справедливо следующее неравенство (177 — 184):

177. $(n!)^2 \geq n^n$. **178.** $\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$. **179.** $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

180. $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. **181.** $(n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$.

182. $n! < \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$. **183.** $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

184. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$

Разложить по формуле бинома Ньютона (185 — 187):

185. $\left(a + \frac{1}{2}\right)^6$. **186.** $(a - \sqrt{2})^7$. **187.** $(a - \sqrt{3})^8 + (a + \sqrt{3})^8$.

Найти 7-й член в разложении бинома Ньютона (188 — 191):

188. $(2+b)^9$. **189.** $(3a-2)^{10}$. **190.** $(a^2 - 2a)^{11}$. **191.** $\left(\frac{a^2}{3} + 3a\right)^{12}$.

Найти все k, при каждом из которых коэффициент при a^k в разложении бинома Ньютона есть рациональное число (192 — 194):

192. $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2} \cdot a)^{24}$. **193.** $(\sqrt{2} - \sqrt[4]{3} \cdot a)^{76}$. **194.** $(\sqrt[3]{3} \cdot a + \sqrt[12]{2}^{\,102}$.

Найти коэффициент при x^5 следующего многочлена (195 — 200):

195. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^{14}$. **196.** $(2x-1)^{17}$. **197.** $(1 + x - x^2)^4$.

198. $(1 - 2x + x^2)^5$. **199.** $(1-x)^2 \cdot (2+x)^6$. **200.** $(1+2x)^4 \cdot (x-1)^7$.

Подобрать числа A, B, C так, чтобы было справедливо следующее тождественное равенство (201 — 205):

201. $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = (x+1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C)$.

202. $3x^5 - x^4 - 3x + 1 = (x^2+1)(3x^3 + Ax^2 + Bx + C)$.

203. $\frac{x^2 + 4x - 1}{x^3 + 9x^2 + 23x + 15} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+5}.$

204. $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}.$

205. $\dfrac{-2x+1}{x^3+2x^2+2x+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

Применяя схему Горнера, найти частное и остаток при делении на $(x+1)$ следующего многочлена (206 — 211):

206. $x^6+9x^3+32x+16$.

207. $14x-4+27x^4-9x^7$. 208. x^5-7x-6. 209. x^4+19x^2-30.

210. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$.

211. $(x^2+4x+18)^2+3x(x^2-4x+8)+3$.

Применяя схему Горнера, убедиться, что и число (-2) и число 1 являются корнями следующего многочлена (212 — 214):

212. $(x^2+x)^2+4(x^2+1)-12$. 213. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

214. $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$.

215. Применяя схему Горнера, убедиться, что многочлен

$$(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$$

делится на многочлен $(x+2)(x+6)$, и найти частное.

216. Применяя схему Горнера, убедиться, что многочлен

$$x^5-6x^4+16x^3-32x^2+48x-32$$

делится на многочлен $(x-2)^3$.

217. Делится ли многочлен $(x^4-10x^2+16)+(x^4-11x^2+24)$ на многочлен (x^2-8)?

218. Доказать, что сумма одинаковых степеней x^m+c^m не делится на разность их оснований $x-c$.

219. Доказать, что разность одинаковых нечетных степеней $x^{2k+1}-c^{2k+1}$ не делится на сумму их оснований $x+c$.

220. Доказать, что сумма одинаковых четных степеней $x^{2k}+c^{2k}$ не делится на сумму их оснований $x+c$.

221. Найти целые корни многочлена $x^4-x^3-2x^2+4x-24$.

Доказать методом математической индукции, что для любого натурального n справедливо следующее равенство (222 — 241):

222. $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

223. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

224. $2^2+4^2+8^2+\ldots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

225. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

226. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

227. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)=$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

228. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + (n-1)n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

229. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

230. $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = \dfrac{3(3^n-1)}{2}$.

231. $2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1) \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^n$.

232. $\dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n}{2(n+2)}$.

233. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$.

234. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n} = 3 - \dfrac{2n-3}{2^n}$.

235. $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$.

236. $\dfrac{1}{1 \cdot 10} + \dfrac{1}{10 \cdot 19} + \dfrac{1}{19 \cdot 28} + \ldots + \dfrac{1}{(9n-8)(9n+1)} = \dfrac{n}{9n+1}$.

237. $\dfrac{1}{5 \cdot 11} + \dfrac{1}{11 \cdot 17} + \dfrac{1}{17 \cdot 23} + \ldots + \dfrac{1}{(6n-1)(6n+5)} = \dfrac{n}{5(6n+5)}$.

238. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

239. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \dfrac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

240. $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

241. $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dfrac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dfrac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots + \dfrac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} =$

$$= \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

Доказать (методом математической индукции), что для любого натурального n справедливо следующее равенство (**242** — **244**):

242. $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)^2} < 2 - \dfrac{1}{n+1}$.

243. $2\sqrt{n+1} > \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$.

244. $(n!) > \left(\dfrac{n}{3}\right)^n$.

245. Доказать, что для любого натурального $n \geq 5$ справедливо неравенство $2^n > n^2$.

246. Доказать, что для любого натурального $n \geq 3$ справедливо неравенство $n! > 2^{n-1}$.

Доказать, что при любом натуральном n:

247. Число $n^3 + 5n$ делится на 6.

248. Число $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9.

249. Число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

250. Число $3^{2n} - 1$ делится на 2^{n+2} и не делится на 2^{n+3}.

251. Число $n^5 - n$ делится на 30.

252. Число $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ делится на 84.

253. Число $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ делится на 17.

254. Число $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ делится на 13.

255. Число $n^2(n^4 - 1)$ делится на 60.

256. Число $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n$ делится на 30.

257. Число $20^{n+1} + 16^{n+1} - 3^{n+1} - 1$ делится на 323.

258. Число $(2n)^3 + 20(2n)$ делится на 48.

Глава III. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Пусть даны два многочлена A и B. Если стоит задача (гл. II) решить уравнение $A = B$, то говорят, что дано *алгебраическое уравнение* $A = B$. Если же стоит задача решить неравенство $A > B$ ($A < B$, $A \geq B$, $A \leq B$), то говорят, что дано *алгебраическое неравенство* $A > B$ ($A < B$, $A \geq B$, $A \leq B$).

В этой главе рассматриваются только алгебраические уравнения и неравенства. Поэтому в этой главе часто вместо слов «алгебраическое уравнение» будем писать просто «уравнение», вместо слов «алгебраическое неравенство» будем часто писать «неравенство».

§ 1. Уравнения с одним неизвестным

Основные понятия и определения. Пусть стоит задача решить уравнение

$$R(x) = Q(x), \tag{1}$$

где $R(x)$ и $Q(x)$ — многочлены (см. гл. II) относительно одной буквы x; тогда букву x называют неизвестной буквой, или просто *неизвестным*, а уравнение (1) — *алгебраическим уравнением с одним неизвестным*.

Поскольку ОДЗ многочленов $R(x)$ и $Q(x)$ состоит из всех действительных чисел, то задача о решении уравнения (1) может быть сформулирована так: *найти все числовые значения неизвестного x, каждое из которого обращает уравнение* (1) *в верное числовое равенство.* Каждое такое число называют *корнем* или *решением* уравнения (1). Поэтому *решить уравнение* (1) — это значит найти множество всех его корней.

Если множество всех корней уравнения (1) состоит из k чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, среди которых нет равных, то говорят, что уравнение (1) имеет только *k корней* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, т.е. множество всех решений уравнения (1) есть множество $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Если же множество всех корней состоит из одного числа x_1, то говорят еще, что уравнение (1) имеет *единственный корень* или *единственное решение* x_1.

В случае, если множество всех корней уравнения (1) есть пустое множество, то говорят, что уравнение (1) *не имеет корней.*

Например, очевидно, что уравнение $x^2 + 1 = -(x^4 + 1)$ корней не имеет, ибо ни для одного числового значения неизвестного x это уравнение не превращается в верное числовое неравенство.

Теперь рассмотрим простейшее алгебраическое уравнение с одним неизвестным

$$x = \alpha, \tag{2}$$

где α — некоторое фиксированное число. Очевидно, что это простейшее уравнение имеет единственный корень — число α, поэтому множество всех корней уравнения (2) состоит из одного числа α.

Не для всякого алгебраического уравнения с одним неизвестным так же очевидно, как в двух рассмотренных примерах, множество всех корней уравнения. Обычно для нахождения множества всех корней уравнения это уравнение равносильными переходами (определение равносильного перехода см. ниже) сводят к одному или совокупности нескольких уравнений (определение совокупности уравнений см. ниже), каждое из которых — либо простейшее уравнение типа (2), либо уравнение, для которого очевидно, что оно не имеет корней.

В этом параграфе рассматриваются примеры равносильных переходов.

Пусть даны два алгебраических уравнения с одним неизвестным $R(x) = Q(x)$ и $S(x) = T(x)$. Эти уравнения называются *равносильными*, если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, и наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения. В силу этого определения равносильны любые два уравнения, не имеющие корней.

Замена одного уравнения равносильным ему другим уравнением называется ***равносильным переходом*** от одного уравнения к другому. Равносильный переход от одного уравнения к другому обозначается двойной стрелкой $\Leftrightarrow$. Запись

$$R(x) = Q(x) \Leftrightarrow S(x) = T(x)$$

означает, что уравнения $R(x) = Q(x)$ и $S(x) = T(x)$ равносильны.

Приведем некоторые утверждения, при помощи которых и будут совершаться равносильные переходы.

1. *Уравнения* $R(x) = Q(x)$ *и* $R(x) - Q(x) = 0$ *равносильны.*

2. *Уравнения* $R(x) = Q(x)$ *и* $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ *равносильны для любого действительного числа* α.

3. *Уравнения* $R(x) = Q(x)$ *и* $\alpha R(x) = \alpha Q(x)$ *равносильны для любого отличного от нуля действительного числа* α.

4. *Пусть известно, что для любого действительного числа* x *справедливо равенство* $R(x) = T(x)$, *тогда равносильны уравнения* $R(x) = Q(x)$ *и* $T(x) = Q(x)$.

Доказательства справедливости этих утверждений похожи, поэтому докажем, например, утверждение 2. Пусть число x_1 — некоторый корень уравнения $R(x) = Q(x)$. Тогда справедливо числовое равенство $R(x_1) = Q(x_1)$. Поскольку справедливость числового равенства не нарушается при прибавлении к обеим его частям любого действительного числа (см. гл. I), то справедливо числовое равенство $R(x_1) + \alpha = Q(x_1) + \alpha$. Справедливость этого числового равенства означает, что число x_1 является корнем уравнения $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$. Поскольку такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения $R(x) = Q(x)$, то тем самым показано, что любой корень уравнения $R(x) = Q(x)$ является корнем уравнения $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$.

Покажем теперь обратное. Пусть число x_2 есть некоторый корень уравнения $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$, тогда справедливо числовое равенство $R(x_2) + \alpha = Q(x_2) + \alpha$. Прибавим к обеим частям этого числового равенства число $(-\alpha)$, получим справедливость числового равенства $R(x_2) = Q(x_2)$, откуда вытекает, что число x_2 есть корень уравнения $R(x) = Q(x)$. Поскольку такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$, то тем самым показано, что любой корень уравнения $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ является корнем уравнения $R(x) = Q(x)$.

Из доказанного вытекает, что если уравнение $R(x) = Q(x)$ не имеет корней, то и уравнение $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ также не имеет корней. Действительно, предположим, что уравнение $R(x) = Q(x)$ не имеет корней, а уравнение $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ имеет хотя бы один корень. Из условия, что уравнение $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ имеет корень, по доказанному выше следует, что имеет корень и уравнение $R(x) = Q(x)$, что противоречит предположению. Значит, если уравнение $R(x) = Q(x)$ не имеет корней, то и уравнение $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ корней не имеет.

Аналогично показывается, что если уравнение $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ не имеет корней, то и уравнение $R(x) = Q(x)$ корней не имеет.

Итак, показано, что в этом случае уравнения $R(x) = Q(x)$ и $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ равносильны. Тем самым утверждение 2 доказано полностью.

Пусть дан многочлен $P(x)$ степени n относительно буквы x:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0), \tag{3}$$

где буквами a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n обозначены некоторые фиксированные действительные числа, называемые *коэффициентами* многочлена $P(x)$.

Из утверждений 1 и 4 вытекает, что каждое алгебраическое уравнение с одним неизвестным можно привести к виду $P(x) = 0$, поэтому достаточно рассмотреть лишь уравнение

$$P(x) = 0, \tag{4}$$

где $P(x)$ есть многочлен вида (3). Всякое такое уравнение называется *алгебраическим уравнением степени n*.

Из определений корня многочлена $P(x)$ (см. § 5 гл. II) и корня (решения) алгебраического уравнения следует, что любой корень многочлена $P(x)$ является корнем (решением) уравнения (4). Следовательно, нахождение всех корней (решений) уравнения (4) сводится к нахождению всех корней многочлена $P(x)$. Следует только иметь в виду, что при нахождении корней уравнения (4) не учитывается кратность корня многочлена $P(x)$. Например, многочлен $P(x) = x^2 - 2x + 1$ имеет корень $x_1 = 1$ кратности два, а уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$ имеет единственный корень (единственное решение) $x_1 = 1$. Хорошо известно, что нахождение корней многочлена является сложной задачей. Поэтому рассмотрим только некоторые такие случаи, когда удается найти все корни многочлена, т.е. решить уравнение (4).

Уравнение первой степени. Рассмотрим случай, когда $P(x)$ есть многочлен первой степени, т.е. рассмотрим уравнение

$$a_0x + a_1 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{5}$$

На основании утверждения 2 уравнение (5) равносильно уравнению

$$a_0x = -a_1 \quad (a_0 \neq 0). \tag{6}$$

Поскольку число $a_0 \neq 0$, то на основании утверждения 3 уравнение (6) равносильно уравнению

$$x = -\frac{a_1}{a_0} \quad (a_0 \neq 0). \tag{7}$$

Все равносильные переходы от уравнения (5) к уравнению (7) можно записать более коротко в виде следующей цепочки равносильных переходов:

$$a_0x + a_1 = 0 \ (a_0 \neq 0) \Leftrightarrow a_0x = -a_1 \ (a_0 \neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{a_1}{a_0} \ (a_0 \neq 0).$$

Простейшее уравнение $x = -\frac{a_1}{a_0}$ имеет единственный корень — число $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$. Так как уравнение (5) равносильно простейшему уравнению (7), то уравнение (5) также имеет единственный корень — число $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$.

Таким образом, *уравнение первой степени* с одним неизвестным (5) имеет *только один корень* $x_1 = -\frac{a_1}{a_0}$.

Для решения алгебраических уравнений более высоких степеней понадобится понятие совокупности уравнений. Пусть дано m многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_m(x)$. Говорят, что дана *совокупность m алгебраических уравнений* с одним неизвестным x:

$$P_1(x) = 0,\ P_2(x) = 0,\ ...,\ P_m(x) = 0, \tag{8}$$

если требуется найти все числовые значения неизвестного x, каждое из которых является корнем хотя бы одного уравнения из этой совокупности (8) (уравнения совокупности обычно записываются в строчку).

Таким образом, решить совокупность уравнений (8) — значит решить каждое уравнение $P_i(x) = 0$, где $i = 1, 2, ...$ ..., m, т.е. найти множества N_1, N_2, ..., N_m всех корней каждого из уравнений и затем взять объединение этих множеств. Это объединение $N = N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_m$ будет множеством всех корней совокупности уравнений (8), а каждое число из множества N будет называться корнем или решением совокупности (8). Если множество N состоит из k чисел: x_1, x_2, ..., x_k, среди которых нет равных, то говорят, что совокупность уравнений (8) имеет *только k корней* x_1, x_2, ..., x_k; если же множество N состоит из одного числа x_1, то говорят, что совокупность уравнений (8) *имеет единственный корень* x_1.

Часто возникает необходимость совершить равносильный переход от уравнения к совокупности уравнений. Будем говорить, что *уравнение*

$$P(x) = 0 \tag{4}$$

равносильно совокупности уравнений

$$P_1(x) = 0, \quad P_2(x) = 0, \ldots, P_m(x) = 0, \tag{8}$$

если любое решение (любой корень) уравнения (4) является решением (корнем) совокупности (8), и наоборот, любое решение (любой корень) совокупности (8) является решением (корнем) уравнения (4). Замена уравнения (4) равносильной ему совокупностью (8) называется *равносильным переходом* от уравнения (4) к совокупности (8).

Например, уравнение

$$(3x + 4)(-7x + 2)(2x - \sqrt{5})(-12x - 16) = 0 \tag{9}$$

равносильно совокупности уравнений

$$3x + 4 = 0, \quad -7x + 2 = 0, \quad 2x - \sqrt{5} = 0, \quad -12x - 16 = 0.$$

Действительно, любой корень уравнения (9) обращает в нуль хотя бы один из многочленов $(3x + 4)$, $(-7x + 2)$, $(2x - \sqrt{5})$, $(-12x - 16)$, т.е. является корнем хотя бы одного из уравнений совокупности, и, наоборот, любой корень совокупности обращает в нуль хотя бы один из этих многочленов, т.е. удовлетворяет уравнению (9). Совокупность уравнений имеет только три корня $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{2}{7}$, $x_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, в силу равносильного перехода эти корни и только они являются корнями уравнения (9).

Рассмотрим *алгебраическое уравнение второй степени*, т.е. уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0). \tag{10}$$

Такие уравнения принято называть *квадратными уравнениями*. Многочлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называют обычно *квадратным трехчленом*, число a ($a \neq 0$), стоящее при x^2, — называется *первым коэффициентом*, число b, стоящее при x, — *вторым коэффициентом*, число c — *свободным членом*. Кроме того, число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминан-*

том квадратного трехчлена, а также дискриминантом квадратного уравнения (10).

Проведем тождественное преобразование квадратного трехчлена. Так как $a \neq 0$, то справедливо тождественное равенство

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Теперь применим тождественное преобразование, которое называется «выделением полного квадрата»:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} =$$
$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} =$$
$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}.$$

Окончательно получаем справедливость следующего тождественного равенства:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] \quad (a \neq 0).$$

На основании утверждения 4 уравнение (10) равносильно уравнению

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] = 0 \quad (a \neq 0). \tag{11}$$

а на основании утверждения 3, учитывая, что $a \neq 0$, получаем, что уравнение (11) равносильно уравнению

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0 \quad (a \neq 0). \tag{12}$$

Более коротко это можно записать так:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

$$\Updownarrow$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] = 0 \quad (a \neq 0),$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0 \quad (a \neq 0).$$

В зависимости от дискриминанта D возможны три случая.

а) $D < 0$. Так как при любом числовом значении x_0 число $\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2$ неотрицательно, а число $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)$ — положительно, то число $\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}$ также положительно и потому не может равняться нулю. А это означает, что уравнение (12) не имеет действительных корней. Поскольку уравнение (10) равносильно уравнению (12), то оно также не имеет действительных корней.

б) $D = 0$. Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad (a \neq 0).$$

Это уравнение равносильно уравнению первой степени

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \quad (a \neq 0).$$

Следовательно, если $D = 0$, то уравнение (12) имеет единственный корень $x_1 = -\frac{b}{2a}$.

в) $D > 0$. Тогда $D = (\sqrt{D})^2$, и поэтому выражение, стоящее в левой части уравнения (12), можно рассматривать как разность двух квадратов $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ и $\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$. Воспользовавшись формулой сокращенного умножения, получим уравнение

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]=0 \quad (a\neq 0),$$

равносильное уравнению (12). Это уравнение, в свою очередь, равносильно совокупности двух уравнений

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}=0 \quad (a\neq 0), \quad x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}=0 \quad (a\neq 0). \quad (13)$$

Каждое уравнение в этой совокупности является уравнением первой степени и, следовательно, по доказанному выше имеет только один корень. Решая каждое уравнение совокупности (13), получаем, что совокупность уравнений (13) имеет только два корня

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad (a\neq 0), \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad (a\neq 0). \qquad (14)$$

В силу равносильных переходов, если $D>0$, то уравнение (10) равносильно совокупности (13) и потому имеет только два корня x_1 и x_2, вычисляемые по формулам (14).

Итак, *квадратное уравнение* (10) *не имеет действительных корней, если его дискриминант отрицателен, имеет только два действительных корня, если дискриминант положителен, и имеет только один действительный корень, если дискриминант равен нулю.*

Отметим, что если дискриминант квадратного уравнения (10) положителен, то формулы (14) для нахождения корней этого уравнения часто записывают в виде одной формулы:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a\neq 0). \qquad (15)$$

Замечание. Если $D=0$, то можно считать, что формула (15) остается справедливой, только надо помнить о том, что в этом случае квадратное уравнение имеет только один корень.

Приведенное квадратное уравнение. Квадратный трехчлен, у которого первый коэффициент равен единице, называется *приведенным* квадратным трехчленом. Общепринято второй коэффициент приведенного трехчлена обозначать p, а его свободный член — q, т.е. приведенный квадратный трехчлен имеет вид $x^2 + px + q$.

Квадратное уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (16)$$

называется ***приведенным*** квадратным уравнением.

Очевидно, что квадратное уравнение (10) равносильно соответствующему приведенному уравнению, а именно

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (a \neq 0). \qquad (17)$$

Если дискриминант приведенного уравнения (16) положителен, то формула (15) для нахождения корней этого уравнения принимает вид

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \qquad (18)$$

Теорема (теорема Виета). *Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет положительный дискриминант, то сумма корней этого уравнения равна второму его коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т.е. если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$; $x_1x_2 = q$.*

Доказательство. Так как $D > 0$, то, используя формулы (18), получим

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -p,$$

$$x_1x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) =$$

$$= \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Теорема доказана.

Замечание. При $D = 0$, как следует из доказательства, теорема Виета верна, если рассматривать корень $x_1 = -\frac{p}{2}$

как два совпадающих корня $x_1 = -\frac{p}{2}$ и $x_2 = -\frac{p}{2}$. Теорема Виета имеет место и при $D < 0$, но в этом случае корнями квадратного уравнения будут комплексные сопряженные числа (см. гл. XI).

Теорема Виета часто применяется при решении различных задач. Рассмотрим одну из них. Требуется найти неизвестный свободный член q квадратного уравнения $x^2 + x + q = 0$, если известно, что это уравнение имеет два действительных корня x_1 и x_2 и сумма квадратов этих корней равна единице, т.е. $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Чтобы найти q, воспользуемся теоремой Виета. Справедлива цепочка тождественных равенств

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

и потому $x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2q$, т.е. $1 - 2q = 1$, откуда $q = 0$.

Симметричное уравнение третьей степени. Алгебраическое уравнение третьей степени называется *симметричным* уравнением, если оно имеет вид

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0). \tag{19}$$

Преобразуем многочлен $ax^3 + bx^2 + bx + a$, воспользовавшись способом разложения многочлена на множители. Очевидна справедливость следующей цепочки тождественных равенств:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a &= a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = \\ &= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = \\ &= (x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = \\ &= (x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a], \end{aligned}$$

поэтому уравнение (19) равносильно уравнению

$$(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0 \quad (a \neq 0). \tag{20}$$

Уравнение (20), в свою очередь, равносильно совокупности уравнений:

$$x + 1 = 0 \ \ (a \neq 0), \quad ax^2 + (b - a)x + a = 0 \ \ (a \neq 0). \tag{21}$$

Следовательно, и уравнение (19) равносильно этой совокупности. Решение совокупности (21) легко находится, так как она содержит только уравнения первой и второй степени.

Пример. Найти корни уравнения

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0. \qquad (22)$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (x^3 + 1) + 4x(x + 1) =$$
$$= (x + 1)(x^2 + 3x + 1).$$

Очевидно, что уравнение (22) равносильно совокупности уравнений

$$x + 1 = 0, \quad x^2 + 3x + 1 = 0. \qquad (23)$$

Первое уравнение совокупности (23) имеет только один корень $x_1 = -1$; второе — только два корня $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ и $x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, совокупность уравнений (23), а значит, и данное уравнение (22) имеют только три корня $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Симметричное уравнений четвертой степени. Алгебраическое уравнение четверной степени называется *симметричным*, если оно имеет вид

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0). \qquad (24)$$

Учитывая, что $a \neq 0$, запишем это уравнение в равносильном виде:

$$(x^4 + 1) + \frac{b}{a}x(x^2 + 1) + \frac{c}{a}x^2 = 0 \quad (a \neq 0).$$

Очевидна справедливость следующей цепочки тождественных равенств:

$$(x^4+1)+\frac{b}{a}x(x^2+1)+\frac{c}{a}x^2=(x^4+2x^2+1)+\frac{b}{a}x(x^2+1)+$$
$$+\left(\frac{c}{a}-2\right)x^2=(x^2+1)^2+2(x^2+1)\frac{bx}{2a}+\left(\frac{bx}{2a}\right)^2+$$
$$+x^2\left(\frac{c}{a}-2-\frac{b^2}{4a^2}\right)=\left(x^2+\frac{b}{2a}x+1\right)^2-\frac{b^2-4a(c-2a)}{4a^2}x^2.$$

Из справедливости этой цепочки получаем, что уравнение (24) равносильно уравнению

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}x+1\right)^2-\frac{b^2-4a(c-2a)}{4a^2}x^2=0 \quad (a\neq 0). \qquad (25)$$

В зависимости от числа $M=b^2-4a(c-2a)$ возможны три случая:

а) $M<0$. Уравнение (25), а значит, и равносильное ему уравнение (24) действительных корней не имеют.

б) $M=0$. Уравнение (25) в этом случае принимает вид

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}x+1\right)^2=0 \qquad (26)$$

Очевидно, что уравнение (26) равносильно уравнению

$$x^2+\frac{b}{2a}x+1=0 \qquad (27)$$

Следовательно, множество корней симметричного уравнения 4-й степени в этом случае совпадает с множеством корней квадратного уравнения

$$x^2+\frac{b}{2a}x+1=0 \quad (a\neq 0) \qquad (28)$$

в) $M>0$. Уравнение (25), а значит, и равносильное ему уравнение (24) равносильны совокупности квадратных уравнений

$$x^2+\frac{b+\sqrt{b^2-4a(c-2a)}}{2a}x+1=0 \quad (a\neq 0), \qquad (29)$$

$$x^2 + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4a(c - 2a)}}{2a}x + 1 = 0 \quad (a \neq 0), \tag{30}$$

каждое из которых легко решить.

П р и м е р. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0. \tag{31}$$

Приведем следующую цепочку тождественных равенств:

$$x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 + x(x^2 + 1) - 3x^2 =$$

$$= (x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1)\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 3x^2 - \frac{x^2}{4} = \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2 -$$

$$- \frac{13x^2}{4} = \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{13}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{13}}{2}x + 1\right),$$

откуда следует, что уравнение (31) равносильно совокупности уравнений

$$x^2 + \frac{1 + \sqrt{13}}{2}x + 1 = 0, \quad x^2 + \frac{1 - \sqrt{13}}{2}x + 1 = 0.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет только два корня:

$$x_1 = \frac{-\sqrt{13} - 1 + \sqrt{2\sqrt{13} - 2}}{4}, \quad x_2 = \frac{-\sqrt{13} - 1 - \sqrt{2\sqrt{13} - 2}}{4}, \tag{32}$$

а второе уравнение действительных корней не имеет, т.к. его дискриминант отрицателен. Следовательно, уравнение (31) имеет только два корня (32).

Двучленное уравнение. Алгебраическое уравнение называется *двучленным* уравнением, если оно имеет вид

$$x^n - a = 0. \tag{33}$$

Рассмотрим сначала двучленное уравнение (33) в частном случае, когда $a = 1$:

$$x^n - 1 = 0. \tag{34}$$

При $n = 1$ уравнение (34) есть частный случай уравнения первой степени и потому имеет единственный корень $x_1 = 1$. При $n = 2$ уравнение (34) есть частный случай квадратного уравнения с положительным дискриминантом и потому имеет только два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Покажем теперь, что при $n \geq 3$ для любого нечетного n уравнение (34) имеет только один действительный корень $x_1 = 1$, а для любого четного n уравнение (34) имеет только два действительных корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Пусть n — фиксированное нечетное натуральное число, $n \geq 3$, т.е. пусть $n = 2k + 1$, где k — фиксированное натуральное число. Пользуясь формулой сокращенного умножения, получаем справедливость тождественного равенства (см. гл. II):

$$x^{2k+1} - 1 = (x - 1)(x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1).$$

Из справедливости этого тождественного равенства вытекает, что уравнение (34) при $n = 2k + 1$ равносильно совокупности уравнений

$$(x - 1) = 0, \quad x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет только один корень $x_1 = 1$, второе уравнение совокупности действительных корней не имеет. Для доказательства этого покажем, что для любого действительного x справедливо неравенство

$$x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 > 0 \tag{35}$$

Действительно, для любого $x \in [0, +\infty)$ справедливость неравенства (35) очевидна. При любом $x \in [-1; 0)$, переписав левую часть неравенства (35) в виде

$$x^{2k} + x^{2k-2}(x + 1) + \ldots + x^2(x + 1) + (x + 1),$$

убеждаемся, что первое слагаемое этой суммы положительно, а остальные — неотрицательны. Значит, для любого $x \in [-1; 0)$ неравенство (35) справедливо. Переписав левую часть неравенства (35) в виде

$$x^{2k-1}(x+1)+x^{2k-3}(x+1)+\ldots+x(x+1)+1,$$

убеждаемся, что для любого $x \in (-\infty, -1)$ все слагаемые этой суммы положительны. Значит, для любого $x \in (-\infty, -1)$ неравенство (35) справедливо.

Итак, показана справедливость неравенства (35) для любого действительного x, а это означает, что уравнение

$$x^{2k}+x^{2k-1}+\ldots+x^2+x+1=0$$

действительных корней не имеет. Значит, уравнение (34) при $n=2k+1$ имеет только один действительный корень $x_1=1$.

Пусть теперь $n=2k$ (k — фиксированное натуральное число и $k \geq 2$). Пользуясь формулой сокращенного умножения (см. гл. II), получаем справедливость тождественного равенства

$$x^{2k}-1=(x^2-1)(x^{2(k-1)}+x^{2(k-2)}+\ldots+x^4+x^2+1).$$

Из справедливости этого тождественного равенства вытекает, что уравнение (34) при $n=2k$ ($k \geq 2$) равносильно совокупности уравнений

$$x^2-1=0, \quad x^{2(k-1)}+x^{2(k-2)}+\ldots+x^4+x^2+1=0.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет два корня $x_1=1$ и $x_2=-1$, а второе уравнение действительных корней не имеет, так как для любого действительного x очевидна справедливость неравенства

$$x^{2(k-1)}+x^{2(k-2)}+\ldots+x^4+x^2+1>0.$$

Значит уравнение (34) имеет при $n=2k$ два действительных корня: $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Итак, уравнение (34) при любом нечетном n имеет только один действительный корень $x_1=1$, а при любом четном n — только два действительных корня: $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Рассуждая аналогично, можно показать (см. § 1 гл. VII), что:

— при любом положительном a уравнение (33) имеет: 1) при любом нечетном n только один действительный корень $x_1 = \sqrt[n]{a}$, 2) при любом четном n — только два действительных корня $x_1 = \sqrt[n]{a}$ и $x_2 = -\sqrt[n]{a}$;

— при $a = 0$ уравнение (33) имеет только один корень $x_1 = 0$;

— при любом отрицательном a можно показать (см. § 1 гл. VII), что уравнение (33) имеет: 1) при любом нечетном n только один действительный корень $x_1 = -\sqrt[n]{-a}$, 2) при любом четном n не имеет действительных корней.

Пример. Решить уравнение

$$x^3 + 8 = 0.$$

Так как в данном случае n — нечетно ($n = 3$) и a — отрицательно ($a = -8$), то данное уравнение имеет единственное решение $x_1 = -2$.

Трехчленное уравнение. Алгебраическое уравнение вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \qquad (36)$$

при условии, что $n \geq 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, называется *трехчленным* уравнением. При $n = 2$ трехчленное уравнение имеет еще одно название *«биквадратное уравнение»*. Для решения биквадратного уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (37)$$

его левая часть преобразуется способом «выделения полного квадрата»:

$$ax^4 + bx^2 + c = a\left[\left(x^4 + 2x^2\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

На основании этого тождественного равенства уравнение (37) равносильно уравнению

$$a\left[\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0 \quad (a\neq 0). \tag{38}$$

Очевидно, что если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение (38), а значит, и равносильное ему уравнение (37), корней не имеют.

При $b^2 - 4ac = 0$ уравнение (38) принимает вид

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \quad (a\neq 0). \tag{39}$$

Очевидно, что уравнение (39) равносильно уравнению

$$x^2+\frac{b}{2a}=0 \quad (a\neq 0). \tag{40}$$

Таким образом, при $b^2 - 4ac = 0$ биквадратное уравнение (37) равносильно квадратному уравнению (40), т.е. при $\frac{b}{2a} < 0$ имеет только два действительных корня $x_1 = \sqrt{-\frac{b}{2a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$; при $\frac{b}{2a} = 0$ — единственный корень $x_1 = 0$; при $\frac{b}{2a} > 0$ — не имеет решений.

Если же $b^2 - 4ac > 0$, то уравнение (38), а значит, и равносильное ему уравнение (37) равносильны совокупности уравнений

$$x^2+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \quad (a\neq 0),$$

$$x^2+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \quad (a\neq 0).$$

Перепишем эту совокупность в равносильном виде:

$$x^2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ (a\neq 0), \quad x^2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ (a\neq 0) \tag{41}$$

Поскольку числа, стоящие в правых частях уравнений совокупности (41), есть корни квадратного уравнения

$$at^2+bt+c=0 \quad (a\neq 0), \tag{42}$$

имеющего положительный дискриминант $D = b^2 - 4ac$, то совокупность уравнений (41) может быть записана в виде

$$x^2 = t_1 \quad (a \neq 0), \quad x^2 = t_2 \quad (a \neq 0), \tag{43}$$

где t_1 и t_2 — корни уравнения (42).

Таким образом показано, что для решения биквадратного уравнения (37) надо сначала решить квадратное уравнение (42), при этом, если квадратное уравнение (42) не имеет действительных корней, т.е. его дискриминант отрицателен, то уравнение (37) также не имеет корней; если дискриминант уравнения (42) равен нулю, то уравнение (37) равносильно квадратному уравнению (40), которое легко решается; если же дискриминант уравнения (42) положителен, то уравнение (37) равносильно совокупности уравнений (41). Каждое из уравнений совокупности (41) — квадратное, поэтому корни этой совокупности, а значит, и корни равносильного этой совокупности уравнения (37) легко найти.

Пример. Решить биквадратное уравнение

$$x^4 - x^2 - 6 = 0. \tag{44}$$

Для решения уравнения (44) решим сначала квадратное уравнение $t^2 - t - 6 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. Поэтому уравнение (44) равносильно совокупности уравнений

$$x^2 = -2, \quad x^2 = 3.$$

Первое уравнение этой совокупности действительных корней не имеет, а второе имеет только два корня: $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = -\sqrt{3}$. Значит, и уравнение (44) имеет только два корня $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = -\sqrt{3}$.

При $n > 2$ для решения трехчленного уравнения

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

его левая часть также преобразуется способом «выделения полного квадрата»

$$ax^{2n}+bx^n+c=a\left[\left(x^n+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]. \qquad (45)$$

На основании этого тождественного равенства уравнение (36) равносильно уравнению

$$\left(x^n+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad (a\neq 0). \qquad (46)$$

Очевидно, что если $b^2-4ac<0$, то уравнение (46), а значит, и уравнение (36) корней не имеют.

Если же $b^2-4ac=0$, то уравнение (46) равносильно двучленному уравнению

$$x^n+\frac{b}{2a}=0 \quad (a\neq 0). \qquad (47)$$

Следовательно, при $b^2-4ac=0$ трехчленно уравнение (36) равносильно двучленному уравнению (47), решение которого рассматривалось в предыдущем пункте.

Если же $b^2-4ac>0$, то уравнение (46) равносильно совокупности двучленных уравнений

$$x^n+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}=0 \quad (a\neq 0), \quad x^n+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}=0$$
$$(a\neq 0), \quad (48)$$

решение которых, как показано выше, можно найти.

Пример. Решить трехчленное уравнение

$$x^6+3x^3+2=0. \ (49)$$

Так как данное уравнение равносильно совокупности двух двучленных уравнений

$$x^3+2=0, \quad x^3+1=0,$$

то, решив их, получим, что уравнение (49) имеет только два действительных корня $x_1=-\sqrt[3]{2}$ и $x_2=-1$.

Замечание. Выше было показано, как решить любое уравнение первой степени и любое квадратное уравнение и были выведены формулы для нахождения их корней. Что касается уравнений, степени которых выше, чем два, то были рассмотрены лишь отдельные примеры. Связано это с тем, что хотя для уравнений третьей и четвертой степени такие формулы есть, они очень громоздки и потому применяются редко, а для уравнений пятой степени таких формул нет. В то же время следует отметить, что если все коэффициенты многочлена $P(x)$ в уравнении (4) являются целыми (или рациональными) числами, то для нахождения целых (или рациональных) корней уравнения (4) можно применить теорему о целых (или рациональных) корнях многочлена (см. гл. II).

§ 2. Неравенства с одним неизвестным

Основные понятия и определения. Пусть стоит задача: решить неравенство

$$R(x) > Q(x) \quad [\text{или } R(x) < Q(x)], \tag{1}$$

где $R(x)$ и $Q(x)$ — многочлены (см. гл. II) относительно одной буквы x. Буква x называется неизвестной буквой, или просто *неизвестным*, неравенство (1) — *алгебраическим неравенством с одним неизвестным*.

Поскольку ОДЗ многочленов $R(x)$ и $Q(x)$ состоит из всех действительных чисел, то задачу о решении неравенства (1) можно сформулировать так: найти все числовые значения буквы x, каждое из которых обращает неравенство (1) в верное числовое неравенство. Каждое такое числовое значение называется *решением* неравенства (1). Поэтому решить неравенство (1) — это значит найти множество всех его решений. В случае, если множество всех решений неравенства (1) есть пустое множество, говорят, что неравенство (1) не имеет решений.

Два алгебраических неравенства $R(x) > Q(x)$ и $T(x) < S(x)$ называются *равносильными*, если любое решение первого неравенства является решением второго, и, наоборот, любое решение второго неравенства является решением первого. В силу этого определения равносильны любые два неравенства, не имеющие решений. Замена одного неравенства равносильным ему другим неравенством называется равносильным переходом от одного неравенства к другому. Равносильный переход принято обозначать двойной стрелкой $\Leftrightarrow$. Запись

$$R(x) > Q(x) \Leftrightarrow T(x) < S(x)$$

обозначает, что неравенства $R(x) > Q(x)$ и $T(x) < S(x)$ равносильны.

Приведем некоторые утверждения, при помощи которых будут совершаться равносильные переходы.

1. *Неравенства* $R(x) > Q(x)$ *и* $R(x) - Q(x) > 0$ *равносильны.*

2. *Неравенства* $R(x) > Q(x)$ *и* $R(x) + \alpha > Q(x) + \alpha$ *равносильны для любого действительного числа* α.

3. а) *Неравенства* $R(x) > Q(x)$ *и* $\alpha R(x) > \alpha Q(x)$ *равносильны для любого положительного числа* α.

б) *Неравенства* $R(x) > Q(x)$ *и* $\alpha R(x) < \alpha Q(x)$ *равносильны для любого отрицательного числа* α.

4. *Пусть известно, что для любого действительного числа* x *справедливо равенство* $R(x) = T(x)$, *тогда равносильны неравенства* $R(x) > Q(x)$ *и* $T(x) > Q(x)$.

Доказательства справедливости этих утверждений похожи, поэтому докажем, например, утверждение 1. Пусть число x_1 есть некоторое решение неравенства $R(x) > Q(x)$, т.е. пусть справедливо числовое неравенство $R(x_1) > Q(x_1)$. Тогда по свойству числовых неравенств справедливо и числовое неравенство $R(x_1) - Q(x_1) > 0$. Справедливость этого числового неравенства означает, что число x_1 является решением неравенства $R(x) - Q(x) > 0$. Поскольку такое рассуждение можно провести для любого решения неравенства $R(x) > Q(x)$, то любое решение неравенства $R(x) > Q(x)$ есть решение неравенства $R(x) - Q(x) > 0$.

Покажем теперь обратное. Пусть число x_2 есть некоторое решение неравенства $R(x) - Q(x) > 0$, т.е. пусть справедливо числовое неравенство $R(x_2) - Q(x_2) > 0$. Из справедливости последнего неравенства следует справедливость числового неравенства $R(x_2) > Q(x_2)$, а это означает, что число x_2 — решение неравенства $R(x) > Q(x)$. Поскольку такое рассуждение можно провести для любого решения неравенства $R(x) - Q(x) > 0$, то любое решение неравенства $R(x) - Q(x) > 0$ есть решение неравенства $R(x) > Q(x)$. Значит, если каждое из неравенств $R(x) > Q(x)$ и $R(x) - Q(x) > 0$ имеет решение, то эти неравенства равносильны.

Из доказанного вытекает, что если одно из неравенств $R(x) > Q(x)$ или $R(x) - Q(x) > 0$ не имеет решений, то и другое не имеет решений, т.е. в этом случае неравенства $R(x) > Q(x)$ и $R(x) - Q(x) > 0$ равносильны. Утверждение 1 доказано.

Из утверждений 1 и 4 вытекает, что каждое алгебраическое неравенство можно привести или к виду $P(x) > 0$ или к виду $P(x) < 0$, поэтому достаточно рассмотреть лишь неравенства вида

$$P(x) > 0 \tag{2}$$

и

$$P(x) < 0 \tag{3}$$

где $P(x)$ — многочлен степени n относительно буквы x, т.е.

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0).$$

Такие неравенства называют алгебраическими неравенствами степени n.

Неравенства первой степени. Метод интервалов. Пусть надо решить неравенство

$$a_0x + a_1 > 0 \quad (a_0 \neq 0), \tag{4}$$

которое называется *неравенством первой степени*. На основании утверждения 2 неравенство (4) равносильно неравенству

$$a_0x > -a_1 \quad (a_0 \neq 0). \tag{5}$$

Рассмотрим случаи $a_0 > 0$ и $a_0 < 0$. Пусть $a_0 > 0$, тогда на основании утверждения 3а) неравенство (5) равносильно неравенству

$$x > -\frac{a_1}{a_0} \quad (a_0 \neq 0). \tag{6}$$

Очевидно, что любое x из промежутка $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ удовлетворяет неравенству (6). Следовательно, множество всех решений неравенства (6) есть промежуток $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ (рис. 11). Так как неравенство (4) при $a_0 > 0$ равносильно неравенству (6), то множество всех решений неравенства (4) также есть промежуток $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$. Все равносильные переходы от неравенства (4) к неравенству (5), а затем к очевидному неравенству (6) записываются более коротко в виде следующей цепочки равносильных переходов:

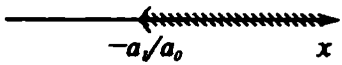


Рис. 11.

$$a_0x + a_1 > 0 \ (a_0 > 0) \Leftrightarrow a_0x > -a_1 \ (a_0 > 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x > -\frac{a_1}{a_0} \ (a_0 > 0).$$

Аналогично справедливы следующие цепочки равносильных переходов:

$$a_0x + a_1 > 0 \ (a_0 < 0) \Leftrightarrow a_0x > -a_1 \ (a_0 < 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x < -\frac{a_1}{a_0} \ (a_0 < 0).$$

$$a_0x + a_1 < 0 \ (a_0 > 0) \Leftrightarrow a_0x < -a_1 \ (a_0 > 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x < -\frac{a_1}{a_0} \ (a_0 > 0).$$

$$a_0x + a_1 < 0 \ (a_0 < 0) \Leftrightarrow a_0x < -a_1 \ (a_0 < 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x > -\frac{a_1}{a_0} \ (a_0 < 0).$$

В каждой из этих цепочек из последнего неравенства легко найти множество всех решений первого неравенства данной цепочки (при указанном ограничении на a_0). Итак, решением неравенства $a_0x + a_1 > 0$ при $a_0 < 0$ является промежуток $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$; решением неравенства $a_0x + a_1 < 0$ при $a_0 > 0$ является промежуток $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$; решением неравенства $a_0x + a_1 < 0$ при $a_0 < 0$ является промежуток $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$.

Все вышенаписанное о решении неравенств первой степени часто формулируют так: многочлен первой степени $a_0x + a_1$ $(a_0 \neq 0)$:

а) при $a_0 > 0$ положителен для любого $x \in \left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ и отрицателен для любого $x \in \left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$;

б) при $a_0 < 0$ положителен для любого $x \in \left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$ и отрицателен для для любого $x \in \left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$.

В частности, двучлен $(x - \alpha)$ положителен для всех x, находящихся на числовой оси справа от точки, изображающей число α, и отрицателен для всех x, находящихся слева от этой точки. Другими словами, точка α делит числовую ось на две части: в части, находящейся справа от точки α, двучлен $(x - \alpha)$ положителен, а в части, находящейся слева от точки α, отрицателен.

Это свойство двучлена $(x - \alpha)$ лежит в основе *метода интервалов* и часто используется для решения алгебраических неравенств более высоких степеней.

Пусть требуется решить неравенство

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n) > 0, \tag{7}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ — фиксированные числа, среди которых нет равных, причем такие, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} <$ $< \alpha_n$.

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n). \tag{8}$$

На основании сделанного выше замечания очевидно, что для любого числа x_0 такого, что $x_0 > \alpha_n$, соответствующее числовое значение любого сомножителя в произведении (8) положительно, поэтому соответствующее числовое значение $P(x_0)$ многочлена $P(x)$ также положительно. Для любого числа x_1, взятого из интервала (α_{n-1}, α_n), соответствующее числовое значение последнего сомножителя отрицательно, а соответствующее числовое значение любого из оставшихся сомножителей положительно, поэтому число $P(x_1)$ — отрицательно; аналогично для любого числа x_2 из интервала $(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1})$ число $P(x_2)$ — положительно и т.д.

На этом рассуждении и основан *метод интервалов*, состоящий в следующем: на числовую прямую наносят числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n$; над лучом справа от наибольшего из них ставят знак плюс, под следующим за ним справа налево интервалом ставят знак минус, затем — знак плюс, затем — знак минус и т.д. (рис. 12). Тогда множество всех решений неравенства (7) будет объеденением всех промежутков, в которых поставлен знак плюс.

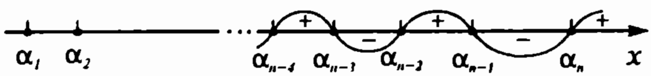


Рис. 12.

Методом интервалов можно решать те алгебраические неравенства, которые цепочкой равносильных переходов можно свести к неравенствам вида (7).

Пример. Решить неравенство

$$(x - 3)(2 + x)(4 - x) > 0. \qquad (9)$$

Умножая неравенство (9) на (— 1) получим равносильное ему неравенство

$$[x - (- 2)](x - 3)(x - 4) < 0. \qquad (10)$$

Для решения неравенства (10) применим метод интервалов: на числовую прямую наносим числа (— 2), 3, 4.В промежутках справа налево расставим знаки плюс и минус (рис. 13). Множество всех x из промежутков $(-\infty, -2)$ и

(3, 4) — множество всех решений неравенства (10). Поскольку неравенство (9) равносильно неравенству (10), то множество всех решение неравенства (9) есть множество $(-\infty, -2) \cup (3, 4)$.

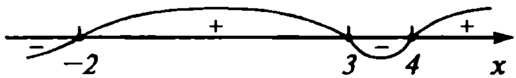


Рис. 13.

Квадратное неравенство. Применим метод интервалов к решению алгебраических неравенств второй степени. Отметим, что обычно их называют *квадратными* неравенствами. Рассмотрим квадратное неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (a \neq 0). \tag{11}$$

Применяя тождественное преобразование «выделение полного квадрата» (см. § 1, гл. III), получаем

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right],$$

где $D = b^2 - 4ac$. Поэтому неравенство (11) равносильно неравенству

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] > 0 \quad (a \neq 0). \tag{12}$$

Пусть $a > 0$. Тогда неравенство (12) равносильно неравенству

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} > 0 \quad (a > 0). \tag{13}$$

а) Если $D < 0$, то при любом числовом значении неизвестного $x = x_0$ в левой части неравенства (13) стоит сумма неотрицательного числа $\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2$ и положительного числа $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)$, т.е. неравенство (13) превращается в верное числовое неравенство. Следовательно, неравенство (13) справедливо при любом x. Другими словами, множество всех решений неравенства (13) в этом случае есть множество всех действительных чисел.

б) Если $D = 0$, то очевидно, что неравенство (13) превращается в верное числовое неравенство для любого числа x, кроме $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Следовательно, множество всех решений неравенства (13) в этом случае есть множество $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

в) Если $D > 0$, то неравенство (13) равносильно неравенству

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \quad (a > 0), \tag{14}$$

где $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Очевидно, что $x_1 < x_2$, поэтому, применяя метод интервалов, получим, что множество всех решений неравенства (14) есть множество $(-\infty, x_1) \cup$ $\cup\ (x_2, +\infty)$.

Пусть $a < 0$. Тогда неравенство (12) равносильно неравенству

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} < 0 \quad (a < 0). \tag{15}$$

а) Если $D < 0$, то очевидно, что для любого числа x это неравенство превращается в неверное числовое неравенство, а потому неравенство (15) не имеет решений.

б) Если $D = 0$, то столь же очевидно, что неравенство (15) не имеет решений.

в) Если $D > 0$, то неравенство (15) равносильно неравенству

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0 \quad (a < 0), \tag{16}$$

где $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Очевидно, что $x_1 > x_2$, поэтому, применяя метод интервалов, получим, что множество всех решений неравенства (16) есть интервал $(x_2; x_1)$.

Аналогично проводится решение неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ $(a \neq 0)$. Приведенные выше рассуждения можно собрать вместе (см. табл. 1).

Таблица 1

a	D	Неравенство	Решение неравенства
$a > 0$	$D > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\left(-\infty, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, +\infty\right)$
$a > 0$	$D > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)$
$a > 0$	$D = 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
$a > 0$	$D = 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	нет решений
$a > 0$	$D < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$(-\infty, +\infty)$
$a > 0$	$D < 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	нет решений
$a < 0$	$D > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)$
$a < 0$	$D > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$\left(-\infty, \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, +\infty\right)$
$a < 0$	$D = 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	нет решений
$a < 0$	$D = 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
$a < 0$	$D < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	нет решений
$a < 0$	$D < 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$(-\infty, +\infty)$

Отметим, что запоминать эту таблицу не надо, для решения конкретного квадратного неравенства лучше каждый раз повторять те рассуждения, которые были сделаны выше.

Пример. Решить неравенство

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Поскольку корни квадратного трехчлена $P(x) = x^2 - x - 6$ есть $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$, то $P(x) = (x - 3)(x + 2)$.

Значит, неравенство равносильно неравенству

$$(x - 3)(x + 2) < 0.$$

Применив метод интервалов к последнему неравенству (рис. 14), получим, что множество всех решений исходного неравенства есть интервал $(-2; 3)$.

Рис. 14.

Обобщенный метод интервалов. Некоторые алгебраические неравенства степеней, более высоких чем два, цепочкой равносильных переходов приводятся к виду

$$(x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_{n-1})^{k_{n-1}} (x - \alpha_n)^{k_n} > 0, \quad (17)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n$ — фиксированные натуральные числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ — фиксированные действительные числа, среди которых нет равных, и такие, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$ (отметим, что если хотя бы одно из чисел $k_i \geq 2$, то для решения неравенства (17) неприменим приведенный выше метод интервалов). Тогда неравенства вида (17) решаются так называемым *обобщенным методом интервалов*. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_{n-1})^{k_{n-1}}(x - \alpha_n)^{k_n}. \quad (18)$$

Очевидно, что для любого числа x_0 такого, что $x_0 > \alpha_n$, соответствующее числовое значение любого сомножителя в произведении (18) положительно, поэтому числовое значение $P(x_0)$ многочлена $P(x)$ также положительно.

Для любого числа x_1, взятого из интервала (α_{n-1}, α_n), соответствующее числовое значение любого сомножителя, кроме последнего, положительно; соответствующее числовое значение последнего сомножителя положительно, если k_n — четное число, и отрицательно, если k_n — нечетное число. Поэтому число $P(x_1)$, положительно, если k_n — четное число, и число $P(x_1)$ — отрицательно, если k_n — нечетное число. Обычно в этих случаях говорят, что многочлен $P(x)$ при переходе через точку α_n меняет знак, если k_n — нечетное число, и не меняет знака, если k_n — четное число.

Аналогично показывается, что если известен знак многочлена $P(x)$ на интервале (α_i, α_{i+1}), то на интервале (α_{i-1}, α_i) знак определяется по правилу: многочлен $P(x)$ при переходе через точку α_i меняет знак, если k_i — нечетное число, и не меняет знака, если k_i — четное число. На этом рассуждении и основан ***обобщенный метод интервалов***: на числовую ось наносятся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$; над лучом справа от наибольшего из этих чисел, т.е. справа от α_n, ставят знак плюс, над следующим за ним справа налево интервалом ставят знак плюс, если k_n — четное число, и знак минус, если k_n — нечетное число; над следующим за ним справа налево интервалом ставят знак, пользуясь правилом: многочлен $P(x)$ при переходе через точку α_{n-1} меняет знак, если k_{n-1} — нечетное число, и не меняет знака, если k_{n-1} — четное число; затем рассматривается следующий за ним справа налево интервал, в нем ставят знак, пользуясь тем же правилом; таким образом рассматриваются все промежутки.

Решением неравенства (17) будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак плюс.

Пример. Решить неравенство

$$(x+5)(2x-3)^5(-x+7)^3(3x+8)^2<0. \tag{19}$$

Прежде всего, умножая это неравенство на $\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$, получим равносильное ему неравенство

$$[x-(-5)]\left[x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^5(x-7)^3>0. \tag{20}$$

Для решения неравенства (20) применим обобщенный метод интервалов. На числовой оси отметим числа (-5), $\left(-\frac{8}{3}\right)$, $\frac{3}{2}$, 7 (рис. 15). Справа от наибольшего числа, т.е. от числа 7, ставим знак плюс. При переходе через точку (7) многочлен

$$P(x) = [x - (-5)]\left[x - \left(-\frac{8}{3}\right)\right]^2 \left(x - \frac{3}{2}\right)^5 (x - 7)^3 \quad (21)$$

меняет знак, так как двучлен (x — 7) содержится в произведении (21) в нечетной степени, поэтому под интервалом $\left(\frac{3}{2}, 7\right)$ ставим знак минус. При переходе через точку $\left(\frac{3}{2}\right)$ многочлен $P(x)$ меняет знак, так как двучлен $\left(x - \frac{3}{2}\right)$ содер-

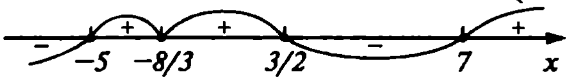


Рис. 15.

жится в произведении (21) в нечетной степени, поэтому над интервалом $\left(-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\right)$ ставим знак плюс. При переходе через точку $\left(-\frac{8}{3}\right)$ $P(x)$ не меняет знака, так как двучлен $\left[x - \left(-\frac{8}{3}\right)\right]$ содержится в произведении (21) в четной степени, поэтому над интервалом $\left(-5, -\frac{8}{3}\right)$ ставим знак плюс. Наконец, при переходе через точку (— 5) многочлен $P(x)$ меняет знак, так как двучлен $[x - (-5)]$ содержится в произведении (21) в первой степени, поэтому под лучом $(-\infty, -5)$ ставим знак минус. Итак, решение неравенства (20) и равносильного ему неравенства (19) — совокупность всех промежутков, где поставлен знак плюс, т.е. множество всех решений неравенства (19) есть множество $\left(-5, -\frac{8}{3}\right) \cup \left(-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (7, +\infty)$.

Нестрогие неравенства. Перейдем теперь к решению нестрогих неравенств

$$P(x) \geq 0, \quad (22)$$

$$P(x) \leq 0. \quad (23)$$

Если некоторое число x_0 есть решение неравенства (22), то справедливо числовое неравенство $P(x_0) \geq 0$. Тогда в силу определения нестрогого знака неравенства справедливо или числовое равенство $P(x_0) = 0$ или числовое неравенство $P(x_0) > 0$. Другими словами, если число x_0 — решение неравенства (22), то оно либо решение уравнения $P(x) = 0$, либо неравенства $P(x) > 0$. Такое рассуждение можно провести для любого решения неравенства $P(x) \geq 0$. Аналогично показывается, что любое решение неравенства $P(x) > 0$ и любое решение уравнения $P(x) = 0$ также есть решение неравенства (22).

Таким образом, множество решений нестрогого неравенства (22) является объединением двух множеств: множества всех решений строгого неравенства $P(x) > 0$ и множества всех решений уравнения $P(x) = 0$.

Аналогично множество всех решений нестрогого неравенства (23) является объединением двух множеств, множества всех решений строгого неравенства $P(x) < 0$ и множества всех решений уравнения $P(x) = 0$.

На этом и основано ***правило решения нестрогих неравенств***. Сначала решаются соответствующее строгое неравенство и соответствующее уравнение, а затем множества решений строгого неравенства и уравнения объединяются; объединение этих множеств и является множеством всех решений нестрогого неравенства.

Примеры. 1. Решим нестрогое неравенство первой степени:

$$a_0x + a_1 \geq 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{24}$$

Решаем сначала уравнение

$$a_0x + a_1 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{25}$$

Его единственное решение — число $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$. Затем решаем неравенство

$$a_0x + a_1 > 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{26}$$

При $a_0 > 0$ множество всех его решений — множество $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$, при $a_0 < 0$ множество всех его решений — множество $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$; объединяя решения уравнения (25) и неравенства (26), получаем: для $a_0 > 0$ множество всех решений неравенства (24) есть множество $\left[-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ (рис. 16); для $a_0 < 0$ множество всех решений неравенства (24) есть множество $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right]$ (рис. 17).

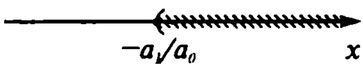


Рис. 16.

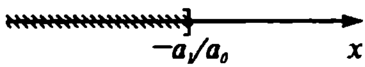


Рис. 17.

2. Решить неравенство

$$(x^2 - 3x + 2)(x^3 - 3x^2)(4 - x^2) \geq 0. \qquad (27)$$

Поскольку справедливы следующие тождественные равенства

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1),$$
$$x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3),$$
$$4 - x^2 = -(x - 2)(x + 2),$$

то согласно утверждениям 4 и 3б) этого параграфа неравенство (27) равносильно неравенству

$$[x - (-2)]\, x^2 (x - 1)(x - 2)^2 (x - 3) \leq 0. \qquad (28)$$

Решим сначала уравнение

$$[x - (-2)]\, x^2 (x - 1)(x - 2)^2 (x - 3) = 0. \qquad (29)$$

Оно имеет только пять корней: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$. Затем решаем строгое неравенство

$$[x - (-2)]\, x^2 (x - 1)(x - 2)^2 (x - 3) < 0. \qquad (30)$$

обобщенным методом интервалов (рис. 18). Множеством всех его решений будет множество $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (2; 3)$. Объединяя множество всех решений уравнения (29) и строгого неравенства (30), получим множество всех решений неравенства (28), а в силу равносильного перехода — неравенства (27).

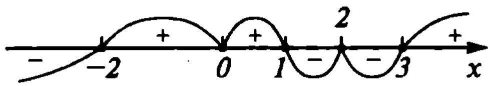


Рис. 18.

Итак, множество всех решений неравенства (27) есть множество $(-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [1; 3]$.

§ 3. Уравнения с двумя неизвестными

Основные понятия. Пусть дано уравнение

$$R(x, y) = Q(x, y), \tag{1}$$

где $R(x, y)$, $Q(x, y)$ — многочлены (см. § 3 гл. II) относительно двух букв x и y. Тогда говорят, что дано *алгебраическое уравнение с двумя неизвестными x и y*. Упорядоченная пара (x, y) называется *набором неизвестных* уравнения (1). ОДЗ уравнения (1) является множество всех пар (x, y), где буквы x и y могут быть любыми действительными числами.

Числовой набор (x_0, y_0) соответствующий набору неизвестных (x, y) называется *решением уравнения* (1), если равны числовые значения многочленов R и Q, соответствующие этому числовому набору, т.е. если справедливо числовое равенство $R(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0)$. *Решить уравнение* (1) — значит найти множество всех его решений, т.е. найти все числовые наборы, каждый из которых обращает уравнение (1) в верное числовое равенство. Если множество всех решений уравнения (1) состоит из k пар (среди которых нет равных) действительных чисел (x_1, y_1); (x_2, y_2); ... ... ;(x_k, y_k), то говорят, что уравнение (1) имеет *только k решений*, т.е. множество всех решений есть множество $M = \{(x_1, y_1); (x_2, y_2); \dots ; (x_k, y_k)\}$. Если же множество всех решений состоит из одной пары (x_1, y_1), то говорят, что уравнение (1) имеет *единственное решение*. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ имеет единственное решение (x, y): $(0, 0)$. В случае, если множество всех решений уравнения (1) есть пустое множество, говорят, что уравнение (1) *не имеет решений*. Например, уравнение $x^2 + y^2 = -1$ не имеет решений.

Пусть даны два алгебраических уравнения с двумя неизвестными:

$$R(x, y) = Q(x, y) \quad \text{и} \quad T(x, y) = S(x, y).$$

Эти уравнения называются *равносильными*, если любое решение первого уравнения является решением второго уравнения и любое решение второго уравнения является решением первого уравнения. В силу этого определения равносильны любые два уравнения, не имеющие решений.

Замена одного уравнения равносильным ему другим уравнением называется *равносильным переходом* от первого уравнения ко второму.

Справедливы следующие утверждения:

1. *Уравнения* $R(x, y) = Q(x, y)$ *и* $R(x, y) - Q(x, y) = 0$ *равносильны.*

2. *Уравнения* $R(x, y) = Q(x, y)$ *и* $R(x, y) + S(x, y) = Q(x, y) + S(x, y)$, *где* $S(x, y)$ — *любой многочлен относительно букв* x *и* y, — *равносильны.*

3. *Уравнения* $R(x, y) = Q(x, y)$ *и* $\alpha R(x, y) = \alpha Q(x, y)$ *равносильны для любого, отличного от нуля действительного числа* α.

4. *Пусть известно, что справедливо тождественное равенство* $R(x, y) = T(x, y)$, *тогда уравнения* $R(x, y) = Q(x, y)$ *и* $T(x, y) = Q(x, y)$ *равносильны.*

Справедливость этих утверждений доказывается аналогично доказательству соответствующих утверждений § 1 и потому опускается. Из утверждений 1 и 4 вытекает, что каждое алгебраическое уравнение с двумя неизвестными x и y можно привести к виду $P(x, y) = 0$, поэтому можно рассматривать лишь уравнения вида

$$P(x, y) = 0, \tag{2}$$

где $P(x, y)$ — многочлен относительно букв x и y. Для геометрической иллюстрации множества всех решений уравнения (2) целесообразно ввести систему координат на плоскости.

Прямоугольная система координат на плоскости. Если указан способ, позволяющий устанавливать положение точек на плоскости заданием пар чисел, то говорят, что *на плоскости задана система координат*. Плоскость в этом случае называют *координатной плоскостью*. Рассмотрим простейшую и чаще всего употребляемую систему координат, которая называется прямоугольной.

Пусть дан отрезок, длина которого принята за единицу измерения длины на плоскости, т.е. пусть введен масштаб. Пусть даны две взаимно перпендикулярные прямые. Точку пересечения прямых будем считать началом отсчета или началом координат. На каждой прямой зададим положительное направление и отложим от начала координат заданный единичный отрезок. Таким образом, на каждой этой прямой введена своя система координат (см. § 5 гл. I); эти прямые называют координатными прямыми, их часто называют еще координатными осями, причем одну из них принято называть *осью абсцисс*, а другую — *осью ординат*.

Если на плоскости введен масштаб и заданы две взаимно перпендикулярные координатные оси и указано, какая из этих осей является осью абсцисс, а какая осью ординат, то говорят, что на плоскости задана *прямоугольная система координат*.

Обозначим начало координат буквой O, ось абсцисс — буквами Ox и ось ординат — буквами Oy. На рисунках координатные оси обычно располагаются так, чтобы ось абсцисс была горизонтальной и ее положительная полуось направлена вправо, а положительная полуось ординат — вверх (рис. 19).

Пусть M — любая точка координатной плоскости. Проведем через точку M прямые, параллельные координатным осям. Пусть прямая, проходящая через точку M и параллельная оси Oy, пересечет ось абсцисс в точке N, а прямая, проходящая через точку M, параллельная оси Ox, пересечет ось ординат в точке L (см. рис. 19). Так как на осях заданы системы координат, то точка N имеет в системе координат на оси абсцисс координату a, точка L имеет в своей системе координат на оси ординат координату b. Тогда *координатами точки M* в выбранной системе координат с осями Ox и Oy называют *упорядоченную пару чисел* (a, b). Число a называется первой координатой, или *абсциссой точки M*, число b называется второй координатой, или *ординатой точки M*. Тот факт, что точка M имеет абсциссу a и ординату b записывается так: $M(a, b)$ (при этом сначала пишется абсцисса, затем ордината точки M).

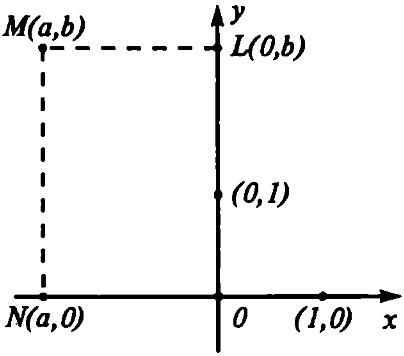


Рис. 19.

Часто, когда рассматриваются несколько разных фиксированных точек координатной плоскости, их обозначают некоторой заглавной буквой с разными номерами, например, M_1, M_2, ..., M_n, ... Координаты этих точек помечаются соответствующими номерами: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ... $M_n(x_n, y_n)$, ...

Так как через любую точку плоскости можно провести только одну прямую, параллельную данной оси координат, а каждая такая прямая пересечет соответствующую перпендикулярную ей ось только в одной точке, то каждой точке координатной плоскости соответствует только одна упорядоченная пара чисел — координаты этой точки.

Между точками, лежащими на любой оси, и множеством действительных чисел имеется взаимно однозначное соответствие (см. гл. I), следовательно, разным точкам плоскости xOy будут соответствовать разные упорядоченные пары действительных чисел. Итак, если на плоскости задана прямоугольная система координат xOy, то между множеством точек на плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел существует следующее соответствие:

1. Каждой точке плоскости соответствует одна упорядоченная пара действительных чисел.

2. Двум разным точкам плоскости соответствуют разные упорядоченные пары действительных чисел.

3. Нет ни одной упорядоченной пары действительных чисел, которая бы не соответствовала какой-нибудь точки плоскости.

Такое соответствие называется *взаимно однозначным соответствием*. Таким образом, введение на плоскости прямоугольной системы координат позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел. Это соответствие дает возможность сводить изучение множества точек плоскости к изучению множества пар действительных чисел, т.е. применять к изучению вопросов геометрии алгебраические методы.

Сделаем несколько замечаний:

1. *Абсцисса* точки *M равна нулю* тогда и только тогда, когда точка M лежит на оси Oy.

2. *Ордината* точки *M равна нулю* тогда и только тогда, когда точка M лежит на оси Ox.

3. Точка *O — начало координат* (и только она) *имеет обе координаты, равные нулю.*

4. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет положительную ординату ($y > 0$), называется *верхней полуплоскостью.*

5. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет отрицательную ординату ($y < 0$), называется *нижней полуплоскостью.*

6. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет положительную абсциссу ($x > 0$), называется *правой полуплоскостью.*

7. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет отрицательную абсциссу ($x < 0$), называется *левой полуплоскостью.*

8. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет положительную абсциссу ($x > 0$) и положительную ординату ($y > 0$), называется *первой координатной четвертью.*

9. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет положительную ординату ($y > 0$) и отрицательную абсциссу ($x < 0$), называется *второй координатной четвертью.*

10. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет отрицательную абсциссу ($x < 0$) и отрицательную ординату ($y < 0$), называется *третьей координатной четвертью.*

11. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет отрицательную ординату ($y < 0$) и положительную абсциссу ($x > 0$), называется *четвертой координатной четвертью.*

12. Две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ называются *симметричными относительно оси ординат*, если их координаты таковы, что $x_1 = -x_2$ и $y_1 = y_2$ (рис. 20); *симметричными относительно оси абсцисс*, если их координаты таковы, что $x_1 = x_2$ и $y_1 = -y_2$ (рис. 21); *симметричными относительно начала координат*, если их координаты таковы, что $x_1 = -x_2$ и $y_1 = -y_2$ (рис. 22).

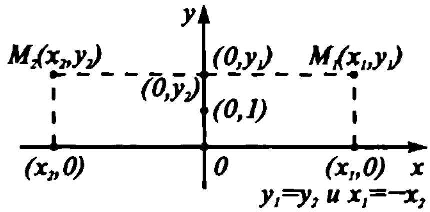


Рис. 20.

Теорема 1. *При любом расположении двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости квадрат расстояния между ними (т.е. квадрат длины отрезка M_1M_2) определяется формулой $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, т.е. квадрат расстояния между двумя любыми точками координатной плоскости равен сумме квадратов разностей одноименных координат.*

Доказательство. Пусть даны две несовпадающие точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Прямая M_1M_2 может быть:

а) параллельна оси Oy (или совпадать с ней);

б) параллельна оси Ox (или совпадать с ней);

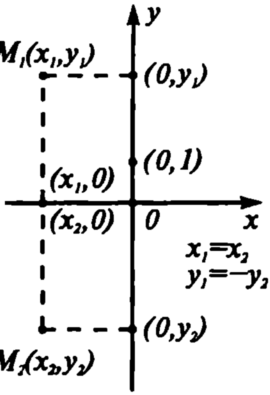


Рис. 21.

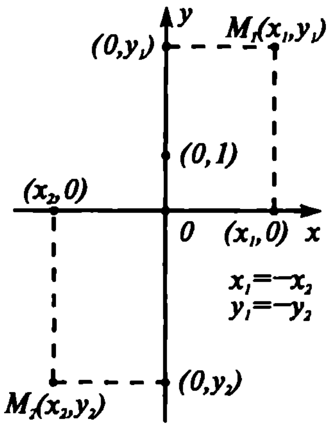


Рис. 22.

в) не параллельна ни оси Oy, ни оси Ox. Доказательство теоремы проведем для каждого из этих случаев отдельно.

а) Пусть прямая, на которой лежат точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, параллельна оси Oy (или совпадает с ней). Тогда у любой точки, лежащей на этой прямой, одна и та же абсцисса, т.е. у точек M_1 и M_2 одинаковые абсциссы: $x_1 = x_2 = m$ (рис. 23).

Эта прямая может быть рассмотрена как ось с положительным направлением вверх, с тем же самым единичным отрезком, что и для системы координат xOy, и началом в точке $(m, 0)$. Координата любой точки этой оси будет совпадать с ординатой той же точки, рассматриваемой как точка плоскости. Согласно теореме 1 (§ 5 гл. I) расстояние между точками M_1 и M_2, как точками этой координатной прямой, равно $d = y_2 - y_1$, откуда

$$d^2 = |y_2 - y_1|^2 = 0 + (y_2 - y_1)^2 = (m - m)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \\ = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

б) Пусть прямая, на которой лежат точки M_1 и M_2, параллельна оси Ox (или совпадает с ней). Тогда у любой точки, лежащей на этой прямой, одна и та же ордината, т.е. у точек M_1 и M_2 одинаковые ординаты: $y_1 = y_2 = n$ (рис. 24).

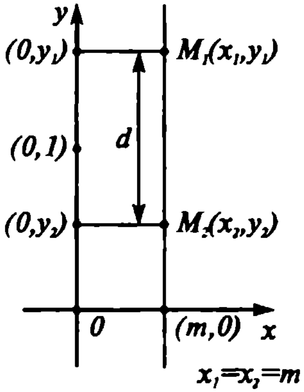


Рис. 23.

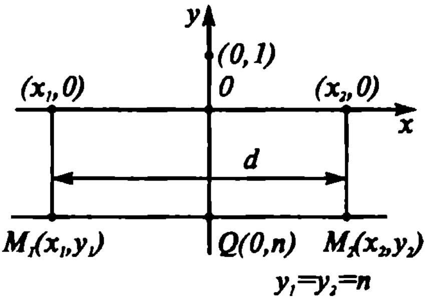


Рис. 24.

Эта прямая может быть рассмотрена как ось с положительным направлением вверх, с тем же самым единичным отрезком, что и для системы координат xOy, и началом в точке $(0, n)$. Координата любой точки этой оси будет совпадать с абсциссой той же точки, как точки плоскости. Согласно теореме 1 (§ 5 гл. I) расстояние между точками M_1 и M_2, как точками этой координатной прямой, равно $d = x_2 - x_1$, откуда

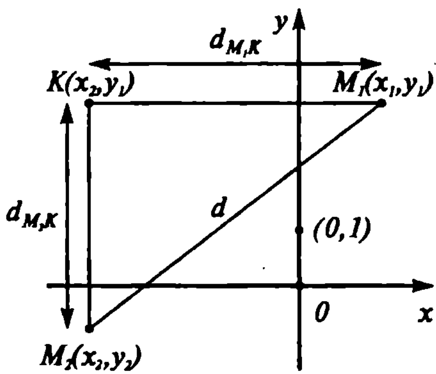


Рис. 25.

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + 0 = (x_2 - x_1)^2 + (n - n)^2 =$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

в) Пусть теперь точки M_1 и M_2 не лежат ни на прямой, параллельной оси ординат, ни на прямой, параллельной оси абсцисс. Тогда одноименные координаты этих точек будут разные числа, т.е. $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ (рис. 25). Проведем через точку M_1 прямую, параллельную оси абсцисс, а через точку M_2 — прямую, параллельную оси ординат. Эти прямые пересекутся в точке $K(x_2, y_1)$. Точка M_1 и точка K лежат на прямой, параллельной оси абсцисс, следовательно, как было установлено в случае б), расстояние между этими точками (длина отрезка M_1K) равно $d_{M_1K} = |x_2 - x_1|$.

Точка M_2 и точка K лежат на прямой, параллельной оси ординат, следовательно, как было установлено в случае а), расстояние между этими точками (длина отрезка M_2K) равно $d_{M_2K} = |y_2 - y_1|$. Так как треугольник M_1KM_2 — прямоугольный, то по теореме Пифагора $d^2 = d^2_{M_1K} + d^2_{M_2K} = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$. На основании свойств абсолютной величины получим

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Теорема доказана полностью.

Следствие. *Расстояние d между двумя любыми точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости определяется по формуле*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример. Найти расстояние d между точками $M_1(-3, -2)$ и $M_2(-2, 1)$.

$$d = \sqrt{[-2-(-3)]^2 + [1-(-2)]^2} = \sqrt{10}.$$

Геометрическая иллюстрация множества решений. Непустое множество всех тех точек координатной плоскости, координаты x и y каждой из которых являются решением уравнения (2): $P(x, y) = 0$ есть некоторая фигура G. Говорят, что уравнение $P(x, y) = 0$ задает фигуру G или что оно является уравнением фигуры G, если выполнены два следующих условия:

1. Координаты каждой точки $M_0(x_0, y_0)$ фигуры G являются решением уравнения $P(x, y) = 0$, т.е. удовлетворяет числовому равенству $P(x_0, y_0) = 0$.

2. Любому решению уравнения $P(x, y) = 0$, т.е. любой паре чисел (x_1, y_1), удовлетворяющей числовому равенству $P(x_1, y_1) = 0$, соответствует на координатной плоскости точка $M_1(x_1, y_1)$, принадлежащая фигуре G.

Приведем некоторые примеры.

1. Пусть дано уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{3}$$

Покажем, что на координатной плоскости это уравнение является уравнением окружности радиуса R с центром в точке $C(a, b)$.

Действительно, возьмем любую точку M_0 с координатами x_0 и y_0, лежащую на данной окружности. По определению окружности расстояние от точки M_0 до центра окружности — точки C — равно R. Используя следствие из теоремы 1, получим, что $R = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$. Из этого числового равенства вытекает числовое равенство

$$R^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2.$$

Следовательно, каждая точка, лежащая на данной окружности, имеет координаты, являющиеся решением уравнения (3).

Возьмем теперь любое решение уравнения (3), т.е. возьмем любую пару чисел (x_1, y_1), такую, что справедливо числовое равенство

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2.$$

Это числовое равенство равносильно числовому равенству

$$\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} = |R|.$$

Упорядоченной паре чисел (x_1, y_1) соответствует на координатной плоскости точка $M_1(x_1, y_1)$, причем из справедливости числового равенства $\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} = |R| = R$

следует, что точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на окружности радиуса R с центром в точке $C(a, b)$.

Значит, действительно, уравнение (3) является уравнением окружности радиуса R с центром в точке $C(a, b)$ (рис. 26). Пусть на координатной плоскости дана окруж-

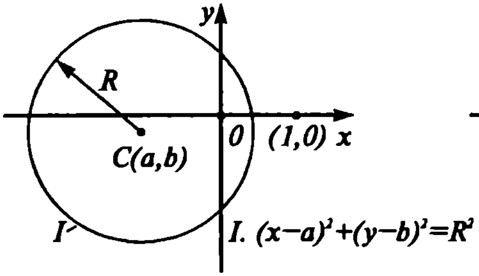


Рис. 26.

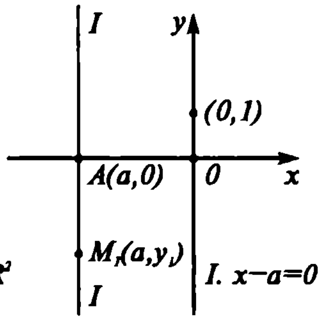


Рис. 27.

ность радиуса r с центром в точке (α, β). Рассуждая аналогично, можно показать, что уравнение

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

есть уравнение этой окружности.

Итак, на координатной плоскости каждое уравнение вида (3) есть уравнение некоторой окружности, а каждая окружность задается некоторым уравнением вида (3).

Поэтому, говоря, что на координатной плоскости дана окружность, имеют в виду, что дано уравнение этой окружности, т.е. что дано уравнение вида (3).

2. Пусть дано уравнение

$$x - a = 0 \qquad (4)$$

Покажем, что на координатной плоскости это уравнение является уравнением прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $A(a, 0)$.

Действительно, возьмем любую точку M_0, лежащую на этой прямой. Тогда абсцисса этой точки есть число $x_0 = a$, а ордината y_0 есть какое-то фиксированное действительное число.

Очевидно, что эти координаты x_0 и y_0 являются решением уравнения (4), т.е. координаты любой точки, лежащей на прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $A(a, 0)$ являются решением уравнения (4).

Возьмем теперь любое решение уравнения (4), т.е. возьмем любую пару чисел (x_1, y_1), такую, что она удовлетворяет числовому равенству $x_1 - a = 0$. Другими словами, возьмем любую пару чисел (a, y_1), где y_1 — любое фиксированное действительное число.

Легко видеть, что точка $M_1(a, y_1)$ лежит на прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $A(a, 0)$ (рис. 27). Значит, действительно, уравнение (4) является уравнением прямой, параллельной оси ординат.

Пусть на координатной плоскости дана прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку $D(d, 0)$. Рассуждая аналогично, можно показать, что уравнение $x - d = 0$ является уравнением этой прямой.

Итак, на координатной плоскости каждое уравнение вида (4) есть уравнение некоторой прямой, параллельной оси ординат, а прямая, параллельная оси ординат, задается некоторым уравнением вида (4).

Поэтому, говоря, что на координатной плоскости дана прямая, параллельная оси ординат, имеют в виду, что дано уравнение этой прямой, т.е. дано уравнение вида (4).

3. Рассуждая аналогично, можно показать, что на координатной плоскости каждое уравнение вида

$$y - b = 0 \tag{5}$$

есть уравнение некоторой прямой, параллельной оси абсцисс (рис. 28), а каждая прямая, параллельная оси абсцисс, задается некоторым уравнением вида (5).

Поэтому, говоря, что на координатной плоскости дана прямая, параллельная оси абсцисс, имеют в виду, что дано уравнение этой прямой, т.е. дано уравнение вида (5).

4. Пусть дано уравнение

$$y = kx + b, \tag{6}$$

где $k \neq 0$.

В главе VI будет показано, что на координатной плоскости это уравнение является уравнением прямой, проходящей через точку $M(0, b)$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен k (рис. 29).

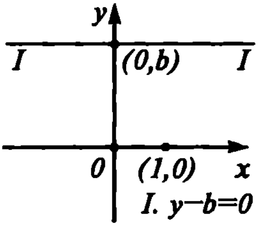


Рис. 28.

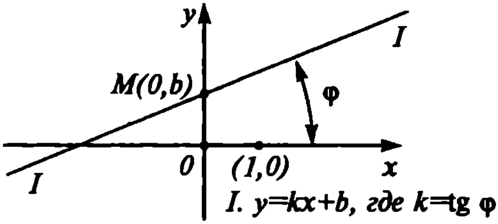


Рис. 29.

Пусть на координатной плоскости дана прямая, проходящая через точку $M(0, b_1)$ и образующая с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен k_1, где $k_1 \neq 0$; можно показать, что уравнение

$$y = k_1 x + b_1$$

является уравнением этой прямой.

Итак, на координатной плоскости каждое уравнение вида (6), где $k \neq 0$, есть уравнение прямой, не параллельной ни одной из осей координат, а каждая прямая, не параллельная ни одной из осей координат, задается некоторым уравнением вида (6), где $k \neq 0$.

Поэтому, говоря, что на координатной плоскости дана прямая, не параллельная оси абсцисс и не параллельная оси ординат, имеют в виду, что дано уравнение этой прямой, т.е. дано уравнение вида (6), где $k \neq 0$.

Уравнение первой степени. *Уравнением первой степени с двумя неизвестными* называется уравнение вида

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A^2 + B^2 \neq 0$, или другими словами, где хотя бы один из двух коэффициентов A и B отличен от нуля.

Из вышеизложенного вытекает, что на координатной плоскости каждое уравнение первой степени с двумя неизвестными есть уравнение некоторой прямой, а каждая прямая плоскости задается некоторым уравнением первой степени с двумя неизвестными.

Действительно, пусть дано уравнение

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0). \tag{7}$$

Если $B = 0$, то учитывая, что $A \neq 0$, уравнение (7) равносильно уравнению

$$x - \left(-\frac{C}{A}\right) = 0,$$

а выше показано, что это уравнение есть уравнение прямой. Если $B \neq 0$, то уравнение (7) равносильно уравнению

$$y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right),$$

а выше показано, что это уравнение есть уравнение прямой. Значит, действительно, уравнение (7) является уравнением некоторой прямой. Кроме того, можно показать, что если на координатной плоскости дана прямая, то она задается некоторым уравнением вида (7).

Поэтому, говоря, что на координатной плоскости дана прямая, имеют в виду, что дано уравнение этой прямой, т.е. что дано некоторое уравнение первой степени с двумя неизвестными. Поскольку через две несовпадающие точки проходит единственная прямая, то для того чтобы задать прямую, достаточно задать две несовпадающие точки, лежащие на этой прямой.

Значит, если известны координаты двух несовпадающих точек, лежащих на этой прямой, то можно написать уравнение этой прямой.

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $M(p, q)$, где $p^2 + q^2 \neq$ $\neq 0$. Если $p = 0$, то очевидно, что эта прямая есть ось ординат и ее уравнение есть $x = 0$.

Если $q = 0$, то очевидно, что эта прямая есть ось абсцисс и ее уравнение есть $y = 0$.

Если $q \neq 0$ и $p \neq 0$, то как указано выше, уравнение этой прямой есть уравнение вида (7), где A, B, C — некоторые фиксированные числа, причем $A^2 + B^2 \neq 0$.

Найдем эти числа, используя условие, что две точки $O(0, 0)$ и $M(p, q)$ лежат на этой прямой.

Так как прямая проходит через начало координат, то пара $(0, 0)$ должна являться решением уравнения (7), а это возможно только если $C = 0$. Ясно, что $B \neq 0$, т.к. если бы коэффициент B был равен нулю, то уравнение (7) имело бы вид $Ax = 0$, т.е. было бы уравнением оси ординат ($A \neq 0$, т.к. $A^2 + B^2 \neq 0$), что противоречит условию $p \neq 0$. Так как $B \neq 0$, то уравнение (7) равносильно уравнению

$$y = kx,$$

где $k = -\frac{A}{B}$. Так как прямая проходит через точку (p, q), то справедливо числовое равенство

$$q = kp.$$

Следовательно, $k = \frac{q}{p}$ и уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $M(p, q)$, не лежащую ни на одной оси координат, имеет вид

$$y = \frac{q}{p}x.$$

Совокупность уравнений. Пусть даны многочлены $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, ..., $P_m(x, y)$ относительно букв x и y.

Говорят, что дана *совокупность m алгебраических уравнений с двумя неизвестными*

$$P_1(x, y) = 0,\ P_2(x, y) = 0,\ ...,\ P_m(x, y) = 0, \qquad (8)$$

если требуется найти все пары чисел (x, y), каждая из которых является решением хотя бы одного уравнения из совокупности (8), и которая называется решением совокупности (8). Таким образом, решить совокупность уравнений (8) — это значит решить каждое уравнение совокупности, т.е. найти множества M_1, M_2, ..., M_m, где M_i — множество всех решений уравнения $P_i(x, y) = 0$, а затем найти множество M_0, являющееся объединением всех этих множеств: $M_0 = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m$. Множество M_0 и будет множеством всех решений совокупности уравнений (8).

Уравнение (1) *равносильно совокупности уравнений* (8), если любое решение уравнения (1) является решением совокупности уравнений (8), а любое решение совокупности уравнений (8) является решением уравнения (1), иными словами, если множества всех решений совпадают. Замена уравнения (1) равносильной совокупностью уравнений (8) называется *равносильным переходом* от уравнения (1) к совокупности уравнений (8).

Часто с помощью таких равносильных переходов к совокупности уравнений удается решить исходное уравнение. Например, пусть требуется найти все корни уравнения

$$x^2 - y^2 = 0. \tag{9}$$

Воспользуемся формулой сокращенного умножения (см. гл. II) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Тогда по утверждению 4 получим уравнение (10), равносильное уравнению (9):

$$(x - y)(x + y) = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10), как легко видеть, равносильно следующей совокупности уравнений:

$$x - y = 0, \quad x + y = 0. \tag{11}$$

Множество всех решений первого уравнения совокупности есть множество всех пар (t, t), где t — любое действительное число: $M_1 = \{(t, t) \mid t \in R\}$. Множество всех решений второго уравнения совокупности есть множество всех пар $(q, -q)$, где q — любое действительное число: $M_2 = \{(q, -q) \mid q \in R\}$. Таким образом, множество всех решений совокупности (1), а значит и уравнения (9), есть объединение этих множеств $M = M_1 \cup M_2$, т.е. $M = \{(t, t) \mid t \in R; (q, -q) \mid q \in R\}$.

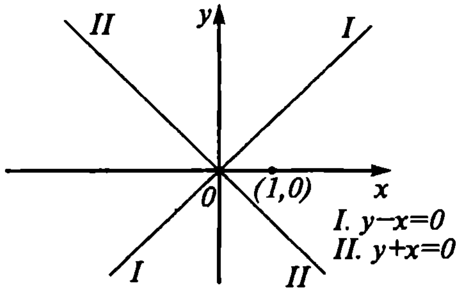


Рис. 30.

Как было показано выше, каждое из уравнений совокупности (11) есть уравнение прямой. Поэтому фигура, задаваемая уравнением (9), представляет собой две прямые; причем легко видеть, что эти прямые проходят через начало координат и являются биссектрисами координатных углов (рис. 30).

§ 4. Системы уравнений

Система двух уравнений с двумя неизвестными. Пусть даны многочлены $P(x, y)$, $Q(x, y)$ относительно букв x и y. Говорят, что дана *система* двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

если требуется найти числовые наборы, соответствующие набору неизвестных (x, y), каждый из которых является решением каждого из уравнений системы (1), т.е. если требуется найти все такие числовые наборы неизвестных (x, y), при подстановке каждого из которых в оба уравнения системы (1) последние обращались бы в верные числовые равенства. Каждый такой числовой набор называется *решением* системы (1) (уравнения системы обычно записываются в столбик, слева от которого пишется фигурная скобка).

Решить систему уравнений (1), это значит найти множество всех решений данной системы. Следует отметить, что это множество является пересечением двух множеств: множества всех решений первого уравнения системы и множества всех решений второго уравнения системы. Рассмотрим еще одну систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} R(x, y) = 0, \\ S(x, y) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $R(x, y)$, $S(x, y)$ — многочлены относительно букв x и y. Две системы алгебраических уравнений (1) и (2) называются *равносильными*, если любое решение первой системы является решением второй системы и любое решение второй системы является решением первой системы. Другими словами, системы (1) и (2) равносильны, если множества их решений совпадают. Из определения следует, что две системы равносильны, если множества их решений пусты.

Говорят, что дана *совокупность* k систем двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} P_1(x, y) = 0, \\ Q_1(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} P_2(x, y) = 0, \ldots, \\ Q_2(x, y) = 0, \ldots, \end{cases} \quad \begin{cases} P_k(x, y) = 0, \\ Q_k(x, y) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, ..., $P_k(x, y)$, $Q_1(x, y)$, $Q_2(x, y)$, ... $Q_k(x, y)$ — многочлены относительно букв x и y, если требуется найти все числовые наборы, каждый из которых является решением хотя бы одной из систем уравнений совокупности (3). Каждый такой набор является *решением* совокупности систем уравнений (3).

Система уравнений (1) *равносильна* совокупности систем уравнений (3), если любое решение системы уравнений (1) является решением совокупности систем уравнений (3), а любое решение совокупности систем уравнений (3) является решением системы уравнений (1).

Приведем некоторые утверждения о равносильности систем уравнений:

1. *Если изменить порядок следования уравнений системы* (1), *то полученная система равносильна системе* (1).

2. *Если одно из уравнений системы* (1) *заменить на равносильное уравнение, то полученная система равносильна системе* (1).

3. *Пусть в системе уравнений с неизвестными x и y одно из уравнений записано в виде, где в левой части стоит одно из неизвестных, например x, в первой степени, а в правой части многочлен относительно y. Тогда говорят, что неизвестное x выражено через другое неизвестное y. Если неизвестное x выражено из первого уравнения системы* (1), *то, подставив в другое уравнение системы* (1) *вместо x этот многочлен от y, получим равносильную систему уравнений*, т.е. равносильны следующие системы:

$$\begin{cases} x = R(y), \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = R(y), \\ Q[R(y), y] = 0. \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение $Q[R(y), y] = 0$ является уравнением с одним неизвестным, и поэтому для нахождения его решений можно применить способы, рассмотренные в § 1.

4. *Если первое уравнение системы* (1) *заменить уравнением, равным сумме первого уравнения, умноженного на некоторое действительное число $\beta \neq 0$, и второго уравнения, умноженного на некоторое действительное число α, то полученная система уравнений равносильна системе уравнений* (1), т.е. при любых действительных $\beta \neq 0$ и α следующие системы уравнений равносильны:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \beta P(x, y) + \alpha Q(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases}$$

В качестве следствия утверждения 4 имеем утверждение:

5. *Если первое уравнение системы* (1) *заменить на сумму (или разность) первого и второго уравнений системы, то полученная система уравнений будет равносильна системе уравнений* (1).

6. *Если первое уравнение системы* (1) *равносильно совокупности уравнений $P_1(x, y) = 0$, $P_2(x, y) = 0$, ..., $P_k(x, y) = 0$, то система* (1) *равносильна следующей совокупности k систем уравнений*:

$$\begin{cases} P_1(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \begin{cases} P_2(x, y) = 0, \dots, \\ Q(x, y) = 0, \dots, \end{cases} \begin{cases} P_k(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Если и уравнение $Q(x, y) = 0$, равносильно совокупности m уравнений $Q_1(x, y) = 0$, $Q_2(x, y) = 0$, ..., $Q_m(x, y) = 0$, то к каждой системе совокупности (4) применимо утверждение 6 и каждая система совокупности (4) может быть заменена своей совокупностью m систем.

Доказательство всех этих утверждений опускается.

Рассмотрим применение этих утверждений при решении систем уравнений.

Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Рассмотрим систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \qquad (5)$$

где $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, другими словами, где хотя бы один из двух коэффициентов a_1 и b_1, а также хотя бы один из двух коэффициентов a_2 и b_2 отличны от нуля (в противном случае по крайней мере один из многочленов $a_1x + b_1y + c_1$ или $a_2x + b_2y + c_2$ не был бы многочленом первой степени ни относительно неизвестного x, ни относительно неизвестного y).

Каждое из двух уравнений системы (5) (как было показано в § 3) является уравнением прямой на координатной плоскости. Как известно, две прямые на плоскости могут либо пересекаться в одной точке, либо совпадать, либо быть параллельными, но не совпадающими. Следовательно, и при нахождении всех решений системы уравнений (5) могут возникнуть эти ситуации.

Рассмотрим их на примерах.

1. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Система (6), как легко видеть, равносильна системе

$$\begin{cases} x = y, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Используя утверждение 3, перейдем от системы (7) к системе

$$\begin{cases} x = y, \\ y + y + 1 = 0, \end{cases} \tag{8}$$

ей равносильной.

Второе уравнение системы (8) есть уравнение первой степени с одним неизвестным и имеет единственное решение $y_1 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, система (8), а значит и

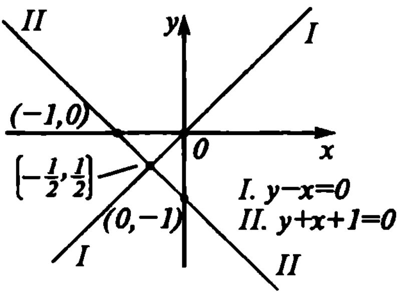


Рис. 31.

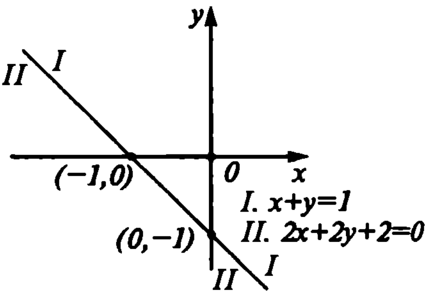


Рис. 32.

равносильная ей система (6) имеет единственное решение (x_1, y_1): $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Точка с этими координатами является точкой пересечения прямых задаваемых уравнениями (6) (рис. 31).

2. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y + 2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Разделив левую и правую части второго уравнения на 2, перейдем к системе

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x + y + 1 = 0, \end{cases} \tag{10}$$

равносильной исходной системе (9).

Система (10) состоит из двух одинаковых уравнений, что соответствует двум совпавшим прямым на координатной плоскости (рис. 32). Очевидно, что множество всех решений системы (10), а значит и равносильной ей системы (9) есть множество всех пар вида (t, $-1-t$), где t — любое действительное число.

3. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} x+y=0, \\ 2x+2y+1=0. \end{cases} \qquad (11)$$

Перейдем к равносильной ей системе

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2x+2y+1=0. \end{cases} \qquad (12)$$

Воспользовавшись утверждением 3, получим систему

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2(-y)+2y+1=0, \end{cases} \qquad (13)$$

равносильную системе (12).

Второе уравнение системы (13) равносильно числовому равенству $1=0$, которое не верно. Следовательно, система (13), а значит и система (11) не имеют решений, что соответствует двум не совпадающим, но параллельным прямым на координатной плоскости (рис. 33).

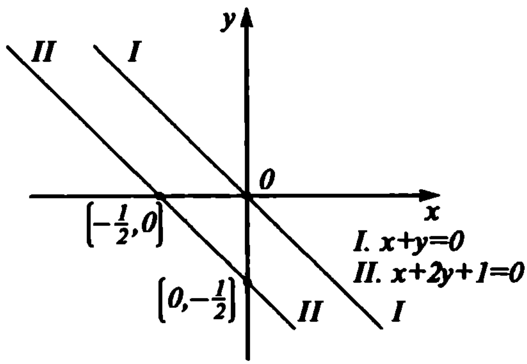


Рис. 33.

Способ решения систем уравнений (6), (9) и (11), основанный на утверждении 3, называется *способом подстановки* или *способом исключения неизвестного*.

Рассмотрим его применение на более сложном примере, когда одно из уравнений системы не является уравнением первой степени:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \qquad (14)$$

Рассмотрим случай, когда $b = 0$. Тогда первое уравнение системы (14) есть уравнение прямой, параллельной оси ординат. Второе уравнение системы (14) есть уравнение окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Применив метод подстановки ($a \neq 0$, так как $b = 0$), получим систему

$$\begin{cases} x = -\frac{c}{a}, \\ \left(-\frac{c}{a}\right)^2 + y^2 = 1, \end{cases} \qquad (15)$$

равносильную исходной системе (14). Второе уравнение системы (15) является квадратным уравнением. Если $1 - \frac{c^2}{a^2} < 0$, то это уравнение не имеет корней и, следователь-

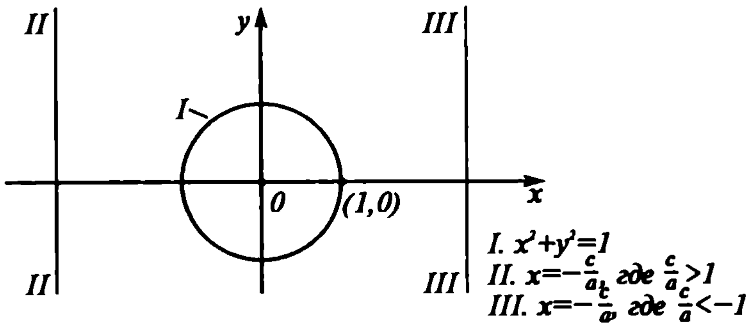


Рис. 34.

но, система (15) и равносильная ей система (14) не имеют решений. Это соответствует ситуации, когда прямая $x = -\frac{c}{a}$ не пересекает единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$

(рис. 34). $\left(\text{На рис. 34 прямая } x = -\frac{c}{a} \text{ изображена и в случае}\right.$ $\left.\left(-\frac{c}{a}\right) > 1, \text{ и в случае} \left(-\frac{c}{a}\right) < -1\right)$. Если $1 - \frac{c^2}{a^2} = 0$, то второе уравнение системы (15) имеет единственное решение $y = 0$.

Система (15), а значит, и система (14) имеют при этом единственное решение (x_1, y_1): $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$. Геометрически это соответствует случаю касания прямой единичной окружности в точке $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$(рис. 35). $\left(\text{На рис. 35 прямая } x = -\frac{c}{a}\right.$ $\left.\text{изображена и в случае } \left(-\frac{c}{a}\right) = 1, \text{ и в случае } \left(-\frac{c}{a}\right) = -1.\right)$

Если $1 - \frac{c^2}{a^2} > 0$, то второе уравнение системы (15) имеет только два корня $y_1 = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ и $y_2 = -\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$. Следовательно, системы (15) и (14) имеют при этом только два решения (x_1, y_1), (x_2, y_2): $\left(-\frac{c}{a}, \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}\right)$, $\left(-\frac{c}{a}, -\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}\right)$. Геометрически это соответствует пересечению единичной окружности прямой $x = -\frac{c}{a}$ в двух точках: $\left(-\frac{c}{a}, \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}\right)$ и $\left(-\frac{c}{a}, -\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}\right)$ (рис. 36). $\left(\text{На рис. 36 прямая } x = -\frac{c}{a}\right.$ изображена в трех случаях: 1) $0 < -\frac{c}{a} < 1$, 2) $\left(-\frac{c}{a}\right) = 0$, 3) $\left.0 > \left(-\frac{c}{a}\right) > -1.\right)$

Если $b \neq 0$, то из первого уравнения системы (14) можно выразить неизвестное y: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ — и аналогично вышесказанному применить способ подстановки. При этом возможны только три ситуации:

1. Система (14) не имеет решений, т.е. прямая и окружность не имеют общих точек (см. рис. 34);

2. Система имеет единственное решение, т.е. прямая является касательной к данной окружности (см. рис. 35);

3. Система имеет только два решения, т.е. прямая пересекает окружность только в двух точках (см. рис. 36).

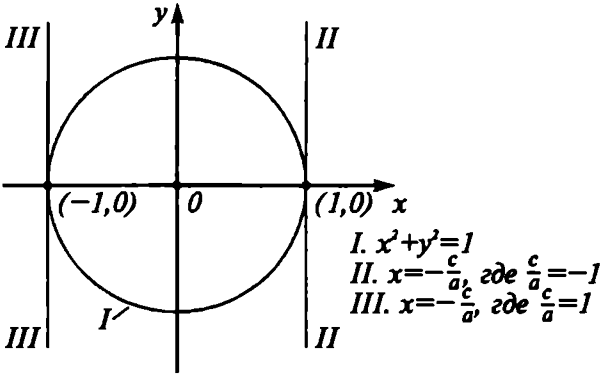


Рис. 35.

Проведение соответствующих выкладок в этом случае предоставляется читателю.

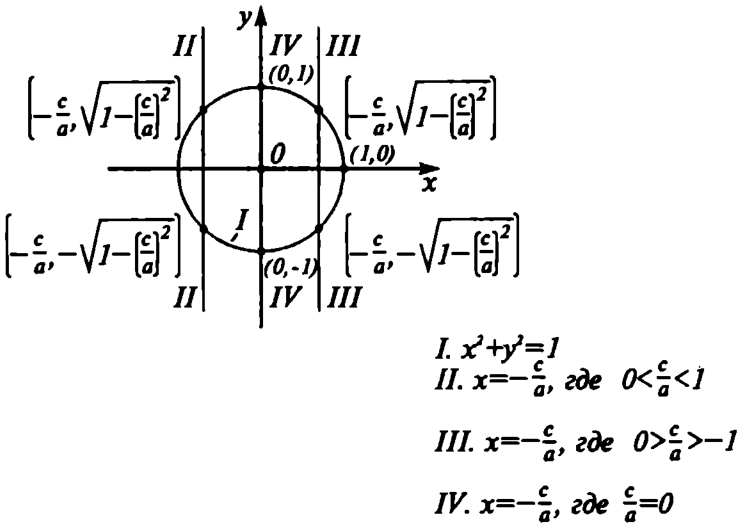


Рис. 36.

Способ линейного преобразования (способ базируется на утверждении 4 и заключен в равносильной замене первого уравнения системы другим уравнением, равным сумме первого уравнения, умноженного на число $\beta \neq 0$, и второго уравнения, умноженного на число α).

Рассмотрим применение этого способа на примере решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3y + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + y - 3 = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим на основании утверждения 5 систему

$$\begin{cases} 2y + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + y - 3 = 0. \end{cases} \qquad (17)$$

равносильную системе (16). Первое уравнение системы (17) имеет единственное решение $y_1 = -2$. Подставив это значение y_1 во второе уравнение системы (17), получим, что эта система, а значит и равносильная ей система (16) имеет только два решения: $(1, -2)$ и $(-1, -2)$. Отметим, что часто эти решения записываются в виде множества: $M = \{(1, -2); (-1, -2)\}$.

Способ замены системы уравнений совокупностью систем уравнений (способ базируется на утверждении 6 о равносильности системы уравнений совокупности систем уравнений).

Рассмотрим применение этого способа на примере решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x + y = 0, \\ x + y^2 - 2 = 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Поскольку первое уравнение этой системы равносильно совокупности уравнений

$$x - y = 0, \quad x + y - 1 = 0,$$

то система (18) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y^2 - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x + y^2 - 2 = 0. \end{cases} \qquad (19)$$

Каждая из систем совокупности (19) легко решается способом подстановки. Первая система имеет только два решения: (1, 1); (— 2, — 2); вторая система тоже имеет только два решения: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Следовательно, система (18) имеет только четыре решения: (1, 1); (— 2, — 2); $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Рассмотрим еще применение этого способа на примере решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, если одно из этих уравнений будет однородным уравнением второй степени. Уравнение $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ называется *однородным уравнением второй степени*. Итак, решим систему уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \\ P(x, y) = 0, \end{cases} \tag{20}$$

где $P(x, y)$ — многочлен относительно x и y.

1. Пусть $a = 0$. Очевидно, что система (20) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} y = 0, \\ P(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} bx + cy = 0, \\ P(x, y) = 0. \end{cases}$$

Каждую из этих систем можно решить способом подстановки.

2. Пусть $a \neq 0$. Применим к левой части первого уравнения системы (20) тождественное преобразование «выделение полного квадрата»:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right) =$$

$$= a\left\{\left[x^2 + 2x\frac{by}{2a} + \left(\frac{by}{2a}\right)^2\right] + \frac{cy^2}{a} - \left(\frac{by}{2a}\right)^2\right\} =$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{Dy^2}{4a^2}\right\}, \tag{21}$$

где $D = b^2 - 4ac$.

В случае, если $D > 0$, левая часть первого уравнения системы (20) представляется в виде произведения

$$ax^2 + bxy + cy_2 = a\left(x + \frac{b}{2a}y + \frac{\sqrt{D}}{2a}y\right)\left(x + \frac{b}{2a}y - \frac{\sqrt{D}}{2a}y\right),$$

и поэтому система (20) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x + \dfrac{b + \sqrt{D}}{2a}y = 0, \\ P(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + \dfrac{b - \sqrt{D}}{2a}y = 0, \\ P(x, y) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Каждую из этих систем можно решить способом подстановки. В случае, если $D = 0$, совокупность систем (22) состоит из двух одинаковых систем уравнений, т.е. на самом деле есть только одна система уравнений.

В случае, если $D < 0$, из равенства (21) вытекает, что уравнение системы (20) имеет единственное решение (x_1, y_1): (0, 0) — и поэтому остается проверить, удовлетворяет ли это решение второму уравнению системы (20).

Решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases} \tag{23}$$

Применим сначала способ линейного преобразования системы: умножая первое уравнение на 7, а второе на 19 и вычитая затем из второго уравнения первое, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 12x^2 - 26xy + 12y^2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 7, \end{cases} \tag{24}$$

равносильной системе (23). Применим к левой части первого уравнения тождественное преобразование «выделение полного квадрата»:

$$12x^2 - 26xy + 12y^2 = 12\left[x^2 - 2x\frac{13y}{12} + \left(\frac{13y}{12}\right)^2 + y^2 - \frac{169y^2}{144}\right] =$$

$$= 12\left[\left(x - \frac{13y}{12}\right)^2 - \frac{25y^2}{144}\right] = 12\left(x - \frac{13y}{12} + \frac{5y}{12}\right)\left(x - \frac{13y}{12} - \frac{5y}{12}\right) =$$

$$= 12\left(x - \frac{2y}{3}\right)\left(x - \frac{3y}{2}\right).$$

На основании этого тождественного преобразования и утверждения 6 можно утверждать, что система уравнений (24) равносильна совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} x - \frac{3y}{2} = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 7, \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем способом подстановки, получаем, что первая система имеет только два решения: (2; 3) и (— 2; — 3); и вторая система имеет только два решения: (3; 2) и (— 3; — 2). Следовательно, система (23) имеет только четыре решения: (2; 3); (— 2; — 3); (3; 2); (— 3; — 2).

Иногда для решения системы уравнений утверждение 6 надо применить не один раз, а несколько раз. Например, так надо поступать при решении системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y), \\ x^3 + y^3 = 7(x + y). \end{cases} \tag{25}$$

Перепишем эту систему в следующем равносильном виде:

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 19) = 0, \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0. \end{cases}$$

На основании утверждения 6 эта система равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 19 = 0, \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0. \end{cases}$$

Применяя к каждой системе опять утверждение 6, получим, что исходная система уравнений (25) равносильна совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - 7 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 19 = 0, \\ x + y = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 19 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - 7 = 0. \end{cases}$$

Первые три системы легко решаются способом подстановки, а четвертая система уже была решена выше. Собирая вместе решения всех этих систем, получаем, что исходная система (25) имеет только девять решений: (0, 0); $(\sqrt{7}, \sqrt{7})$; $(-\sqrt{7}, -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{19}, \sqrt{19})$; $(\sqrt{19}, -\sqrt{19})$; (2; 3); (− 2; − 3); (3; 2); (− 3; − 2).

Отметим, что обычно для решения системы приходится применять несколько способов.

Системы уравнений с несколькими неизвестными. На практике приходится решать системы уравнений не только с двумя неизвестными, но и с большим количеством неизвестных: с тремя, четырьмя и т.д. Поэтому приведем соответствующие определения и рассмотрим необходимые для решения таких систем утверждения.

Пусть надо решить уравнение

$$R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t), \qquad (26)$$

где $R(x, y, z, \ldots, t)$ и $Q(x, y, z, \ldots, t)$ — многочлены (см. гл. II) относительно букв x, y, z, ..., t. Тогда говорят, что дано *алгебраическое уравнение с неизвестными* x, y, z, ..., t. Заметим, что неизвестные x, y, z, ..., t представляют собой множество всех неизвестных, содержащихся как в левой, так и в правой частях уравнения (26). Например, уравнение $4x^2 = yz + 5y^2$ есть уравнение относительно неизвестных x, y, z, ибо многочлены, стоящие в левой и правой частях этого уравнения, могут быть записаны в виде $R(x, y, z) = 4x^2 = 4x^2 + 0 \cdot y + 0 \cdot z$, $Q(x, y, z) = yz + 5y^2 = 0 \cdot x + yz + 5y^2$, откуда видно, что обе части являются многочленами относительно букв x, y, z.

Упорядоченный набор $(x, y, z, \ldots, t)$ называется *набором неизвестных* уравнения (26). ОДЗ уравнения (26) есть множество всех числовых наборов, соответствующих набору неизвестных $(x, y, z, \ldots, t)$, у каждого из которых на месте каждого неизвестного может стоять любое действительное число.

Числовой набор $(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$, соответствующий набору неизвестных $(x, y, z, \ldots, t)$, называется *решением* уравнения (26), если равны числовые значения многочленов R и Q, соответствующие этому числовому набору, т.е. если справедливо числовое равенство $R(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0) = Q(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$.

Решить уравнение (26) — это значит найти все его решения, т.е. найти все числовые наборы, каждый из которых обращает уравнение (26) в верное числовое равенство.

Пусть даны два алгебраических уравнения с одними и теми же неизвестными:

$$R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$$

и

$$T(x, y, z, \ldots, t) = S(x, y, z, \ldots, t).$$

Эти уравнения называются *равносильными*, если любое решение первого уравнения является решением второго уравнения и, наоборот, любое решение второго уравнения является решением первого уравнения. Замена одного уравнения равносильным ему другим уравнением называется *равносильным переходом* от первого уравнения ко второму.

Справедливы следующие утверждения:

1. *Уравнения* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *и* $R(x, y, z, \ldots, t) - Q(x, y, z, \ldots, t) = 0$ — *равносильны.*

2. *Уравнения* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *и* $R(x, y, z, \ldots, t) + S(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t) + S(x, y, z, \ldots, t)$, *где* $S(x, y, z, \ldots, t)$ — *многочлен относительно букв* $x, y, z, \ldots, t$, *равносильны.*

3. *Уравнения* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *и* $\alpha R(x, y, z, \ldots, t) = \alpha Q(x, y, z, \ldots, t)$ *равносильны для любого, отличного от нуля действительного числа* α.

4. *Пусть известно, что справедливо тождественное равенство* $R(x, y, z, \ldots, t) = T(x, y, z, \ldots, t)$; *тогда уравнения* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ и $T(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ — *равносильны.*

Справедливость этих утверждений доказывается аналогично доказательству соответствующих утверждений § 1 и потому опускается.

Из утверждений 1 и 4 вытекает, что каждое алгебраическое уравнение можно привести к виду $P(x, y, z, ..., t) = 0$, поэтому можно рассматривать лишь уравнения вида

$$P(x, y, z, ..., t) = 0, \tag{27}$$

где $P(x, y, z, ..., t)$ — многочлен относительно букв $x, y, z, ...$ $..., t$.

Пусть даны многочлены $P_1(x, y, z, ..., t)$, $P_2(x, y, z, ..., t)$, ..., $P_m(x, y, z, ..., t)$ относительно букв $x, y, z, ..., t$. Говорят, что дана *совокупность* m алгебраических уравнений с неизвестными $x, y, z, ..., t$:

$$P_1(x, y, z, ..., t) = 0,\ P_2(x, y, z, ..., t) = 0, ...$$
$$..., P_m(x, y, z, ..., t) = 0, \tag{28}$$

если требуется найти все числовые наборы, соответствующие набору неизвестных $(x, y, z, ..., t)$, каждый из которых является решением хотя бы одного из уравнений совокупности (28). Каждый такой набор называется *решением совокупности* (28). Таким образом, решить совокупность уравнений (28) — это значит решить каждое уравнение $P_i(x, y, z, ..., t) = 0$, где $i = 1, 2, ..., m$, а затем взять объединение этих решений.

Уравнение (27) *равносильно* совокупности уравнений (28), если любое решение уравнения (27) является решением совокупности (28), а любое решение совокупности (28) является решением уравнения (27). Замена уравнения (27) равносильной совокупностью (28) называется *равносильным переходом* от уравнения (27) к совокупности (28).

Пусть даны многочлены $P_1(x, y, z, ..., t)$, $P_2(x, y, z, ..., t)$, ..., $P_m(x, y, z, ..., t)$ относительно букв $x, y, z, ..., t$. Говорят, что дана система m алгебраических уравнений с неизвестными $x, y, z, ..., t$:

$$\begin{cases} P_1(x, y, z, ..., t) = 0, \\ P_2(x, y, z, ..., t) = 0, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ P_m(x, y, z, ..., t) = 0, \end{cases}$$

если требуется найти все числовые наборы, соответствующие набору неизвестных (x, y, z, ..., t), каждый из которых является решением каждого из уравнений системы (29), т.е. если требуется найти все такие числовые наборы неизвестных (x, y, z, ..., t), при подстановке каждого из которых во все уравнения системы (29) последние обращались бы в верные числовые равенства. Каждый такой числовой набор называется *решением системы* (29) (уравнения системы обычно записываются в столбик, слева от которого пишется фигурная скобка).

Две системы алгебраических уравнений с одними и теми же неизвестными x, y, z, ..., t называются *равносильными*, если любое решение первой системы является решением второй системы и, наоборот, любое решение второй системы является решением первой.

Говорят, что дана *совокупность* k алгебраических систем уравнений с неизвестными x, y, z, ..., t:

$$\begin{cases} P_{11}(x, y, z, ..., t) = 0, \\ P_{21}(x, y, z, ..., t) = 0, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ P_{m1}(x, y, z, ..., t) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} P_{12}(x, y, z, ..., t) = 0, \\ P_{22}(x, y, z, ..., t) = 0, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ P_{n2}(x, y, z, ..., t) = 0, \end{cases} \quad \ldots$$

$$\ldots, \begin{cases} P_{1k}(x, y, z, ..., t) = 0, \\ P_{2k}(x, y, z, ..., t) = 0, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ P_{lk}(x, y, z, ..., t) = 0, \end{cases} \qquad (30)$$

если требуется найти все числовые наборы, каждый из которых является решением хотя бы одной из систем уравнений совокупности (30). Каждый такой набор является *решением* совокупности систем уравнений (30). Система уравнений (29) *равносильна* совокупности систем уравнений (30), если любое решение системы уравнений (29) является решением совокупности систем уравнений (30), а любое решение совокупности систем уравнений (30) является решением системы уравнений (29).

Приведем некоторые утверждения о равносильности систем уравнений.

1. *Если изменить порядок следования уравнений системы* (29), *то полученная система равносильна системе* (29).

2. *Если одно из уравнений системы* (29) *заменить на равносильное уравнение, то полученная система равносильна системе* (29).

3. *Пусть в системе уравнений с неизвестными x, y, z, ..., t первое уравнение записано в виде, где в левой части стоит одно из неизвестных, например x, в первой степени, а в правой части — многочлен относительно других букв. Тогда говорят, что неизвестное x выражено из первого уравнения системы через другие неизвестные. Если неизвестное x выражено из первого уравнения системы через другие неизвестные, то, подставив в другие уравнения системы вместо x этот многочлен от других неизвестных, получим равносильную системы уравнений, т.е. равносильны две следующие системы:*

$$\begin{cases} x = Q(y, z, ..., t), \\ P_2(x, y, z, ..., t) = 0, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ P_m(x, y, z, ..., t) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = Q(y, z, ..., t), \\ P_2[Q(y, z, ..., t), y, z, ..., t] = 0, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ P_m[Q(y, z, ..., t), y, z, ..., t] = 0. \end{cases}$$

Заметим, что если во второй системе рассмотреть только уравнения $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, ..., $P_m = 0$, то они образуют систему уравнений с числом неизвестных на единицу меньшим, чем в первой системе.

4. *Если первое уравнение системы* (29) *заменить уравнением, равным сумме первого уравнения, умноженного на некоторое действительное число* $\beta \neq 0$, *и второго уравнения, умноженного на некоторое действительное число* α, *то полученная система уравнений равносильна системе уравнений* (29), *т.е. при любых действительных* $\beta \neq 0$ *и* α *две следующие системы уравнений равносильны:*

$$\begin{cases} P_1(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \beta P_1(x, y, z, \ldots, t) + \alpha P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0. \end{cases}$$

В качестве следствия утверждения 4 имеем утверждения:

5. *Если первое уравнение системы* (29) *заменить на сумму* (*или разность*) *первого и второго уравнений системы, то полученная система уравнений будет равносильна системе уравнений* (29).

6. *Если первое уравнение системы* (29) *равносильно совокупности уравнений* $Q_1(x, y, z, \ldots, t) = 0$, $Q_2(x, y, z, \ldots, t) = 0$, $\ldots$, $Q_k(x, y, z, \ldots, t) = 0$, *то система* (29) *равносильна следующей совокупности систем уравнений*:

$$\begin{cases} Q_1(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Q_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0, \end{cases} \ldots$$

$$\ldots, \begin{cases} Q_k(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0. \end{cases} \qquad (31)$$

Если другие уравнения системы (29) равносильны своим совокупностям уравнений, то к каждой системе совокупности (31) применимо утверждение 6 и каждая система совокупности (31) может быть заменена своей совокупностью систем уравнений. Полная совокупность систем уравнений, равносильная системе (29) получается перебором всех логически возможных случаев.

З а м е ч а н и е. Системы линейных алгебраических уравнений подробно рассматриваются в гл. X.

П р и м е р. Решим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2+y+z=2, \\ x+y^2+z=2, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \tag{32}$$

Первое уравнение заменим на разность первого и второго уравнений, второе уравнение заменим на разность второго и третьего уравнений. В результате по утверждению 5 получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x^2+y-x-y^2=0, \\ y^2+z-y-z^2=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \tag{33}$$

Многочлены, стоящие в левой части первого и второго уравнений системы (33), можно разложить на множители:

$$x^2+y-x-y^2=(x-y)(x+y-1),$$
$$y^2+z-y-z^2=(y-z)(y+z-1).$$

В результате, по утверждению 2, система (33) равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0, \\ (y-z)(y+z-1)=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \tag{34}$$

Первое уравнение системы (34) равносильно совокупности уравнений

$$x-y=0, \quad x+y-1=0.$$

Следовательно, по утверждению 6, система (34) равносильна совокупности систем

$$\left\{\begin{array}{l}x-y=0,\\(y-z)(y+z-1)=0,\\x+y+z^2=2,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}x+y-1=0,\\(y-z)(y+z-1)=0,\\x+y+z^2=2.\end{array}\right.\qquad(35)$$

Второе уравнение в системах совокупности (35) равносильно совокупности уравнений

$$y-z=0,\quad y+z-1=0.$$

Следовательно, первая система совокупности (35) равносильна совокупности систем

$$\left\{\begin{array}{l}x-y=0,\\y-z=0,\\x+y+z^2=2,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}x-y=0,\\y+z-1=0,\\x+y+z^2=2.\end{array}\right.$$

Вторая система совокупности (35) равносильна совокупности систем

$$\left\{\begin{array}{l}x+y-1=0,\\y-z=0,\\x+y+z^2=2,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}x+y-1=0,\\y+z-1=0,\\x+y+z^2=2.\end{array}\right.$$

Таким образом, совокупность систем (35), а значит, и равносильная ей система (32), равносильна следующей совокупности систем уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}x-y=0,\\y-z=0,\\x+y+z^2=2,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}x-y=0,\\y+z-1=0,\\x+y+z^2=2,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}x+y-1=0,\\y-z=0,\\x+y+z^2=2,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}x+y-1=0,\\y+z-1=0,\\x+y+z^2=2.\end{array}\right.$$

Все системы этой совокупности легко решаются методом подстановки. Первая система имеет только два решения (x, y, z): $(-1+\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3})$; $(-1-\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3})$; вторая — только два решения (x, y, z): $(-1;\ -1;\ 2)$; $(1;\ 1;\ 0)$; третья — только два решения (x, y, z): $(0;\ 1;\ 1)$; $(2;\ -1;\ -1)$; четвертая — только два решения (x, y, z): $(1;\ 0;\ 1)$; $(-1;\ 2\ -1)$. Следовательно, исходная система (32) имеет только 8 решений (x, y, z): $(-1+\sqrt{3};$

$-1+\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3})$; $(-1-\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3})$; $(0;\ 1;\ 1)$; $(1;\ 0;\ 1)$; $(1;\ 1;\ 0)$; $(-1;\ -1;\ 2)$; $(-1;\ 2;\ -1)$; $(2;\ -1;\ -1)$.

УПРАЖНЕНИЯ

Применяя способ выделения полного квадрата, записать в виде алгебраической суммы квадратов многочленов следующий многочлен (1 — 14):

1. $6x^2+7x-3$. **2.** $23+31x-5x^2$. **3.** $27x^2-15x-112$.

4. $x^2-6(x+12)$. **5.** $x(x+34)+289$. **6.** $-\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

7. $\frac{1}{3}x^2-4x+2$. **8.** $9-3x-\frac{x^2}{4}$. **9.** $4x^2-4x+1$.

10. $4x^4+3x^2+1$. **11.** $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.

12. x^4+2x^3-x+14. **13.** $x^4-2x^3+\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$.

14. $16x^6+16x^7-4x^8-4x^9+x^{10}$.

Следующий многочлен записать в виде квадратного трехчлена относительно x и найти его дискриминант (15 — 33):

15. $3-\frac{4x}{15}+4x^2$. **16.** $23x-120-x^2$.

17. $13x-11-8x(1+x)$. **18.** $x(22+x)-2(x-3)$.

19. $4+x^2+2(4x+6)$. **20.** $(x-1)(3-2x)-3x^2+2$.

21. $(2x-3)(3x+1)-(x-11)$. **22.** $3(x+1)(2x+3)-(x-1)^2$.

23. $8x-(4x+3)(x-2)-x(2x-1)$. **24.** $x^2-(x+2)(3-x)-2x-8$.

25. $5(4x^2+4)-3(x-1)+4(x+1)$. **26.** $\frac{1}{3}(1-x)(2-x)-\frac{x}{2}$.

27. $\frac{1}{6}(2x+9)-\frac{1}{10}(x^2-2x)$. **28.** $3+\frac{(3+1)(x-2)}{3}-\frac{x^2}{4}$.

29. $2mx-mn-nx+2x^2$. **30.** $x^2+2a(b-x)+3bx$.

31. $x^2-b(2x-b)-4b^2$.

32. $5a(x-a)+8a(x+2a)-x(x-a)+2a(x-a)$.

33. $(x-3)(3x-a)-(x-2a)(2x-3)$.

Принадлежит ли множество $\{1;\ -2\}$ множеству всех решений следующего уравнения (34 — 41):

34. $2x+1=3(x-2)-(x-7)$; **35.** $(x-1)(x+2)=0$;

36. $2x+x^2-3=0$; **37.** $x^6+7x^3=8$;

38. $4+x^4=5x^2$; **39.** $x^3+2x(1-x)=x^2$;

40. $x^2+3x(x-3)=7x-9$; **41.** $(x^2+3x-5)(x^2+3x+3)+7=0$?

Равносильны ли два следующих уравнения (42 — 54):

42. $2x+1=3$ и $2x=2$; **43.** $\frac{7x+5}{2}=9{,}5$ и $x(x-1)=2$;

44. $x^2=4$ и $x^4-16=0$; **45.** $x^2+1=0$ и $x^4+1=0$;

46. $9x(2x-3)=26$ и $(6x-13)(3x+2)=0$;

47. $(x-2)(3+4x)=2x^2$ и $\left(x+\frac{\sqrt{73}-5}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{73}}{4}\right)=0$;

48. $(x+4)=0$ и $(x+4)(x^2+4x+100)=0$;

49. $x-12=17-2x$ и $(x-12)^2=(17-2x)^2$;

50. $x^2=6-x$ и $x^2(x-2)=(6-x)(x-2)$;

51. $x^2+6=5x$ и $(x^2+6)(x+4)=5x(x+4)$;

52. $3=2x-x^2$ и $3+(x^2+5)=2x-x^2+(x^2+5)$;

53. $\frac{x}{7}(x-4)=0$ и $2(x+1)(x+3)+8=(2x+1)(x+5)$;

54. $(3x+2)(2x-7)=6(x+2)^2+7$ и $3[5-2(x^2-2x+10)]=5x$?

Равносильны ли следующие уравнение и совокупность уравнений (55 — 72):

	Уравнение	Совокупность уравнений
55.	$3x-4-\frac{4(7x+9)}{15}=\frac{4}{5}\left(6+\frac{x-1}{3}\right)$	$13x-92=0$; $x=7\frac{1}{13}$;
56.	$\frac{1}{6}(2x+9)-\frac{1}{10}(x^2-1)=$ $=(x+5)(x+3)$	$7x=18-2x$; $3x+6=0$;
57.	$\frac{(3x-2)(x-1)}{21}=1\frac{2}{7}+\frac{(x-3)^2}{7}$	$2x-5[7-(x-6)(x+1)]=28$; $x=4$;
58.	$2x^2-32=x+4$	$x=-4$; $3x+12=0$;
59.	$(3x-5)(2x-5)=x^2+2x+3$	$x-4=0$; $x=\frac{7}{3}$;
60.	$2x(x+7)=x^2+3x$	$5x^2=6x$; $5x+4=0$;
61.	$2x^2-15=x$	$2(x-1)=x+1$; $2x+5=0$;
62.	$15-11x=8x(1+x)$	$8x-5=0$; $x+3=0$;
63.	$x^2+\frac{1}{8}=\frac{3x}{4}$	$2x=1$; $2x+6=2(x+4)+1$;
64.	$(x+1)(2x+3)=4x^2-22$	$0{,}3x-1{,}8=0{,}7-0{,}2x$; $2x+5=0$;
65.	$(3x+5)^2+2x(3x+5)=0$	$3\{7-3[x-2(x-1)]\}=6x$; $2x=5$;
66.	$\frac{7}{8}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{11}(3x-1)^2=0$	$3x-1=0$; $6-(3-x)=4x-4$;
67.	$(x+1)^2+(x-2)^2=2(x^2-2{,}5)$	$15-x(8-x)=(x-5)^2$; $x=5$;
68.	$\frac{x(2x+1)}{14}-\frac{(x+2)(x-4)}{7}=1\frac{1}{2}$	$0{,}5x+\frac{x}{3}=x-3$; $2(x-5)^2=0$;
69.	$\frac{3}{5}(2x-7)=\frac{2}{3}(x-8)^2$	$\frac{x}{3}-0{,}25x=1\frac{1}{2}$; $2x-\frac{1}{3}=0$;

	Уравнение	Совокупность уравнений
70.	$3(x-9)^2-2(x-9)-16=0$	$\frac{x}{3}-\frac{3}{5}\left(x+\frac{4}{3}\right)=\frac{13}{2}$; $x^2-14x+49=0$;
71.	$3x(x-2)-(x+1)(x-13)=0$	$x^2+7=0$; $13x^2-14x+9=0$; $\sqrt{3}x^2-x+2=0$;
72.	$4(2x-3)^2-4(2x-3)+1=0$	$\frac{3(2x-7)(x^2+1)}{4}=0$?

Решить следующее уравнение (73 — 123):

73. $5-4(x-3)=x-2(x-1)$.

74. $4(3+x)-3(2x-5)=6-x-2(3-x)$.

75. $3\{15-2[x-2(x-4)]-x\}=5x-20$.

76. $6-\frac{x-1}{2}=\frac{3-x}{4}+\frac{x-2}{3}$. **77.** $\frac{2x-5}{11}-\frac{x-2}{7}=5x-17\frac{1}{2}$.

78. $0{,}2(x-1)+0{,}5(3x-9)=\frac{x}{3}-2$.

79. $\frac{0{,}75-x}{3}-\frac{0{,}47+2x}{5}=\frac{4{,}4x}{1{,}5}$.

80. $(x+2)(x-1)=0$. **81.** $2x(3x-4)=0$.

82. $(3x+4)(5-2x)=0$.

83. $x^2-7x+6=0$. **84.** $2x^2-5x+12=0$.

85. $3x^2-7x-1=0$. **86.** $2x(x+6)=x^2-3x$.

87. $3(x^2+20)=21x$. **88.** $x+2x(x-1)=5$.

89. $(2x+5)^2+2x(3x+5)=0$. **90.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3}+2\right)-1=0$.

91. $7(x^2+5x+8)=3(x+1)(x-2)$.

92. $3(x^2-3x+1)-2x(x-2)=20-3(x+1)(2x-4)$.

93. $2(x-3)-3(x^2-2x-4)=4x^2-(3-5x)(x-1)-34$.

94. $3(x-2)^2-\frac{3(2-x^2)}{4}=x-1\frac{1}{2}$.

95. $(x+2)(x-3)+x(x+4)=(x-3)(x-7)+x^2$.

96. $(x+1)(x+2)+9+(x+2)(x+3)=(x+3)(x+4)$.

97. $(2+0{,}5x)\left(\frac{x}{3}-1\right)+3\frac{1}{2}=0{,}2\left(\frac{x}{2}+2\frac{1}{2}\right)$.

98. $18+(x+4)(x-3)(x-1)=(x+1)(x+3)(x+2)$.

99. $(1-x)(x+2)(x+3)=9x^2-x^3+4(1-7x)$.

100. $x^2+4x-8\sqrt{8}\cdot x+20=0$. **101.** $x(x-3)-2x(\sqrt{2}\cdot x-3)=0$.

102. $(x+1)(x-3)-2(x+\sqrt{7})=0$.

103. $3x^2-2x(x-\pi)+(x+2)(3x-1)=0$.

104. $(\sqrt{2}-x)x-(\sqrt{3}x+4)(x+2)=0$. **105.** $(x+2)^2=2(x+2)+3$.

106. $(x^2+5x-7)(2x^2+10x-11)+1=0$. **107.** $x^6-3x^3+2=0$.

108. $x^4+2x^2-8=0$. **109.** $x^9-2x^5+x=0$.

110. $(x^4+x^2+1)(x^4+x^2+2)=12$. **111.** $(x^2+2x+1)(x^2-5x+7)=0$.

112. $(4x^3-19x^2+12x)(2x^2-7x+6)=0$.

113. $(x^2-1)(x^2-5x-6)=0$. 114. $3x^3-3x(x-1)=7x^2$.
115. $x^3-x^2+x-1=0$. 116. $x^3+x-2=0$.
117. $x^3-2(x+1)=x$. 118. $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$.
119. $(x+9)(x-1)(2x^2+16x-20)=12$.
120. $(x^2-5x+7)^2-2(x-2)(x-3)=1$.
121. $x^4+x^3+x^2+x+1=0$. 122. $x^4-x(x^2-x+1)+1=0$.
123. $x^5+x^3=x^4$.

Принадлежит ли множество $\{-2; 1\}$ множеству всех решений следующего неравенства (124 — 134):

124. $7x-3(2x+3)>2(x-4)$; 125. $\frac{x+1}{4}<2\frac{1}{2}-\frac{1-2x}{3}$;

126. $\frac{6-5x}{5}+\frac{3x-1}{2}>5-x$; 127. $\frac{7x}{4}<0{,}3(x+7)+2\frac{1}{5}$;

128. $x(x-1)-6>5x-x^2$; 129. $x^2-4x+3<0$;

130. $\frac{1}{4}x^2-3(x+5)<0$; 131. $9x^2-6x+1>0$;

132. $x(x-3)-2<3x-(x^2+2)$; 133. $4x^2+6\left(x-\frac{3}{2}\right)>2$;

134. $(x-2)(3x+4)(x^2+1)>0$?

Равносильны ли два следующих неравенства (135 — 153):
135. $x^2+4x+12>0$ и $x-x^2-3>0$;
136. $(2x-5)(2x-1)<0$ и $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$;
137. $(x-1)^2>0$ и $1-x<0$;
138. $4x-3>1$ и $(4x-3)(x+2)>x+2$;
139. $2(5x-4)<4$ и $4(5x-4)^2\le 16$;
140. $x+3>0$ и $x^3>-3x^2$;
141. $x-x^2\le 2$ и $(x-x^2)(x+4x^2+5)\le 2(x+4x^2+5)$;
142. $2x-4>3$ и $2x-4+2(x+3)>3+2(x+3)$;
143. $x^2-5x+6\le 0$ и $1\le 2x+7\le 3$;
144. $x^2-x-6\ge 3x-1$ и $3\le 5-2x\le -5$;
145. $x+4<3x-2$ и $x(x+1)^2>3(x+1)^2$;
146. $\frac{x}{2}-3\left[2x-\frac{1-2(x-3)}{2}\right]>x+5\frac{1}{2}$ и $x>3$;
147. $6x^2-29x+30<0$ и $-3x^2+5x+2>0$;
148. $(x^2-4)(x+1)>0$ и $x^2-2x-3>0$;
149. $x^2-x+1>0$ и $4x^2+x+3>0$;
150. $x^3-1<0$ и $x<1$;
151. $x\ge -1$ и $x^3+1\le 0$;
152. $x^8-x^5+x^2-x+1\ge 0$ и $x^2-3x+10\ge 0$;
153. $2x^2-1\le x^4$ и $4x^4-4x^3+5x^2-4x+1\ge 0$?

Решить следующее неравенство (154 — 205):
154. $21-7(2x-9)>3x$. 155. $5(3-x)-3(x-4)<16x$.
156. $2(x-1)-3(2x-3)>6-3(x+5)$.

157. $\frac{1}{3}(3-2x)-\frac{1}{6}(4-5x)>\frac{1}{5}(x+4)-16.$

158. $\frac{x}{3}-\frac{(4x-7)(3x-5)}{15}<\frac{2}{5}-\frac{(4x-9)(x-1)}{5}.$

159. $\frac{1}{6}(2x+24)-0{,}1(x+1)>\frac{2x}{5}-0{,}3(2-3x).$

160. $\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)<\frac{3}{5}\left(x+\frac{4}{3}\right)+\frac{7}{2}.$

161. $3x-4-\frac{4(5x-9)}{15}>\frac{4}{5}\left(6-\frac{x-2}{3}\right).$

162. $(3x-2)(2x-3)-(2x-1)(x-2)+6x>(2x-3)^2.$

163. $\frac{(3x-4)(3x+1)}{3}-\frac{(8x-11)(x+2)}{4}<\frac{(6x-1)(2x-3)}{12}.$

164. $\frac{(3x-2)(x-1)}{21}<1\frac{2}{7}+\frac{(x-3)^2}{7}-2(3x+1).$

165. $(2x+3)(x-7)-(23x-11)\le 2(x+8)(x-2).$

166. $\frac{3}{5}(2x-7)-\frac{2}{3}(x-8)-4\ge\frac{4x+1}{15}+\frac{4}{15}(x-11).$

167. $x^2-x-2<0.$ 168. $3x^2-5x-8\le 0.$

169. $15x^2-77x+10>0$ 170. $3x^2+13x-30\ge 0.$

171. $16x-15x(x+1)<0.$ 172. $21-22x-24x^2\le 0.$

173. $(x-4)^2(x+5)\le 0.$ 174. $\frac{(2-x)x}{2}>x+\frac{1+3x}{4}.$

175. $(x-3)\ge(x-3)^2.$ 176. $8x(x+2)+3(x+1)>-1.$

177. $(2x+2)(x-1)<5x+6.$

178. $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}>x(x-1)+4.$

179. $\sqrt{6}x^2-2\sqrt{2}x-\sqrt{3}x+2\le 0.$

180. $(x^2-16x)^2-63\ge 2(x^2-16x).$

181. $x^2+2x+7\ge(4+2x+x^2)(3+2x+x^2).$

182. $(3x^2-4x+1)(4x^4-5x^3+x^2)\le 0.$

183. $x^3+2x^2>6+3x.$ 184. $(x+2)(x-1)(x-3)^2\le 0.$

185. $(x+4)(x+2)^3(x-1)(2-x)^2(x^2-3x+5)>0.$

186. $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-x-2)\le 0.$

187. $(9-x^2)(x^2-2x-3)(x+8)\ge 0.$

188. $(x^3-2x^2-3x+4)(x^2-3x+7)>0.$

189. $(27-37x^2-16x^4)(x^2+x+1)<0.$

190. $(x^2-4x-12)(x^3-7x-6)\ge 0.$ 191. $(x^2+10x+25)(25-x^2)>0.$

192. $(2x^2-3x-14)(2x^2+11x+14)<0.$

193. $(3x^3-24)(2x^2+6x-20)\ge 0.$

194. $(x^2+4x-45)(3x^2-14x-5)(x+1)\le 0.$

195. $(2x^2+2x)(x^2-2x+1)(3x^3+7x-10)>0.$

196. $(6x^3-x^2+16)(8x^3-14x^2+19x-4)<0.$

197. $x(x^2+3x-4)>7x^3-18x^2+6x+5.$

198. $4x^3+3x^2-5(4x+3)>2x^3-5x(2+5x-x^3).$

199. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10\ge 0.$

200. $(x^2-3x+2)(x^2-5x+6)(1-x^2)\le 0$.
201. $(5x^2-x-4)(x^3-1)(x+10)>0$.
202. $3(x^2+3x+2)\ge(x+1)(x+2)(x+3)$.
203. $(x^2-16)(3x-9)\le(x^2-8x+16)(2x+8)$.
204. $(x^2+4x)(x^2+x-6)>(x^3-9x)(x^2+2x-8)$.
205. $(3x^2-7x+2)(x^2-9)<(2x^2-5x-3)\,(9x^2-6x+1)$.

В задачах №№ 206 — 213 под числовым набором $(a;\ b)$ понимается числовой набор, соответствующий набору неизвестных $(x;\ y)$ при $x=a$ и $y=b$.

Принадлежит ли множество $\{(2;\ 1)\}$ множеству всех решений следующей системы уравнений (**206 — 209**):

206. $\begin{cases}7x+5y=1,\\5x+7y=11;\end{cases}$ **207.** $\begin{cases}95y-49=23x,\\76y=102-13x;\end{cases}$

208. $\begin{cases}x+2y=4,\\2x+3y=7;\end{cases}$ **209.** $\begin{cases}14x+9y=9,\\9x+4y=4?\end{cases}$

Является ли множество $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$ множеством всех решений следующей системы уравнений (**210 — 213**):

210. $\begin{cases}x+y=5,\\x^3+y^3=35;\end{cases}$ **211.** $\begin{cases}x+y=5,\\x^2y^2+24=10xy;\end{cases}$

212. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=19,\\x^4+x^2y^2+y^4=133;\end{cases}$ **213.** $\begin{cases}x^2+4y^2+80=15x+30y,\\xy=6?\end{cases}$

В задачах №№ 214 — 221 по числовым набором $(a,\ b,\ c)$ понимается числовой набор, соответствующий набору неизвестных $(x,\ y,\ z)$ при $x=a$, $y=b$, $z=c$.

Принадлежит ли множество $\{(3;\ 2;\ 1)\}$ множеству всех решений следующей системы уравнений (**214 — 217**):

214. $\begin{cases}2x+y+z=8,\\5x-3y+2z=3,\\7x+y+3z=20;\end{cases}$ **215.** $\begin{cases}5x-3z=4(1+y),\\2(z+2x)=8+3y,\\2y+3x=14-z;\end{cases}$

216. $\begin{cases}x^2-y^2+z^2=6,\\2yx-zx+2xy=13,\\x-y+z=2;\end{cases}$ **217.** $\begin{cases}(x-1)(y+5)=14,\\(y+5)(z+8)=63,\\(z+8)(x-1)=18?\end{cases}$

Является ли множество $\{(3;\ 4;\ 1),\ (-3;\ -4;\ -1)\}$ множеством всех решений следующей системы уравнений (**218 — 221**):

218. $\begin{cases}x^2yz=36,\\xy^2z=48,\\xyz^2=12;\end{cases}$ **219.** $\begin{cases}x^2+xy+xz=25,\\xy+y^2+yz=32,\\xz+yz+z^2=8;\end{cases}$

220. $\begin{cases}xy^2z^2=36,\\x^2yz^2=144,\\x^2y^2z=48;\end{cases}$ **221.** $\begin{cases}xy+2x+y=24,\\yz+3y+2z=15,\\zx+x+3z=9?\end{cases}$

Равносильны ли следующие две системы уравнений (222 — 229):

222. $\begin{cases}3x+2y=13,\\3x-2y=5\end{cases}$ и $\begin{cases}\dfrac{3x+1}{7}-\dfrac{2x-y}{2}=\dfrac{2y-x}{8},\\\dfrac{4x-2}{3}-\dfrac{4y-5x}{2}=\dfrac{x+y}{5};\end{cases}$

223. $\begin{cases}x+y=11,\\xy=12\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y=11,\\x^2+xy+y^2=91;\end{cases}$

224. $\begin{cases}x+5y=26,\\x^2-25y^2=156\end{cases}$ и $\begin{cases}x+2y=1,\\x^3+8y^2=127;\end{cases}$

225. $\begin{cases}7x-4y=23,\\49x^2-16y^2=1081\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y=5,\\4(x^2+y^2)=17xy;\end{cases}$

226. $\begin{cases}y-x=2,\\35x^2+35y^2=74xy\end{cases}$ и $\begin{cases}x^2-xy+y^2=19,\\x^4+x^2y^2+y^4=741;\end{cases}$

227. $\begin{cases}x+y=6,\\y+z=10,\\z+x=20\end{cases}$ и $\begin{cases}4x-5y+6z=3,\\8x-7y-3z=9,\\7x-8y+9z=6;\end{cases}$

228. $\begin{cases}yz+zx=16,\\zx+yx=25,\\xy+zy=-39\end{cases}$ и $\begin{cases}x^2+xy+xz=48,\\xy+y^2+yz=12,\\xz+yz+z^2=84;\end{cases}$

229. $\begin{cases}y+x-z=14,\\y^2+z^2-x^2=46,\\yz=9\end{cases}$ и $\begin{cases}(x+y)^2-z^2=65,\\x^2-(y+z)^2=13,\\x+y-z=5?\end{cases}$

Решить следующую систему уравнений (230 — 273):

230. $\begin{cases}4x+3y=21,\\4x-3y=3.\end{cases}$ 231. $\begin{cases}13+2y=9x,\\7x=3y.\end{cases}$

232. $\begin{cases}9x+3y-2=0,\\10x+6y-4=0.\end{cases}$ 233. $\begin{cases}7x=8-7y,\\16y+16x-8=0.\end{cases}$

234. $\begin{cases}5x-3=-2y,\\6y+15x=9.\end{cases}$ 235. $\begin{cases}x+y=12,\\2xy=9(x-y).\end{cases}$

236. $\begin{cases}x+y=5,\\x^2y^2-10xy+24=0.\end{cases}$ 237. $\begin{cases}x+3y=10,\\x^3+27y^2=280.\end{cases}$

238. $\begin{cases}x+y=11,\\x^3+y^3=341.\end{cases}$ 239. $\begin{cases}x-y=2,\\x^4=272-y^4.\end{cases}$

240. $\begin{cases}x+y=3,\\x^5+y^5=1023.\end{cases}$ 241. $\begin{cases}x-y=2,\\(x^2+y^2)(x^3-y^3)=260.\end{cases}$

242. $\begin{cases}x+3xy=35,\\y=22-2xy.\end{cases}$ 243. $\begin{cases}x^3=5x+y,\\y^3=x+5y.\end{cases}$

244. $\begin{cases}xy=35,\\2(x+y)^2+324=51(x+y).\end{cases}$ 245. $\begin{cases}xy=72,\\x^2+y^2=145.\end{cases}$

246. $\begin{cases}x^2+xy=210,\\y^2=231-xy.\end{cases}$ 247. $\begin{cases}(x-y)^2=3-2x-2y,\\y(x-y+1)=x(y-x+1).\end{cases}$

248. $\begin{cases} 3x^2 + xy = 2x + 6, \\ 2y = y^2 + 3xy + 3. \end{cases}$ **249.** $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 3y - x - 30, \\ x^2 + y^2 + x + y = 18. \end{cases}$

250. $\begin{cases} x^2 + 2xy + 10y^2 = 145, \\ xy + y^2 = 24. \end{cases}$ **251.** $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5xy, \\ 2x^2 = y^2 + 31. \end{cases}$

252. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x^3 - y^3 = 8(x - y). \end{cases}$ **253.** $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x^3 - y^3 = 37. \end{cases}$

254. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 39, \\ x^3 + y^3 = 351. \end{cases}$ **255.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ (x + y)(y^3 + x^3) = 19. \end{cases}$

256. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 120, \\ x^3 + y^3 = 152. \end{cases}$ **257.** $\begin{cases} x^4 + y^4 - x^2y^2 = 5, \\ x^2 - y^2 - xy = 1. \end{cases}$

258. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133. \end{cases}$ **259.** $\begin{cases} 10x - 9z = 19, \\ 8x - y = 10, \\ y - 12z = 10. \end{cases}$

260. $\begin{cases} 5x - 4y + z = 3, \\ 3x + y - 2z = 31, \\ 8x - 3y - z = 1. \end{cases}$ **261.** $\begin{cases} 2x - y = z + 12, \\ 3z + 3y = 6x - 36, \\ 2(y + z) = 4(x - 6). \end{cases}$

262. $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ y + z - x = 1, \\ x + z - y = 1. \end{cases}$ **263.** $\begin{cases} 4x - 2y = 7x, \\ y + z = x, \\ y^2 - 4 = 8x - 3z^2. \end{cases}$

264. $\begin{cases} x + y + z = 19, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91, \\ y^2 = xz. \end{cases}$ **265.** $\begin{cases} x - y + z = 2, \\ x^2 + z^2 = y^2 + 6, \\ 2(xy + yz) = 13 + zx. \end{cases}$

266. $\begin{cases} xy + 2x + y = 7, \\ yz + 3y + 2z = 12, \\ zx + z + 3x = 15. \end{cases}$ **267.** $\begin{cases} xy + yz = 10, \\ yz + zx = 12, \\ zx + yz = 10. \end{cases}$

268. $\begin{cases} (x + y)(x + z) = 63, \\ (y + z)(y + x) = 42, \\ (z + x)(z + y) = 54. \end{cases}$ **269.** $\begin{cases} x(x + y + z) = 42, \\ y(x + y + z) = 70, \\ z(x + y + z) = 84. \end{cases}$

270. $\begin{cases} y + z = xyz, \\ z + x = xyz, \\ x + y = xyz. \end{cases}$ **271.** $\begin{cases} x^2yz = 6, \\ xy^2z = 18, \\ xyz^2 = 12. \end{cases}$

272. $\begin{cases} x^2yz^2 = 144, \\ x^2y^2z = 48, \\ xy^2z^2 = 36. \end{cases}$ **273.** $\begin{cases} x^3y^2z = 24, \\ xy^3z^2 = 18, \\ x^2yz^3 = 108. \end{cases}$

Какую фигуру на координатной плоскости задает следующее уравнение (274 — 281):

274. $y = 1$; **275.** $x - 2y = 0$; **276.** $3x - 2y = 1$; **277.** $xy = 0$;
278. $(1 - x)(x - y) = 0$; **279.** $x^2 + y^2 = 5$;
280. $x^2 + y^2 = 0$; **281.** $x^2 - y^2 = 0$?

Имеют ли общую точку следующие прямые (282 — 284):

282. $x + 2y = 4$ и $2x + 3y = 7$;

283. $4x - y = 3$ и $8x = 2y + 6$;

284. $2x - y - 3 = 0$ и $2y + 9 = 4x$?

Имеют ли общие точки следующие окружность и прямая (285 — 289):

285. $x^2 + y^2 = 16$ и $2x + 5 = 0$;

286. $x^2 + y^2 = 25$ и $y = x$;

287. $x^2 + y^2 = 49$ и $y = 2x - 3$;

288. $x^2 + y^2 = 4$ и $y = 7 - x$;

289. $x^2 + y^2 = 18$ и $y = x + 3\sqrt{2}$?

Глава IV. СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ

§ 1. Степень с целым показателем

В первой главе было определено действие возведения любого действительного числа в степень с натуральным показателем. В этом параграфе повторяется это определение, а также приводятся определения возведения числа в нулевую степень и в степень с отрицательным целым показателем.

Пусть a — любое действительное число, n — любое натуральное число, тогда *степенью числа a с натуральным показателем n* (*или n-й степенью числа a*) называется число, записываемое как a^n и определяемое по правилу

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ раз}}, & \text{если } n \geq 2; \\ a, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Пусть a — любое отличное от нуля действительное число, тогда *нулевой степенью этого числа* называется число единица, т.е. по определению $a^0 = 1$ для любого отличного от нуля действительного числа a.

Нулевая степень числа нуль не определяется, и символ 0^0 *считается лишенным смысла.*

Пусть a — любое отличное от нуля действительное число, n — любое натуральное число, тогда *степенью числа a с целым отрицательным показателем* ($-\,n$) называется число $\frac{1}{a^n}$, т.е. по определению $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ для любого отличного от нуля действительного числа a и любого целого отрицательного числа ($-\,n$).

Целая отрицательная степень числа нуль не определяется, и символ 0^{-n} *считается лишенным смысла.*

Итак, натуральная (n-я) степень определяется для любого действительного числа, а нулевая и целая отрицательная степени лишь для любого отличного от нуля действительного числа.

Если a — любое отличное от нуля действительное число, то можно дать определение степени с целым показателем, которое есть объединение предыдущих определений.

Пусть a — любое отличное от нуля действительное число, — любое целое число, тогда *под числом* a^α понимают число, определяемое по правилу

$$a^\alpha = \begin{cases} a, & \text{если } \alpha = 1; \\ \underbrace{aa \ldots a}_{m \text{ раз}}, & \text{если } \alpha = m,\ m \text{ — натуральное число, } m \geq 2; \\ 1, & \text{если } \alpha = 0; \\ \dfrac{1}{a^n}, & \text{если } \alpha = -n,\ (-n) \text{ — целое отрицательное число;} \end{cases}$$

при этом число a^α ***называется степенью с целым показателем***, число a — ***основанием степени***, число α — ***показателем степени***.

В первой главе были приведены основные свойства, которыми обладает действие возведения в степень с натуральным показателем. Для действия возведения в степень с целым показателем эти свойства также имеют место.

Именно, пусть a, b — любые, не равные нулю, действительные числа, α, β — любые целые числа, тогда:

а) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$; б) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

в) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; г) $a^\alpha : a^\beta = \dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

д) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Докажем справедливость этих свойств. Справедливость свойства а) при натуральном α ($\alpha = n$, $n \in N$) следует из основных законов умножения действительных чисел:

$$(ab)^\alpha = (ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a\ldots a}_{n \text{ раз}}\ \underbrace{b\ldots b}_{n \text{ раз}} = $$
$$= a^n b^n = a^\alpha b^\alpha.$$

Пусть $\alpha = 0$, тогда $(ab)^\alpha = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 b^0 = a^\alpha b^\alpha$, т.е. $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$.

Пусть $\alpha = -m$ и m — натуральное число. По определению степени с отрицательным показателем $(ab)^\alpha = (ab)^{-m} =$
$= \dfrac{1}{(ab)^m} =$

по свойству степени с натуральным показателем	$= \dfrac{1}{a^m b^m} =$
по свойству дробей	$= \dfrac{1}{a^m} \cdot \dfrac{1}{b^m} =$
по определению степени с отрицательным показателем	$= a^{-m} b^{-m} = a^\alpha b^\alpha.$

Следовательно, свойство а) справедливо.

Свойство б) доказывается аналогично.

Для доказательства свойства в) рассмотрим все шесть возможных случаев: 1) $\alpha = n$, $\beta = m$; 2) $\alpha = n$, $\beta = -m$; 3) $\alpha = -n$, $\beta = m$; 4) $\alpha = -n$, $\beta = -m$ (где n и m — любые натуральные числа); 5) α — любое целое число, $\beta = 0$; 6) $\alpha = 0$, β — любое целое число.

1. При $\alpha = n$, $\beta = m$ справедливость свойства в) следует из основных законов умножения действительных чисел:

$$a^\alpha a^\beta = a^n \cdot a^m = \underbrace{(a\ldots a)}_{n \text{ раз}}\ \underbrace{(a\ldots a)}_{m \text{ раз}} = \underbrace{(a\ldots a)}_{(n+m) \text{ раз}} =$$
$$= a^{n+m} = a^{\alpha+\beta}.$$

2. Пусть $\alpha = n$, $\beta = -m$, где n и m — натуральные числа, тогда по определению степени с целым отрицательным показателем

$$a^\alpha a^\beta = a^n \cdot \frac{1}{a^m}.$$

Применяя правило умножения дробей, имеем $a^n \cdot \dfrac{1}{a^m} = \dfrac{a^n}{a^m}.$

Пусть $n > m$, тогда, применяя свойство степени с натуральным показателем, получаем

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m = a^{n-m} = a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}.$$

Пусть $n = m$, тогда по определению степени с нулевым показателем получаем

$$\frac{a^n}{a^m} = 1 = a^0 = a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}.$$

Пусть $n < m$, тогда, применяя свойство степени с натуральным показателем и определение степени с целым отрицательным показателем, получаем

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^m \cdot \frac{1}{a^n}} = \frac{1}{a^m a^{-n}} = \frac{1}{a^{m-n}} = a^{-(m-n)} = a^{-m+n} =$$
$$= a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}.$$

3. Пусть $\alpha = -n$, $\beta = m$, где n и m — натуральные числа. Этот случай аналогичен случаю $\alpha = n$, $\beta = -m$.

4. Пусть $\alpha = -n$, $\beta = -m$, где n, m — натуральные числа.

Тогда	$a^\alpha a^\beta = a^{-n} a^{-m} =$
по определению степени с целым отрицательным показателем	$= \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} =$
по правилу перемножения дробей	$= \frac{1}{a^n a^m} =$
по свойству степени с натуральным показателем	$= \frac{1}{a^{n+m}} =$
по определению степени с целым отрицательным показателем	$= a^{-(n+m)} = a^{-n-m} =$ $= a^{(-n)+(-m)} = a^{\alpha+\beta}$.

5. Пусть α — любое целое число, $\beta = 0$, тогда, применяя определение степени с нулевым показателем, получаем

$$a^\alpha a^\beta = a^\alpha \cdot 1 = a^\alpha = a^{\alpha+0} = a^{\alpha+\beta}.$$

6. Пусть $\alpha = 0$, β — любое целое число, тогда, применяя определение степени с нулевым показателем, получаем

$$a^{\alpha}a^{\beta} = 1 \cdot a^{\beta} = a^{\beta} = a^{0+\beta} = a^{\alpha+\beta}.$$

Следовательно, свойство в) справедливо.

Для доказательства свойства г) при натуральных α, β ($\alpha = n$, $\beta = m$, $n \in N$, $m \in N$) рассмотрим три случая:

1. Если $n > m$, то $n = m + l$, где $l \in N$. Воспользуемся основными свойствами умножения и деления действительных чисел:

$$a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{n} : a^{m} = \frac{a^{n}}{a^{m}} = \frac{\overbrace{(a \ldots a)}^{m\ \text{раз}}\overbrace{(a \ldots a)}^{l\ \text{раз}}}{\underbrace{a \ldots a}_{m\ \text{раз}}} = a^{l} = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}.$$

2. Если $n = m$, то

$$a^{\alpha} : a^{\beta} = \frac{a^{n}}{a^{m}} = \frac{\overbrace{a \ldots a}^{n\ \text{раз}}}{\underbrace{a \ldots a}_{m\ \text{раз}}} = 1.$$

По определению $a^{0} = 1$. Следовательно,

$$a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{n} : a^{m} = a^{0} = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}.$$

3. Если $m > n$, то $m = n + k$, где $k \in N$. Воспользуемся основными свойствами умножения и деления действительных чисел, а также определением возведения в отрицательную степень:

$$a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{n} : a^{m} = \frac{a^{n}}{a^{m}} = \frac{\overbrace{a \ldots a}^{n\ \text{раз}}}{\underbrace{(a \ldots a)}_{n\ \text{раз}}\underbrace{(a \ldots a)}_{k\ \text{раз}}} = \frac{1}{\underbrace{a \ldots a}_{k\ \text{раз}}} = a^{-k} =$$

$$= a^{-(m-n)} = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}.$$

Следует отметить, что в этом случае $(n - m)$ не является натуральным числом.

Для остальных пяти случаев значений α и β доказательство свойства г) аналогично доказательству свойства в).

Для доказательства свойства д) также как и в случае свойств в) и г) рассмотрим все шесть возможных ситуаций:

1. Пусть $\alpha = n$, $\beta = m$, где n и m — натуральные числа. Для доказательства свойства д) в этом случае воспользуемся основными законами сложения и умножения действительных чисел:

$$(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{n})^{m} = \underbrace{(an)\,(an)\,\ldots\,(an)}_{m \text{ раз}} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(a\,\ldots\,a)}_{n \text{ раз}}\,\ldots\,\underbrace{(a\,\ldots\,a)}_{n \text{ раз}}}_{m \text{ раз}} = \underbrace{aa\,\ldots\,a}_{nm \text{ раз}} = a^{nm} = a^{\alpha\beta}.$$

2. Пусть $\alpha = n$, $\beta = -m$, где n и m — натуральные числа.

Тогда	$(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{n})^{-m} =$
по определению степени с целым отрицательным показателем	$= \dfrac{1}{(a^{n})^{m}} =$
по свойству степени с натуральным показателем	$= \dfrac{1}{a^{nm}} =$
по определению степени с целым отрицательным показателем	$= a^{-nm} =$ $= a^{n(-m)} = a^{\alpha\beta}.$

3. Пусть $\alpha = -n$, $\beta = m$, где n и m — натуральные числа. Справедливость этого свойства доказывается аналогично случаю $\alpha = n$, $\beta = -m$.

4. Пусть $\alpha = -n$, $\beta = -m$, где n, m — натуральные числа.

Тогда	$(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{-n})^{-m} =$
по определению степени с целым отрицательным показателем	$= \dfrac{1}{(a^{-n})^{m}} =$
по только что разобранному случаю 3	$= \dfrac{1}{a^{-nm}} =$
по определению степени с целым отрицательным показателем	$= \dfrac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} =$
по свойству дробей	$= 1 : \dfrac{1}{a^{nm}} =$
по правилу деления дробей	$= a^{nm} = a^{(-n)(-m)} = a^{\alpha\beta}.$

5. Пусть α — любое целое число, $\beta = 0$, тогда по определению степени с нулевым показателем $(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{\alpha})^{0} = 1 = a^{0} = a^{\alpha 0} = a^{\alpha\beta}$.

6. Пусть $\alpha = 0$, β — любое целое число, тогда по определению степени с нулевым показателем $(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{0})^{\beta} = (1)^{\beta} = 1 = a^{0} = a^{0\beta} = a^{\alpha\beta}$.

Следовательно, свойство д) справедливо.

Пример. Применим свойства степени с целым показателем для вычисления следующего числового выражения:

$$A = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} \cdot 2^{4}}{\left(\frac{8}{3}\right)^{0} + 4^{-1} - 5 \cdot 10^{-1}}.$$

Так как $\left(-\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \frac{3^{3}}{4^{3}} = \frac{27}{64}$, $\left(\frac{8}{3}\right)^{0} = 1$, $(4)^{-1} = \frac{1}{4}$, $5 \times 10^{-1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, то

$$A = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{27}{64} \cdot 16}{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 1.$$

§ 2. Степень с рациональным показателем

В главе I было дано следующее определение арифметического корня из положительного числа.

Пусть n — натуральное число, $n \geq 2$, a — положительное число. Тогда положительное число b, такое, что $b^{n} = a$ называется *арифметическим корнем n-й степени из числа a* и обозначается $b = \sqrt[n]{a}$.

Без доказательства было принято утверждение, что для каждого положительного числа a существует и притом единственный арифметический корень n-й степени.

По определению $\sqrt[n]{a}$ справедливо следующее утверждение:

$$\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ — положительное число,} \\ n \text{ — натуральное число,} \\ \sqrt[n]{a} \text{ — положительное число,} \\ (\sqrt[n]{a})^n = a. \end{cases}$$

Используя определение возведения в целую степень и определение арифметического корня из положительного числа, дадим теперь определение возведения положительного числа в степень с рациональным показателем.

Пусть a — положительное число, $r = \frac{p}{q}$ — рациональное число, причем q — натуральное число ($q \geq 2$). Положительное число b такое, что $b = \sqrt[q]{a^p}$, называется *r-й степенью числа a* и обозначается $b = a^r$, т.е. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Заметим, что $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Пусть a и b — любые положительные числа, r_1 и r_2 — любые рациональные числа, тогда справедливы следующие свойства, называемые свойствами степеней с рациональными показателями:

а) $(ab)^{r_1} = a^{r_1}b^{r_1}$,

б) $\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}$,

в) $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$,

г) $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2}$,

д) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1r_2}$.

Докажем справедливость этих свойств.

а) Пусть $r_1 = \frac{p}{q}$, причем q — натуральное число, $q \geq 2$.

Рассмотрим $\left[(ab)^{\frac{p}{q}}\right]^q =$

по определению рациональной степени $= \left[\sqrt[q]{(ab)^p}\right]^q =$

по определению арифметического корня $= (ab)^p =$

по свойству степени с целым показателем $= a^pb^p =$

по определению арифметического корня $= \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q \left(\sqrt[q]{b^p}\right)^q =$

по определению рациональной степени $= \left(a^{\frac{\ell}{q}}\right)^q \left(b^{\frac{\ell}{q}}\right)^q =$

по свойству степени с натуральным показателем $= \left(a^{\frac{\ell}{q}} b^{\frac{\ell}{q}}\right)^q.$

Итак, $[(ab)^{r_1}]^q = [a^{r_1} b^{r_1}]^q$. По теореме 1 § 2 гл. II это равенство равносильно равенству $(ab)^{r_1} = a^{r_1} b^{r_1}$ и свойство а) доказано.

Свойство б) доказывается аналогично.

в) Пусть $r_1 = \frac{\ell}{q}$, $r_2 = \frac{m}{n}$. Тогда $a^{r_1} a^{r_2} = a^{\frac{\ell}{q}} a^{\frac{m}{n}}$.

Рассмотрим $\left[a^{\frac{\ell}{q}} a^{\frac{m}{n}}\right]^{qn} =$

по свойству степени с натуральным показателем $= \left(a^{\frac{\ell}{q}}\right)^{qn} \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{qn} =$

по свойству степени с натуральным показателем $= \left[\left(a^{\frac{\ell}{q}}\right)^q\right]^n \left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right]^q =$

по определению рациональной степени $= \left[\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\right]^n \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^q =$

по определению арифметического корня $= (ap)^n (am)^q =$

по свойству степени с целым показателем $= a^{pn} a^{mq} =$

по свойству степени с целым показателем $= a^{pn + mq} =$

по определению арифметического корня $= \left(\sqrt[nq]{a^{pn + mq}}\right)^{nq} =$

по определению рациональной степени $= \left(a^{\frac{pn + mq}{nq}}\right)^{nq}.$

Итак, учитывая, что $\frac{(pn + mq)}{nq} = r_1 + r_2$, имеем $(a^{r_1} a^{r_2})^{qn} = (a^{r_1 + r_2})^{qn}$. По теореме 1 § 2 гл. II это равенство равносильно равенству $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ и свойство в) доказано.

Свойство г) доказывается аналогично.

д) Пусть $r_1 = \frac{\ell}{q}$, $r_2 = \frac{m}{n}$. Тогда $(a^{r_1})^{r_2} = \left(a^{\frac{\ell}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$.

Рассмотрим $\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}\right]^{nq} =$

по свойству степени с натуральным показателем $=\left\{\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}\right]^{n}\right\}^{q} =$

по определению степени с рациональным показателем $=\left\{\left[\sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{m}}\right]^{n}\right\}^{q} =$

по определению арифметического корня $=\left\{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{m}\right\}^{q} =$

по свойству степени с целым показателем $=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{mq} =$

по свойству степени с целым показателем $=\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q}\right]^{m} =$

по определению степени с рациональным показателем $=\left[\left(\sqrt[q]{a^{p}}\right)^{q}\right]^{m} =$

по определению арифметического корня $=(a^{p})^{m} =$

по свойству степени с целым показателем $=a^{pm} =$

по определению арифметического корня $=\left(\sqrt[qm]{a^{pm}}\right)^{qm} =$

по определению степени с рациональным показателем $=\left(a^{\frac{pm}{qm}}\right)^{qm}.$

Итак, $[(a^{r_1})^{r_2}]^{nq} = (a^{r_1 r_2})^{nq}$. По теореме 1 § 2 гл. II из справедливости этого равенства вытекает справедливость свойства д).

Докажем еще одно свойство степени с рациональным показателем.

е) Пусть a — положительное число, $r_1 = \frac{p}{q}$ — рациональное число, q и n — натуральные числа, $q \geq 2$. Тогда $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pn}{qn}}$.

Рассмотрим $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} =$

по свойству степени с натуральным показателем $=\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q}\right]^{n} =$

по определению степени с рациональным показателем $= \left[\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\right]^n =$

по определению арифметического корня $= (a^p)^n =$

по свойству степени с целым показателем $= a^{pn} =$

по определению арифметического корня $= \left(\sqrt[qn]{a^{pn}}\right)^{qn} =$

по определению степени с рациональным показателем $= \left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn}.$

Итак, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} = \left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn}$, откуда и вытекает справедливость свойства е).

Для арифметических корней доказанные свойства имеют вид

а) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;

б) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

в) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}$;

г) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n-k}}$;

д) $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

е) $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Пример. Упростить числовое выражение

$$A = (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2}).$$

Применим рассмотренные свойства:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2};\ \sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{2^3}\sqrt{2^3} = 6\sqrt{2};$$
$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$A = (4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2}) =$$
$$= 3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \cdot 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 6(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) =$$
$$= 6(5 - 2) = 18.$$

Рассмотрим теперь основные свойства типа неравенства для степени с рациональным показателем.

ж) Пусть $a > 1$, $r = \frac{p}{q}$ — положительное рациональное число (q и n — натуральные числа, $q \geq 2$). Тогда $a^r > 1$.

Рассмотрим	$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q =$
по определению степени с рациональным показателем	$= \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q =$
по определению арифметического корня	$= a^p$.

По теореме 1 § 2 гл. II условия $a > 1$ и $a^p > 1^p$ равносильны, значит, из условия $a > 1$ вытекает, что $a^p > 1^p$, но тогда $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q > 1^q$, т.е. $(a^r)^q > 1^q$, откуда по тому же свойству получаем, что $a^r > 1$. Свойство ж) доказано.

з) Пусть $0 < a < 1$, $r = \frac{p}{q}$ — *положительное рациональное число* ($p \in N$, $q \in N$, $q \geq 2$). Тогда $a^r < 1$.

Доказательство этого свойства аналогично доказательству свойства ж).

и) Пусть $a > 1$ и r_1 и r_2 — рациональные числа такие, что $r_1 > r_2$. Тогда $a^{r_1} > a^{r_2}$.

Доказательство. Поскольку $(r_1 - r_2)$ — рациональное положительное число, то по свойству ж) $a^{r_1 - r_2} > 1$. Умножая это неравенство на положительное число a^{r_2}, по свойству 21 неравенств (см. 2 гл. II) получаем $a^{r_2}(a^{r_1 - r_2}) >$ $> a^{r_2}$. Применяя к левой части свойство в) степени с рациональным показателем, получаем $a^{r_1} > a^{r_2}$, т.е. свойство и) доказано.

к) Пусть $0 < a < 1$, r_1, r_2 — рациональные числа такие, что $r_1 > r_2$. Тогда $a^{r_1} < a^{r_2}$.

Доказательство этого свойства аналогично доказательству свойства и).

Пример. Доказать, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > (a+b)^{\frac{2}{3}}.$$

Доказательство. Обозначим $a + b$ через c и рассмотрим дроби $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$. Так как $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$, то $0 < \frac{a}{c} < 1$, $0 < \frac{b}{c} < 1$.

Используя свойство к), получим $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} < 1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}} < 1$ или $\left(\frac{a}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}} < 1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}} < 1$. Следовательно, $\left(\frac{a}{c}\right) < \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$ и $\left(\frac{b}{c}\right) < \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$. По свойству числовых неравенств справедливо и неравенство

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}} > \frac{a}{c} + \frac{b}{c},$$

откуда, учитывая, что $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$, получаем справедливость неравенства

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}} > 1.$$

Учитывая, что c — положительное число, и умножая это неравенство на $c^{\frac{2}{3}}$, получаем справедливость неравенства $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > c^{\frac{2}{3}}$, что и требовалось доказать.

§ 3. Степень с иррациональным показателем

Возьмем приближенные значения числа $\sqrt{2}$ с недостатком:

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ \ldots$$

и приближенные значения числа $\sqrt{2}$ с избытком:

$$2,\ 1{,}5,\ 1{,}42,\ 1{,}415,\ \ldots$$

По свойству и) степени с рациональным показателем

$$3^{1} < 3^{1{,}4} < 3^{1{,}41} < 3^{1{,}414} < \ldots \qquad (1)$$

и

$$3^2 > 3^{1,5} > 3^{1,42} > 3^{1,415} > \ldots \qquad (2)$$

В неравенствах (1) и (2) членов бесконечно много и любой член неравенств (1) меньше любого члена неравенств (2). Естественно под числом $3^{\sqrt{2}}$ понимать число, которое больше любого члена неравенств (1) и меньше любого члена неравенств (2). Значит, под числом $3^{\sqrt{2}}$ понимается число, которое больше чем 3 в любой рациональной степени, приближающей $\sqrt{2}$ с недостатком, и которое меньше чем 3 в любой рациональной степени, приближающей $\sqrt{2}$ с избытком. Без доказательства здесь принимается, что такое число существует и притом только одно.

Так же определяется и a^α, где $a > 1$, α — иррациональное положительное число. А именно, находятся рациональные числа r_i, приближающее число α с недостатком: $r_1 < r_2 < r_3 <$ $< \ldots < \alpha$, затем — рациональные числа l_k, приближающее число α с избытком: $l_1 > l_2 > l_3 > \ldots > \alpha$, и составляются неравенства: $a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_3} < \ldots$ и $a^{l_1} > a^{l_2} > a^{l_3} > \ldots$ Тогда под a^α понимается число, которое больше любого числа a^{r_i} и меньше любого числа a^{l_k}. Это определение можно сформулировать и так.

Пусть даны число $a > 1$ и *положительное иррациональное число* α. Через r_i обозначим рациональные числа, приближающие α с недостатком, через l_k — с избытком. *Под числом* a^α понимается число γ такое, что для любых r_i и l_k справедливо неравенство $a^{r_i} < \gamma < a^{l_k}$. Без доказательства здесь принимается, что *такое число существует и притом только одно.*

Пусть даны число a такое, что $0 < a < 1$, и *положительное иррациональное число* α. Через r_i обозначим рациональные числа, приближающие с недостатком, через l_k — с избытком. *Под числом* a^α понимается число γ такое, что для любых r_i и l_k справедливо неравенство $a^{r_i} > \gamma > a^{l_k}$. Без доказательства здесь принимается, что *такое число существует и притом только одно.*

Пусть даны *положительное число* a такое, что $a \neq 1$, и *отрицательное иррациональное число* α. *Под числом* a^α понимается число, равное $\frac{1}{a^{|\alpha|}}$, т.е. если $a \neq 1$ и α — отрицательное иррациональное число, то $a^{\alpha} = \frac{1}{a^{-\alpha}}$. Поскольку число $a^{|\alpha|}$ не равно нулю и в множестве действительных чисел деление всегда выполнимо, то *существует и притом единственное число*, равное частному $\frac{1}{a^{|\alpha|}}$. Это число называют числом a^{α}.

Замечание. 1. Если $a = 1$, то $a^{\alpha} = 1$ для любого действительного числа α. Поэтому в вышеприведенных определениях случай $a = 1$ не рассматривается.

2. В силу вышеприведенных определений и определения степени с рациональным показателем для $a > 0$ и любого действительного числа α число a^{α} всегда положительно.

Для степеней с иррациональным показателем справедливы следующие свойства. Пусть $a > 0$, $b > 0$, α — иррациональное число, β — рациональное или иррациональное, тогда:

а) $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$;

б) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$;

в) $a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$;

г) $a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

д) $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$.

Доказательство этих свойств проводится с помощью теории пределов и поэтому здесь не приводится.

§ 4. Степень положительного числа

Изложенное в §§ 1 — 3 позволяет дать определение действительной степени положительного числа. Заметим, что число a^{α} существует и притом только одно для любого действительного α.

Определение. *Пусть дано положительное число a и действительное число α. Под числом a^{α} понимают положительное число, определяемое по следующему правилу:*

I. *Если* $\alpha > 0$ *и:*

1. $\alpha = m$, *m — натуральное число, то*

$$a^{\alpha} = \begin{cases} a, & \text{при } m = 1, \\ \underbrace{aa \ldots a}_{m \text{ раз}}, & \text{при } m \geq 2. \end{cases}$$

2. $\alpha = \frac{1}{q}$, *q — натуральное число, $q \geq 2$, то $a^{\alpha} = \sqrt[q]{a}$ (арифметических корень q-й степени из положительного числа)*;

3. $\alpha = \frac{p}{q}$, *где p, q — натуральные числа, $q \geq 2$, то $a^{\alpha} = \sqrt[q]{a^p}$*;

4. α — *иррациональное число, тогда:*

а) *если $a > 1$, то a^{α} — число большее, чем a^{r_i} и меньшее, чем a^{l_k}, где r_i — любое рациональное приближение числа α с недостатком, l_k — любое рациональное приближение числа α с избытком*;

б) *если $0 < a < 1$, то a^{α} — число меньшее, чем a^{r_i} и большее, чем a^{l_k} (r_i и l_k — те же, что и выше)*;

в) *если $a = 1$, то $a^{\alpha} = 1$.*

II. *Если $\alpha = 0$, то $a^{\alpha} = 1$.*

III. *Если $\alpha < 0$, то $a^{\alpha} = \frac{1}{a^{|\alpha|}}$.*

Число a^{α} называется степенью, число a — основателем степени, число α — показателем степени.

Из §§ 1 — 3 вытекает, что степень положительного числа обладает следующими основными свойствами: если a и b — положительные числа, α и β — любые действительные числа, то:

а) $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$;

б) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$;

в) $a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$;

г) $a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

д) $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$.

Рассмотрим теперь основные свойства степени положительного числа типа неравенства.

Теорема 1. *Если $a > 1$ и $\alpha > 0$, то $a^{\alpha} > 1$.*

Доказательство. Если $\alpha = \frac{p}{q}$ — рациональное число (p и q — натуральные числа), то свойство $a^{\alpha} > 1$ уже доказано в § 2. Если α — иррациональное число, то возьмем любое положительное рациональное число r, приближающее α с недостатком, тогда $a^\alpha > a^r$ по определению иррациональной степени. В то же время по уже доказанному в § 2 свойству $a^r > 1$. По свойству транзитивности неравенств из справедливости двух неравенств $a^\alpha > a^r$ и $a^r > 1$ вытекает справедливость неравенства $a^\alpha > 1$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если* $a > 1$ *и* $\alpha < 0$, *то* $a^\alpha < 1$.

Доказательство. Число $\beta = -\alpha$ — положительное число, поэтому, применяя теорему 1, имеем $a^\beta > 1$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число a^α. По свойству неравенств $a^\beta a^\alpha > a^\alpha$; по свойству в) и определению степеней $a^\beta a^\alpha = a^{\alpha+\beta} = a^0 = 1$, поэтому $a^\alpha < 1$ и теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если* $a > 1$ *и* $a^\alpha > 1$, *то* $\alpha > 0$.

Доказательство. Предположим, что $a > 1$ и $a^\alpha > 1$, но $\alpha \le 0$, т.е. либо $\alpha = 0$, либо $\alpha < 0$. Если $\alpha = 0$, то $a^\alpha = 1$ по определению. Если $\alpha < 0$ и $a > 1$, то применяя теорему 2, имеем $a^\alpha < 1$. Итак, если $\alpha \le 0$, то $a^\alpha \le 1$, что противоречит предположению $a^\alpha > 1$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если* $a > 1$ *и* $a^\alpha < 1$, *то* $\alpha < 0$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

Объединим теоремы 1 — 4.

Утверждение 1. *Если* $a > 1$, *то условия* $a^\alpha > 1$ *и* $\alpha > 0$ *равносильны; кроме того, равносильны условия* $a^\alpha < 1$ *и* $\alpha < 0$, *т.е. если* $a > 1$, *то*

$$a^\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0,$$
$$a^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha < 0.$$

Теорема 5. *Если* $0 < a < 1$ *и* $\alpha > 0$, *то* $a^\alpha < 1$.

Доказательство. Рассмотрим число $b > \frac{1}{a}$. Так как $b > 1$, то применяя теорему 1, имеем $b^\alpha = 1$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число a^α. По свойству неравенств $b^\alpha a^\alpha > a^\alpha$. По свойствам степеней $b^\alpha a^\alpha = (ab)^\alpha = (1)^\alpha = 1$, поэтому $a^\alpha < 1$.

Теорема 6. *Если* $0 < a < 1$ *и* $\alpha < 0$, *то* $a^\alpha > 1$.

Теорема 7. *Если* $0 < a < 1$ *и* $a^\alpha > 0$, *то* $\alpha < 0$.

Теорема 8. *Если* $0 < a < 1$ *и* $a^\alpha < 1$, *то* $\alpha > 0$.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы 5.

Объединим теоремы 5 — 8.

Утверждение 2. *Если* $0 < a < 1$, *то условия* $a^\alpha > 1$ *и* $\alpha < 0$ *равносильны; кроме того, равносильны условия* $a^\alpha < 1$ *и* $\alpha > 0$, *т.е. если* $0 < a < 1$, *то*

$$a^\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0,$$
$$a^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

Из утверждений 1 и 2 легко получить следующее следствие:

Утверждение 3. *Если* $a > 0$ *и* $a \neq 1$, *то условия* $a^\alpha = 1$ *и* $\alpha = 0$ *равносильны, т.е. если* $a > 0$ *и* $a \neq 1$, *то*

$$a^\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Теорема 9. *Если* $a > 1$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$, *то* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

Доказательство. Рассмотрим число $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$. Так как $\beta > 0$, то $a\beta > 1$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число a^{α_2}. По свойству 6 неравенств $a^\beta a^{\alpha_2} > a^{\alpha_2}$; по свойству степеней $a^\beta a^{\alpha_2} = a^{\alpha_1}$, поэтому $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ и теорема 9 доказана.

Теорема 10. *Если* $a > 1$ *и* $\alpha_1 < \alpha_2$, *то* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

Теорема 11. *Если* $a > 1$ *и* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$, *то* $\alpha_1 > \alpha_2$.

Теорема 12. *Если* $a > 1$ *и* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$, *то* $\alpha_1 < \alpha_2$.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы 9.

Объединим теоремы 9 — 12.

Утверждение 4. *Если* $a > 1$, *то условия* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$ *равносильны; кроме того, равносильны условия* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$ *и* $\alpha_1 < \alpha_2$, *т.е. если* $a > 1$, *то*

$$a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2,$$
$$a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2.$$

Теорема 13. *Если* $0 < a < 1$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$, *то* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

Теорема 14. *Если* $0 < a < 1$ *и* $\alpha_1 < \alpha_2$, *то* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

Теорема 15. *Если* $0 < a < 1$ *и* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$, *то* $\alpha_1 < \alpha_2$.

Теорема 16. *Если* $0 < a < 1$ *и* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$, *то* $\alpha_1 > \alpha_2$.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы 9.

Объединим теоремы 13 — 16.

Утверждение 5. *Если* $0 < a < 1$, *то условия* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ *и* $\alpha_1 < \alpha_2$ *равносильны; кроме того, равносильны условия* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$, *т.е. если* $0 < a < 1$, *то*

$$a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2,$$
$$a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2.$$

Из утверждений 4 и 5 легко получить следующее следствие:

Утверждение 6. *Если* $a > 0$ *и* $a \neq 1$, *то условия* $a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2}$ *и* $\alpha_1 = \alpha_2$ *равносильны, т.е. если* $a > 0$ *и* $a \neq 1$, *то*

$$a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Утверждения 4 и 5 словесно формулируются следующим образом:

Если основание степени больше 1, то большему показателю соответствует бóльшая степень и наоборот, большей степени соответствует больший показатель.

Если основание степени меньше 1 ($0 < a < 1$), то большему показателю соответствует меньшая степень и наоборот, меньшей степени соответствует больший показатель.

Замечание. Если $\alpha > 0$, то понятие действия возведения в степень можно расширить на множество всех неотрицательных чисел, так как по определению $0^\alpha = 0$, если $\alpha > 0$.

Рассмотрим пример на применение свойств степеней положительного числа. Пусть требуется доказать, что $3^{\sqrt{3}} < 7$.

По определению $3^{\sqrt{3}} < 3^r$, где r — рациональное приближение иррационального числа $\sqrt{3}$ с избытком. Возьмем $r = \frac{7}{4}$. Так как $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$, то $3^{\sqrt{3}} < 3^{\frac{7}{4}}$. Докажем, что $3^{\frac{7}{4}} < 7$.

Используя два раза теорему 5, получим равносильность следующих неравенств:

$$\frac{3^{\frac{7}{4}}}{7} < 1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{3^{\frac{7}{4}}}{7}\right)^4 < 1.$$

Используя свойства степеней типа равенства, получим, что неравенство $\left(\frac{3^{\frac{7}{4}}}{7}\right)^4 < 1$ равносильно неравенству $\frac{3^7}{7^4} < 1$, которое является верным, так как $3^7 = 2187$, $7^4 = 2401$.

Следовательно, в силу равносильности переходов верно и исходное неравенство $3^{\sqrt{3}} < 7$.

§ 5. Логарифмы

Рассмотрим основные задачи, которые возникают при изучении степеней.

1. Даны действительные числа a и α. *Найти действительное число x такое, что $x^\alpha = a$.* Это — задача о возведении действительного числа в степень. Она разрешима для любого положительного числа a и любого действительного числа α. Если $a = 0$ и $\alpha > 0$, то $x = 0$ (см. § 4 гл. IV). При $a < 0$ эта задача здесь рассматриваться не будет.

2. Даны действительные числа b и α. *Найти действительное число x такое, что $x^\alpha = b$.*

Если b — любое положительное число и α — любое отличное от нуля действительное число, то эта задача сводится к предыдущей, ибо ответ дает число $x = b^{\frac{1}{\alpha}}$. Действительно, $x^\alpha = \left(b^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = b^{\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha} = b^1 = b$. Если $\alpha = 0$ и $b = 1$, то решением этой задачи является любое действительное отличное от нуля число x. Если $\alpha = 0$ и $b \neq 1$, то эта задача не имеет решения. При $b < 0$ эта задача здесь рассматриваться не будет.

3. Даны действительные числа a и b. *Найти действительное число x такое, что $a^x = b$.* Будем рассматривать эту задачу только для действительных положительных чисел a и b. Если $a = 1$ и $b = 1$, то решением этой задачи является любое действительное число x. Если $a = 1$ и $b \neq 1$, то задача не имеет решения. Рассмотрим случай $a \neq 1$.

Теорема 1. *Для любой пары действительных чисел a и b таких, что $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, существует и притом только одно действительное число x такое, что $a^x = b$.*

Доказательство существования такого числа x здесь не приводится. Докажем единственность. Предположим, что существуют действительные числа x_1 и x_2 такие, что $a^{x_1} = b$, $a^{x_2} = b$. По свойству транзитивности равенств $a^{x_1} = a^{x_2}$. На основании утверждения 6 (см. § 4) $x_1 = x_2$, что и требовалось доказать.

Определение. *Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, то действительное число α называется логарифмом числа b по основанию a и обозначается $\alpha = \log_a b$, если $a^\alpha = b$.*

Заметим, что определение логарифма можно дать только после доказательства теоремы 1, так как до нее было неясно, существует ли такое число α, что $a^\alpha = b$, и единственно ли оно. Подчеркнем еще раз, что логарифм определяется только для положительного числа по положительному не равному единице основанию, т.е. для любого $a \leq 0$, $a = 1$ и любого $b \leq 0$ понятие логарифма лишено смысла. Например, утверждение, что число 3 является логарифмом числа (— 8) по основанию (— 2), лишено смысла.

Итак, в определении логарифма $\log_a b$ всегда $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Из определения логарифма вытекает *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Пользуясь определением логарифма, получаем, что $\log_a a = 1$ и $\log_a 1 = 0$.

Используя единственность логарифма, имеем, что если $\mu > 0$ и $\mu \neq 1$, то всегда $\log_a \mu \neq 0$.

Перейдем к рассмотрению основных свойств логарифмов.

Пусть числа M, N, a, b, α и β таковы, что $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, α и β — любые действительные числа ($\beta \neq 0$). Тогда:

а) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$;

б) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

в) $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$;

г) $\log_{a^\beta} M^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a M$;

д) $\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$ (правило перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию);

е) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$;

ж) если $a > 1$, то $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M < N$;

з) если $0 < a < 1$, то $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M > N$;

г') $\log_{a^\beta} M^\beta = \log_a M$;

д') $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Докажем эти свойства.

а) Рассмотрим	$a^{\log_a MN} =$
по основному логарифмическому тождеству	$= MN =$
по основному логарифмическому тождеству	$= a^{\log_a M} a^{\log_a N} =$
по свойству степени положительного числа	$= a^{\log_a M + \log_a N}$.

Итак, $a^{\log_a MN} = a^{\log_a M + \log_a N}$. Применяя к последнему равенству утверждение 6 свойств степеней, получим, что $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$.

Свойство б) доказывается аналогично.

в) Рассмотрим	$a^{\log_a (M^\alpha)} =$
по основному логарифмическому тождеству	$= M^\alpha = \left(a^{\log_a M}\right)^\alpha =$
по свойству степени положительного числа	$= a^{\alpha \log_a M}$.

Итак, $a^{\log_a(M^\alpha)} = a^{\alpha\log_a M}$. Применяя утверждение 6 свойств степеней, получим $\log_a(M^\alpha) = \alpha\log_a M$.

г) Рассмотрим $(a^\beta)^{\log_{a^\beta}(M)^\alpha} =$

по основному логарифмическому тождеству $= (M)^\alpha = (a^{\log_a M})^\alpha =$

по свойству степени положительного числа $= a^{\alpha\log_a M} =$

так как $\beta \neq 0$, то $1 = \beta \cdot \frac{1}{\beta}$, поэтому $= \left[(a^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\alpha\log_a M} =$

по свойству степени положительного числа $= (a^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}\log_a M}$.

Итак, $(a^\beta)^{\log_{a^\beta}(M)^\alpha} = (a^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}\log_a M}$. Применяя к последнему равенству утверждение 6 свойств степеней, получим, что $\log_{a^\beta}(M)^\alpha = \frac{\alpha}{\beta}\log_a M$.

д) Рассмотрим $a^{\log_a M} =$

по основному логарифмическому тождеству $= M =$

по основному логарифмическому тождеству $= b^{\log_b M} =$

по основному логарифмическому тождеству $= (a^{\log_a b})^{\log_b M} =$

по свойству степени положительного числа $= a^{\log_a b \log_b M}$.

Итак, $a^{\log_a M} = a^{\log_a b \log_b M}$. Применяя к последнему равенству утверждение 6 свойств степеней, получим, что $\log_a M = \log_a b \log_b M$. По свойству равенств обе части этого равенства можно умножить на число $\frac{1}{\log_a b}$ (так как $b \neq 1$, то $\log_a b \neq 0$) и получить справедливость равенства

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}.$$

е) По основному логарифмическому тождеству $M = a^{\log_a M}$ и $N = a^{\log_a N}$, следовательно

$$M = N \Leftrightarrow a^{\log_a M} = a^{\log_a N}. \qquad (1)$$

По утверждению 6 свойств степеней имеем

$$a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$M = N \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N.$$

ж) По основному логарифмическому тождеству $M = a^{\log_a M}$ и $N = a^{\log_a N}$, следовательно

$$M < N \Leftrightarrow a^{\log_a M} < a^{\log_a N}. \qquad (3)$$

На основании утверждения 4 свойств степеней имеем

$$a^{\log_a M} < a^{\log_a N} \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$M < N \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N.$$

Свойство з) доказывается аналогично.

Свойства ж) и з) имеют словесную формулировку:

При основании, большем единицы, меньшему из двух положительных чисел соответствует меньший логарифм и меньшему логарифму соответствует меньшее число.

При основании, меньшем единицы, меньшему из двух положительных чисел соответствует больший логарифм и большему логарифму соответствует меньшее число.

Логарифмы по основанию 10 называются *десятичными логарифмами*, и вместо обозначения $\log_{10} M$ часто употребляется обозначение $\lg M$.

Логарифмы по основанию e (e — иррациональное число, приближенное значение которого 2,718281828459045...) называются *натуральными логарифмами*, и вместо обозначения $\log_e N$ часто употребляется обозначение $\ln N$.

Свойства логарифмов используются для преобразования различных логарифмических выражений как с числами, так и с буквами.

Примеры. 1. Вычислить $A = \left(\sqrt[7]{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3}+\log_{9\sqrt{3}}125}$.

По свойству д') логарифмов $\frac{1}{5\log_5 3} = \frac{1}{5}\log_3 5$; по свойству д) логарифмов $\log_{9\sqrt{3}}125 = \log_{3^{5/2}} 5^3 = \frac{6}{5}\log_3 5$. Используя свойства степеней и основное логарифмическое тождество, получим

$$A = \left(3^{-\frac{3}{7}}\right)^{\frac{1}{5}\log_3 5+\frac{6}{5}\log_3 5} = 3^{-\frac{3}{5}\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-\frac{3}{5}} =$$

$$= 5^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{0{,}008}.$$

2. Доказать, что если a, b, c — действительные числа, удовлетворяющие условию $0 < b \le c < a - 1$, то справедливо неравенство $\log_a(a + b) < \log_{a-c} a$.

Доказательство. Поскольку $a > 0$ и $c \ge b > 0$, то очевидна справедливость неравенства

$$a^2 - (c - b)a - bc < a^2,$$

которое можно переписать так:

$$(a + b)(a - c) < a^2. \qquad (5)$$

Так как $a > 1$, то можно воспользоваться свойством ж) и получить неравенство

$$\log_a(a + b)(a - c) < 2, \qquad (6)$$

равносильное неравенству (5).

Используя свойство а), получим неравенство

$$\log_a(a + b) + \log_a(a - c) < 2, \qquad (7)$$

равносильное неравенству (6).

Каждое слагаемое в левой части неравенства (3) положительно, так как $(a + b) > 1$ и $(a - c) > 1$. Следовательно, можно воспользоваться теоремой 1 § 2 гл. II: возведя в квадрат левую и правую части неравенства (7) получим равносильное неравенство.

Поэтому неравенство (7) равносильно неравенству

$$[\log_a(a+b)+\log_a(a-c)]^2<4,$$

которое равносильно неравенству

$$\begin{aligned}&[\log_a(a+b)+\log_a(a-c)]^2<\\&<4-4\log_a(a+b)+\log_a(a-c).\end{aligned}\qquad(8)$$

Неравенство (8) равносильно неравенству (5), которое справедливо, значит, справедливо и неравенство (8).

Так как при $b>0$, $c>0$ справедливо неравенство

$$0<[\log_a(a+b)+\log_a(a-c)]^2,\qquad(9)$$

то можно воспользоваться свойством транзитивности неравенств.

Тогда из справедливости неравенств (8) и (9) будет следовать справедливость неравенства

$$0<4-4\log_a(a+b)+\log_a(a-c),$$

которое можно записать так:

$$\log_a(a+b)+\log_a(a-c)<1.$$

Применяя свойство д') и учитывая, что $a-c>1$ и $a>1$, получим справедливость исходного неравенства.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти числовое значение следующего числового выражения (1 — 19):

1. $\left(3^2\right)^2-[(-2)^3]^2-\left(-5^2\right)^2$. 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(1\frac{1}{2}\right)^2-[(-0{,}5)^3]^2$.

3. $4^{-2}-2^{-3}+[(-2)^3]^{-1}$. 4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}$

5. $(-0{,}75)^3+(0{,}3)^{-3}-\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$. 6. $[(0{,}6)^2]^0-[(-4{,}5)^{-2}]^0+\left(3\frac{1}{2}\right)^0$.

7. $\left(4^{-1}\right)^{4}\cdot 2^{5}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{3}\cdot\left(8^{-2}\right)^{5}\cdot\left(64^{2}\right)^{3}.$

8. $\left(-2\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot(0{,}25)^{2}\cdot[(-5)^{-3}]^{2}\cdot[(0{,}1)^{2}]^{-2}.$

9. $(\sqrt{2})^{4}\cdot\left[\left(2\frac{1}{2}\right)^{3}:\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]:\left[(0{,}1)^{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\right].$

10. $3^{-4}:\left(2^{4}:3^{2}-2^{2}:1\frac{1}{8}\right)+\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(-0{,}295)^{0}.$

11. $(0{,}25)^{-1}\cdot\left(1\frac{1}{4}\right)^{2}+\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{3}\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}.$

12. $\left(2\frac{1}{3}\right)^{0}+\left[(1{,}2)^{-4}\cdot\left(\frac{25}{6}\right)^{2}\right]:6^{-3}-[(-33{,}41)^{2}]^{0}.$

13. $(-0{,}(3))^{2}\cdot\left[\left(1\frac{1}{3}\right)^{2}\right]^{-2}+((0{,}5)^{2})^{3}:[(43)^{0}]^{2}+(-8)^{3}\cdot\left(\frac{2}{3^{2}}\right)^{-1}.$

14. $\left[27^{10}-5\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-8}\cdot 3^{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3^{2}}\right)^{-8}\cdot 3^{8}\right]:$

$:\left[41\cdot\left(3^{-2}\right)^{-12}\right].$

15. $\left[\left(10^{-6}\right)^{-2}+5^{3}\cdot(25)^{4}\cdot 2^{3}\cdot\left(2^{3}\right)^{2}-5^{13}\cdot\left(4^{2}\right)^{2}\right]:\left[\left(5^{-5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 10^{6}\right].$

16. $\left[9\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 18^{5}-\left(2^{-2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3^{2}}\right)^{-5}-\left(3^{-3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-6}\right]\times$

$\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right]^{-1}\cdot\left(3^{2}\right)^{4}.$

17. $\left\{15\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{-1}\cdot(25)^{3}-2^{3}\cdot\left(5^{3}\right)^{2}+4\cdot\frac{(25)^{3}}{5}\right\}\cdot(4)^{-1}\cdot\frac{25}{5^{6}}.$

18. $\dfrac{8\cdot\left(4^{2}\right)^{4}\cdot 3^{3}\cdot 27^{2}+90\cdot 6^{3}\cdot 4^{7}\cdot\left(3^{2}\right)^{2}}{24\cdot\left(6^{2}\right)^{4}\cdot\left(2^{4}\right)^{2}+144\cdot\left(2^{3}\right)^{4}\cdot\left(9^{2}\right)^{2}\cdot 4^{2}}.$

19. $\dfrac{180\cdot\left[2^{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{6}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}-72\cdot\left(6^{2}\right)^{3}\cdot\left[(36)^{3}\cdot 4^{2}\right]^{2}}{135\cdot 216^{3}\cdot\left[4^{2}\cdot 9\right]^{2}\cdot 6^{3}+36\cdot\left[32\cdot 4^{2}\cdot 3^{4}\right]^{2}}.$

Вынести за знак корня те множители числа, стоящего под знаком корня, которые можно вынести (20 — 25):

20. $\sqrt{120}$, $\sqrt{147}$, $\sqrt{108}$, $\sqrt{245}$, $\sqrt{363}$. 21. $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{1080}$, $\sqrt[3]{375}$.

22. $\sqrt[4]{80}$, $\sqrt[4]{405}$, $\sqrt[4]{328}$. 23. $\sqrt[5]{486}$, $\sqrt[5]{800}$, $\sqrt[5]{12500}$.

24. $\sqrt{18(4-\sqrt{17})^2}$, $\sqrt{54(2-\sqrt{3})^2}$. 25. $\sqrt[4]{48(2-\sqrt{7})^4}$, $\sqrt[4]{2(\sqrt{11}-3)^4}$.

Внести под знак корня все множители, стоящие перед знаком корня (26 — 30):

26. $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $7\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\frac{1}{3}\sqrt{15}$. 27. $2\sqrt[3]{5}$, $3\sqrt[3]{4}$, $12\sqrt[3]{1\frac{1}{9}}$, $6\sqrt[3]{1\frac{4}{27}}$.

28. $\frac{3}{2}\sqrt{8}$, $1\frac{1}{3}\sqrt{6}$, $1\frac{2}{3}\sqrt{2\frac{2}{5}}$. 29. $(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$, $(4-\sqrt{19})\cdot\sqrt{3}$.

30. $(\sqrt{3}-2)\cdot\sqrt[4]{5}$, $(11-\sqrt{13})\cdot\sqrt[4]{7}$.

Вынести за знак корня знаменатель дроби, стоящей под знаком корня (31 — 33):

31. $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{28}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}$, $\frac{21}{2}\sqrt{3\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{0{,}2}$, $6\sqrt{2\frac{1}{3}}$.

32. $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$, $\sqrt[3]{3\frac{1}{2}}$, $\frac{4}{3}\sqrt[3]{1{,}5}$, $\frac{4}{9}\sqrt[3]{20\frac{1}{4}}$, $\frac{3}{5}\sqrt[3]{13\frac{8}{9}}$.

33. $\sqrt[4]{\frac{7}{4}}$, $16\sqrt[5]{1\frac{3}{8}}$, $\sqrt[6]{\frac{5}{27}}$, $1\frac{1}{2}\sqrt[4]{7\frac{1}{9}}$.

Записать в виде произведения двух чисел следующее число (34 — 37):

34. $7+\sqrt{7}$, $\sqrt{12}+\sqrt{45}+\sqrt{18}$, $5+\sqrt{5}+\sqrt{15}$.

35. $5-\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}$, $3-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{24}$.

36. $3\sqrt{12}-3\sqrt{6}+\sqrt{30}-\sqrt{15}$. 37. $\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{40}$.

Найти числовое значение следующего числового выражения (38 — 45):

38. $2\sqrt{5\sqrt{48}}+3\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{15\sqrt{27}}$.

39. $\sqrt{176}-2\sqrt{275}+\sqrt{1584}-\sqrt{891}$.

40. $2(\sqrt{252}-\sqrt{175})-(\sqrt{112}-\sqrt{63}-\sqrt{28})$.

41. $15\sqrt{1{,}04}-\frac{3}{5}\sqrt{5\frac{5}{9}}+6\sqrt{\frac{1}{18}}-(5\sqrt{0{,}02}-\sqrt{300})$.

42. $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}}+3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+5\sqrt[3]{144}$. 43. $2\sqrt[3]{0{,}125}+\sqrt[4]{0{,}0016}$.

44. $\sqrt[4]{0{,}0001}-\sqrt[5]{0{,}00032}$. 45. $(\sqrt{6}-2\sqrt{15})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{20}$.

Записать в виде корней одной и той же степени следующие четыре числа (46 — 50):

46. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[6]{5}$ и $\sqrt[4]{7}$. 47. $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{15}$, $\sqrt[8]{50}$ и $\sqrt[16]{171}$.

48. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{11}$ и $\sqrt[12]{1671}$. 49. $\sqrt[3]{2\cdot 3^4}$, $\sqrt[6]{5\cdot 64^2}$, $\sqrt[4]{3\cdot 5^3}$ и $\sqrt{2^3\cdot 7^5}$.

50. $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$, $\sqrt[4]{\frac{5}{9}}$, $\sqrt[6]{\frac{5}{7}}$ и $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Записать в виде степени с рациональным показателем следующие числа (51 — 53):

51. $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7^2}$, $\sqrt[4]{11^3}$, $\sqrt[5]{13^2}$, $\sqrt[7]{19^3}$.

52. $\sqrt{2^{-3}}$, $\sqrt[9]{10^{-2}}$, $\sqrt[4]{3^{-3}}$, $\sqrt[6]{7^{-4}}$, $\sqrt[7]{5^{-5}}$.

53. $2\sqrt{4^{21}}$, $3\sqrt[4]{3^{3}}$, $7\sqrt[5]{7^{3}}$, $3\sqrt[6]{27^{5}}$, $9\sqrt[7]{3^{25}}$.

Записать, используя знак корня, следующую степень с рациональным показателем (54 — 57):

54. $2^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{3}{4}}$, $5^{\frac{2}{5}}$, $7^{\frac{3}{7}}$, $4^{\frac{2}{3}}$. 55. $3^{0,5}$, $4^{0,25}$, $4^{0,75}$, $7^{1,25}$, $3^{2\frac{1}{2}}$.

56. $3\cdot 2^{\frac{2}{3}}$, $4\cdot 3^{\frac{1}{4}}$, $5\cdot 6^{0,25}$, $7\cdot 3^{2,25}$, $2\cdot 9^{2\frac{1}{2}}$.

57. $2\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$, $3\cdot 2^{-3,75}$, $7\cdot 5^{-2\frac{3}{4}}$, $6\cdot 7^{-0,7}$, $8\cdot 10^{-\frac{7}{2}}$.

Заменив все знаки корней рациональными показателями степени, найти числовое значение следующего числового выражения (58 — 64):

58. $\sqrt{\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[4]{5}}\right)^{2}$.

59. $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}:\left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$. 60. $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}}:\left(\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}}:\sqrt[4]{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

61. $\left(\sqrt[3]{16\sqrt[4]{8\sqrt{2}}}\right)^{2}\cdot\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}$.

62. $\sqrt{3\sqrt[3]{9\sqrt{27\sqrt{3}}}}:\left(\sqrt[16]{3^{15}}\cdot\sqrt[8]{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

63. $\left(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}}:\sqrt[9]{4\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt[4]{9}}$.

64. $\dfrac{\left(\sqrt[6]{5\sqrt{5}}\right)^{2}\left(\sqrt[6]{25\sqrt[3]{25}}\right)^{4}}{\left(\sqrt[3]{5\sqrt[4]{125}}\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Найти числовое значение следующего числового выражения (65 — 78):

65. $\left(27^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{2}{3}}\cdot 32^{\frac{2}{5}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}$. 66. $\left(100^{-\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{4}{3}}\cdot 0,25^{0,5}\cdot 16^{-0,75}\right)^{\frac{4}{3}}$.

67. $\left(6,25^{0,5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}\cdot 100^{-\frac{1}{2}}\cdot 0,01^{-1}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

68. $\left[\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right):4^{\frac{1}{6}}\right]:\left\{\left[4^{-\frac{1}{2}}:\left(2^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\right)\right]\cdot\left[\left(2^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{-\frac{2}{3}}\right):3^{\frac{5}{6}}\right]\right\}$.

69. $\left\{3^{\frac{1}{3}}\left[5^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(225^{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^{6}$.

70. $\left\{\left[\left(3^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right):\left(3^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{-\frac{5}{6}}\right)\right]:\left(\frac{1}{864}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{2}{7}}$.

71. $\left\{\left[\left(3^{\frac{5}{2}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}\right) : 2^{-\frac{5}{4}}\right] : \left[16 : \left(5^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{5}}.$

72. $\left\{3^{\frac{5}{2}} \cdot 5^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{4}} \cdot \left[16 : \left(27^{-1} \cdot 5^{-\frac{5}{3}}\right)\right] \cdot \left(25 \cdot 3^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{4}}\right)\right\}^{\frac{1}{5}}.$

73. $10^2 \cdot 1000^{-\frac{2}{3}} - \left(100^{-\frac{1}{2}} - 0{,}027^{-\frac{1}{3}}\right) - \left[625^{-0{,}75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2\right].$

74. $\left[(27\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + (8\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right] - \left[\frac{2}{7} \cdot (343\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} - 10\,(0{,}001 \cdot \sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right].$

75. $2 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{12}} - 3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) - 3 \cdot \left(5\sqrt[3]{144} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{5\frac{1}{3}}\right).$

76. $\left(4\sqrt{\frac{1}{2}} - 0{,}5\sqrt{12} + \sqrt{0{,}02} - 5\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(-0{,}75\sqrt{2}).$

77. $(2\sqrt{6} - \sqrt{5} + 4\sqrt{2})(3\sqrt{5} + \sqrt{6} - 2\sqrt{2}).$

78. $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + 4\sqrt[3]{\frac{1}{72}} - \sqrt[3]{9}\right)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16}).$

Доказать справедливость следующего числового равенства (79 — 112):

79. $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{6} - 2.$ 80. $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$

81. $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}.$ 82. $\sqrt{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \frac{9}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2}{2}.$

83. $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt{5} - 2.$ 84. $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} = 1.$

85. $\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} = \sqrt{3} + 1.$

86. $\sqrt{8 + \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{8}} = \sqrt{5} + \sqrt{2} + 1.$

87. $\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{5}).$

88. $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$ 89. $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2.$

90. $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$ 91. $\sqrt[6]{25 + 4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}} = 0.$

92. $\sqrt[3]{3 + 9\sqrt[3]{12} - 9\sqrt[3]{18}} = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6}.$

93. $\left(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 2.$

94. $\sqrt[6]{8\sqrt{2}(7 + 4\sqrt{3})} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{6\sqrt{2}}} = 2\sqrt[6]{2}.$

95. $\sqrt[4]{28 + 4\sqrt{48}} = \sqrt{3} + 1.$ 96. $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1.$

97. $\sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$

98. $\sqrt{6 + 2(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2})} - \sqrt{6 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2})} = 2\sqrt{2}.$

99. $\dfrac{\sqrt{\sqrt5+\sqrt2}}{\sqrt{3\sqrt5-3\sqrt2}}=\sqrt5+\sqrt2.$

100. $\dfrac{(2+\sqrt5)(2+5\sqrt5)-(2+2\sqrt5)(2-2\sqrt5)}{4+3\sqrt5}=3\sqrt5.$

101. $\dfrac{1}{\sqrt2+\sqrt[3]{3}}=(\sqrt[3]{3}-\sqrt2)\,(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4).$ 102. $\dfrac{4+2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt3}}=\sqrt3+1.$

103. $\dfrac{\sqrt{\sqrt3-\sqrt[4]{2}}}{\sqrt{\sqrt3+\sqrt[4]{2}}}=\dfrac{\sqrt{3-\sqrt2}\,(3-\sqrt[4]{2})(3-\sqrt2)}{7}.$

104. $\dfrac{3}{\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{8}}=(\sqrt[4]{11}+\sqrt[4]{8})\,(\sqrt{11}+\sqrt8).$

105. $\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}=(\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt3+\sqrt2).$

106. $\dfrac{2\sqrt3}{\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5}=\dfrac{2+\sqrt6-\sqrt{10}}{2}.$

107. $\dfrac{2\sqrt{30}}{\sqrt5+\sqrt6+\sqrt7}=\dfrac{(30-2\sqrt{30})(\sqrt5+\sqrt6+\sqrt7)}{26}.$

108. $\dfrac{6}{3+\sqrt2-\sqrt3}=\dfrac{3(3\sqrt2-4)(3+\sqrt2+\sqrt3)}{2}.$

109. $\dfrac{6}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}=3-\sqrt[4]{27}.$

110. $\sqrt[4]{7}-\dfrac{\sqrt7-\dfrac{1}{7}}{\sqrt[4]{7}-\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt7}}}+\dfrac{6}{7\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{7}}\right)}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{343}}=0.$

111. $\dfrac{\sqrt{\sqrt2-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt2}+\sqrt[3]{(\sqrt3+12)\sqrt[4]{3}-6\sqrt3-8}}{\sqrt3-\sqrt{\sqrt2+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt2}}=1.$

112. $\left(\dfrac{2+\sqrt3}{\sqrt2+\sqrt{2+\sqrt3}}+\dfrac{2-\sqrt3}{\sqrt2-\sqrt{2-\sqrt3}}\right)^2=2.$

113. Разность $\sqrt{|40\sqrt2-57|}-\sqrt{40\sqrt2+57}$ является целым числом. Найти это целое число.

Какое из двух следующих чисел больше (114 — 123):

114. $\sqrt[8]{10}$ или $\sqrt[4]{3}$; 115. $(\sqrt{0{,}2})^{-3{,}5}$ или 1;

116. $\sqrt[6]{24}$ или $\sqrt[3]{5}$; 117. $\sqrt[12]{623}$ или $\sqrt[3]{5}$;

118. $(2\sqrt[3]{2})^{-6}$ или 2^{-11}; 119. $\sqrt[21]{9}$ или $\sqrt[42]{81}$;

120. $\sqrt[3]{125\cdot343}$ или $\sqrt[5]{\dfrac{52}{81}}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{4}{39}}\cdot\sqrt[5]{972}$; 121. $\sqrt[3]{\dfrac{1000}{729}}$ или $\sqrt[5]{12}:\sqrt[5]{\dfrac{4}{81}}$;

122. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{10}}$ или $\sqrt[7]{\sqrt{13}}$; 123. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^5}}}$ или $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^8}}}$?

Доказать справедливость следующего числового неравенства (124 — 132):

124. $3^{34} > 2^{51}$. **125.** $202^{303} > 303^{202}$.

126. $\sqrt{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

127. $\sqrt[5]{\sqrt{11}-3} > \sqrt[10]{\sqrt{11}} - \sqrt[5]{3}$.

128. $2(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{7}) - (\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}) < 3$.

129. $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+5\sqrt{5} > 5\sqrt[4]{6}+7\sqrt[4]{10}+3\sqrt[4]{15}$.

130. $(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{9})(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{9}) > 9\sqrt[4]{315}$.

131. $3\sqrt{2}+\sqrt{3}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) > 2\sqrt[4]{6}(1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})$.

132. $\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{10}+\sqrt{15} < \dfrac{23}{3}$.

Найти числовое значение следующего числового выражения (133 — 170):

133. $\log_2\sqrt[3]{16} + \log_8\sqrt[4]{2} - \log_3(27\sqrt{3}) - \log_5\sqrt{5\sqrt{5}}$.

134. $\log_2\left(\dfrac{1}{4\sqrt{4}}\right) + \log_3\left(\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{27}\right) + \log_4\left(\dfrac{\sqrt[3]{8}}{128\sqrt{2}}\right) - \log_7\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{49}}\right)$.

135. $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{9} + \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}9 - \log_{\frac{1}{8}}\sqrt[4]{32} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt[3]{128\sqrt{2}}$.

136. $\log_3 27 - \log_{\sqrt{3}}27 - \log_{\frac{1}{3}}27 - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\dfrac{64}{27}\right)$.

137. $\log_2\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2\sqrt[3]{16}}}{\sqrt{2}}\right) - \log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\dfrac{4}{\sqrt{2}}} + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(9\sqrt[3]{3})$.

138. $\log_{0,4}\left(\dfrac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{50}\right) + \log_{0,6}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right) + \log_{0,32}\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right)$.

139. $\log^2_{\frac{5}{\sqrt[4]{5}}}\sqrt{5} - \log_{\frac{5}{\sqrt[4]{5}}}(5\sqrt{5}) + \log_{(\sqrt{3}+1)}(4+2\sqrt{3})$.

140. $\sqrt{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}} + \log_{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt{2}}}}$.

141. $\sqrt{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{\dfrac{(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}} + \log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{2}}}}}$.

142. $\left(\log_{\sqrt{5}}\dfrac{1}{5}\right)\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}(5\sqrt{5}) + \log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})}$.

143. $2\cdot\log_5\sqrt[4]{5} + \dfrac{1}{2}\cdot\log_{\sqrt{5}}25 - \log^2_5\sqrt{5} - 2$.

144. $\dfrac{1}{2}\left(9^{\log_{25}5+1} - 3^{2\left(\log_{16}2+\frac{1}{4}\right)}\right) - \log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})$.

145. $\log_3\log_8\log_2 16$. **146.** $\log_6\log_4\log_2 64$. **147.** $\log_4\log_2\log_3 81$.

148. $\log_3\left[\log_2^2\left(\frac{1}{2}\right)+6\log_2\sqrt{2}+5\right]$.

149. $\left(\log_{\sqrt5}125:\log_5^2 25\right)\cdot\left(\log_{\frac15}\sqrt5:\log_{0,2}\sqrt[3]{25}\right)$.

150. $\left[\log_{\frac12}\sqrt[3]{\frac14}+6\log_{\frac14}\left(\frac12\right)-2\log_{\frac1{16}}\left(\frac14\right)\right]:\log_{\sqrt2}\sqrt[5]{8}$.

151. $3^{1+\log_3 4}+2^{\log_2 3-2}$. **152.** $4^{3\log_4 2}-(1,5)^{\log_{\frac32}3-1}$.

153. $2^{3-\log_4 3}+7^{2\log_7 2+1}$. **154.** $16^{1-\log_4 5}+4^{\frac12\log_2 3+3\log_8 5}$.

155. $9^{2\log_3 2+4\log_{81}2}\cdot\sqrt{3^{2+\frac12\log_3 16}}$.

156. $(0,1)^{2\lg0,1-1,5\lg0,1}\cdot(0,1)^{-\left(\lg\frac83+2-\lg20\right)}$.

157. $72\cdot\left(49^{\frac12\log_7 9-\log_7 6}+5^{-\log_{\sqrt5}4}\right)$.

158. $\frac{\log_3 81}{\log_3 9}\left(36^{1-\log_6 2}+49^{-\log_7 6}\right)$.

159. $\frac{\log_{\sqrt2}16}{\log_4\sqrt2}\left[\log_{\sqrt2}(2\sqrt[4]{2})+100^{\frac12\lg8-2\lg2}\right]$.

160. $10^{\frac12\lg9-\lg5+\lg2}\cdot7^{\log_{3\sqrt3}27}$.

161. $\log_{\sqrt6}3\cdot\log_3 36+\log_{\sqrt3}8\cdot\log_4 81$.

162. $72\log_2\sqrt{\frac15}\cdot\log_{25}\sqrt[3]{2}+10\log_2\left(\frac{\sqrt[5]{8}}{2}\right)$.

163. $3^{\frac25\log_3 32-\frac13\log_3 64+\log_3 10}$. **164.** $(0,2)^{\frac12(9\log_{0,2}2-3\log_{0,2}4)}$.

165. $(\sqrt2)^{3\log_{\sqrt2}5-2\log_{\sqrt2}25-\log_{\sqrt2}10+2\log_{\sqrt2}\sqrt5}$.

166. $(\lg2+\lg5+\lg300-\lg3)\cdot3^{\frac{1}{5\log_5 3}}$.

167. $\left(\log_8 27-\log_{0,5}\frac13\right)\cdot\left(\frac{\log_3 12}{\log_{36}3}-\frac{\log_3 4}{\log_{108}3}\right)$.

168. $\frac{\log_2\sqrt[3]{\frac23}}{\log_2^2\sqrt7}-\frac{2\log_{\sqrt7}\sqrt[3]{\frac23}}{\log_{\sqrt3}\sqrt7}-\log_{\sqrt[6]{7}}\sqrt[3]{\frac23}\cdot\log_{\sqrt7}\sqrt[3]{\frac23}$.

169. $2^{\log_5 3}\cdot\left(\frac13\right)^{1-\log_5 2,5}\cdot\log_9 2\cdot\log_4 81$.

170. $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$.

Имеет ли смысл следующее числовое выражение (171 — 173):
171. $\sqrt{\log_2 1,4+\log_2 0,7}$; **172.** $\sqrt{\lg15+\lg0,07}$; **173.** $\lg\lg\lg11$?

Какое из двух чисел больше (174 — 188):

174. $\lg 0{,}245$ или 0; **175.** $\lg\left(\frac{\sqrt{71}}{4}\right)$ или 0;

176. $\lg\sqrt[6]{10}$ или $\log_2\sqrt{2}$; **177.** $\log_4 5$ или $\log_6 5$;

178. $\log_9 10$ или $\log_{10} 11$; **179.** $\log_3 2$ или $\log_2 3$;

180. $\log_4 2$ или $\log_{0,0625} 0{,}25$; **181.** $\log_{189} 1323$ или $\log_{63} 147$;

182. $\log_5 11$ или $\log_5\sqrt{74}$; **183.** $\frac{1}{2}+\lg 3$ или $\lg 19-\lg 2$;

184. $\log_{0,2} 0{,}8+\log_{0,2} 5$ или 0; **185.** $\frac{\lg 5+\lg\sqrt{7}}{2}$ или $\lg\frac{5+\sqrt{7}}{2}$;

186. $3\,(\lg 7-\lg 5)$ или $2\left(\frac{1}{2}\lg 9-\frac{1}{3}\lg 8\right)$; **187.** $\lg\lg\lg 5$ или $\lg^3 5$;

188. $\log_{\frac{1}{2}}\log_{\sqrt{2}} 5$ или $\log_{\sqrt{3}}\log_{\sqrt{5}} 7$?

Доказать справедливость следующего числового неравенства (189 — 205):

189. $\log_5 32<\log_2 5$. **190.** $\log_5 14>\log_7 18$.

191. $\log_{16} 729<\log_3 16$. **192.** $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$.

193. $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2}>0$. **194.** $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_{4,5}\pi}<2$.

195. $(1+\log_2 5)\left(\log^2_{2\sqrt{5}} 5+1\right)>2\log_2 5$.

196. $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{35}\left(1+\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 7\cdot\log_{\sqrt{3}} 5}\right)>4$.

197. $\log^3_{30} 2\,\log_2 3\,\log_2 5<\frac{1}{27}$. **198.** $3\log_5 7+\log_7 5+\log_{49} 5>4$.

199. $\log_7\sqrt[4]{45}\cdot\log_7(45\sqrt{3})>24\log_7\sqrt[4]{5}\,\log_7\sqrt{3}$.

200. $\frac{\lg 1+\lg 2+\lg 3+\lg 4}{4}>\frac{\lg 1+\lg 2+\lg 3}{3}$.

201. $\lg\frac{7}{2}>\frac{\lg 1+\lg 2+\lg 3+\lg 4+\lg 5+\lg 6}{6}$.

202. $\log_2\log_3\frac{7}{6}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{6}{7}$.

203. $\log_{\frac{6}{5}} 2\cdot\log_{\frac{12}{5}} 2\cdot\log_2\frac{24}{5}>1$. **204.** $\log_{\frac{1}{3}} 7>\log_7 3-\frac{5}{2}$.

205. $\log_{11}\left(\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\right)<\log_7(2\sqrt[3]{3})$.

206. Зная, что $\log_6 2=a$, найти $\log_{24} 72$.

207. Зная, что $\log_{36} 8=b$, найти $\log_{36} 9$.

208. Зная, что $\log_4 125=c$, найти $\log_{10} 64$.

209. Зная, что $\log_{100} 3=\alpha$ и $\log_{100} 2=\beta$, найти $\log_5 6$.

210. Зная, что $\log_6 15=m$ и $\log_{12} 18=n$, найти $\log_{25} 24$.

Глава V. ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Углы и их измерение

Понятие угла. Пусть даны два совпадающих луча: луч OA и луч OB (рис. 37).

Пусть луч OA, поворачиваясь в плоскости вокруг точки O, совершит некоторый поворот. Тогда для любого такого поворота луч OB считается *неподвижным* (начальным) лучом поворота, а луч OA — *подвижным*, совершившим данный поворот.

Любой поворот подвижного луча OA от неподвижного луча OB может быть совершен в двух противоположных направлениях (по часовой и против часовой стрелки). Если на подвижном луче OA приспособить пишущее устройство, равномерно удаляющееся от точки O вдоль луча OA, то при вращении луча OA оно будет оставлять след на плоскости. После того как луч OA совершит некоторый поворот, этот след будет представлять собой раскручивающуюся вокруг точки поворота O кривую, которая начинается у неподвижного луча OB и оканчивается у подвижного луча OA. С помощью такой кривой на рисунках показывают повороты. При этом возле подвижного луча кривая обяза-

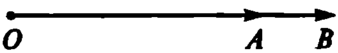


Рис. 37.

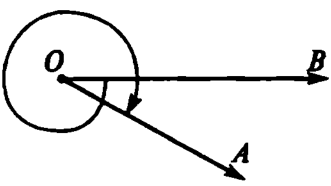


Рис. 38.

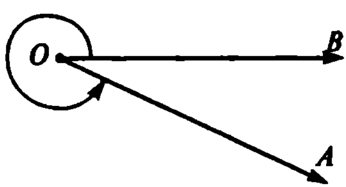


Рис. 39.

тельно оканчивается стрелкой, указывающей направление совершенного поворота.

На рис. 38 показан один из поворотов по часовой стрелке.

На рис. 39 показан один из поворотов против часовой стрелки.

Пусть подвижный луч OA совершил такой поворот по часовой стрелке, что луч OA впервые совпал с начальным лучом OB. Этот поворот принято называть *полным оборотом по часовой стрелке* (рис. 40).

Пусть подвижный луч OA совершил такой поворот против часовой стрелки, что луч OA впервые совпал с начальным лучом OB. Этот поворот принято называть *полным оборотом против часовой стрелки* (рис. 41).

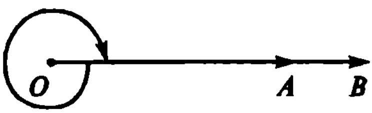


Рис. 40.

Рис. 41.

На рис. 42 показан поворот, равным трем полным оборотам против часовой стрелки.

На рис. 43 показан поворот, равным двум полным оборотам по часовой стрелке.

Итак, из рассмотренных примеров ясно, как изобразить на рисунке любой поворот.

Пусть подвижный луч OA совершил некоторый поворот в плоскости вокруг точки O от неподвижного луча OB.

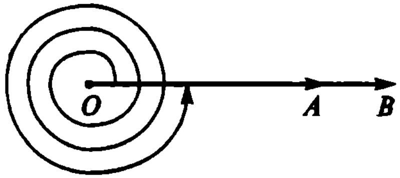


Рис. 42.

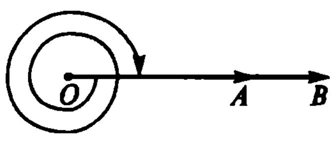


Рис. 43.

Тогда принято считать, что тем самым образован некоторый угол α, и в таком случае говорят, что подвижный луч OA задает угол α, соответствующий этому повороту. Точку

O называют вершиной угла α, неподвижный луч OB — началом отсчета угла α, подвижный луч OA — подвижным лучом, задающим угол α. Неподвижный луч OB (начало отсчета для любого угла) на рисунках принято располагать горизонтально вправо. Принято считать: если подвижный луч совершил некоторый поворот против часовой стрелки, то он задает соответствующий *положительный угол*; если подвижный луч совершил некоторый поворот по часовой стрелке, то он задает соответствующий *отрицательный угол*; если подвижный луч не совершил поворота, то он задает *нулевой угол*.

Например, если подвижный луч OA совершил полный оборот против часовой стрелки, то он задает *положительный полный угол*; если подвижный луч OA совершил полный оборот по часовой стрелке, то он задает *отрицательный полный угол*.

Градусная мера угла. Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{360}$ части полного оборота против часовой стрелки. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает угол, градусная мера которого равна *одному градусу*, или короче — угол в *один градус* (1°). Следовательно, положительный полный угол и угол в 360° — это один и тот же угол — угол, который задает подвижный луч OA, совершивший полный оборот против часовой стрелки (см. рис. 41).

Для частей угла в один градус приняты специальные наименования — *минута* и *секунда*.

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{60}$ части поворота, соответствующего углу в один градус, против часовой стрелки. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает угол в *одну минуту* ($1'$). Следовательно, угол в $60'$ и угол в 1° — это один и тот же угол.

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{60}$ части поворота, соответствующего углу в одну минуту, против часовой стрелки. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает угол в *одну секунду* ($1''$). Следовательно, угол в $60''$ и угол в $1'$ — один и тот же угол.

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{4}$ части полного оборота против часовой стрелки. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает *положительный прямой угол*, или угол в 90° (рис. 44).

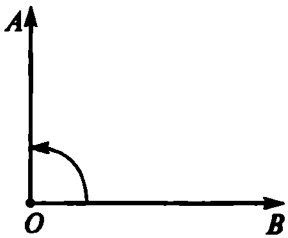


Рис. 44.

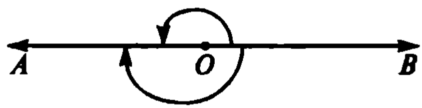


Рис. 45.

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{2}$ части полного оборота против часовой стрелки. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает *развернутый положительный угол*, или угол в 180° (рис. 45).

Пусть подвижный луч OA не совершил никакого поворота, тогда говорят, что подвижный луч OA задает *нулевой угол*, или угол в 0° (см. рис. 37).

В таких случаях иногда говорят, что подвижный луч OA совершил *нулевой поворот*.

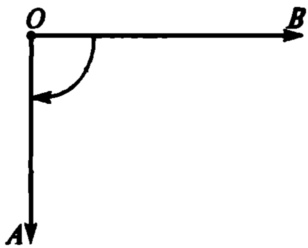


Рис. 46.

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{2}$ части полного оборота по часовой стрелке. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает *развернутый отрицательный угол*, или угол в (—180°) (см. рис. 45).

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{4}$ части полного оборота по часовой стрелке. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает *отрицательный прямой угол*, или угол в (— 90°) (рис. 46).

Радианная мера угла. Пусть подвижный луч OA совпадает с неподвижным лучом OB, не совершив поворота. Возьмем произвольную точку M на неподвижном луче OB и точку N подвижного луча OA, которая совпадает с точкой M. Проведем окружность с центром в точке O радиусом R, равным длине отрезка ON (рис. 47).

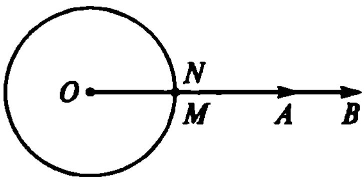


Рис. 47.

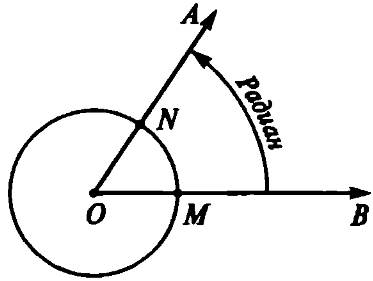


Рис. 48.

Если подвижный луч OA будет вращаться вокруг точки O, то точка N будет двигаться по этой окружности.

Пусть подвижный луч OA совершил такой поворот против часовой стрелки, что точка N, двигаясь по окружности, прошла расстояние, равное радиусу этой окружности. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает угол, радианная мера которого равна одному радиану, или короче — *угол в один радиан* (рис.48).

Пусть дано положительное число β. Пусть подвижный луч OA совершил такой поворот против часовой стрелки, что точка N, двигаясь по окружности, прошла расстояние S, равное βR, тогда говорят, что подвижный луч OA задает *угол в β радиан.*

Пусть дано отрицательное число β. Пусть подвижный луч OA совершил такой поворот по часовой стрелке, что точка N, двигаясь по окружности, прошла расстояние S, равное $|\beta|R$, тогда говорят, что подвижный луч OA задает *угол в β радиан.*

Таким образом, радианную меру любого угла определяют следующим образом. Пусть дан некоторый угол α, задаваемый подвижным лучом OA. *Радианной мерой угла* α называют такое число, абсолютная величина которого равна отношению расстояния S, пройденного по окружности радиуса R точкой N подвижного луча OA, к радиусу R и знак которого определяется направлением совершенного поворота, другими словами, радианной мерой угла α называют положительное число $\frac{S}{R}$, если поворот совершен против часовой стрелки, или отрицательное число $\left(-\frac{S}{R}\right)$, если поворот совершен по часовой стрелке.

Если угол задается подвижным лучом OA, не совершившим поворота, то угол α будет нулевым и радианную меру этого угла полагают равной нулю.

Пусть подвижный луч OA совершил полный оборот против часовой стрелки, тогда точка N подвижного луча OA, двигаясь по окружности радиуса R, прошла расстояние $2\pi R$. Значит, в этом случае подвижный луч OA задает угол, радианная мера которого равна 2π радиан, или короче, угол в 2π радиан (рис. 49), т.е. угол в 360° и угол в 2π радиан, — один и тот же угол (см. рис. 41 и рис. 49).

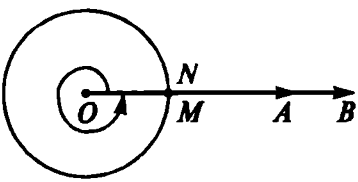


Рис. 49.

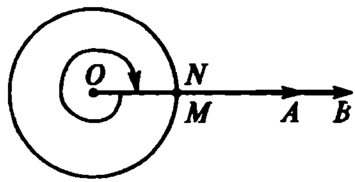


Рис. 50.

Если подвижный луч OA совершил полный оборот по часовой стрелке, то он задает угол в (-2π) радиан (рис. 50), т.е. угол в $(-360°)$ и угол в (-2π) радиан, — один и тот же (см. рис. 40 и рис. 50).

Пусть подвижный луч OA совершил $\frac{1}{4}$ часть полного оборота против часовой стрелки. Тогда точка N подвижного луча, двигаясь по окружности радиуса R, прошла расстояние $\frac{\pi R}{2}$. Следовательно, если подвижный луч OA совершил $\frac{1}{4}$ часть полного оборота против часовой стрелки, то он задает угол в $\frac{\pi}{2}$ радиан (рис. 51), т.е. угол в 90° и угол в $\frac{\pi}{2}$ радиан, — один и тот же угол (см. рис. 44 и рис. 51).

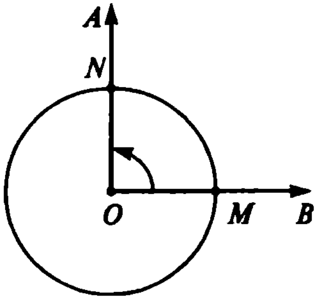


Рис. 51.

Если подвижный луч OA совершил $\frac{1}{4}$ часть полного оборота по часовой стрелке, то он задает угол в $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ радиан (рис. 52), т.е. угол в (— 90°) и угол в $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ радиан, — один и тот же угол (см. рис. 46 и рис. 52).

Пусть подвижный луч OA совершил $\frac{1}{2}$ часть полного оборота против часовой стрелки. Тогда точка N подвижного луча OA, двигаясь по окружности радиуса R, прошла расстояние πR, следовательно, в этом случае, задаваемый подвижным лучом OA угол, будет углом в π радиан (рис. 53), т.е. угол в 180° и угол в π радиан — один и тот же угол (см. рис. 45 и рис. 53).

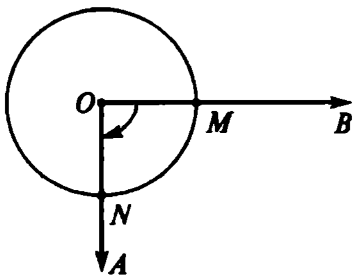


Рис. 52.

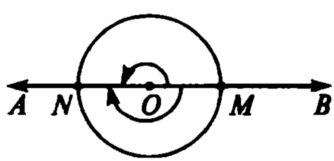


Рис. 53.

Аналогично угол в (— 180°) и угол в (— π) радиан — один и тот же угол — угол, задаваемый подвижным лучом OA, совершившим $\frac{1}{2}$ часть полного оборота по часовой стрелке (см. рис. 45 и рис. 53).

Если радианная мера некоторого угла есть β радиан, а градусная мера того же самого угла равна α градусов, то эти числа связаны пропорцией

$$\alpha^\circ : 360^\circ = \beta : 2\pi.$$

Пользуясь этой пропорцией, можно переводить радианную меру угла в градусную и наоборот — градусную меру в радианную. Рассмотренные выше примеры — частные случаи этой пропорции. Приведем еще примеры.

Угол в 30° и угол в $\frac{\pi}{6}$ радиан есть один и тот же угол. Это вытекает из справедливости пропорции $30^\circ : 360^\circ = \frac{\pi}{6} : 2\pi$.

Угол в 45° и угол в $\frac{\pi}{4}$ радиан есть один и тот же угол. Это вытекает из справедливости пропорции $45^\circ : 360^\circ = \frac{\pi}{4} : 2\pi$.

Угол в 60° и угол в $\frac{\pi}{3}$ радиан есть один и тот же угол. Это вытекает из справедливости пропорции $60^\circ : 360^\circ = \frac{\pi}{3} : 2\pi$.

З а м е ч а н и е. Всюду в дальнейшем будет использоваться только радианная мера угла. В обозначениях меры угла в радианах почти всегда будет опускаться слово «радиан». Поэтому в дальнейшем

— под углом π понимается угол в π радиан, т.е. угол, радианная мера которого равна π радиан;

— под углом $\frac{7}{9}$ понимается угол в $\frac{7}{9}$ радиан, т.е. угол, радианная мера которого равна $\frac{7}{9}$ радиан;

— под углом α (где α — некоторое фиксированное число) понимается угол в α радиан, т.е. угол, радианная мера которого равна α радиан;

— под углом $(\alpha + \beta)$ понимается угол, радианная мера которого равна $(\alpha + \beta)$ радиан;

— под углом $(\alpha - \beta)$ понимается угол, радианная мера которого равна $(\alpha - \beta)$ радиан.

Отметим еще, что под словами «угол α такой, что $\alpha \neq \beta + k\gamma$, $k \in Z$» понимается, что угол α такой, что его радианная мера не равна числу $(\beta + k\gamma)$ ни при каком целом числе k.

Единичная окружность. Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат xOy с положительно полуосью абсцисс Ox, направленной вправо, и положительной полуосью ординат Oy, направленной вверх. Пусть дана окружность радиуса, равного единице измерения длин, и с центром в начале координат (рис. 54). Такую окружность принято называть *единичной окружностью.*

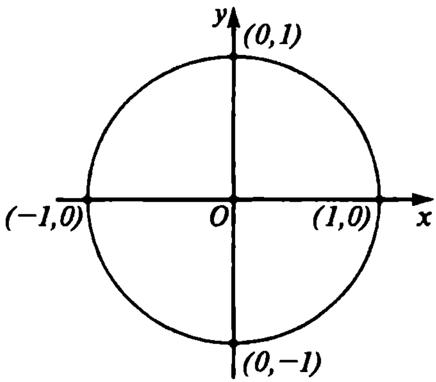


Рис. 54.

Примем за вершину любого угла начало координат — точку $O(0, 0)$. Положительную полуось абсцисс примем за неподвижный луч, т.е. за начало отсчета для любого угла α.

Пусть дан любой угол α; очевидно, что подвижный луч OA, задающий этот угол α, обязательно пересекает единичную окружность в некоторой точке $Q(a, b)$. Столь же очевидно, что для любой точки $R(c, d)$ единичной окружности обязательно найдется угол β такой, что подвижный луч OA, задающий этот угол β, пересекает единичную окружность именно в этой точке $R(c, d)$.

Определим координаты некоторых точек единичной окружности.

Прежде всего ясно (рис. 55), что: подвижный луч OA, задающий нулевой угол, пересекает единичную окружность в точке $M(1; 0)$; подвижный луч OA, задающий угол π, пересекает единичную окружность в точке $P(-1; 0)$; подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{2}$, пересекает единичную окружность в точке $T(0; 1)$; подвижный луч OA, задающий угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, пересекает единичную окружность в точке $L(0, -1)$.

Пусть подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{4}$, пересекает единичную окружность в точке K (рис. 56). Вычислим ее координаты. Проведем через точку K прямую, параллельную оси Oy, пусть она пересекает ось Ox в точке K_1.

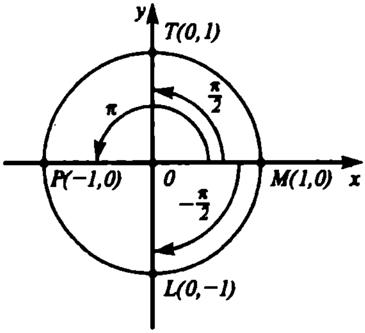


Рис. 55.

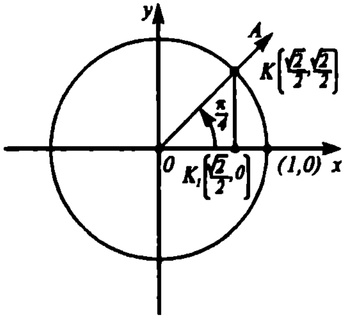


Рис. 56.

Поскольку обе координаты точки K положительны, то они соответственно равны длинам катетов равнобедренного прямоугольного треугольника OK_1K. Согласно теореме Пифагора $|OK|^2 = |OK_1|^2 + |KK_1|^2$; так как $|OK_1| = |K_1K|$, то отсюда получаем, что $|OK_1| = |KK_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому абсцисса точки K равна ординате точки K и равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{4}$, пересекает единичную окружность в точке $K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Пусть подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{6}$, пересекает единичную окружность в точке S (рис. 57). Вычислим ее координаты. Проведем через точку S прямую, параллельную оси Oy, пусть она пересекает ось Ox в точке S_1. Поскольку обе координаты точки S положительны, то они соответственно равны длинам катетов прямоугольного треугольника OS_1S. Из геометрии известно, что в прямоугольном треугольнике длина катета, лежащего против угла $\frac{\pi}{6}$, равна половине длины гипотенузы. Значит, $|SS_1| = \frac{1}{2}$. По теореме Пифагора $|OS_1|^2 = |OS|^2 - |SS_1|^2$. Откуда $|OS_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому абсцисса точки S равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а ее ордината равна $\frac{1}{2}$.

Значит, подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{6}$, пересекает единичную окружность в точке $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

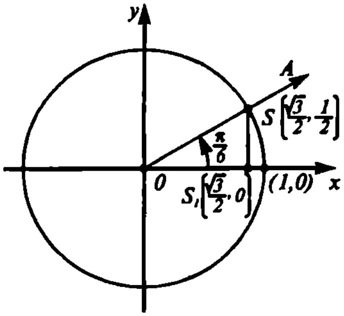


Рис. 57.

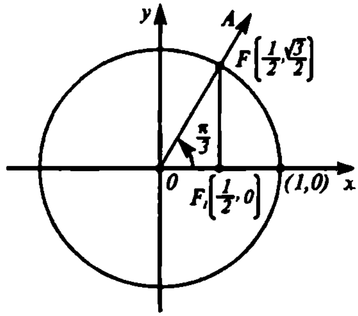


Рис. 58.

Пусть подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{3}$, пересекает единичную окружность в точке F (рис. 58). Вычислим ее координаты. Проведем через точку F прямую, параллельную оси Oy, пусть она пересекает ось Ox в точке F_1. Поскольку обе координаты точки F положительны, то они соответственно равны длинам катетов прямоугольного треугольника. Используя сформулированное выше утверждение о длине катета, лежащего против угла $\frac{\pi}{6}$, получаем, что $|OF_1| = \frac{1}{2}$, но тогда, применяя теорему Пифагора, находим, что $|F_1F| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому абсцисса точки F равна $\frac{1}{2}$, а ее ордината равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значит, подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{3}$, пересекает единичную окружность в точке $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пусть подвижный луч OA, задающий угол α, пересекает единичную окружность в некоторой точке $Q(a, b)$. Тогда легко видеть справедливость следующих у т в е р ж д е н и й:

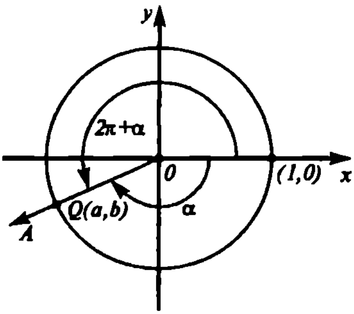


Рис. 59.

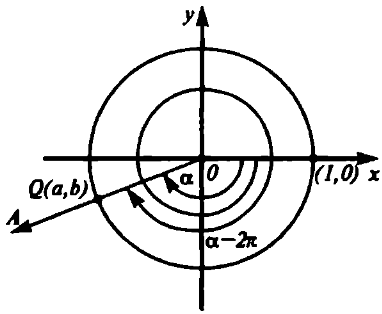


Рис. 60.

1. *Подвижный луч OA, задающий угол* $(\alpha + 2\pi)$, *пересекает единичную окружность в той же точке* $Q(a, b)$ (рис. 59).

2. *Подвижный луч OA, задающий угол* $(\alpha - 2\pi)$, *пересекает единичную окружность в той же точке* $Q(a, b)$ (рис. 60).

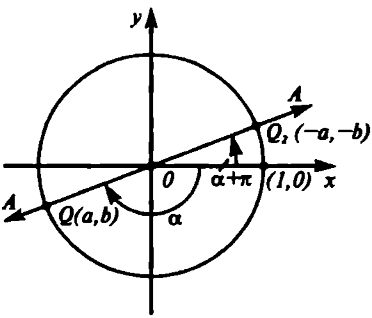


Рис. 61.

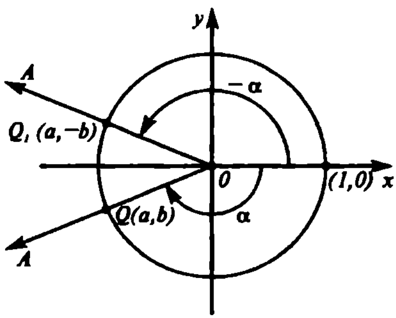


Рис. 62.

3. *Подвижный луч, задающий угол* $(\alpha + \pi)$, *пересекает единичную окружность точке* $Q_2(-a, -b)$, *симметричной точке* $Q(a, b)$ *относительно начала координат — точки* $O(0, 0)$ (рис. 61).

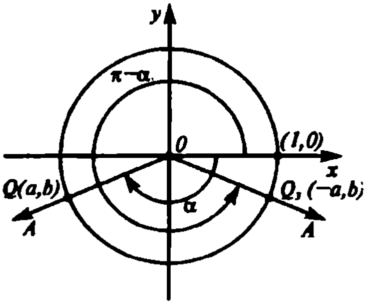


Рис. 63.

4. *Подвижный луч, задающий угол* (— α), *пересекает единичную окружность точке* Q_1(*a*, — *b*), симметричной точке Q(*a*, *b*) *относительно оси Ox* (рис. 62).

5. *Подвижный луч, задающий угол* (π — α), *пересекает единичную окружность точке* Q_3(— *a*, *b*), *симметричной точке Q*(*a*, *b*) *относительно оси Oy* (рис. 63).

§ 2. Синус и косинус угла

Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат *xOy* с положительной полуосью абсцисс *Ox*, направленной вправо, и положительной полуосью ординат *Oy* ординат, направленной вверх (рис. 64). Пусть дана единичная окружность.

Примем за вершину любого угла начало координат — точку *O*(0, 0). Положительную полуось абсцисс примем за неподвижный луч *OB*, т.е. за начало отсчета для любого угла α.

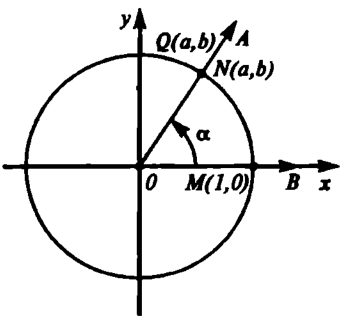


Рис. 64.

Пусть точка *M* есть общая точка неподвижного луча *OB* и единичной окружности. Тогда часть неподвижного луча *OB* — отрезок *OM* — будем называть единичным неподвижным радиусом, или началом отсчета углов.

Пусть подвижный луч *OA* совпадает с неподвижным лучом *OB*, не совершив поворота. Точку подвижного луча *OA*, которая совпадает с точкой *M* неподвижного луча *OB*, обозначим через *N*. Тогда часть подвижного луча *OA* — отрезок *ON* — будем называть единичным подвижным радиусом, а точку N — концом единичного подвижного радиуса.

Если подвижный луч OA совершит некоторый поворот, то вместе с ним совершит этот же поворот и единичный подвижный радиус ON. Поэтому можно считать, что не только подвижный луч OA задает некоторый угол α, но и единичный подвижный радиус ON задает этот же угол α.

Условимся в дальнейшем говорить: единичный подвижный радиус ON задает угол α, понимая под этим, что соответствующий подвижный луч OA задает тот же самый угол α.

Пусть конец подвижного единичного радиуса ON, задающего угол α, совпадает с точкой $Q(a, b)$ единичной окружности; тогда координаты точки Q будем называть координатами конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, и будем писать: $N(a, b)$.

Синус угла. Пусть дан любой угол α. Число, равное ординате конца подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, называется *синусом* угла α и обозначается $\sin \alpha$ (рис. 65).

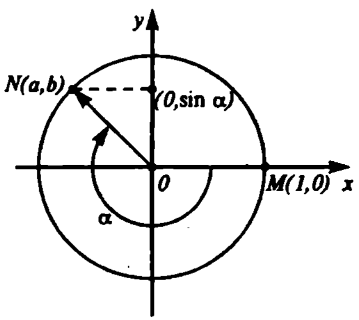


Рис. 65.

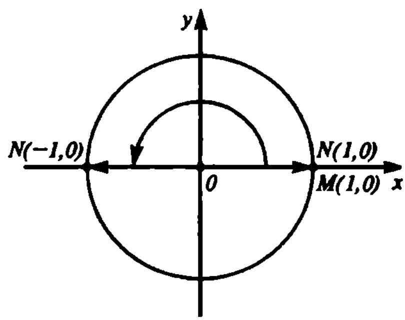


Рис. 66.

Из определения следует, что для любого угла α, существует синус этого угла и притом единственный.

Примеры.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего нулевой угол, равна нулю (рис. 66), следовательно, $\sin 0 = 0$.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол π, равна нулю (см. рис. 66), следовательно, $\sin \pi = 0$.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{2}$, равна единице (рис. 67), следовательно, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

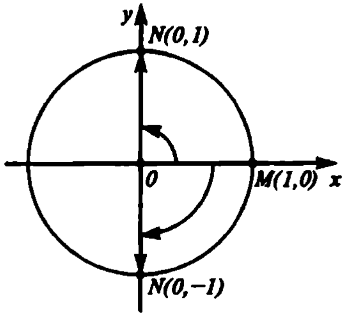


Рис. 67.

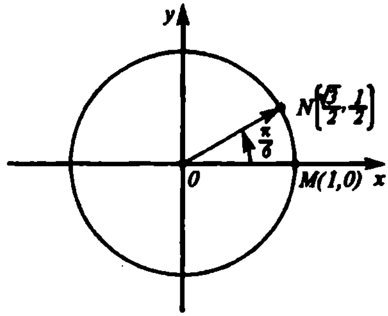


Рис. 68.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, равна (— 1) (см. рис. 67), следовательно, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

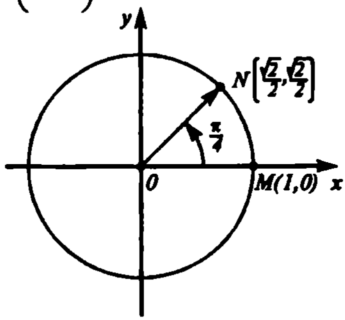


Рис. 69.

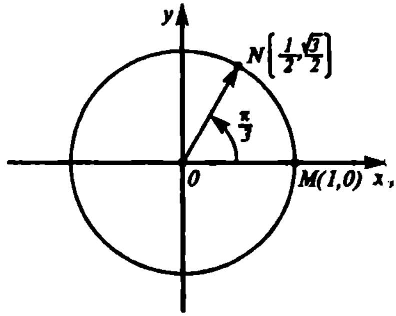


Рис. 70.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{6}$, равна $\frac{1}{2}$ (рис. 68), следовательно, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{4}$, равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 69), следовательно, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{3}$, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 70), следовательно, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отметим некоторые свойства синуса угла.

Так как для любого угла α ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего этот угол α, не может быть меньше, чем (-1), и больше, чем 1, а заключена между ними, включая (-1) и 1, то для любого угла α справедливо двойное неравенство $-1 \le \sin\alpha \le 1$.

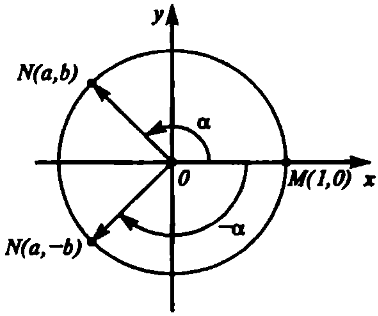


Рис. 71.

Пусть ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, есть число b, тогда, как указано выше, ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(-\alpha)$, есть число $(-b)$ (рис. 71). Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Это свойство синуса угла можно сформулировать так: знак минус можно выносить за знак синуса или вносить под знак синуса, т.е.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha = \sin(-\alpha).$$

П р и м е р ы.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Как указано выше, ордината конца единичного радиуса, задающего угол α, равна ординате конца единичного радиуса, задающего угол $(\pi - \alpha)$ (рис. 72). Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$$

Примеры.

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$
$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, есть число b, тогда, как указано выше,

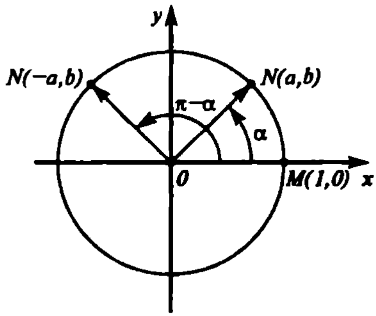


Рис. 72.

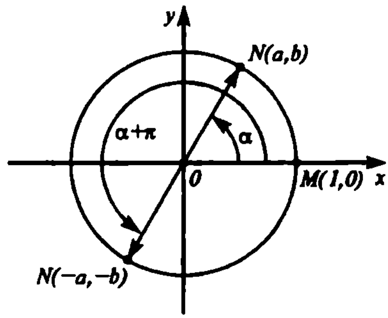


Рис. 73.

ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(\pi + \alpha)$ есть число $(-b)$ (рис. 73). Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha.$$

Примеры.

$$\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2};$$
$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Как указано выше, ордината конца единичного радиуса, задающего угол α, равна ординате конца единичного радиуса, задающего угол $(\alpha+2\pi)$, и равна ординате конца единичного радиуса, задающего угол $(\alpha-2\pi)$. Поэтому для любого угла α справедливы равенства

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi),$$
$$\sin\alpha=\sin(\alpha-2\pi).$$

Используя эти равенства и применяя метод математической индукции, можно показать, что для любого целого числа n и любого угла α справедливы равенства

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi n)=\sin(\alpha-2\pi n).$$

Это свойство синуса угла можно сформулировать так: синус любого угла α повторяется при изменении угла на $2\pi n$, где n — любое целое число.

Примеры.

$$\sin\frac{13\pi}{6}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$
$$\sin\frac{9\pi}{4}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2};$$
$$\sin\frac{7\pi}{4}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\sin\frac{5\pi}{3}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+10\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1;$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}-24\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

Пусть дано число $\beta \in (0, \pi)$. Рассмотрим угол, радианная мера которого есть это число β. Конец единичного подвижного радиуса, задающего этот угол, совпадает с некоторой точкой единичной окружности, лежащей или в I или во II четвертях, или на положительной полуоси ординат. Поэтому ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего этот угол, положительна, другими словами, синус этого угла положителен.

Учитывая, что $\sin\beta = \sin(\beta + 2\pi n)$ для любого целого числа n, можно утверждать, что $\sin\alpha$ положителен для любого угла α такого, что его радианная мера — число α — принадлежит при некотором целом n соответствующему интервалу $(2\pi n, \pi + 2\pi n)$. На числовой прямой (рис. 74) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\sin\alpha$ положителен.

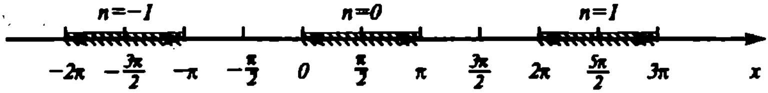


Рис. 74.

Аналогично показывается, что справедливо и такое утверждение: $\sin\alpha$ — отрицателен для любого угла α такого, что его радианная мера — число α — принадлежит при

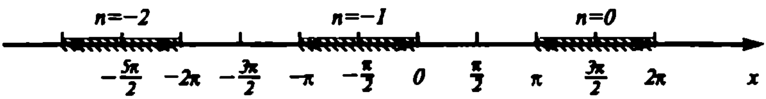


Рис. 75.

некотором целом n интервалу $(\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$. На числовой прямой (рис. 75) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\sin\alpha$ отрицателен.

Наконец, учитывая, что $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n)$ для любого целого числа n и что $\sin 0 = \sin\pi = 0$, получаем, что $\sin\alpha$ равен нулю для любого угла α такого, что его радианная мера — число α — равно при некотором целом m числу πm. На числовой прямой (рис. 76) указаны такие числа α, для каждого из которых $\sin\alpha$ равен нулю.

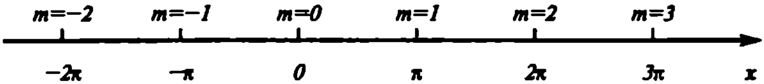


Рис. 76.

Арксинус числа. Часто возникает такая задача: для любого действительного числа a найти угол α такой, что его синус равен этому числу a.

Сразу отметим, что если $a > 1$, а также если $a < -1$, то эта задача не имеет решения, так как по определению синуса угла нет такого угла, синус которого был бы больше, чем 1, или меньше, чем (-1).

Если же $a \in [-1; 1]$, то можно показать, что существует бесконечно много углов таких, что синус каждого такого угла равен числу a. Действительно, прямая $y = a$ при $a \in$ $\in [-1, 1]$ пересекает единичную окружность либо в двух точках (рис. 77), либо в одной (рис. 78). Но, как указано

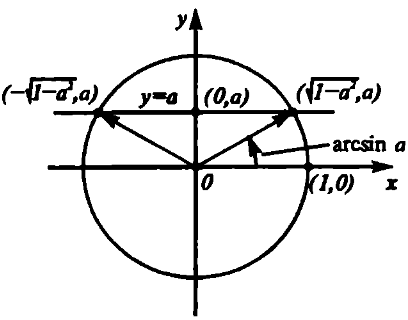


Рис. 77.

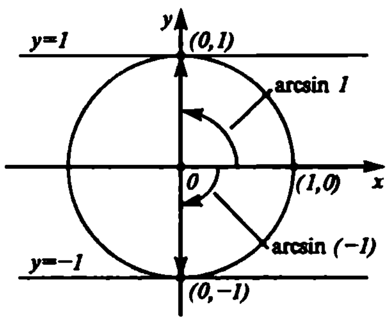


Рис. 78.

выше, для каждой такой точки единичной окружности существует угол α такой, что синус этого угла равен ординате этой точки, т.е. равен a. Далее, по свойству синуса

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n)$$

для любого угла α и любого целого числа n. Поэтому для любого целого числа n синус угла $(\alpha + 2\pi n)$ равен числу a.

Принято следующее соглашение: тот угол, синус которого равен числу a и который взят из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, называть *главным углом* и обозначать $\arcsin a$ (читается: арксинус числа a). Таким образом, по определению $\arcsin a$ — есть угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sin(\arcsin a) = a.$$

Легко видеть, что для любого числа $a \in [-1; 1]$ арксинус этого числа существует и притом единственный. Для любого числа $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ арксинус этого числа не существует.

Примеры.

1. $\arcsin 0$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = 0$; ясно, что это есть нулевой угол, следовательно,

$$\arcsin 0 = 0.$$

2. $\arcsin 1$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = 1$; ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 78), следовательно,

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

3. $\arcsin(-1)$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = -1$; ясно, что это есть угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (см. ри. 78), следовательно,

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

4. $\arcsin \frac{1}{2}$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ и $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{6}$, следовательно,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

5. $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ и $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ясно, что это есть угол $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, следовательно,

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

6. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ и $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{3}$, следовательно,

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Отметим некоторые свойства арксинуса числа, вытекающие из его определения. Для любого числа a, большего чем 1, а также для любого числа a, меньшего чем (-1), лишена смысла запись $\arcsin a$. Например, лишены смысла записи

$$\arcsin 2, \quad \arcsin(-3), \quad \arcsin(-\sqrt{5}),$$
$$\arcsin \pi, \quad \arcsin(-3\pi), \quad \arcsin \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Для любого числа $a \in [-1; 1]$ справедливо двойное неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}.$$

Для любого числа $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arcsin a) = a.$$

Для любого угла $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ справедливо равенство

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha.$$

Примеры.

1. Вычислить $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$. Поскольку $\frac{1}{3} \in [-1; 1]$, то $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

2. Вычислить $\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$. Поскольку $\sqrt{\frac{\pi}{3}} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

3. Вычислить $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)$. Поскольку $\frac{13\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то нельзя написать, что $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{13\pi}{6}$. Однако легко видеть, что $\sin\frac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$. Поэтому $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Поскольку $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$. Итак, $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

4. Вычислить $\arcsin[\sin(-5)]$. Легко видеть, что $\sin(-5) = \sin(2\pi - 5)$ и $(2\pi - 5) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому $\arcsin[\sin(-5)] = \arcsin[\sin(2\pi - 5)] = 2\pi - 5$. Итак, $\arcsin[\sin(-5)] = 2\pi - 5$. Наконец, отметим еще одно свойство арксинуса числа a: для любого числа $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Действительно, по определению

$$\arcsin a = \alpha, \text{ причем } \sin\alpha = a \text{ и } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$
$$\arcsin(-a) = \beta, \text{ причем } \sin\beta = -a \text{ и } \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Отсюда очевидно, что $\beta = -\alpha$, т.е.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Примеры.

1. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$,

2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$,

3. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Косинус угла. Пусть дан любой угол α. Число, равное абсциссе конца подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, называется *косинусом* угла α и обозначается $\cos\alpha$ (рис. 79).

Из определения следует, что для любого угла α существует косинус этого угла и притом единственный.

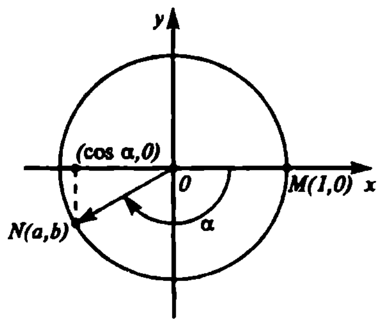


Рис. 79.

Примеры.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{2}$, равна нулю (см. рис. 67), следовательно, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, равна нулю (см. рис. 67), следовательно, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего нулевой угол, равна 1 (см. рис. 66), следовательно, $\cos 0 = 1$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол π, равна (-1) (см. рис. 66), следовательно, $\cos\pi = -1$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{6}$, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. рис. 68), следовательно, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{4}$, равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 69), следовательно, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{3}$, равна $\frac{1}{2}$ (см. рис. 70), следовательно, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Отметим некоторые свойства косинуса угла.

Так как для любого угла α абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего этот угол α, не может быть меньше чем (-1) и больше чем 1, а заключена между ними, включая (-1) и 1, то для любого угла справедливо двойное неравенство

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

Как показано выше, абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, равна абсциссе конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(-\alpha)$. Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Это свойство косинуса угла можно сформулировать так: знак перед углом, стоящим под знаком косинуса, можно менять, не меняя значения косинуса угла, т.е.

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \cos(-\alpha).$$

Примеры.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Пусть абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, есть число a; тогда, как показано выше, абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(\pi - \alpha)$, есть число $(-a)$ (см. рис. 72). Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

П р и м е р ы.

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Пусть абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, есть число a; тогда, как указано выше, абсцисса конца подвижного единичного радиуса, задающего угол $(\pi + \alpha)$, есть число $(-a)$ (см. рис. 73). Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

П р и м е р ы.

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Как указано выше, абсцисса конца подвижного единичного радиуса, задающего угол α, равна абсциссе конца подвижного единичного радиуса, задающего угол $(\alpha + 2\pi)$, и равна абсциссе конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(\alpha - 2\pi)$. Поэтому для любого угла α справедливы равенства

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi),$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha - 2\pi).$$

Используя эти равенства и применяя метод математической индукции, можно показать, что для любого целого числа n и любого угла α справедливы равенства

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos(\alpha - 2\pi n).$$

Это свойство косинуса угла можно сформулировать так: косинус любого угла α повторяется при изменении угла на $2\pi n$, где n — любое целое число.

Примеры.

$$\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos\frac{9\pi}{4} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};$$
$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} - 102\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 12\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

Пусть дано число $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим угол, радианная мера которого есть число β. Конец единичного подвижного радиуса, задающего этот угол, совпадает с некоторой точкой единичной окружности, лежащей в I или в IV четвертях, или на положительной полуоси абсцисс. Поэтому абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего этот угол, положительна. Другими словами, косинус этого угла положителен. Учитывая, что $\cos\beta = \cos(\beta + 2\pi n)$

для любого целого числа n, можно утверждать, что $\cos\alpha$ положителен для любого угла α такого, что его радианная мера — число α — принадлежит при некотором целом n интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$. На числовой прямой (рис. 80) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\cos\alpha$ положителен.

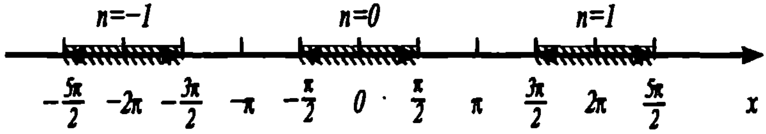


Рис. 80.

Аналогично, показывается, что $\cos\gamma$ отрицателен для любого угла γ такого, что его радианная мера — число γ — принадлежит при некотором целом n интервалу $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$. На числовой прямой (рис. 81) указаны такие интервалы, что для каждого числа γ из любого такого интервала $\cos\gamma$ отрицателен.

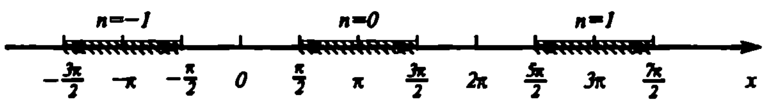


Рис. 81.

Наконец, учитывая, что $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n)$ для любого целого числа n и что $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, получаем, что

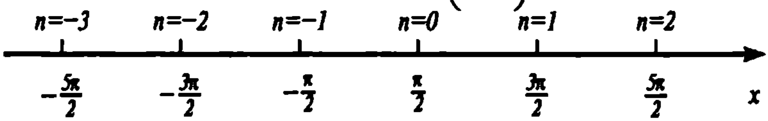


Рис. 82.

$\cos\alpha$ равен нулю для любого угла α такого, что его радианная мера — число α — равно при некотором целом n

числу $\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$. На числовой прямой (рис. 82) указаны такие числа α, для каждого из которых $\cos\alpha$ равен нулю.

Арккосинус числа. Часто возникает такая задача: для любого действительного числа a найти угол α такой, что его косинус равен этому числу a.

Сразу отметим, что если $a > 1$, а также если $a < -1$, то эта задача не имеет решения, так как по определению косинуса угла нет такого угла, косинус которого был бы больше, чем 1, или меньше, чем (-1).

Если же $a \in [-1; 1]$, то можно показать, что существует бесконечно много углов таких, что косинус каждого такого угла равен числу a.

Действительно, прямая $x = a$ при $a \in [-1, 1]$ пересекает единичную окружность либо в двух точках (рис. 83), либо в одной (рис. 84). Но, как указано выше, для каждой такой

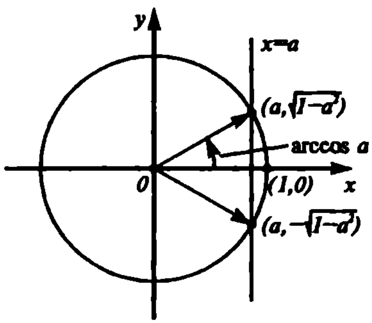


Рис. 83.

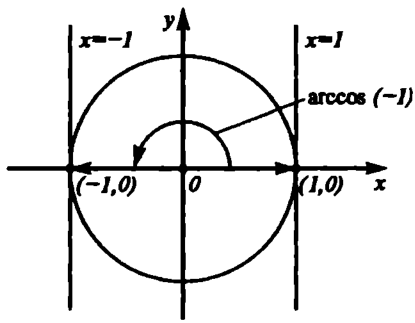


Рис. 84.

точки единичной окружности существует угол α такой, что косинус этого угла равен абсциссе этой точки, т.е. равен a. Далее, по свойству косинуса

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n)$$

для любого угла α и любого целого числа n. Поэтому для любого целого числа n косинус угла $(\alpha + 2\pi n)$ равен числу a.

Принято следующее соглашение: тот угол, косинус которого равен числу a и который взят из отрезка $[0, \pi]$, называть *главным углом* и обозначать $\arccos a$ (читается: арккосинус числа a). Таким образом, по определению $\arccos a$ есть угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям:

$$0 \le \arccos a \le \pi, \quad \cos(\arccos a) = a.$$

Легко видеть, что для любого числа $a \in [-1; 1]$ арккосинус этого числа существует и притом единственный. Для любого числа $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ арккосинус этого числа не существует.

Примеры.

1. $\arccos 1$ есть такой угол α, что $0 \le \alpha \le \pi$ и $\cos \alpha = 1$. Очевидно, что это есть нулевой угол (см. рис. 84), следовательно, $\arccos 1 = 0$.

2. $\arccos 0$ есть такой угол α, что $0 \le \alpha \le \pi$ и $\cos \alpha = 0$. Очевидно, что это есть угол $\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

3. $\arccos(-1)$ есть такой угол α, что $0 \le \alpha \le \pi$ и $\cos \alpha = -1$. Очевидно, что это есть угол π (см. рис. 84) и, следовательно, $\arccos(-1) = \pi$.

4. $\arccos \frac{1}{2}$ есть такой угол α, что $0 \le \alpha \le \pi$ и $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{3}$ и, следовательно, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

5. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ есть такой угол α, что $0 \le \alpha \le \pi$ и $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{4}$ и, следовательно, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

6. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ есть такой угол α, что $0 \le \alpha \le \pi$ и $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{6}$ и, следовательно, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Отметим некоторые свойства арккосинуса числа, вытекающие из его определения.

Для любого числа a, меньшего чем (-1), а также для любого числа a, большего чем 1, лишена смысла запись $\arccos a$. Например, лишены смысла записи

$$\arccos\sqrt{3},\quad \arccos\left(-\frac{5}{4}\right),\quad \arccos\pi,$$
$$\arccos\left(-\frac{11}{10}\right),\quad \arccos\sqrt{\frac{10}{\pi}},\quad \arccos\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Для любого числа $a \in [-1; 1]$ справедливо двойное неравенство

$$0 \le \arccos a \le \pi.$$

Для любого числа $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\cos(\arccos a) = a.$$

Для любого угла $\alpha \in [0; \pi]$ справедливо равенство

$$\arccos(\cos\alpha) = \alpha.$$

Примеры.

1. Вычислить $\cos(\arccos 0)$. Поскольку $0 \in [-1; 1]$, то $\cos(\arccos 0) = 0$.

2. Вычислить $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$. Поскольку $\frac{1}{3} \in [-1, 1]$, то $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

3. Вычислить $\arccos(\cos\sqrt{\pi})$. Поскольку $\sqrt{\pi} \in [0, \pi]$, то $\arccos(\cos\ ) = \sqrt{\pi}$.

4. Вычислить $\arccos[\cos(-6)]$. Так как $(-6) \notin [0, \pi]$, то нельзя написать, что $\arccos[\cos(-6)] = -6$. Однако легко видеть, что $\cos(-6) = \cos(2\pi - 6)$ и $(2\pi - 6) \in [0, \pi]$. Поэтому $\arccos[\cos(-6)] = \arccos[\cos(2\pi - 6)] = 2\pi - 6$.

Наконец, отметим, еще одно свойство арккосинуса числа: для любого числа $a \in [-1, 1]$ справедливо равенство

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Действительно, по определению

$$\arccos a = \alpha, \text{ причем } \cos\alpha = a \text{ и } \alpha \in [0, \pi],$$
$$\arccos(-a) = \beta, \text{ причем } \cos\beta = -a \text{ и } \beta \in [0, \pi].$$

Отсюда видно, что $\beta = \pi - \alpha$, т.е. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Примеры.

1. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$,

2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$,

3. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

§ 3. Тангенс и котангенс угла

Тангенс угла. Пусть дан любой угол α такой, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. *Тангенсом* этого угла α называется число, равное отношению синуса этого угла α к косинусу того же угла α и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$, т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Из определения следует, что для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, тангенс этого угла α существует и притом единственный.

Примеры.

$$\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0, \quad \operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = 0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}.$$

Отметим некоторые свойства тангенса угла.

Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Действительно, для любого угла α справедливы равенства $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ и $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, поэтому для любого угла такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, по определению тангенса

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Это свойство тангенса угла можно сформулировать так: для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, знак минус можно выносить за знак тангенса или вносить под знак тангенса, т.е. если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, то

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha).$$

Примеры.

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1;$$
$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$
$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Используя свойства синуса и косинуса угла, можно показать, что для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, справедливы равенства

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi).$$

Действительно, для любого такого угла справедливы цепочки равенств

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \frac{\sin(\alpha - \pi)}{\cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Примеры.

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1;$$
$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$
$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1;$$
$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3};$$
$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}.$$

Используя равенства

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$$

и применяя метод математической индукции, можно показать, что для любого целого числа n и любого угла α такого, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, справедливы равенства

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{tg}(\alpha-\pi n).$$

Это свойство тангенса угла можно сформулировать так: тангенс любого угла α такого, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, повторяется при изменении угла на πn, где n — любое целое число.

Примеры.

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-2\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}-2\pi\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1,$$
$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1,$$
$$\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$$
$$\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}-\pi\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+13\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-15\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+10\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

Для любого угла α, синус и косинус которого одного знака, тангенс угла α положителен, т.е. $\operatorname{tg}\alpha$ положителен для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой единичной окружности, лежащей в I или III четвертях (т.е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, принадлежащего при некотором целом n интервалу $\left(\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$). На числовой прямой (рис. 85) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\operatorname{tg}\alpha$ положителен.

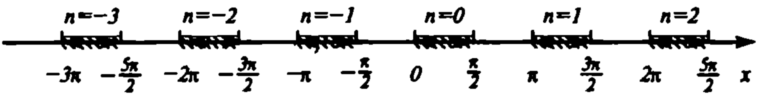


Рис. 85.

Для любого угла α, синус и косинус которого разных знаков, тангенс угла α отрицателен, т.е. $\operatorname{tg}\alpha$ отрицателен для любого угла α, задаваемого подвижным единичным

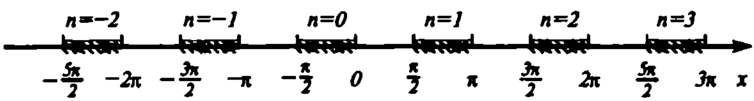


Рис. 86.

радиусом, конец которого совпадает с точкой единичной окружности, лежащей в II или IV четвертях (т.е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, принадлежащего при некотором целом n интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \pi n\right)$). На числовой прямой (рис. 86) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\operatorname{tg}\alpha$ отрицателен.

Для любого угла α, синус которого равен нулю, тангенс угла α тоже равен нулю, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = 0$ для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает или с точкой $M(1;\ 0)$ или с точкой $P(-1;\ 0)$ (т.е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, равного при некотором целом n числу πn). На числовой прямой (см. рис. 76) указаны такие числа α, для каждого из которых $\operatorname{tg}\alpha$ равен нулю.

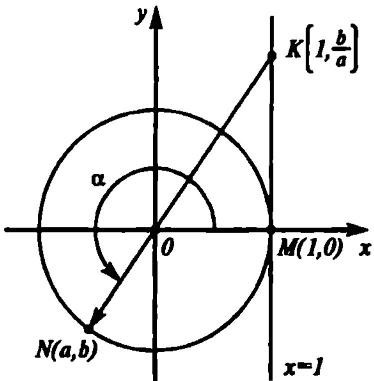


Рис. 87.

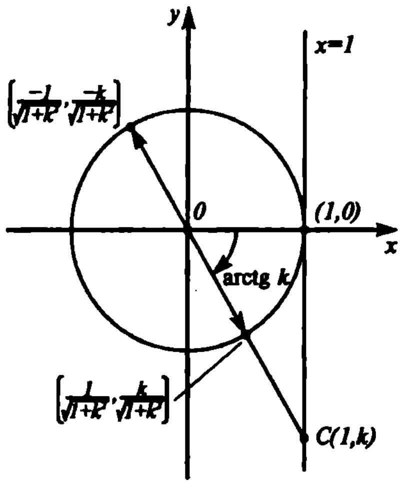


Рис. 88.

Приведенное выше определение тангенса угла можно переформулировать так:

пусть дан (рис. 87) любой угол α такой, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, и пусть конец подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, есть точка $N(a,\ b)$ $\left(\text{причем } a \neq 0,\right.$ вследствие того что $\left.\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right)$; *тангенсом* этого угла называется число, равное отношению ординаты точки N к абсциссе той же точки N, т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Легко видеть (см. рис. 87), что прямая, проходящая через начало координат и точку $N(a, b)$, пересекает прямую $x = 1$ в точке $K\left(1, \frac{b}{a}\right)$. Другими словами, прямая, проходящая через начало координат и конец подвижного единичного радиуса, задающего угол α $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right)$, пересекает прямую $x = 1$ в точке K $(1, \operatorname{tg}\alpha)$. Поэтому прямую $x = 1$ часто называют линией тангенсов.

Арктангенс числа. Часто возникает такая задача: для любого действительного числа k найти угол α такой, что его тангенс равен этому числу k.

Можно показать, что существует бесконечно много углов таких, что тангенс каждого такого угла равен числу k. Действительно, можно видеть (рис. 88), что прямая, проходящая через начало координат и точку $C(1; k)$, лежащую на прямой тангенса, пересекает единичную окружность в двух точках: $\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ и $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$. Но, как указано выше, для каждой такой точки единичной окружности существует угол α такой, что тангенс этого угла равен отношению ординаты этой точки к абсциссе этой же точки, т.е. равен k. Далее по свойству тангенса

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi l)$$

для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, и любого целого числа l. Поэтому для любого целого числа l тангенс угла $(\alpha + \pi l)$ равен числу k. Принято следующее соглашение: тот угол, тангенс которого равен числу k и который взят из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, называть *главным углом* и обозначать $\operatorname{arctg} k$ (читается: арктангенс числа k).

Таким образом, по определению $\operatorname{arctg} k$ есть угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} k < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} k) = k.$$

Легко видеть, что для любого действительного числа k арктангенс этого числа существует и притом единственный.

Примеры.

1. $\operatorname{arctg} 0$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Ясно, что это есть нулевой угол, следовательно, $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

2. $\operatorname{arctg} 1$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{4}$, следовательно, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

3. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{3}$. Следовательно, $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

4. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{6}$. Следовательно, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

5. $\operatorname{arctg}(-1)$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = -1$. Ясно, что это есть угол $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, $\operatorname{arctg}(-1) = \left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Отметим некоторые свойства арктангенса числа, вытекающие из его определения.

Для любого действительного числа k справедливо двойное неравенство

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} k < \frac{\pi}{2}.$$

Для любого действительного числа k справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} k) = k.$$

Для любого угла $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha.$$

Примеры.

1. Вычислить $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10)$. Получаем $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10) = 10$.

2. Вычислить $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$. Поскольку $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

3. Вычислить $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3\pi)$. Поскольку $3\pi \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то нельзя написать $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3\pi) = 3\pi$. Однако $\operatorname{tg} 3\pi = \operatorname{tg} 0$. Следовательно, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3\pi) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0) = 0$.

4. Вычислить $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10)$. Поскольку $10 \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то нельзя написать $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10) = 10$. Однако $\operatorname{tg} 10 = \operatorname{tg}(10 - 3\pi)$. Так как $(10 - 3\pi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10) = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(10 - 3\pi)] = 10 - 3\pi$.

Наконец, отметим еще одно свойство арктангенса числа: для любого действительного числа k справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(-k) = -\operatorname{arctg} k.$$

Действительно, по определению

$$\operatorname{arctg} k = \alpha, \text{ причем } \operatorname{tg}\alpha = k \text{ и } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\operatorname{arctg}(-k) = \beta, \text{ причем } \operatorname{tg}\beta = -k \text{ и } \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

отсюда очевидно, что $\beta = -\alpha$, т.е.

$$\operatorname{arctg}(-k) = -\operatorname{arctg} k.$$

Примеры.

1. $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

2. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

3. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

Котангенс угла. Пусть дан любой угол α такой, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$. *Котангенсом* этого угла α называется число, равное отношению косинуса этого угла α к синусу того же угла α и обозначаемое $\operatorname{ctg}\alpha$, т.е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Из определения следует, что для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, тангенс этого угла α существует и притом единственный.

Примеры.

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0,\ \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1,\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Отметим некоторые свойства котангенса угла.

Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, справедливо равенство

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Действительно, для любого такого угла справедлива цепочка равенств

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Это свойство котангенса угла можно сформулировать так: для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, знак минус можно выносить за знак котангенса или вносить под знак котангенса, т.е. если $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, то

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(-\alpha).$$

Примеры.

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1;\quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3};$$
$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Используя свойства синуса и косинуса угла, можно показать, что для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, справедливы равенства

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi).$$

Действительно, для любого такого угла справедливы цепочки равенств

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \frac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \frac{\cos(\alpha - \pi)}{\sin(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Примеры.

$$\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1;$$
$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3};$$
$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

Используя равенства

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi)$$

и применяя метод математической индукции, можно показать, что для любого целого числа n и любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, справедливы равенства

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + n\pi) = \operatorname{ctg}(\alpha - n\pi).$$

Это свойство котангенса можно сформулировать так: котангенс любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, повторяется при изменении угла на πn, где n — любое целое число.

Примеры.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-2\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{9\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}+11\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}-13\pi\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}+15\pi\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Для любого угла α, косинус и синус которого одного знака, котангенс угла α положителен, т.е. ctg α положителен для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой единичной окружности, лежащей в I или III четвертях (т.е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, принадлежащего при некотором целом l интервалу $\left(\pi l, \frac{\pi}{2}+\pi l\right)$).

На числовой прямой (см. рис. 85) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала ctg α положителен.

Для любого угла, косинус и синус которого разных знаков, котангенс угла α отрицателен, т.е. ctg α отрицателен для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой единичной окружности, лежащей в II или IV четвертях (т.е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, принадлежащего при некотором целом k интервалу $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k, \pi+\pi k\right)$).

На числовой прямой (см. рис. 86) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\operatorname{ctg}\alpha$ отрицателен.

Для любого угла α, косинус которого равен нулю, котангенс угла α тоже равен нулю т.е. $\operatorname{ctg}\alpha = 0$ для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает или с точкой $T(0; 1)$, или с точкой $L(0; -1)$ (т.е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, равного при некотором целом n числу $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$).

На числовой прямой (см. рис. 82) указаны такие числа α, для каждого из которых $\operatorname{ctg}\alpha$ равен нулю.

Приведенное выше определение котангенса угла можно переформулировать так:

пусть дан (рис. 89) любой угол α такой, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, и пусть конец подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, есть точка $N(a, b)$ (причем $b \neq 0$, вследствие

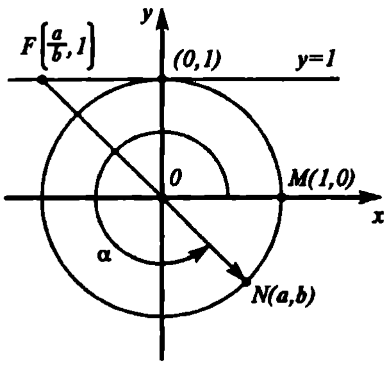


Рис. 89.

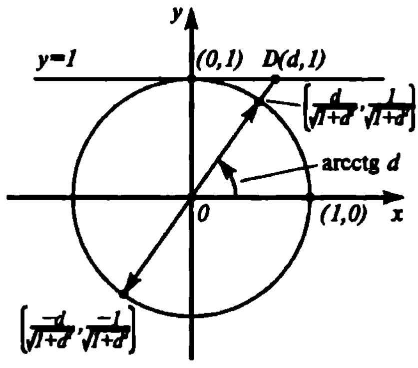


Рис. 90.

того что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$); котангенсом этого угла α называется число, равное отношению абсциссы точки N к ординате той же точки N, т.е. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Легко видеть (см. рис. 89), что прямая, проходящая через начало координат и точку $N(a, b)$, пересекает прямую $y = 1$

в точке $F\left(\frac{a}{b}, 1\right)$. Другими словами, прямая, проходящая через начало координат и конец подвижного единичного радиуса, задающего угол α ($\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$), пересекает прямую $y = 1$ в точке F (ctg α, 1). Поэтому прямую $y = 1$ часто называют линией котангенсов.

Арккотангенс числа. Часто возникает такая задача: для любого действительного числа d найти угол α такой, что его котангенс равен этому числу d.

Можно показать, что существует бесконечно много углов таких, что котангенс каждого такого угла равен числу d.

Действительно, можно видеть (рис. 90), что прямая, проходящая через начало координат и точку $D(d; 1)$, лежащую на линии котангенсов, пересекает единичную окружность в двух точках: $\left(\frac{d}{\sqrt{1+d^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+d^2}}\right)$, $\left(\frac{-d}{\sqrt{1+d^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+d^2}}\right)$. Но, как указано выше, для каждой такой точки существует угол такой, что котангенс этого угла равен отношению абсциссы этой точки к ординате этой же точки, т.е. равен d. Далее по свойству котангенса

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + \pi n)$$

для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, и любого целого числа n. Поэтому для любого целого числа n котангенс угла ($\alpha + \pi n$) равен числу d.

Принято следующее соглашение: тот угол, тангенс которого равен числу d и который взят из интервала $(0, \pi)$, называть *главным углом* и обозначать arcctg d (читается: арккотангенс числа d).

Таким образом, по определению arcctg d есть угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям:

$$0 < \operatorname{arcctg} d < \pi, \quad \operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} d) = d.$$

Легко видеть, что для любого действительного числа d арккотангенс этого числа существует и притом единственный.

Примеры.

1. $\operatorname{arcctg} 0$ есть такой угол α, что $0 < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 0$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{2}$, следовательно, $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

2. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$ есть такой угол α, что $0 < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{6}$. Следовательно, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

3. $\operatorname{arcctg} 1$ есть такой угол α, что $0 < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 1$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{4}$, следовательно, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

4. $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ есть такой угол α, что $0 < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{3}$. Следовательно, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$.

5. $\operatorname{arcctg}(-1)$ есть такой угол α, что $0 < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -1$. Ясно, что это есть угол $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Следовательно, $\operatorname{arcctg}(-1) = \left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Отметим некоторые свойства арккотангенса числа, вытекающие из его определения.

Для любого действительного числа d справедливо двойное неравенство

$$0 < \operatorname{arcctg} d < \pi.$$

Для любого действительного числа d справедливо равенство

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} d) = d.$$

Для любого угла $\alpha \in (0, \pi)$ справедливо равенство

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha.$$

Примеры.

1. Вычислить $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 10)$. Получаем

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 10) = 10.$$

2. Вычислить $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$. Поскольку $\frac{\pi}{3} \in (0,\ \pi)$, то $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

3. Вычислить $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$. Поскольку $\left(-\frac{\pi}{3}\right) \notin (0, \pi)$, то нельзя написать $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = -\frac{\pi}{3}$. Однако легко видеть, что $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3} \in (0,\ \pi)$. Следовательно, $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Наконец, отметим еще одно свойство арккотангенса числа: для любого действительного числа d справедливо равенство

$$\operatorname{arcctg}(-d) = \pi - \operatorname{arcctg} d.$$

Действительно, по определению

$$\operatorname{arcctg} d = \alpha, \text{ причем } \operatorname{ctg}\alpha = d \text{ и } \alpha \in (0, \pi),$$
$$\operatorname{arcctg}(-d) = \beta, \text{ причем } \operatorname{ctg}\beta = -d \text{ и } \beta \in (0, \pi),$$

отсюда вытекает, что $\beta = \pi - \alpha$, т.е.

$$\operatorname{arcctg}(-d) = -\operatorname{arcctg} d.$$

Примеры.

1. $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.
2. $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
3. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

§ 4. Основное тригонометрическое тождество

Теорема. *Для любого угла* α *справедливо равенство*:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{1}$$

которое называется основным тригонометрическим тождеством.

Эту теорему можно сформулировать так: *квадрат синуса любого угла плюс квадрат косинуса того же угла равен единице.*

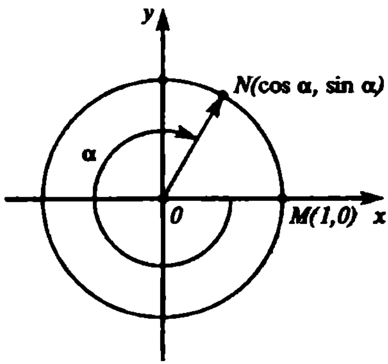


Рис. 91.

Доказательство. Пусть дан некоторый угол α. Тогда координаты конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, будут $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ (рис. 91). Так как квадрат расстояния между любыми двумя точками плоскости, заданными своими координатами, равен сумме квадратов разности одноименных координат, то для точки $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и точки $(0, 0)$ имеем

$$(\cos\alpha - 0)^2 + (\sin\alpha - 0)^2 = 1^2$$

или

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

и теорема доказана.

Основное тригонометрическое тождество показывает, в какой зависимости находятся синус и косинус одного и того же угла. Зная одну из величин, входящих в основное тригонометрическое тождество для некоторого угла α, можно найти другую величину того же угла α. Действительно, основное тригонометрическое тождество равносильно равенству $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, которое равносильно следующему:

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \qquad (2)$$

Из равенства (2) имеем

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$. (2а) $\qquad$ $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.(2б) для любого угла α, для которого $\cos\alpha$ не отрицателен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $k \in Z$ отрезку $\left[2\pi k - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$).

для любого угла α, для которого $\cos\alpha$ не положителен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $k \in Z$ отрезку $\left[2\pi k + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$).

Далее основное тригонометрическое тождество равносильно равенству

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

которое равносильно следующему:

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}. \qquad (3)$$

Из равенства (3) имеем

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}. \quad (3а)$$

для любого угла α, для которого $\sin\alpha$ не отрицателен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $m \in Z$ отрезку $[2\pi m; \pi + 2\pi m]$).

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha}. \quad (3б)$$

для любого угла α, для которого $\sin\alpha$ не положителен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $m \in Z$ отрезку $[\pi + 2\pi m; 2\pi + 2\pi m]$).

Замечание. Формулы (2а) и (2б) при граничных значениях угла α, т.е. при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$, дают одно и то же значение $\cos\alpha = 0$; формулы (3а) и (3б) при граничных значениях угла α, т.е. при $\alpha = \pi m$, где $m \in Z$, дают одно и то же значение $\sin\alpha = 0$.

Примеры.

1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{9}{11}$ и $\alpha \in \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\sin\alpha$ отрицателен, и поэтому $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{9}{11}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{10}}{11}$.

2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\cos\alpha$ отрицателен, и поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Следствие 1. *Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство*

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (4)$$

Доказательство. Так как $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, то $\cos\alpha \neq 0$, и поэтому основное тригонометрическое тождество (1) можно почленно разделить на $\cos^2\alpha$. Тогда для любого такого α имеем

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Равенство (4) доказано.

Равенство (4) показывает, в какой зависимости находятся тангенс и косинус одного и того же угла α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$). Зная одну из величин, входящих в равенство (4), для некоторого такого угла α можно найти другую величину того же угла. Действительно, так как $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, то равенство (4) равносильно равенству $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, которое равносильно следующему:

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \qquad (5)$$

Из равенства (5) имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad (5а)$$

для любого угла α, для которого $\cos\alpha$ положителен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $k \in Z$ интервалу $\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$).

$$\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad (5б)$$

для любого угла α, для которого $\cos\alpha$ отрицателен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $k \in Z$ интервалу $\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$).

Далее равенство (4) равносильно равенству $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, которое равносильно следующему:

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{|\cos\alpha|}. \quad (6)$$

Из равенства (6) имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \quad (6а)$$

для любого угла α, для которого $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$ одного знака (т.е. для любого угла α, принадлежащего при каждом $m \in Z$ множеству $\left[2\pi m; \frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \pi + 2\pi m\right]$).

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \quad (6б)$$

для любого угла α, для которого $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$ разных знаков (т.е. для любого угла α, принадлежащего при каждом $m \in Z$ множеству $\left[2\pi m - \pi; -\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m; 2\pi m\right]$).

Замечание. Формулы (6а) и (6б) при граничных значениях угла α, т.е. при $\alpha = \pi m$, где $m \in Z$, дают одно и то же значение $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Примеры.

1. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\operatorname{tg}\alpha$ положителен, а $\cos\alpha$ отрицателен, и поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = 2$.

2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\cos\alpha$ положителен, и поэтому $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Следствие 2. *Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство*

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (7)$$

Доказательство. Так как $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, то $\sin\alpha \neq 0$, и поэтому основное тригонометрическое тождество (1) можно почленно разделить на $\sin^2\alpha$. Тогда для любого такого α имеем

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Равенство (7) доказано.

Равенство (7) показывает, в какой зависимости находятся котангенс и синус одного и того же угла α ($\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$). Зная одну из величин, входящих в равенство (7), для некоторого такого угла α можно найти другую величину того же угла α. Действительно, так как $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, то равенство (7) равносильно равенству

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},$$

которое равносильно следующему:

$$|\sin\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}. \qquad (8)$$

Из равенства (8) имеем

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \qquad (8а)$$

для любого угла α, для которого $\sin\alpha$ положителен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $n \in Z$ интервалу $(2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$).

$$\sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \qquad (8б)$$

для любого угла α, для которого $\sin\alpha$ отрицателен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $n \in Z$ интервалу $(\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$).

Далее, так как $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, то равенство (7) равносильно равенству

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

которое равносильно следующему:

$$|\operatorname{ctg}\alpha| = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{|\sin\alpha|} \qquad (9)$$

Из равенства (9) имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \qquad (9а)$$

для любого угла α, для которого $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\sin\alpha$ одного знака (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $k \in Z$ множеству $\left[2\pi k - \frac{\pi}{2};\ 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$).

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \qquad (9б)$$

для любого угла α, для которого $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\sin\alpha$ разных знаков (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $k \in Z$ множеству $\left[2\pi k + \frac{\pi}{2};\ 2\pi k + \pi\right) \cup \left(\pi + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$).

Замечание. Формулы (9а) и (9б) при граничных значениях угла α, т.е. при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, дают одно и то же значение $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.

Примеры.

1. Вычислить $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{24}{25}$ и $\alpha \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\operatorname{ctg} \alpha$ положителен, а $\sin \alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{-\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{7}{24}.$$

2. Вычислить $\sin \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 4$ и $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\sin \alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\sin \alpha = \frac{1}{-\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Из определения тангенса и котангенса одного и того же угла следует справедливость следующего **утверждения**:

для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, справедливы равенства

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \tag{11}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \tag{12}$$

Равенства (11) и (12) показывают, в какой зависимости находятся тангенс и котангенс одного и того же угла α $\left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right)$. Зная одну из величин, входящих в равенства (11) и (12), для некоторого такого угла α можно найти другую величину того же угла α.

Примеры.

1. Вычислить $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\cos\alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{4}{5}.$$

Так как $\cos\alpha \neq 0$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}.$$

Аналогично, так как $\sin\alpha \neq 0$, то

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}.$$

2. Вычислить $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -7$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Так как $\operatorname{ctg}\alpha \neq 0$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{1}{7}$.

Для любого угла α из указанного интервала $\sin\alpha$ положителен, а $\cos\alpha$ отрицателен, следовательно,

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{10}, \quad \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

§ 5. Формулы сложения

Пусть дан некоторый угол α и некоторый угол β, т.е. пусть даны число α, представляющее радианную меру угла α, и число β, представляющее радианную меру угла β. Тогда под углом $(\alpha - \beta)$ понимается угол, радианная мера которого есть число $(\alpha - \beta)$; угол $(\alpha - \beta)$ называется *разностью* двух данных углов. Под углом $(\alpha + \beta)$ понимается угол, радианная мера которого есть число $(\alpha + \beta)$; угол $(\alpha + \beta)$ называется *суммой* двух данных углов.

Косинус разности и косинус суммы.

Теорема. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

которое называется формулой косинуса разности двух углов.

Эту теорему можно сформулировать так: *косинус разности двух любых углов равен произведению косинуса уменьшаемого угла на косинус вычитаемого угла плюс произведение синуса уменьшаемого угла на синус вычитаемого угла.*

Доказательство. Пусть на плоскости даны прямоугольная система координат xOy и единичная окружность. Будем считать началом отсчета неподвижный единичный радиус OM этой окружности, где $M(1, 0)$.

Пусть угол α задается подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой $N(\cos\alpha, \sin\alpha)$ единичной окружности; угол β — подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой $P(\cos\beta, \sin\beta)$ единичной окружности.

Возможны два случая расположения точек N и P: они или совпадают (рис. 92), либо не совпадают (рис. 93).

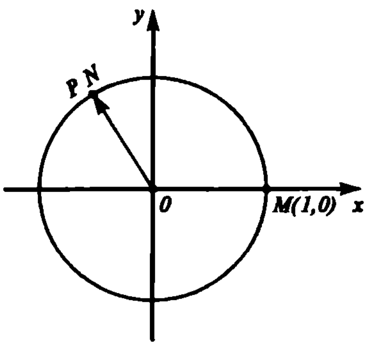


Рис. 92.

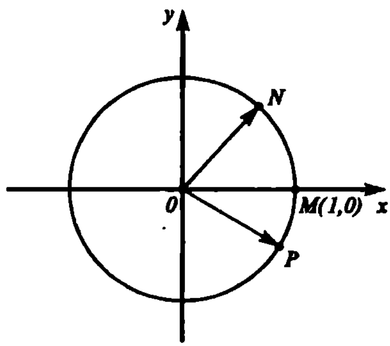


Рис. 93.

Доказательство теоремы проведем отдельно в каждом из этих случаев.

1. Пусть точки N и P совпадают. В этом случае углы α и β таковы, что $\alpha = \beta + 2\pi k$, т.е. $(\alpha - \beta) = 2\pi k$ для некоторого

фиксированного целого числа k, и равенство (1) можно переписать в виде

$$\cos 2\pi k = \cos\beta\cos(\beta + 2\pi k) + \sin\beta\sin(\beta + 2\pi k)$$

или, поскольку

$$\cos 2\pi k = 1$$
$$\cos(\beta + 2\pi k) = \cos\beta,$$
$$\sin(\beta + 2\pi k) = \sin\beta,$$

в виде

$$1 = \cos^2\beta + \sin^2\beta,$$

т.е. в рассматриваемом случае равенство (1) есть равносильная форма записи основного тригонометрического тождества, следовательно, равенство (1) справедливо.

2. Пусть углы α и β таковы, что $\alpha \neq \beta + 2\pi k$ ни для какого целого числа k. Вычислим двумя способами длину отрезка PN.

В данной системе координат координаты точек N и P известны, поэтому по теореме о длине отрезка, координаты концов которого заданы, имеем

$$d^2_{NP} = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2. \qquad (2)$$

Введем теперь другую прямоугольную систему координат $x'Oy'$ так, чтобы единица масштаба совпадала с уже выбранной ранее единицей длины; положительная полуось абсцисс (Ox') была бы продолжением радиуса OP; положительная полуось ординат (Oy') образовывала бы положительный угол $\frac{\pi}{2}$ с положительной полуосью абсцисс (Ox') (рис. 94).

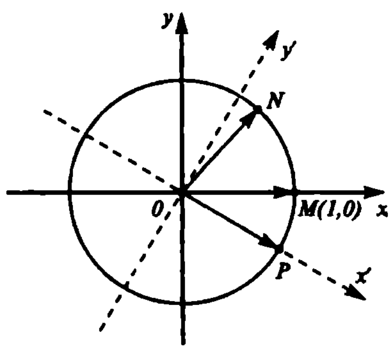


Рис. 94.

В новой системе координат точка P будет иметь координаты $P(1,\ 0)$. Примем теперь радиус OP за неподвижный единичный радиус, т.е. за новое начало отсчета углов. Система координат $x'Oy'$ вводится так, чтобы новое начало отсчета углов (единичный неподвижный радиус OP) было смещено на угол β относительно предыдущего начала отсчета углов (единичного неподвижного радиуса OM). Тогда относительно нового начала отсчета углов подвижный единичный радиус ON будет задавать угол $(\alpha - \beta)$ и в системе координат $x'Oy'$ точка N будет иметь координаты $N(\cos(\alpha - \beta),\ \sin(\alpha - \beta))$. По теореме о длине отрезка, координаты концов которого заданы (см. § 3 гл. III), имеем

$$d'^2_{NP} = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + [0 - \sin(\alpha - \beta)]^2. \qquad (3)$$

Так как квадрат расстояния между двумя фиксированными точками плоскости, найденный в двух разных прямоугольных системах координат с одной и той же единицей длины, есть одно и то же число, то $d'^2_{NP} = d^2_{NP}$.

Используя свойство транзитивности равенств, из равенств (2) и (3) имеем

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \\ = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + [\sin(\alpha - \beta)]^2.$$

Раскрывая скобки и группируя, имеем

$$(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \\ + \sin\alpha\sin\beta) = 1 + [\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)] - \\ - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Применяя трижды основное тригонометрическое тождество, перепишем это равенство в виде

$$2 - 2[\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta] = 2 - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Откуда следует справедливость теоремы во втором случае. Теорема доказана.

Пример.

Вычислить $\cos\frac{\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Итак, $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}$.

Приведем несколько следствий из доказанной теоремы.

Следствие 1. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

которое называется формулой косинуса суммы двух углов.

Это следствие можно сформулировать так: *косинус суммы двух углов равен произведению косинуса первого угла на косинус второго угла минус произведение синуса первого угла на синус второго угла.*

Доказательство. Представим $(\alpha+\beta)$ в виде $[\alpha-(\alpha-\beta)]$ и применим теорему. Затем, пользуясь тем, что $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ и $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ для любого угла, имеем

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+$$
$$+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

что и требовалось доказать.

Примеры.

1. Вычислить $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Итак, $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

2. Вычислить $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}.$$

Итак, $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$.

Формулы для дополнительных углов. Два угла α и β, в сумме составляющие $\frac{\pi}{2}$, т.е. такие, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, называются *дополнительными один к другому*. Так, угол α дополнительный к углу $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и наоборот.

Следствие 2. *Для любого угла* α *справедливы равенства*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$$

которые называются формулами для дополнительных углов.

Действительно, применяя равенство (1), имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha =$$
$$= 0\cdot\cos\alpha + 1\cdot\sin\alpha = \sin\alpha,$$

т.е. получаем справедливость первой формулы.

Обозначая $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \beta$, получаем из уже доказанной первой формулы, что $\sin\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. Так как $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \alpha$, то

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\alpha.$$

Следствие 2 можно сформулировать так:

— *синус любого угла равен косинусу дополнительного угла*, а

— *косинус любого угла равен синусу дополнительного угла.*

Пример.

Вычислить $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$, то $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$. Значение $\cos\frac{\pi}{12}$ было найдено выше и равно $\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}$. Следовательно, $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}$.

Следствие 3. а) *Для любого угла* α такого, что $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, *справедливо равенство*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

б) *Для любого угла* α такого, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in Z$, *справедливо равенство*

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Эти равенства также называются *формулами для дополнительных углов*. Справедливость этих формул следует из определений тангенса и котангенса и следствия 2.

Пример.

Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$. Так как $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}$, то $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=$ $=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=\frac{\cos\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$. Значения $\cos\frac{5\pi}{12}$ и $\sin\frac{5\pi}{12}$ были найдены выше и соответственно равны $\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$ и $\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{4}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ или $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

Синус суммы и синус разности.

Следствие 4. *Для любых углов* α *и* β *справедливо равенство*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

которое называется формулой синуса суммы двух углов.

Это следствие можно сформулировать так: *синус суммы любых двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго угла плюс произведение косинуса первого угла на синус второго.*

Доказательство. Используя следствие 2, затем равенство (1) и еще раз следствие 2, имеем

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

что и требовалось доказать.

Примеры.

1. Вычислить $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, то

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})}{4}.$$

Итак, $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})}{4}$.

2. Вычислить $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, то

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Итак, $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{4}$.

Следствие 5. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

которое называется формулой синуса разности двух углов.

Это следствие можно сформулировать так: *синус разности любых двух углов равен произведению синуса уменьшаемого угла на косинус вычитаемого угла минус произведение косинуса уменьшаемого угла на синус вычитаемого угла.*

Доказательство. Представим $(\alpha - \beta)$ в виде $[\alpha + (-\beta)]$ и применим следствие 4. Затем, пользуясь тем, что $\cos(-\beta) = \cos\beta$ и $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ для любого угла β, имеем

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) +$$
$$+ \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

что и требовалось доказать.

Пример.

Вычислить $\sin\frac{\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, то

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Итак, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Тангенс суммы и тангенс разности.

Следствие 6. *Для любых двух углов* α *и* β *таких, что* $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ *и* $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$ *справедливо равенство*

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

которое называется формулой тангенса суммы двух углов.

Доказательство. Для любых двух таких углов справедлива цепочка равенств

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

которая и доказывает следствие 6.

Примеры.

1. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, то

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2 + \sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

2. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$. Имеем

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\ 1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = -(2+\sqrt{3}).$$

Итак, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = -(2 + \sqrt{3})$.

Следствие 7. *Для любых двух углов* α *и* β таких, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ *и* $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, *справедливо равенство*

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

которое называется формулой тангенса разности двух углов.

Доказательство. Для любых двух таких углов справедлива цепочка равенств

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}[\alpha + (-\beta)] = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

которая и доказывает следствие 7.

Пример.

Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)} = 2 - \sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

Котангенс суммы и котангенс разности.

Следствие 8. *Для любых двух углов* α *и* β *таких, что* $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, $\beta \neq \pi n$, $n \in Z$ *и* $(\alpha + \beta) \neq \pi m$, $m \in Z$, *справедливо равенство*

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$$

которое называется формулой котангенса суммы двух углов.

Следствие 9. *Для любых двух углов* α *и* β *таких, что* $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, $\beta \neq \pi n$, $n \in Z$ *и* $(\alpha - \beta) \neq \pi m$, $m \in Z$, *справедливо равенство*

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha},$$

которое называется формулой котангенса разности двух углов.

Доказательство этих следствий аналогично доказательству следствий 6 и 7 и потому опускается.

Примеры.

1. Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - 1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = 2 - \sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

2. Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$. Имеем

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2+\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.

Формулы для вычисления произведений.

Следствие 10. *Для любых двух углов α и β справедливо равенство*

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

которое называется формулой для вычисления произведения косинусов.

Следствие 10 можно сформулировать так: *произведение косинуса любого угла α на косинус любого угла β равно полусумме косинуса разности этих углов и косинуса суммы этих углов.*

Следствие 11. *Для любых двух углов α и β справедливо равенство*

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

которое называется формулой для вычисления произведения синусов.

Следствие 11 можно сформулировать так: *произведение синуса любого угла α на синус любого угла β равно полуразности косинуса разности этих углов и косинуса суммы этих углов.*

Доказательство. Выше было показано, что для любых углов и справедливы следующие равенства:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем формулы для вычисления произведения косинусов и произведения синусов:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (4)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (5)$$

Замечание. В формулах (4) и (5), в силу того что $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ для любого угла α, при взятии косинуса разности двух углов можно брать косинус угла $(\alpha - \beta)$ и угла $(\beta - \alpha)$.

Примеры.

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right) =$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\cos\alpha+\frac{1}{2}}{2} = \frac{2\cos\alpha+1}{4}.$$

2. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta-\frac{\pi}{4}-\beta\right) -$

$$- \cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta+\frac{\pi}{4}+\beta\right) = \cos(-2\beta) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\beta.$$

3. $\cos 4\cos 3 = \frac{\cos(4-3)+\cos(4+3)}{2} = \frac{\cos 1+\cos 7}{2}.$

4. $\frac{4\sin 7\sin 8}{5} = \frac{4[\cos(7-8)-\cos(7+8)]}{5\cdot 2} = \frac{2[\cos 1-\cos 15]}{5}.$

Следствие 12. *Для любых двух углов α и β справедливо равенство*

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},$$

которое называется формулой для вычисления произведения синуса одного угла на косинус другого угла.

Следствие 12 можно сформулировать так: *произведения синуса любого угла α на косинус любого угла β равно полусумме* *синуса суммы углов α и β и синуса разности углов α и β, причем разность берется так, что от угла, стоящего под знаком синуса, вычитается угол, стоящий под знаком косинуса.*

Доказательство. Выше было показано, что для любых углов α и β справедливы следующие равенства:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Складывая эти равенства, получаем формулу для вычисления произведения синуса угла на косинус другого угла:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (6)$$

Примеры.

1. Вычислить $4\sin\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)$.

Применяя формулу (6), имеем

$$4\sin\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)=2\left[\sin\left(1+\frac{\pi}{6}+1+\frac{\pi}{3}\right)+\right.$$
$$\left.+\sin\left(1+\frac{\pi}{6}-1-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\left[\sin\left(2+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$
$$=2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-(-2)\right)-\frac{1}{2}\right]=2\cos(-2)-1=2\cos 2-1.$$

Итак, $4\sin\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos 2-1$.

2. Вычислить $2\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$.

Применяя формулу (6), имеем

$$2\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, $2\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

3. $\frac{3\sin 4\cos 5}{7}=\frac{3[\sin(4+5)+\sin(4-5)]}{7\cdot 2}=\frac{3(\sin 9-\sin 1)}{14}$.

Формулы суммы и разности синусов и косинусов.

Следствие 13. *Для любых двух углов* α *и* β *справедливо равенство*

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

которое называется формулой суммы косинусов.

Следствие 13 можно сформулировать так: *сумма косинусов любых двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус полуразности этих углов.*

Следствие 14. *Для любых двух углов* α *и* β *справедливо равенство*

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

которое называется формулой разности косинусов.

Следствие 14 можно сформулировать так: *разность косинусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус обратной полуразности этих углов* (под обратной разностью углов понимается такая разность, когда из угла, стоящего под знаком вычитаемого косинуса, вычитается угол, стоящий под знаком уменьшаемого косинуса).

Следствие 15. *Для любых двух углов* α *и* β *справедливо равенство*

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

которое называется формулой суммы синусов.

Следствие 15 можно сформулировать так: *сумма синусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус полуразности этих углов.*

Следствие 16. *Для любых двух углов* α *и* β *справедливо равенство*

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

которое называется формулой разности синусов.

Следствие 16 можно сформулировать так: *разность синусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус полусуммы этих углов, при этом синус полуразности берется так, что из угла, стоящего под знаком уменьшаемого синуса, вычитается угол, стоящий под знаком вычитаемого синуса.*

Доказательство. Обозначая

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y, \end{cases} \tag{7}$$

складывая эти равенства и вычитая второе из первого, получим

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{2}, \\ \beta = \frac{x-y}{2}, \end{cases} \tag{8}$$

Из равенств (8) следует, что для любой пары x и y всегда найдется пара α и β такая, что справедливы равенства (7).

Если в формулах (4), (5) и (6) произвести замену α и β на x и y по формулам (7) и (8), то получим справедливость следующих формул:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{9}$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}, \tag{10}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \tag{11}$$

Пользуясь тем, что $\sin(-y) = -\sin y$ для любого угла y, из формулы (11) получим

$$\sin x - \sin y = \sin x + \sin(-y) = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

т.е. получим, что справедлива следующая формула:

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}. \tag{12}$$

Из справедливости формул (9), (10), (11) и (12) вытекает справедливость следствий 13, 14, 15 и 16.

Примеры.

1. $\cos 4\alpha + \cos 6\alpha =$

$$= 2\cos\frac{4\alpha+6\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-6\alpha}{2} = 2\cos 5\alpha\cos(-\alpha) =$$

$$= 2\cos 5\alpha\cos\alpha.$$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right) =$

$$= 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}-\beta+\frac{\pi}{6}+\beta}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{6}+\beta-\frac{\pi}{3}+\beta}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\beta-\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\beta-\frac{\pi}{12}\right).$$

3. $\sin\gamma + \frac{1}{2} = \sin\gamma + \sin\frac{\pi}{6} = 2\sin\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{12}\right).$

4. $\sin\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2}-5\alpha\right) = \sin\alpha - \sin 5\alpha =$

$$= 2\sin\frac{\alpha-5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+5\alpha}{2} = 2\sin(-2\alpha)\cos 3\alpha =$$

$$= -2\sin 2\alpha\cos 3\alpha.$$

§ 6. Формулы для двойных и половинных углов

Формулы для двойных углов. Пусть дан некоторый угол α, т.е. пусть, например, дано некоторое число α, представляющее радианную меру этого угла. Тогда под углом 2α понимается угол, радианная мера которого есть число 2α; угол 2α часто называют *двойным углом.*

1. *Для любого угла* α *справедливо равенство*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{1}$$

которое называется формулой синуса двойного угла.

Это утверждение можно сформулировать так: *синус двойного угла* 2α *равен удвоенному произведению синуса угла* α *на косинус угла* α.

Доказательство. Полагая $\alpha = \beta$ в формуле для синуса суммы двух углов

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

получаем справедливость утверждения 1.

2. *Для любого угла 2α справедливо равенство*

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad (2)$$

которое называется формулой косинуса двойного угла.

Это утверждение можно сформулировать так: *косинус двойного угла 2α равен квадрату косинуса угла α минус квадрат синуса угла α.*

Доказательство. Полагая $\beta = \alpha$ в формуле для косинуса суммы двух углов

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

получаем справедливость утверждения 2.

3. *Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $k \in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad (3)$$

которое называется формулой тангенса двойного угла.

Доказательство. Представляя 2α как $(\alpha + \alpha)$ и применяя формулу тангенса суммы двух углов, имеем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$

что и требовалось доказать.

4. *Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \qquad (4)$$

которое называется формулой котангенса двойного угла.

Доказательство. Представляя 2α как $(\alpha + \alpha)$ и применяя формулу котангенса суммы двух углов, имеем

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha},$$

что и требовалось доказать.

Примеры.

1. Вычислить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\cos \alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}.$$

Применяя формулы (1) и (2), получаем

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{24}{25},$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{7}{25}.$$

2. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$. Применяя формулы для тангенса суммы двух углов, затем для тангенса двойного угла, получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha = 6.$$

Рассмотрим угол $n\alpha$, где n — любое натуральное число. Под углом $n\alpha$ понимается угол, радианная мера которого есть число $n\alpha$, если α есть радианная мера угла α. Можно вывести формулы, выражающие $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ ($n \in N$) через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. В качестве примера приведем формулы для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha =$$
$$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Итак, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha =$$
$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha =$$
$$= \cos^3\alpha - (1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha =$$
$$= \cos^3\alpha - \cos\alpha + \cos^3\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha =$$
$$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Итак, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Примеры.

1. Вычислить $\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Используя формулу для $\sin 3\alpha$, получим

$$\sin 3\alpha = 3\cdot\frac{3}{4} - 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{36-27}{16} = \frac{9}{16}.$$

2. Вычислить $(\sin 3\alpha + \cos 3\alpha)$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Используя формулы для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$, имеем

$$\sin 3\alpha + \cos 3\alpha = 3(\sin\alpha - \cos\alpha) - 4(\sin^3\alpha - \cos^3\alpha).$$

Применим формулу сокращенного умножения:

$$(\sin^3\alpha - \cos^3\alpha) =$$
$$= (\sin\alpha - \cos\alpha)(\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha)$$

Таким образом, при $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем

$$\sin 3\alpha + \cos 3\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sin\alpha\cos\alpha) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 - 4\sin\alpha\cos\alpha).$$

Дополним получившееся выражение до полного квадрата разности:

$$-1 - 4\sin\alpha\cos\alpha = -3 + 2(1 - 2\sin\alpha\cos\alpha) =$$
$$= -3 + 2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha) =$$
$$= -3 + 2(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = -3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -2.$$

Окончательно получаем, что $\sin 3\alpha + \cos 3\alpha = -\sqrt{2}$.

Формулы для половинных углов. Пусть дан некоторый угол α, т.е. пусть, например, дано некоторое число α, представляющее радианную меру этого угла. Тогда под углом $\frac{\alpha}{2}$ понимается угол, радианная мера которого есть число $\frac{\alpha}{2}$; угол $\frac{\alpha}{2}$ часто называется *половинным углом*.

5. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}, \qquad (5)$$

которое называется формулой квадрата косинуса половинного угла.

Доказательство. Очевидно, что угол α можно считать двойным углом по отношению к углу $\frac{\alpha}{2}$. Поэтому для любого угла α справедливо следующее равенство:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

кроме того, для любого угла α справедливо основное тригонометрическое тождество:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Складывая эти два равенства, получаем равенство (5).

Равенство (5) равносильно равенству

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Из последнего равенства имеем:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad (5а)$$

для любого угла α, для которого $\cos\frac{\alpha}{2}$ неотрицателен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $k \in Z$ отрезку $[-\pi + 4\pi k; \pi + 4\pi k]$).

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad (5б)$$

для любого угла α, для которого $\cos\frac{\alpha}{2}$ неположителен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $k \in Z$ отрезку $[\pi + 4\pi k; 3\pi + 4\pi k]$).

Замечание. Формулы (5а) и (5б) для граничных значений угла α, т.е. при $\alpha = \pi + 2\pi m$, где $m \in Z$, дают одно и то же значение: $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$.

Примеры.

1. Вычислить $\cos\frac{\pi}{8}$. Так как $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, то $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2. Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right)$.

Прежде всего найдем $\cos\alpha$. Поскольку для любого угла α из указанного интервала $\cos\alpha$ отрицателен, то

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{3}{5}.$$

Так как $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right)$, то $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right)$. Для любого угла $\frac{\alpha}{2}$ из этого интервала $\cos\frac{\alpha}{2}$ также отрицателен, и поэтому

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Итак, $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

6. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad (6)$$

которое называется формулой квадрата синуса половинного угла.

Доказательство. Выше уже было отмечено, что для любого угла справедливы равенства

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1, \quad -\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем равенство (6). Равенство (6) равносильно равенству

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Из последнего равенства имеем

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (6а)$$

для любого угла α, для которого $\sin\frac{\alpha}{2}$ неотрицателен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $m \in Z$ отрезку $[4\pi m; 2\pi + 4\pi m]$).

$$\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (6б)$$

для любого угла α, для которого $\sin\frac{\alpha}{2}$ неположителен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $m \in Z$ отрезку $[-2\pi + 4\pi m; 4\pi m]$).

Замечание. Формулы (6а) и (6б) для граничных значений угла α, т.е. при $\alpha = 2\pi k$, где $k \in Z$, дают одно и то же значение: $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$.

Примеры.

1. Вычислить $\sin\frac{\pi}{8}$. Так как $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, то $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ и $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Поскольку для любого угла α из указанного интервала $\cos\alpha$ отрицателен, то

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{7}{9}.$$

Так как $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$. Для любого угла $\frac{\alpha}{2}$ из этого интервала $\sin\frac{\alpha}{2}$ положителен, и поэтому

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Итак, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. *Для любого угла* α *такого, что* $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ справедливо равенство

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad (7)$$

которое называется формулой квадрата тангенса половинного угла.

Доказательство. Используя определение тангенса угла и равенства (5) и (6), получаем равенство (7).

Равенство (7) равносильно равенству

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Из последнего равенства имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad (7а)$$

для любого угла α, для которого $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ неотрицателен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $n \in Z$ промежутку $[2\pi n; \pi + 2\pi n)$).

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad (7б)$$

для любого угла α, для которого $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ неположителен (т.е. для любого α, принадлежащего при каждом $n \in Z$ промежутку $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$).

Замечание. Формулы (7а) и (7б) для граничных значений угла α, т.е. при $\alpha = 2\pi n$, где $n \in Z$, дают одно и то же значение: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0$.

Примеры.

1. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. Так как

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = 3 - 2\sqrt{2},$$

то

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

2. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos 2\alpha = \frac{7}{32}$ и $\alpha \in \left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right)$.

Поскольку для любого угла α из указанного интервала $\cos\alpha$ отрицателен, то

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{39}}{8}.$$

Так как $\alpha \in \left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right)$, то $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{8}\right)$. Для любого угла $\frac{\alpha}{2}$ из этого интервала $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ отрицателен, и поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\frac{8+\sqrt{39}}{5}.$$

Итак, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{8+\sqrt{39}}{5}$.

Для тангенса половинного угла можно вывести и другие формулы.

8. *Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (8).$$

Доказательство. Так как $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, то $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$ и $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$. Значит, справедлива цепочка равенств

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Применяя теперь формулы (6) и (1), получаем справедливость равенства (8).

9. *Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (9)$$

Доказательство этой формулы аналогично доказательству формулы (8) и потому опускается.

Примеры.

1. Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ упростить выражение

$$A = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Поскольку для рассматриваемого угла α

$$\cos\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq -1,\ \cos 2\alpha \neq -1,$$

то

$$A = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Так как в данном случае применима формула (9), то

$$A = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

2. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\sin\alpha$ отрицателен, поэтому

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{3}{5}.$$

Теперь применяя формулу (9), имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = -\frac{1}{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$.

Приведем еще формулы, выражающие синус, косинус, тангенс и котангенс угла через тангенс половинного угла.

10. *Для любого угла* α *такого, что* $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, *справедливо равенство*

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{10}$$

Доказательство. Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, *справедлива цепочка равенств*:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \left(\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

из которой вытекает справедливость равенства (10).

11. *Для любого угла* α *такого, что* $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, *справедливо равенство*

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{11}$$

Доказательство. Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, *справедлива цепочка равенств*:

$$\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{2\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\left(\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

из которой и вытекает справедливость равенства (11).

12. *Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (12)$$

Это равенство есть следствие формулы тангенса двойного угла.

13. *Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \qquad (13)$$

Доказательство. Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, справедлива цепочка равенств:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{2\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\left(\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

из которой и вытекает справедливость равенства (13).

Пример.

Вычислить $\frac{1}{2+\cos\alpha+\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$.

По формуле (10) $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{-3}{5}$. По формуле (11)

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4}{5}.$$

Значит, $\frac{1}{2+\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{5}{11}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Определить знак следующего числа (**1** — **21**):

1. $\sin 2\cdot\sin 4\cdot\sin 6$. **2.** $\cos 5\cdot\cos 7\cdot\cos 8$.

3. $\operatorname{tg}(-1)\cdot\operatorname{tg}3\cdot\operatorname{tg}6\cdot\operatorname{tg}(-3)$. **4.** $\operatorname{ctg}1\cdot\operatorname{ctg}(-2)\cdot\operatorname{ctg}9\cdot\operatorname{ctg}(-12)$.

5. $\frac{\sin(-3)\cdot\cos 4\cdot\operatorname{tg}(-5)}{\operatorname{ctg}6}$. **6.** $\frac{\sin 7\cdot\cos(-8)}{\operatorname{tg}6\cdot\operatorname{ctg}(-5)}$.

7. $\frac{\sin 6+\cos(-4)}{\operatorname{tg}(-2)+\operatorname{ctg}(-10)}$. **8.** $\frac{\sin(-8)+\cos 9}{\cos 11\cdot\operatorname{tg}(-9)}$.

9. $\dfrac{\cos 10 \cdot \sin 7 - \operatorname{tg} 10}{\cos(-\sqrt{2}) \cdot \operatorname{ctg}(-4)}$. 10. $\dfrac{\operatorname{tg} 7 \cdot \sin \frac{10}{11} - \cos \frac{17}{2} \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{26}}{\cos(-2) \cdot \sin \sqrt{17} - \operatorname{tg} \sqrt{70}}$.

11. $\cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \dfrac{9}{2} - \dfrac{\sin \frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{tg} 1 + \operatorname{ctg}(-2{,}5)}$.

12. $\dfrac{\cos 5}{\sin 6} + \operatorname{tg} 11 - \operatorname{ctg} \sqrt{49{,}5}$.

13. $\arcsin \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(-10) + \arccos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

14. $\arccos \dfrac{1}{10} \cdot \operatorname{arcctg}(-11{,}5) - \arcsin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

15. $\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)}{\operatorname{arcctg}\left(-\frac{112}{5}\right)}$.

16. $\arcsin\left[\operatorname{tg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right] + \operatorname{arctg}[\cos(-4)]$.

17. $\dfrac{\operatorname{arcctg}(\sin 10) - \operatorname{arctg}(\cos 10)}{\arcsin[\cos(-8)] \cdot \arccos(\sin 5)}$.

18. $\dfrac{\arcsin(\cos 12) + \operatorname{arctg}(\sin 7)}{\sin\left(-\frac{2}{\pi}\right) \cdot \cos\left(-\frac{14}{5}\right)} + \operatorname{ctg}(-7)$.

19. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right) - \dfrac{\operatorname{arctg}(\cos 4)}{\operatorname{arcctg} 115} + \dfrac{\sin(-10)}{\operatorname{tg} 12}$.

20. $\dfrac{\arcsin[\operatorname{ctg}(-0{,}3)] \cdot \sin(-9)}{\arcsin[\operatorname{tg}(-0{,}4)] \cdot \cos(5{,}8)} + \dfrac{\operatorname{ctg}(-1)}{\sin \sqrt{3}} - \cos \dfrac{13}{2}$.

21. $\dfrac{\operatorname{arctg}(\sin 10) + \operatorname{tg}\left[\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right]}{\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]} - \dfrac{\operatorname{tg}(-11) \cdot \sin \frac{31}{4}}{\cos(-3{,}5)}$.

Найти числовой значение следующего числового выражения (**22 – 101**):

22. $\sin \dfrac{\pi}{3} \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) - \cos \dfrac{3\pi}{4} \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$. 23. $\dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} + \dfrac{2}{\sin \frac{\pi}{4}}$.

24. $\dfrac{\cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{6}}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} - \dfrac{\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}}$.

25. $\dfrac{\sin\dfrac{3\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)}+\dfrac{\cos\dfrac{5\pi}{6}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}.$

26. $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}}{\sin(-\pi)+\cos\pi}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}.$

27. $\cos\left(-100\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(20\pi-\dfrac{5\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(11\pi+\dfrac{\pi}{4}\right).$

28. $\dfrac{\sin\left(112\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{17\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)}.$

29. $\left[\operatorname{tg}\left(13\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(15\pi-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]\operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{3}.$

30. $\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{3}\left[\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\left(-120\pi-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]}{\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{6}\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}}.$

31. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left[\operatorname{tg}(-\pi)-\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]}{\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{3}-10\pi\right)\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}+10\pi\right)}.$

32. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{-113\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]\cos\dfrac{3\pi}{4}}.$

33. $\sin\dfrac{13\pi}{2}\cos(113\pi)+\operatorname{tg}\dfrac{18\pi}{4}\cos\left(\dfrac{-15\pi}{2}\right).$

34. $\sin\left(-\dfrac{49\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{51\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\dfrac{113\pi}{4}\right).$ 35. $\dfrac{\sin\dfrac{44\pi}{3}\cos\left(-\dfrac{15\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{21\pi}{4}}.$

36. $\sin\dfrac{63\pi}{4}\cos\left(-\dfrac{85\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{49\pi}{6}.$

37. $\cos\dfrac{181\pi}{3}\sin\left(-\dfrac{31\pi}{4}\right)\operatorname{tg}^2\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right).$

38. $\cos\dfrac{37\pi}{4}\sin\left(-\dfrac{89\pi}{6}\right)\cos^2\left(\dfrac{13\pi}{3}\right).$

39. $\dfrac{\cos\dfrac{57\pi}{6}\sin\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)}{2\operatorname{tg}\left(-\dfrac{115\pi}{4}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(-\dfrac{117\pi}{2}\right)}.$ 40. $\dfrac{\operatorname{tg}^3(-112\pi)-\cos^2(115\pi)}{\sin^2\dfrac{119\pi}{3}+\operatorname{ctg}\dfrac{53\pi}{2}}.$

41. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(-\frac{37\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{44\pi}{3}\right)\sin\frac{51\pi}{6}}{\cos^2\frac{33\pi}{4}+\sin(-10\pi)}.$

42. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}.$

43. $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{arcctg}(-1)-\pi.$

44. $3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi}{2}.$

45. $4\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arctg}1-\frac{5\pi}{2}.$

46. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\cos[\pi-\operatorname{arctg}(-1)].$

47. $\sin\left[-\frac{137\pi}{2}-2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right].$ 48. $\sin\left[-\frac{149\pi}{2}+2\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})\right].$

49. $\sin\left[3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{11\pi}{2}\right].$ 50. $\sin\left[4\arccos(-1)-\frac{117\pi}{6}\right].$

51. $\operatorname{tg}\left[6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{23\pi}{3}\right].$ 52. $\operatorname{tg}\left(8\arccos 0-\frac{9\pi}{4}\right).$

53. $\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{2}-2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$ 54. $\operatorname{tg}\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos 0\right].$

55. $\operatorname{ctg}\left[2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}\right].$

56. $\operatorname{ctg}\left[3\arcsin(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$

57. $\operatorname{ctg}\left[\frac{\arcsin 0}{3}-2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right].$ 58. $\operatorname{ctg}\left[\frac{\arcsin 1}{2}+\operatorname{arctg}1\right].$

59. $\cos\left[4\arcsin\frac{1}{2}-3\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right].$

60. $\cos\left[5\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-2\operatorname{arctg}(-1)\right].$

61. $\cos\left[-3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+\cos(-2\operatorname{arctg}0).$

62. $\dfrac{\cos(\pi-\arcsin 0)-\cos[6\operatorname{arcctg}(-1)]}{\sin(2\pi-\operatorname{arcctg}1)}.$

63. $\dfrac{\sin\left(\frac{15\pi}{2}-\operatorname{arcctg}3\right)+\cos\left(2\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\operatorname{tg}(-115\pi-\operatorname{arcctg}1)}.$

64. $\dfrac{\sin\left[-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]+\cos(-5\operatorname{arcctg}0)}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(-10\pi+\frac{\pi}{4}\right)}.$

65. $\sin\left(\arcsin\frac{11}{12}\right)-\cos\left(\arccos\frac{1}{6}\right)$.
66. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}31)+\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}5)$.
67. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{21}{29}\right)$. 68. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$. 69. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}7)$.
70. $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)-\cos\left[\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.
71. $\sin(\operatorname{arctg}12)+\cos[\operatorname{arcctg}(-2)]$.
72. $\cos[\operatorname{arctg}(-5)]-\sin(\operatorname{arcctg}3)$.
73. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{3}{4}\right)$. 74. $\cos(\pi-\operatorname{arctg}17)$. 75. $\cos\left[\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arcctg}(-4)\right]$.
76. $\cos\left[2\pi-2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$. 77. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{10}\right)$.
78. $\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$. 79. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\operatorname{arcctg}81\right)$.
80. $\sin\left(2\pi-3\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 81. $\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.
82. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 83. $\operatorname{tg}\left[\pi+\arcsin\left(-\frac{2}{17}\right)\right]$.
84. $\operatorname{tg}[2\pi-\operatorname{arcctg}(-5)]$. 85. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)$.
86. $\operatorname{ctg}\left[\pi+\arccos\left(-\frac{1}{2}\pi\right)\right]$. 87. $\operatorname{ctg}\left[\frac{3\pi}{2}-5\operatorname{arcctg}(-1)\right]$.
88. $\operatorname{ctg}[2\pi+\operatorname{arctg}(-11)]$. 89. $\arccos(\cos 2)+\arcsin[\sin(-1)]$.
90. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}3)-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}1)$. 91. $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$.
92. $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)+2\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.
93. $\dfrac{\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\pi}{\pi-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)}$.
94. $\dfrac{\arccos(\cos\pi)-\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)+\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$.
95. $\arcsin(\sin 2)+\arccos(\cos 10)$.
96. $\arccos[\cos(-9)]-\arcsin(\sin 7)$.
97. $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-6)]-\arcsin(\sin 8)$.
98. $\arccos\left(\cos\frac{13\pi}{4}\right)+\arcsin[\sin(-7)]$.
99. $\dfrac{\arcsin(\sin\sqrt{26})+2\pi}{\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-8)]-3\pi}$.

100. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{10}{3}\right)-2\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{24}{5}\right)$.

101. $\arccos[\cos(-5)]+\arccos[\cos(-8)]$.

Доказать справедливость следующего числового равенства (102 —

102. $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. 103. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

104. $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. 105. $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-2}{4}$.

106. $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. 107. $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-2}{4}$.

108. $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{18}=\frac{\sqrt{3}}{8}$. 109. $8\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}=\sqrt{3}$.

110. $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{11\pi}{30}\cos\frac{7\pi}{30}\sin\frac{\pi}{15}=\frac{1}{16}$.

111. $\cos\frac{\pi}{36}\cos\frac{11\pi}{36}\cos\frac{13\pi}{36}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}$.

112. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{128}$.

113. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}=5$. 114. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

115. $\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}=\frac{1}{8}$. 116. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{9}\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{3}$.

117. $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$. 118. $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}$.

119. $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{18}+4\cos\frac{7\pi}{18}=\sqrt{3}$. 120. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

121. $\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}-\cos\frac{7\pi}{15}-\cos\frac{\pi}{15}=\frac{1}{2}$.

122. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{24}+\operatorname{tg}\frac{9\pi}{12}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}-\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{24}=6+2\sqrt{3}$.

123. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9}-8\sin\frac{2\pi}{9}=\sqrt{3}$.

124. $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$.

125. $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=\frac{3}{2}$.

126. $\frac{\sin^8 10}{8}-\frac{\cos^8 10}{8}-\frac{\sin^6 10}{3}+\frac{\cos^6 10}{6}+\frac{\sin^4 10}{4}=\frac{1}{24}$.

127. $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$. 128. $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

129. $\arcsin(\cos 1)=\frac{\pi-2}{2}$. 130. $\arcsin\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\pi}{6}$.

131. $\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{10}\right)=\frac{\pi}{5}$. 132. $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=\frac{5\pi}{8}$.

133. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right)=\frac{3\pi}{7}$. 134. $\sin\left(2\arccos\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

135. $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}+\arccos\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$.

136. $\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{4}{5}$.

137. $\cos\left(\arccos\frac{5}{13}-\arcsin\frac{3}{5}\right)=\frac{56}{65}$.

138. $\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\,2+\mathrm{arctg}\,3)=-1$.

139. $\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,6)=6-2\pi$. 140. $\arcsin(\sin(-5))=-5+2\pi$.

141. $\arccos(\cos 9)=9-2\pi$. 142. $\mathrm{arctg}\,2+\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$.

143. $\mathrm{arctg}\,(-2)+\mathrm{arctg}\,(-3)=-\frac{3\pi}{4}$.

144. $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{12}{13}+\arcsin\frac{56}{65}=\pi$.

145. $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5}+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{7}+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

146. $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

147. $\mathrm{arctg}\,1+\mathrm{arctg}\,2+\mathrm{arctg}\,3=\pi$.

148. $2\arcsin\frac{2}{7}=\arccos\frac{41}{49}$. 149. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

150. $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}=\mathrm{arctg}\,3$. 151. $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4}+2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5}=\mathrm{arctg}\frac{32}{43}$.

152. $\frac{\cos 10}{1-\sin 10}=\frac{1+\mathrm{tg}\,5}{1-\mathrm{tg}\,5}$. 153. $2\sin^2 14+\cos(4\cdot 7)=1$.

154. $\frac{2\sin 6+\sin 12}{2\sin 6-\sin 12}=\mathrm{ctg}^2\,3$. 155. $\frac{\cos 6-\cos 9+\cos 12}{\sin 6-\sin 9+\sin 12}=\mathrm{ctg}\,9$.

156. $\frac{\sin 8-\sin 10-\sin 12+\sin 14}{\cos 4-\cos 6-\cos 8+\cos 10}=\frac{\sin 11}{\cos 7}$.

157. $\sin^6\sqrt{7}+\cos^6\sqrt{7}+\frac{3}{4}\sin^2 2\sqrt{7}=1$.

158. $\sin\sqrt{2}\sin(2-\sqrt{2})+\cos^2 1+\sin^2(1-\sqrt{2})=1$.

159. $\frac{1+\sin 4\sqrt{3}}{1-2\sin^2 2\sqrt{3}}+1=\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2\,2\sqrt{3}}$.

160. $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{6}\right)+\sin^2\sqrt{6}}{\sin^2 2\sqrt{6}-\sin\left(2\sqrt{6}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\sqrt{6}-\frac{\pi}{3}\right)}=1.$$

161. $\sin 8-\cos 8\,\mathrm{tg}\,4=\mathrm{tg}\,2$.

162. $4\sin(\sqrt{5}+\pi)\sin\left(\sqrt{5}+\frac{5\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\sqrt{5}\right)=\sin 3\sqrt{5}.$

163. $\dfrac{1-\sin^6 1-\cos^6 1}{1-2\sin^2 2-\sqrt{3}\sin 4}=\dfrac{3}{2}.$

164. $\dfrac{\cos 2\sqrt{11}-\cos 6\sqrt{11}+\cos 10\sqrt{11}-\cos 14\sqrt{11}}{\sin 2\sqrt{11}+\sin 6\sqrt{11}+\sin 10\sqrt{11}+\sin 14\sqrt{11}}=\operatorname{tg} 2\sqrt{11}.$

165. $\dfrac{\sin 23+\cos 23-\sin 69-\cos 69}{2\sin 46+4\sin^2 23-2}=\sin 23.$

166. $\dfrac{1+\cos 17+\cos 34+\cos 51}{2\cos 17+4\cos^2 17-2}=\cos 17.$

167. $\sin 2+\sin 4+\sin 6=4\sin 3\cos 2\cos 1.$

168. $\sin 2\sqrt{13}+\sin 4\sqrt{13}-\sin 6\sqrt{13}=4\sin 3\sqrt{13}\sin 2\sqrt{13}\sin\sqrt{13}.$

169. $\dfrac{\operatorname{tg} 1+\operatorname{ctg} 1}{1+\operatorname{tg} 2\operatorname{tg} 1}=2\operatorname{ctg} 2.$ 170. $\dfrac{3-4\cos 2+\cos 4}{3+4\cos 2+\cos 4}=\operatorname{tg}^4 1.$

171. $\dfrac{\sin^2 2\cos 6+\cos^2 2\sin 6}{\sin^3 1\cos 3+\cos^3 1\sin 3}=2\cos 4.$

172. $\dfrac{\cos\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)+2\cos\left(1-\frac{11\pi}{6}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+1\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)}=\sqrt{3}\operatorname{ctg} 1.$

173. $\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 1)(\operatorname{ctg}^2 1-1)}=-2\operatorname{ctg} 2.$

174. $(\cos 2\operatorname{tg} 1-\sin 4)(\cos 4\operatorname{ctg} 2+\sin 4)=-1.$

175. $\dfrac{\sin 13+\sin 14+\sin 15+\sin 16}{\cos 13+\cos 14+\cos 15+\cos 16}=\operatorname{tg}\dfrac{29}{2}.$

176. $1-\sqrt{3}\cos\left(\frac{9\pi}{2}-3\right)-2\cos 2\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{3}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-3\right).$

177. $\dfrac{\sin(2\sqrt{2}+1)+\sin(2\sqrt{2}-1)-\cos\left(3\frac{\pi}{2}-2\sqrt{2}\right)}{\cos(2\sqrt{2}+1)+\cos(2\sqrt{2}-1)-\sin\left(3\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}\right)}=\operatorname{tg} 2\sqrt{2}.$

178. $\dfrac{1+\cos(4-2\pi)+\cos\left(4-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(\pi+4)+\cos\left(3\frac{\pi}{4}+4\right)}=\operatorname{ctg} 2.$

179. $\dfrac{\sin^2 2\,(1+\operatorname{cosec} 2+\operatorname{ctg} 2)\,(1-\operatorname{cosec} 2+\operatorname{ctg} 2)}{\cos 2\,(1+\sec 2+\operatorname{tg} 2)\,(1-\sec 2+\operatorname{tg} 2)}=\cos 2.$

180. $\dfrac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+\sqrt{3}\right)}{\sec^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)-1}+\dfrac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\sqrt{3}\right)}{\operatorname{cosec}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\sqrt{3}\right)-1}=1.$

181. $8\cos\left(\frac{\pi}{6}-3\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\right)\sin 3\cos 9=\sin 18.$

182. $\operatorname{tg} 3-\operatorname{tg} 2-\operatorname{tg} 1=\operatorname{tg} 3\operatorname{tg} 2\operatorname{tg} 1.$

183. $\dfrac{1-2\cos^2 7}{2\operatorname{tg}\left(7-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(5\frac{\pi}{4}+7\right)}=1.$

184. $1+\sin 2-2\cos^2 1=\sqrt{2}\sin\left(2-\frac{\pi}{4}\right).$

185. $1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\right)-\cos\left(2-\frac{3\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}\sin 1\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$

186. $6\sin^2 1-\cos 2-1=-8\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(1-\frac{\pi}{3}\right).$

187. $2\cos^2 3+2\cos 6-3=8\cos\left(3+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3-\frac{\pi}{3}\right).$

188. $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-6\right)+\sin(\pi-6)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-6\right)+\cos(2\pi-6)\right]^2=2.$

189. $\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]^2+\left[\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{ctg}(\pi-1)\right]^2=\frac{2}{\sin^2 1}.$

190. $2\left(\sin^6 5+\cos^6 5\right)-3\left(\sin^4 5+\cos^4 5\right)+1=0.$

191. $\operatorname{ctg}\frac{1}{8}-\operatorname{tg}\frac{1}{8}-2\operatorname{tg}\frac{1}{4}-4\operatorname{tg}\frac{1}{2}=8\operatorname{ctg} 1.$

192. $\operatorname{tg} 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-1\right)+\operatorname{tg} 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-1\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=1.$

193. $\sin(\operatorname{ctg} 5)+\sin(\operatorname{tg} 5)=2\sin\left(\frac{1}{\sin 10}\right)\cos(\operatorname{ctg} 10).$

194. $1+\cos 2+\cos 4+\cos 6=4\cos 1\cos 2\cos 3.$

195. $\sin 2+\sin 4-\sin 6=4\sin 1\sin 2\sin 3.$

196. $\sin^2 5+\sin^2\sqrt{2}+2\sin 5\sin\sqrt{2}\cos(5+\sqrt{2})=\sin^2(5+\sqrt{2}).$

197. $\dfrac{\cos 1+\sin 1}{\sin 1-\cos 1}-\dfrac{1+2\cos^2 1}{\cos^2 1\left(\operatorname{tg}^2 1-1\right)}=\dfrac{2}{1+\operatorname{tg} 1}.$

Доказать справедливость следующего числового неравенства (198 — 244):

198. $\sin 1+\cos 1>1.$ 199. $\sin 1+\operatorname{tg} 1>2.$

200. $\sin\frac{2+\sqrt{3}}{2}>\frac{\sin 2+\sin\sqrt{3}}{2}.$

201. $\cos\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}>\dfrac{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}.$

202. $\sin\left(\cos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<\cos\left(\sin\frac{\sqrt{5}}{3}\right).$

203. $\sin(\sin\sqrt{2})<\cos(\cos\sqrt{2}).$

204. $\dfrac{1}{\sin\left(1+\dfrac{\pi}{3}\right)}+\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-1\right)}>\dfrac{4\sqrt{3}}{3}.$

205. $\left(1+\dfrac{1}{\sin\sqrt{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\cos\sqrt{2}}\right)>3+2\sqrt{2}.$

206. $\dfrac{\sin(1+\sqrt{2})}{\sin 1\cdot\sin\sqrt{2}}>\dfrac{2}{\sin\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}.$

207. $\cos 1+\cos\sqrt{2}+\cos(\pi-1-\sqrt{2})<\dfrac{3}{2}.$

208. $\sin^2(\pi-\sqrt{2}-\sqrt{3})>\sin 2\sqrt{2}\sin 2\sqrt{3}.$

209. $\sin\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\pi-1-\sqrt{2}}{2}<\dfrac{1}{8}.$

210. $4\sin 3(3+\sqrt{5})+5>4\cos 2(3+\sqrt{5})+5\sin(3+\sqrt{5}).$

211. $-4<\cos 2\sqrt{7}+3\sin\sqrt{7}<\dfrac{17}{8}.$ **212.** $\dfrac{1}{4}<\sin^6 12+\cos^6 12<1.$

213. $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}}+\dfrac{1}{\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{1}{\cos\dfrac{2\pi-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}>6.$

214. $\arcsin\dfrac{2}{5}<\arcsin\dfrac{3}{7}.$ **215.** $\arccos\dfrac{3}{7}<\arccos\dfrac{1}{3}.$

216. $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{9}\le\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}.$ **217.** $\operatorname{arcctg}(3\sqrt{2})<\operatorname{arcctg}4.$

218. $2\operatorname{arcctg}4+\operatorname{arcctg}3>\dfrac{\pi}{4}.$ **219.** $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{5}+\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}>\dfrac{\pi}{4}.$

220. $\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)<\arccos\left(-\dfrac{5}{6}\right).$ **221.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}>\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\dfrac{3}{5}.$

222. $\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)>\dfrac{3}{2}+\arcsin\dfrac{2}{3}.$ **223.** $\operatorname{arcctg}(-3)<\dfrac{8}{3}-\operatorname{arctg}3.$

224. $3\arccos\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)-2\arcsin\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)>\dfrac{2\pi}{3}.$

225. $\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{5}+\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}<\dfrac{3\pi}{4}.$

226. $\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{4}>\arccos\dfrac{4}{5}-\arcsin\dfrac{1}{3}.$

227. $\arccos\dfrac{2}{5}+\arccos\dfrac{12}{13}+\arcsin\dfrac{1}{4}>\dfrac{\pi}{2}.$

228. $12\cos^2\dfrac{1}{10}+7\sin\dfrac{1}{10}<13.$ **229.** $\sin 4+\cos 4>-\sqrt{2}.$

230. $\operatorname{ctg}^3 3+\operatorname{ctg}^2 3-\operatorname{ctg}3-1<0.$

231. $\cos\sqrt{2}+\cos 2\sqrt{2}+\cos 3\sqrt{2}<0.$

232. $2\cos 1+\sin 1>\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}.$ **233.** $\operatorname{tg}^2 7+\operatorname{ctg}^2 7>2.$

234. $2\cos\frac{15}{2}\left(\cos\frac{15}{2}-\sqrt{8}\,\mathrm{tg}\,\frac{15}{2}\right)<5$. **235.** $\dfrac{\cos^2\frac{1}{3}}{\cos^2\frac{1}{6}}>3\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{6}$.

236. $\dfrac{2+\sqrt{2}-4\cos^2\frac{19\pi}{12}}{\sin\frac{19\pi}{12}-\cos\frac{19\pi}{6}}>2$. **237.** $4\sin\frac{3}{8}\sin\frac{3}{4}\sin\frac{9}{8}<\sin\frac{3}{2}$.

238. $2\cos^2\sqrt{3}-\sin\sqrt{3}+\sin 3\sqrt{3}<1$.

239. $6\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}^2\sqrt{2}<2\sin^2\sqrt{2}+3\,\mathrm{tg}^2\sqrt{2}$.

240. $\sqrt{5-2\sin\frac{1}{2}}>6\sin\frac{1}{2}-1$. **241.** $\sqrt{2+4\cos 2}>\frac{1}{2}+3\cos 2$.

242. $\sqrt{\sin 7}+\sqrt{\cos 7}>1$.

243. $\sqrt{3+2\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{3}}{4}-\mathrm{tg}^2\frac{\sqrt{3}}{4}}>\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{3}}{4}$.

244. $\cos 1+\cos 3>\cos 2+\cos 4$.

Упростить (245 — 262):

245. $\sin^2(\pi-9)+\mathrm{tg}^2(\pi-9)\,\mathrm{tg}^2\left(3\frac{\pi}{2}+9\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+9\right)\cos(9-2\pi)$.

246. $1-\sin(1-2\pi)\cos\left(1-\frac{3\pi}{2}\right)-\mathrm{tg}(\pi-1)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)-$
$-2\cos^2(\pi+1)$.

247. $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{7\pi}{18}+\sin^2\frac{11\pi}{18}\cos^2\frac{25\pi}{18}+\sin^2\frac{29\pi}{18}\cos^2\frac{34\pi}{18}$.

248. $\left(\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{9}\right)\left(\sin\frac{13\pi}{9}-\sin 19\frac{\pi}{12}\right)+$
$+\left(\sin\frac{11\pi}{12}+\sin\frac{19\pi}{18}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$.

249. $\dfrac{\sin(4-\pi)\cos(4-2\pi)\sin(2\pi-4)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\right)\mathrm{ctg}(\pi-4)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+4\right)}$.

250. $\dfrac{\sin\left(\pi-\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{1}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{tg}\left(\pi+\frac{1}{4}\right)}$.

251. $\cos(2\sqrt{2}-2\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)\sin(\pi+\sqrt{2})$.

252. $\dfrac{\sin(-5)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+5\right)}+\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+5\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-5\right)$. **253.** $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2 7}{1+\mathrm{tg}^2 7}\cdot\mathrm{tg}\,14$.

254. $2\sin\sqrt{19}\cdot\sin 2\sqrt{19}+2\cos 4\sqrt{19}\cdot\cos 10\sqrt{19}$.

255. $\sin 3\sqrt{21}+2\cdot\sin 5\sqrt{21}\cdot\cos 2\sqrt{21}$.

256. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\cdot\sin 1\cdot\cos 2$. **257.** $\dfrac{1+\operatorname{tg} 2\sqrt{29}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{29}}{\operatorname{ctg}\sqrt{29}+\operatorname{tg}\sqrt{29}}$.

258. $\dfrac{\sin 2\sqrt{7}+\operatorname{tg} 2\sqrt{7}}{\cos 2\sqrt{7}+\operatorname{ctg} 2\sqrt{7}}$. **259.** $\dfrac{\sin^4 1+\cos^4 1-1}{\sin^6 1+\cos^6 1-1}$.

260. $\dfrac{\cos 2\sqrt{5}-\sin 2\sqrt{5}\cdot\operatorname{ctg} 2\sqrt{5}}{\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}}$.

261. $\operatorname{ctg}^2 10-\operatorname{tg}^2 10-8\cos 20\operatorname{ctg} 20$.

262. $\dfrac{\cos 3+\sqrt{3}\sin 3}{\cos 3-\sqrt{3}\sin 3}$.

Найти наибольшее A и наименьшее B такие, что при любом справедливо следующее двойное неравенство (263 — 265):

263. $A\le\sin\beta\cos\beta\cos 2\beta\ \cos 4\beta\le B$.

264. $A\le\sin\beta+2\cos\beta\le B$.

265. $A\le 4\sin 2\beta-3\cos 2\beta\le B$.

266. Доказать, что равенство $(\sin x)^{\alpha}+(\cos x)^{\alpha}=1$ выполняется при любом x в том и только в том случае, когда $\alpha=2$.

Глава VI. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

При рассмотрении количественных отношений явлений реального мира приходится иметь дело с численными значениями различных величин, например времени, пути, скорости, ускорения, объема и т.д. В зависимости от рассматриваемых условий одни из величин имеют постоянные числовые значения, у других — эти значения переменные. Такие величины называют соответственно *постоянными* и *переменными*. Например, при равномерном движении скорость v постоянна, время t и путь S переменные, причем $S = vt$. При свободном падении тела, брошенного без начальной скорости, ускорение силы тяжести g постоянное, время движения t и пройденный путь S переменные, причем $S = \frac{gt^2}{2}$.

Изучение окружающих явлений показывает, что переменные величины изменяются не независимо друг от друга, а изменение численных значений одних из них влечет за собой изменение значений других. Здесь будут рассматриваться лишь *пары переменных*, значения одной (*зависимой*) из которых изменяются в зависимости от значений другой (*независимой*). При этом в рассматриваемую зависимость двух переменных величин кроме этих переменных могут входить и некоторые постоянные величины, которые обычно называют *константами*. В приведенных выше примерах естественно считать t независимой переменной, S — зависимой переменной, а $\frac{g}{2}$ и v — константами. Приведем другие примеры таких пар переменных величин: площадь круга $S = \pi R^2$ (R — радиус, π — константа), где S меняется в зависимости от R; закон Бойля — Мариотта: $p = \frac{c}{V}$ (V —

объем некоторого количества газа, p — давление этого газа, c — константа), где p меняется в зависимости от V.

Независимая переменная может принимать не любые числовые значения, а лишь значения, продиктованные условиями рассматриваемой задачи. Например, при свободном падении тела, брошенного без начальной скорости с высоты H, время движения t можно брать только из промежутка $\left[0, \sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$.

Подчеркнем, что в приведенных примерах каждому значению независимой переменной соответствует *только одно* значение зависимой переменной. Ниже будет рассматриваться только такая зависимость пар переменных.

§ 1. Определения и примеры

Понятие функции. Пусть дано некоторое множество чисел X и пусть указано некоторое правило (закон), обозначаемое буквой f, по которому *каждому значению величины x* (независимой переменной) из множества X *ставится в соответствие единственное значение величины y (зависимой переменной), обозначаемое $f(x)$*. Тогда принято говорить, что *дана функция $y = f(x)$ с областью определения X*, или что *дана функция $y = f(x)$, определенная на множестве X*. Множество Y — множество всех значений, которые принимает при этом переменная, называется *областью изменения функции $y = f(x)$*.

В этой книге в основном будут рассматриваться такие функции, для которых закон, устанавливающий соответствия, задается посредством формул. Такой способ задания функции называется аналитическим.

Примеры функций.

1. Пусть n — некоторое фиксированное натуральное число, тогда каждому действительному числу a можно поставить в соответствие (см. гл. IV) одно действительное число a^n. Значит, можно сказать, что указан закон, по которому каждому значению x из множества всех действительных чисел ставится в соответствие одно числовой значение x^n. Другими словами, задана функция $y = x^n$ с

областью определения — множеством всех действительных чисел.

2. Пусть ($-n$) — некоторое фиксированное целое отрицательное число, тогда каждому отличному от нуля действительному числу a можно поставить в соответствие (см. гл. IV) одно действительное число a^{-n}. Значит, этим соответствием задана функция $y = x^{-n}$ с областью определения — множеством всех отличных от нуля действительных чисел.

3. Пусть α — некоторое фиксированное положительное нецелое число, тогда каждому неотрицательному числу a можно поставить в соответствие (см. гл. IV) одно действительное число a^{α}. Значит, этим соответствием задана функция $y = x^{\alpha}$ с областью определения — множеством неотрицательных чисел.

4. Пусть ($-\alpha$) — некоторое фиксированное отрицательное нецелое число, тогда каждому положительному числу a можно поставить в соответствие (см. гл. IV) одно число $a^{-\alpha}$. Значит, этим соответствием задана функция $y = x^{-\alpha}$ с областью определения — множеством всех положительных чисел.

5. Пусть a — некоторое фиксированное положительное, не равное единице число, тогда каждому действительному числу b можно поставить в соответствие (см. гл. IV) одно число a^{b}. Значит, этим соответствием задана функция $y = a^{x}$ с областью определения — множеством всех действительных чисел.

6. Пусть a — некоторое фиксированное положительное, не равное единице число, тогда каждому положительному числу b можно поставить в соответствие (см. гл. IV) одно число $\log_a b$. Значит, этим соответствием задана функция $y = \log_a x$ с областью определения — множеством всех положительных чисел.

7. Каждому действительному числу α (как радианной мере угла α) можно поставить в соответствие (см. гл. V) одно число $\sin \alpha$. Значит, этим соответствием задана функция $y = \sin x$ с областью определения — множеством всех действительных чисел.

8. Каждому действительному числу α (как радианной мере угла α) можно поставить в соответствие (см. гл. V) одно число $\cos\alpha$. Значит, этим соответствием задана функция $y = \cos x$ с областью определения — множеством всех действительных чисел.

9. Каждому действительному числу α (как радианной мере угла α), такому, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число, можно поставить в соответствие (см. гл. V) одно число $\operatorname{tg}\alpha$. Значит, этим соответствием задана функция $y = \operatorname{tg} x$ с областью определения — множеством всех действительных чисел, кроме чисел $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число.

10. Каждому действительному числу α (как радианной мере угла α), кроме $\alpha = \pi m$, где m — любое целое число, можно поставить в соответствие (см. гл. V) одно число $\operatorname{ctg}\alpha$. Значит, этим соответствием задана функция $y = \operatorname{ctg} x$ с областью определения — множеством всех действительных чисел, кроме чисел $\alpha = \pi m$, где m — любое целое число.

11. Каждому действительному числу a из отрезка $-1 \leq a \leq 1$ можно поставить в соответствие (см. гл. V) одно единственное число $\arcsin a$. Значит, этим соответствием задана функция $y = \arcsin x$ с областью определения — множеством всех действительных чисел, принадлежащих отрезку $[-1; 1]$.

12. Каждому действительному числу a из отрезка $-1 \leq a \leq 1$ можно поставить в соответствие (см. гл. V) одно единственное число $\arccos a$. Значит, этим соответствием задана функция $y = \arccos x$ с областью определения — множеством всех действительных чисел, принадлежащих отрезку $[-1; 1]$.

13. Каждому действительному числу a можно поставить в соответствие (см. гл. V) одно единственное число $\operatorname{arctg} a$. Значит, этим соответствием задана функция $y = \operatorname{arctg} x$ с областью определения — множеством всех действительных чисел.

14. Каждому действительному числу a можно поставить в соответствие (см. гл. V) одно единственное число $\operatorname{arcctg} a$.

Значит, этим соответствием задана функция $y = \operatorname{arcctg} x$ с областью определения — множеством всех действительных чисел.

Замечание. Функции, рассмотренные в примерах 1 — 14, называются *основными элементарными функциями.*

15. Рассмотрим функцию, определенную для любого действительного x по правилу: $y = 1$, если x — рациональное число; $y = 0$, если x — иррациональное число. Эта функция называется функцией Дирихле. Коротко эту функцию записывают так:

$$y = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

16. Рассмотрим функцию, определенную для любого действительного x по правилу: $y = 1$, если x — положительное число; $y = -1$, если x — отрицательное число; $y = 0$, если $x = 0$. Эта функция называется знаком x и обозначается так: $y = \operatorname{sign} x$. Определение этой функции коротко записывают так:

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ \ \ \, 0, \text{ если } x = 0, \\ \ \ \, 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

17. Рассмотрим функцию, определенную для любого действительного x по правилу: $y = n$, если x — положительное число, причем $x = n + \alpha$, где n — натуральное число и $0 \le \alpha < 1$; $y = -m$, если x — отрицательное число, причем $x = -m + \beta$, где m — натуральное число и $0 \le \beta < 1$; $y = 0$, если $0 \le x < 1$. Эта функция называется целой частью x и обозначается так: $y = [x]$. Коротко функцию $y = [x]$ можно определить так: $[x]$ — есть наибольшее целое число, которое меньше или равно x.

18. Если каждому действительному числу поставлено в соответствие одно и то же действительное число c, то говорят, что задана функция $y = c$ с областью определения — множеством всех действительных чисел.

Область существования и область изменения функции. Первый вопрос, на которых надо ответить при исследовании функции, — это вопрос об области определения и области изменения этой функции.

Из определения функции вытекает, что функция $y = f(x)$ должна задаваться вместе с ее областью определения X. При этом подчеркнем, что область определения функции может задаваться либо условиями решаемой задачи, либо физическим смыслом изучаемого явления, либо математическими соглашениями.

Однако часто, задавая функцию $y = f(x)$ аналитически, не указывают явно ее область определения. В таких случаях принято рассматривать функцию в ее естественной области определения.

Естественной областью определения, или *областью существования* функции $y = f(x)$, заданной аналитически, называют совокупность всех действительных значений независимой переменной x, для каждого из которых функция принимает действительные значения. Итак, область существования функции определяется самим законом (формулой), задающим функцию, а область определения ее задается условиями или смыслом решаемой задачи, т.е. областью определения функции может быть любая часть области существования функции или они могут полностью совпадать. Например, для функции $y = \frac{gx^2}{2}$ область существования — $(-\infty; +\infty)$, а область ее определения при падении тела с высоты H есть отрезок $\left[0, \sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$.

Таким образом, всегда, когда говорят, что дана функция $y = f(x)$, считают, что уже дана область ее определения X — она либо указана явно, либо есть область существования этой функции (и тогда ее надо предварительно найти).

Что касается области изменения функции $y = f(x)$, то она вычисляется по уже заданной области определения.

Примеры.

1. Пусть дана функция $y = \sqrt{\sin x - 3}$. Область существования этой функции — пустое множество, т.е. $X = \varnothing$, сле-

довательно, и область изменения — пустое множество, т.е. $Y = \varnothing$.

2. Пусть дана функция $y = \sqrt{\log_2 \sin x}$. Область существования этой функции — множество всех чисел $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — любое целое число, т.е. $X = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in Z\right\}$. Легко видеть, что область изменения состоит из одного числа нуль, т.е. $Y = \{0\}$.

3. Пусть дана функция $y = \sqrt{1 - x^2}$. Область существования этой функции есть отрезок $[-1; 1]$, т.е. $X = [-1; 1]$. Легко видеть, что область изменения есть отрезок $[0; 1]$, т.е. $Y = [0; 1]$.

4. Пусть дана функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Область существования этой функции есть интервал $(-1; 1)$, т.е. $X = (-1; 1)$. Легко видеть, что область изменения есть промежуток $[1; +\infty)$, т.е. $Y = [1; +\infty)$.

5. Пусть дана функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ с областью определения $X = \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, тогда легко видеть, что область изменения есть отрезок $[1; 2]$, т.е. $Y = [1; 2]$.

Ограниченные функции. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *ограниченной снизу*, если существует число A такое, что $A \le f(x)$ для любого $x \in X$.

Пример. Функция $y = a^x$ ограниченная снизу на всей области существования, так как (см. гл. IV) $0 < a^x$ для любого действительного x.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *ограниченной сверху*, если существует число B такое, что $f(x) \le B$ для любого $x \in X$.

Пример. Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ ограничена сверху на всей области существования, так как $\sqrt{1 - x^2} \le 1$ для любого x такого, что $x \in [-1; 1]$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *ограниченной*, если существует число $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$.

Пример. Функция $y = \sin x$ ограничена на всей области существования, так как $|\sin x| \leq 1$ для любого действительного x.

Можно доказать, что функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, ограничена на этом множестве тогда и только тогда, когда она одновременно ограничена и снизу и сверху на этом множестве.

Пример. Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ ограничена на области существования $X = [-1; 1]$, так как на этом множестве она снизу ограничена нулем, а сверху — единицей.

Четность и нечетность функций. Говорят, что множество X *симметрично относительно начала координат*, если множество X таково, что $(-x) \in X$ для любого $x \in X$.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если область ее определения есть множество, симметричное относительно начала координат, и если $f(x) = f(-x)$ при любом $x \in X$.

Примеры четных функций:

$$y = x^2,\ \ y = \cos x,\ \ y = \sqrt{1 - x^2},\ \ y = \frac{1}{1 + x^2},\ \ y = 8^{x^2}.$$

О любой четной функции $y = f(x)$ с областью определения X говорят, что она *симметрична относительно оси ординат*, так как для любого $x \in X$ точки плоскости $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если область ее определения есть множество, симметричное относительно начала координат, и если $f(-x) = -f(x)$ при любом $x \in X$.

Примеры нечетных функций:

$$y = x,\ \ y = \sin x,\ \ y = \frac{1}{x},\ \ y = x^3,\ \ y = \operatorname{arctg} x.$$

О любой нечетной функции $y = f(x)$ с областью определения X говорят, что она *симметрична относительно начала координат*, так как для любого $x \in X$ точки плоскости $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно начала координат.

Наряду с четными и нечетными функциями есть функции, не являющиеся ни теми, ни другими, например, такими являются функции $y = 2^x$, $y = \lg x$, $y = \arccos x$, $y = \sqrt{x}$.

Теорема 1. *Всякую функцию, определенную на множестве X, симметричном относительно начала координат, можно представить в виде суммы функций, каждая из которых определена на том же множестве X и одна из которых четная, а другая нечетная.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ имеет область определения X, симметричную относительно начала координат. Покажем, что существуют функции $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, каждая из которых определена на том же множестве X, и они такие, что $y = \varphi(x) + \psi(x) = f(x)$, где $y = \varphi(x)$ — четная, а $y = \psi(x)$ — нечетная функция. Положим

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Ясно, что каждая из этих функций определена на множестве X и что $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$ и $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Теорема доказана.

Пример. Функцию $y = 2^x$ можно представить в виде суммы двух функций $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, и $y = \psi(x)$, где $\psi(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$, причем функция $y = \varphi(x)$ — четная, а функция $y = \psi(x)$ — нечетная.

Замечание. Наряду с понятием четной функции, т.е. функции, симметричной относительно оси ординат, можно ввести более общее понятие функции, симметричной относительно вертикальной прямой, проходящей через точку $(a, 0)$. Говорят, что *множество X симметрично относительно точки* $(a, 0)$, если множество X таково, что точка $(2a - x) \in X$ для любого $x \in X$.

Функция $y = f(x)$ называется *симметричной относительно вертикальной прямой, проходящей через точку с координатами* $(a, 0)$, если область ее определения есть множество, симметричное относительно точки $(a, 0)$ и при любом x из области определения $f(2a - x) = f(x)$.

Пример. Функция $y = \sin x$ симметрична относительно вертикальной прямой, проходящей через точку $(\pi/2,\ 0)$. Действительно, областью определения этой функции является вся числовая прямая, следовательно, это множество, симметричное относительно любой точки, в том числе и относительно точки $\pi/2$, а равенство $\sin[2(\pi/2) - x] = \sin x$ для любого действительного x очевидно.

Возрастание и убывание функций. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ***возрастающей на этом множестве***, если для любой пары чисел x_1 и x_2 этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Примеры. 1. Функция $y = x$ возрастает на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$.

2. Функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0;\ \infty)$.

3. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $[-\pi/2,\ \pi/2]$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ***убывающей на этом множестве***, если для любой пары чисел x_1 и x_2 этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$.

Примеры. 1. Функция $y = (1/2)^x$ убывает на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$.

2. Функция $y = \sin x$ убывает на отрезке $[\pi/2;\ 3\pi/2]$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ***неубывающей на этом множестве***, если для любой пары чисел x_1 и x_2 этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \le f(x_2)$.

Пример.

Функция $y = \sqrt{x + |x|}$ является неубывающей на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ***невозрастающей на этом множестве***, если для любой пары чисел x_1 и x_2 этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Пример.

Функция $y = \begin{cases} x^2, & \text{для } x < 0, \\ 0, & \text{для } x \ge 0 \end{cases}$ является невозрастающей на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$.

Функции возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие называются *монотонными функциями.* Функции возрастающие и убывающие называются *строго монотонными функциями.*

Периодичность функций. Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T\neq 0$ такое, что для любого x из области определения функции $y=f(x)$ числа $(x+T)$ и $(x-T)$ также входят в область определения и для любого x из области определения $f(x+T)=f(x)$.

Замечание. Для периодической функции имеет место равенство $f(x-T)=f(x)$. Действительно, функция $y=f(x)$ в точке $(x-T)$ определена и $f(x)=f[(x-T)+T]=f(x-T)$.

Теорема. 2. *Если число T есть период функции $y=f(x)$, то число $Q=mT$, где m — любое фиксированное отличное от нуля целое число, будет периодом этой функции.*

Доказательство. Докажем, что для любого x из области определения функции $y=f(x)$ и любого натурального n:

а) точки $(x+nT)$ и $(x-nT)$ принадлежат области определения функции $y=f(x)$;

б) $f(x)=f(x+nT)$ и $f(x)=f(x-nT)$.

Пусть $n=1$, тогда согласно определению и замечанию:

а) точки $(x+T)$ и $(x-T)$ принадлежат области определения функции $y=f(x)$;

б) $f(x)=f(x+T)$ и $f(x)=f(x-T)$.

Предположим, что для $n=k$ справедливо утверждение а). Докажем справедливость утверждения для $n=k+1$. Действительно, по предположению точки $(x+kT)$ и $(x-kT)$ принадлежат области определения функции $y=f(x)$ и T есть ее период. Следовательно, точки $[(x+kT)+T]$ и $[(x-kT)-T]$, т.е. точки $[x+(k+1)T]$ и $[x-(k+1)T]$, принадлежат области ее определения.

Итак, для любого x из области определения функции $y=f(x)$ при любом целом отличном от нуля m точка $(x+mT)$ принадлежит области ее определения.

Предположим, что утверждение б) справедливо для любого $n=k$, т.е. $f(x)=f(+kT)$ и $f(x)=f(x-kT)$. Докажем справедливость утверждения б) для $n=k+1$. Действительно, так как T является периодом функции $y = f(x)$, то для точки $(x + kT)$ имеем $f[(x + kT) + T] = f(x + kT)$, но по предположению $f(x) = f(x + kT)$, следовательно, $f(x) = f[x + (k + 1)T]$. Аналогично для точки $(x - kT)$ доказывается, что $f(x) = f[x - (k + 1)T]$, т.е. для любого целого отличного от нуля m утверждение б) доказано.

Итак, теорема 2 доказана.

Примеры. 1. Функция $y = \sin x$ имеет периодом число $T = 2\pi$, так как для любого x числа $(x + 2\pi)$ и $(x - 2\pi)$ входят в область определения этой функции и $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

2. Функция $y = x - [x]$ имеет период $T = 1$, так как она определена для любого x и $(x + 1) - [x + 1] = x - [x]$.

3. Функция, определенная следующим образом:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — любое рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — любое иррациональное число.} \end{cases}$$

имеет периодом любое рациональное число.

4. Функция $y = \sin\sqrt{x}$ не является периодической, так как, например, для числа $x = 0$ число $x - T$ (если $T > 0$) или число $x + T$ (если $T < 0$) не принадлежит области существования этой функции.

Число T называется *главным периодом*, если оно положительно и является наименьшим среди всех положительных периодов.

Заметим, что функция, приведенная в примере 3, не имеет главного периода.

Наибольшее и наименьшее значение функций. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X. Если существует такое $x_0 \in X$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, принимает *наименьшее значение* $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

Если существует такое $x_0 \in X$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, принимает *наибольшее значение* $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

Примеры. 1. Функция $y = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ принимает наибольшее значение $y = 1$ при $x = \pi/2$ и наименьшее значение $y = -1$ при $x = 3\pi/2$.

2. Функция $y = x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$ принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$, но нет такого x из области существования функции, где она приминает наибольшее значение.

3. Функция $y = 2^x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$ не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

4. Функция $y = 2^x$ на отрезке $[0; 1]$ принимает наименьшее значение $y = 1$ при $x = 0$ и наибольшее значение $y = 2$ при $x = 1$.

График функции. Введем на плоскости прямоугольную систему координат xOy и рассмотрим функцию $y = f(x)$. Придавая x последовательно значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, получим соответствующие значения $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Отметим на плоскости точки с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ $\ldots, (x_n, y_n), \ldots$.

Графиком функции $y = f(x)$, $x \in M$ называется множество точек на плоскости, удовлетворяющее следующим условиям:

а) всякая точка с координатами (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in M$ принадлежит этому множеству;

б) всякая точка, принадлежащая этому множеству точек, имеет координаты (x_1, y_1) такие, что $y_1 = f(x_1)$, $x_1 \in M$.

Другими словами, *график функции* $y = f(x)$, $x \in M$ *— это множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию* $y = f(x)$, $x \in M$ *и не содержащее других точек.*

Например, графиком функции $y = \sqrt{\log_2 \sin x}$ будет множество точек плоскости $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0\right)$, где k — любое целое число, и только эти точки.

Исследование функции. Если для данной функции $y = f(x)$ изучены все перечисленные выше свойства, то говорят, что проведено *исследование функции* $y = f(x)$.

Итак, при исследовании функции необходимо ответить на следующие вопросы:

а) Какова область существования функции?

б) Какова область изменения функции?

в) Ограниченная ли это функция?

г) Принимает ли функция наибольшее и наименьшее значения?

д) Периодическая ли она?

е) Является ли эта функция четной или нечетной, или ни той и ни другой?

ж) Есть ли у нее промежутки, где она монотонна?

з) Есть ли точки пересечения графика с осями координат?

и) Какой график этой функции?

Замечание. Наглядность графика является незаменимым вспомогательным средством исследования функции, но он только иллюстрирует свойства функции, а не доказывает их.

§ 2. Основные элементарные функции

В этом параграфе будет проведено исследование всех основных элементарных функций.

Линейная функция $y = x$. Зависимость $y = x$ называется *прямой пропорциональной зависимостью*. Легко проверяются следующие свойства этой функции:

а) область существования $(-\infty; +\infty)$;

б) область изменения $(-\infty; +\infty)$;

в) функция не ограничена ни сверху, ни снизу;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

д) функция не периодическая;

е) функция нечетная;

ж) функция возрастает на всем промежутке $(-\infty; +\infty)$;

з) точка $(0, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

Теорема 1. *График функции $y = x$ есть прямая, проходящая через начало координат и являющаяся биссектрисой первого и третьего координатных углов* (рис. 95).

Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ такова, что ее координаты удовлетворяют условию $y_1 = x_1$. Если $x_1 = y_1 =$

$= 0$, то точка M_1 совпадает в началом координат. Если $x_1 = y_1 \neq 0$, то числа x_1 и y_1 либо оба положительны, либо оба отрицательны, т.е. точка M_1 лежит либо в первом, либо в третьем координатном угле. Поскольку из условий $y_1 = x_1$ следует, что $|y_1| = |x_1|$, то точка M_1 равноудалена от осей координат. Следовательно, она лежит либо на биссектрисе первого координатного угла (если ее координаты положительны), либо на биссектрисе третьего координатного угла (если ее координаты отрицательны). Итак, любая точка $M_1(x_1, y_1)$, где $y_1 = x_1$, либо совпадает с началом координат, либо лежит на одной из биссектрис первого или третьего координатных углов.

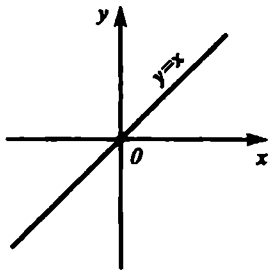


Рис. 95.

Очевидно, что координаты начала координат удовлетворяют условию $0 = 0$. Если точка $M_2(x_2, y_2)$ лежит на одной из биссектрис либо первого, либо третьего координатных углов, то $|x_2| = |y_2|$ (расстояние до осей координат равны). Так как числа x_2 и y_2 или оба положительны (если точка M_2 лежит в первом координатном угле) или оба отрицательны (если точка M_2 лежит в третьем координатном угле), то из условий $|y_2| = |x_2|$ следует $y_2 = x_2$, т.е. точка $M_2(x_2, y_2)$ такова, что $y_2 = x_2$. Итак, начало координат и любая точка, лежащая на одной из биссектрис либо первого, либо третьего координатных углов, имеет координаты (x_3, y_3) такие, что $y_3 = x_3$.

По определению графика функции прямая, проходящая через начало координат и являющаяся биссектрисой первого и третьего координатных углов, есть график функции $y = x$ (см. рис. 95). Теорема доказана.

Гипербола $y = \frac{1}{x}$. Зависимость $y = \frac{1}{x}$ называется *обратной пропорциональной зависимостью*. Легко проверяются следующие свойства этой функции:

а) область существования $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

б) область изменения $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

в) функция не является ограниченной на всей области существования, но ограниченна снизу ($y > 0$) на промежутке $(0, +\infty)$ и ограничена сверху ($y < 0$) на промежутке $(-\infty, 0)$;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

д) функция не является периодической;

е) функция нечетная;

ж) функция не является монотонной на всей области существования, но убывает на промежутке $(0, +\infty)$, кроме того, она убывает на промежутке $(-\infty, 0)$;

з) точек пересечения с осями нет.

Графиком функции $y = \frac{1}{x}$ является линия, называемая *гиперболой* (рис. 96).

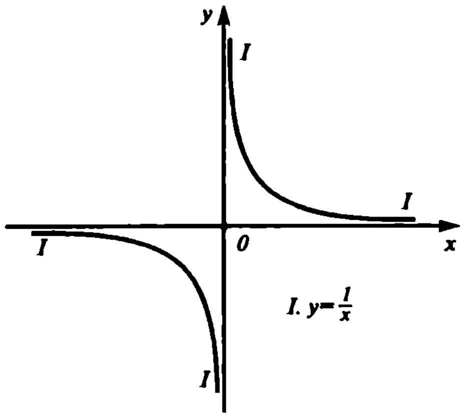


Рис. 96.

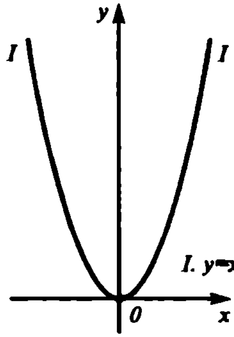


Рис. 97.

Теорема 2. *График нечетной функции симметричен относительно начала координат.*

Доказательство. Пусть дана нечетная функция $y = f(x)$ и пусть точка (x_0, y_0) лежит на ее графике. Тогда $y_0 = f(x_0)$ и в силу нечетности функции $-y_0 = f(-x_0)$, т.е. точка $(-x_0, -y_0)$, симметрична точке (x_0, y_0) относительно начала координат, тоже лежит на графике. Теорема доказана.

Замечание. Для построения графика нечетной функции достаточно построить его для $x \geq 0$. Для $x < 0$ он получается симметричным отображением построенной части графика относительно начала координат.

Парабола $y = x^2$. Зависимость $y = x^2$ называется *квадратичной зависимостью.* Легко проверяются следующие свойства этой функции:

а) область существования: $(-\infty, +\infty)$;

б) область изменения: $[0, +\infty)$;

в) функция ограничена снизу: $y \geq 0$;

г) функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$;

д) функция не является периодической;

е) функция четная;

ж) функция не является монотонной на всей области существования, но убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и возрастает на промежутке $[0, +\infty)$;

з) точка $(0, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

Графиком функции $y = x^2$ является линия, называемая *параболой* (рис. 97).

Теорема 3. *График четной функции симметричен относительно оси Ох.*

Доказательство. Пусть точка (x_0, y_0) лежит на графике четной функции $y = f(x)$, т.е. пусть $y_0 = f(x_0)$. В силу четности функции $y_0 = f(-x_0)$, т.е. точка $(-x_0, y_0)$, симметричная точке (x_0, y_0) относительно оси Oy, тоже лежит на графике функции $y = f(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Для построения графика четной функции достаточно построить его для $x \geq 0$. Для $x < 0$ он получается симметричным отображением построенной части графика относительно оси Oy.

Степенные функции $y = x^{\alpha}$. Рассмотренные выше функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ являются частными случаями этой функции.

Рассмотрим другие случаи:

1. $y = x^{2m}$ (m — некоторое фиксированное натуральное число).

Тогда

а) область существования: $(-\infty; +\infty)$;

б) область изменения: $[0, +\infty)$;

в) функция ограничена снизу: $y \geq 0$;

г) функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$;

д) функция не является периодической;

е) функция четная;

ж) функция не является монотонной на всей области существования, но убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и возрастает на промежутке $[0, +\infty)$;

з) точка $(0, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

Графики функций $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ изображены на рис. 98.

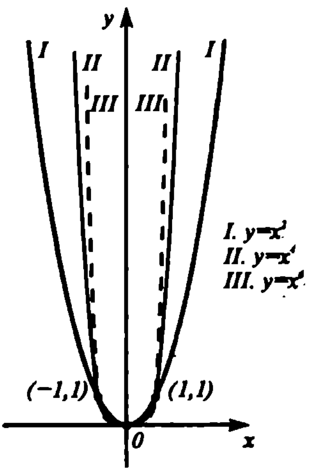


Рис. 98.

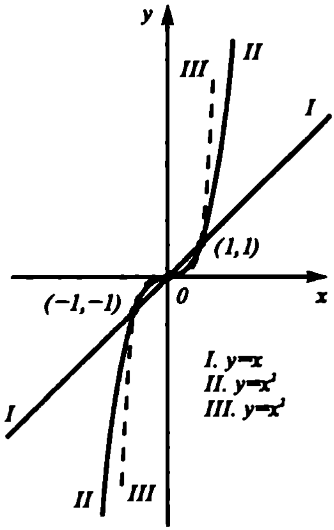


Рис. 99.

2. $y = x^{2m-1}$ (m — некоторое фиксированное натуральное число).

Тогда

а) область существования: $(-\infty; +\infty)$;

б) область изменения: $(-\infty; +\infty)$;

в) функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

д) функция не является периодической;

е) функция нечетная;

ж) функция возрастает на всей области существования;

з) точка (0, 0) — единственная точка пересечения с осями координат.

Графики функций $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ изображены на рис. 99.

3. $y = x^{-2m}$ (m — некоторое фиксированное натуральное число).

Тогда

а) область существования: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

б) область изменения: $(0, +\infty)$;

в) функция ограничена снизу: $y > 0$;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

д) функция не является периодической;

е) функция четная;

ж) функция не является монотонной на всей области существования, но возрастает на промежутке $(-\infty, 0)$ и убывает на промежутке $(0, +\infty)$;

з) точек пересечения с осями нет.

Графики функций $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$ изображены на рис. 100.

4. $y = x^{-2m+1}$ (m — некоторое фиксированное натуральное число).

Тогда

а) область существования: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

б) область изменения: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

в) функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

д) функция не является периодической;

е) функция нечетная;

ж) функция не является монотонной на всей области существования, но убывает на промежутке $(-\infty, 0)$, кроме того, она убывает на промежутке $(0, +\infty)$;

з) точек пересечения с осями координат нет.

Графики функций $y = x^{-1}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$ изображены на рис. 101.

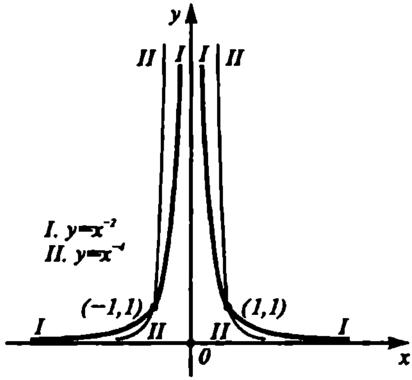


Рис. 100.

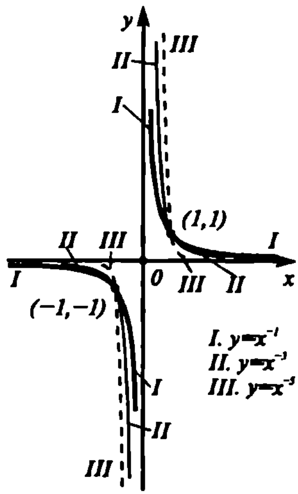


Рис. 101.

5. $y = x^{\alpha}$ (α — фиксированное положительное нецелое число).

Тогда

а) область существования: $[0, +\infty)$;

б) область изменения: $[0, +\infty)$;

в) функция ограничена снизу: $y \geq 0$;

г) функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$;

д) функция не является периодической;

е) функция не является ни четной, ни нечетной;

ж) функция возрастает на всей области существования;

з) точка $(0, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

Графики некоторых функций изображены на рис. 102.

6. $y = x^{-\alpha}$ (α — фиксированное положительное нецелое число).

Тогда

а) область существования: $(0, +\infty)$;

б) область изменения: $(0, +\infty)$;

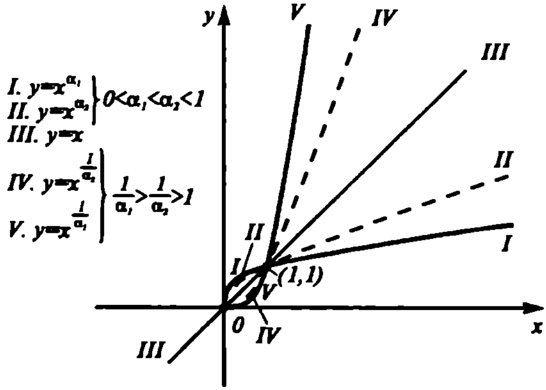


Рис. 102.

в) функция ограничена снизу: $y > 0$;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

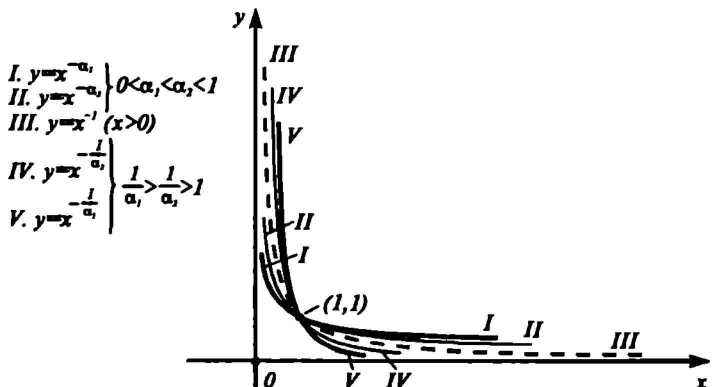


Рис. 103.

д) функция не является периодической;

е) функция не является ни четной, ни нечетной;

ж) функция убывает на всей области существования;

з) точек пересечения с осями координат нет.

Графики некоторых функций изображены на рис. 103.

Показательная функция $y = a^x$. Функция $y = a^x$, где a — фиксированное число такое, что $a > 0$ и $a \neq 1$, называется ***показательной функцией***. Показательная функция обладает следующими свойствами:

а) область существования: $(-\infty; +\infty)$;

б) область изменения: $(0, +\infty)$;

в) функция ограничена снизу: $y > 0$;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

д) функция не является периодической;

е) функция не является ни четной, ни нечетной;

ж) если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастает на всей области существования; если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ убывает на всей области существования;

з) точка (0, 0) — единственная точка пересечения с осями координат.

Графики некоторых показательных функций изображены при $a > 1$ на рис. 104, при $0 < a < 1$ на рис. 105.

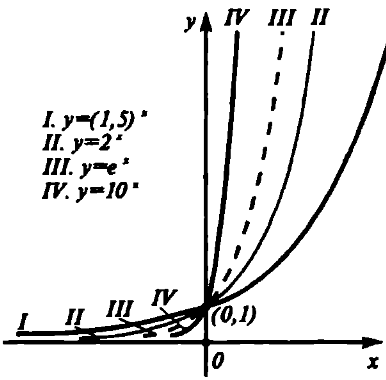


Рис. 104.

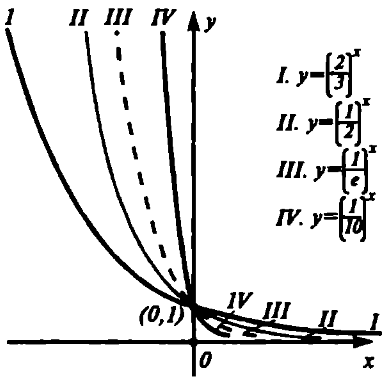


Рис. 105.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$. Функция $y = \log_a x$, где a — фиксированное число такое, что $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *логарифмической* функцией. Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

а) область существования: $(0, +\infty)$;

б) область изменения: $(-\infty; +\infty)$;

в) функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений;

д) функция не является периодической;

е) функция не является ни четной, ни нечетной;

ж) если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ возрастает на всей области существования; если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ убывает на всей области существования;

з) точка $(1, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

Графики некоторых логарифмических функций изображены при $a > 1$ на рис. 106, при $0 < a < 1$ на рис. 107.

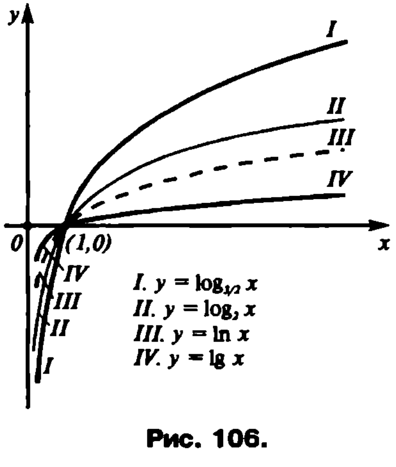


Рис. 106.

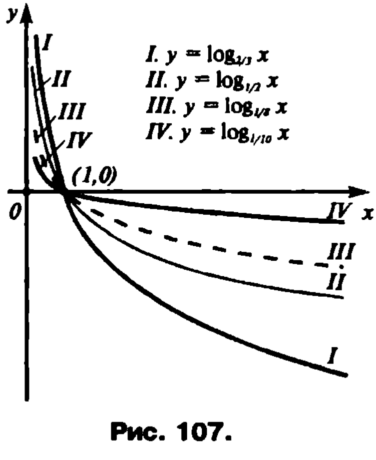


Рис. 107.

Основные тригонометрические функции. Прежде чем переходить к исследованию тригонометрических функций, докажем теорему.

Теорема 4. *Для построения графика функции, имеющей главный период T, достаточно построить его на отрезке длины T, а затем продлить периодически.*

Доказательство вытекает из определения графика функции и определения периодичности функции. Так, если

$f(x + nT) = f(x)$, то вместе с точкой (x_0, y_0) графику принадлежат точки $(x_0 + Tn, y_0)$ при всех целых n.

Синусоида $y = \sin x$. Используя свойства синуса угла, получим следующие свойства функции $y = \sin x$:

а) область существования: $(-\infty; +\infty)$;

б) область изменения: $[-1; 1]$;

в) функция ограничена и сверху и снизу;

г) функция принимает наименьшее значение $y = -1$ при каждом $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — любое целое число, и наибольшее значение $y = 1$ при каждом $x_m = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, где m — любое целое число;

д) функция периодическая, главный период 2π;

е) функция нечетная;

ж) функция не является монотонной на всей области существования, но функция возрастает на каждом отрезке $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где k — любое целое число, и функция убывает на каждом отрезке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где k — любое целое число.

Покажем, например, что на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает, т.е. что для любой пары чисел x_1 и x_2 такой, что $-\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$, будет справедливо неравенство $\sin x_1 < \sin x_2$.

Для любой пары чисел x_1 и x_2 по формуле разности синусов

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (1)$$

Докажем, что правая часть равенства (1) отрицательна, если $-\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$. Условие $x_2 \le \frac{\pi}{2}$ равносильно условию $-\frac{\pi}{2} \le -x_2$. Сложив это неравенство с неравенством $-\frac{\pi}{2} \le x_1$, получим $-\pi \le x_1 - x_2$. Учитывая, что неравенство $x_1 < x_2$ равносильно неравенству $x_1 - x_2 < 0$, имеем $-\pi \le x_1 - x_2 <$

< 0 или $-\frac{\pi}{2} \le \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$. Следовательно, $\sin \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$. Складывая неравенства $-\frac{\pi}{2} \le x_1 < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < x_2 \le \frac{\pi}{2}$, получаем $-\pi < x_1 + x_2 < \pi$ или $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$.

Итак, правая часть равенства (1) меньше нуля, следовательно, $\sin x_1 < \sin x_2$.

Покажем, что на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ убывает, т.е. что для любой пары x_1 и x_2 такой, что $\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{3\pi}{2}$, справедливо неравенство $\sin x_1 > \sin x_2$. Прибавляя $(-\pi)$ к неравенствам $\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{3\pi}{2}$, имеем $-\frac{\pi}{2} \le x_1 - \pi < x_2 - \pi \le \frac{\pi}{2}$. В силу того что на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ монотонно возрастает, то для $(x_1 - \pi)$ и $(x_2 - \pi)$ имеем $\sin (x_1 - \pi) < \sin (x_2 - \pi)$. Далее справедлива цепочка равносильных неравенств:

$$\sin (x_1 - \pi) < \sin (x_2 - \pi) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin [-(\pi - x_1)] < \sin [-(\pi - x_2)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\sin (\pi - x_1) < -\sin (\pi - x_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin (\pi - x_1) > \sin (\pi - x_2) \Leftrightarrow \sin x_1 < \sin x_2.$$

Значит справедливо неравенство $\sin x_1 < \sin x_2$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что функция $y = \sin x$ является возрастающей на каждом отрезке $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где k — любое целое число, и убывающей на каждом отрезке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где k — любое целое число;

з) Точки пересечения с осями координат — точки $(\pi k, 0)$, где k — любое целое число.

Учитывая периодичность, можно построить график функции $y = \sin x$, называемой *синусоидой* (рис. 108).

Косинусоида $y = \cos x$. Используя свойства косинуса угла, получим следующие свойства функции $y = \cos x$:

а) область существования: $(-\infty; +\infty)$;

б) область изменения: $[-1; 1]$;

в) функция ограничена и сверху и снизу;

г) функция принимает наименьшее значение $y = -1$ при каждом $x_k = \pi + 2k$, где k — любое целое число, и наибольшее значение $y = 1$ при каждом $x_m = 2\pi m$, где m — любое целое число;

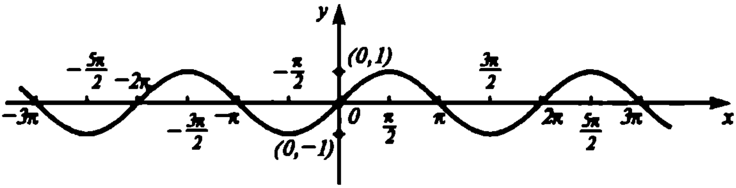


Рис. 108.

д) функция периодическая, главный период 2π;

е) функция четная;

ж) функция не является монотонной на всей области существования, но функция возрастает на каждом отрезке $[2\pi k - \pi,\ 2\pi k]$, где k — любое целое число, и функция убывает на каждом отрезке $[2\pi k,\ 2k + \pi]$, где k — любое целое число;

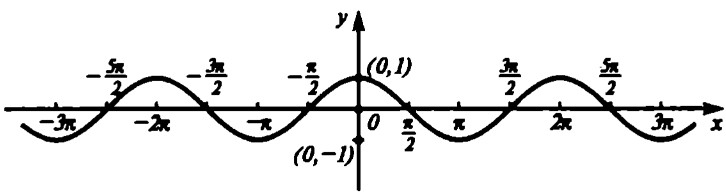


Рис. 109.

з) Точки пересечения с осью Oy — $(0, 1)$; с осью Ox точек пересечения бесконечно много, каждая из точек $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, 0\right)$, где k — любое целое число, есть точка пересечения с осью Ox.

Учитывая периодичность, можно построить график функции $y = \cos x$, называемой *косинусоидой* (рис. 109).

Тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$. Используя свойства тангенса угла, получим следующие свойства функции $y = \operatorname{tg} x$:

а) область существования: любое x, кроме $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число;

б) область изменения: $(-\infty, +\infty)$;

в) функция не является ограниченной;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

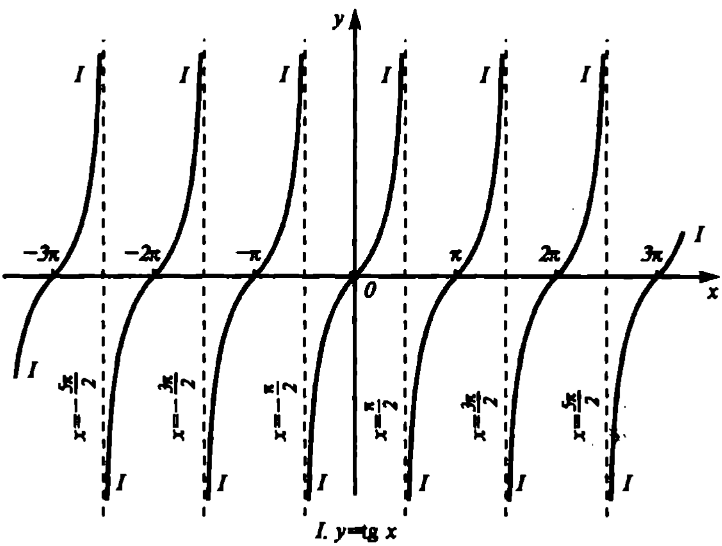
д) функция периодическая, главный период π;

е) функция нечетная;

ж) функция не является монотонной на всей области существования, но функция возрастает на каждом из следующих интервалов $\left(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2}\right)$, где k — любое целое число;

з) точки пересечения с осями координат — точки $(\pi m, 0)$, где m — любое целое число.

Учитывая периодичность, можно построить график функции $y = \operatorname{tg} x$, называемой *тангенсоидой* (рис. 110).



I. $y = \operatorname{tg} x$

Рис. 110.

Котангенсоида $y = \operatorname{ctg} x$. Используя свойства котангенса угла, получим следующие свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$:

а) область существования: любое x, кроме $x_m = \pi m$, где m — любое целое число;

б) область изменения: $(-\infty, +\infty)$;

в) функция не является ограниченной;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

д) функция периодическая, главный период π;

е) функция нечетная;

ж) функция не является монотонной на всей области существования, но функция возрастает на каждом из следующих интервалов $(\pi m, \pi + \pi m)$, где m — любое целое число;

з) точки пересечения с осями координат — точки $\left(\frac{\pi}{2} + \pi m, 0\right)$, где m — любое целое число.

Учитывая периодичность, можно построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$, называемой *котангенсоидой* (рис. 111).

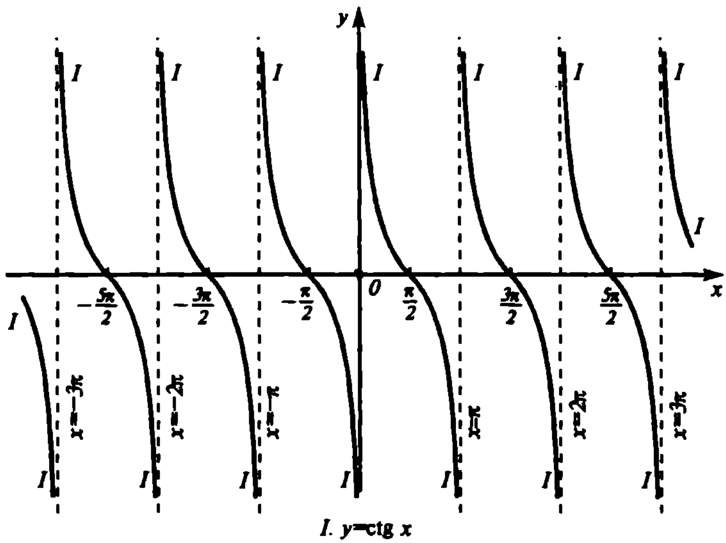


Рис. 111.

Основные обратные тригонометрические функции. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ называются *основными обратными тригонометрическими функциями.*

Обратная тригонометрическая функция $y = \arcsin x$. Используя свойства арксинуса числа, получим следующие свойства функции $y = \arcsin x$:

а) область существования: $[-1, 1]$;

б) область изменения: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

в) функция ограничена и снизу и сверху;

г) функция принимает наименьшее значение $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x = -1$ и наибольшее значение $y = \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$;

д) функция не является периодической;

е) функция нечетная;

ж) функция возрастает на всей области существования. Докажем это свойство. Для этого докажем, что если $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$, то $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$. Обозначим $\alpha_1 = \arcsin x_1$ и $\alpha_2 = \arcsin x_2$. Ясно, что $\sin\alpha_1 = x_1$ и $\sin\alpha_2 = x_2$, т.е. надо доказать, что если $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$, то $\alpha_1 < \alpha_2$. Доказательство проведем от противного: пусть $\alpha_1 \ge \alpha_2$. Так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает, то из условия $\alpha_1 \ge \alpha_2$ следует, что $\sin\alpha_1 \ge \sin\alpha_2$, что противоречит условию $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$. Значит предположение неверно, т.е. функция $y = \arcsin x$ возрастает.

з) Точка $(0, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 112.

Обратная тригонометрическая функция $y = \arccos x$. Используя свойства арккосинуса числа, получим следующие свойства функции $y = \arccos x$:

а) область существования: $[-1, 1]$;

б) область изменения: $[0, \pi]$;

в) функция ограничена и снизу и сверху;

г) функция принимает наибольшее значение $y = \pi$ при $x = -1$ и наименьшее значение $y = 0$ при $x = 1$;

д) функция не является периодической;

е) функция не является ни четной, ни нечетной;

ж) функция убывает на всей области существования.

з) точки $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $(1; 0)$ — точки пересечения с осями координат.

График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 113.

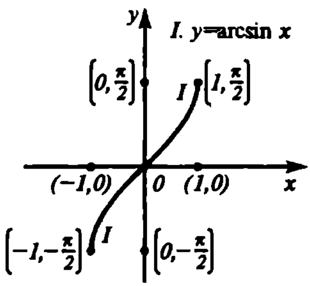


Рис. 112.

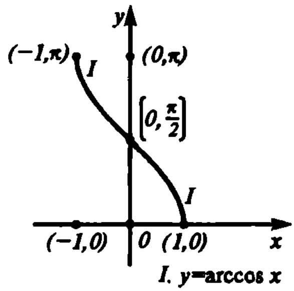


Рис. 113.

Обратная тригонометрическая функция $y = \mathrm{arctg}\, x$. Используя свойства арктангенса числа, получим следующие свойства функции $y = \mathrm{arctg}\, x$:

а) область существования: $(-\infty, +\infty)$;

б) область изменения: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

в) функция ограничена и снизу и сверху;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

д) функция не является периодической;

е) функция нечетная;

ж) функция возрастает на всей области существования;

з) точка $(0, 0)$ — единственная точка пересечения с осью координат.

График функции $y = \mathrm{arctg}\, x$ изображен на рис. 114.

Обратная тригонометрическая функция $y = \mathrm{arcctg}\, x$. Используя свойства арккотангенса числа, получим следующие свойства функции $y = \mathrm{arcctg}\, x$:

а) область существования: $(-\infty, +\infty)$;

б) область изменения: $(0, \pi)$;

в) функция ограничена и сверху и снизу;

г) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

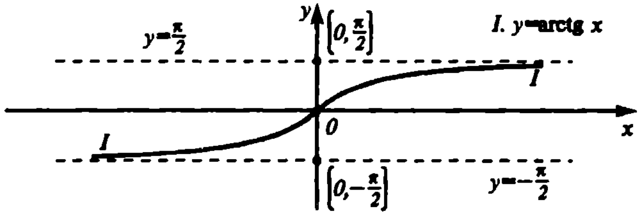


Рис. 114.

д) функция не является периодической;

е) функция не является ни четной, ни нечетной;

ж) функция убывает на всей области существования;

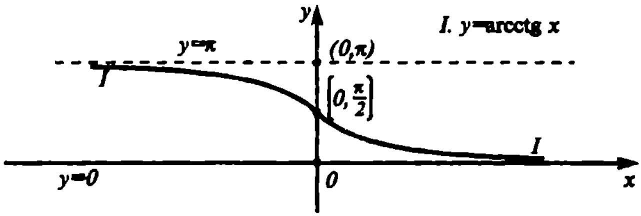


Рис. 115.

з) точка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — единственная точка пересечения с осью координат.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 115.

§ 3. Обратные функции

Взаимно однозначное отображение. Каждая функция $y = f(x)$ производит отображение области существования функции на область ее изменения так, что каждому x из области существования соответствует единственное значение y из области изменения.

Рассмотрим несколько функций вместе с их областями существования и изменения (табл. 2).

Некоторые из приведенных функций *разным* x из области существования ставят в соответствие *разные* y. Например, для функции $y = 2^x$ каждое значение y из области изменения получается лишь при одном значении x из области существования. В таких случаях говорят, что функция осуществляет *взаимно однозначное* отображение своей области существования на область изменения. Заметим, что все остальные функции, приведенные в таблице, таким свойством не обладают:

Таблица 2

Функция	Область существования	Область изменения
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0; \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1; 1]$	$[0; 1]$
$y = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$(-\infty, \infty)$	$(0; 1]$
$y = 2^x$	$(-\infty, \infty)$	$(0; \infty)$

функция $y = x^2$ при $x = 1$ и при $x = -1$ принимает одно и то же значение $y = 1$;

функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ при $x = \frac{1}{2}$ и при $x = -\frac{1}{2}$ принимает одно и то же значение $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

функция $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ при $x = 2$ и при $x = -2$ принимает одно и то же значение $y = \frac{1}{5}$.

Итак, функции можно разделить на два класса:

1) функции, осуществляющие взаимно однозначное отображение области существования на область изменения;

2) функции, не обладающие этим свойством.

Если функции второго класса рассматривать не на всей области существования, то часто удается выбрать такую область определения (часть области существования), что функция будет отображать эту область определения на соответствующую область изменения уже взаимно однозначно. Заметим, что любая функция $y = f(x)$ на той части области определения X (из области существования функции), где она является строго монотонной (т.е. возрастающей или убывающей), принадлежит к первому классу. Например, для функции $y = x^2$ такой областью будет промежуток $[0, +\infty)$ или промежуток $(-\infty, 0]$.

Рассмотрим функцию $y = x^2$ на области определения $X = (-\infty, 0]$ (соответствующая ей область изменения — $Y_1 = [0; +\infty)$). Эта функция осуществляет взаимно однозначное отображение области X_1 на область Y_1. При этом по каждому y из области Y_1 можно однозначно восстановить x из области X_1. Действительно, если $y_0 \in Y_1$, то соответствующее значение x_0 такое, что $y_0 = x_0^2$, ищется по правилу $x_0 = -\sqrt{y_0}$. При этом, если $y_0 \neq \overline{y_0}$, то $x_0 \neq \overline{x_0}$, где $x_0 = -\sqrt{y_0}$, а $\overline{x_0} = -\sqrt{\overline{y_0}}$. Другими словами, можно установить взаимно однозначное отображение области Y_1 на область X_1 по правилу $x = -\sqrt{y}$.

Итак, функция $y = x^2$ осуществляет взаимно однозначное отображение области X_1 на область Y_1, а правило $x = -\sqrt{y}$ осуществляет взаимно однозначное отображение области Y_1 на область X_1. Правило $x = -\sqrt{y}$ назовем ***обратным правилом*** для функции $y = x^2$ на области определения X_1 и области изменения Y_1.

Функция $y = x^2$ и правило $x = -\sqrt{y}$, если $x \in X_1 = (-\infty, 0]$, а $y \in Y_1 = [0, +\infty)$, выражают одну и ту же связь между переменными x и y; только для любой пары (x_0, y_0) из рассматриваемых переменных величин функция $y = x^2$ дает возможность, зная x_0, найти y_0, а правило $x = -\sqrt{y}$ — зная y_0, найти x_0.

Обратная функция. Если в обратном правиле заменить x на y, а y на x с одновременной заменой области определения на область изменения и области изменения на область определения функции $y \in x^2$, $x \in X$, то получим новую функцию $y = -\sqrt{x}$, у которой область определения $X_2 = [0, +\infty) = Y_1$ и область изменения $Y_2 = (-\infty, 0] = X_1$. Новую функцию $y = -\sqrt{x}$ с областью определения X_2 и областью изменения Y_2 называют ***обратной функцией*** к функции $y = x^2$ с областью определения X_1 и областью изменения Y_1.

Для функции $y = x^2$ с областью определения $X_3 = [0; 10)$ и областью изменения $Y_3 = [0; 100)$ обратной функцией будет функция $y = \sqrt{x}$ с областью определения $X_4 = [0; 100)$ и областью изменения $Y_4 = [0; 10)$.

Приведем определение обратной функции в общем случае.

Пусть область определения функции $y = f(x)$ такова, что функция осуществляет взаимно однозначное отображение области ее определения X на область изменения Y. Тогда по каждому y из области Y можно однозначно восстановить x из области X следующим образом: в равенстве $f(x) - y = 0$ считают каждое $y \in Y$ фиксированным и отыскивают $x \in X$, удовлетворяющее этому равенству. Найденное каждое $x \in X$ обозначается $f^{-1}(y)$. Равенство $x = f^{-1}(y)$ называется ***обратным правилом. Обратной функцией к функции*** $y = f(x)$ $(x \in X, y \in Y)$ называется функция, которая получается из обратного правила $x = f^{-1}(y)$ заменой x на y, а y на x с одновременной заменой области определения на область изменения, а области изменения на область определения. После такой замены область изменения функции $y = f(x)$ становится областью определения обратной функции $y = f^{-1}(x)$, а область определения функции $y = f(x)$ становится областью изменения обратной функции $y = f^{-1}(x)$. Итак, две функции: функция $y = f(x)$ с областью определения X и областью значений Y и функция $y = f^{-1}(x)$ с областью определения Y и областью значений X, где $f[f^{-1}(x)] = x$ для любого $x \in Y$ и $f^{-1}[f(x)] = x$ для любого $x \in X$, такие, что одна из них является обратной к другой.

Покажем на нескольких примерах, как отыскивается обратное правило и обратная функция. Во всех ниже приведенных примерах области определения выбраны так, что соответствующие функции осуществляют взаимно однозначное отображение области определения на область изменения (табл. 3).

Таблица 3

Функция $y = f(x)$	Область определения $f(x)$	Область изменения $y = f(x)$	Обратное правило $x = f^{-1}(y)$
$y = x^2$	$0 \le x < \infty$	$0 \le y < \infty$	$x = \sqrt{y}$
$y = x^2$	$-\infty < x \le 0$	$0 \le y < \infty$	$x = -\sqrt{y}$
$y = 2^x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \infty$	$x = \log_2 y$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$0 \le x \le 1$	$0 \le y \le 1$	$x = \sqrt{1 - y^2}$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$-1 \le x \le 0$	$0 \le y \le 1$	$x = -\sqrt{1 - y^2}$
$y = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$0 \le x < \infty$	$0 < y \le 1$	$x = \sqrt{\dfrac{1}{y} - 1}$
$y = 2x + 1$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < y < \infty$	$x = \dfrac{y - 1}{2}$
$y = (x + 1)^2$	$-1 \le x < \infty$	$0 \le y < \infty$	$x = \sqrt{y} - 1$
Функция $y = f(x)$	**Обратная функция $y = f^{-1}(x)$**	**Область определения $y = f^{-1}(x)$**	**Область изменения $y = f^{-1}(x)$**
$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$	$0 \le x < \infty$	$0 \le y < \infty$
$y = x^2$	$y = -\sqrt{x}$	$0 \le x < \infty$	$-\infty < y \le 0$
$y = 2^x$	$y = \log_2 x$	$0 < x < \infty$	$-\infty < y < \infty$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$y = \sqrt{1 - x^2}$	$0 \le x \le 1$	$0 \le y \le 1$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$y = -\sqrt{1 - x^2}$	$0 \le x \le 1$	$-1 \le y \le 0$
$y = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$y = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}$	$0 < x \le 1$	$0 \le y < \infty$
$y = 2x + 1$	$y = \dfrac{x - 1}{2}$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < y < \infty$
$y = (x + 1)^2$	$y = \sqrt{x} - 1$	$0 \le x < \infty$	$-1 \le y < \infty$

Замечание. Не для всякой функции удается найти такую область определения, которую она взаимно однозначно отображает на соответствующую область изменения. Например, функция $y = 1$ не отображает взаимно однозначно никакой промежуток числовой прямой на соответствующую область изменения. В качестве другого примера можно привести функцию Дирихле.

График обратной функции. Прежде всего выясним, как расположены точки, координаты одной из которых получаются из координат другой заменой x на y, а y на x.

Теорема. *Любые точки $A(x_0, y_0)$ и $B(y_0, x_0)$ симметричны относительно прямой $y = x$.*

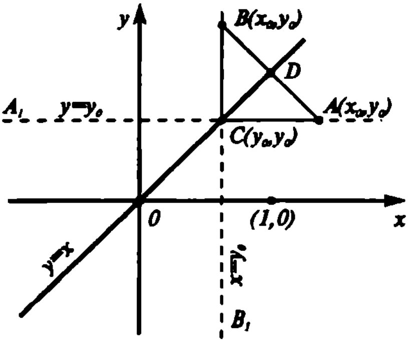


Рис. 116.

Доказательство. Если $x_0 = y_0$, то точки A и B (рис. 116) совпадают и лежат на прямой $y = x$, т.е. в этом случае утверждение теоремы верно. Пусть $x_0 \neq y_0$ и пусть точка A (x_0, y_0) лежит в первой четверти и $x_0 > y_0$. Проведем из точки A параллельно оси Ox прямую AA_1, т.е. прямую $y = y_0$; из точки B — прямую BB_1 параллельно оси Oy, т.е. прямую $y = x_0$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке $C(y_0, y_0)$ т.е. в точке, лежащей на прямой $y = x$. Рассмотрим треугольник BCA; он прямоугольный (прямой угол BCA) и равнобедренный ($|AC| = |BC| = |x_0 - y_0|$). Биссектриса (CD) угла BCA совпадает с прямой $y = x$. Поскольку треугольник BCA равнобедренный, то его биссектриса (CD) является и высотой и медианой, следовательно $(CD) \perp (AB)$ и $|AD| = |BD|$. Это означает, что точки A и B симметричны относительно прямой $y = x$. Аналогично проводится доказательство теоремы в случае, когда точка $A(x_0, y_0)$ лежит в первой четверти и $x_0 < y_0$, а также в случае, когда точка $A(x_0, y_0)$ лежит не в первой четверти. Теорема доказана.

Пусть функция $y = f(x)$ взаимно однозначно отображает область определения X на область изменения Y. Тогда график этой функции таков, что по любому x_1 однозначно находится $y_1 = f(x_1)$ и, наоборот, по любому y_2 однозначно находится $x_2 = f^{-1}(y_2)$ (рис. 117).

Если точка $M(x_0, y_0)$ лежит на графике функции $y = f(x)$, то ее координаты удовлетворяют условию $y_0 = f(x_0)$, а следовательно, и условию $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Другими словами, все точки (и только они) графика $y = f(x)$ удовлетворяют условию $x=f^{-1}(y)$. Так как для получения обратной функции надо в обратном правиле $x=f^{-1}(y)$ заменить x на y, а y на x, то каждая точка графика $y=f^{-1}(x)$ получается из точки графика функции $y=f(x)$ заменой x на y, а y на x, т.е. если точка $K(x, y)$ — точка графика $y=f(x)$, то точка $K_1(y, x)$ — точка графика $y=f^{-1}(x)$. Из этого рассуждения и теоремы вытекает, что график обратной функции $y=f^{-1}(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ симметричным отображением последнего относительно прямой $y=x$ (см. рис. 117).

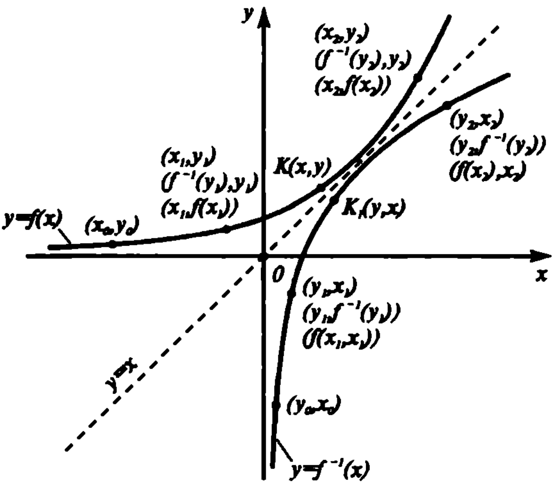


Рис. 117.

Замечание. Часто возникает ситуация, когда вид обратной функции получается непростым. Например, функция $y=x^{2m-1}$, где m — фиксированное натуральное число, взаимно однозначно отображает свою область существования (всю числовую прямую) на область изменения $Y=$ $=(-\infty, +\infty)$. Для того чтобы найти обратное правило, с помощью которого строится обратная функция, необходимо отыскать x, удовлетворяющее равенству $x^{2m-1}-y=0$. Как известно (см. гл. IV) для неотрицательного y такое x существует, а именно $x=\sqrt[2m-1]{y}$; и для отрицательного y такое x существует, а именно $x=-\sqrt[2m-1]{|y|}$. Поэтому обратное правило задается следующим образом:

$$x=\begin{cases} \sqrt[2m-1]{y}, & \text{если } y\in[0,+\infty);\\ -\sqrt[2m-1]{|y|}, & \text{если } y\in(-\infty,0). \end{cases}$$

Следовательно, и обратная функция будет иметь вид

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[2m-1]{x}, & \text{если } x\in[0,+\infty);\\ -\sqrt[2m-1]{|x|}, & \text{если } x\in(-\infty,0). \end{cases}$$

Иногда обратную функцию к степенной функции $y=x^{2m-1}$ записывают с помощью одной формулы $y=\sqrt[2m-1]{x}$, но мы так поступать не будем, так как символ $\sqrt[n]{a}$ употребляется у нас только для неотрицательных чисел a.

Функции, обратные к основным тригонометрическим функциям. Для любой из основных тригонометрических функций, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, можно выделить много областей определения, каждую из которых соответствующая тригонометрическая функция отображает взаимно однозначно на соответствующую область изменения. При этом если рассмотреть основную тригонометрическую функцию на своей специально выбранной области определения, то обратной к ней будет соответствующая обратная тригонометрическая функция (см. табл. 4).

Таблица 4

Функция $y=f(x)$	Область определения $f(x)$	Область изменения $y=f(x)$	Обратное правило $x=f^{-1}(y)$
$y=\sin x$	$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$	$-1\le y\le 1$	$x=\arcsin y$
$y=\cos x$	$0\le x\le\pi$	$-1\le y\le 1$	$x=\arccos y$
$y=\mathrm{tg}\, x$	$-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}$	$-\infty< y<\infty$	$x=\mathrm{arctg}\, y$
$y=\mathrm{ctg}\, x$	$0< x<\pi$	$-\infty< y<\infty$	$x=\mathrm{arcctg}\, y$
Функция $y=f(x)$	**Обратная функция $y=f^{-1}(x)$**	**Область определения $y=f^{-1}(x)$**	**Область изменения $y=f^{-1}(x)$**
$y=\sin x$	$y=\arcsin x$	$-1\le x\le 1$	$-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$
$y=\cos x$	$y=\arccos x$	$-1\le x\le 1$	$0\le y\le\pi$
$y=\mathrm{tg}\, x$	$y=\mathrm{arctg}\, x$	$-\infty< x<\infty$	$-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2}$
$y=\mathrm{ctg}\, x$	$y=\mathrm{arcctg}\, x$	$-\infty< x<\infty$	$0< y<\pi$

Очевидно, что любая основная обратная тригонометрическая функция отображает взаимно однозначно свою область определения на свою область изменения. Поэтому у каждой из этих функций есть обратная функция — соответствующая основная тригонометрическая функция, но рассматриваемая только на соответствующей области определения.

Например, для функции $y=\arccos x$ обратной к ней будет функция $y=\cos x$, рассматриваемая только на отрезке $[0, \pi]$; для функции $y=\mathrm{arctg}\, x$ обратной к ней будет функция $y=\mathrm{tg}\, x$, рассматриваемая только на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

В заключение найдем обратную функцию к функции $y=\sin x$ с областью определения $X=\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Легко видеть, что функция $y=\sin x$ взаимно однозначно отображает отрезок X на отрезок $Y=[-1; 1]$. Поэтому у этой функции есть обратная функция. Для ее нахождения возьмем произвольное $y_0 \in Y$ и найдем $x_0 \in X$ из равенства $\sin x_0 - y_0 = 0$. Очевидно, что число $x_0 = \pi - \arcsin y_0$ удовлетворяет этому равенству и принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Поэтому обратное правило будет такое: $x = \pi - \arcsin y$. Значит, обратной функцией будет функция $y = \pi - \arcsin x$. Итак, для функции $y = \sin x$ с областью определения $X = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ обратной к ней будет функция $y = -\arcsin x + \pi$ с областью определения $[-1; 1]$ и с областью изменения $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис. 118).

§ 4. Суперпозиции функций и их графики

Сложная функция. Пусть функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве X и множество значений этой функции входит в область существования функции $y = F(u)$. Тогда любому x из области определения X функции $u = \varphi(x)$ соответствует определенное значение переменной u, а этому значению u функция $y = F(u)$ ставит в соответствие определенное значение переменной y, т.е. переменная y является функцией от x на множестве X: $y = F[\varphi(x)]$. Полученная функция от функции называется *сложной функцией переменной* x. Функцию $u = \varphi(x)$ называют *внутренней функцией*, а $y = F(u)$ — *внешней*. Сложную функцию $y = F[\varphi(x)]$ называют часто *суперпозицией* двух функций: внутренней $u = \varphi(x)$ и внешней $y = F(u)$. Например, если $u = \cos x$ и $y = 2^u$, то для любого действительного x определена сложная функция $y = 2^{\cos x}$. Сложными функциями будут, например, функции

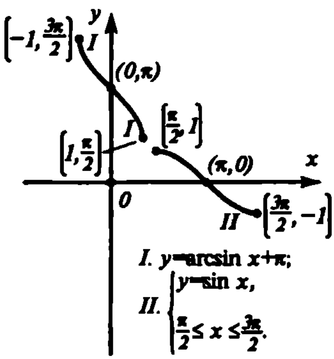


Рис. 118.

$$y = \sin(2x + 4), \quad y = \log_2 \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{tg} \log_2 x.$$

Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических операций и применения конечного числа суперпозиций, принято называть *элементарными функциями*. Элементарными функциями будут, например, функции

$$y = \operatorname{tg}\sqrt{1 - x^2}, \quad y = \log_2 \sin 3^{x-4},$$
$$y = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 4x + 1}} + 2\sin^2(x - 5).$$

Рассмотрим примеры, показывающие, как построить график сложной функции $y = F[\varphi(x)]$, зная график внутренней функции $u = \varphi(x)$ и свойства внешней функции $y = F(u)$ (из рассмотренных примеров будет ясно, как построить график любой элементарной функции, зная свойства и графики основных элементарных функций).

Построение графика функции $y = -f(x)$ по графику функции $y = f(x)$. Пусть некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т.е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Возьмем точку $M_1(x_0, -y_0)$, симметричную точке $M_0(x_0, y_0)$ относительно оси Ox. Координаты точки $M_1(x_0, -y_0)$ удовлетворяют условию $-y_0 = -f(x_0)$, поэтому точка $M_1(x_0, -y_0)$ принадлежит графику функции $y = -f(x)$. Так как точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая графику функции $y = f(x)$, бралась любая и функция $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ имеют одну и ту же область определения, то график функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением последнего относительно оси Ox. Построим этим способом графики функций $y = -x^2$ (рис. 119), $y = -\frac{1}{x}$ (рис. 120), $y = -\log_2 x$ (рис. 121).

Построение графика функции $y = f(-x)$ по графику функции $y = f(x)$. Пусть некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т.е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Возьмем точку $M_1(-x_0, y_0)$, симметричную точке $M_0(x_0, y_0)$ относительно оси Oy. Координаты точки $M_1(-x_0, y_0)$ удовлетворяют условию $y_0 = f[-(-x_0)]$, поэтому точка $M_1(-x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(-x)$. Так как точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая графику функции $y = f(x)$, бра-

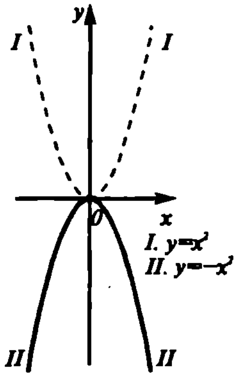


Рис. 119.

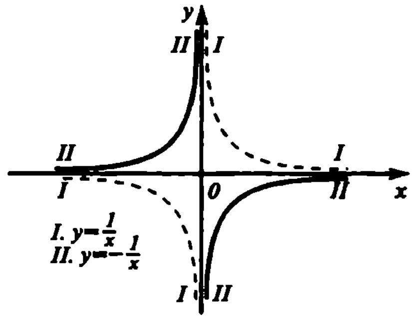


Рис. 120.

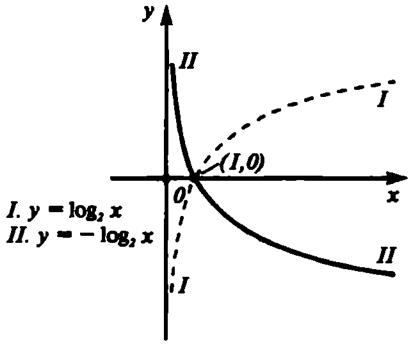


Рис. 121.

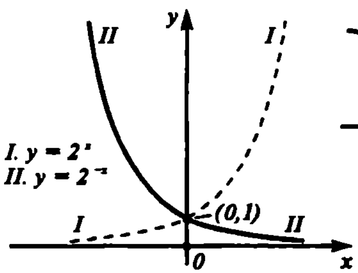


Рис. 122.

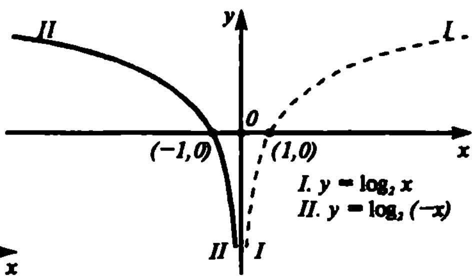


Рис. 123.

лась любая и функция $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ имеют области определения, симметричные относительно начала координат, то график функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением последнего относительно оси Oy.

Построим этим способом графики функций $y = 2^{-x}$ (рис. 122), $y = \log_2(-x)$ (рис. 123).

Построение графика функции $y = Bf(x)$, где $B \neq 0$, по графику функции $y = f(x)$. Функции $y = f(x)$ и $y = Bf(x)$ имеют одну и ту же область определения. Следовательно, зная, как для любого x по ординате функции $y = f(x)$ найти ординату функции $y = Bf(x)$, можно по графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = Bf(x)$. Пусть некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т.е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Возьмем точку $M_1(x_0, By_0)$. Координаты ее удовлетворяют условию $By_0 = Bf(x_0)$, поэтому точка $M_1(x_0, By_0)$ принадлежит графику функции $y = Bf(x)$. Рассмотрим возможные случаи в зависимости от числа B:

1. $B > 1$. Точка $M_1(x_0, By_0)$ получается из точки $M_0(x_0, y_0)$ растяжением ординаты точки M_0 в B раз и график функции $y = Bf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в B раз вдоль оси Oy графика функции $y = f(x)$.

2. $B = 1$. Все точки графика $y = f(x)$ остаются на месте.

3. $0 < B < 1$. Поскольку $B = \frac{1}{\frac{1}{B}}$, то точка $M_1(x_0, By_0)$ получается из точки $M_0(x_0, y_0)$ сжатием ординаты точки M_0 в $\frac{1}{B}$ раз и график функции $y = Bf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием ординат всех точек в $\frac{1}{B}$ раз, т.е. сжатием в $\frac{1}{B}$ раз вдоль оси Oy графика функции $y = f(x)$.

4. $B < 0$. Тогда $B = -|B|$ и построение графика функции $y = Bf(x)$ разбивается на 2 этапа:

а) построение графика функции $y = |B|f(x)$ по графику функции $y = f(x)$;

б) построение графика функции $y = -|B|f(x)$ по графику функции $y = |B|f(x)$.

Построим этим способом графики функций $y = 2\sin x$ (рис. 124), $y = -2x^2$ (рис. 125), $y = \frac{1}{2}\cos x$ (рис. 126).

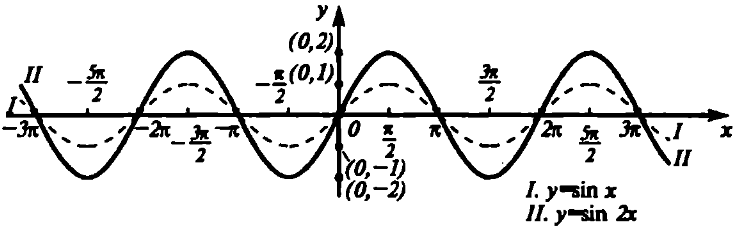


Рис. 124.

Построение графика функции $y = f(kx)$, где $k \neq 0$, по графику функции $y = f(x)$. Функция $y = f(kx)$ определена для всех тех x, для которых число kx принадлежит области определения функции $y = f(x)$. Пусть некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т.е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Точка $M_1\left(\frac{1}{k}x_0, y_0\right)$ принадлежит графику функции $y = f(kx)$, так как ее координаты удовлетворяют условию $y_0 = f\left(k\frac{x_0}{k}\right)$. Рассмотрим различные случаи в зависимости от числа k.

1. $k > 1$. Точка $M_1\left(\frac{1}{k}x_0, y_0\right)$ получается из точки $M_0(x_0, y_0)$ сжатием абсциссы точки M_0 в k раз и график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием абсцисс всех точек в k раз вдоль оси Ox к оси OY графика функции $y = f(x)$.

2. $k = 1$. Все точки графика $y = f(x)$ остаются на месте.

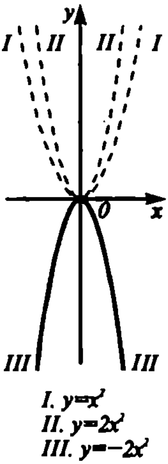


Рис.125.

3. $0 < k < 1$. Точка $M_1\left(\frac{1}{k}x_0, y_0\right)$ получается из точки $M_0(x_0, y_0)$ растяжением абсциссы точки M_0 в $\left(\frac{1}{k}\right)$ раз, и график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$

растяжением абсцисс всех точек в $\left(\frac{1}{k}\right)$ раз, т.е. растяжением в $\left(\frac{1}{k}\right)$ раз вдоль оси Ox к оси OY графика функции $y = f(x)$.

4. $k < 0$. Тогда $k = -|k|$ и построение графика функции $y = f(kx)$ разбивается на 2 этапа:

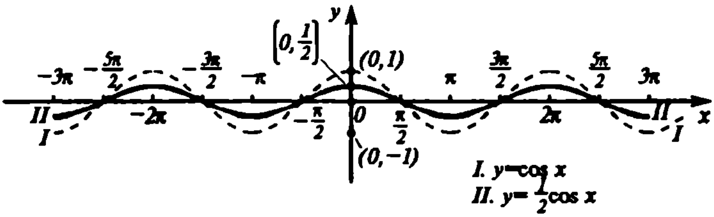


Рис. 126.

а) построение графика функции $y = f(|k|x)$ по графику функции $y = f(x)$;

б) построение графика функции $y = f(-|k|x)$ по графику функции $y = f(|k|x)$.

Построим этим способом графики функций $y = \sin 2x$ (рис. 127, II), $y = 2^{-2x}$ (рис. 128, III), $y = \log_2\left(-\frac{1}{3}x\right)$ (рис. 129, III).

Построение графика функции $y = f(x - a)$, где $a \neq 0$, по графику функции $y = f(x)$. Функция $y = f(x - a)$ определена для всех тех x, для которых $(x - a)$ принадлежит области определения функции $y = f(x)$. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т.е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Точка $M_1(x_0 + a, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x - a)$, так как ее координаты удовлетворяют условию $y_0 = f[(x_0 + a) - a] = f(x_0)$. Следовательно, каждая точка M_1 графика функции $y = f(x - a)$ получается из соответствующей точки M_0 графика функции $y = f(x)$ сдвигом этой точки вдоль оси Ox на величину a. При этом если $a > 0$, то сдвиг производится вправо на величину a, а если $a < 0$ — сдвиг производится влево на величину a. Итак, график функции $y = f(x - a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом последнего, как жесткого тела, вдоль оси Ox на величину a.

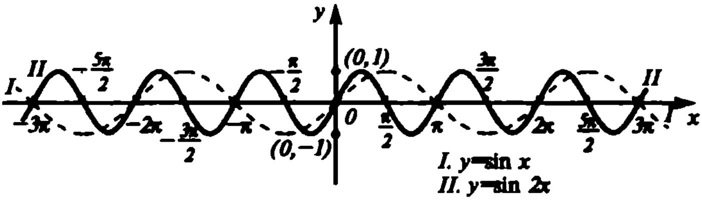


Рис. 127.

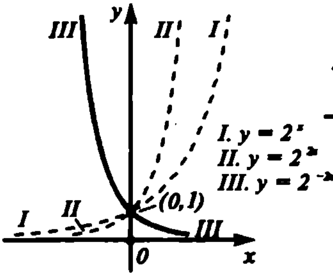


Рис. 128.

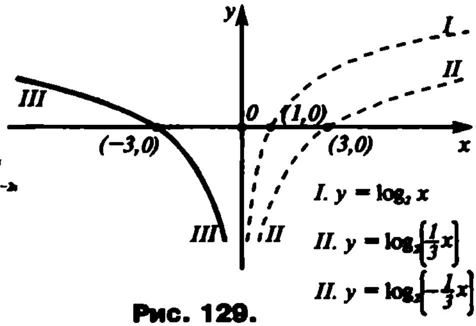


Рис. 129.

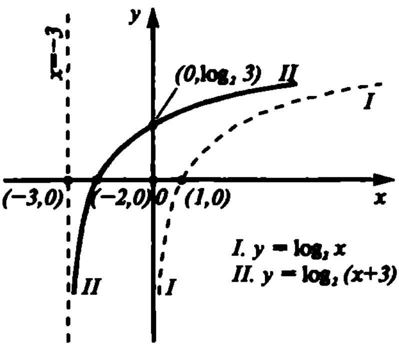


Рис. 130.

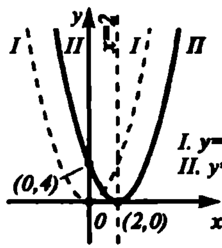


Рис. 131.

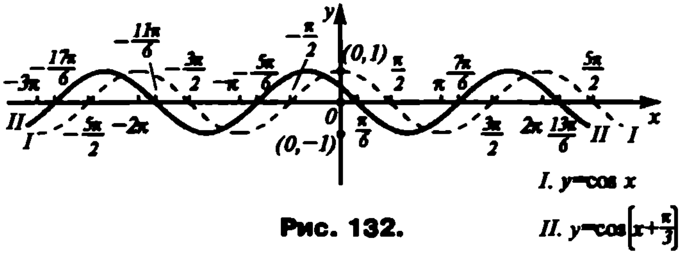


Рис. 132.

Построим этим способом графики функций $y = \log_2 (x + 3)$ (рис. 130, II), $y = (x - 2)^2$ (рис. 131, II), $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (рис. 132, II).

Построение графика функции $y = f(x) + b$, где $b \neq 0$, по графику функции $y = f(x)$. Функции $y = f(x) + b$ и $y = f(x)$ имеют одну и ту же область определения. Следовательно, зная, как для любого x по ординате функции $y = f(x)$ найти ординату функции $y = f(x) + b$, можно по графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = f(x) + b$. Пусть некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т.е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Возьмем точку $M_1(x_0, y_0 + b)$. Координаты ее удовлетворяют условию $y_0 + b = f(x_0) + b$.

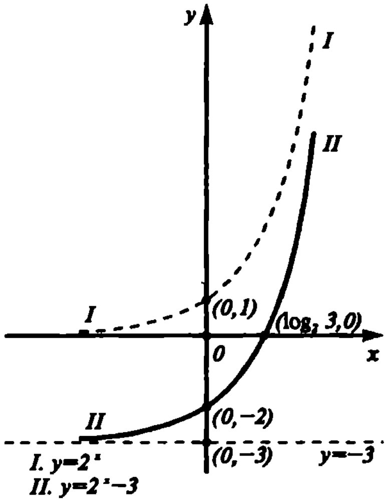


Рис. 133.

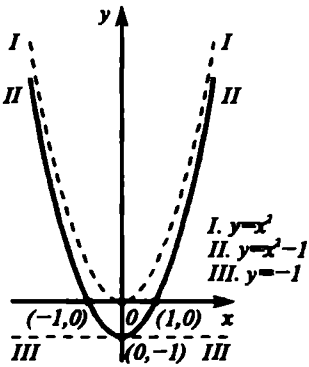


Рис. 134.

Следовательно, чтобы получить точку M_1, нужно точку M_0 сдвинуть вдоль оси Oy на величину b. При этом если $b > 0$, то сдвиг производится вверх на величину b, а если $b < 0$ — вниз на величину $|b|$.

Построим этим способом графики функций $y = 2^x - 3$ (рис. 133), $y = x^2 - 1$ (рис. 134), $y = \sin x + 1$ (рис. 135).

Построение графика функции $y = Bf[k(x - a)] + b$ по графику функции $y = f(x)$. График функции $y = Bf[k(x - a)] +$

$+ b$ строится по графику функции $y = f(x)$ последовательным применением предыдущих способов.

Например, так:

$$y = f(x) \to y = f(kx) \to y = Bf(kx) \to y = Bf[k(x - a)] \to$$
$$\to y = Bf[k(x - a)] + b.$$

Покажем применение этого способа на нескольких примерах.

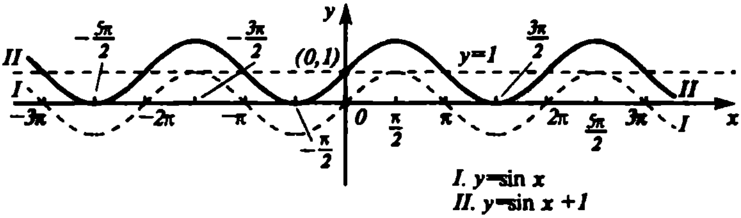


Рис. 135.

Построить график функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Преобразуем квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, выделив полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Итак, надо построить график функции

$$y = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Сначала построим график функции $y = x^2$. Затем растяжением его вдоль оси Oy в $|a|$ раз — график функции $y = |a|x^2$. Если $a > 0$, то возьмем построенный график функции $y = ax^2$; если $a < 0$, то отобразим график функции $y = |a|x^2$ относительно оси Ox и получим график функции $y = ax^2$. Наконец, сдвигом графика функции $y = ax^2$ вдоль оси Ox на $\left(-\frac{b}{2a}\right)$, а затем сдвигом полученного графика функции

$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ вдоль оси Oy на $\frac{4ac-b^2}{4a}$ получим график функции $y=ax^2+bx+c$.

Покажем все эти этапы построение графика квадратного трехчлена на следующем примере: построить график функции $y=-2x^2+3x+1$. Преобразуем квадратный трехчлен $-2x^2+3x+1=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$ и построим по изложенной схеме график функции $y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$ (рис. 136).

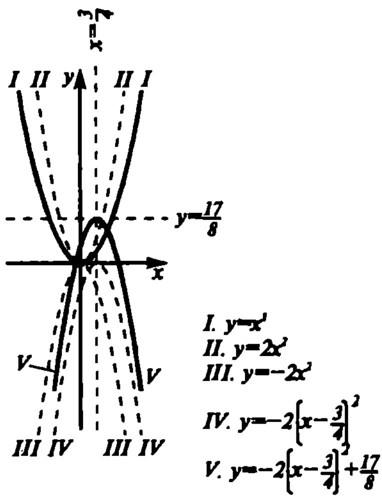


Рис. 136.

Теорема 1. *График функции $y=kx+b$ есть прямая линия, пересекающая ось Оу в точке $M(0, b)$ и образующая с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен k.*

Доказательство. Докажем, что график функции $y=kx$ есть прямая, проходящая через начало координат и образующая с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен k.

Рассмотрим несколько случаев:

а) $k=0$. Тогда график функции $y=0$ есть ось Ox — прямая линия и $\operatorname{tg}\alpha=0$.

б) $k>0$. Тогда все точки графика функции $y=kx$ лежат в I и III четвертях. Начало координат принадлежит графику функции $y=kx$. Возьмем некоторую точку $M_0(x_0, y_0)$, отличную от начала координат, принадлежащую графику функции $y=kx$, т.е. такую, что $y_0=kx_0$. Проведем через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $O(0, 0)$ прямую и покажем, что эта и прямая и будет графиком функции $y=kx$.

Пусть построенная прямая образует с положительным направлением оси Ox угол, тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{|y_0|}{|x_0|}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{kx_0}{x_0}=k$.

Возьмем некоторую точку $M_1(x_1, y_1)$, отличную от точек O

и M_0 на этой прямой (пусть для определенности точка M_1 лежит в I четверти). Из прямоугольного треугольника OAM_1 (рис. 137) находим, что $|AM_1| = |OA| \operatorname{tg} \alpha$. Так как $AM_1 = y_1$, $OA = x_1$, $\operatorname{tg} \alpha = k$, то $y_1 = kx_1$. Это означает, что координаты любой точки построенной прямой удовлетворяют условию $y = kx$.

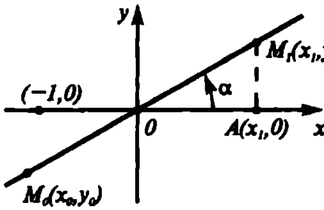


Рис. 137.

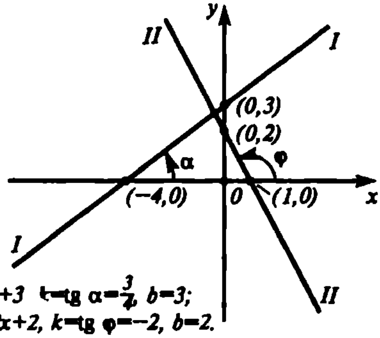


Рис. 138.

Пусть теперь x_2 и y_2 таковы, что $y_2 = kx_2$ (пусть для определенности $x_2 > 0$ и, следовательно, $y_2 > 0$). Построим точку $M_2(x_2, y_2)$. Точка M_2 должна оказаться на построенной прямой, ибо если точка M_2 не попадает на эту прямую, то через начало координат будут проведены две различные прямые, образующие один и тот же угол α с положительным направлением оси Ox, что невозможно.

Итак, точки построенной прямой и только они удовлетворяют условию $y = kx$, т.е. график функции $y = kx$ есть построенная прямая.

в) $k < 0$. Тогда график функции $y = |k|x$ есть прямая, проходящая через начало координат и образующая с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен $|k|$. График функции $y = -|k|x$ получается из этого графика симметричным отображением относительно оси Ox, поэтому этот график есть прямая, образующая с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен $-|k| = k$.

Для завершения доказательства остается сказать, что график функции $y = kx + b$ получается из прямой $y = kx$

сдвигом вдоль оси Oy, как жесткого тела, на величину b. При этом точка $O(0, 0)$ графика функции $y = kx$ перейдет в точку $A(0, b)$ графика функции $y = kx + b$. Теорема доказана.

Построим этим способом графики функций $y = \frac{3}{4}x + 3$ (рис. 138, I), $y = -2x + 2$ (рис. 138, II).

Построение графика функции $y = |f(x)|$ по графику функции $y = f(x)$. Прежде всего напомним определение:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ для тех } x, \text{ где } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ для тех } x, \text{ где } f(x) < 0. \end{cases}$$

Пусть некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т.е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Рассмотрим два случая:

а) $y_0 \geq 0$. Тогда, поскольку $|f(x_0)| = f(x_0) = y_0$, точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = |f(x)|$.

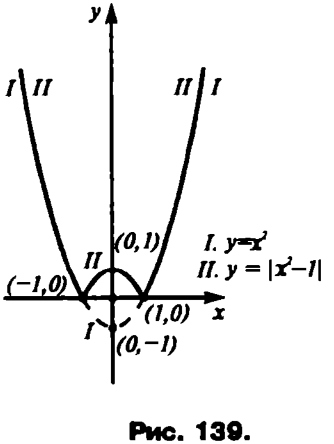


Рис. 139.

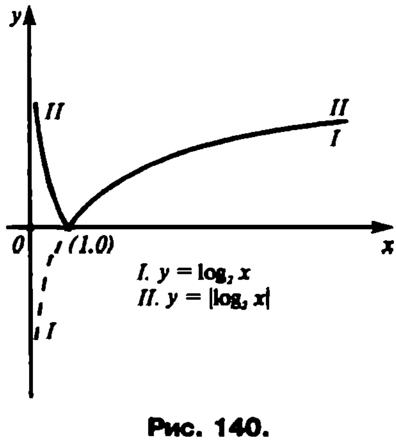


Рис. 140.

б) $y_0 < 0$. Тогда, поскольку $|f(x_0)| = -f(x_0) = -y_0$, точка $M_1(x_0, -y_0)$ принадлежит графику функции $y = |f(x)|$. Следовательно, график функции $y = f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом:

все точки графика $y = f(x)$, лежащие на оси Ox и выше ее, остаются на месте;

все точки графика $y = f(x)$, лежащие ниже оси Ox, симметрично отображаются относительно оси Ox.

Заметим, что график функции $y = |f(x)|$ не имеет точек ниже оси Ox.

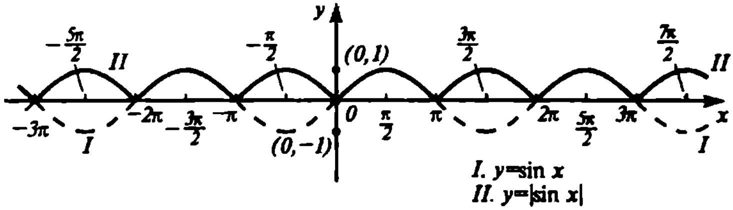


Рис. 141.

Построим этим способом графики функций $y = |x^2 - 1|$ (рис. 139), $y = |2^x|$ (см. рис. 104, II), $y = |\log_2 x|$ (рис. 140), $y = |\sin x|$ (рис. 141).

Построение графика функции $y = f(|x|)$ по графику функции $y = f(x)$. Заметим, что функция $y = f(|x|)$ четная функция, так как $f(|-x|) = f(|x|)$. График четной функции строится так: строится график этой функции для всех $x \geq 0$; для построения графика этой функции для $x < 0$ построенная часть отображается симметрично относительно оси Oy. Поскольку $|x| = x$ для $x \geq 0$, то для $x \geq 0$ график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Для построения графика функции $y = f(|x|)$ для $x < 0$ надо часть графика функции $y = f(|x|)$, уже построенного для $x \geq 0$, симметрично отобразить относительно оси Oy. Для построения графика функции $y = f(|x|)$ существенную роль играют точки графика функции $y = f(x)$, лежащие на оси Oy или справа от нее; точки графика, лежащие слева от оси Oy, никакой роли не играют, следовательно, для построения графика функции $y = f(|x|)$ надо:

а) стереть все точки графика функции $y = f(x)$, лежащие слева от оси Oy;

б) оставить на месте все точки графика функции, лежащие на оси Oy и справа от нее;

в) отобразить правую часть графика симметрично относительно оси Oy.

Построим этим способом графики функций $y = 2^{|x|}$ (рис. 142), $y = \log_2 |x|$ (рис. 143), $y = \sin |x|$ (рис. 144).

Построение графика функции $y = F(f(x))$ по графику функции $y = f(x)$. В случаях, более сложных, чем рассмотренные выше, график функции $y = F(f(x))$ строят, используя гра-

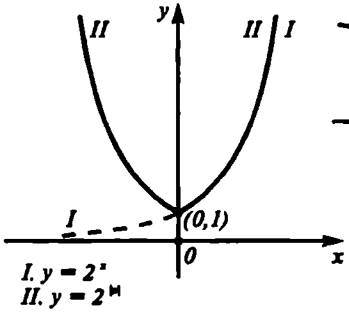


Рис. 142.

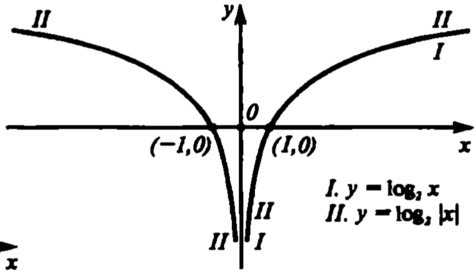


Рис. 143.

фик $y = f(x)$ и свойства функции $y = f(x)$. Не давая общих рекомендаций, покажем как это делать, на нескольких примерах.

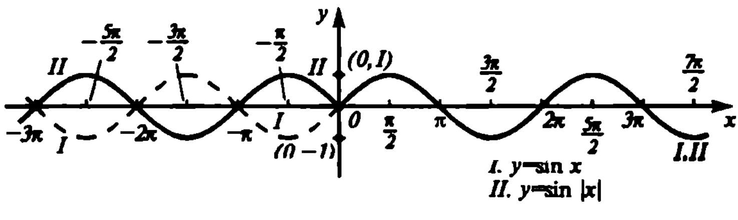


Рис. 144.

Используя график функции $y = \sin x$ (см. рис. 108), построить графики функций:

$y = 2^{\sin x}$

а) область определения функции $y = 2^{\sin x}$ — все действительные x;

б) поскольку функция $y = \sin x$ — периодическая с главным периодом 2π, то функция $y = 2^{\sin x}$ тоже периодическая с главным периодом 2π;

$y = \log_2 \sin x$

а) область определения функции $y = \log_2 \sin x$ — все те x, для которых $\sin x > 0$, т.е. все те x, где график функции $y = \sin x$ лежит выше оси Ox;

б) поскольку функция $y = \sin x$ — периодическая с главным периодом 2π, то функция $y = \log_2 \sin x$ тоже периодическая с главным периодом 2π;

Поэтому будем строить графики обеих функций только на отрезке $[0, 2\pi]$, а потом продолжим графики периодически.

в) поскольку на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает от 0 до 1, то функция $y = 2^{\sin x}$ на этом промежутке возрастает от 1 до 2; на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ убывает от 1 до (— 1), а функция $y = 2^{\sin x}$ убывает от 2 до $\frac{1}{2}$; на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает от (— 1) до 0, а функция $y = 2^{\sin x}$ возрастает от $\frac{1}{2}$ до 1.

в) поскольку на промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает от 0 до 1, то функция $y = \log_2 \sin x$ на этом промежутке возрастает от $(-\infty)$ до 0; на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ функция $y = \sin x$ убывает от 1 до 0, а функция $y = \log_2 \sin x$ убывает от 0 до $(-\infty)$; на отрезке $[\pi, 2\pi]$ функция $y = \sin x$ неположительна, поэтому на этом промежутке функция $y = \log_2 \sin x$ не определена (и точек графика этой функции здесь нет).

Перечисленные свойства позволяют нам построить требуемые графики на отрезке $[0, 2\pi]$ и продолжить их периодически (рис. 145, 146).

Предыдущие рассуждения показывают, как график функции помогает выбрать необходимые промежутки для исследования свойств сложных функций и тем самым помогает построить график сложной функции.

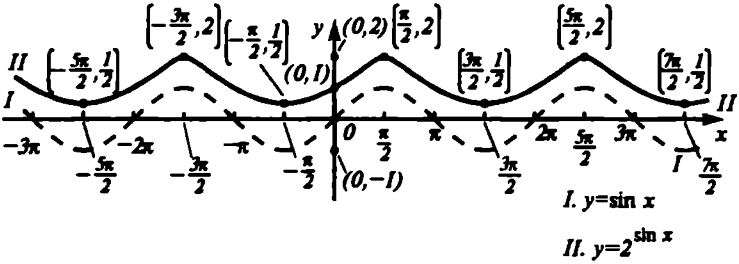


Рис. 145.

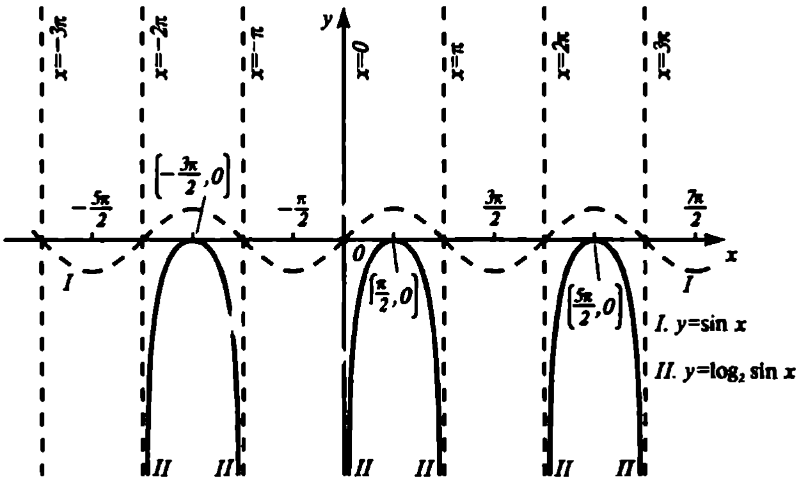


Рис. 146.

Сложение графиков. Пусть даны функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Тогда на общей части их областей существования определена функция $y=f(x)+g(x)$. Пусть точка $M_1(x_0, y_1)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, а точка $M_2(x_0, y_2)$ принадлежит графику функции $y=g(x)$, причем число x_0 принадлежит общей части областей существования функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Тогда точка $M_3(x_0, y_1+y_2)$ принадлежит графику функции $y=f(x)+g(x)$. Значит, для построения графика функций $y=f(x)+g(x)$ надо:

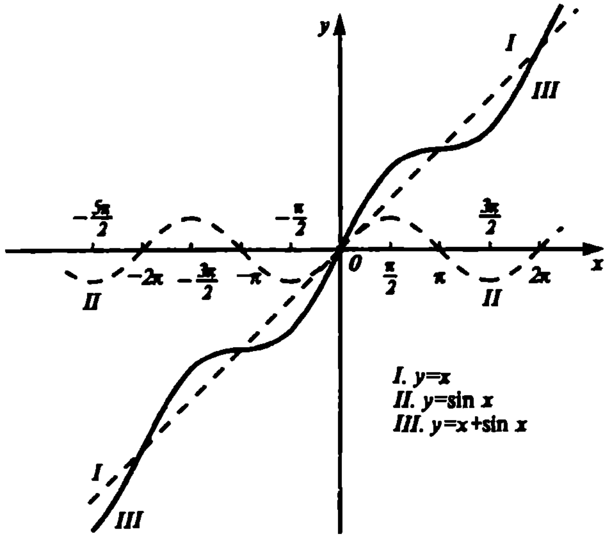


Рис. 147.

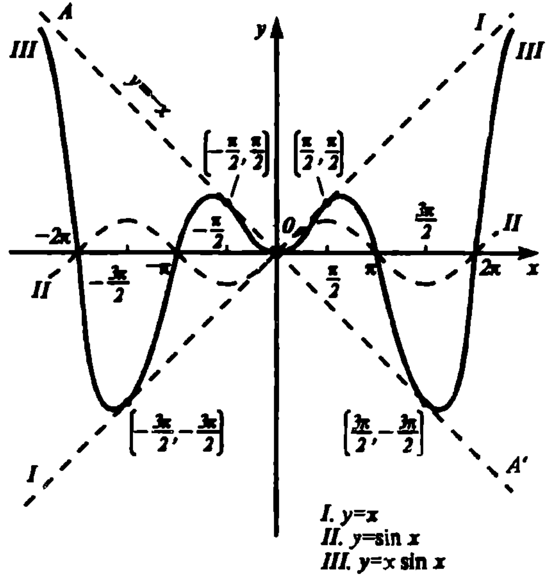


Рис. 148.

а) оставить те точки графиков $y=f(x)$ и $y=g(x)$, у которых x входит в общую часть областей существования этих функций;

б) для каждого такого x произвести алгебраическое сложение ординат (соответствующих данному x) этих двух графиков.

Построим этим методом график функции $y=x+\sin x$ (рис. 147).

Умножение графиков. Пусть даны функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Тогда на общей части их областей существования определена функция $y=f(x)g(x)$. Пусть точка $M_1(x_0, y_1)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, а точка $M_2(x_0, y_2)$ принадлежит графику функции $y=g(x)$. Ясно, что число x_0 принадлежит общей части областей существования функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Тогда точка $M_3(x_0, y_1y_2)$ принадлежит графику функции $y=f(x)g(x)$. Значит, для построения графика функций $y=f(x)g(x)$ надо:

а) оставить те точки графиков $y=f(x)$ и $y=g(x)$, у которых x входит в общую часть областей существования этих функций;

б) для каждого такого x произвести умножение ординат (соответствующих данному x) этих двух графиков.

Построим этим методом график функции $y=x\sin x$ (рис. 148).

УПРАЖНЕНИЯ

Найти область определения и область изменения функций (**1** — **6**):

1. $y=\sqrt{x-1}$. **2**. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$. **3**. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}$.

4. $y=\sqrt[3]{\sqrt{1+x}}$. **5**. $y=\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x+4}$. **6**. $y=\sqrt{x^2-1}$.

Совпадают ли области определения функций (если нет, то найти общую часть областей определений сравниваемых функций) (**7** — **14**):

7. $y=x$ и $y=\dfrac{x^2}{x}$; **8**. $y=\sin\pi x$ и $y=\operatorname{tg}\pi x$;

9. $y=\cos\pi x$ и $y=\operatorname{ctg}\pi x$; **10**. $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$;

11. $y=\arcsin x$ и $y=\operatorname{arctg}x$; **12**. $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$;

13. $y=\arcsin x$ и $y=\operatorname{arcctg}x$; **14**. $y=\arccos x$ и $y=\operatorname{arcctg}x$?

15. Что значит:
— функция ограничена сверху (снизу);
— функция не является ограниченной сверху (снизу);
— функция ограничена;
— функция не является ограниченной?

16. Показать, что функция $y=\frac{1}{x}$ не является ограниченной ни сверху, ни снизу.

17. Показать, что функция $y=x^2$ не является ограниченной сверху.

18. Показать, что функция $y=x^3$ не является ограниченной.

19. Приведите пример функции, которая не является ни четной, ни нечетной.

20. Всякая ли функция может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций?

Рассмотреть примеры: 1) $y=\sqrt{x}$, 2) $y=\log_2 x$.

Доказать монотонность функций (21 — 24):

21. $y=\log_{1/2} x$; 22. $y=2^x$; 23. $y=\sqrt{x}$; 24. $y=x^3$.

Является ли монотонной функция (если нет, то найти интервалы монотонности) (25 — 43):

25. $y=\frac{1}{|x|}$; 26. $y=x-[x]$; 27. $y=\operatorname{sign}\lg x$;

28. $y=\sqrt[3]{x^2}$; 29. $y=\log_{1/2}\arccos x$; 30. $y=\operatorname{arctg} x^2$;

31. $y=\sqrt{5-4x}$; 32. $y=\sin\arccos x$; 33. $y=\operatorname{tg}^2 x$;

34. $y=\operatorname{sign} x$; 35. $y=\lg\cos x$; 36. $y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}$;

37. $y=\operatorname{arctg} x$; 38. $y=\frac{x+1}{x-2}$; 39. $y=|x^2-3x+2|$;

40. $y=\sqrt{1-x^2}$; 41. $y=[\sin x]$; 42. $y=2^{\operatorname{tg} x}$;

43. $y=\frac{1}{\arcsin x}$?

44. Может ли сумма двух монотонных функций быть немонотонной функцией?

45. Всегда ли произведение монотонно возрастающих функций есть монотонно возрастающая функция?

46. Пусть на отрезке [0; 2] дана функция

$$\begin{cases} y=x^2, & \text{если } 0\le x<1,\\ 5, & \text{если } x=1,\\ x+3, & \text{если } 1<x\le 2. \end{cases}$$

Представить ее в виде разности двух монотонно возрастающих функций.

47. Можно ли немонотонную функцию представить в виде разности двух монотонных функций?

48. Доказать, что функция $y=\{x\}$ (дробная часть x) является периодической функцией. Найти ее период и построить график этой функции.

49. Привести пример функции, не являющейся монотонной, периодом которой является любое рациональное число.

50. Найти период функций $y = \cos(\sin x)$ и $y = \sqrt{\sin x}$.

51. Дана периодическая функция с периодом $T = 2\pi$, которая задается на отрезке $[-\pi; \pi]$ следующим образом:

$$\begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \le x \le 0, \\ x, & \text{если } \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Построить ее график.

52. Периодическая функция с периодом $T = 2$ определяется на отрезке $[-1; 1]$ следующим образом:

$$\begin{cases} x+1, & \text{если } -1 \le x \le 0, \\ x, & \text{если } \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Построить ее график.

53. Периодическая функция с периодом $T = 3$ задана следующим образом: $y = 2 - x$, если $0 < x \le 3$. Построить ее график.

54. Показать, что любое число T такое, что $0 < T < 2\pi$, не является периодом функции $y = \sin x$.

55. Показать, что число $T = \pi$ является наименьшим периодом для функции $y = \operatorname{tg} x$.

56. Показать, что любое число T такое, что $0 < T < \pi$, не является периодом функции $y = \operatorname{ctg} x$.

57. Показать, что число $T = 2\pi$ является наименьшим периодом для функции $y = \cos x$.

58. Доказать, что для любого x справедливо неравенство $|\sin x| \le |x|$.

59. Доказать, что для любого x из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство $|\operatorname{tg} x| \ge |x|$.

В одной и той же системе координат построить график указанных групп функций и выяснить их взаимное расположение (**60** — **65**):

60. $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$.

61. $y = x$, $y = \arcsin x$.

62. $y = x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

63. $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$.

64. $y = -x + \frac{\pi}{2}$, $y = \cos x$.

65. $y = -x + \frac{\pi}{2}$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Построить график следующей функции (**66** — **143**):

66. $y = \sqrt{\cos x}$. **67**. $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$. **68**. $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$.

69. $y=\sqrt{2^x}$. 70. $y=\sin^2 x$. 71. $y=\operatorname{ctg}^2 x$.

72. $y=\cos^3 x$. 73. $y=\log_2^2 x$. 74. $y=\arcsin x^2$.

75. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. 76. $y=[\sin x]$. 77. $y=\left[\frac{1}{x}\right]$.

78. $y=[2^x]$. 79. $y=[\log_2 x]$. 80. $y=[\arcsin x]$.

81. $y=[\operatorname{arctg} x]$. 82. $y=[\arccos x]$. 83. $y=[\operatorname{arcctg} x]$.

84. $y=\operatorname{sign}\arccos x$. 85. $y=\operatorname{sign}\operatorname{arctg} x$. 86. $y=\operatorname{sign}\cos x$.

87. $y=\operatorname{sign} x^2$. 88. $y=[x^2]$. 89. $y=\operatorname{sign}\frac{1}{x}$.

90. $y=\operatorname{sign}\lg x$. 91. $y=[\sqrt{x}]$. 92. $y=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$.

93. $y=\log_2[\operatorname{tg} x]$. 94. $y=\log_{1/2}[\sin x]$. 95. $y=\arcsin\cos x$.

96. $y=\begin{cases} 2^x, & \text{если } x\le -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } -1<x<0, \\ x^2, & \text{если } x\ge 0. \end{cases}$ 97. $y=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x\le -1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{если } -1<x\le 1, \\ \operatorname{arctg} x, & \text{если } 1<x. \end{cases}$

98. $y=\begin{cases} \operatorname{sign} x, & \text{если } x\le -\frac{3\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{если } -\frac{3\pi}{2}<x\le 0, \\ \operatorname{arcctg} x, & \text{если } 0<x<1, \\ \log_2 x, & \text{если } 1\le x. \end{cases}$

99. $y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\le -2, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{если } -2<x<0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0\le x\le 4, \\ \log_2 x, & \text{если } 4<x. \end{cases}$

100. $y=\begin{cases} [\sin x], & \text{если } x<-\pi, \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } -\pi\le x\le -\frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{если } -\frac{2\pi}{3}<x<0, \\ \sin x, & \text{если } 0\le x<\frac{5\pi}{6}, \\ \operatorname{sign}\cos x, & \text{если } \frac{5\pi}{6}\le x. \end{cases}$

101. $y = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & \text{если } x \le -2, \\ \cos x, & \text{если } -2 < x < -1, \\ x^2, & \text{если } -1 \le x < 2, \\ \sqrt{x}, & \text{если } 2 \le x. \end{cases}$

102. $y = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x \le -1, \\ \arccos x, & \text{если } -1 < x \le 0, \\ \arcsin x, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } 1 < x. \end{cases}$

103. $y = \begin{cases} \operatorname{arcctg} x, & \text{если } x \le -1, \\ \arcsin x, & \text{если } -1 < x < 0, \\ \arccos x, & \text{если } 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ \log_{1/2} x, & \text{если } \dfrac{1}{2} < x. \end{cases}$

104. $y = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, & \text{если } x \le -\dfrac{5\pi}{4}, \\ \sin x, & \text{если } -\dfrac{5\pi}{4} < x \le -1, \\ 2^x, & \text{если } -1 < x \le 0, \\ \log_{1/2} x, & \text{если } 0 < x \le \dfrac{1}{4}, \\ \sqrt{x}, & \text{если } \dfrac{1}{4} < x. \end{cases}$

105. $y = \begin{cases} [\operatorname{arctg} x], & \text{если } x \le -\dfrac{\pi}{6}, \\ \cos x, & \text{если } -\dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } \dfrac{\pi}{4} < x < \pi, \\ \sin x, & \text{если } \pi \le x \le \dfrac{3\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{если } \dfrac{3\pi}{2} < x. \end{cases}$

106. $y = x^2 + 5|x - 1| + 1$. 107. $y = |-3x + 2| - |2x - 3|$.
108. $y = |x^2 - 3x + 2| - |2x - 3|$. 109. $y = (x + 1)(|x| - 2)$.
110. $y = \dfrac{2x + 1}{2 - x}$. 111. $y = 1 - \dfrac{1}{|x|}$. 112. $y = \dfrac{2x - 6}{|3 - x|}$. 113. $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x+1}$
114. $y = 2 \cdot 3^{x+1} - 1$. 115. $y = 10^{-|x|}$.
116. $y = \left|\log_{\frac{1}{\pi}} x^6\right|$. 117. $y = \sqrt{\lg \sin x}$.
118. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$. 119. $y = \sin^2 x - \cos^2 x$.

120. $y=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$. **121.** $y=\arcsin \operatorname{tg} x$.

122. $y=\arccos\left(\frac{1}{\sin x}\right)$. **123.** $y=\frac{1}{x}\sin x$.

124. $y=\cos \lg x$. **125.** $y=2\sin|2x|$.

126. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1)$. **127.** $y=\frac{1}{3}\arccos(x-1)+1$.

128. $y=-2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$. **129.** $y=\arcsin(x+1)-1$.

130. $y=2\operatorname{tg}\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$. **131.** $y=-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

132. $y=\log_{1/2}\frac{1}{1-x^2}$. **133.** $y=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

134. $y=\sin 2\arccos x$. **135.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

136. $y=\arccos\cos x$. **137.** $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$.

138. $y=\cos 2x-\sqrt{1-\sin 2x}$. **139.** $y=\frac{|x-2|+1}{|x+3|}$.

140. $y=3+2^{3\cos\frac{x}{3}}$. **141.** $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

142. $y=\frac{|x-1|}{1-x^2}$. **143.** $y=\sin\frac{1}{x^2}$.

Найти обратные функции и построить их графики для функции с заданной областью определения (144 — 153):

	Функция	Область определения
144.	$y = 3x - 2$	$(-\infty; \infty)$
145.	$y = -(x+1)^2 - 2$	$(-\infty; -1)$
146.	$y = \dfrac{x+1}{x-1}$	$(1; \infty)$
147.	$y = \sqrt{x^2 - 4}$	$[2; \infty)$
148.	$y = -\sqrt{4 - x^2}$	$[-2; 0]$
149.	$y = \log_{1/3}(x+1)$	$(-1; \infty)$
150.	$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(-\infty; 0]$
151.	$y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$	$\left[-\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right]$
152.	$y = -2 + \cos x$	$[0; \pi]$
153.	$y = 2\,\mathrm{tg}\, x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Глава VII. УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Пусть даны две функции: функция $y=f(x)$ с областью существования P и функция $y=g(x)$ с областью существования L. Пусть область M есть пересечение областей существования этих функций, т.е. $M=P\cap L$ (в частности, область M может быть пустым множеством).

Пусть стоит задача: найти все числа α из области M, для каждого из которых справедливо числовое равенство $f(\alpha)=g(\alpha)$. В таких случаях говорят, что стоит задача *решить уравнение* $f(x)=g(x)$ *с одним неизвестным* x или что *дано уравнение* $f(x)=g(x)$ *с одним неизвестным* x.

В этой главе рассматриваются некоторые способы решения таких уравнений, поэтому дальше вместо слов «уравнение $f(x)=g(x)$ с одним неизвестным x» будем говорить просто «уравнение $f(x)=g(x)$».

§ 1. Основные определения и утверждения равносильности уравнений

Областью допустимых значений (ОДЗ) *уравнения* $f(x)=g(x)$ называется *общая часть* (*пересечение*) областей существования функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, т.е. множество всех числовых значений неизвестного x, при каждом из которых имеют смысл (определены) и левая, и правая части уравнения. Всякое число x из ОДЗ уравнения называется *допустимым значением* для данного уравнения.

Число α из ОДЗ уравнения называется *решением* (или корнем) уравнения $f(x)=g(x)$, если при подстановке его вместо неизвестного x уравнение превращается в верное числовое равенство $f(\alpha)=g(\alpha)$.

Решить уравнение $f(x) = g(x)$ — это значит найти множество всех его корней. Отметим, что это множество может оказаться и пустым множеством, что возможно только в двух случаях: а) если ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$ есть пустое множество; б) если ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$ есть непустое множество M, но ни для одного числа $\alpha \in M$ не выполняется числовое равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$. Если множество всех корней уравнения $f(x) = g(x)$ — пустое множество, то обычно говорят, что уравнение $f(x) = g(x)$ *не имеет корней*, поэтому иногда говорят так: решить уравнение $f(x) = g(x)$ — это значит найти все его корни или доказать, что это уравнение не имеет корней. Если множество всех корней уравнения $f(x) = g(x)$ состоит из k не равных между собой чисел $x_1, x_2, ..., x_k$, то говорят, что уравнение $f(x) = g(x)$ имеет *только k корней:* $x_1, x_2, ..., x_k$, т.е. множество всех его корней есть множество $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Если множество всех корней уравнения $f(x) = g(x)$ состоит из одного числа x_1, то говорят еще, что уравнение $f(x) = g(x)$ имеет *единственный корень* x_1.

Пусть даны два уравнения: $f(x) = g(x)$ и $p(x) = \varphi(x)$. Если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого.

Отсюда следует, в частности, что если первое уравнение не имеет корней, то второе уравнение есть его следствие. Другими словами, все это можно сказать так: если множество всех корней первого уравнения есть часть (подмножество) множества всех корней второго уравнения, то второе уравнение является следствием первого.

Пусть даны два уравнения: $f(x) = g(x)$ $p(x) = \varphi(x)$. Если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, а любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения, то такие два уравнения называются *равносильными* (или *эквивалентными*). Другими словами, два уравнения равносильны, если каждое из них является следствием другого. При этом, в частности, подразумевается, что если каждое из этих уравнений не имеет корней, то такие два уравнения равносильны. Замена одного уравнения другим уравнением, ему равносильным, называется *равносильным переходом* от одного уравнения к другому.

Пусть даны уравнения $f(x) = g(x)$ $p(x) = \varphi(x)$ и пусть дано некоторое множество M значений неизвестного x. Если любой корень первого уравнения принадлежащий множеству M, является корнем второго уравнения, а любой корень второго уравнения, принадлежащий множеству M, является корнем первого уравнения, то такие два уравнения называются *равносильными на множестве M*. При этом, в частности, подразумевается, что если каждое из этих уравнений не имеет корней на множестве M, то такие два уравнения равносильны на множестве M.

Замена одного уравнения другим уравнением, равносильным ему на множестве M, называется *равносильным переходом на множестве M* от одного уравнения к другому.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих введенные понятия. Пусть дано уравнение

$$\sqrt{1-x} = \log_2 (x-1).$$

Область допустимых значений этого уравнения есть пустое множество. Действительно, область существования функции $y = \sqrt{1-x}$ есть множество $X_1 = (-\infty; 1]$, а область существования функции $y = \log_2 (x-1)$ — множество $X_2 = (1; +\infty)$. Общая часть (пересечение) этих областей — пустое множество.

В данном примере, после того как найдена ОДЗ уравнения, оно уже решено, ибо установлено, что уравнение не имеет корней.

Пусть дано уравнение

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4-x^2}.$$

Область допустимых значений этого уравнения есть множество, состоящее из двух чисел: -2 и 2. Действительно, область существования функции $y = \sqrt{x^2-4}$ есть множество $X_1 = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, а область существования функции $y = \sqrt{4-x^2}$ — множество $X_2 = [-2; 2]$. Общая часть (пересечение) этих областей — множество $X =$

$= X_1 \cap X_2 = \{-2; 2\}$. Подстановкой числа (-2) и числа 2 в данное уравнение убеждаемся, что оба эти числа являются его корнями. Следовательно, данное уравнение имеет только два корня $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$. Значит, и в этом примере, после того как найдена ОДЗ уравнения, оно уже решено.

Приведенные примеры показывают, что при решении уравнения бывает полезно знать ОДЗ этого уравнения.

Однако можно привести примеры уравнений, для решения которых не обязательно знать их ОДЗ.

Например, пусть дано уравнение

$$\sqrt{\log_2 (x + \sin 2x)} = -1.$$

Это уравнение не имеет корней, так как при любом значении x из ОДЗ уравнения имеем неверное числовое равенство. В то же время вычисление ОДЗ этого уравнения было бы непростой задачей.

Два уравнения $x + 4 = 0$ и $(x^2 + 1)(x + 4) = 0$ равносильны на множестве всех действительных чисел, ибо каждое из этих уравнений имеет только один корень — число (-4).

Рассмотрим два уравнения: $\sqrt{x} = 1$ и $x^2 = 1$. Первое уравнение имеет только один корень — число 1, которое является и корнем второго уравнения. Поэтому уравнение $x^2 = 1$ есть следствие уравнения $\sqrt{x} = 1$. Но уравнение $x^2 = 1$ имеет еще один корень — число (-1), которое не только не является корнем уравнения $\sqrt{x} = 1$, но даже не входит в его ОДЗ. Таким образом, данные уравнения не являются равносильными на множестве всех действительных чисел. Но эти уравнения равносильны на ОДЗ первого уравнения (т.е. на множестве неотрицательных чисел), ибо на этом множестве каждое из них имеет только один корень — число 1.

Приведем некоторые **утверждения** равносильности уравнений.

1. *Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) - g(x) = 0$ равносильны.*

2. *Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) + \alpha = g(x) + \alpha$ равносильны для любого действительного числа α.*

3. *Уравнения $f(x) = g(x)$ и $\alpha f(x) = \alpha g(x)$ равносильны для любого действительного отличного от нуля числа α.*

4. *Уравнения $f(x) = g(x)$ и $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильны для любого фиксированного положительного и не равного единице числа a.*

Доказательства справедливости утверждений сходны между собой, поэтому докажем, например, утверждение 4.

Пусть число x_1 является некоторым корнем уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, т.е. пусть существуют числа $f(x_1)$ и $g(x_1)$, для которых справедливо числовое равенство $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Поскольку фиксированное число a удовлетворяет условиям $a > 0$ и $a \neq 1$, то из справедливости числового равенства $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$ вытекает справедливость числового равенства $f(x_1) = g(x_1)$. Следовательно, число x_1 является корнем уравнения $f(x) = g(x)$. Такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Значит, любой корень уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ является корнем уравнения $f(x) = g(x)$.

Покажем теперь обратное. Пусть число x_2 является некоторым решением уравнения $f(x) = g(x)$, т.е. пусть существуют числа $f(x_2)$ и $g(x_2)$, для которых справедливо числовое равенство $f(x_2) = g(x_2)$. Тогда на основании свойства числовых равенств для любого фиксированного числа a такого, что $a > 0$ и $a \neq 1$, то из справедливо равенство $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$. Следовательно, число x_2 является корнем уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения $f(x) = g(x)$. Значит, любой корень уравнения $f(x) = g(x)$ является корнем уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Итак, если каждое из уравнений $f(x) = g(x)$ и $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) имеет корни, то эти уравнения равносильны.

Заметим, что из доказанного вытекает, в частности, что если одно из этих уравнений не имеет корней, то и другое не имеет корней, т.е. и в этом случае уравнения $f(x) = g(x)$ и $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) равносильны. Утверждение 4 тем самым доказано полностью.

Приведем некоторые утверждения, когда одно уравнение является следствием другого.

5. *Пусть n — натуральное число, тогда уравнение $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ — следствие уравнения $f(x) = g(x)$.*

Доказательство. Согласно утверждению 1 уравнение

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n$$

равносильно уравнению

$$[f(x)]^n - [g(x)]^n = 0,$$

которое на основании формул сокращенного умножения равносильно уравнению (см. гл. II)

$$[f(x) - g(x)]\,\{[f(x)]^{n-1} + [f(x)]^{n-2}\,g(x) + \ldots + [g(x)]^{n-1}\} = 0. \quad (1)$$

Пусть число x_0 является некоторым корнем уравнения $f(x) = g(x)$, т.е. пусть существуют числа $f(x_0)$ и $g(x_0)$, для которых справедливо равенство $f(x_0) = g(x_0)$. Но тогда справедливо и числовое равенство

$$[f(x_0) - g(x_0)]\,\{[f(x_0)]^{n-1} + [f(x_0)]^{n-2}\,g(x_0) + \ldots + [g(x_0)]^{n-1}\} = 0.$$

Следовательно, число x_0 является корнем уравнения (1), которое равносильно уравнению $[f(x)]^n = [g(x)]^n$, а потому число x_0 является его корнем. Такое рассуждение можно провести для любого корня первоначального уравнения. Значит, любой корень уравнения $f(x) = g(x)$ есть корень уравнения $[f(x)]^n = [g(x)]^n$, т.е. в этом случае, действительно, уравнение $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ есть следствие уравнения $f(x) = g(x)$. Если же уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет корней, то тогда очевидно, что уравнение $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ есть его следствие. Утверждение 5 доказано полностью.

6. *Уравнение $f(x) = g(x)$ — следствие уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.*

Доказательство. Пусть число x_0 — некоторый корень уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, т.е. пусть существуют числа $\log_a f(x_0)$ и $\log_a g(x_0)$, для которых справедливо числовое равенство $\log_a f(x_0) = \log a\, g(x_0)$. Из равенства логарифмов двух чисел по одному и тому же основанию следует равенство самих этих чисел, т.е. $f(x_0) = g(x_0)$, следовательно число x_0 является корнем уравнения $f(x) = g(x)$. Такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Значит, любой корень уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ является корнем уравнения $f(x) = g(x)$, т.е. в этом случае, действительно, уравнение $f(x) = g(x)$ есть следствие уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Если же уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ не имеет корней, то тогда очевидно, что уравнение $f(x) = g(x)$ есть его следствие. Утверждение 6 тем самым доказано полностью.

Приведем примеры у т в е р ж д е н и й о равносильности уравнений на множестве.

7. *Пусть n — натуральное число и пусть на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ неотрицательны. Тогда на этом множестве уравнения $f(x) = g(x)$ и $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ равносильны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выше уже доказано (см. утверждение 5), что уравнение $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ есть следствие уравнения $f(x) = g(x)$.

Докажем теперь обратное. Пусть число $x_0 \in M$ есть некоторый корень уравнения $[f(x)]^n = [g(x)]^n$, т.е. пусть существуют неотрицательные числа $f(x_0)$ и $g(x_0)$, для которых справедливо числовое равенство

$$[f(x_0)]^n = [g(x_0)]^n. \qquad (2)$$

Предположим, что число x_0 таково, что одно из чисел $f(x_0)$ или $g(x_0)$ равно нулю. Тогда из равенства (2) следует, что и другое из этих чисел равно нулю, т.е. в этом случае $f(x_0) = g(x_0)$. Следовательно, в этом случае число x_0 является корнем уравнения $f(x) = g(x)$. Предположим теперь, что число x_0 таково, что одно из чисел $f(x_0)$ или $g(x_0)$ не равно нулю. Тогда из числового равенства (2) следует, что и другое из этих чисел также не равно нулю, и согласно условию утверждения 7 оба числа $f(x_0)$ и $g(x_0)$ положительны. Числовое равенство (2) равносильно числовому равенству

$$[f(x_0) - g(x_0)]\,\{[f(x_0)]^{n-1} + [f(x_0)]^{n-2}\,g(x_0) + \ldots$$
$$\ldots + [g(x_0)]^{n-1}\} = 0. \quad (3)$$

Поскольку любая натуральная степень некоторого положительного числа есть положительное число, произведение и сумма положительных чисел есть положительное число, то число $\{[f(x_0)]^{n-1} + [f(x_0)]^{n-2}\,g(x_0) + \ldots + [g(x_0)]^{n-1}\}$ положительно, следовательно, числовое равенство (3) равносильно числовому равенству $f(x_0) - g(x_0) = 0$ или равенству $f(x_0) = g(x_0)$. Последнее числовое равенство означает, что число x_0 является корнем уравнения $f(x) = g(x)$. Такое рассуждение можно провести для любого корня, принадлежащего множеству M, уравнения $[f(x)]^n = [g(x)]^n$. Значит, любой принадлежащий множеству M корень уравнения $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ является корнем уравнения $f(x) = g(x)$, т.е. на множестве M уравнение $f(x) = g(x)$ есть следствие уравнения $[f(x)]^n = [g(x)]^n$.

Если же уравнение $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ не имеет корней, то тогда очевидно, что уравнение $f(x) = g(x)$ есть его следствие в силу определения.

Итак, доказано, что в условиях утверждения 7 уравнения $f(x) = g(x)$ есть следствие уравнения $[f(x)]^n = [g(x)]^n$, чем и завершается доказательство утверждения 7.

8. *Пусть фиксированное число a таково, что $a > 0$ и $a \neq 1$, и пусть на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Тогда на множестве M уравнения $f(x) = g(x)$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильны.*

Доказательство. Выше уже доказано (см. утверждение 6), что уравнение $f(x) = g(x)$ есть следствие уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Докажем теперь обратное. Пусть число $x_0 \in M$ является некоторым корнем уравнения $f(x) = g(x)$, т.е. пусть $f(x_0) > 0$, $g(x_0) > 0$ и $f(x_0) = g(x_0)$. Но тогда равны и логарифмы этих чисел по одному и тому же основанию, т.е. тогда справедливо числовое равенство $\log_a f(x_0) = \log_a g(x_0)$. Следовательно, число x_0 является корнем уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения $f(x) = g(x)$ из множества M.

Итак, любой из множества M корень уравнения $f(x) = g(x)$ является корнем уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, т.е. в этом случае, действительно, уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ есть следствие уравнения $f(x) = g(x)$. Если же уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет корней, то тогда очевидно, что уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ есть его следствие в силу определения.

Итак, доказано, что в условиях утверждения 8 уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ есть следствие уравнения $f(x) = g(x)$, чем и завершается доказательство утверждения 8.

9. *Пусть на некотором множестве M, принадлежащем ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$, функция $y = \varphi(x)$ определена и при любом $x \in M$ $\varphi(x) \neq 0$. Тогда на множестве M уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ равносильны.*

Доказательство. Пусть число $x_1 \in M$ является некоторым корнем уравнения $f(x) = g(x)$, т.е. пусть существуют числа $f(x_1)$ и $g(x_1)$, для которых справедливо числовое равенство $f(x_1) - g(x_1) = 0$. Так как по условию существует число $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_1) \neq 0$, то справедливо и числовое равенство $\varphi(x_1)[f(x_1) - g(x_1)] = 0$, которое равносильно числовому равенству $\varphi(x_1)f(x_1) = \varphi(x_1)g(x_1)$. Последнее числовое равенство означает, что число x_1 является корнем уравнения $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$. Такое рассуждение можно провести для любого корня из множества M уравнения $f(x) = g(x)$. Значит, любой корень из множества M уравнения $f(x) = g(x)$ является корнем уравнения $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$.

Докажем обратное. Пусть число $x_2 \in M$ является некоторым корнем уравнения $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$, т.е. пусть существуют числа $f(x_2)$, $g(x_2)$ и $\varphi(x_2)$, для которых справедливо числовое равенство $f(x_2)\varphi(x_2) = g(x_2)\varphi(x_2)$, равносильное числовому равенству $\varphi(x_2)[f(x_2) - g(x_2)] = 0$. По условию число $\varphi(x_2) \neq 0$, следовательно, последнее числовое равенство равносильно числовому равенству $f(x_2) - g(x_2) = 0$, которое равносильно равенству $f(x_2) = g(x_2)$. Последнее числовое равенство означает, что число x_2 — корень уравнения $f(x) = g(x)$. Такое рассуждение можно провести для любого корня из множества M уравнения $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$. Значит, любой корень из множества M уравнения $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ является корнем уравнения $f(x) = g(x)$. Итак, если каждое из уравнений $f(x) = g(x)$ и $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ имеет корни на множестве M, то эти уравнения равносильны на этом множестве. Заметим, что из доказанного вытекает, в частности, что если одно из этих уравнений не имеет корней на множестве M, то и другое не имеет корней на этом множестве, т.е. и в этом случае уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ равносильны на множестве M. Утверждение 9 тем самым доказано полностью.

Пусть дано n уравнений $f_1(x) = g_1(x)$, $f_2(x) = g_2(x)$, ..., $f_n(x) = g_n(x)$. Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих уравнений. Если стоит задача найти все числа из области Q, каждое из которых является корнем хотя бы одного из этих уравнений, то говорят, что *дана совокупность n уравнений*

$$f_1(x) = g_1(x), f_2(x) = g_2(x), ..., f_n(x) = g_n(x) \qquad (4)$$

и область Q называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) *этой совокупности.*

Отметим, что обычно уравнения совокупности записываются в строчку. Может оказаться, что в совокупности уравнений (4) содержится бесконечно много уравнений.

Число α из ОДЗ совокупности (4) называется *решением* (или *корнем*) этой совокупности, если оно является корнем хотя бы одного уравнения из совокупности.

Решить совокупность уравнений (4) — это значит найти множество всех его корней. Если это множество оказывается пустым множеством, то говорят, что совокупность уравнений (4) *не имеет корней.*

Совокупность уравнений (4) обычно решают следующим образом. Сначала решают каждое уравнение на ОДЗ этой совокупности, т.е. находят множества M_1, M_2, ..., M_n, где M_i — множество всех корней уравнения $f_i(x) = g_i(x)$, принадлежащих ОДЗ этой совокупности. Затем находят множество M_0, являющееся объединением всех этих множеств M_1, M_2, ..., M_n, т.е. $M = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_n$. Это множество и будет множеством всех корней совокупности уравнений (4). Если множество M_0 состоит из k не равных между собой чисел: $M_0 = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, то говорят, что совокупность уравнений (4) имеет *только k корней* $x_1, x_2, ..., x_k$.

Говорят, что уравнение

$$p(x) = \varphi(x) \qquad (5)$$

равносильно совокупности уравнений (4), если любой корень уравнения (5) является корнем совокупности (4), а любой корень совокупности (4) является корнем уравнения (5).

При этом, в частности, подразумевается, что если уравнение (5) не имеет корней и совокупность уравнений (4) не имеет корней, то уравнение (5) равносильно совокупности уравнений (4). Замена уравнения (5) равносильной ему совокупностью (4) называется *равносильным переходом* от уравнения (5) к совокупности (4).

Иногда возникает необходимость совершить равносильный переход от уравнения к совокупности уравнений на некотором множестве M.

Говорят, что уравнение (5) *равносильно на множестве M* совокупности уравнений (4), если любой корень уравнения (5) принадлежащий множеству M, является корнем совокупности (4), а любой корень совокупности (4), принадлежащий множеству M, является корнем уравнения (5).

Замена уравнения другим уравнением или совокупностью уравнений будет в дальнейшем называться преобразованием уравнения.

§ 2. Простейшие уравнения

Пусть $y = f(x)$ — основная элементарная функция, b — некоторое фиксированное действительное число. Тогда уравнение

$$f(x) = b$$

принято называть *простейшим уравнением*.

Очевидно, что ОДЗ простейшего уравнения совпадает с областью существования основной элементарной функции $y=f(x)$. Рассмотрим простейшее уравнение $f(x) = b$ на некотором множестве X, принадлежащем ОДЗ, причем в качестве множества X будем брать либо отрезок $[x_1, x_2]$, либо интервал (x_1, x_2), либо полуинтервалы $(x_1, x_2]$, $[x_1, x_2)$, либо лучи $[x_1, +\infty)$, $(x_1, +\infty)$, $(-\infty, x_1)$, $(-\infty, x_1]$, либо всю числовую прямую $(-\infty, +\infty)$. Через Y обозначим область значений функции $y = f(x)$, определенной на множестве X. Пусть основная элементарная функция $y=f(x)$ строго монотонная на множестве X; тогда если $b \in Y$, то уравнение $f(x) = b$ имеет единственный корень на множестве X, а если $b \notin Y$, то уравнение $f(x) = b$ не имеет корней на множестве X, так как $f(x_0) \in Y$ при любом $x_0 \in X$ и, следовательно, $f(x_0) \neq b$ при любом $x_0 \in X$. В дальнейшем, решая простейшие уравнения, будем применять это утверждение.

Алгебраическое уравнение. Пусть n — некоторое фиксированное натуральное число, тогда уравнение

$$x^n = b \tag{1}$$

принято называть ***простейшим алгебраическим уравнением***.

Функция $y=x^n$ определена на всей числовой прямой, поэтому ОДЗ уравнения (1) есть множество $X= (-\infty, +\infty)$. Поскольку свойства функции $y=f(x)$, используемые при решении уравнения (1), различны при нечетном и четном n, то рассмотрим два случая:

1. Пусть $n = 2m - 1$, где m — некоторое фиксированное натуральное число, тогда уравнение (1) принимает вид

$$x^{2m-1} = b. \tag{1a}$$

Функция $y = x^{2m-1}$ на всей числовой прямой является строго возрастающей функцией, и область ее значений Y также есть вся числовая прямая $Y= (-\infty, +\infty)$. Поэтому при каждом b уравнение (1a) имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Согласно определению корня уравнения справедливо числовое равенство $x_1^{2m-1} = b$. Это числовое равенство равносильно:

числовому равенству $x_1 = \sqrt[2m-1]{b}$, если b — положительное число;

числовому равенству $x_1 = 0$, если $b = 0$;

числовому равенству $x_1 = -\sqrt[2m-1]{|b|}$, если b — отрицательное число.

Итак, при каждом b множество всех корней уравнения (1а) состоит из единственного числа x_1, другими словами, уравнение (1а) имеет единственный корень x_1, причем $x_1 = \sqrt[2m-1]{b}$, если $b > 0$, $x_1 = 0$, если $b = 0$, $x_1 = -\sqrt[2m-1]{|b|}$, если $b < 0$.

2. Пусть $n = 2m$, где m — некоторое фиксированное натуральное число, тогда уравнение (1) принимает вид

$$x^{2m} = b. \tag{1б}$$

Разобьем ОДЗ уравнения (1б) на два множества: $X_1 = [0, +\infty)$ и $X_2 = (-\infty, 0)$, и решим уравнение (1б) на каждом из них.

На множестве X_1 функция $y = x^{2m}$ является строго возрастающей функцией и областью ее значений является луч $Y = [0, +\infty)$. Следовательно, если b — отрицательное число, то на множестве X_1 уравнение (1б) не имеет корней, а если b — неотрицательное число, то на множестве X_1 уравнение (1б) имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Согласно определению корня уравнения справедливо числовое равенство $x_1^{2m} = b$. Это равенство равносильно:

числовому равенству $x_1 = 0$, если $b = 0$;

числовому равенству $x_1 = \sqrt[2m]{b}$, если b — положительное число.

На множестве X_2 функция $y = x^{2m}$ является строго убывающей функцией и областью ее значений является луч $Y = (0, +\infty)$. Следовательно, если b — отрицательное число или нуль, то на множестве X_2 уравнение (1б) не имеет решений, если b — положительное число, то на множестве X_2 уравнение (1б) имеет единственный корень, который обозначим через x_2. Так как функция $y = x^{2m}$ на всей ОДЗ является четной функцией, то $x_2 = -x_1$, т.е. $x_2 = -\sqrt[2m]{b}$.

Итак, при каждом отрицательном b уравнение (1б) не имеет корней, при $b = 0$ уравнение (1б) имеет единственный корень $x_1 = 0$, а при каждом положительном b множество всех корней уравнения (1б) состоит из двух чисел $x_1 = \sqrt[2m]{b}$ и $x_2 = -\sqrt[2m]{b}$.

В табл. 5 приведены итоги решения уравнения (1).

Таблица 5

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$x^{2m-1} = b$	$x_1 = \sqrt[2m-1]{b}$	$x_1 = 0$	$x_1 = -\sqrt[2m-1]{\lvert b\rvert}$
$x^{2m} = b$	$x_1 = \sqrt[2m]{b}$, $x_2 = -\sqrt[2m]{b}$	$x_1 = 0$	нет решений

Дробное уравнение. Пусть n — некоторое фиксированное натуральное число, тогда уравнение

$$x^{-n} = b \qquad (2)$$

принято называть *простейшим дробным уравнением.*

Функция $y = x^{-n}$ определена на множестве всех отличных от нуля действительных чисел, поэтому ОДЗ уравнения (2) есть множество $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Поскольку свойства функции $y = x^{-n}$, используемые при решении уравнения (2), различны при нечетном и четном n, то рассмотрим два случая:

1. Пусть $n = 2m - 1$, где m — некоторое фиксированное натуральное число, тогда уравнение (2) принимает вид

$$x^{-(2m-1)} = b. \qquad (2а)$$

Разобьем ОДЗ уравнения (2а) на два множества: $X_1 = (-\infty, 0)$ и $X_2 = (0, +\infty)$, и решим уравнение (2а) на каждом из них. На множестве X_1 функция $y = x^{-2m+1}$ является строго убывающей функцией и областью ее значений является луч $Y_1 = (-\infty, 0)$. Следовательно, если b — неотрицательное число, то на множестве X_1 уравнение (2а) не имеет корней, а если b — отрицательное число, то на множестве X_1 уравнение (2а) имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Согласно определению корня уравнения справедливо числовое равенство $x_1^{-2m+1} = b$, которое, учитывая, что b — отрицательное число, равносильно числовому равенству $x_1 = -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}$.

На множестве X_2 функция $y = x^{-2m+1}$ является строго убывающей функцией и областью ее значений является луч $Y_2 = (0, +\infty)$. Следовательно, если b — отрицательное число или нуль, то на множестве X_2 уравнение (2а) не имеет корней, а если b — положительное число, то на множестве X_2 уравнение (2а) имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Поскольку x_1 — корень уравнения (2а), то справедливо числовое равенство $x_1^{-2m+1} = b$, которое, учитывая, что b — положительное число, равносильно числовому равенству $x_1 = \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}$.

Итак, если $b = 0$, то уравнение (2а) не имеет корней, а при каждом отличном от нуля b уравнение (2а) имеет единственный корень x_1, причем $x_1 = -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}$, если $b < 0$, и $x_1 = \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}$, если $b > 0$.

2. Пусть $n = 2m$, где m — некоторое фиксированное натуральное число, тогда уравнение (2) принимает вид

$$x^{-2m} = b. \qquad (2б)$$

Разобьем ОДЗ уравнения (2б) на два множества: $X_1 = (-\infty, 0)$ и $X_2 = (0, +\infty)$, и решим уравнение (2б) на каждом из них.

На множестве X_2 функция $y = x^{-2m}$ является строго убывающей функцией и областью ее значений является луч $Y = (0, +\infty)$. Следовательно, если b — отрицательное число или нуль, то на множестве X_2 уравнение (2б) не имеет корней, а если b — положительное число, то на множестве X_2 уравнение (2б) имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Поскольку x_1 — корень уравнения (2б), то справедливо следующее числовое равенство: $x_1^{-2m} = b$, которое, учитывая, что b — положительное число, равносильно числовому равенству $x_1 = \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$.

На множестве X_1 функция $y = x^{-2m}$ является строго возрастающей функцией и областью ее значений является луч $Y = (0, +\infty)$. Следовательно, если b — отрицательное число или нуль, то на множестве X_1 уравнение (2б) не имеет корней, а если b — положительное число, то на множестве X_1 уравнение (2б) имеет единственный корень, который обозначим через x_2. Так как функция $y = x^{-2m}$ на всей ОДЗ является четной функцией, то $x_2 = -x_1$, т.е. $x_2 = -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$.

Итак, при каждом неположительном b уравнение (2б) не имеет корней, при каждом положительном b множество всех корней уравнения (2б) состоит из двух чисел $x_1 = \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$ и $x_2 = -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$.

В табл. 6 приведены итоги решения уравнения (2).

Таблица 6

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$x^{-(2m-1)} = b$	$x_1 = \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}$	нет решений	$x_1 = -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{\lvert b\rvert}}$
$x^{-2m} = b$	$x_1 = \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$, $x_2 = -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$	нет решений	нет решений

Степенные уравнения. Пусть α — некоторое фиксированное положительное нецелое число, тогда уравнения

$$x^{\alpha} = b, \tag{3}$$
$$x^{-\alpha} = b \tag{4}$$

принято называть *простейшими степенными уравнениями*.

Естественной областью определения функции $y = x^{\alpha}$ является множество всех неотрицательных чисел. Значит ОДЗ уравнения (3) есть множество $X = [0, +\infty)$. Функция $y = x^{\alpha}$ на множестве X является строго возрастающей функцией, и областью ее значений является луч $Y = [0, +\infty)$. Поэтому уравнение (3) при каждом отрицательном b не имеет корней, а при каждом неотрицательном b имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Согласно определению корня уравнения справедливо числовое равенство $x_1^{\alpha} = b$. Это числовое равенство равносильно:

числовому равенству $x_1 = 0$, если $b = 0$;

числовому равенству $x_1 = b^{\frac{1}{\alpha}}$, если b — положительное число.

Итак, при каждом отрицательном b уравнение (3) не имеет корней, а при каждом неотрицательном b уравнение (3) имеет единственный корень x_1, причем $x_1 = 0$, если $b = 0$; $x_1 = b^{\frac{1}{\alpha}}$, если $b > 0$.

Естественной областью определения функции $y = x^{-\alpha}$ является множество всех положительных чисел. Значит ОДЗ уравнения (4) является множество $X = (0, +\infty)$. Функция $y = x^{-\alpha}$ на множестве X является строго убывающей функцией и областью ее значений является луч $Y = (0, +\infty)$. Поэтому уравнение (4) при каждом неположительном b не имеет корней, а при каждом положительном b имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Поскольку x_1 — корень уравнения (4), то справедливо следующее числовое равенство $x_1^{-\alpha} = b$, которое равносильно числовому равенству $x_1 = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Итак, при каждом неположительном b уравнение (4) не имеет корней, а при каждом положительном b уравнение (4) имеет единственный корень $x_1 = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

В табл. 7 приведены итоги решения уравнений (3) и (4).

Таблица 7

	$b>0$	$b=0$	$b<0$
$x^{\alpha}=b$	$x_1=b^{\frac{1}{\alpha}}$	$x_1=0$	нет решений
$x^{-\alpha}=b$	$x_1=\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$	нет решений	нет решений

Показательное уравнение. Пусть a — некоторое фиксированное положительное и не равное единице число, тогда уравнение

$$a^x=b \tag{5}$$

принято называть *простейшим показательным уравнением*.

Естественной областью определения функции $y=a^x$ является множество всех действительных чисел. Значит ОДЗ уравнения (5) есть множество $X=(-\infty, +\infty)$. Функция $y=a^x$ на множестве X является строго монотонной функцией, и областью ее значений является луч $Y=(0, +\infty)$. Следовательно, при каждом неположительном числе b уравнение (5) не имеет корней, а при каждом положительном b уравнение (5) имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Поскольку x_1 — корень уравнения (5), то справедливо числовое равенство $a^{x_1}=b$, которое равносильно числовому равенству $x_1=\log_a b$.

Итак, при каждом неположительном b уравнение (5) не имеет корней, а при каждом положительном b единственный корень $x_1=\log_a b$.

В табл. 8 приведены итоги решения уравнения (5).

Таблица 8

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$ax = b$	$x_1 = \log_a b$	нет решений	нет решений

Логарифмическое уравнение. Пусть a — некоторое фиксированное положительное и не равное единице число, тогда уравнение

$$\log_a x = b \qquad (6)$$

принято называть *простейшим логарифмическим уравнением*.

Естественной областью определения функции $y = \log_a x$ является множество всех положительных чисел. Значит ОДЗ уравнения (6) есть множество $X = (0, +\infty)$.

Функция $y = \log_a x$ на множестве X является строго монотонной функцией, и областью ее значений является вся числовая прямая $Y = (-\infty, +\infty)$.

Поэтому при каждом b уравнение (6) имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Поскольку x_1 — корень уравнения (6), то справедливо следующее числовое равенство $\log_a x_1 = b$, которое равносильно числовому равенству $x_1 = a^b$. Следовательно, при каждом b уравнение (6) имеет единственный корень $x_1 = a^b$.

В табл. 9 приведены итоги решения уравнения (6).

Таблица 9

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$\log_a x = b$	$x_1 = a^b$	$x_1 = 1$	$x_1 = a^b$

Тригонометрические уравнения. Уравнения $\cos x = b$, $\sin x = b$, $\operatorname{tg} x = b$, $\operatorname{ctg} x = b$ принято называть *простейшими тригонометрическими уравнениями*.

Сделаем несколько общих замечаний. Пусть надо решить простейшее уравнение $f(x) = b$, где $y = f(x)$ — основная элементарная тригонометрическая функция. Будем говорить, что простейшее уравнение $f(x) = b$ имеет главный период T, если функция $y = f(x)$ имеет главный период T. Очевидно, что если для некоторого простейшего тригонометрического уравнения с главным периодом T найдено некоторое решение x_0, то любое число $x_k = x_0 + kT$ при любом целом k также является решением этого уравнения. При этом множество всех решений вида $x_k = x_0 + kT$, где k пробегает все целые числа, называется *серией решений* этого уравнения и в дальнейшем будет записываться в виде

$$x_k = x_0 + kT,\ k \in Z.$$

Чтобы найти множество всех решений данного простейшего тригонометрического уравнения $f(x) = b$ с главным периодом T, надо найти все решения этого уравнения на промежутке длиной в T, затем для каждого найденного решения выписать соответствующую серию решений. Если получается n серий решений простейшего тригонометрического уравнения $f(x) = b$, то говорят, что множеством всех решений уравнения $f(x) = b$ является n серий решений и затем выписывают все эти серии.

При решении простейшего тригонометрического уравнения промежуток длиной в главный период T следует выбирать таким, чтобы он содержал промежуток, на котором для функции $y = f(x)$ определена обратная тригонометрическая функция, и таким, чтобы все решения уравнения на этом промежутке можно было легко найти.

Заметим еще, что если простейшее тригонометрическое уравнение $f(x) = b$ на промежутке длиной в главный период T не имеет решения, то оно не имеет решений и на всех числовой прямой.

Пусть дано простейшее тригонометрическое уравнение

$$\cos x = b. \qquad (7)$$

Естественной областью определения функции $y = \cos x$ является вся числовая прямая. Значит ОДЗ уравнения (7) есть множество $X = (-\infty, +\infty)$. Поскольку функция $y = \cos x$ на этом множестве X является периодической функцией с главным периодом 2π, то найдем сначала все решения уравнения (7) на полуинтервале $(-\pi, \pi]$ длиной в главный период. Разобьем этот полуинтервал на два множества: $X_1 = (-\pi; 0)$ и $X_2 = [0, \pi]$ и решим уравнение (7) на каждом из них.

На множестве X_2 функция $y = \cos x$ является строго убывающей функцией и областью ее значений является отрезок $Y_2 = [-1; 1]$. Следовательно, если число b такое, что $|b| > 1$, то на множестве X_2 уравнение (7) не имеет корней, а если число b такое, что $|b| \leq 1$, то на множестве X_2 уравнение (7) имеет единственный корень, который обозначим через x_0. Поскольку $x_0 \in [0; \pi]$ и число $b \in [-1; 1]$, то справедлива следующая цепочка равносильных числовых равенств:

$$\cos x_0 = b \Leftrightarrow \arccos(\cos x_0) = \arccos b \Leftrightarrow x_0 = \arccos b.$$

На множестве X_1 функция $y = \cos x$ является строго возрастающей функцией и областью ее значений является интервал $Y = (-1; 1)$. Следовательно, если число b такое, что $|b| \geq 1$, то на множестве X_1 уравнение (7) не имеет корней, а если число b такое, что $b < 1$, то на множестве X_1 уравнение (7) имеет единственный корень, который обозначим через x_0'. Учитывая, что функция $y = \cos x$ на всей числовой прямой является четной функцией, получаем, что $x_0' = -x_0$, т.е. $x_0' = -\arccos b$.

Итак, на полуинтервале $(-\pi, \pi]$ уравнение (7) при каждом b таком, что $|b| > 1$, не имеет решений; при $b = 1$ имеет единственное решение $x_0 = \arccos 1$, т.е. $x_0 = 0$; при $b = -1$ имеет единственное решение $x_0 = \arccos(-1)$, т.е. $x_0 = \pi$; при каждом b таком, что $|b| < 1$, имеет только два решения $x_0 = \arccos b$ и $x_0 = -\arccos b$.

Каждое из этих решений дает серию решений уравнения (7) на всей числовой прямой. Значит, множеством всех решений уравнения (7) является:

при каждом b таком, что $|b| > 1$, пустое множество (другими словами, при $|b| > 1$ уравнение (7) не имеет решений);

при $b = 1$ — одна серия решений: $x_k = 2\pi k$, $k \in Z$;

при $b = -1$ — одна серия решений: $x_n = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

при каждом b таком, что $|b| < 1$, две серии решений: $x_m = \arccos b + 2\pi m$, $m \in Z$, и $x_p = -\arccos b + 2\pi p$, $p \in Z$.

Заметим, что иногда две серии решений уравнения (7) записываются с помощью одной формулы $x_q = \pm \arccos b + 2\pi q$, $q \in Z$.

В табл. 10 приведены итоги решения уравнения (7).

Таблица 10

	$b < -1$	$b = -1$	$-1 < b < 1$	$b = 1$	$b > 1$
$\cos x = b$	нет решений	$x_n = (2n+1)\pi$, $n \in Z$	$x_m = \arccos b + 2\pi m$, $m \in Z$; $x_p = -\arccos b + 2\pi p$, $p \in Z$	$x_k = 2\pi k$, $k \in Z$	нет решений

Пусть дано простейшее тригонометрическое уравнение

$$\sin x = b. \tag{8}$$

Естественной областью определения функции $y = \sin x$ является множество всех действительных чисел. Значит, ОДЗ уравнения (8) есть множество $X = (-\infty, +\infty)$. Поскольку функция $y = \sin x$ на этом множестве X является периодической функцией с главным периодом 2π, то найдем сначала все решения уравнения (8) на полуинтервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ длиной в главный период. Разобьем этот полуинтервал на два множества: $X_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $X_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ и решим уравнение (8) на каждом из них.

На множестве X_1 функция $y = \sin x$ является строго возрастающей функцией и областью ее значений является отрезок $Y_1 = [-1; 1]$. Следовательно, если число b такое, что $|b| > 1$, то на множестве X_1 уравнение (8) не имеет корней, а если число b такое, что $|b| \le 1$, то на множестве X_1 уравнение (8) имеет единственное решение, которое обозначим через x_0. Поскольку $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и число $b \in [-1; 1]$, то справедлива следующая цепочка равносильных числовых равенств:

$$\sin x_0 = b \Leftrightarrow \arcsin(\sin x_0) = \arcsin b \Leftrightarrow x_0 = \arcsin b.$$

На множестве X_2 функция $y = \sin x$ является строго убывающей функцией и областью ее значений является интервал $Y_2 = (-1;\ 1)$. Следовательно, если число b таково, что $|b| \geq 1$, то на множестве X_2 уравнение (8) не имеет корней, а если число b таково, что $b \in (-1;\ 1)$, то на множестве X_2 уравнение (7) имеет единственное решение, которое обозначим через x_0'. Учитывая, что функция $y = \sin x$ на всей числовой прямой является функцией симметричной относительно вертикальной прямой, проходящей через точку $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, получаем, что $x_0' = \pi - x_0$, т.е. $x_0' = \pi - \arcsin b$. Итак, на полуинтервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ уравнение (8):

при каждом b таком, что $|b| > 1$, не имеет решений;

при $b = 1$ имеет единственное решение $x_0 = \arcsin 1$, т.е. $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

при $b = -1$ имеет единственное решение $x_0 = \arcsin(-1)$, т.е. $x_0 = -\frac{\pi}{2}$;

при каждом b таком, что $|b| < 1$, имеет только два решения $x_0 = \arcsin b$ и $x_0 = \pi - \arcsin b$. Каждое из этих решений дает серию решений уравнения (8) на всей числовой прямой. Значит, множеством всех решений уравнения (8) является:

при каждом b таком, что $|b| > 1$, — пустое множество (другими словами, при $|b| > 1$ уравнение (8) не имеет решений);

при $b = 1$ — одна серия решений: $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

при $b = -1$ — одна серия решений: $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

при каждом b таком, что $|b| < 1$ — две серии решений: $x_p = \arcsin b + 2\pi p$, $p \in Z$ и $x_m = \pi - \arcsin b + 2\pi m$, $m \in Z$

Заметим, что иногда две серии решений уравнения (8) записываются с помощью одной формулы: $x_q = (-1)^q \times \arcsin b + \pi q$, $q \in Z$.

В табл. 11 приведены итоги решения уравнения (8).

Таблица 11

	$b < -1$	$b = -1$	$-1 < b < 1$	$b = 1$	$b > 1$
$\sin x = b$	нет решений	$x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$	$x_p = \arcsin b + 2\pi p$, $p \in Z$ $x_m = \pi - \arcsin b + 2\pi m$, $m \in Z$	$x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$	нет решений

Пусть дано простейшее тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg} x = b. \qquad (9)$$

Естественной областью определения функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество всех действительных чисел, кроме чисел $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число. Значит, ОДЗ уравнения (9) есть множество X, состоящее из всех действительных чисел, не равных $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — целое число. Поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ на этом множестве X является периодической функцией с главным периодом π, то найдем сначала все решения уравнения (9) на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, длиной в главный период. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ является строго возрастающей функцией и областью ее значений является вся числовая прямая $Y = (-\infty, +\infty)$. Следовательно, при каждом b уравнение (9) на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет единственное решение, которое обозначим через x_0. Так как x_0 — решение уравнения (9) и $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то справедлива следующая цепочка равносильных числовых равенств:

$$\operatorname{tg} x_0 = b \Leftrightarrow \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x_0) = \operatorname{arctg} b \Leftrightarrow x_0 = \operatorname{arctg} b.$$

Итак, при каждом b уравнение (9) на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет единственное решение $x_0 = \operatorname{arctg} b$. Это решение дает серию решений уравнения (9) на всей ОДЗ.

Значит, при каждом b множеством всех решений уравнения (9) является серия решений $x_n = \operatorname{arctg} b + \pi n$, $n \in Z$.

В табл. 12 приведены итоги решения уравнения (9).

Таблица 12

	$-\infty < b < \infty$
$\operatorname{tg} x = b$	$x_n = \operatorname{arctg} b + \pi n$, $n \in Z$

Пусть дано простейшее тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{ctg} x = b. \tag{10}$$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена на всей числовой оси, кроме точек $x = \pi k$, где k — любое целое число. Значит, ОДЗ уравнения (10) есть множество X, состоящее из всех действительных, не равных πk чисел, где k — любое целое число. Поскольку функция $y = \operatorname{ctg} x$ на этом множестве X является периодической функцией с главным периодом π, то найдем сначала все решения уравнения (10) на интервале $(0, \pi)$, длиной в главный период. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0, \pi)$ является строго убывающей функцией и областью ее значений является вся числовая прямая $Y = (-\infty, +\infty)$. Следовательно, при каждом b уравнение (10) на интервале $(0, \pi)$ имеет единственное решение, которое обозначим через x_0. Так как x_0 — решение уравнения (10) и $x_0 \in (0, \pi)$, то справедлива следующая цепочка равносильных числовых равенств:

$$\operatorname{ctg} x_0 = b \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} x_0) = \operatorname{arcctg} b \Leftrightarrow x_0 = \operatorname{arcctg} b.$$

Итак, при каждом b уравнение (10) на интервале $(0, \pi)$ имеет единственное решение $x_0 = \operatorname{arcctg} b$. Это решение дает серию решений уравнения (10) на всей ОДЗ.

Значит, при каждом b множеством всех решений уравнения (10) является серия решений $x_p = \operatorname{arcctg} b + \pi p$, $p \in Z$.

В табл. 13 приведены итоги решения уравнения (10).

Таблица 13

	$-\infty < b < \infty$
$\operatorname{ctg} x = b$	$x_p = \operatorname{arcctg} b + \pi p,\ p \in Z$

Рассмотрим еще простейшие уравнения, содержащие *основные обратные тригонометрические функции*, т.е. уравнения $\arccos x = b$, $\arcsin x = b$, $\operatorname{arctg} x = b$, $\operatorname{arcctg} x = b$.

Пусть дано простейшее уравнение

$$\arccos x = b. \qquad (11)$$

Естественной областью определения функции $y = \arccos x$ является отрезок $X = [-1; 1]$. Значит, ОДЗ уравнения (11) есть множество $X = [-1; 1]$. Функция $y = \arccos x$ на множестве X является строго убывающей функцией, и областью ее значений является отрезок $Y = [0, \pi]$. Следовательно, для каждого b такого, что $b < 0$ или $b > \pi$, уравнение (11) не имеет корней; если же число b таково, что $0 \leq b \leq \pi$, то уравнение (11) имеет единственный корень, который обозначим через x_0. Поскольку x_0 — корень уравнения (11), $x_0 \in [-1; 1]$ и $b \in [0; \pi]$, то справедлива цепочка равносильных числовых равенств:

$$\arccos x_0 = b \Leftrightarrow \cos(\arccos x_0) = \cos b \Leftrightarrow x_0 = \cos b.$$

Итак, при каждом b таком, что $0 \leq b \leq \pi$ уравнение (11) имеет единственный корень $x_0 = \cos b$, а при каждом b таком, что $b < 0$ и $b > \pi$, уравнение (11) не имеет корней.

В табл. 14 приведены итоги решения уравнения (11).

Таблица 14

	$b < 0$	$b = 0$	$0 < b < \pi$	$b = \pi$	$b > \pi$
$\arccos x = b$	нет решений	$x_1 = 1$	$x_1 = \cos b$	$x_1 = -1$	нет решений

Пусть дано простейшее уравнение

$$\arcsin x = b. \tag{12}$$

Естественной областью определения функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1; 1]$. Значит, ОДЗ уравнения (12) есть множество $X = [-1; 1]$. Функция $y = \arcsin x$ на множестве X является строго возрастающей функцией, и областью ее значений является отрезок $Y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, для каждого b такого, что $b < -\frac{\pi}{2}$ или $b > \frac{\pi}{2}$, уравнение (12) не имеет решений; если же число b таково, что $-\frac{\pi}{2} \le b \le \frac{\pi}{2}$, то уравнение (12) имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Поскольку x_1 — корень уравнения (12), $x_1 \in [-1; 1]$ и $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то справедлива цепочка равносильных числовых равенств:

$$\arcsin x_1 = b \Leftrightarrow \sin(\arcsin x_1) = \sin b \Leftrightarrow x_1 = \sin b.$$

Итак, при каждом b таком, что $-\frac{\pi}{2} \le b \le \frac{\pi}{2}$, уравнение (12) имеет единственный корень $x_1 = \sin b$, а при каждом b таком, что $b < -\frac{\pi}{2}$ и $b > \frac{\pi}{2}$, уравнение (12) не имеет корней.

В табл. 15 приведены итоги решения уравнения (12).

Таблица 15

	$b < -\frac{\pi}{2}$	$b = -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$	$b = \frac{\pi}{2}$	$b > \frac{\pi}{2}$
$\arcsin x = b$	нет решений	$x_1 = -1$	$x_1 = \sin b$	$x_1 = 1$	нет решений

Пусть дано простейшее уравнение

$$\operatorname{arctg} x = b. \qquad (13)$$

Естественной областью определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ является множество всех действительных чисел. Значит, ОДЗ уравнения (13) есть множество $X = (-\infty, +\infty)$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ на этом множестве X является строго возрастающей функцией, и областью ее значений является интервал $Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно, для каждого b такого, что $b \leq -\frac{\pi}{2}$ или $b \geq \frac{\pi}{2}$, уравнение (13) не имеет решений; если же число b таково, что $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$, то уравнение (13) имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Поскольку x_1 — корень уравнения (13), $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ и $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то справедлива цепочка равносильных числовых равенств:

$$\operatorname{arctg} x_1 = b \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x_1) = \operatorname{tg} b \Leftrightarrow x_1 = \operatorname{tg} b.$$

Итак, при каждом b таком, что $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$ уравнение (13) имеет единственный корень $x_1 = \operatorname{tg} b$, а при каждом b таком, что $b \leq -\frac{\pi}{2}$ и $b \geq \frac{\pi}{2}$, уравнение (13) не имеет корней.

В табл. 16 приведены итоги решения уравнения (13).

Таблица 16

	$b \le -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$	$b \ge \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arctg} x = b$	нет решений	$x_1 = \operatorname{tg} b$	нет решений

Пусть дано простейшее уравнение

$$\operatorname{arcctg} x = b. \qquad (14)$$

Естественной областью определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ является множество всех действительных чисел. Значит, ОДЗ уравнения (14) есть множество $X = (-\infty, +\infty)$. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ на этом множестве X является строго убывающей функцией, и областью ее значений является интервал $Y = (0, \pi)$. Следовательно, для каждого b такого, что $b \le 0$ или $b \ge \pi$, уравнение (14) не имеет решений; если же число b таково, что $0 < b < \pi$, то уравнение (14) имеет единственный корень, который обозначим через x_1. Поскольку x_1 — корень уравнения (14), $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ и $b \in (0, \pi)$, то справедлива следующая цепочка равносильных числовых равенств:

$$\operatorname{arcctg} x_1 = b \Leftrightarrow \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x_1) = \operatorname{ctg} b \Leftrightarrow x_1 = \operatorname{ctg} b.$$

Итак, при каждом b таком, что $0 < b < \pi$, уравнение (14) имеет единственный корень $x_1 = \operatorname{ctg} b$, а при каждом b таком, что $b \le 0$ и $b \ge \pi$, уравнение (14) не имеет корней.

В табл. 17 приведены итоги решения уравнения (14).

Таблица 17

	$b \le 0$	$0 < b < \pi$	$b \ge \pi$
$\operatorname{arcctg} x = b$	нет решений	$x_1 = \operatorname{ctg} b$	нет решений

§ 3. Равносильные преобразования уравнений

В этом и следующем параграфах обсуждаются некоторые преобразования уравнений, с помощью которых данное, не являющееся простейшим, уравнение может быть сведено к одному или совокупности простейших уравнений.

Решая уравнение, не являющееся простейшим, обычно приходится проводить довольно много преобразований. При этом каждый раз уравнение заменяется на какое-либо новое, а у нового уравнения, естественно, могут быть и другие корни. Данное уравнение будет решено верно, если, проводя преобразование уравнений, каждый раз уравнение заменять новым уравнением, имеющим все корни предыдущего и только их, т.е. чтобы не произошло потери или приобретения корней. Если каждый раз заменять уравнение на ему равносильное уравнение, то корни последнего уравнения и будут корнями исходного.

В этом параграфе рассматриваются только равносильные преобразования уравнений. Неравносильные преобразования уравнений будут рассмотрены в следующем параграфе.

Как уже отмечалось в § 1, утверждения 1 — 4 дают только примеры равносильных преобразований. Приведем еще несколько примеров равносильных преобразований уравнений.

Преобразования, связанные с применением тождественных равенств. Пусть дано уравнение

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

и пусть для любого действительного x справедливо тождественное равенство $g(x) = \varphi(x)$, *тогда уравнение* (1) *равносильно уравнению*

$$f(x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Это утверждение позволяет использовать различные тождественные равенства, т.е. формулы, справедливые при всех действительных значениях для проведения равносильных преобразований уравнений. Примерами таких тождественных равенств являются формулы сокращенного умножения многочленов, основное тригонометрическое тождество и некоторые другие формулы. Отметим, что, проводя равносильное преобразование уравнений с помощью формул сокращенного умножения многочленов, в гл. III были решены квадратные и некоторые другие алгебраические уравнения. Приведем еще примеры, в которых проводятся равносильные преобразования уравнений при помощи тождественных равенств.

Пусть дано уравнение

$$\cos^3 2x = 1 - 2\cos^2 x. \qquad (3)$$

Используя основное тригонометрическое тождество и формулу косинуса двойного угла, можно написать тождественное равенство

$$1 - 2\cos^2 x = -\cos 2x,$$

справедливое для любого действительного x. Значит, уравнение (3) равносильно уравнению

$$\cos^3 2x = -\cos 2x.$$

Применяя утверждение 1 § 1 и делая группировку членов левой части последнего уравнения, получим, что уравнение (3) равносильно уравнению

$$\cos 2x (\cos^2 2x + 1) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух простейших тригонометрических уравнений:

$$\cos 2x = 0, \quad \cos^2 2x + 1 = 0.$$

Множеством всех решений первого уравнения этой совокупности является серия решений $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, а второе уравнение этой совокупности решений не имеет.

Следовательно, множество всех решений уравнения (3) состоит из серии $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$a \sin x + b \cos x = c. \qquad (4)$$

В случае, когда либо $a = 0$, либо $b = 0$, это уравнение при помощи утверждений 2 и 3 § 1 сводится:

если $a = 0$, $b \neq 0$, к простейшему уравнению $\cos x = \frac{c}{b}$;

если $a \neq 0$, $b = 0$, к простейшему уравнению $\sin x = \frac{c}{a}$.

Пусть теперь $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Значит, $a^2 + b^2 \neq 0$. Применяя утверждение 3, получаем, что уравнение (4) равносильно уравнению

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (5)$$

1. Пусть a — положительное число. Рассмотрим два случая: $b > 0$ и $b < 0$.

Пусть $b > 0$. Построим прямоугольный треугольник с катетами длиной a и b. Угол, лежащий против катета длиной b, обозначим φ_1. Тогда имеем числовые равенства

$$\sin \varphi_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

из которых следует, что $\varphi_1 = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Теперь уравнение (5) примет вид

$$\cos \varphi_1 \sin x + \sin \varphi_1 \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

По формуле синуса суммы двух углов имеем тождественное равенство

$$\cos \varphi_1 \sin x + \sin \varphi_1 \cos x = \sin (x + \varphi_1).$$

Применяя теперь сформулированное выше утверждение, получаем, что уравнение (4) равносильно уравнению

$$\sin (x + \varphi_1) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

которое является простейшим уравнением.

Пусть $b < 0$. Построим прямоугольный треугольник с катетами a и $|b|$. Угол, лежащий против катета длиной $|b|$, обозначим φ_2. Тогда имеем числовые равенства

$$\sin \varphi_2 = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

из которых следует, что $\varphi_2 = \arcsin \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Теперь, так как $b = -|b|$, то уравнение (5) примет вид

$$\cos \varphi_2 \sin x - \sin \varphi_2 \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

По формуле синуса разности двух углов имеем тождественное равенство

$$\cos \varphi_2 \sin x - \sin \varphi_2 \cos x = \sin (x - \varphi_2).$$

Применяя теперь сформулированное выше утверждение, получаем, что уравнение (4) равносильно уравнению

$$\sin (x - \varphi_2) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

которое является простейшим уравнением.

Если обозначить $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, то легко видеть, что $\varphi = \varphi_1$ для $b > 0$ и $\varphi = -\varphi_2$ для $b < 0$. Поэтому можно написать, что при $a > 0$ уравнение (4) равносильно уравнению

$$\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

которое тоже является простейшим уравнением.

2. Случай $a < 0$ сводится к рассмотренному выше умножением обеих частей уравнения (4) на (-1).

Пример. Решить уравнение

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x + 1 = 0. \qquad (6)$$

Поскольку уравнение (6) таково, что $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $\sqrt{a^2+b^2} = 2$, то оно равносильно уравнению

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = -\frac{1}{2}.$$

Найдем угол φ: $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Значит, уравнение (6) равносильно уравнению

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Решая это простейшее уравнение, получаем две серии решений:

$$x_k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \ \text{ и } \ x_m = \pi + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Следовательно, множеством всех решений уравнения (6) являются две серии решений:

$$x_k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z, \ \text{ и } \ x_m = \pi + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Преобразования, связанные с суперпозициями функций. Пусть функция $y = f(x)$ есть сложная функция $y = P[g(x)]$, являющаяся суперпозицией двух функций: внутренней $u = g(x)$ — основной элементарной функции, и внешней $y = P(u)$, где $P(u)$ — квадратный трехчлен $P(u) = au^2 + bu + c$. В таких случаях уравнение $f(x) = 0$ записывают в виде

$$a\,[g(x)]^2 + bg(x) + c = 0. \tag{7}$$

и называют *квадратным уравнением относительно* $g(x)$.

Уравнение (7) решается следующим образом. Сначала решают квадратное уравнение

$$at^2 + bt + c = 0. \tag{8}$$

Находят дискриминант $D = b^2 - 4ac$ уравнения (8). Если $D < 0$, то уравнение (8) не имеет решений, следовательно, и уравнение (7) не имеет решений. Если $D = 0$, то уравнение (8) имеет единственный корень: число $\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Следовательно, в этом случае уравнение (7) равносильно уравнению

$$g(x) = -\frac{b}{2a}. \tag{9}$$

Затем решают уравнение (9). В силу равносильности уравнений (7) и (9) множество всех решений уравнения (9) является множеством всех решений уравнения (7).

Если $D > 0$, то уравнение (8) имеет только два действительных корня, которые обозначим t_1 и t_2. Следовательно, в этом случае уравнение (7) равносильно совокупности уравнений

$$g(x) = t_1, \quad g(x) = t_2. \tag{10}$$

Затем решают совокупность уравнений (10). В силу равносильности уравнения (7) и совокупности уравнений (10) множество всех решений совокупности уравнений (10) является множеством всех решений уравнения (7).

Отметим, что в гл. III этим способом решались трехчленные уравнения, которые можно назвать квадратными уравнениями относительно x^n, где n — натуральное число и $n \geq 2$.

Приведем примеры.

Пусть дано уравнение

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0. \ (11)$$

Так как справедливо тождественное равенство $4^x = (2^x)^2$, то уравнение (11) равносильно уравнению

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0.$$

Это уравнение есть квадратное уравнение относительно 2^x. Решая квадратное уравнение

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

получим, что оно имеет только два корня $t_1 = 2$, $t_2 = 1$. Следовательно, уравнение (11) равносильно совокупности двух уравнений:

$$2^x = 2, \quad 2^x = 1.$$

Решая каждое простейшее показательное уравнение этой совокупности, получаем, что эта совокупность имеет только два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$.

Следовательно, уравнение (11) имеет только два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$.

Не всегда данное уравнение удается сразу преобразовать к виду (7). Часто для этого надо проделать дополнительные равносильные преобразования.

Например, для решения уравнения

$$\sin 2x - 12 (\sin x - \cos x) + 12 = 0 \qquad (12)$$

в качестве $g(x)$ можно взять $(\sin x - \cos x)$. Чтобы представить уравнение (12) в виде (7), воспользуемся тригонометрическими формулами

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x, \quad 1 = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

затем тождественным равенством

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x - \cos x)^2.$$

Получим, что уравнение (12) равносильно уравнению

$$-(\sin x - \cos x)^2 - 12 (\sin x - \cos x) + 13 = 0. \qquad (13)$$

Уравнение (13) является квадратным уравнением относительно $(\sin x - \cos x)$. Решая квадратное уравнение

$$-t^2 - 12t + 13 = 0,$$

получаем, что оно имеет только два корня: $t_1 = 1$ и $t_2 = -13$.

Следовательно, уравнение (13) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x - \cos x = 1, \quad \sin x - \cos x = -13. \qquad (14)$$

Воспользовавшись тождеством $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \times \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, получим, что совокупность уравнений (14) равносильна совокупности простейших уравнений

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{13\sqrt{2}}{2}. \qquad (15)$$

Множеством всех решений первого уравнения совокупности (15) являются две серии решений:

$$x_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z \ \text{ и } \ x_m=\pi+2\pi m,\ m\in Z.$$

Второе уравнение совокупности (15) не имеет решений, так как $-\frac{13\sqrt{2}}{2}<-1$.

Следовательно, множеством всех решений уравнения (12) являются две серии решений:

$$x_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z \ \text{ и } \ x_m=\pi+2\pi m,\ m\in Z.$$

Пусть функция $y=f(x)$ есть сложная функция, являющаяся суперпозицией нескольких основных элементарных функций. Пусть, например, функция $y=f(x)$ есть суперпозиция трех основных элементарных функций $y=g\{\varphi[u(x)]\}$.

В таких случаях уравнение $f(x)=0$ записывают в виде

$$g\{\varphi[u(x)]\}=0 \qquad (16)$$

и решают следующим образом.

Сначала решают простейшее уравнение

$$g(t)=0. \qquad (17)$$

Уравнение (17) может не иметь решений, тогда уравнение (16) не имеет решений.

Уравнение (17) может иметь конечное или бесконечное число корней. Пусть множество всех корней уравнения (17) состоит из чисел $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$. Тогда уравнение (16) равносильно совокупности уравнение

$$\varphi[u(x)]=t_1,\ \varphi[u(x)]=t_2,\ \varphi[u(x)]=t_3,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \varphi[u(x)]=t_n,\ \ldots . \qquad (18)$$

Теперь решают совокупность простейших уравнений

$$\varphi(v) = t_1,\ \varphi(v) = t_2,\ \varphi(v) = t_3,\ \dots,\ \varphi(v) = t_n,\ \dots . \qquad (19)$$

Совокупность уравнений (19) может не иметь решений, тогда совокупность уравнений (18) не имеет решений, а следовательно, и уравнение (16) не имеет решений.

Совокупность уравнений (19) может иметь конечное или бесконечное число корней.

Пусть множество всех корней совокупности (19) состоит из чисел $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, \dots$. Тогда совокупность уравнений (18) равносильна совокупности уравнений

$$u(x) = v_1,\ u(x) = v_2,\ u(x) = v_3,\ \dots,\ u(x) = v_k,\ \dots . \qquad (20)$$

Множество всех корней совокупности простейших уравнений (20) является множеством всех корней уравнения (16).

Рассмотрим, например, уравнение

$$2^{\sin\sqrt{x}} = 1. \qquad (21)$$

Решая простейшее уравнение $2^t = 1$, получаем его единственное решение $t_1 = 0$. Значит, уравнение (21) равносильно уравнению

$$\sin\sqrt{x} = 0. \qquad (22)$$

Решая простейшее уравнение

$$\sin v = 0,$$

получаем, что множество всех решений является серия решений $v_k = \pi k$, $k \in Z$.

Значит, уравнение (21) равносильно бесконечной совокупности уравнений

$$\sqrt{x} = k\pi, \qquad (23)$$

где k — любое целое число.

Каждое уравнение совокупности (23), в котором k — отрицательно, не имеет корней, а каждое уравнение, в котором k — неотрицательно, имеет единственный корень $x_k = (\pi k)^2$.

Следовательно, множество всех корней уравнения (21) есть множество $\{(\pi k)^2 \mid k \in Z_0\}$.

§ 4. Неравносильные преобразования уравнений

В предыдущем параграфе рассматривались лишь равносильные преобразования уравнений. Однако не любое уравнение удается решить при помощи лишь равносильных преобразований, гораздо чаще при решении уравнений приходится применять *неравносильные преобразования*. При этом надо помнить, что из — за неравносильности преобразований, вообще говоря, можно *потерять* некоторые корни исходного уравнения или *приобрести* так называемые «посторонние корни» (всякий корень последующего уравнения, не являющийся корнем исходного уравнения, будем называть *посторонним* корнем).

Ниже приводятся п р и м е р ы неравносильных преобразований, приводящих как к потере корней исходного уравнения, так и к приобретению посторонних корней.

Преобразования, связанные с логарифмическими формулами. Пусть фиксированное число a таково, что $a > 0$ $a \neq 1$. Рассмотрим следующие логарифмические формулы:

$$f(x) = a^{\log_a f(x)}, \tag{1}$$

$$\log_a [f(x)]^2 = 2 \log_a f(x), \tag{2}$$

$$\log_a [f(x)]^2 = 2 \log_a [-f(x)], \tag{3}$$

$$\log_a [f(x)g(x)] = \log_a f(x) + \log_a g(x), \tag{4}$$

$$\log_a [f(x)g(x)] = \log_a [-f(x)] + \log_a [-g(x)], \tag{5}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x) - \log_a g(x), \tag{6}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a [-f(x)] - \log_a [-g(x)]. \tag{7}$$

Если при решении уравнения $\varphi(x) = h(x)$ *формально* применить к левой или правой части этого уравнения любую из рассматриваемых формул так, что *левая часть этой формулы будет заменена правой часть*, то *возможна потеря* *корней* исходного уравнения, поэтому *такие преобразования недопустимы*.

Если к левой или правой части уравнения $\varphi(x) = h(x)$ *формально* применить любую из рассматриваемых формул так, что *правая часть формулы будет заменена левой*, то корни уравнения $\varphi(x) = h(x)$ теряться не будут; любой корень уравнения $\varphi(x) = h(x)$ будет корнем последующего уравнения, но, вообще говоря, *не всякий корень последующего уравнения будет являться корнем исходного уравнения*, и поэтому, если такие преобразования применялись, то в конце решения обязательно необходима *проверка*, т.е. необходимо каждый из найденных корней последней совокупности простейших уравнений или последнего простейшего уравнения подставить в исходное уравнение и убедиться, какие из них обращают исходное уравнение в верное числовое равенство. Те из них, при каждом из которых исходное уравнение превращается в неверное числовое равенство, нужно отбросить.

Ниже приводятся примеры, показывающие, что формальное применение этих формул приводит как к потере корней исходного уравнения, так и к приобретению посторонних корней.

Пусть дано уравнение

$$\log_2 (x + 2)^2 = 6.$$

Формально применяя формулу (2), получим уравнение

$$\log_2 (x + 2) = 3,$$

которое имеет единственный корень $x_1 = 6$.

Поскольку в процессе решения исходного уравнения проводилось такое преобразование, в результате которого могли потеряться корни, то нельзя считать, что исходное уравнение решено. И, действительно, корень исходного уравнения — число (— 10) — был потерян при этом преобразовании.

Пусть дано уравнение

$$3^{\log_3 (x^2 - 4x + 3)} = x - 3.$$

Формально применяя формулу (1), получаем уравнение

$$x^2 - 4x + 3 = x - 3,$$

которое имеет только два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

Поскольку в процессе решения исходного уравнения было проведено преобразование, в результате которого можно было приобрести посторонние корни, то необходима проверка. Проверка показывает, что ни число 2, ни число 3 не являются корнями исходного уравнения.

Следовательно, исходное уравнение не имеет корней.

Эти примеры показывают, что при решении уравнений применять логарифмические формулы надо очень внимательно, помня о том, что формальное их применение может привести и к потере и к приобретению посторонних корней.

Этого не может случиться, если применять каждую из формул (1) — (7) на том множестве M_1 из ОДЗ решаемого уравнения, на котором имеет смысл правая часть соответствующей формулы. Тогда такое преобразование приведет к уравнению, равносильному исходному на множестве M_1.

Найдя корни полученного уравнения и отобрав из них те, которые принадлежат множеству M_1, найдем все корни исходного уравнения на этом множестве M_1.

При этом надо помнить, что таким образом исходное уравнение решено не на всей ОДЗ, а только на множестве M_1. Поэтому надо найти еще его решения на той части ОДЗ, которая останется после выделения множества M_1.

Следовательно, если в процессе решения уравнения возникает необходимость провести преобразования с помощью некоторой логарифмической формулы, то такое уравнение можно решать по следующей схеме:

1. *Найти ОДЗ уравнения.*

2. *Разбить ОДЗ на два множества*: M_1 *и* M_2 (M_1 — вся та часть ОДЗ, где одновременно имеют смысл обе части используемой формулы, M_2 — та часть ОДЗ, которая остается после выделения множества M_1).

3. *Решить уравнение на множестве* M_1 (учитывая, что преобразование уравнения с помощью этой формулы есть равносильное преобразование на множестве M_1).

4. *Решить уравнение на* M_2.

5. *Объединить множества корней, найденные на* M_1 *и* M_2.

Решим по этой схеме рассмотренные выше уравнения.

Пусть дано уравнение

$$\log_2 (x + 2)^2 = 6.$$

ОДЗ этого уравнения есть множество всех действительных чисел, кроме $x = -2$. Разобьем ОДЗ на два множества: $M_1 = (-2, +\infty)$ и $M_2 = (-\infty, -2)$.

На множестве M_1 справедливо тождественное равенство

$$\log_2 (x + 2)^2 = 2 \log_2 (x + 2).$$

Значит, на множестве M_1 исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 (x + 2) = 3,$$

которое равносильно на множестве M_1 уравнению $x + 2 = 8$. Последнее уравнение имеет единственный корень $x_1 = 6$. Так как этот корень входит в множество M_1, то и исходное уравнение на множестве M_1 имеет единственный корень $x_1 = 6$.

На множестве M_2 справедливо тождественное равенство

$$\log_2 (x + 2)^2 = 2 \log_2 [-(x + 2)].$$

Значит, на множестве M_2 исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 (-x - 2) = 3,$$

которое в свою очередь равносильно на множестве M_2 уравнению

$$-x - 2 = 8.$$

Последнее уравнение имеет единственный корень $x_2 = -10$. Так как этот корень принадлежит множеству M_2, то и исходное уравнение на множестве M_2 имеет единственный корень $x_2 = -10$. Объединяя множество корней, найденное на M_1 и M_2, получаем, что множество всех корней исходного уравнения состоит из двух чисел: $x_1 = 6$ и $x_2 = -10$.

Пусть дано уравнение $3^{\log_3 (x^2 - 4x + 3)} = x - 3$.

ОДЗ этого уравнения есть множество всех тех x, для каждого из которых $x^2 - 4x + 3 > 0$, т.е. ОДЗ есть множество $M = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. Поскольку на этом множестве справедливо тождественное равенство

$$3^{\log_3 (x^2 - 4x + 3)} = x^2 - 4x + 3,$$

то исходное уравнение равносильно на множестве M уравнению

$$x^2 - 4x + 3 = x - 3,$$

которое имеет только два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

Так как ни один из этих корней не входит в ОДЗ исходного уравнения, а последнее и исходное уравнения равносильны на ОДЗ исходного, то отсюда вытекает, что исходное уравнение не имеет корней.

Итак, решить уравнения с помощью некоторой логарифмической формулы можно двумя способами.

Первый способ. Совершить переход к уравнению, которое является следствием данного уравнения. Найти все корни полученного уравнения. Сделать проверку и установить, какие корни являются посторонними. Тогда все найденные корни без всех посторонних корней составят множество всех корней исходного уравнения.

Второй способ. Совершить равносильный переход на множестве M_1 (M_1 — вся часть ОДЗ исходного уравнения, где логарифмическая формула есть тождественное равенство). Найти все корни полученного уравнения на M_1. Затем найти все корни исходного уравнения на множестве M_2 (всей оставшейся части ОДЗ исходного уравнения после выделения множества M_1). Наконец, объединить множества всех корней данного уравнения, найденные на M_1 и M_2, и тем самым получить множество всех корней исходного уравнения.

Преобразования, связанные с тригонометрическими формулами. Рассмотрим следующие тригонометрические формулы:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \tag{8}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \tag{9}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}(x - \beta) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \beta}. \tag{11}$$

Если при решении уравнения $\varphi(x) = h(x)$ *формально* применить к левой или правой части этого уравнения любую из рассматриваемых формул так, что *левая часть этой формулы будет заменена правой частью*, то *возможна потеря корней* исходного уравнения, поэтому *такие преобразования недопустимы*.

Если к левой или правой части уравнения $\varphi(x) = h(x)$ *формально* применить любую из рассматриваемых формул так, что *правая часть формулы будет заменена левой, то можно приобрести посторонние корни*, а поэтому в конце решения необходима *проверка*.

Приведем примеры, показывающие, что формальное применение этих формул при решении уравнения может приводить как к потере корней исходного уравнения, так и к приобретению посторонних корней.

Пусть дано уравнение

$$\sin 2x - 3 \cos 2x = 3.$$

Формально применяя формулы (9) и (10), получим уравнение

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2 x} - \frac{3\,(1-\mathrm{tg}^2 x)}{1+\mathrm{tg}^2 x} = 3.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{2\,(\mathrm{tg}\,x - 3)}{1+\mathrm{tg}^2 x} = 0.$$

Отсюда очевидно, что множеством всех корней этого уравнения будет серия решений $x_p = \mathrm{arctg}\,3 + \pi p$, $p \in Z$.

Однако нельзя утверждать, что найдены все корни исходного уравнения, ибо преобразования были такими, что корни могли быть потеряны. Действительно, при этих преобразованиях была потеряна целая серия решений $x_m = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\mathrm{tg}\,x - 1}{\mathrm{tg}\,x + 1} = 1.$$

Поскольку $1 = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}$, то уравнение можно переписать так:

$$\frac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}}{1 + \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}} = 1.$$

Формально применяя формулу (11), получаем уравнение

$$\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

откуда очевидно, что множеством всех корней этого уравнения будет серия решений $x_l = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$.

Поскольку преобразование было таким, при котором могли появиться посторонние корни, то необходима проверка. Проверка показывает, что ни один из этих корней не будет корнем исходного уравнения.

Следовательно, исходное уравнение не имеет корней.

Эти примеры показывают, что при решении уравнений применять тригонометрические формулы надо внимательно, помня о том, что формальное их применение может привести и к потере и к приобретению корней.

Этого не может случиться, если применять каждую из формул (8) — (11) на том множестве M_1 из ОДЗ решаемого уравнения, на котором имеет смысл правая часть соответствующей формулы. Тогда такое преобразование приведет к уравнению, равносильному исходному на множестве M_1.

Найдя корни полученного уравнения и отобрав из них те, которые принадлежат множеству M_1, найдем все корни исходного уравнения на этом множестве M_1. При этом надо помнить, что таким образом исходное уравнение решено не на всей ОДЗ, а только на множестве M_1. Поэтому надо найти еще его решение на той части ОДЗ, которая остается после выделения множества M_1.

Поэтому уравнения, при решении которых применимы эти тригонометрические формулы, часто решаются по той же схеме, которая приведена при рассмотрении логарифмических формул:

1. *Найти ОДЗ уравнения.*

2. *Разбить ОДЗ на две части M_1 и M_2* (M_1 — вся та часть ОДЗ, где одновременно имеют смысл обе части используемой формулы, M_2 — та часть ОДЗ, которая остается после выделения множества M_1).

3. *Решить уравнение на M_1* (учитывая, что преобразование уравнения с помощью этой формулы есть равносильное преобразование на множестве M_1).

4. *Решить уравнение на M_2.*

5. *Объединить множества корней, найденные на M_1 и M_2.*

Решим по этой схеме рассмотренные выше уравнения.

Пусть дано уравнение

$$\sin 2x - 3 \cos 2x = 3.$$

ОДЗ этого уравнения есть множество всех действительных чисел. Разобьем ОДЗ данного уравнения на два множества: M_1 — множество всех действительных чисел, кроме чисел

$x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число, M_2 — множество чисел $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число.

На множестве M_1 формулы (9) и (10) являются тождественными равенствами, поэтому на множестве M_1 исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{3(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 3.$$

Множеством всех корней последнего уравнения является серия решений $x_m = \operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in Z$. Каждый корень этой серии принадлежит множеству M_1, поэтому множеством всех корней исходного уравнения на множестве M_1 является серия $x_m = \operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in Z$.

Решим исходное уравнение на M_2. Подставляя каждое число $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, в исходное уравнение, убеждаемся, что оно обращается в верное числовое равенство.

Следовательно, множеством всех корней исходного уравнения на множестве M_2 является серия $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Объединяя множества корней, найденные на M_1 и M_2, получаем, что множеством всех корней исходного уравнения являются две серии: $x_m = \operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in Z$, и $x_k = \frac{\pi}{2} +$ $+ \pi k$, $k \in Z$.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 1.$$

ОДЗ этого уравнения есть множество всех действительных чисел, кроме чисел $x_m = -\frac{\pi}{4} + \pi m$, где m — любое целое число, и кроме чисел $x_l = \frac{\pi}{2} + \pi l$, где l — любое целое число. Так как на ОДЗ формула (11) есть тождественное равенство, то на ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Множеством всех корней последнего уравнения на ОДЗ является серия $x_p=\frac{\pi}{2}+\pi p$, где p — любое целое число. Очевидно, что эта серия не входит в ОДЗ исходного уравнения.

Следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

Итак, решить уравнения с помощью некоторой тригонометрической формулы можно двумя способами.

Первый способ. Совершить переход к уравнению, которое является следствием данного уравнения. Найти все корни полученного уравнения, сделать проверку и установить, какие корни являются посторонними. Тогда все найденные корни без всех посторонних корней составят множество всех корней исходного уравнения.

Второй способ. Совершить равносильный переход на множестве M_1 (M_1 — вся часть ОДЗ исходного уравнения, где тригонометрическая формула есть тождественное равенство). Найти все корни полученного уравнения на M_1. Затем найти все корни исходного уравнения на множестве M_2 (всей оставшейся части ОДЗ данного уравнения после выделения множества M_1). Наконец, объединить множества всех корней данного уравнения, найденные на M_1 и M_2, и тем самым получить множество всех корней исходного уравнения.

Преобразования, связанные с возведением в натуральную степень. Пусть n — фиксированное натуральное число и пусть $n \geq 2$. Пусть дано уравнение

$$f(x) = g(x)$$

Замена этого уравнения уравнением

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n$$

называется *возведением уравнения в натуральную степень n.*

Как следует из утверждения 5 § 1, при возведении в натуральную степень уравнения *нельзя потерять корни*, а можно лишь *приобрести посторонние кони*. Поэтому, если применять такое преобразование, то в конце необходима *проверка* найденных корней.

Приведем пример, показывающий, что применение этого преобразования действительно может привести к приобретению посторонних корней.

Пусть дано уравнение

$$2\cos x = 3\sin x - 2.$$

Возведя в квадрат это уравнение и используя основное тригонометрическое тождество, получим уравнение

$$4(1 - \sin^2 x) = 9\sin^2 x - 12\sin x + 4,$$

которое равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sin x = 0, \quad \sin x = \frac{12}{13}.$$

Множеством всех корней первого уравнения этой совокупности являются две серии: $x_m = 2\pi m$, $m \in Z$ и $x_q = \pi + 2\pi q$, $q \in Z$. Множеством всех корней второго уравнения также являются две серии: $x_p = \arcsin\frac{12}{13} + 2\pi p$, $p \in Z$, и $x_k = \pi - \arcsin\frac{12}{13} + 2\pi k$, $k \in Z$. Поскольку в процессе решения исходного уравнения проводилось возведение уравнения в квадрат, то возможно, что среди найденных корней есть посторонние корни, следовательно, необходима проверка. Проверка показывает, что каждый корень серии $x_m = 2\pi m$, $m \in Z$, является посторонним корнем, а каждый корень серии $x_q = \pi + 2\pi q$, $q \in Z$, — есть корень исходного уравнения.

Кроме того, проверка показывает, что каждый корень серии $x_k = \pi - \arcsin\frac{12}{13} + 2\pi k$, $k \in Z$, является посторонним корнем, а каждый корень серии $x_p = \arcsin\frac{12}{13} + 2\pi p$, $p \in Z$, есть корень исходного уравнения.

Поэтому множеством всех корней исходного уравнения являются две серии: $x_q = \pi + 2\pi q$, $q \in Z$, и $x_p = \arcsin\frac{12}{13} + 2\pi p$, $p \in Z$.

Заметим еще, что часто, провода возведение уравнения в натуральную степень, используют следующую формулу

$$(\sqrt[n]{f(x)})^n = f(x).$$

Ясно, что если при решении уравнения заменить $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ на $f(x)$, то можно приобрести посторонние корни, и поэтому в конце решения необходима проверка.

Приведем пример такого преобразования уравнения.

Пусть дано уравнение

$$\sqrt{x^2 + x - 5} = \sqrt{x - 1}.$$

Возводя это уравнение в квадрат и заменяя $(\sqrt{x^2 + x - 5})^2$ на $(x^2 + x - 5)$, а $(\sqrt{x - 1})^2$ на $(x - 1)$, получаем уравнение

$$x^2 + x - 5 = x - 1.$$

Множество всех корней последнего уравнения состоит из двух чисел: $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Поскольку в процессе решения исходного уравнения проводилось возведение уравнения в квадрат и проводилась замена $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ на $f(x)$, то могла появиться посторонние корни, поэтому необходима проверка. Проверка показывает, что корень $x_2 = -2$ не является корнем исходного уравнения, а корень $x_1 = 2$ является корнем исходного уравнения.

Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 2$.

Заметим, что обычно замена $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ на $f(x)$ при возведении уравнения в натуральную степень n не оговаривается.

Вместо этого способа решения можно предложить и другой, основанный на применении утверждения 7 § 1.

При этом способе уравнение можно решать по следующей схеме:

1. *Найти ОДЗ уравнения.*

2. *Разбить ОДЗ на два множества M_1 и M_2* (M_1 — вся та часть ОДЗ, где одновременно обе части уравнения либо неотрицательны, либо неположительны, M_2 — вся та часть ОДЗ, на которой правая и левая части уравнения имеют разные знаки).

Тогда очевидно, что на M_2 уравнение не имеет корней, следовательно, множество всех корней исходного уравнения содержится в M_1.

3. *Решить уравнение на множестве M_1*. Множество всех корней, найденное на M_1, будет множеством всех корней исходного уравнения (здесь учитывается то, что возведение в натуральную степень исходного уравнения приводит к равносильному ему на множестве M_1 уравнению).

Решим по этой схеме уравнение

$$\sqrt{2x+29} = 3 - x.$$

ОДЗ этого уравнения есть множество $X = \left[-\frac{29}{2}, +\infty\right)$.

Разобьем ОДЗ на два множества $M_1 = \left[-\frac{29}{2}, 3\right]$ и $M_2 = (3, +\infty)$. На множестве M_2 исходное уравнение не имеет корней, ибо для каждого $x \in M_2$, левая часть уравнения положительна, а правая — отрицательна. Решим уравнение на множестве M_1. Так как на этом множестве обе части исходного уравнения неотрицательны, то после возведения в квадрат исходного уравнения получим равносильное ему уравнение

$$2x + 29 = (3 - x)^2.$$

Множеством всех корней последнего уравнения являются два числа $x_1 = -2$ и $x_2 = 10$. Так как число $x_2 = 10$ не принадлежит множеству M_1, то оно не является корнем исходного уравнения.

Так как число $x_1 = -2$ принадлежит множеству M_1, то оно является корнем исходного уравнения.

Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = -2$.

Итак, решить уравнение, возводя его в натуральную степень, можно двумя способами:

Первый способ. Совершить переход к уравнению, которое является следствием исходного уравнения. Найти все корни полученного уравнения. Сделать проверку и установить, какие корни являются посторонними. Из множества всех найденных корней те корни, которые не являются посторонними, и составят множество всех корней уравнения.

Второй способ. Совершить равносильный переход на множестве M_1 (M_1 — вся та часть ОДЗ исходного уравнения, где обе части исходного уравнения одновременно или неотрицательны, или одновременно неположительны). Найти все корни полученного уравнения на M_1. Все эти корни и составляют множество всех корней исходного уравнения.

Преобразования, связанные с освобождением от знаменателя. Пусть дано уравнение

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x).$$

Замена этого уравнения на уравнение

$$f(x) = g(x)\varphi(x)$$

называется *освобождением уравнения от знаменателя.*

Ясно, что при таком преобразовании уравнения возможно появление посторонних корней. Поэтому, если в процессе решения некоторого уравнения проводилось освобождение уравнения от знаменателя, то необходима проверка всех найденных корней.

Приведем пример применения этого преобразования.

Пусть дано уравнение

$$\frac{2(x-7)}{x^2-6x-7} = 1.$$

Освобождаясь от знаменателя, получим уравнение

$$2x - 14 = x^2 - 6x - 7.$$

Множество всех корней последнего уравнения состоит из двух чисел: $x_1 = 1$ и $x_2 = 7$.

Так как в процессе решения исходного уравнения проводилось преобразование, в результате которого могли появиться посторонние корни, то необходима проверка. Проверка показывает, что число $x_2 = 7$ не является корнем исходного уравнения, а число $x_1 = 1$ есть корень исходного уравнения. Итак, уравнение имеет единственный корень $x_1 = 1$.

Заметим, что согласно утверждению 9 § 1 уравнение

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$$

равносильно на своей ОДЗ уравнению

$$f(x) = g(x)\varphi(x).$$

Поэтому решать такие уравнения можно по следующей схеме:

1. *Найти ОДЗ уравнения* $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$.

2. *Решить на ОДЗ данного уравнения равносильное ему уравнение* $f(x) = g(x)\varphi(x)$.

Поскольку уравнения $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$ и $f(x) = g(x)\varphi(x)$ равносильны на ОДЗ первого уравнения, то все корни уравнения $f(x) = g(x)\varphi(x)$, входящие в ОДЗ первого уравнения, составят множество всех корней уравнения $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$.

Решим по этой схеме уравнение

$$\frac{\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1.$$

ОДЗ этого уравнения есть множество M — множество всех действительных чисел, кроме чисел $x_m = \frac{\pi}{2} + \pi m$, где m — любое целое число. На множестве M исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin^4 x - 1 = \cos^4 x.$$

Поскольку на множестве всех действительных чисел справедливы следующие тождественные равенства:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x),$$
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x,$$

то на множестве всех действительных чисел справедливо и тождественное равенство

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно на множестве M уравнению

$$\cos 2x = -1.$$

Множество всех решений последнего уравнения есть серия $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Так как эта серия не принадлежит множеству M, то уравнение не имеет корней.

Итак, решить уравнение, освобождаясь от знаменателя, можно двумя способами:

Первый способ. Совершить переход к уравнению, которое является следствием исходного уравнения. Найти все корни полученного уравнения, сделать проверку и установить, какие корни являются посторонними. Из множества всех найденных корней те корни, которые не являются посторонними, и составят множество всех корней уравнения.

Второй способ. Совершить равносильный переход на ОДЗ исходного уравнения. Найти все корни полученного уравнения. Все эти найденные корни составят множество всех корней исходного уравнения.

Преобразования, связанные с потенцированием уравнения. Пусть a — любое фиксированное положительное и неравное единице число. Пусть дано уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x).$$

Замена этого уравнения уравнением

$$f(x) = g(x)$$

называется *потенцированием уравнения.*

Как следует из утверждения 6 § 1, при потенцировании уравнения *потерять корни нельзя*, а *можно лишь приобрести посторонние.* Поэтому, если при решении уравнения пришлось его потенцировать, то в конце решения необходима *проверка.*

Решим таким способом уравнение

$$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 (4x - 7).$$

Потенцируя данное уравнение, получим уравнение

$$x^2 - 4 = 4x - 7.$$

Множество всех корней последнего уравнения состоит их двух чисел $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

Поскольку в процессе решения исходного уравнения применялось потенцирование уравнения, то могли появиться посторонние корни, поэтому необходима проверка. Проверка показывает, что число $x_2 = 1$ не является корнем исходного уравнения, а число $x_1 = 3$ есть корень исходного уравнения. Поэтому, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 3$.

Заметим, что согласно утверждению 8 § 1 уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

равносильно на своей ОДЗ уравнению

$$f(x) = g(x).$$

Поэтому уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ можно решить по следующей схеме:

1. *Найти ОДЗ уравнения* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

2. *Решить на ОДЗ этого уравнения равносильное ему уравнение* $f(x) = g(x)$.

Все корни последнего уравнения и будут составлять множество всех корней уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Решим по этой схеме рассмотренный выше пример.

Пусть дано уравнение

$$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 (4x - 7)$$

ОДЗ этого уравнения есть множество $M = (2, +\infty)$. На множестве M данное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 4 = 4x - 7$.

Множество всех решений последнего уравнения состоит из двух чисел: $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. Поскольку число $x_2 = 1$ не принадлежит множеству M, а число $x_1 = 3$ принадлежит множеству M, то последнее уравнение на множестве M имеет только один корень $x_1 = 3$. Так как последнее и исходное уравнения равносильны на множестве M, то отсюда вытекает, что исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 3$.

Итак, решить уравнение, применяя потенцирование уравнения, можно двумя способами.

Первый способ. Совершить переход к уравнению, которое является следствием исходного уравнения. Найти все корни полученного уравнения, сделать проверку и установить, какие корни являются посторонними. Из множества всех найденных корней те корни, которые не являются посторонними, и составляют множество всех корней уравнения.

Второй способ. Совершить равносильный переход на ОДЗ исходного уравнения, найти все корни полученного уравнения на ОДЗ исходного уравнения Все эти найденные корни составляют множество всех корней исходного уравнения.

Преобразование, связанное с логарифмированием уравнения. Пусть a — фиксированное положительное и неравное единице число. Пусть дано уравнение

$$f(x) = g(x).$$

Замена этого уравнения на уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

называется *логарифмированием уравнения.*

Как следует из утверждения 6 § 1, при логарифмировании уравнения *возможна потеря корней.* Поэтому *формальное применение этого преобразования запрещается.*

Заметим, что логарифмировать уравнение $f(x) = g(x)$ можно только на множестве M — всей той части ОДЗ, где обе части этого уравнения положительны. При этом, как следует из утверждения 6 § 1, на множестве M уравнения $f(x) = g(x)$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильны.

Поэтому решить уравнение $f(x) = g(x)$, применяя логарифмирование уравнения, можно только по следующей схеме:

1. *Найти ОДЗ данного уравнения.*

2. *Разбить ОДЗ на два множества:* M_1 *и* M_2 (M_1 — вся та часть ОДЗ, на которой обе части данного уравнения положительны, M_2 — вся та часть ОДЗ, которая остается после выделения множества M_1).

3. *Решить уравнение на* M_1 (учитывая, что на M_1 уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$).

4. *Решить уравнение на* M_2.

5. *Объединить множества всех корней, найденные на* M_1 *и* M_2.

Решим по этой схеме уравнение

$$3^{x^2 - x} = 3^{1 - (\sqrt{x})^2}.$$

ОДЗ этого уравнения есть множество $M = [0, +\infty)$. Поскольку на множестве M обе части данного уравнения положительны, то данное уравнение равносильно на множестве M уравнению

$$x^2 - x = 1 - (\sqrt{x})^2.$$

Полученное уравнение в свою очередь на множестве M равносильно уравнению

$$x^2 = 1.$$

Последнее уравнение имеет только два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Корень $x_1 = 1$ принадлежит множеству M, а корень $x_2 = -1$ не принадлежит множеству M. Следовательно, последнее уравнение имеет на множестве M единственный корень $x_1 = 1$. Так как исходное уравнение равносильно последнему уравнению на множестве M — всей ОДЗ исходного уравнения, то исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 1$.

Преобразования, связанные с сокращением уравнения на общий множитель. Пусть дано уравнение

$$\varphi(x)f(x) = (x)g(x).$$

Часто это уравнение заменяют уравнением

$$f(x) = g(x),$$

т.е. сокращают исходное уравнение на общий множитель $\varphi(x)$. Это *грубая ошибка*, которая может привести как к *потере корней* исходного уравнения, так и *к приобретению посторонних корней.*

Рассмотрим пример. Пусть дано уравнение

$$\sqrt{x-2}\,(x^2+3) = 4x\sqrt{x-2}.$$

Сокращая это уравнение на общий множитель $\sqrt{x-2}$, приходим к уравнению

$$x^2 + 3 = 4x.$$

Множество всех корней последнего уравнения состоит из двух чисел: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

Однако легко видеть, что число $x_1 = 1$ не является корнем исходного уравнения, т.е. это число является посторонним корнем для исходного уравнения. В то же время легко видеть, что число $x_3 = 2$ является корнем исходного уравнения и этот корень был потерян при проведенном преобразовании.

Значит, действительно, при сокращении уравнения на общий множитель $\varphi(x)$ можно и потерять корни исходного уравнения, и приобрести посторонние корни.

Подобные уравнения надо решать только следующим образом.

1. *Найти ОДЗ уравнения* $\varphi(x)f(x) = \varphi(x)g(x)$.

2. *Записать равносильное ему уравнение* $\varphi(x)[f(x) - g(x)] = 0$.

3. *Перейти от этого уравнения к равносильной ему на ОДЗ исходного уравнения совокупности уравнений*

$$\varphi(x) = 0, \quad f(x) - g(x) = 0.$$

4. *Решить эту совокупность уравнений на ОДЗ исходного уравнения*. Тогда множество всех тех корней этой совокупности, каждый из которых принадлежит ОДЗ исходного уравнения, и составят множество всех корней исходного уравнения.

Решим этим способом уравнение

$$\sqrt{x-2}\,(x^2 + 3) = 4x\sqrt{x-2}.$$

ОДЗ этого уравнения — множество $M = [2, +\infty)$. Запишем равносильное исходному уравнение

$$\sqrt{x-2}\,(x^2 - 4x + 3) = 0.$$

Это уравнение на множестве M равносильно совокупности уравнений

$$\sqrt{x-2} = 0, \quad x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет единственный корень $x_1 = 2$. Второе уравнение имеет только два корня: $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Значит, множество всех корней этой совокупности уравнений состоит из трех чисел: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Корни x_1 и x_2 входят в множество M, а корень x_3 не входит в множество M.

Следовательно, исходное уравнение имеет только два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Преобразования, связанные с освобождением от знака абсолютной величины. Пусть дано уравнение

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ \ldots\ + |f_m(x)| - |f_{m+1}(x)| - \ldots$$
$$\ldots - |f_k(x)| = g(x), \quad (12)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ — многочлены относительно x. Для решения таких уравнений обычно *необходимо избавиться от знаков абсолютных величин*. Отметим, что *формальное освобождение от знаков абсолютных величин может привести как к потере корней исходного уравнения, так и к приобретению посторонних корней*. Покажем это.

Пусть дано уравнение

$$|x - 1| = 2x + 4.$$

Если формально освободиться от знака абсолютной величины, то получим уравнение

$$x - 1 = 2x - 4,$$

которое имеет единственный корень $x_1 = -5$. Однако легко видеть, что этот корень не является корнем исходного уравнения, т.е. является для исходного уравнения посторонним корнем.

В то же время легко видеть, что число $x_2 = -1$ является корнем исходного уравнения и этот корень был потерян при проведенном преобразовании. Значит, действительно, при формальном освобождении от знаков абсолютной величины возможно и потерять корни исходного уравнения и приобрести посторонние корни.

Для решения таких уравнений наиболее часто употребляется так называемый *метод интервалов*. Суть этого метода состоит в следующем.

Пусть дано уравнение (12). Сначала решается совокупность уравнений

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \ldots,\ f_m(x) = 0,\ \ldots,\ f_k(x) = 0, \quad (13)$$

затем на числовой прямой отмечаются все корни этой совокупности уравнений.

Таким образом, вся числовая прямая разбивается на некоторое число промежутков, затем на каждом таком промежутке уравнение заменяется на другое уравнение, не содержащее знаков абсолютной величины и равносильное исходному уравнению на этом промежутке. На каждом таком промежутке отыскиваются корни того уравнения, которое на этом промежутке получается, и затем отбираются их них те, которые попадают в данный промежуток. Они и будут корнями исходного уравнения на рассматриваемом промежутке. Наконец, для того чтобы выписать все корни исходного уравнения, собирают вместе (объединяют) все его корни, найденные на всех промежутках.

Продемонстрируем этот метод на нескольких примерах. Пусть дано уравнение

$$|x - 1| = 2x + 4. \tag{14}$$

В этом случае совокупность уравнений (13) состоит из одного уравнения

$$x - 1 = 0,$$

имеющего единственный корень — число 1. Значит, числовая прямая разбивается на два промежутка: $(-\infty, 1)$ и $[1, +\infty)$.

Рассмотрим решение уравнения (14) на каждом из этих промежутков.

1. На промежутке $(-\infty, 1)$ по определению абсолютной величины

$$|x - 1| = -(x - 1).$$

Поэтому на этом промежутке уравнение (14) равносильно уравнению

$$-(x - 1) = 2x + 4,$$

имеющему единственный корень $x_1 = -1$. Этот корень попадает в промежуток $(-\infty, 1)$. Значит, на этом промежутке уравнение (14) имеет единственный корень $x_1 = -1$.

2. На промежутке $[1, +\infty)$ по определению абсолютной величины

$$|x-1| = x-1.$$

Поэтому на этом промежутке уравнение (14) равносильно уравнению

$$x-1 = 2x+4,$$

имеющему единственный корень $x_2 = -5$. Этот корень не попадает в промежуток $[1, +\infty)$. Значит, на этом промежутке уравнение (14) не имеет корней.

Подводя итог, получаем, что исходное уравнение (14) имеет единственный корень $x_1 = -1$.

Пусть дано уравнение

$$|x^2-1| - |x| + |2x+3| = 4x-6. \qquad (15)$$

Рассмотрим совокупность уравнений

$$x^2-1=0, \quad x=0, \quad 2x+3=0.$$

Множество всех корней этой совокупности уравнений состоит из четырех чисел: $1;\ -1;\ 0;\ -\frac{3}{2}$. Значит, числовая прямая разбивается на пять промежутков: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$, $\left[-\frac{3}{2}; -1\right)$, $[-1; 0)$, $[0; 1)$, $[1; +\infty)$.

Рассмотрим решение уравнения (15) на каждом из этих промежутков.

1. На промежутке $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ по определению абсолютной величины

$$|x^2-1| = (x^2-1), \quad |x| = -x, \quad |2x+3| = -(2x+3).$$

Поэтому на этом промежутке уравнение (15) равносильно уравнению

$$(x^2-1) - (-x) - (2x+3) = 4x-6,$$

которое имеет только два корня:

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

Ни один из этих корней не входит в рассматриваемый промежуток, поэтому уравнение (15) не имеет корней на этом промежутке.

2. На промежутке $\left[-\frac{3}{2}; -1\right)$ по определению абсолютной величины

$$|x^2 - 1| = (x^2 - 1), \quad |x| = -x, \quad |2x + 3| = (2x + 3).$$

Поэтому на этом промежутке уравнение (15) равносильно уравнению

$$(x^2 - 1) - (-x) + (2x + 3) = 4x - 6.$$

Это квадратное уравнение не имеет действительных корней. Значит, уравнение (15) не имеет корней на этом промежутке.

3. На промежутке $[-1; 0)$ по определению абсолютной величины

$$|x^2 - 1| = -(x^2 - 1), \quad |x| = -x, \quad |2x + 3| = (2x + 3).$$

Поэтому на этом промежутке уравнение (15) равносильно уравнению

$$-(x^2 - 1) - (-x) + (2x + 3) = 4x - 6,$$

которое имеет только два корня:

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{2}, \quad x_4 = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2}.$$

Ни один из этих корней не входит в рассматриваемый промежуток, поэтому уравнение (15) не имеет корней на этом промежутке.

4. На промежутке $[0; 1)$ по определению абсолютной величины

$$|x^2 - 1| = -(x^2 - 1), \quad |x| = x, \quad |2x + 3| = 2x + 3.$$

Поэтому на этом промежутке уравнение (15) равносильно уравнению

$$-(x^2-1)-x+(2x+3)=4x-6,$$

которое имеет только два корня: $x_5=-5$, $x_6=2$. Ни один из этих корней не входит в рассматриваемый промежуток, поэтому уравнение (15) не имеет корней на этом промежутке.

5. На промежутке $[1; +\infty)$ по определению абсолютной величины

$$|x^2-1|=(x^2-1), \quad |x|=x, \quad |2x+3|=(2x+3).$$

Поэтому на этом промежутке уравнение (15) равносильно уравнению

$$(x^2-1)-x+(2x+3)=4x-6.$$

Это квадратное уравнение не имеет действительных корней, поэтому уравнение (15) не имеет корней на этом промежутке.

Подводя итог, получаем, что уравнение (15) не имеет корней на всей числовой прямой.

В заключении отметим, что в этом параграфе рассмотрены не все возможные преобразования, а лишь наиболее часто употребляемые. Конечно, можно привести примеры и других неравносильных преобразований, как, например, уничтожение подобных членов, переход к новому основанию логарифмов, содержащему неизвестную величину. Не будем останавливаться на этом подробно, а сформулируем лишь общее правило.

При решении уравнений надо пользоваться одним их двух следующих способов:

1. Замена данного уравнения на уравнение, равносильное ему на некотором множестве; при этом явно указывается и само множество и то, что уравнения равносильны именно на этом множестве (в этом случае надо рассмотреть все множества, на которое разбивается ОДЗ).

2. Замена данного уравнения на уравнение, являющееся его следствием; при этом указывается, почему новое уравнение есть следствие предыдущего, и в конце решения обязательно делается проверка.

УПРАЖНЕНИЯ

Является ли число 2 корнем следующего уравнения (1 — 15):

1. $3+\frac{x}{4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{5}(27-x)+\frac{1}{2}(x-8)\right]-1-\frac{x}{2}\right\}+\frac{x+1}{2}$;

2. $\frac{3x-4}{3}-\frac{(8x-11)(x+1)}{4}=\frac{(6x-1)(2x-3)}{12}$;

3. $4x^2+5x-2\sqrt{3x^2-5x+2}=x(15-2x)$;

4. $\sqrt{14+25x}-\sqrt{1+4x}=\sqrt{9x+7}$;

5. $|x-1|+|2x-6|=3$. 6. $|2-|1-|x|||=1$;

7. $3^{2x+1}+9=28\cdot 3^x$. 8. $27^x+3^{1+x}+3^{1-x}+27^{-x}=\frac{551368}{729}$;

9. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4$;

10. $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x=(2\sqrt{2})^x-(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x$;

11. $2^{\log_5 3}\cdot x^{1-\log_5\left(\frac{15x}{2}\right)}=1$;

12. $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{3x}{8}}+3\log_{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{3x}{8}\right)=\log_{\frac{1}{16}}\left(1-\frac{9x^2}{64}\right)^2+2$;

13. $\sqrt{\log_{\frac{x}{4}}\sqrt{\frac{x}{8}}}\cdot\log_2\frac{x}{4}=1$;

14. $\sin^2\frac{x}{\pi}+\cos\frac{2x}{\pi}-2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos\frac{x}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

15. $2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)=\arccos(3-x)$?

Равносильно ли уравнение $x=2$ и следующее уравнение (16 — 30):

16. $3\{10-2[3x-2(x-5)]+7x\}=3x-4$;

17. $\sqrt{4x^2+8x-28}-x=2-\sqrt{3x^2+8x-24}$;

18. $(x^2-5x-7)^2-(x-2)(x-3)=1$;

19. $x^2+\frac{4}{x^2}=15\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)-17\frac{1}{2}$;

20. $|5x-x^2-6|=x^2-5x+6$. 21. $\sqrt{x^2-6x+9}=(x-3)^2$;

22. $2^{x+2}=15+2^{2-x}$. 23. $2^x+5^{x-1}=5^x-2^{x+2}$;

24. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$. 25. $3^x\sqrt[3]{8^x}=36$;

26. $\lg\sqrt[3]{75+5^{\sqrt{3x-2}}}=\frac{2}{3}$;

27. $\log_4\left\{2\log_3\left[1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}$;

28. $\lg 2+\lg\left(4^{x-2}+9\right)=1-\lg\left(2^{x-2}+1\right)$;

29. $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_4\left(3^{x-1}+1\right)^2$;

30. $\dfrac{\cos(\pi x) - 1}{\sqrt{(1-x)(x+3)}} = 0$?

Равносильны ли следующие два уравнения (31 — 66):

31. $x + 1 = 0$ и $(x+1)(x+4) = 0$;

32. $(x - 1) = 0$ и $(\sqrt{x} + 1)(x - 1) = 0$;

33. $x^2 = 2 - x$ и $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \dfrac{2 - x}{x^2 - 1}$;

34. $x + 4 = 0$ и $\dfrac{x + 4}{x^2 - 2x + 9} = 0$;

35. $x - 4 = 8 - x$ и $x - 4 + \dfrac{7}{x - 6} = 8 - x + \dfrac{7}{x - 6}$;

36. $2x - 6 = 9 + x$ и $2x - 6 + \sqrt{x^2 + 1} = 9 + x + \sqrt{x^2 + 1}$;

37. $x(x + 4) = x + 4$ и $\dfrac{x(x+4)}{\log_2\left(1 - x^2\right)} = \dfrac{x + 4}{\log_2\left(1 - x^2\right)}$;

38. $(x - 3) = 2x + 1$ и $(x - 3)\sqrt{x + 4} = (2x + 1)\sqrt{x + 4}$;

39. $x^2 - 2 = 0$ и $x^4 - 4 = 0$;

40. $x^2 - 4x + 3 = 0$ и $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = 0$;

41. $x^2 + 3 = 4x$ и $\left(x^2 + 3\right)(x - 1) = 4x(x - 1)$;

42. $\dfrac{x - 3}{x + 2} = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + x - 2}$ и $(x - 3)\left(x^2 + x - 2\right) = \left(x^2 - 9\right)(x + 2)$;

43. $\dfrac{x + 3}{x^2 + 3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$ и $3(x + 3) + x^2 + 3 = 3x^2$;

44. $x^2 + \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x - 2} = 2x$ и $x^2 = 2x$;

45. $\dfrac{x^2 - 25}{x + 5} = -14$ и $x - 5 = -14$;

46. $\dfrac{x^2 - 25}{x + 5} = -10$ и $x - 5 = -10$;

47. $(x + 3)(x - 1) = 2(x - 1)$ и $x + 3 = 2$;

48. $(x + 2)(x - 1) = 3(x - 1)$ и $x + 2 = 3$;

49. $x^2 - 2x = 8$ и $\left(x^2 - 2x\right)2^{\sqrt{x}} = 8 \cdot 2^{\sqrt{x}}$;

50. $(2x - 3) = 3x - 2$ и $(2x - 3)^2 = (3x - 2)^2$;

51. $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x^2 + 2x - 4}$ и $x^2 - 2 = x^2 + 2x - 4$;

52. $\sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x + 2} = 0$ и $\sqrt{(1 + x)(x + 2)} = 0$;

53. $\sqrt{x + 2}\,\sqrt{x - 3} = \sqrt{6}$ и $\sqrt{(x + 2)(x - 3)} = \sqrt{6}$;

54. $x^2 - 7 = 3^{\log_3 6x}$ и $x^2 - 7 = 6x$;

55. $\sqrt{(x + 2)^2} = 1$ и $x + 2 = 1$;

56. $\sqrt{\left(x^2 - 4x + 4\right)^2} = 4$ и $x^2 - 4x + 4 = 4$;

57. $\sqrt[4]{(x+1)^4}=2$ и $|x+1|=2$;

58. $\log_4(x-1)^2=0$ и $2\log_4(x-1)=0$;

59. $\log_5 x^4=0$ и $4\log_5|x|=0$;

60. $\log_7 x^5=0$ и $5\log_7 x=0$;

61. $\log_{(x+2)^2}(x+1)^2=0$ и $\log_{x+2}(x+1)=0$;

62. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x+3)=0$ и $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+3)=0$;

63. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} 2x=0$ и $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}+\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=0$;

64. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} 2x=0$ и $\sin 3x=0$;

65. $\sin x\cos x=\cos^2 x$ и $\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg}^2 x$;

66. $\sin x\cos x=\cos^2 x$ и $\operatorname{tg} x=1$?

Указать, какое из двух следующих уравнений является следствием другого (67 — 92):

67. $(x+2)(x+1)^2=3(x+1)^2$ и $x+2=3$.

68. $x^2+4x+3=0$ и $\left(x^2+4x+3\right)\cdot 2^{\sqrt{x+2}}=0$.

69. $x^3-\dfrac{4x(x+2)}{x+2}=0$ и $x^3-\dfrac{4x^2}{x}=0$.

70. $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}$ и $x^2=4$.

71. $x^2-7x=8$ и $\sqrt{4-x^2}\left(x^2-7x\right)=8\sqrt{4-x^2}$.

72. $x^2=16$ и $x^2\log_2(x-5)=16\cdot\log_2(x-5)$.

73. $x^2-6=5x$ и $\dfrac{x^2-6}{\sqrt{5-x^2}}=\dfrac{5x}{\sqrt{5-x^2}}$.

74. $x-4=2x+3$ и $\dfrac{x-4}{\lg x}=\dfrac{2x+3}{\lg x}$.

75. $x^2-\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{4}{x+3}+3x=0$ и $x^2+3x=0$.

76. $x^3-2x=0$ и $x^3-\dfrac{2x^2}{x}=0$.

77. $\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-4}=\sqrt{30}$ и $\sqrt{(x+3)(x-4)}=\sqrt{30}$.

78. $\sqrt{x^2-5x-6}=4$ и $x^2-5x-6=16$.

79. $\log_2(x+1)^2=2$ и $\log_2(x+1)=1$.

80. $\log_2(x+2)+\log_2(x-3)=1$ и $\log_2(x+2)(x-3)=1$.

81. $\sqrt{3}\cdot\sin x\cos x=\cos^{2x}$ и $\sqrt{3}\operatorname{tg} x=1$.

82. $\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x-1}}$ и $\sin x=1$.

83. $\cos 2x\cdot\sqrt{4-x^2}=\sin 4x\cdot\sqrt{4-x^2}$ и $\cos 2x=\sin 4x$.

84. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{\log_2 x}-\frac{1}{\log_2 x}=\operatorname{tg}^2 x$ и $\operatorname{tg} x=1$.

85. $\cos x \cdot \log_5(x-1)=\sin x \cdot \log_5(x-1)$ и $\cos x=\sin x$.

86. $\arcsin x^2=\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\arcsin x^2}{\log_3(-x)}=\frac{\pi}{2\log_3(-x)}$.

87. $\arccos x=\pi$ и $\frac{\arccos x}{\sqrt{x}}=\frac{\pi}{\sqrt{x}}$.

88. $|x^2-1|=x+1$ и $x^2-1=x+1$.

89. $|x^2-4|=x+2$ и $4-x^2=x+2$.

90. $|x+1|+|x-1|=6$ и $x=3$.

91. $|x+1|+|x-1|=-x^2+3$ и $2x=-x^2+3$.

92. $|x+1|+|x-1|=-x^2+2$ и $2x=-x^2+2$.

Равносильны ли уравнения и совокупность уравнений (93 — 124):

Уравнение	Совокупность уравнений
93. $(x^2-1)(x+2)=0$	$x=-1,\ x=1,\ x=-2;$
94. $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0$	$x=1,\ x=2;$
95. $\frac{5(6-x)}{x-2}=\frac{10(5-x)}{3(x-4)}-\frac{11(6-x)}{3(x-4)}$	$x=\frac{7}{2},\ x=7;$
96. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$	$x=81,\ x=64;$
97. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$	$x=1,\ x=5;$
98. $\sqrt{x+1}=x-1$	$x=0,\ x=3;$
99. $\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}$	$x=4,\ x=6;$
100. $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{2x+3}$	$x=-1,\ x=3;$
101. $x^2-\sqrt{x^2-9}=21$	$x=-5,\ x=5;$
102. $\sqrt{14+25x}-\sqrt{1+4x}=\sqrt{7+9}$	$x=1,\ x=2;$
103. $\sqrt{2x^2+3x-2}+\sqrt{8x^2-2x-1}=\sqrt{18x^2+5x-7}$	$x=2,\ x=-\frac{1}{2};$
104. $\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}=5\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{x}\right)$	$x=-1,\ x=\frac{3-\sqrt{21}}{2},\ x=3,\ x=\frac{3+\sqrt{21}}{2};$
105. $\lvert x-3\rvert=\lvert x-3\rvert^2$	$x=0,\ x=2;$
106. $\lvert x-1\rvert+\lvert x+2\rvert=4+\lvert x-3\rvert$	$x=-8,\ x=2;$
107. $\lvert 2-\lvert 1-\lvert x\rvert\rvert\rvert=1$	$x=-4,\ x=-2,\ x=2,\ x=4;$
108. $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x=(2\sqrt{2})^x-(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x$	$x=2,\ x=0;$

Уравнение	Совокупность уравнений
109. $8^{\frac{x}{x+1}} = 4 \cdot 3^{2-x}$	$x = -\frac{\lg 6}{\lg 3}$, $x = 2$;
110. $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^{x} + 8 = 0$	$x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$;
111. $x^{x^2 - 5x + 6} = 1$	$x = 2$, $x = 3$;
112. $x^x + 139x^{-x} - 108x^{-2x} = 32$	$x = 1$, $x = 2$, $x = 3$;
113. $\log_2 \left(9 - 2^x\right) = 3 - x$	$x = 0$, $x = 3$;
114. $\log_{\frac{5x}{2}} \frac{x}{10} + \log_5^2 \frac{x}{2} = 1$	$x = 2$, $x = 10$;
115. $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$	$x = 4$, $x = 8$;
116. $\log_2 \left(9^{x-1} + 7\right) = 2 + \log_2 \left(3^{x-1} + 1\right)$	$x = 1$, $x = 2$;
117. $\sqrt{3 \log_2 (-x)} = \log_2 \sqrt{x^2}$	$x = -8$, $x = -1$;
118. $\lg \left\lvert \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2} \right\rvert = 0$	$x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$;
119. $4 \cos^3 x + 3 \cos (\pi - x) = 0$	$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
120. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$	$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$;
121. $\operatorname{ctg} x \sin 3x \, (\cos x - 2) = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$;
122. $\arccos x = \pi + \arcsin \frac{4x}{3}$	$x = -\frac{3}{5}$, $x = -\frac{2}{3}$;
123. $\cos (4 \arccos x) = -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
124. $\arcsin x - \arcsin \frac{x}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} = 0$	$x = -1$, $x = 0$, $x = 1$?

Решить следующее уравнение (125 — 326):

125. $\left(2x + 1\frac{1}{2}\right)\left(3x - \frac{5}{2}\right) = (x - 1{,}125)\,(2x - 1{,}25)$.

126. $\frac{x+1}{x+3}+\frac{4}{x+7}=1$. 127. $\frac{x-5}{2}+\frac{2x-1}{2+3x}=\frac{5x-1}{10}-1\frac{2}{5}$.

128. $\frac{6x-5}{4x-3}=\frac{3x+3}{2x+5}$. 129. $\frac{3-5x}{x+2}=2+\frac{x-11}{x+4}$.

130. $\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{x}$. 131. $\frac{7}{x^2+x-12}-\frac{6}{x^2+2x-8}=0$.

132. $\frac{x-3}{x^2-3x-4}=\frac{x-1}{x^2-x-2}$. 133. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-7x+12}=\frac{x^2+3x-10}{x^2+3x-8}$.

134. $x^2+4x-\frac{7}{x^2+4x+5}=1$. 135. $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}=\frac{6}{x-1}$.

136. $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0$.

137. $\frac{2}{x-14}-\frac{5}{x-13}=\frac{2}{x-9}-\frac{5}{x-11}$.

138. $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{30}$. 139. $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}=\frac{5\left(2-x^2\right)}{2x}$.

140. $x^3-x^2-100=0$. 141. $x^3-7x^2+14x-8=0$.

142. $2x^4-5x^3-5x^2+18=0$. 143. $6x^4-2x^3-17x^2+2x+11=0$.

144. $3x^5-5x^3+2=0$. 145. $x^7-6x^6+13x^5-12x^4+4x^3=0$.

146. $1-|x|=\frac{1}{2}$. 147. $|-x+2|=2x+1$.

148. $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{|3x-5|}{2}$. 149. $|x-1|+|x-2|=1$.

150. $|x-1|+|x+2|-|x-3|=4$. 151. $|4(1-x)|=|5x-4|+x$.

152. $|1-x^2|=1-x^2$. 153. $|x^2-1|=1-|x|$.

154. $|x^2-9|+|x^2-4|=5$. 155. $\left|\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}x^2-3x+4\right|=\frac{3}{4}$.

156. $|x^2-3x+2|=4-x^2+|x|$. 157. $\frac{7}{|x-1|-3}=|x+2|$.

158. $\frac{|x^2-3x|+5}{x^2+|x+3|}=1$. 159. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}\right|=1$.

160. $|3-|x+2||=4$. 161. $\left|\frac{x^2-6|x|+7}{x^2+6x+7}\right|=1$.

162. $\sqrt{x+8}=\sqrt{5x+20}-2$. 163. $\sqrt{10-x}-\sqrt{x}=\sqrt{x-5}$.

164. $\sqrt{x-10}-\sqrt{4-x}+x=4$. 165. $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

166. $x^2-3=\sqrt{4x^2-4x+1}$. 167. $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=3+x^2$.

168. $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-1}$.

169. $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{1-x}$.

170. $\sqrt{9+4x^2-12x}+\sqrt{10x-x^2-21}=2x+3{,}5$.

171. $\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{5x-x^2-4}=-|1-x^2|$.

172. $\sqrt{4x^2+25-10x}-7=|x-2|-3x.$

173. $(x+1)\sqrt{10x-21-x^2}=x^2-11x+24.$

174. $\sqrt{x}=1-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}.$

175. $(1-\sqrt{1+\sqrt{x}})\sqrt{1+\sqrt{x}}=\sqrt{x}.$

176. $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=1-\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}.$

177. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$

178. $\dfrac{x+2}{\sqrt{-1-x}+1}=1-\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}.$

179. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-7}+\sqrt{x^2+1}+7=0.$

180. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\sqrt{x-1}+2}=2.$

181. $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}.$

182. $x^2+4x-16\sqrt{2x}+20=0.$

183. $\sqrt{\sqrt{x+4}+1}+\sqrt{\sqrt{3-x}+2}=x^2-x-42.$

184. $\sqrt[4]{512}=8^{3x}\,2^{1-x}.$ **185.** $125^{2-3x}=\sqrt{\dfrac{1}{25}}.$

186. $\left(\dfrac{5}{9}\right)^{2x-7}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{9}\right)^{1-3x}}.$ **187.** $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{x}\left(\dfrac{7}{4}\right)^{3x-1}-\dfrac{16}{49}=0.$

188. $9^x\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-3x}=\sqrt{27^x}\cdot\sqrt[3]{81^{x+3}}.$

189. $3^{x(x-2)-\frac{8x+5}{2}}-9\sqrt{243}=0.$

190. $\left[(\sqrt{0,11})^{x+2}\right]^{3-x}=0,001331.$

191. $\left(32^{\frac{1}{x-7}}\right)^{x+5}=\left[\sqrt{0,0625}\,(2\cdot\sqrt{4096})^{x+17}\right]^{\frac{1}{x-3}}.$

192. $3^{2+\log_3 2}\cdot\sqrt{729}=2\left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{81}\right)^{x+1}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$

193. $2\cdot5^{x+2}-5^{x+3}=375.$ **194.** $3\cdot4^{x-2}=2\left(256-16^{\frac{x+1}{2}}\right).$

195. $6^x-2^{x-1}\cdot3^{x-2}=2\sqrt{5^{\log_5 289}}.$

196. $3\sqrt{2^{x-31}}-5\sqrt{2^{x-35}}-32=0.$

197. $3^{\sqrt{x^2}+2}-3^{\sqrt{x^2}+1}-3^{\sqrt{x^2}-1}=68.$ **198.** $2^{\left(3^x\right)}=3^{\left(2^x\right)}.$

199. $5^x\left(3x+5^x\right)=4(3x+4).$ **200.** $14\cdot7^{x-1}=3\cdot5^{x+2}.$

201. $3\cdot13^x+13^{x+1}-2^{x+2}=5\cdot2^{x+1}.$

202. $2\cdot5^{x+1}-\dfrac{1}{5}\cdot4^{x+2}-\dfrac{1}{3}\cdot5^{x+2}=3\cdot4^{x-1}.$

203. $3\left(10^x-6^{x+2}\right)+4\cdot10^{x+1}=5\left(10^{x-1}+6^{x-1}\right).$

204. $9^x-8\cdot3^x+7=0.$ **205.** $4-2^{x+2}=3.$

206. $2^x\left(7-2^x\right)=2\cdot7^{\log_7 3}.$ **207.** $4^{2x-1}=13\cdot4^{x-2}-21.$

208. $2^x = 26 + 3 \cdot 2^{\frac{x-3}{2}}$. **209.** $2\left(9^x + 4^x\right) - 5 \cdot 6^x = 0$.

210. $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$. **211.** $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$.

212. $4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$. **213.** $2^{2x+6} + 4\left(4^{2x} - 8^{x+1}\right) = 0$.

214. $\sqrt[3]{25^x} - \sqrt[3]{9^x} - \sqrt[3]{15^x} = 0$.

215. $7^{2x} + 7^{-2x} - 7^{x+1} - 7^{1-x} + 8 = 0$.

216. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1\right] = 2^x + 1$.

217. $2^x\left(2^{3x} - 2^x + 2\right) = 2 \cdot 8^x - 1$. **218.** $5^x - 32 = \dfrac{108 - 139 \cdot 5^x}{25^x}$.

219. $(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x + 1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 1} = \dfrac{101}{10\,(2 - \sqrt{3})}$.

220. $\log_2 (x + 4) = \log_2 4 \left(\log_2 7 - \log_2 5\right)$.

221. $\log_7 x = 2 \log_7 (2x - 15)$.

222. $\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 3) = 1$.

223. $2 \log_\pi (x - 1) + \log_\pi (x - 30)^2 = 4$.

224. $\log_3 x + \log_3 (x + 2) = 1$.

225. $\log_3 \log_8 \log_2 (x + 5) = \log_3 2 - 1$.

226. $\log_8 \left(2 \log_3\left(1 + \log_2 \left(1 + 3 \log_2 x\right)\right)\right) = \frac{1}{3}$.

227. $1 + \lg \left(1 + x^2 + 2x\right) - \lg \left(x^2 + 6\right) = 2 \lg (x + 1)$.

228. $\lg (2x - 3)^2 - \lg (3x - 2)^2 = 2$.

229. $\log_{\frac{1}{2}} (4 - x) = \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}} (x - 1)$.

230. $2 - \log_2 \left(x^2 + 3x\right) = 0$.

231. $\log_4 \left(x^2 - 1\right) - \log_4 (x - 1)^2 = \log_4 \sqrt{(2 - x)^2}$.

232. $\log_9 \left(x^2 + 2x - 3\right) = \log_9 \dfrac{x - 1}{x + 3}$.

233. $\log_6 (x + 1) = \log_6 (1 - x) + \log_6 (2x + 3)$.

234. $\dfrac{\lg 2 + \lg \left(4 - 5x - 6x^2\right)}{\lg (2x - 1)} = 3$.

235. $\log_{\sqrt{2}} \left|\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}\right| = 0$.

236. $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (7 - x) = 1$.

237. $\lg \sqrt{1 + x} + 3 \lg \sqrt{1 - x} = \lg \sqrt{1 - x^2} + 2$.

238. $\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \log_2 \sqrt[4]{\dfrac{2}{x}} = 2$.

239. $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \log_4 x - 2} = 4$.

240. $\sqrt{\log_9 \left(9x^3\right) \cdot \log_3 (9x)} = \log_3 x^2.$

241. $\sqrt{2\left(\log_2 \frac{x^2}{64} - 1\right)\left(2 + \log_4 (8x)\right)} = \log_2 (2x).$

242. $\frac{1}{5 - 4 \lg (x+1)} = 3 - \frac{1}{1 + \lg (x+1)}.$

243. $\log_2 \left(4^x + 4\right) = x + \log_2 \left(2^{x+1} - 3\right).$

244. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6.$

245. $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2.$

246. $\log_{5x} \frac{5}{x} + \log_5^2 x = 1.$

247. $\lg \left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4 - \sqrt{4x+1}}\right) = 2 - \sqrt{x + 0,25} \lg 4 + \frac{\lg 16}{4}.$

248. $\lg \sqrt[3]{75 + 5^{\sqrt{3x-5}}} = \frac{2}{3}.$

249. $2 \log_2 \left(\log_2 x\right) + \log_{1/2} \left(\log_2 (2\sqrt{2}x)\right) = 1.$

250. $\log_{1-2x} \left(6x^2 - 5x + 1\right) - \log_{1-3x} \left(4x^2 - 4x + 1\right) = 2.$

251. $\log_{5x-1} \left(10x^2 - 7x + 1\right)^4 = 2 + \log_{2x-1} \left(25x^2 - 10x + 1\right).$

252. $\log_{(x-6)^2} \left(x^2 - 5x + 9\right) = \frac{1}{2}.$

253. $\log_{(x-1)^2} \left(4 - 4x + x^2\right) = 2 + \log_{(x-1)^2} (x+5)^2.$

254. $\log_{x+1} \left(x^2 + x - 6\right)^2 = 4.$ 255. $\log_4 \left[(x-1)^{\log_4 (x-1)^2}\right] = 2.$

256. $\log_3 \left(3^x - 1\right) \cdot \log_3 \left(3^{x+1} - 3\right) = 6.$

257. $x + \lg \left(1 + 2^x\right) = x \lg 5 + \lg 6.$

258. $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2.$ 259. $|\log_2 |x|| = 2.$

260. $\sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}.$ 261. $\sqrt{100 - x^2} \cdot \sin 2x = 0.$

262. $\cos (4x + 2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$ 263. $\frac{\cos 3x}{\sqrt{81 - x^2}} = 0.$

264. $\operatorname{tg} \left(\frac{x+1}{2}\right) = -10.$ 265. $\operatorname{ctg} \frac{3x+2}{4} = 11\sqrt{2}.$

266. $\sqrt{4x + 77 - x^2} \cdot \operatorname{tg} x = 0.$ 267. $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\log_2 \left(14 + 5x - x^2\right)} = 0.$

268. $4 \cos x + 5 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ 269. $2 \sin x - 3 \cos x = -\frac{1}{2}.$

270. $\operatorname{tg} x^2 = -\sqrt{3}.$ 271. $\operatorname{ctg} \sqrt{x} = -1.$

272. $\sqrt{\sin x} = \cos x.$ 273. $\sqrt{5 - 2 \sin x} = 6 \sin x - 1.$

274. $\sqrt{9 - 4\sqrt{3} - (16 - 8\sqrt{3}) \sin x} = 4 \sin x - 3.$

275. $\sin \left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3 \cos \left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2 \sin x.$

276. $\sin x+\sin 3x+4\cos^3 x=0.$

277. $\operatorname{tg} 2x-4\sin x\cos x+1=4\sin^2 x.$

278. $4+\sin^2 x=(3+\sqrt{3})\sin 2x-2(2-\sqrt{3})\cos^2 x.$

279. $\sin 2x=1+\sqrt{2}\cos x+\cos 2x.$

280. $\sin 2x+\sin 3x=2.$

281. $4(\sin 3x\sin x)^2-\sin 3x=5.$

282. $\cos^{40} 2x-\sin^{40} 2x=1.$

283. $\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}=1.$

284. $\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x=1.$ **285.** $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin 2x.$

286. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$

287. $\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0.$

288. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\sin x\left(1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$

289. $\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}.$

290. $\operatorname{tg} 2x\cos 4x\left(4-\sin^2 7x\right)=0.$

291. $8\cos^4 x=3+5\cos 4x.$

292. $2(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)=\sin 4x.$

293. $\sin 4x\sin 6x=2(\sin x+\sin 5x).$

294. $1-\operatorname{tg} 2x=4\sin^2 2x.$

295. $\sin 5x\sin 4x=-\cos 6x\cos 3x.$

296. $\cos x=\cos 3x+2\sin 2x.$

297. $\sin^4 x+5\cos 2x+4=0.$

298. $\operatorname{tg}^2 x+8\cos 2x\operatorname{ctg} 2x=\operatorname{ctg}^2 x.$

299. $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x).$

300. $(\cos x-\sin x)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\sin x=2\cos^2 x.$

301. $2\sin^2 2x+\sin^2 4x=\frac{5}{4}.$

302. $\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=3\sin^2\frac{x}{2}.$

303. $\sin x-2\sin 2x+\sin 3x=|1-2\cos x+\cos 2x|.$

304. $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)-\sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)-2\sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\right).$

305. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)-\operatorname{ctg}(\pi\sin x)=0.$

306. $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}.$

307. $2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x.$

308. $5^{\sqrt{\left(\log_3 x+\log_5 9\right)\log_5 3}}=3^{\sqrt{\log_3 1,8}}.$

309. $\sin^2 2^{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$. **310.** $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}} \sin x = \frac{1}{2}$.

311. $|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$. **312.** $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.

313. $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$. **314.** $2^{1 + 2\cos 5x} + 16^{\sin^2 \frac{5}{2}x} = 9$.

315. $81^{(\sin 2x - 1)\cos 3x} - 9^{(\sin x - \cos x)^2} = 0$.

316. $3^{\sin 2x + 2\cos^2 x} + 3^{1 - \sin 2x + 2\sin^2 x} = 28$.

317. $x^2 \log_3 x^2 - \left(2x^2 + 3\right)\log_9 (2x + 3) = 3\log_3 \frac{x}{2x + 3}$.

318. $x^2\, 3^{x - 2} + 3^{\sqrt{x} + 2} = 3^x + x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}}$.

319. $\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2 - 3}} - 3^{\sqrt{x^2 - 3}}\right) = 3^{2\sqrt{x^2 - 3} + 1} - 3^{\sqrt{x^2 - 3} + 1} + 6\sqrt{x} - 18$.

320. $x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x\log_{1/6}\left(5x^2 - 2x - 3\right) = x^2 + 2x$.

321. $3^{-\frac{1}{2}} + 6^{-\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} = 2^{-\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$.

322. $4^{\operatorname{tg}^2 x} - 4^{\frac{1}{1 + \cos 2x}} \log_{2\sqrt[3]{2}} 4 = -\log_{\sin x} \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

323. $4 \cdot 2^{4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} - 16{,}5 \cdot 4^{\cos x + \sin x} = -\frac{1}{3}\log_{3\sqrt{4}} 16$.

324. $\sin \pi x + \sin\left(\log_x x^{3\pi x}\right) = \cos \pi x - \cos\left(\log_{3\sqrt{x}} x^{\pi x}\right)$.

325. $\cos 2x + \log_4\left(\frac{1}{2}\sin x\right) + 2\cos x \cdot \log_{1/2} \sin x =$

$$= 2\cos x + \sin^2 x \cdot \log_2 \sin^2 x.$$

326. $2\log_{25}\left(5^{2\sin x} - 4\right) = 2\sin x + \sin\frac{3\pi}{2}$.

Глава VIII. НЕРАВЕНСТВА С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Пусть даны две функции: функция $y = f(x)$ с областью существования P и функция $y = g(x)$ с областью существования L. Пусть область M есть пересечение областей существования этих функций, т.е. $M = P \cap L$ (в частности, область M может быть пустым множеством).

Пусть стоит задача: найти все числа α из области M, для каждого из которых справедливо числовое неравенство $f(\alpha) > g(\alpha)$. В таких случаях говорят, что стоит задача: *решить неравенство $f(x) > g(x)$ с одним неизвестным x* или что *дано неравенство $f(x) > g(x)$ с одним неизвестным x.*

В этой главе рассматриваются некоторые способы решения только неравенств с одним неизвестным x. Поэтому дальше вместо слов «неравенство $f(x) > g(x)$ с одним неизвестным x» будем говорить просто «неравенство $f(x) > g(x)$». Аналогично формулируются и понимаются задачи: решить неравенство $f(x) < g(x)$; решить неравенство $f(x) \geq g(x)$; решить неравенство $f(x) \leq g(x)$.

§ 1. Основные понятия и утверждения равносильности неравенств

Областью допустимых значений (ОДЗ) *неравенства $f(x) > g(x)$ называется общая часть* (*пересечение*) областей существования функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, т.е. множество всех числовых значений неизвестного x, при каждом из которых имеют смысл (определены) левая и правая части неравенств.

Число α из ОДЗ неравенства называется *решением неравенства $f(x) > g(x)$*, если при подстановке его вместо неизвестного x неравенство превращается в верное числовое неравенство $f(\alpha) > g(\alpha)$.

Решить неравенство $f(x) > g(x)$ — это значит найти множество всех его решений. Отметим, что это множество может оказаться и пустым множеством, что возможно только в двух случаях:

а) если ОДЗ данного неравенства есть пустое множество;

б) если ОДЗ данного неравенства есть непустое множество Q, но ни для одного числа $\alpha \in Q$ не выполняется числовое неравенство $f(\alpha) > g(\alpha)$.

Если множество всех решений данного неравенства есть пустое множество, то обычно говорят, что данное *неравенство не имеет решений*. Поэтому иногда говорят так: решить неравенство $f(x) > g(x)$ — это значит найти все его решения или доказать, что это неравенство не имеет решений.

Пусть даны два неравенства: $f(x) > g(x)$ и $p(x) > \varphi(x)$. Если любое решение первого неравенства является решением второго неравенства, а любое решение второго неравенства является решением первого неравенства, то такие два неравенства называются *равносильными*.

При этом, в частности, подразумевается, что если каждое из этих неравенств не имеет решений, то такие два неравенства *равносильны*. Замена одного неравенства другим неравенством, ему равносильным, называется *равносильным переходом от одного неравенства к другому*.

Пусть даны два неравенства $f(x) > g(x)$ и $p(x) > \varphi(x)$ и пусть дано некоторое множество M значений неизвестного x. Если любое решение первого неравенства, принадлежащее множеству M, является решением второго неравенства, а любое решение второго неравенства, принадлежащее множеству M, является решением первого неравенства, то такие два неравенства называются *равносильными на множестве M*.

При этом, в частности, подразумевается, что если каждое из этих неравенство не имеет решений на множестве M, то такие два неравенства *равносильны на множестве M*.

Замена одного неравенства другим неравенством, равносильным ему на множестве M, называется *равносильным переходом на множестве M* от одного неравенства к другому.

Отметим, что аналогично формулируются задачи решения неравенств $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ и основные определения для них.

Замечания. 1. В случае неравенств, в отличие от уравнений, термин *«корень» не употребляется.*

2. Так как множеством решений неравенства обычно является некоторый промежуток, а сделать проверку для всех чисел данного промежутка практически невозможно, то понятие *проверка при решении неравенств не используется.*

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих введенные понятия.

Пусть дано неравенство

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} > \sqrt{3-x}.$$

ОДЗ этого неравенства есть множество M, являющееся пересечением областей существования функций $y = \sqrt{x+2}$, $y = \sqrt{x-5}$ и $y = \sqrt{3-x}$, т.е. M есть пересечение множеств $[-2, +\infty)$, $[5, +\infty)$ и $(-\infty, 3]$. Это пересечение пусто. Следовательно, неравенство решено, так как нет ни одного значения неизвестного, при котором все функции, входящие в данное неравенство, имели бы смысл. Таким образом, данное неравенство не имеет решений.

Пусть дано неравенство

$$\sqrt{x} < -5.$$

Так как при подстановке в данное неравенство любого числового значения из ОДЗ этого неравенства оно становится неверным числовым неравенством, то, следовательно, данное неравенство не имеет решений.

Неравенства $x + 5 > 0$ и $(x^4 + 1)(x + 5) > 0$ равносильны на множестве всех действительных чисел; неравенства $\sqrt{x} > 1$ и $x^2 > 1$ не являются равносильными на множестве всех действительных чисел, но равносильны, например, на множестве положительных чисел.

Приведем некоторые утверждения равносильности неравенств:

1. *Неравенства* $f(x) > g(x)$ *и* $f(x) - g(x) > 0$ *равносильны.*

2. *Неравенства* $f(x) > g(x)$ *и* $f(x) + \alpha > g(x) + \alpha$ *равносильны при любом действительном* α.

3а. *Неравенства* $f(x) > g(x)$ *и* $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ *равносильны для любого положительного числа* α.

3б. *Неравенства* $f(x) > g(x)$ *и* $\alpha f(x) < \alpha g(x)$ *равносильны для любого отрицательного числа* α.

4а. *Неравенства* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ *и* $f(x) > g(x)$ *равносильны для любого фиксированного числа* a *такого, что* $a > 1$.

4б. *Неравенства* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ *и* $f(x) < g(x)$ *равносильны для любого фиксированного числа* a *такого, что* $0 < a < 1$.

Справедливость этих утверждений доказывается сходным образом, поэтому приведем доказательство лишь утверждения 3а.

Пусть число x_1 есть некоторое решение неравенства $f(x) > g(x)$, т.е. пусть существуют числа $f(x_1)$ и $g(x_1)$, для которых справедливо числовое неравенство $f(x_1) > g(x_1)$. Умножив это числовое неравенство на положительное число α, получим, что справедливо числовое неравенство $\alpha f(x_1) > \alpha g(x_1)$, а это означает, что число x_1 есть решение неравенства $\alpha f(x) > \alpha g(x)$. Такое рассуждение можно провести для любого решения неравенства $f(x) > g(x)$. Значит, любое решение неравенства $f(x) > g(x)$ является решением неравенства $\alpha f(x) > \alpha g(x)$.

Покажем теперь обратное. Пусть число x_2 есть некоторое решение неравенства $\alpha f(x) > \alpha g(x)$, т.е. пусть существуют числа $f(x_2)$ и $g(x_2)$, для которых справедливо числовое неравенство $\alpha f(x_2) > \alpha g(x_2)$. Из справедливости этого неравенства на основании свойств числовых неравенств вытекает справедливость числового неравенства $f(x_2) > g(x_2)$, а это означает, что число x_2 есть решение неравенства $f(x) > g(x)$. Такое рассуждение можно провести для любого решения неравенства $\alpha f(x) > \alpha g(x)$. Значит, любое решение неравенства $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ является решением неравенства $f(x) > g(x)$.

Итак, если каждое из неравенств $f(x) > g(x)$ и $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ имеет решения, то эти неравенства равносильны. Заметим, что из доказанного вытекает, в частности, что если одно из этих неравенств не имеет решений, то и другое не имеет решений, т.е. и в этом случае неравенства $f(x) > g(x)$ и $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ равносильны.

Утверждение 3а тем самым доказано полностью.

Приведем теперь несколько утверждений равносильности неравенств на множествах.

5. *Пусть n — натуральное число и пусть на некотором множестве M одновременно обе функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ неотрицательны, тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x) > g(x)$ и $[f(x)]^n > [g(x)]^n$.*

6а. *Пусть a — любое фиксированное число такое, что $a > 1$, и пусть на некотором множестве M одновременно обе функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны, тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x) > g(x)$ и $\log_a f(x) >$ $> \log_a g(x)$.*

6б. *Пусть a — любое фиксированное число такое, что $0 < a < 1$, и пусть на некотором множестве M одновременно обе функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны, тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x) > g(x)$ и $\log_a f(x) <$ $< \log_a g(x)$.*

7а. *Пусть на некотором множестве M функция $y = \varphi(x)$ положительна, тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x)$.*

7б. *Пусть на некотором множестве M функция $y = \varphi(x)$ отрицательна, тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x)$.*

Приведем доказательство утверждения 5.

Если $n = 1$, то утверждение 5 верно.

Поэтому будем дальше считать, что $n \geq 2$. Пусть число x_1, принадлежит множеству M и является некоторым решением неравенства $f(x) > g(x)$, т.е. пусть существуют неотрицательные числа $f(x_1)$ и $g(x_1)$ такие, для которых справедливо числовое неравенство $f(x_1) > g(x_1)$. Из справедливости этого неравенства следует, в частности, что число $f(x_1)$ положительно. Но тогда для любого натурального числа k число $[f(x_1)]^k$ положительно, а число $[g(x_1)]^k$ — неотрицательно. Значит, сумма

$$[f(x_1)]^{n-1} + [f(x_1)]^{n-2}g(x_1) + \ldots + f(x_1)[g(x_1)]^{n-2} + [g(x_1)]^{n-1}$$

положительна, так как первое ее слагаемое — положительно, а остальные — неотрицательны. Из числового неравенства $f(x_1) > g(x_1)$ вытекает еще, что число $f(x_1) - g(x_1)$ положительно. Так как произведение положительных чисел положительно, то положительно и число

$$[f(x_1)] - g(x_1)]\ \{[f(x_1)^{n-1} + [f(x_1)]^{n-2}g(x_1) + \dots$$
$$\dots + f(x_1)\,[g(x_1)]^{n-2} + [g(x_1)]^{n-1}\}.$$

Применяя формулу сокращенного умножения (см. гл. II), приходим к справедливости числового неравенства

$$[f(x_1)]^n - [g(x_1)]^n > 0,$$

откуда вытекает справедливость числового неравенства

$$[f(x_1)]^n > [g(x_1)]^n.$$

Итак, показано, что для любого числа x_1 из множества M из справедливости числового неравенства $f(x_1) > g(x_1)$ следует справедливость числового неравенства $[f(x_1)]^n > [g(x_1)]^n$. Значит, любое решение неравенства $f(x) > g(x)$, принадлежащее множеству M, является решением неравенства $[f(x)]^n > [g(x)]^n$.

Покажем теперь обратное. Пусть число x_2 принадлежит множеству M и есть некоторое решение неравенства $[f(x)]^n > [g(x)]^n$, т.е. пусть существуют неотрицательные числа $f(x_2)$ и $g(x_2)$, для которых справедливо числовое неравенство $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$. Покажем, что число $f(x_2)$ положительно. Предположим, что $f(x_2)$ равно нулю, тогда из неравенства $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$ вытекает, что число $[g(x_2)]^n$ отрицательно. Но так как число $g(x_2)$ неотрицательно, то неотрицательно и число $[g(x_2)]^n$. Полученное противоречие означает, что число $f(x_2)$ положительно. Но тогда положительна сумма

$$[f(x_2)]^{n-1} + [f(x_2)]^{n-2}g(x_2) + \dots + f(x_2)[g(x_2)]^{n-2} + [g(x_2)]^{n-1}.$$

Кроме того, из справедливости неравенства $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$ следует, что число $[f(x_2)]^n - [g(x_2)]^n$ положительно. Рассмотрим теперь числовое равенство

$$[f(x_2)]^n - [g(x_2)]^n = [f(x_2) - g(x_2)\{[f(x_2)]^{n-1} +$$
$$+ [f(x_2)]^{n-2}g(x_2) + \ldots + f(x_2)[g(x_2)]^{n-2} + [g(x_2)]^{n-1}\}.$$

В этом равенстве слева стоит положительное число, а справа — произведение двух чисел, одно из которых положительно, значит, и второе число положительно, т.е. справедливо числовое неравенство $f(x_2) - g(x_2) > 0$. Из справедливости этого числового неравенства вытекает справедливость неравенства $f(x_2) > g(x_2)$. Итак, показано, что для любого числа x_2 из множества M из справедливости числового неравенства $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$, следует справедливость числового неравенства $f(x_2) > g(x_2)$. Значит, любое решение неравенства $[f(x)]^n > [g(x)]^n$, принадлежащее множеству M, является решением неравенства $f(x) > g(x)$.

Итак, если каждое из неравенств $f(x) > g(x)$ и $[f(x)]^n >$ $> [g(x)]^n$ имеет решения на множестве M, то эти неравенства равносильны.

Заметим, что из доказанного вытекает, в частности, что если одно из этих неравенств не имеет решений на множестве M, то и другое не имеет решений на этом множестве, т.е. и в этом случае неравенства $f(x) > g(x)$ и $[f(x)]^n > [g(x)]^n$ равносильны, чем и завершается доказательство утверждения 5. Справедливость утверждений 6а, 6б, 7а, 7б доказывается аналогично.

Пусть дано m неравенств $f_1(x) > g_1(x)$, $f_2(x) > g_2(x)$, ..., $f_m(x) > g_m(x)$. Обозначим через M область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих неравенств. если стоит задача: найти все числа α из области M, каждое из которых является решением каждого из этих неравенств, то говорят, что дана *система m неравенств*

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \cdots\cdots \\ f_m(x) > g_m(x) \end{cases} \qquad (1)$$

и область M называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) *этой системы.* Отметим, что обычно неравенства системы записывают в столбик, слева от которого ставится фигурная скобка.

Число α из ОДЗ системы неравенств (1) называется *решением* этой системы, если оно является решением каждого из неравенств.

Решить систему неравенств (1) — это значит найти множество всех ее решений. Если это множество оказывается пустым множеством, то говорят, что система неравенств (1) не имеет решений. Систему неравенств (1) обычно решают следующим образом. Сначала решают каждое неравенство на ОДЗ этой системы, т.е. находят множества N_1, N_2, ..., N_m, где N_l — множество всех решений неравенства $f_l(x) > g_l(x)$, принадлежащих ОДЗ этой системы. Затем находят множество N_0, являющееся пересечением всех этих множеств N_1, N_2, ..., N_m, т.е. $N_0 = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_m$. Множество N_0 и будет множеством всех решений системы неравенств (1).

Пусть числа a и b таковы, что $a < b$ и пусть дана система неравенств

$$\begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < b. \end{cases} \tag{2}$$

В этом случае иногда говорят, что дано *двойное неравенство*

$$a < f(x) < b. \tag{3}$$

Отметим, что если $y = f(x)$ — основная элементарная функция, то часто проще решить двойное неравенство (3), чем систему неравенств (2).

Пусть теперь дано k систем неравенств

$$\begin{cases} f_{11}(x) > g_{11}(x), \\ f_{21}(x) > g_{21}(x), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n1}(x) > g_{n1}(x), \end{cases} \quad \begin{cases} f_{12}(x) > g_{12}(x), \\ f_{22}(x) > g_{22}(x), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{m2}(x) > g_{m2}(x), \end{cases} \quad \begin{cases} f_{1k}(x) > g_{1k}(x), \\ f_{2k}(x) > g_{2k}(x), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{lk}(x) > g_{lk}(x). \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих систем неравенств.

Если стоит задача: найти в области Q все числа α, каждое из которых является решением хотя бы одной из этих систем, то говорят, что *дана совокупность k систем неравенств* и область Q называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) *этой совокупности.* Отметим, что обычно системы неравенств из совокупности систем неравенств записываются в строчку (см. (4)).

Число α из ОДЗ совокупности систем неравенств (4) называется *решением* этой совокупности, если оно является решением хотя бы одной системы неравенств из совокупности (4).

Решить совокупность систем неравенств (4) — это значит найти множество всех ее решений. Если это множество оказывается пустым множеством, то говорят, что совокупность систем неравенств (4) не имеет решений.

Совокупность систем неравенств (4) обычно решают следующим образом. Сначала решают каждую систему неравенств на ОДЗ совокупности (4), т.е. находят множества M_1, M_2, ..., M_k, где M_l — множество всех решений системы

$$\begin{cases} f_{1l}(x) > g_{1l}(x), \\ f_{2l}(x) > g_{2l}(x), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{pl}(x) > g_{pl}(x), \end{cases}$$

на ОДЗ этой совокупности. Затем находят множество M_0, являющееся объединением всех этих множеств M_1, M_2, ..., M_k, т.е. $M_0 = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup ... \cup M_k$. Множество M_0 и будет множеством всех решений совокупности систем неравенств (4).

Заметим, что если каждая из k систем совокупности (4) содержит только одно неравенство, то говорят, что дана *совокупность k неравенств.*

Если $k = 1$, то совокупность (4) является *системой неравенств.*

Говорят, что *неравенство*

$$f(x) > g(x) \tag{5}$$

равносильно совокупности систем неравенств (4), если любое решение неравенства (5) является решением совокупности (4), а любое решение совокупности (4) является решением неравенства (5).

При этом, в частности, подразумевается, что если неравенство (5) не имеет решений, и совокупность (4) не имеет решений, то *неравенство* (5) *равносильно совокупности* (4).

В случае если в совокупности систем неравенств (4) $n = m = \ldots = p = \ldots = l = 1$, то говорят, что неравенство (5) *равносильно совокупности неравенств* (4).

В случае если в совокупности систем неравенств (4) $k = 1$, то говорят, что *неравенство* (5) *равносильно системе неравенств* (4).

Замена неравенства (5) равносильной ему совокупностью (4) называется *равносильным переходом* от неравенства (5) к совокупности (4).

Иногда возникает необходимость совершить равносильные переход от неравенства к совокупности систем неравенств на множестве M.

Говорят, что *неравенство* (5) *равносильно на множестве M совокупности неравенств* (4), если любое решение неравенства (5), принадлежащее множеству M, является решением совокупности (4), а любое, принадлежащее множеству M, решение совокупности (4) является решением неравенства (5).

Отметим, что в совокупности систем (4) может оказаться бесконечно много систем неравенств.

Замена неравенства другим неравенством или совокупностью систем неравенств будет дальше называться *преобразованием неравенства*.

Наконец, приведем понятие *смешанной совокупности* — совокупности уравнений и неравенств.

Пусть дано k уравнений $f_1(x) = g_1(x)$, $f_2(x) = g_2(x)$, ..., $f_k(x) = g_k(x)$ и m неравенств $f_{k+1}(x) > g_{k+1}(x)$, $f_{k+2}(x) >$ $> g_{k+2}(x)$, ..., $f_{k+m}(x) > g_{k+m}(x)$. Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений этих уравнений и всех этих неравенств.

Если стоит задача: найти в области Q все числа α, каждое из которых является решением хотя бы одного из этих k

уравнений или хотя бы одного из этих m неравенств, то говорят, что дана *смешанная совокупность*

$$\begin{gathered} f_1(x) = g_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x), \quad \ldots, \quad f_k(x) = g_k(x), \\ f_{k+1}(x) > g_{k+1}(x), \quad f_{k+2}(x) > g_{k+2}(x), \ldots \\ \ldots, f_{k+m}(x) > g_{k+m}(x), \end{gathered} \tag{6}$$

и область Q называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) *этой совокупности.*

Отметим, что обычно уравнения и неравенства смешанной совокупности записываются в строчку.

Число α из ОДЗ смешанной совокупности (6) называется *решением этой совокупности*, если оно является решением хотя бы одного из k уравнений или хотя бы одного из m неравенств этой совокупности.

Решить смешанную совокупность (6) — это значит найти множество всех ее решений. Если это множество оказывается пустым множеством, то говорят, что смешанная *совокупность* (6) *не имеет решений.*

Смешанную совокупность (6) обычно решают следующим образом. Сначала решают каждое уравнение и каждое неравенство на ОДЗ этой совокупности, т.е. находят множества M_1, M_2, ..., M_{k-1}, M_k, где M_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) — множество всех решений уравнения $f_i(x) = g_i(x)$, принадлежащих ОДЗ этой совокупности, и множества M_{k+1}, M_{k+2}, ..., M_{k+m}, где M_{k+j} ($j = 1, 2, .., m$) — множество всех решений неравенства $f_{k+j}(x) > g_{k+j}(x)$, принадлежащих ОДЗ этой совокупности. Затем находят множество M_0, являющееся объединением всех этих множеств M_1, M_2, ..., M_k, M_{k+1}, ..., M_{k+m}, т.е. $M_0 = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \cup M_{k+1} \cup \ldots \cup M_{k+m}$. Множество M_0 и будет *множеством всех решений смешанной совокупности* (6).

Будем говорить, что *неравенство*

$$f(x) \geq g(x) \tag{7}$$

равносильно смешанной совокупности (6), если любое решение неравенства (7) является решением смешанной совокупности (6), а любое решение смешанной совокупности (6) является решением неравенства (7).

При этом, в частности, подразумевается, что если неравенство (7) не имеет решений и смешанная совокупность (6) не имеет решений, то неравенство (7) равносильно совокупности (6).

Из вышесказанного вытекает, что *нестрогое неравенство*

$$f(x) \geq g(x) \tag{8}$$

равносильно смешанной совокупности

$$f(x) = g(x), \quad f(x) > g(x). \tag{9}$$

Так как решение нестрогого неравенства есть объединение решений соответствующего уравнения и соответствующего строгого неравенства, то достаточно рассмотреть лишь решение строгих неравенств.

§ 2. Простейшие неравенства

Пусть $y = f(x)$ — основная элементарная функция, b — некоторое фиксированное действительное число. Тогда неравенства

$$f(x) > b, \tag{1}$$
$$f(x) < b \tag{2}$$

принято называть *простейшими неравенствами.*

Очевидно, что ОДЗ простейшего неравенства совпадает с областью существования основной элементарной функции $y = f(x)$.

Как отмечалось выше, нестрогое неравенство $f(x) \geq b$ равносильно совокупности строгого неравенства $f(x) > b$ и уравнения $f(x) = b$, а нестрогое неравенства $f(x) \leq b$ равносильно совокупности строгого неравенства $f(x) < b$ и уравнения $f(x) = b$. Поэтому в этом параграфе будет рассмотрено решение лишь простейших неравенств (1) и (2).

Прежде всего стоит сказать, что при решении неравенства нельзя формально записывать решение соответствующего уравнения и затем заменить знак равенства на знак неравенства. Как будет показано ниже, для решения простейших неравенств (1) и (2) надо хорошо знать свойства основной элементарной функции $y = f(x)$ и уметь пользоваться ими.

Часто решение простейшего неравенства сопровождается графиками функций $y = f(x)$ и $y = b$. При этом пользуются следующим очевидным утверждением: если надо решить неравенство $f(x) > b$ или $f(x) < b$, где функция $y = f(x)$ даже не обязательно основная элементарная функция, то строят на одном рисунке графики функций $y = f(x)$ $y = b$. Тогда решением неравенства $f(x) > b$ будут те значения x, для каждого из которых точка $(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$ лежит выше точки (x, b) прямой $y = b$ (рис. 149), а решением неравенства $f(x) < b$ будут те значения x, для каждого из которых точка $(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$ лежит ниже точки (x, b) прямой $y = b$ (рис. 150).

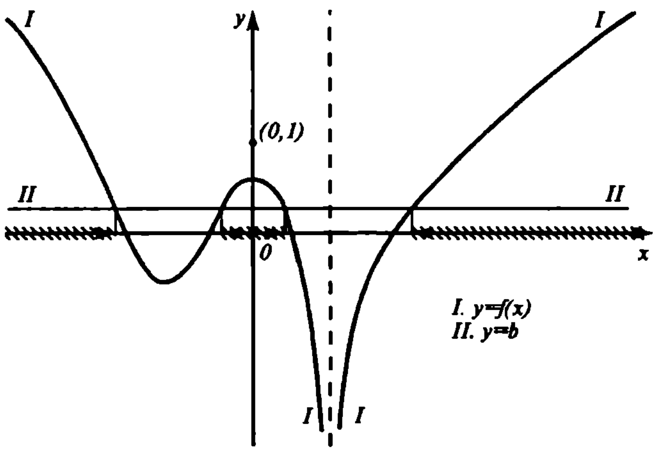


Рис. 149.

Поэтому такой рисунок сразу подсказывает, какое множество является решением неравенства $f(x) > b$, а какое множество является решением неравенства $f(x) < b$. Однако подчеркнем, что наглядность графиков является лишь вспомогательным средством при решении неравенств. Эти графики только подсказывают ответ, а тот факт, что очевидное из рисунка множество является решением того или иного неравенства, обязательно надо доказать.

Отметим еще, что рисунок часто подсказывает, на какие множества надо разбить область существования функции $y = f(x)$ и какие свойства этой функции надо использовать

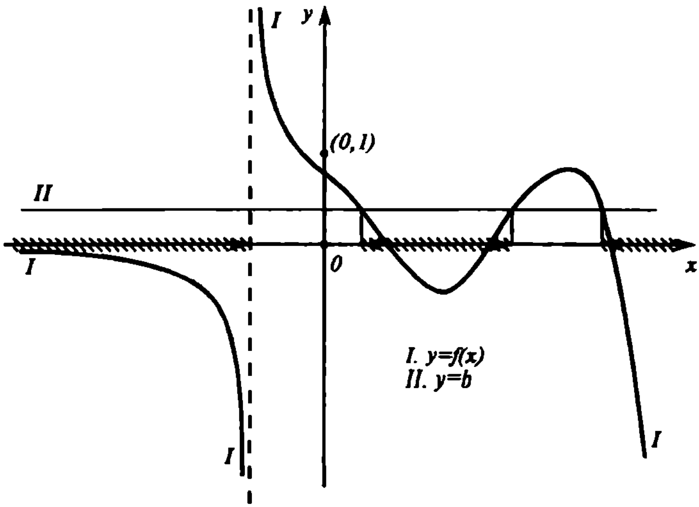


Рис. 150.

для проведения этого доказательства. Поэтому дальше перед решением некоторых простейших неравенств будет проводиться анализ графиков функций $y = f(x)$ и $y = b$.

Алгебраические неравенства. Пусть n — некоторое фиксированное натуральное число, тогда неравенства

$$x^n > b, \tag{3}$$

$$x^n < b \tag{4}$$

принято называть *простейшими алгебраическими неравенствами*.

Функция $y = x^n$ определена на всей числовой прямой, поэтому ОДЗ неравенств (3) и (4) есть множество $X = (-\infty, +\infty)$.

Поскольку свойства функции $y = x^n$, используемые при решении неравенств (3) и (4), различны при нечетном и четном n, то рассмотрим два случая:

I. Пусть $n = 2m - 1$, где m — некоторое фиксированное натуральное число, тогда неравенства (3) и (4) принимают вид

$$x^{2m-1} > b, \tag{3a}$$
$$x^{2m-1} < b. \tag{4a}$$

Областью значений функции $y = x^{2m-1}$ на множестве X является множество $Y = (-\infty, +\infty)$. Вследствие того что функция $y = x^{2m-1}$ возрастает на множестве X, каждое численное значение из Y она принимает лишь один раз. Поэтому, если при $x = x_0$ она принимает значение b, то при каждом $x > x_0$ она принимает значение большее, чем число b, а при каждом $x < x_0$ она принимает значение меньшее, чем число b.

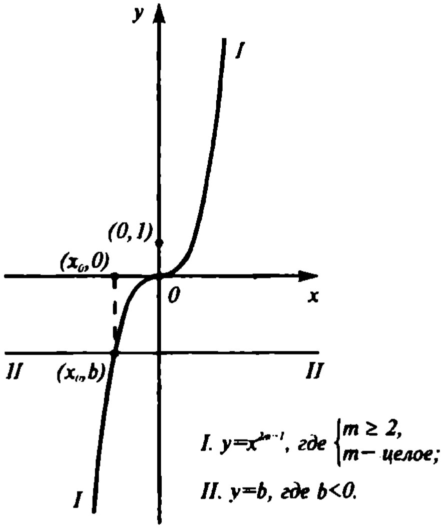


Рис. 151.

Значит, множеством всех решений неравенства (3а) является промежуток $(x_0, +\infty)$, а множеством всех решений неравенства (4а) является промежуток $(-\infty, x_0)$, где, как показано в § 2 гл. VII,

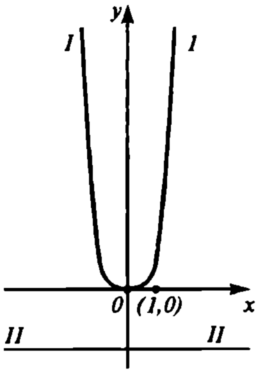
$$x_0 = \begin{cases} \sqrt[2m-1]{b}, & \text{при положительном } b; \\ 0, & \text{при } b = 0; \\ -\sqrt[2m-1]{|b|}, & \text{при отрицательном } b. \end{cases}$$

Рис. 151 хорошо иллюстрирует проведенные выше рассуждения.

II. Пусть $n = x^{2m}$, где m — некоторое фиксированное натуральное число, тогда неравенства (3) и (4) принимают вид

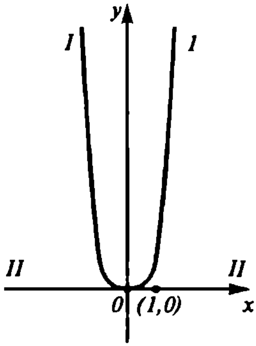
$$x^{2m} > b, \tag{3б}$$
$$x^{2m} < b. \tag{4б}$$

Функция $y = x^{2m}$ на всей числовой прямой является неотрицательной. Поэтому, если b — отрицательное число, то неравенство (3б) справедливо при любом значении x, а неравенство (4б) не справедливо ни при одном значении x. Значит, в этом случае множеством всех решений неравенства (3б) является вся числовая прямая $(-\infty, +\infty)$, а неравенство (4б) не имеет решений. Рис. 152 хорошо иллюстрирует проведенное выше рассуждение.



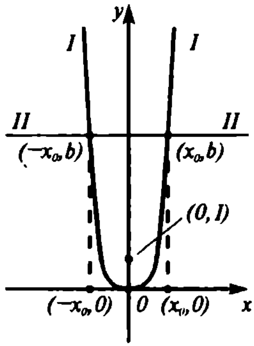
I. $y=x^{2m}$, где $m \in N$;
II. $y=b$, где $b<0$.

Рис. 152.



I. $y=x^{2m}$, где $m \in N$;
II. $y=b$, где $b=0$.

Рис. 153.



I. $y=x^{2m}$, где $m \in N$;
II. $y=b$, где $b>0$;
$x_0=\sqrt[2m]{b}$.

Рис. 154.

Если же $b = 0$, то при $x = 0$ функция $y = x^{2m}$ принимает значение нуль, а для всех остальных x эта функция положительна, поэтому неравенство (3б) в этом случае будет справедливо при любом значении x, кроме $x = 0$; а неравенство (4б) не справедливо ни при одном значении x. Значит, в этом случае множеством всех решений неравенства (3б) является объединение двух лучей $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (рис. 153), а неравенство (4б) не имеет решений.

Пусть, наконец, b — положительное число. Построим графики функции $y = x^{2m}$ и $y = b$ (рис. 154). Прямая $y = b$ пересекает график функции $y = x^{2m}$ в двух точках (x_0, b) и $(-x_0, b)$, где $x_0 = \sqrt[2m]{b}$. При этом график функции $y = x^{2m}$

лежит ниже прямой $y = b$ на интервале $(-x_0, x_0)$ и выше на множестве $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$. Следовательно, эти множества и должны быть множествами всех решений неравенств (4б) и (3б). Однако это утверждение надо доказать. Рис. 154 показывает, что для доказательства надо воспользоваться тем, что на промежутке $X_1 = [0, +\infty)$ функция $y = x^{2m}$ возрастает, а затем воспользоваться четностью этой функции.

Разобьем область существования функции $y = x^{2m}$ на два множества $X_1 = [0, +\infty)$ и $X_2 = (-\infty, 0)$ и рассмотрим решение неравенств (3б) и (4б) на каждом из этих множеств.

На множестве X_1 функция $y = x^{2m}$ имеет область значений $Y = [0, +\infty)$ и возрастает, поэтому каждое численное значение из Y она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0 \in X_1$ она принимает значение b, то при каждом $x > x_0$ таком, что $x \in X_1$, она принимает значение, большее чем b, а при каждом $x < x_0$ таком, что $x \in X_1$, она принимает значение, меньшее чем b. Следовательно, на X_1 множество всех решений неравенства (3б) есть промежуток $(x_0, +\infty)$, а множество всех решений неравенства (4б) есть промежуток $[0, x_0)$. Так как функция $y = x^{2m}$ является четной функцией, то на X_2 множество всех решений неравенства (3б) есть промежуток $(-\infty, -x_0)$, а множество всех решений неравенства (4б) — интервал $(-x_0, 0)$. Объединяя решения, найденные на X_1 и X_2, получаем, что а этом случае множество всех решений неравенства (3б) есть объединение двух лучей $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$, а множество всех решений неравенства (4б) — интервал $(-x_0, x_0)$, где $x_0 = \sqrt[2m]{b}$.

Итак, множество всех решений неравенства (3б) есть:

1. при каждом отрицательном b — числовая прямая $(-\infty, +\infty)$;

2. при $b = 0$ — множество $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

3. при каждом положительном b — множество $(-\infty, -\sqrt[2m]{b}) \cup (\sqrt[2m]{b}, +\infty)$.

Множество всех решений неравенства (4б) есть:

1. при каждом неположительном b — пустое множество;

2. при каждом положительном b — интервал $(-\sqrt[2m]{b}, \sqrt[2m]{b})$.

В табл. 18 приведены итоги решения неравенств (3) и (4):

Таблица 18

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$x^{2m-1} > b$	$(\sqrt[2m-1]{b}; \infty)$	$(0; \infty)$	$(-\sqrt[2m-1]{\lvert b\rvert}; \infty)$
$x^{2m-1} < b$	$(-\infty; \sqrt[2m-1]{b})$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; -\sqrt[2m-1]{\lvert b\rvert})$
$x^{2m} > b$	$(-\infty; -\sqrt[2m]{b}) \cup$ $\cup (\sqrt[2m]{b}; \infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	$(-\infty; \infty)$
$x^{2m} < b$	$(-\sqrt[2m]{b}; \sqrt[2m]{b})$	нет решений	нет решений

Дробные неравенства. Пусть n — некоторое фиксированное натуральное число, тогда неравенства

$$x^{-n} > b, \tag{5}$$
$$x^{-n} < b \tag{6}$$

принято называть *простейшими дробными неравенствами.*

Функция $y = x^{-n}$ определена на всей числовой прямой, кроме одной точки — нуля, поэтому ОДЗ неравенств (5) и (6) есть множество $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1 = (0, +\infty)$, а $X_2 = (-\infty, 0)$.

Поскольку свойства функции $y = x^{-n}$, используемые при решении неравенств (5) и (6), различны при нечетном и четном n, то рассмотрим два случая:

I. Пусть $n = 2m - 1$, где m — некоторое фиксированное натуральное число, тогда неравенства (5) и (6) принимают вид

$$x^{-2m+1} > b, \tag{5a}$$
$$x^{-2m+1} < b. \tag{6a}$$

Областью значений функции $y = x^{-2m+1}$ на множестве X_1 является луч $Y_1 = (0, +\infty)$, а на множестве X_2 — луч $Y_2 = (-\infty, 0)$.

Если $b = 0$, то, учитывая, что функция $y = x^{-2m+1}$ на множестве X_1 положительна, а на множестве X_2 отрицательна, получаем, что X_1 — множество всей решений неравенства (5а), а X_2 — множество всех решений неравенства (6а) (рис. 155).

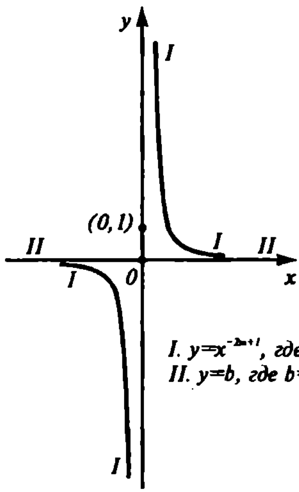


Рис. 155.

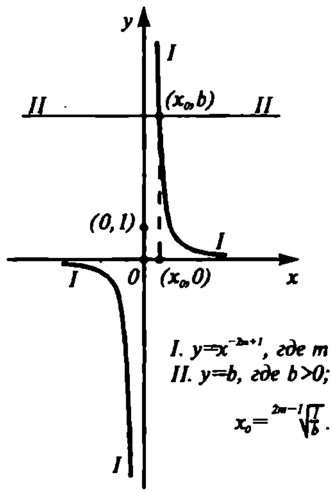


Рис. 156.

Пусть b — положительное число. Построим графики функций $y = x^{-2m+1}$ и $y = b$ (рис. 156). Прямая $y = b$ пересекает график функции $y = x^{-2m+1}$ в одной точке (x_0, b), где $x_0 = \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}$. При этом график функции $y = x^{-2m+1}$ лежит выше прямой на интервале $(0, x_0)$ и ниже прямой на множестве $(-\infty, 0) \cup (x_0, +\infty)$. Следовательно, эти множества и должны быть множествами всей решений неравенств (5а) и (6а). Однако это утверждение надо доказать. Рисунок показывает, что для доказательства надо рассмотреть решение неравенства отдельно на каждом множестве X_1 и X_2 и воспользоваться тем, что функция $y = x^{-2m+1}$ на множестве X_2 — отрицательна, а на множестве X_1 — убывает.

Рассмотрим решение неравенств (5а) и (6а) на множестве X_2. На этом множестве функция $y = x^{-2m+1}$ отрицательна, поэтому на множестве X_2 нет решений неравенства (5а), но все множество X_2 содержится в множестве всех решений неравенства (6а).

На множестве X_1 функция $y = x^{-2m+1}$ убывает, поэтому каждое численное значение из Y_1 она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0$ она принимает значение b, то при каждом $x < x_0$ и таком, что $x \in X_1$, она принимает значение большее, чем b, а при каждом $x > x_0$ и таком, что $x \in X_1$, она принимает значение меньшее, чем b. Следовательно, на X_1 множество всех решений неравенства (5а) есть интервал $(0, x_0)$, а множество всех решений неравенства (6а) — луч $(x_0, +\infty)$.

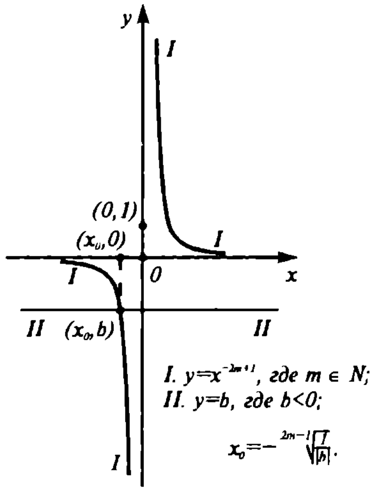


Рис. 157.

Объединяя решения, найденные на X_1 и X_2, получаем, что в этом случае множество всех решений неравенства (5а) есть интервал $(0, x_0)$, а множество всех решений неравенства (5а) — объединение двух лучей $(-\infty, 0) \cup (x_0, +\infty)$.

Если b — отрицательное число, то, рассуждая аналогично (рис. 157), приходим к выводу, что в этом случае множество всех решений неравенства (5а) есть объединение двух лучей $(-\infty, x_0) \cup (0, +\infty)$, а множество всех решений неравенства (6а) — интервал $(x_0, 0)$, где $x_0 = -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}$.

Итак, множество всех решений неравенства (5а) есть:

1. при каждом положительном b — интервал $\left(0, \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}\right)$;
2. при $b = 0$ — множество $(0, +\infty)$;
3. при каждом отрицательном b — множество $\left(-\infty, -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}\right) \cup (0, +\infty)$.

Множество всех решений неравенства (6а) есть:

1. при каждом положительном b — множество $(-\infty, 0) \cup$ $\cup \left(\sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}, +\infty\right)$;

2. при $b = 0$ — множество $(-\infty, 0)$;

3. при каждом отрицательном b — интервал $\left(-\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}, 0\right)$.

II. Пусть $n = 2m$, где m — некоторое фиксированное натуральное число, тогда неравенства (5) и (6) принимают вид

$$x^{-2m} > b, \quad (5б)$$
$$x^{-2m} < b. \quad (6б)$$

Областью значений функции $y = x^{-2m}$ на множестве $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1 = (0, +\infty)$, а $X_2 = (-\infty, 0)$, является луч $Y = (0, +\infty)$. Если b — неположительное число, то, учитывая, что функция $y = x^{-2m}$ на множестве X положительна, получаем, что X — множество всех решений неравенства (5б), а неравенство (6б) не имеет решений (рис. 158).

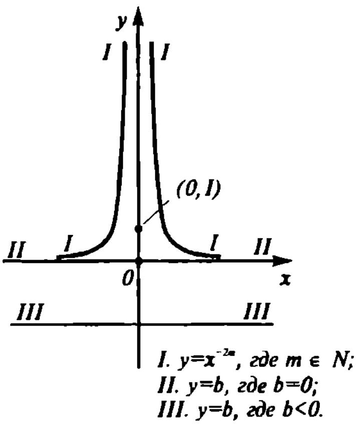


Рис. 158.

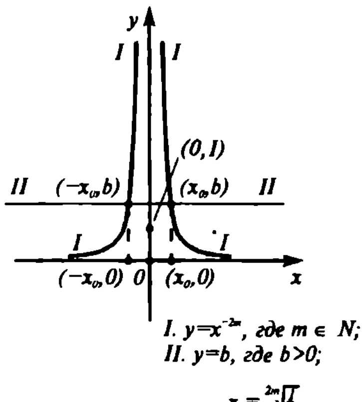


Рис. 159.

Пусть b — положительное число. Построим графики функции $y = x^{-2m}$ и $y = b$ (рис. 159). Прямая $y = b$ пересекает график функции $y = x^{-2m}$ в двух точках (x_0, b) и $(-x_0, b)$, где $x_0 = \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$. При этом график функции $y = x^{-2m}$ лежит выше прямой $y = b$ на множестве $(-x_0, 0) \cup (0, x_0)$ и ниже на множестве $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$. Следовательно, эти множества и должны быть множествами всех решений неравенств (5б) и (6б). Однако это утверждение надо доказать. Рисунок показывает, что для доказательства надо воспользоваться тем, что на множестве X_1 функция $y = x^{-2m}$ убывает, а затем воспользоваться четностью этой функции.

Рассмотрим решение неравенств (5б) и (6б) на множестве X_1. На множестве X_1 функция $y = x^{-2m}$ имеет область значений $Y = (0, +\infty)$ и убывает, поэтому каждое численное значение из Y она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0 \in X_1$ она принимает значение b, то при каждом $x < x_0$ и таком, что $x \in X_1$, она принимает значение, большее чем b, а при каждом $x > x_0$ и таком, что $x \in X_1$, она принимает значение, меньшее чем b. Следовательно, на X_1 множество всех решений неравенства (5б) есть интервал $(0, x_0)$, а множество всех решений неравенства (6б) — луч $(x_0, +\infty)$.

Так как функция $y = x^{-2m}$ является четной функцией, то на X_2 множество всех решений неравенства (5б) есть интервал $(-x_0, 0)$, а множество всех решений неравенства (6б) — луч $(-\infty, -x_0)$.

Объединяя решения, найденные на X_1 и X_2, получаем, что в этом случае множество всех решений неравенства (5б) есть объединение двух интервалов $(-x_0, 0) \cup (0, x_0)$, а множество всех решений неравенства (6б) есть объединение двух лучей $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$.

Итак, множество всех решений неравенства (5б) есть:

1. при каждом положительном b — множество $\left(-\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right)$;

2. при каждом неположительном b — множество $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Множество всех решений неравенства (6б) есть:

1. при каждом положительном b — множество $\left(-\infty, -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right) \cup \left(\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}, +\infty\right)$;

2. при каждом неположительном b — пустое множество.

В табл. 19 приведены итоги решения неравенств (5) и (6):

Таблица 19

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$x^{-2m+1} > b$	$\left(0, \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}\right)$	$(0, \infty)$	$\left(-\infty, -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{\lvert b\rvert}}\right) \cup$ $\cup\ (0, \infty)$
$x^{-2m+1} < b$	$(-\infty, 0) \cup$ $\cup \left(\sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}, \infty\right)$	$(-\infty, 0)$	$\left(-\sqrt[2m-1]{\frac{1}{\lvert b\rvert}}, 0\right)$
$x^{-2m} > b$	$\left(-\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}, 0\right) \cup$ $\cup \left(0, \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$x^{-2m} < b$	$\left(-\infty, -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right) \cup$ $\cup \left(\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}, \infty\right)$	нет решений	нет решений

Степенные неравенства. Пусть α — некоторое фиксированное нецелое действительное число, тогда неравенства

$$x^{\alpha} > b, \tag{7}$$

$$x^{\alpha} < b \tag{8}$$

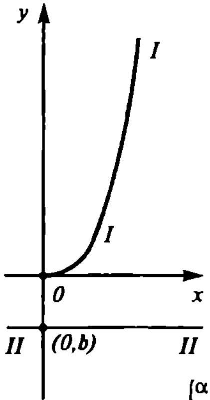
принято называть *простейшими степенными неравенствами.*

Поскольку свойства функции $y = x^{\alpha}$, используемые при решении неравенств (7) и (8), различны при положительном и отрицательном нецелом числе α, то рассмотрим два случая:

I. Пусть α — положительное нецелое число. Областью существования функции $y = x^{\alpha}$ является множество всех неотрицательных чисел, поэтому ОДЗ неравенств (7) и (8) есть множество $X = [0, +\infty)$. Областью значений функции $y = x^{\alpha}$ на всем множестве X есть луч $Y = [0, +\infty)$.

Если b — отрицательное число, то учитывая, что на множестве X функция $y = x^{\alpha}$ — неотрицательна, получаем, что X — множество всех решений неравенства (7), а неравенство (8) не имеет решений (рис. 160).

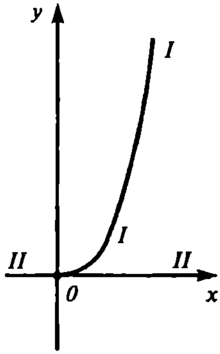
Если $b = 0$, то при $x = 0$ функция $y = x^{\alpha}$ принимает значение нуль, а для всех остальных $x \in X$ эта функция



I. $y=x^{\alpha}$, где $\begin{cases} \alpha > 1, \\ \alpha - \text{любое нецелое число;} \end{cases}$

II. $y=b$, где $b<0$.

Рис. 160.



I. $y=x^{\alpha}$, где $\begin{cases} \alpha > 1, \\ \alpha - \text{любое нецелое число;} \end{cases}$

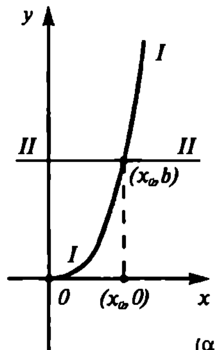
II. $y=b$, где $b=0$.

Рис. 161.

положительна, поэтому неравенство (7) в этом случае справедливо при любом значении $x \in X$, кроме $x = 0$, а неравенство (8) не справедливо ни при одном значении $x \in X$.

Значит, в этом случае множество всех решений неравенств (7) есть луч $(0, +\infty)$, а неравенство (8) не имеет решений (рис. 161).

Пусть, наконец, b — положительное число. На множестве X функция $y = x^{\alpha}$ возрастает, поэтому каждое численное значение из Y она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0 \in X$ она принимает значение b, то при каждом $x > x_0$ и таком, что $x \in X$, она принимает значение большее, чем b, а при каждом $x < x_0$ и таком, что $x \in X$, она принимает значение



I. $y=x^{\alpha}$, где $\begin{cases} \alpha > 1, \\ \alpha - \text{любое нецелое число;} \end{cases}$

II. $y=b$, где $b>0$.

$x_0=b^{\frac{1}{\alpha}}$.

Рис. 162.

меньшее, чем b. Следовательно, в этом случае множество всех решений неравенства (7) есть луч $(x_0, +\infty)$, а множество всех решений неравенства (8) есть промежуток $[0, x_0)$, где $x_0 = b^{\frac{1}{\alpha}}$ (рис. 162).

Итак, если $\alpha > 0$, то множество всех решений неравенства (7) есть:

1. при каждом положительном b — множество $\left(b^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty\right)$;
2. при $b = 0$ — множество $(0, +\infty)$;
3. при каждом отрицательном b — множество $[0, +\infty)$;

а множество всех решений неравенства (8) есть:

1. при каждом положительном b — множество $\left[0, b^{\frac{1}{\alpha}}\right)$;
2. при каждом неположительном b — пустое множество.

II. Пусть α — отрицательное нецелое число.

Областью существования функции $y = x^{\alpha}$ является множество всех положительных чисел, поэтому ОДЗ неравенств (7) и (8) есть множество $X = (0, +\infty)$. Область значений функции $y = x^{\alpha}$ на всем множестве X есть луч $Y = (0, +\infty)$.

Если b — неположительное число, то учитывая, что на множестве X функция $y = x^{\alpha}$ положительна, получаем, что X — множество всех решений неравенства (7), а неравенство (8) не имеет решений (рис. 163).

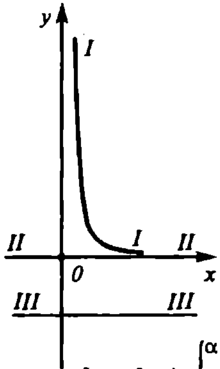
Пусть b — положительное число. На множестве X функция $y = x^{\alpha}$ убывает, поэтому каждое численное значение из Y она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0 \in X$ она принимает значение b, то при каждом $x < x_0$ и таком, что $x \in X$, она принимает значение большее, чем b, а при каждом $x > x_0$ и таком, что $x \in X$, она принимает значение меньшее, чем b. Следовательно, в этом случае множество всех решений неравенства (7) есть интервал $(0, x_0)$, а множество всех решений неравенства (8) есть луч $(x_0, +\infty)$, где $x_0 = b^{\frac{1}{\alpha}}$ (рис. 164).

Итак, если $\alpha < 0$, то множество всех решений неравенства (7) есть:

1. при каждом положительном b — интервал $\left(0, b^{\frac{1}{\alpha}}\right)$;

2. при каждом неположительном b — множество $(0, +\infty)$;
а множество всех решений неравенства (8) есть:

1. при каждом положительном b — множество $\left(b^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty\right)$;

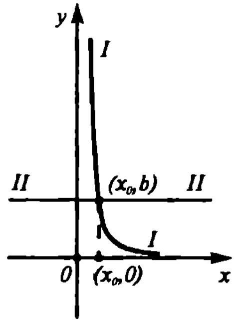


I. $y=x^{\alpha}$, где $\begin{cases}\alpha < 0,\\ \alpha - \text{любое нецелое число;}\end{cases}$

II. $y=b$, где $b=0$

III. $y=b$, где $b<0$

Рис. 163.



I. $y=x^{\alpha}$, где $\begin{cases}\alpha < 0,\\ \alpha - \text{любое нецелое число;}\end{cases}$

II. $y=b$, где $b>0$

$x_0=b^{\frac{1}{\alpha}}$

Рис. 164.

2. при каждом неположительном b — пустое множество.

В табл. 20 приведены итоги решения неравенств (7) и (8):

Таблица 20

	$b>0$	$b=0$	$b<0$
$x^{\alpha}>b$ $(\alpha>0)$	$\left(b^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty\right)$	$(0, \infty)$	$[0, \infty)$
$x^{\alpha}<b$ $(\alpha>0)$	$\left[0, b^{\frac{1}{\alpha}}\right)$	нет решений	нет решений
$x^{\alpha}>b$ $(\alpha<0)$	$\left(0, b^{\frac{1}{\alpha}}\right)$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$
$x^{\alpha}<b$ $(\alpha<0)$	$\left(b^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty\right)$	нет решений	нет решений

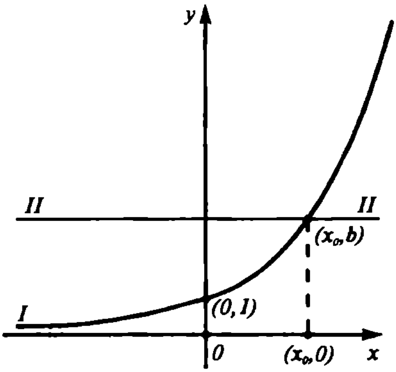
Показательные неравенства. Пусть a — некоторое фиксированное положительное и не равное единице число, тогда неравенства

$$a^x > b, \tag{9}$$
$$a^x < b \tag{10}$$

принято называть *простейшими показательными неравенствами.* Областью существования функции $y = a^x$ является множество всех действительных чисел, поэтому ОДЗ неравенств (9) и (10) есть множество $X = (-\infty, +\infty)$. Область значений функции $y = a^x$ на всем множестве X есть луч $Y = (0, +\infty)$.

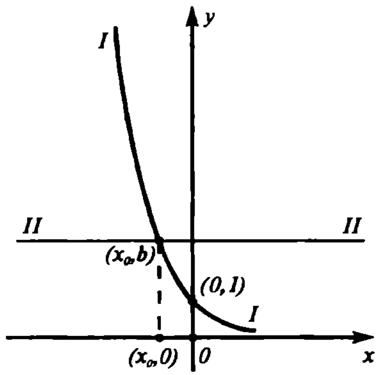
Если b — неположительное число, то учитывая, что на множестве X функция $y = a^x$ положительна, получаем, что X — множество всех решений неравенства (9), а неравенство (10) не имеет решений.

Пусть b — положительное число, то рассмотрим два случая:



I. $y=a^x$, где $a>1$;
II. $y=b$, где $b>0$;
$x_0=\log_a b$.

Рис. 165.



I. $y=a^x$, где $0<a<1$;
II. $y=b$, где $b>0$;
$x_0=\log_a b$.

Рис. 166.

1. Пусть $a > 1$. На все числовой прямой — множестве X — функция $y = a^x$ возрастает, поэтому каждое численное значение из Y она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0 \in X$ она принимает значение b, то при каждом $x > x_0$ она принимает значение большее, чем b, а при каждом $x < x_0$ она принимает значение меньшее, чем b. Следовательно, в этом случае множество всех решений

неравенства (9) есть луч $(x_0, +\infty)$, а множество всех решений неравенства (10) — луч $(-\infty, x_0)$, где $x_0 = \log_a b$ (рис. 165).

2. Пусть $0 < a < 1$. На множестве X — всей числовой прямой — функция $y = a^x$ убывает. Поэтому, рассуждая аналогично, получим, что в этом случае множество всех решений неравенства (9) есть луч $(-\infty, x_0)$, а множество всех решений неравенства (10) — луч $(x_0, +\infty)$, где $x_0 = \log_a b$ (рис. 166).

Итак, если $a > 1$, то множество всех решений неравенства (9) есть:

1. при каждом положительном b — множество $(\log_a b, +\infty)$;

2. при каждом неположительном b — множество $(-\infty, +\infty)$;

а множество всех решений неравенства (10) есть:

1. при каждом положительном b — множество $(-\infty, \log_a b)$;

2. при каждом неположительном b — пустое множество.

Если $0 < a < 1$, то множество всех решений неравенства (9) есть:

1. при каждом положительном b — множество $(-\infty, \log_a b)$;

2. при каждом неположительном b — множество $(-\infty, +\infty)$;

а множество всех решений неравенства (10) есть:

1. при каждом положительном b — множество $(\log_a b, +\infty)$;

2. при каждом неположительном b — пустое множество.

В табл. 21 приведены итоги решения неравенств (9) и (10):

Таблица 21

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$a^x > b$ $(a > 1)$	$(\log_a b; \infty)$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$
$a^x < b$ $(a > 1)$	$(-\infty; \log_a b)$	нет решений	нет решений
$a^x > b$ $(0 < a < 1)$	$(-\infty; \log_a b)$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$
$a^x < b$ $(0 < a < 1)$	$(\log_a b; \infty)$	нет решений	нет решений

Логарифмические неравенства. Пусть a — некоторое фиксированное положительное и не равное единице число, тогда неравенства

$$\log_a x > b, \qquad (11)$$

$$\log_a x < b \qquad (12)$$

принято называть ***простейшими логарифмическими неравенствами***.

Областью существования функции $y = \log_a x$ является множество всех положительных чисел, поэтому ОДЗ неравенств (11) и (12) есть множество $X = (0, +\infty)$.

Областью значений функции $y = \log_a x$ на всем множестве X является вся числовая ось $Y = (-\infty, +\infty)$.

Поскольку используемые при решении неравенств (11) и (12) свойства функции $y = \log_a x$ различны при $a > 1$ и при $0 < a < 1$, то рассмотрим два случая:

1. Пусть $a > 1$. На множестве X функция $y = \log_a x$ возрастает, поэтому каждое численное значение из Y она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0 \in X$ она принимает значение b, то при каждом $x > x_0$ и таком, что $x \in X$, она принимает значение большее, чем b, а при каждом $x < x_0$ и таком, что $x \in X$, она принимает значение меньшее, чем b. Следовательно, в этом случае множество всех решений неравенства (11) есть луч $(x_0, +\infty)$, а множество всех решений неравенства (12) есть интервал $(0, x_0)$, где $x_0 = a^b$ (рис. 167).

2. Пусть $0 < a < 1$. На множестве X функция $y = \log_a x$ убывает. Поэтому, рассуждая аналогично, получим, что в этом случае множество всех решений неравенства (11) есть

интервал $(0, x_0)$, а множество всех решений неравенства (12) есть луч $(x_0, +\infty)$, где $x_0 = a^b$ (рис. 168).

Итак, если $a > 1$, то при каждом b множество всех решений неравенства (11) есть множество $(a^b, +\infty)$, а множество всех решений неравенства (12) есть множество $(0, a^b)$;

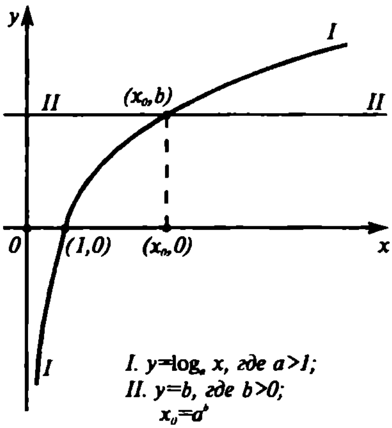


Рис. 167.

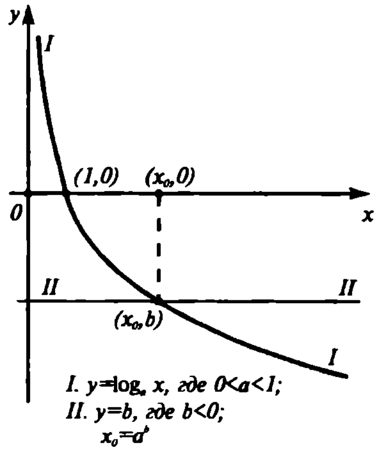


Рис. 168.

если $0 < a < 1$, то при каждом b множество всех решений неравенства (11) есть множество $(0, a^b)$, а множество всех решений неравенства (12) есть множество $(a^b, +\infty)$.

В табл. 22 приведены итоги решения неравенств (11) и (12):

Таблица 22

	$-\infty < b < \infty$
$\log_a x > b$ $(a > 1)$	$(a^b; \infty)$
$\log_a x < b$ $(a > 1)$	$(0; a^b)$
$\log_a x > b$ $(0 < a < 1)$	$(0; a^b)$
$\log_a x < b$ $(0 < a < 1)$	$(a^b; \infty)$

Тригонометрические неравенства. Неравенства

$$\cos x > b, \quad \sin x > b, \quad \operatorname{tg} x > b, \quad \operatorname{ctg} x > b,$$
$$\cos x < b, \quad \sin x < b, \quad \operatorname{tg} x < b, \quad \operatorname{ctg} x < b.$$

принято называть *простейшими тригонометрическими неравенствами.*

Сделаем несколько общих замечаний.

Пусть $y = f(x)$ — некоторая основная элементарная тригонометрическая функция с главным периодом T, и пусть дано неравенство

$$f(x) > b \quad (\text{или } f(x) < b). \tag{13}$$

Выберем промежуток длиной T и найдем решение неравенства (13) на этом промежутке. Пусть множество всех решений неравенства (13) на этом промежутке есть интервал $X_0 = (\alpha, \beta)$, где $\alpha < \beta$ и $\beta - \alpha \le T$. Тогда, используя периодичность функции $y = f(x)$, получим, что множество всех решений неравенства (13) есть объединение бесконечного множества всех интервалов $X_k = (\alpha + kT, \beta + kT)$, где k — любое целое число. Это бесконечное объединение будем называть серией интервалов и в дальнейшем будем записывать в виде: $X_k = (\alpha + kT, \beta + kT)$, $k \in Z$. Таким образом, будем в дальнейшем говорить, что множество всех решений неравенства (13) есть серия интервалов $X_k = (\alpha + kT, \beta + kT)$, $k \in Z$.

Заметим еще, что интервал длиной в главный период T можно взять любым, но обычно его выбирают таким, чтобы он удовлетворял двум условиям: он должен содержать промежуток, на котором для данной функции $y = f(x)$ определена обратная тригонометрическая функция и, чтобы множество всех решений данного неравенства на этом промежутке представляло собой один интервал.

Пусть дано простейшее тригонометрическое неравенство

$$\cos x > b. \tag{14}$$

Функция $y = \cos x$ определена на всей числовой прямой, поэтому ОДЗ неравенства (14) есть множество $X = (-\infty, +\infty)$. Областью значений функции $y = \cos x$ на множестве X является отрезок $Y = [-1; 1]$.

Поэтому при $b < -1$ неравенство (14) справедливо при любом значении x, а при $b \geq 1$ оно не справедливо ни при одном значении x. Значит, при $b < -1$ множество всех решений неравенства (14) есть вся числовая прямая, т.е. множество $(-\infty, +\infty)$, а при $b \geq 1$ неравенство (14) не имеет решений.

Если $b = -1$, то очевидно, что неравенство (14) справедливо при любом значении x, кроме тех, при которых $\cos x = -1$. Значит, при $b = -1$ множество всех решений неравенства (14) есть вся числовая прямая, за исключением точек $x_k = \pi + 2\pi k$, где k — любое целое число. Это множество можно записать в виде серии интервалов: $X_k = (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Пусть $b \in (-1; 1)$, для решения неравенства (14) в этом случае надо выбрать промежуток, длиной в главный период функции $y = \cos x$, т.е. длиной в 2π. В качестве промежутка длиной в 2π здесь можно взять либо промежуток $[0; 2\pi)$, либо промежуток $(-\pi, \pi]$. Эти промежутки длиной в главный период функции $y = \cos x$ полностью содержат отрезок $[0, \pi]$, на котором определена обратная функция $y = \arccos x$.

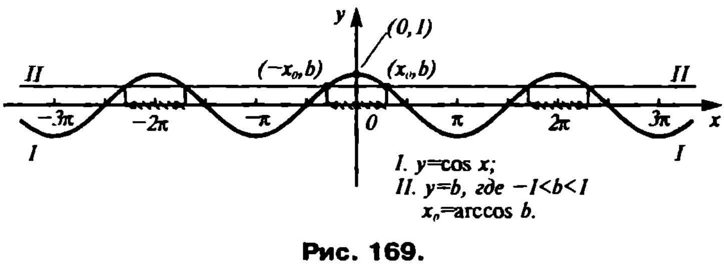


Рис. 169.

Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = b$ (рис. 169). Из рисунка видно, что лучше взять промежуток $(-\pi, \pi]$, чем промежуток $[0, 2\pi)$, так как в первом случае множество всех решений неравенства (14) представляет собой один интервал, а во втором случае — объединение двух интервалов. Рисунок подсказывает еще, что промежуток $(-\pi, \pi]$ надо разбить на два промежутка: $M_1 = [0, \pi]$ и $M_2 = (-\pi, 0)$, а потом воспользоваться четностью функции.

На отрезке $M_1 = [0, \pi]$ функция $y = \cos x$ имеет область значений $Y = [-1; 1]$ и убывает, поэтому каждое численное значение из Y она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0 \in M_1$ она принимает значение b, то при каждом $x < x_0$ и таком, что $x \in M_1$, она принимает значение большее, чем b, а при каждом $x > x_0$ и таком, что $x \in M_1$, она принимает значение меньшее, чем b. Следовательно, на M_1 множество всех решений неравенства (14) есть промежуток $[0, x_0)$. Так как на промежутке $(-\pi, \pi)$ функция $y = \cos x$ является четной функцией, то на $M_2 = (-\pi, 0)$ множество всех решений неравенства (14) есть интервал $(-x_0, 0)$.

Объединяя решения, найденные на M_1 и M_2, получаем, что на промежутке $(-\pi, \pi]$ множество всех решений неравенства (14) есть интервал $(-x_0, x_0)$, где, как показано в § 2 гл. VII, $x_0 = \arccos b$.

Используя периодичность функции $y = \cos x$, получим, что множество всех решений неравенства (14) есть серия интервалов: $X_k = (-\arccos b + 2\pi k, \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Итак, множество всех решений неравенства (14) есть:

1. при каждом $b \in (-\infty, -1)$ — множество $(-\infty, +\infty)$;
2. при $b = -1$ — серия интервалов $X_k = (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$;
3. при каждом $b \in (-1; 1)$ — серия интервалов $X_k = (-\arccos b + 2\pi k, \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$;
4. при каждом $b \in [1, +\infty)$ — пустое множество.

Пусть дано неравенство

$$\cos x < b. \qquad (15)$$

ОДЗ неравенства (15) есть множество $X = (-\infty, +\infty)$. Областью значений функции $y = \cos x$ на множестве X является отрезок $Y = [-1; 1]$.

Поэтому при $b > 1$ неравенство (15) справедливо при любом значении x, а при $b \leq -1$ оно не справедливо ни при одном значении x. Значит, при $b > 1$ множество всех решений неравенства (15) есть множество $(-\infty, +\infty)$, а при $b \leq -1$ неравенство (15) не имеет решений.

Если $b = 1$, то очевидно, что неравенство (15) справедливо при любом значении x, кроме тех, при которых $\cos x = 1$. Значит, при $b = 1$ множество всех решений неравенства (15) есть вся числовая прямая, за исключением точек $x_k = 2\pi k$, где k — любое целое число. Это множество можно записать в виде серии интервалов: $X_k = (2\pi k, 2\pi + + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Пусть $b \in (-1; 1)$. Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = b$ (рис. 170). Из рисунка видно, что в качестве промежутка длиной в 2π здесь лучше взять промежуток $[0, 2\pi)$, так как в случае множество всех решений неравенства (15) представляет собой один интервал. Рисунок подсказывает еще, что промежуток $[0, 2\pi)$ надо разбить на два

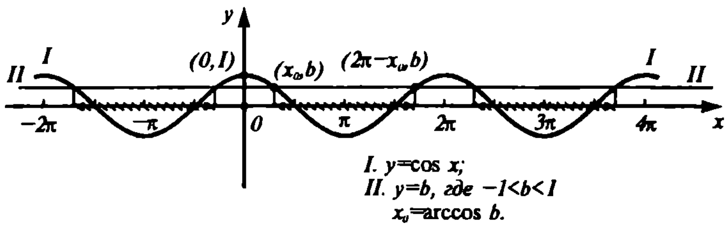


Рис. 170.

промежутка $M_1 = [0, \pi]$ и $M_2 = (\pi, 2\pi)$, потом воспользоваться убыванием функции $y = \cos x$ на промежутке $[0, \pi]$, а затем симметрией функции $y = \cos x$ относительно вертикальной прямой, проходящей через точку $(\pi, 0)$.

Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что на M_1 множество всех решений неравенства (15) есть промежуток $(x_0, \pi]$. Учитывая, что функция $y = \cos x$ симметрична относительно вертикальной прямой, проходящей через точку $(\pi, 0)$, приходим к выводу, что на M_2 множество всех решений неравенства (15) есть интервал $(\pi, 2\pi - x_0)$.

Объединяя решения, найденные на M_1 и M_2, получаем, что на промежутке $[0, 2\pi)$ множество всех решений неравенства (15) есть интервал $(x_0, 2\pi - x_0)$, где, как показано в § 2 гл. VII, $x_0 = \arccos b$.

Используя периодичность функции $y = \cos x$, получим, что множество всех решений неравенства (15) есть серия интервалов: $X_k = (\arccos b + 2\pi k, \quad 2\pi - \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Итак, множество всех решений неравенства (15) есть:

1. при каждом $b \in (-\infty, -1]$ — пустое множество;
2. при $b \in (-1; 1)$ — серия интервалов

$$X_k = (\arccos b + 2\pi k, 2\pi - \arccos b + 2\pi k),\ k \in Z;$$

3. при $b = 1$ — серия интервалов

$$X_k = (2\pi k, 2\pi + 2\pi k),\ k \in Z;$$

4. при каждом $b \in (1, +\infty)$ — множество $(-\infty, +\infty)$.

В табл. 23 приведены итоги решения неравенств (14) и (15).

Таблица 23

	$b < -1$	$b = -1$	$-1 < b < 1$	$b = 1$	$b > 1$
$\cos x > b$	$(-\infty; \infty)$	$(-\pi + 2\pi k,$ $\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$	$(-\arccos b + 2\pi k,$ $\arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$	нет решений	нет решений
$\cos x < b$	нет решений	нет решений	$(\arccos b + 2\pi k,$ $2\pi - \arccos b +$ $+ 2\pi k)$, $k \in Z$	$(2\pi k,$ $2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$	$(-\infty; \infty)$

Пусть даны простейшие тригонометрические неравенства

$$\sin x > b, \tag{16}$$
$$\sin x < b. \tag{17}$$

Проведя аналогичные рассуждения получим, что множество всех решений неравенства (16) есть:

1. при каждом $b \in (-\infty, -1)$ — множество $(-\infty, +\infty)$;
2. при $b = -1$, серия интервалов

$$X_k = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z;$$

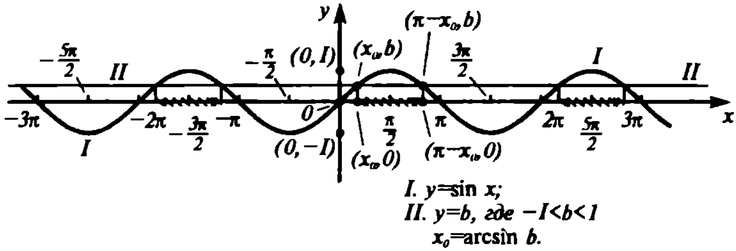


Рис. 171.

3. при каждом $b \in (-1; 1)$ (рис. 171) — серия интервалов

$$X_k = (\arcsin b + 2\pi k, \pi - \arcsin b + 2\pi k), k \in Z;$$

4. при каждом $b \in [1, +\infty)$ — пустое множество; а множество всех решений неравенства (17) есть:

1. при каждом $b \in (-\infty, -1]$ — пустое множество;

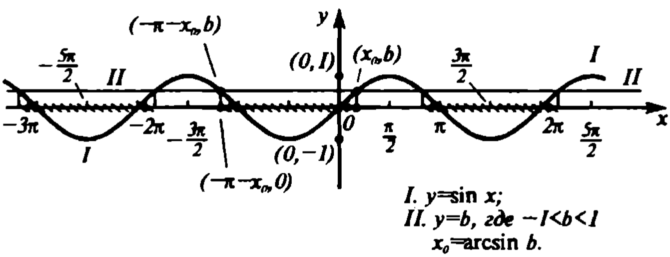


Рис. 172.

2. при каждом $b \in (-1; 1)$ (рис. 172) серия неравенств

$$X_k = (-\pi - \arcsin b + 2\pi k, \arcsin b + 2\pi k), k \in Z;$$

3. при $b = 1$ — серия интервалов

$$X_k = \left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z;$$

4. при каждом $b \in (1, +\infty)$ — множество $(-\infty, +\infty)$.

В табл. 24 приведены итоги решения неравенств (16) и (17).

Таблица 24

	$b < -1$	$b = -1$	$-1 < b < 1$	$b = 1$	$b > 1$
$\sin x > b$	$(-\infty; \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$	$(\arcsin b + 2\pi k, \pi - \arcsin b + 2\pi k)$, $k \in Z$	нет решений	нет решений
$\sin x < b$	нет решений	нет решений	$(-\pi - \arcsin b + 2\pi k, \arcsin b + 2\pi k)$, $k \in Z$	$\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$	$(-\infty; \infty)$

Пусть даны простейшие тригонометрические неравенства

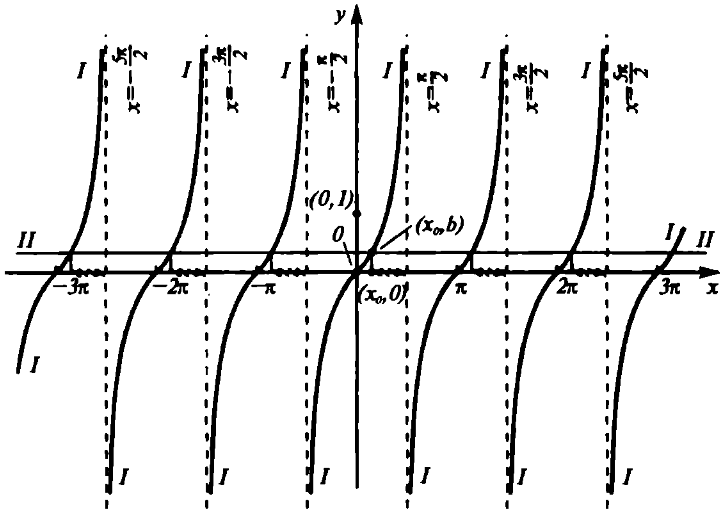
$$\operatorname{tg} x > b, \tag{18}$$

$$\operatorname{tg} x < b. \tag{19}$$

Областью существования функции $y = \operatorname{tg} x$ является вся числовая прямая, за исключением точек $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число. Поэтому ОДЗ неравенств (18) и (19) есть множество X, состоящее из всех действительных чисел, кроме чисел $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число. Областью значений функции $y = \operatorname{tg} x$ на множестве X является множество $Y = (-\infty, +\infty)$.

Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = b$ (рис. 173). Из рисунка видно, что надо сначала рассмотреть решение неравенств (18) и (19) на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ длиной в главный период функции $y = \operatorname{tg} x$. Рисунок подсказывает еще, что на этом промежутке надо воспользоваться возрастанием функции $y = \operatorname{tg} x$.

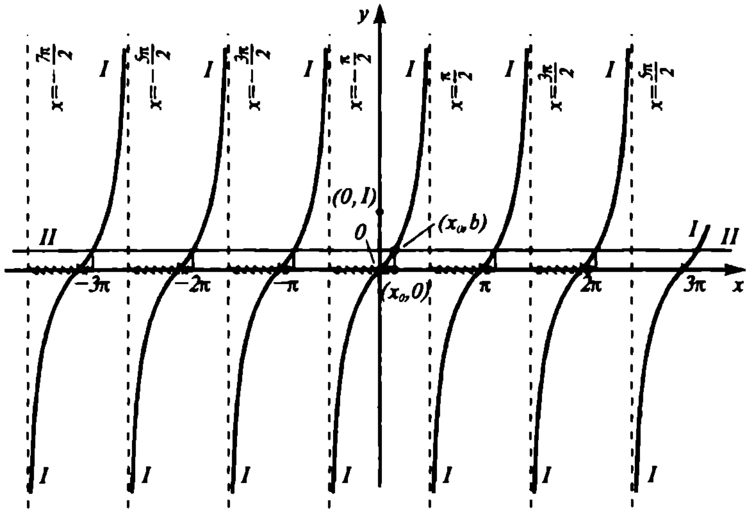
На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет область значений $Y = (-\infty, +\infty)$ и возрастает, поэтому каждое численное значение из Y она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ она принимает значение



I. $y=\operatorname{tg} x$;
II. $y=b$; $x_0=\operatorname{arctg} b$.

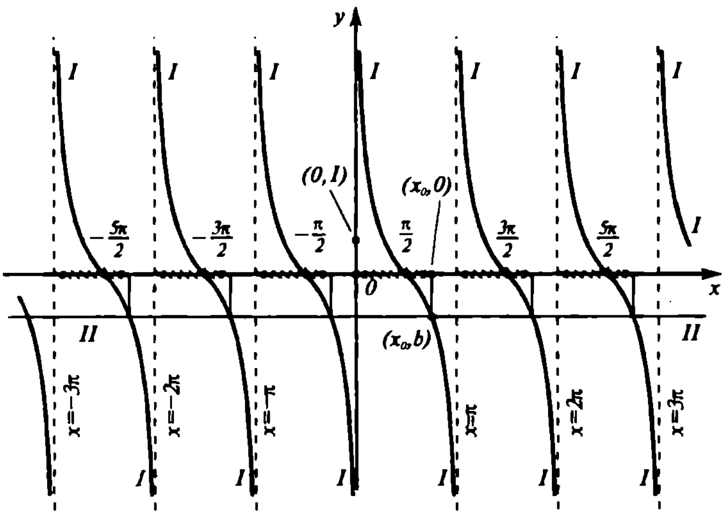
Рис. 173.

b, то при каждом $x > x_0$ и таком, что $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, она принимает значение большее, чем b, а при каждом $x < x_0$ и таком, что $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, она принимает значение меньшее, чем b. Следовательно, на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ множество всех решений неравенства (18) (см. рис. 173) есть интервал $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$, а множество всех решений неравенства (19) (рис. 174) есть интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, x_0\right)$, где, как показано в § 2 гл. VII, $x_0 =$ $= \operatorname{arctg} b$.



I. $y=\operatorname{tg} x$;
II. $y=b$; $x_0=\operatorname{arctg} b$.

Рис. 174.



I. $y=\operatorname{ctg} x$
II. $y=b$; $x_0=\operatorname{arcctg} b$.

Рис. 175.

Используя периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, получим, что при каждом b множество всех решений неравенства (18) есть серия интервалов: $X_k = \left(\operatorname{arctg} b + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, а множество всех решений неравенства (19) есть серия интервалов $X_k = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \operatorname{arctg} b + \pi k\right)$, $k \in Z$.

В табл 25 приведены итоги решения неравенств (18) и (19).

Таблица 25

	$-\infty < b < \infty$
$\operatorname{tg} x > b$	$\left(\operatorname{arctg} b + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$
$\operatorname{tg} x < b$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \operatorname{arctg} b + \pi k\right)$, $k \in Z$

Пусть даны простейшие тригонометрические неравенства

$$\operatorname{ctg} x > b, \tag{20}$$

$$\operatorname{ctg} x < b. \tag{21}$$

Проведя аналогичные рассуждения получим, что при каждом b множество всех решений неравенства (20) (рис. 175) есть серия интервалов $X_k = (\pi k, \operatorname{arcctg} b + \pi k)$, $k \in Z$, а множество всех решений неравенства (21) (рис. 176) есть серия интервалов $X_k = (\operatorname{arcctg} b + \pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

В табл. 26 приведены итоги решения неравенств (20) и (21).

Таблица 26

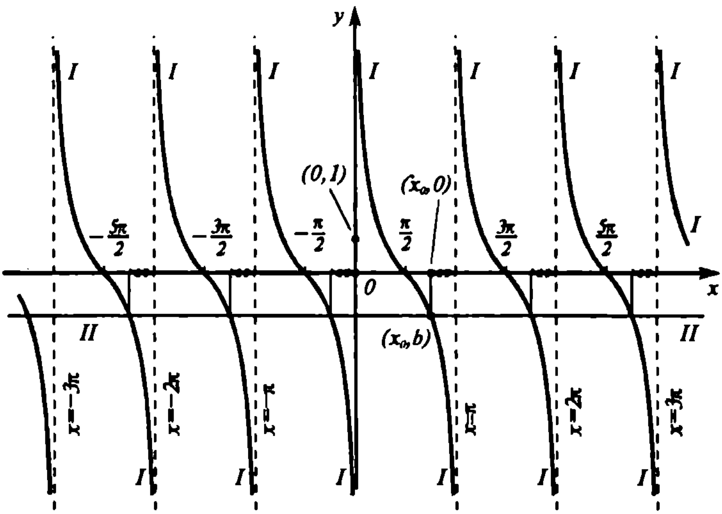
	$-\infty < b < \infty$
$\operatorname{ctg} x > b$	$(\pi k, \operatorname{arcctg} b + \pi k)$, $k \in Z$
$\operatorname{ctg} x < b$	$(\operatorname{arcctg} b + \pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$

Рассмотрим еще простейшие неравенства, содержащие основные обратные тригонометрические функции.

Пусть даны простейшие неравенства

$$\arccos x > b, \tag{22}$$
$$\arccos x < b. \tag{23}$$

Областью существования функции $y = \arccos x$ является отрезок $[-1; 1]$. Значит, ОДЗ неравенств (22) и (23) есть множество $X = [-1; 1]$. Областью значений функции $y =$



I. $y=\operatorname{ctg} x$
II. $y=b$; $x_0=\operatorname{arcctg} b$.

Рис. 176.

$= \arccos x$ на всем множестве X является отрезок $Y = [0, \pi]$.

Поэтому при b отрицательном неравенство (22) справедливо при любом значении $x \in X$, а неравенство (23) не справедливо ни при одном значении $x \in X$; если же $b > \pi$, то неравенство (22) не справедливо ни при одном значении $x \in X$, а неравенство (23) справедливо при любом значении $x \in X$.

Значит, при b отрицательном множество всех решений неравенства (22) есть множество $[-1; 1]$, а неравенство (23) не имеет решений; при $b > \pi$ неравенство (22) не имеет решений, а множество всех решений неравенства (23) есть множество $[-1; 1]$.

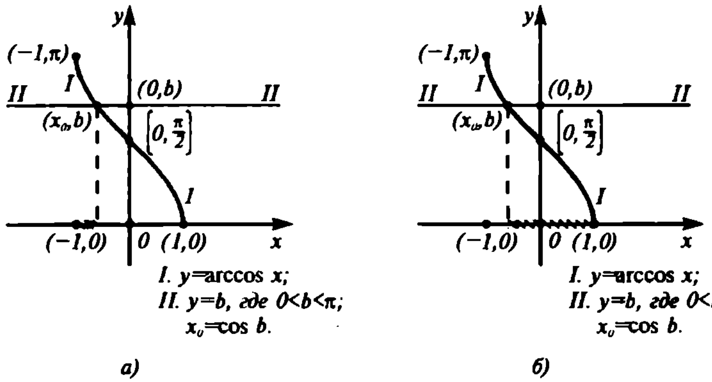


Рис. 177.

Если $b = 0$, то неравенство (22) справедливо при любом значении $x \in X$, кроме $x = 1$, а неравенство (23) не справедливо ни при одном значении $x \in X$. Значит, при $b = 0$ множество всех решений неравенства (22) есть множество $[-1; 1)$, а неравенство (23) не имеет решений.

Если $b = \pi$, то неравенство (22) не справедливо ни при одном значении $x \in X$, а неравенство (23) справедливо при любом значении $x \in X$, кроме $x = -1$. Значит, при $b = \pi$ неравенство (22) не имеет решений, а множество всех решений неравенства (23) есть множество $(-1; 1]$.

Пусть $b \in (0, \pi)$. Функция $y = \arccos x$ на множестве X убывает, поэтому каждое значение из Y она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0 \in X$ она принимает значение b, то при каждом $x < x_0$ и таком, что $x \in X$, она принимает значение большее, чем b, а при каждом $x > x_0$ и таком, что $x \in X$, она принимает значение меньшее, чем b. Следовательно, в этом случае множество всех решений неравенства (22) (рис. 177, а) есть промежуток $[-1, x_0)$, а множество всех решений неравенства (23) (рис. 177, б) промежуток $(x_0, 1]$, где, как показано в § 2 гл. VII, $x_0 = \cos b$.

Итак, множество всех решений неравенства (22) есть:

1. при каждом $b \in (-\infty, 0)$ есть множество $[-1; 1]$;
2. при $b = 0$ — множество $[-1; 1)$;
3. при каждом $b \in (0, \pi)$ — множество $[-1; \cos b)$;
4. при каждом $b \in [\pi, +\infty)$ — пустое множество;

а множество всех решений неравенства (23) есть:

1. при каждом $b \in (-\infty, 0]$ — пустое множество;
2. при каждом $b \in (0, \pi)$ — множество $(\cos b, 1]$;
3. при $b =$ — множество $(-1; 1]$;
4. при каждом $b \in (\pi, +\infty)$ — множество $[-1; 1]$.

В табл. 27 приведены итоги решения неравенств (22) и (23).

Таблица 27

	$b < 0$	$b = 0$	$0 < b < \pi$	$b = \pi$	$b > \pi$
$\arccos x > b$	$[-1; 1]$	$[-1; 1)$	$[-1; \cos b)$	нет решений	нет решений
$\arccos x < b$	нет решений	нет решений	$(\cos b; 1]$	$(-1; 1]$	$[-1; 1]$

Пусть даны простейшие неравенства

$$\arcsin x > b, \tag{24}$$
$$\arcsin x < b. \tag{25}$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим, что множество всех решений неравенства (24) (рис. 178, а) есть:

1. при каждом $b \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$ — множество $[-1; 1]$;
2. при $b = -2$ — множество $(-1; 1]$;
3. при каждом $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — множество $(\sin b, 1]$;

4. при каждом $b \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ — пустое множество;

а множество всех решений неравенства (25) (рис. 178, б) есть:

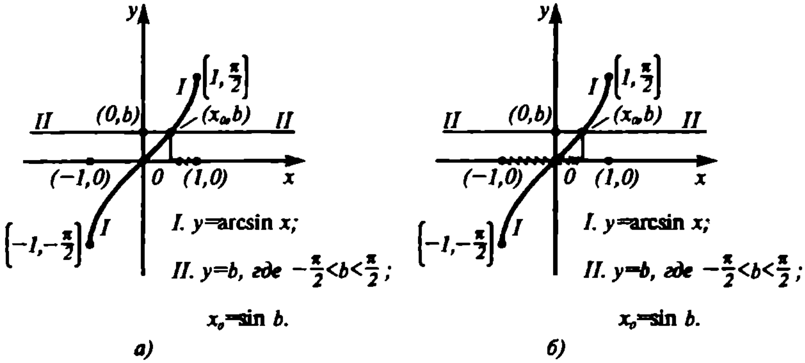


Рис. 178.

1. при каждом $b \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right]$ — пустое множество;
2. при каждом $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — множество $[-1, \sin b)$;
3. при $b = 2$ — множество $[-1; 1)$;
4. при каждом $b \in \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ — множество $[-1; 1]$.

В табл. 28 приведены итоги решения неравенств (24) и (25).

Таблица 28

	$b < -\frac{\pi}{2}$	$b = -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$	$b = \frac{\pi}{2}$	$b > \frac{\pi}{2}$
$\arcsin x > b$	$[-1; 1]$	$(-1; 1]$	$(\sin b; 1]$	нет решений	нет решений
$\arcsin x < b$	нет решений	нет решений	$[-1; \sin b)$	$[-1; 1)$	$[-1; 1]$

Пусть даны простейшие неравенства

$$\operatorname{arctg} x > b, \tag{26}$$

$$\operatorname{arctg} x < b. \tag{27}$$

Областью существования функции $y = \operatorname{arctg} x$ является вся числовая прямая. Значит, ОДЗ неравенств (26) и (27) есть множество $X = (-\infty; +\infty)$. Областью значений функции $y = \operatorname{arctg} x$ на множестве X является интервал $Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому при $b \leq -\frac{\pi}{2}$ неравенство (26) справедливо при любом значении $x \in X$, а неравенство (27) не справедливо ни при одном значении $x \in X$, если же $b \geq \frac{\pi}{2}$, то неравенство (26) не справедливо ни при одном значении $x \in X$, а неравенство (27) справедливо при любом значении $x \in X$.

Значит, при $b \leq -\frac{\pi}{2}$ множество всех решений неравенства (26) есть вся числовая прямая, а неравенство (27) не имеет решений; при $b \geq \frac{\pi}{2}$ неравенство (26) не имеет решений, а множество всех решений неравенства (27) есть вся числовая прямая.

Пусть $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ на всей числовой прямой возрастает, поэтому каждое значение из Y она принимает лишь один раз. Значит, если при $x = x_0 \in X$ она принимает значение b, то при каждом $x > x_0$ она принимает значение большее, чем b, а при каждом $x < x_0$ она принимает значение меньшее, чем b. Следовательно, в этом случае множество всех решений неравенства (26) (рис. 179) есть луч $(x_0, +\infty)$, а множество всех решений неравенства (27) (рис. 180) есть луч $(-\infty, x_0)$, где, как показано в § 2 гл. VII, $x_0 = \operatorname{tg} b$.

Итак, множество всех решений неравенства (26) есть:

1. при каждом $b \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right]$ — множество $(-\infty, +\infty)$;
2. при $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — множество $(\operatorname{tg} b, +\infty)$;

3. при каждом $b \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ — пустое множество; а множество всех решений неравенства (27) есть:

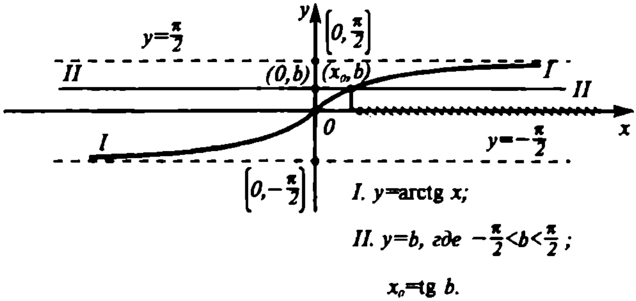


Рис. 179.

1. при каждом $b \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right]$ — пустое множество;
2. при каждом $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — множество $(-\infty, \operatorname{tg} b)$;

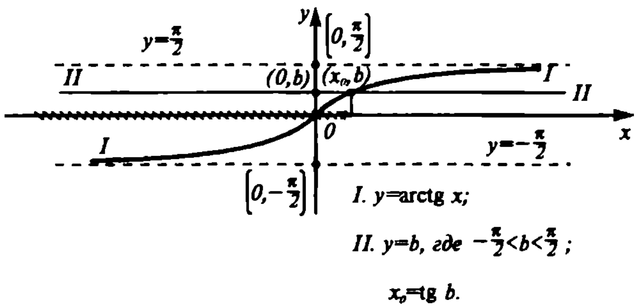


Рис. 180.

3. при каждом $b \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ — множество $(-\infty, +\infty)$.

В табл. 29 приведены итоги решения неравенств (26) и (27).

Таблица 29

	$b \le -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$	$b \ge \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arctg} x > b$	$(-\infty, \infty)$	$(\operatorname{tg} b; \infty)$	нет решений
$\operatorname{arctg} x < b$	нет решений	$(-\infty, \operatorname{tg} b)$	$(-\infty, +\infty)$

Пусть даны простейшие неравенства

$$\operatorname{arcctg} x > b, \tag{28}$$

$$\operatorname{arcctg} x < b. \tag{29}$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим, что множество всех решений неравенства (28) (рис. 181) есть:

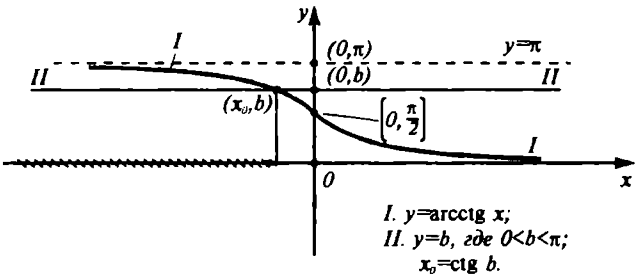


Рис. 181.

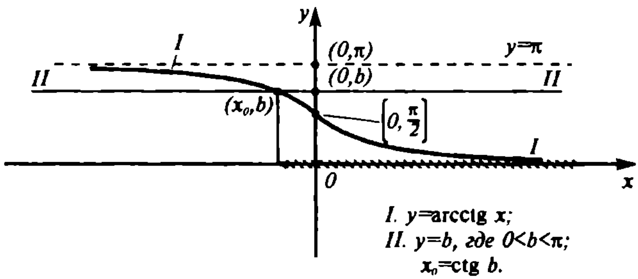


Рис. 182.

1. при каждом $b \in (-\infty, 0]$ — множество $(-\infty, +\infty)$;
2. при $b \in (0, \pi)$ — множество $(-\infty, \operatorname{ctg} b)$;
3. при каждом $b \in [\pi, +\infty)$ — пустое множество;

а множество всех решений неравенства (29) (рис. 182) есть:

1. при каждом $b \in (-\infty, 0]$ — пустое множество;
2. при каждом $b \in (0, \pi)$ — множество $(\operatorname{ctg} b, +\infty)$;
3. при $b = [\pi, +\infty)$ — множество $(-\infty, +\infty)$.

В табл. 30 приведены итоги решения неравенств (28) и (29).

Таблица 30

	$b \le 0$	$0 < b < \pi$	$b \ge \pi$
$\operatorname{arcctg} x > b$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \operatorname{ctg} b)$	нет решений
$\operatorname{arcctg} x < b$	нет решений	$(\operatorname{ctg} b; \infty)$	$(-\infty; \infty)$

§ 3. Преобразования неравенств

В третьем и четвертом параграфах главы VII рассматривались соответственно равносильные и неравносильные преобразования уравнений. Причем в случае неравносильных преобразований отмечалось, что возможны два способа решения уравнения. Первый способ — это совершать равносильные переходы на множестве, принадлежащем области допустимых значений, но не обязательно совпадающем с ней. Второй способ — это переходы к уравнению, являющемуся следствием предыдущего, с обязательной проверкой полученных решений.

При решении неравенств второй способ на самом деле невозможен, так как множество всех решений неравенства чаще всего бесконечно и в связи с этим проверка решений практически неосуществима. Поэтому при решении неравенств надо совершать только равносильные переходы и при этом, в основном, переходы, равносильные на множестве. При этом необходимо каждый раз отмечать на каком множестве совершается равносильный переход.

Ниже приводятся примеры равносильных и неравносильных преобразований неравенств.

Преобразования, связанные с применением тождеств. *Пусть дано неравенство*

$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$

и пусть для любого действительного x справедливо тождественное равенство $\varphi(x) = g(x)$, тогда неравенство (1) *равносильно неравенству*

$$f(x) > \varphi(x). \qquad (2)$$

Это утверждение позволяет для решения неравенств различные формулы, справедливые для всех действительных x. Примерами таких тождественных равенств являются формулы сокращенного умножения многочленов, основное тригонометрическое тождество и ряд других формул. В гл. III с помощью формул сокращенного умножения многочленов уже были решены некоторые алгебраические неравенства.

Приведем пример равносильного преобразования неравенства при помощи тождественных равенств.

Пусть дано неравенство

$$\sin^4 x > \cos^4 x. \qquad (3)$$

Применяя утверждение 1 § 1, получим неравенство

$$\cos^4 x - \sin^4 x < 0, \qquad (4)$$

равносильное неравенству (3). Используя формулу разности квадратов, основное тригонометрическое тождество и формулу косинуса двойного угла, можно написать следующую цепочку тождественных равенств, справедливых для любого действительного x:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x.$$

Значит неравенство (4) равносильно неравенству

$$\cos 2x < 0.$$

Множество всех решений последнего неравенства есть серия интервалов $X_k = \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Поскольку последнее неравенство равносильно исходному, то множество всех решений неравенства (3) есть серия интервалов $X_k = \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Преобразования, связанные с суперпозициями функций. Пусть функция $y = f(x)$ есть сложная функция $y = P[g(x)]$, являющаяся суперпозицией двух функций: $u = g(x)$ — основной элементарной функции, и $y = P(u)$, где $P(u)$ — квадратный трехчлен (т.е. $P(u) = au^2 + bu + c$). В таких случаях неравенство $f(x) > 0$ записывают в виде

$$a[g(x)]^2 + bg(x) + c > 0 \tag{5}$$

и называют *квадратным неравенством относительно* $g(x)$.

Неравенство (5) решается следующим образом.

Сначала решают квадратное неравенство

$$at^2 + bt + c > 0, \tag{6}$$

находят его дискриминант $D = b^2 - 4ac$. В зависимости от дискриминанта D и коэффициента a, возможны следующие четыре случая.

1. Если $a < 0$ и $D \leq 0$, то неравенство (6) не имеет решений. Следовательно, и неравенство (5) не имеет решений.

2. Если $a < 0$ и $D > 0$, то множество всех решений неравенства (6) есть интервал (t_1, t_2), где t_1 и t_2 корни квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$, причем $t_1 < t_2$.

В этом случае неравенство (5) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} g(x) < t_2, \\ g(x) > t_1. \end{cases}$$

Следовательно, множество всех решений системы и будет в этом случае множеством всех решений неравенства (5).

3. Если $a > 0$ и $D \geq 0$, то множество всех решений неравенства (6) есть объединение двух лучей $(-\infty, t_1)$ и $(t_2, +\infty)$, где t_1 и t_2 корни квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$, причем $t_1 \leq t_2$ (если $D = 0$, то $t_1 = t_2$).

В этом случае неравенство (5) равносильно совокупности неравенств

$$g(x) < t_1, \quad g(x) > t_2.$$

Следовательно, множество всех решений этой совокупности и будет в этом случае множеством всех решений неравенства (5).

4. Если $a > 0$ и $D < 0$, то множество всех решений неравенства (6) есть вся числовая прямая.

В этом случае множество всех решений неравенства (5) есть ОДЗ неравенства (5), т.е. область существования функции $y = g(x)$.

Приведем примеры.

Пусть дано неравенство

$$4\cos^2 2x + 8\cos 2x - 5 < 0. \tag{7}$$

Это неравенство есть квадратное неравенство относительно $\cos 2x$. Решая неравенство

$$4t^2 + 8t - 5 < 0,$$

получаем, что множество всех его решений есть интервал $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Следовательно, неравенство (7) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \cos 2x > -\frac{5}{2}, \\ \cos 2x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Множество всех решений первого неравенства этой системы есть вся числовая прямая.

Множество всех решений первого неравенства есть серия интервалов $X_k = \left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{5\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Значит, множество всех решений исходного неравенства (7) есть серия интервалов $X_k = \left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{5\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Пусть дано неравенство

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0. \quad (8)$$

Это неравенство есть квадратное неравенство относительно 2^x. Решая неравенство

$$t^2 - 3t + 2 > 0,$$

получаем, что множество всех его решений есть объединение двух лучей $(-\infty, 1)$ и $(2, +\infty)$. Следовательно, неравенство (8) равносильно совокупности неравенств

$$2^x < 1, \quad 2^x > 2.$$

Множество всех решений первого неравенства этой совокупности есть промежуток $(-\infty, 0)$.

Множество всех решений второго неравенства — промежуток $(1, +\infty)$.

Значит, множество всех решений исходного неравенства (8) есть множество $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Отметим, что приведенное выше утверждение о решении квадратного неравенства относительно $g(x)$ остается справедливым и в том случае, когда функция $u = g(x)$ не является основной элементарной функцией.

Преобразования, связанные с логарифмическими и тригонометрическими формулами. Поскольку формулы, отмеченные в § 4 гл. VII, можно применять при решении неравенств лишь на том множестве изменения неизвестной, на котором одновременно имеют смысл и левая и правая части применяемой формулы, то неравенства, при решении которых хотят воспользоваться той или иной формулой, обычно решают по такой схеме:

1. *Находят ОДЗ неравенства.*

2. *Разбивают ОДЗ на два множества M_1 и M_2* (M_1 — вся та часть ОДЗ, где одновременно имеют смысл обе части применяемой формулы, M_2 — та часть ОДЗ, которая остается после выделения множества M_1).

3. *Решают неравенство на множестве M_1* (учитывая, что преобразование неравенства с помощью этой формулы есть равносильное преобразование на множестве M_1).

4. *Решают неравенство на M_2.*

5. *Объединяют множества решений, найденные на M_1 и M_2, и тем самым, получают множество всех решений исходного неравенства.*

Решим по этой схеме неравенство

$$\log_2 (x^2) + \log_2 (x^4) > 3. \qquad (9)$$

ОДЗ этого неравенства есть множество $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Разобьем ОДЗ не два множества: $M_1 = (0, +\infty)$ и $M_2 = (-\infty, 0)$ и решим неравенство (9) на каждом из этих множеств.

На множестве M_1 справедливы тождественные равенства

$$\log_2 (x^2) = 2 \log_2 x, \quad \log_2 (x^4) = 4 \log_2 x$$

Значит, на M_1 неравенство (9) равносильно неравенству

$$\log_2 x > 1/2.$$

Решая это простейшее неравенство, получаем, что множество всех его решений есть промежуток $(\sqrt{2}, +\infty)$. Поскольку этот промежуток содержится в множестве M_1, то множество всех решений неравенства (9) на M_1 есть промежуток $(\sqrt{2}, +\infty)$.

На множестве M_2 справедливы тождественные равенства

$$\log_2 (x^2) = 2 \log_2 (-x), \quad \log_2 (x^4) = 4 \log_2 (-x).$$

Значит, на M_2 неравенство (9) равносильно неравенству

$$\log_2 (-x) > 1/2.$$

Решая это простейшее неравенство, получаем, что множество всех его решений есть промежуток $(-\infty, -\sqrt{2})$. Поскольку этот промежуток содержится в множестве M_2, то множество всех решений неравенства (9) на M_2 есть промежуток $(-\infty, -\sqrt{2})$.

Объединяя множества решений, найденные на M_1 и M_2, получаем, что множество всех решений неравенства (9) есть множество $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

Преобразования, связанные с возведением в натуральную степень. Пусть дано неравенство

$$f(x) > g(x) \tag{10}$$

Замена этого неравенства неравенством

$$[f(x)]^n > [g(x)]^n \tag{11}$$

(где n — фиксированное натуральное число и $n \geq 2$) называется *возведением уравнения в натуральную степень n.*

На основании утверждения 5 § 1 неравенства (10) и (11) равносильны только на том множестве, на котором одновременно обе функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ неотрицательны. Поэтому возведением в натуральную степень неравенства обычно решают по такой схеме:

1. *Находят ОДЗ неравенства, которое надо решить.*

2. *Разбивают ОДЗ на два множества* M_1 *и* M_2 (M_1 — вся та часть ОДЗ, где одновременно обе части неравенства неотрицательны, M_2 — вся та часть ОДЗ, которая остается после выделения множества M_1).

3. *Решают неравенство на множестве* M_1 (учитывая, что возведение в степень n есть равносильное преобразование на этом множестве).

4. *Решают неравенство на* M_2.

5. *Объединяют множества решений, найденные на* M_1 *и* M_2, *и тем самым, получают множество всех решений исходного неравенства.*

Решим по этой схеме неравенство

$$|x - 4| > 6 + x. \tag{12}$$

ОДЗ этого неравенства — вся числовая прямая. Разобьем ОДЗ на два множества: $M_1 = [-6, +\infty)$ и $M_2 = (-\infty, -6)$ и решим неравенство (12) на каждом из этих множеств.

На множестве M_1 обе части неравенства (12) неотрицательны, поэтому по утверждению 5 § 1 на этом множестве неравенство (12) равносильно неравенству

$$(x - 4)^2 > (6 + x)^2.$$

Множество всех решений последнего неравенства есть промежуток $(-\infty, -1)$. Из этого промежутка в множестве M_1 содержится лишь промежуток $[-6, -1)$. Поэтому множество всех решений неравенства (12) на M_1 есть промежуток $[-6, -1)$.

Очевидно, что на множестве M_2 левая часть неравенства (12) положительна, а правая — отрицательна. Поэтому множество всех решений неравенства (12) на M_2 есть все множество M_2.

Объединяя множества всех решений, найденные на M_1 и M_2, получаем, что множество всех решений неравенства (12) есть промежуток $(-\infty, -1)$.

Наиболее часто возведение в натуральную степень применяется при решении следующих неравенств.

Пусть m — фиксированное натуральное число и пусть даны неравенства

$$\sqrt[2m]{f(x)} > \varphi(x), \tag{13}$$

$$\sqrt[2m]{f(x)} < \varphi(x). \tag{14}$$

Неравенства типа (13) обычно решают по такой схеме:

1. *Находят ОДЗ неравенства.*

2. *Разбивают ОДЗ на два множества M_1 и M_2* (M_1 — вся та часть ОДЗ, где функция $y = \varphi(x)$ неотрицательна; M_2 — вся та часть ОДЗ, где функция $y = \varphi(x)$ отрицательна).

3. *Решают на M_1 неравенство $f(x) > [\varphi(x)]^{2m}$, равносильное на этом множестве неравенству* (13).

4. *Отмечают, что на M_2 множество всех решений неравенства* (13) *совпадает с множеством M_2.*

5. *Объединяют множества всех решений неравенства $f(x) > [\varphi(x)]^{2m}$ на M_1 и множество M_2, и тем самым, получают множество всех решений неравенства* (13).

Неравенства типа (14) решают по такой схеме:

1. *Находят ОДЗ неравенства.*

2. *Разбивают ОДЗ на два множества M_1 и M_2* (M_1 — вся та часть ОДЗ, где функция $y = \varphi(x)$ положительна; M_2 — вся та часть ОДЗ, где функция $y = \varphi(x)$ неположительна).

3. *Решают на множестве M_1 неравенство $f(x) < [\varphi(x)]^{2m}$, равносильное на этом множестве неравенству* (14).

4. *Отмечают, что на множестве M_2 нет решений неравенства* (14).

5. *Выписывают множество всех решений неравенства* $f(x) < [\varphi(x)]^{2m}$ *на* M_1; *это множество и будет множеством всех решений неравенства* (14).

Покажем теперь на конкретных примерах, как решать неравенства по этим схемам.

Пусть дано неравенство

$$\sqrt{x+2} > x. \qquad (15)$$

ОДЗ этого неравенства есть промежуток $[-2, +\infty)$. Разобьем ОДЗ на два множества: $M_1 = [0, +\infty)$ и $M_2 = [-2, 0)$ и решим неравенство (15) на каждом из этих множеств.

На множестве M_1 обе части неравенства (15) — неотрицательны, поэтому по утверждению 5 § 1 на этом множестве неравенство (15) равносильно неравенству

$$x + 2 > x^2.$$

Применяя теперь утверждение 1 § 1, получаем, что на множестве M_1 неравенство (15) равносильно неравенству

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

Множество всех решений последнего неравенства есть интервал $(-1, 2)$. Из этого интервала в множестве M_1 содержится лишь промежуток $[0, 2)$. Поэтому множество всех решений неравенства (15) на M_1 есть промежуток $[0, 2)$. Очевидно, что на множестве M_2 левая часть неравенства (15) неотрицательна, а правая — отрицательна, поэтому множество всех решений неравенства (15) на M_2 есть все множество M_2.

Объединяя множества всех решений, найденные на M_1 и M_2, получаем, что множество всех решений неравенства (15) есть промежуток $[-2, 2)$.

Пусть дано неравенство

$$x + 1 > \sqrt{x+3}. \qquad (16)$$

ОДЗ этого неравенства есть промежуток $[-3, +\infty)$. Разобьем ОДЗ на два множества: $M_1 = (-1, +\infty)$ и $M_2 = [-3,$

— 1] и решим неравенство (16) на каждом из этих множеств.

На множестве M_1 обе части неравенства (16) неотрицательны, поэтому по утверждению 5 § 1 на этом множестве неравенство (16) равносильно неравенству

$$(x+1)^2 > x+3.$$

Применяя теперь утверждение 1 § 1, получаем, что на множестве M_1 неравенство (16) равносильно неравенству

$$x^2 + x - 2 > 0.$$

Множество всех решений последнего неравенства есть множество $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$. Поэтому множество всех решений неравенства (16) на M_1 есть интервал $(1, +\infty)$.

Очевидно, что на множестве M_2 левая часть неравенства (16) неположительна, а правая — неотрицательна, поэтому на M_2 неравенство (16) не имеет решений.

Итак, множество всех решений неравенства (16) есть промежуток $(1, +\infty)$.

Преобразования, связанные с освобождением от знаменателя.

Пусть дано неравенство

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > g(x). \qquad (17)$$

Такие неравенства решаются по следующей схеме:

1. *Находят ОДЗ неравенства.*

2. *Разбивают ОДЗ на два множества M_1 и M_2* (M_1 — вся та часть ОДЗ, где функция $y=\varphi(x)$ положительна; M_2 — вся та часть ОДЗ, где функция $y=\varphi(x)$ отрицательна).

3. *Решают на множестве M_1 неравенство $f(x) > g(x)\varphi(x)$,* равносильное на этом множестве неравенству (17) (см. § 1, утверждение 7а).

4. *Решают на множестве M_2 неравенство $f(x) < g(x)\varphi(x)$, равносильное на этом множестве неравенству* (17) (см. § 1, утверждение 7б).

5. *Объединяют множества решений, найденные на M_1 и M_2, и тем самым, получают множество всех решений неравенства* (17).

Решим по этой схеме неравенство

$$\frac{2-(\log_3 x)^2}{\log_3 x} < 1 - \log_3 x. \qquad (18)$$

ОДЗ этого неравенства есть множество $(0;\ 1) \cup (1,\ +\infty)$. Разобьем ОДЗ на два множества: $M_2 = (0;\ 1)$ и $M_1 = (1,\ +\infty)$. На множестве M_1 функция $y = \log_3 x$ положительна, поэтому (см. § 1, утверждение 7а) на этом множестве неравенство (18) равносильно неравенству

$$2-(\log_3 x)^2 < \log_3 x\,(1-\log_3 x),$$

которое можно записать в виде $\log_3 x > 2$. Множество всех решений этого простейшего неравенства есть промежуток $(9,\ +\infty)$. Поскольку этот промежуток содержится в множестве M_1, то множество всех решений неравенства (18) на M_1 есть промежуток $(9,\ +\infty)$. На множестве M_2 функция $y = \log_3 x$ отрицательна, поэтому (см. § 1, утверждение 7б) на этом множестве неравенство (18) равносильно неравенству

$$2-(\log_3 x)^2 > \log_3 x\,(1-\log_3 x),$$

которое можно записать в виде $\log_3 x < 2$. Множество всех решений этого простейшего неравенства есть интервал $(0;\ 9)$. Из этого интервала в множестве M_2 содержится лишь интервал $(0;\ 1)$. Поэтому множество всех решений неравенства (18) на M_2 есть интервал $(0;\ 1)$.

Объединяя множества всех решений, найденные на M_1 и M_2, получаем, что множество всех решений неравенства (18) есть множество $(0;\ 1) \cup (9;\ +\infty)$.

Метод интервалов. Решение неравенства

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > g(x) \qquad (17)$$

в случае, есть $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ будут многочлены, можно провести иначе, а именно, неравенство (17) надо сначала переписать в равносильном виде

$$\frac{f(x) - \varphi(x)g(x)}{\varphi(x)} > 0. \qquad (19)$$

Затем воспользоваться утверждением 7 § 1, умножить неравенство (19) на $\varphi^2(x)$ и записать неравенство

$$\varphi(x)[f(x) - \varphi(x)g(x)] > 0, \qquad (20)$$

равносильное неравенству (19) на его ОДЗ. Наконец, неравенство (20) решить методом интервалов (см. § 2 гл. III). Множество всех решений неравенства (20) и будет множеством всех решений неравенства (17).

Пусть дано неравенство

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{(x+1)} < x. \qquad (21)$$

Перенося x в левую часть неравенства, перепишем это неравенство в равносильном виде

$$\frac{-3x-1}{x+1} < 0.$$

Пользуясь утверждением 7 § 1 получаем неравенство

$$-3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right) < 0,$$

равносильное неравенству (21) на его ОДЗ. Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ: множество всех решений неравенства (21) есть множество $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Преобразования, связанные с сокращением неравенства на общий множитель. Пусть дано неравенство

$$\varphi(x)f(x) > \varphi(x)g(x).$$

Часто это неравенство заменяют неравенством

$$f(x) > g(x),$$

т.е. сокращают исходное неравенство на общий множитель $\varphi(x)$. Это грубая ошибка. Подобные неравенства надо решать только следующим образом:

1. *Найти ОДЗ неравенства* $\varphi(x)f(x) > \varphi(x)g(x)$.
2. *Переписать неравенство в равносильном виде*

$$\varphi(x)\,[f(x) - g(x)] > 0.$$

3. *Перейти к совокупности двух систем неравенств*

$$\begin{cases}\varphi(x) > 0,\\ f(x) - g(x) > 0,\end{cases} \quad \begin{cases}\varphi(x) < 0,\\ f(x) - g(x) < 0,\end{cases}$$

которая равносильна неравенству $\varphi(x)f(x) > \varphi(x)g(x)$ *на его ОДЗ.*

4. *Решить эту совокупность на ОДЗ исходного неравенства.*

Множество всех решений и будет множеством всех решений неравенства $\varphi(x)f(x) > \varphi(x)g(x)$.

Решим этим способом неравенство

$$4x \log_5 x > (x^2 + 3) \log_5 x. \qquad (22)$$

ОДЗ этого неравенства — множество $M = (0, +\infty)$. Перепишем неравенство (22) в равносильном виде

$$(4x - x^2 - 3) \log_5 x > 0$$

и решим на множестве M совокупность двух систем неравенств:

$$\begin{cases}4x - x^2 - 3 > 0,\\ \log_5 x > 0,\end{cases} \quad \begin{cases}4x - x^2 - 3 < 0,\\ \log_5 x < 0,\end{cases}$$

Множество всех решений первой системы есть интервал (1; 3), а множество всех решений второй системы есть интервал (0; 1). Поскольку и интервал (1; 3) и интервал (0; 1) содержатся в ОДЗ исходного неравенства, то получаем, что множество всех решений неравенства (22) есть множество $(0; 1) \cup (1; 3)$.

Преобразования, связанные с логарифмированием неравенств. Пусть a — фиксированное положительное и не равное единице число.

Пусть дано неравенство

$$f(x) < g(x). \tag{23}$$

Замена этого неравенства неравенством

$$\log_a f(x) < \log_a g(x), \tag{24}$$

или неравенством

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \tag{25}$$

называется *логарифмированием неравенства.*

На основании утверждения 6 § 1 при $a > 1$ неравенства (23) и (24) [а при $0 < a < 1$ неравенства (23) и (25)] равносильны только на том множестве, на котором одновременно обе функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Поэтому применением логарифмирования неравенства обычно решают по такой схеме:

1. *Находят ОДЗ неравенства.*

2. *Разбивают ОДЗ на два множества* M_1 *и* M_2 (M_1 — вся та часть ОДЗ, на которой положительны обе части данного неравенства, M_2 — та часть ОДЗ, которая остается после выделения множества M_1).

3. *Решают неравенство на множестве* M_1 (учитывая, что логарифмирование есть равносильное преобразование на этом множестве).

4. *Решают неравенство на* M_2.

5. *Объединяют множества решений, найденные на* M_1 *и* M_2, *и тем самым, получают множество всех решений исходного неравенства.*

Решим по этой схеме несколько неравенств.

Пусть дано неравенство

$$3^{x^2 - x} < 2^{1 - (\sqrt{x})^2}. \tag{26}$$

ОДЗ этого неравенства есть множество $M = [0, +\infty)$. Поскольку на множестве M обе части неравенства (26) положительны, то на основании утверждения 6 § 1 неравенство (26) равносильно на M неравенству

$$\log_3 (3^{x^2 - x}) < \log_3 (2^{1 - (\sqrt{x})^2}),$$

которое равносильно на M неравенству

$$x^2 - x < (1 - x) \log_3 2.$$

Множество всех решений последнего неравенства есть интервал $(-\log_3 2; 1)$. Из этого интервала в множестве M содержится лишь промежуток $[0; 1)$. Значит, множество всех решений неравенства (26) есть промежуток $[0; 1)$.

Пусть дано неравенство

$$(x^2 + x + 1)^x < 1. \qquad (27)$$

ОДЗ неравенства (27) есть вся числовая прямая, так как квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ положителен для любого действительного x.

Логарифмируя неравенство (27) по любому основанию, например, по основанию 10, получим на основании утверждения 6а § 1, что неравенство (27) равносильно неравенству

$$\lg (x^2 + x + 1)^x < \lg 1.$$

Используя свойства логарифмов, перепишем это неравенство в виде

$$x \lg (x^2 + x + 1) < 0.$$

Это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg (x^2 + x + 1) < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ \lg (x^2 + x + 1) > 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна следующей совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x + 1 < 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1, \end{cases}$$

Решая сначала первую систему, приходим к выводу, что она не имеет решений, так как множество всех ее решений есть пересечение двух множеств: $(0, +\infty)$ — множества всех решений первого неравенства и $(-1; 0)$ — множества всех решений второго неравенства, а это пересечение пусто.

Множество всех решений второй системы есть промежуток $(-\infty, -1)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (27) есть промежуток $(-\infty, -1)$.

Отметим, что аналогично решаются неравенства более общего вида

$$[f(x)]^{\varphi(x)} < b, \qquad (28)$$

где b — данное положительное число. А именно, сначала ищут ОДЗ неравенства, затем выбирают любое число $a > 1$. Тогда на ОДЗ неравенство (28) равносильно неравенству

$$\varphi(x) \log_a f(x) < \log_a b.$$

Далее остается решить последнее неравенство на ОДЗ исходного неравенства (28).

Заметим еще, что простейшее показательное неравенство $a^x > b$ при помощи логарифмирования неравенств можно заменить равносильным ему алгебраическим неравенством первой степени:

1) при $a > 1$ неравенством $x > \log_a b$,

2) при $0 < a < 1$ неравенством $x < \log_a b$,

для которых легко выписываются множества всех их решений. Аналогично можно поступить и с неравенством $a^x < b$.

Преобразования, связанные с потенцированием неравенств. Пусть a — некоторое фиксированное положительное, не равное единице число.

Пусть дано неравенство

$$\log_a f(x) < \log_a g(x). \qquad (29)$$

Замена этого неравенства неравенством

$$f(x) < g(x)$$

или неравенством

$$f(x) > g(x)$$

называется *потенцированием неравенства.*

Учитывая утверждения 6а и 6б § 1, неравенства вида (29) обычно решают по такой схеме:

1. *Находят ОДЗ неравенства.*

2. *Решают неравенство на ОДЗ* (учитывая, что потенцирование есть равносильное преобразование на этом множестве).

Решим по этой схеме неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 4) > \log_{\frac{1}{2}} (4x - 7). \qquad (30)$$

ОДЗ этого неравенства определяется условиями:

$$\begin{cases} 4x - 7 > 0, \\ x^2 - 4 > 0, \end{cases}$$

т.е. для нахождения ОДЗ надо решить эту систему неравенств. Решая ее, получим, что ОДЗ есть промежуток $(2, +\infty)$. Учитывая утверждение 6б, получаем, что на ОДЗ неравенство (30) равносильно неравенству

$$x^2 - 4 < 4x - 7.$$

Решая это квадратное неравенство, находим множество всех его решений — интервал $(1; 3)$. Из этого интервала в ОДЗ неравенства (30) содержится лишь интервал $(2; 3)$. Значит, множество всех решений неравенства (30) есть интервал $(2; 3)$.

Рассмотрим еще некоторые частные случаи потенцирования неравенств.

Легко видеть справедливость следующих утверждений:

1. *Пусть a — некоторое фиксированное число такое, что $a > 1$, тогда неравенство $\log_a f(x) > b$ равносильно неравенству $f(x) > a^b$, а неравенство $\log_a f(x) < b$ равносильно системе неравенств*

$$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

или, что то же самое, двойному неравенству $0 < f(x) < a^b$.

2. *Пусть a — некоторое фиксированное число такое, что $0 < a < 1$, тогда неравенство $\log_a f(x) < b$ равносильно неравенству $f(x) > a^b$, а неравенство $\log_a f(x) > b$ равносильно системе неравенств*

$$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

или, что то же самое, двойному неравенству $0 < f(x) < a^b$.

Рассмотрим примеры.

Пусть дано неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 3x + 5) < -1.$$

На основании только что приведенного утверждения это неравенство равносильно неравенству

$$x^2 - 3x + 5 > \left(\frac{1}{3}\right)^{-1},$$

которое равносильно неравенству

$$x^2 - 3x + 2 > 0.$$

Множество всех решений последнего неравенства, а значит и исходного неравенства, есть множество $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Пусть дано неравенство

$$\log_2 \sin x < -\frac{1}{2}.$$

На основании только что приведенного утверждения это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

или, что тоже самое, двойному неравенству

$$0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

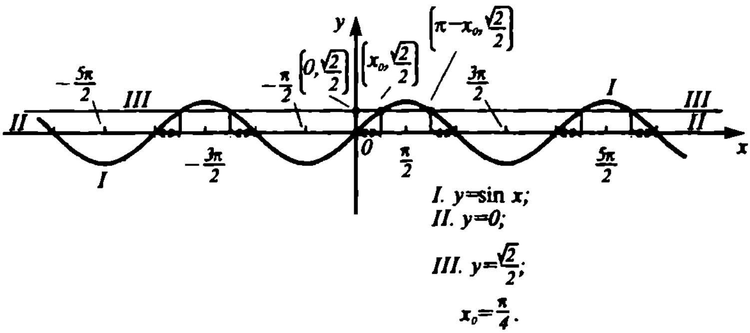


Рис. 183.

Множество всех решений этого двойного неравенства (рис. 183), а значит и исходного неравенства, есть две серии интервалов:

$$X_k = \left(2\pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \ k \in Z;$$

$$X_m = \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, \pi + 2\pi m\right), \ m \in Z.$$

Отметим, что потенцирование неравенств часто применяется и в более сложных ситуациях, чем рассмотренные выше.

Пусть дано неравенство

$$\log_{x^2}(2+x) < 1, \qquad (31)$$

ОДЗ этого неравенства определяется условиями

$$\begin{cases} 2+x>0, \\ x^2>0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

т.е. для нахождения ОДЗ надо решить эту систему неравенств. Решая ее, находим, что ОДЗ есть множество $M = (-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Разобьем ОДЗ на два множества: $M_1 = (-2;\ -1) \cup (1,\ +\infty)$ и $M_2 = (-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$.

На множестве M_1 $x^2 > 1$, поэтому на множестве M_1 неравенство (31) по утверждению 6а § 1 равносильно неравенству

$$2 + x < x^2.$$

Решая это квадратное неравенство, находим, что множество всех его решений есть множество $(-\infty,\ -1) \cup (2,\ +\infty)$. Из этого множества в M_1 содержится лишь множество $(-2;\ -1) \cup (2,\ +\infty)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (31) на M_1 есть множество $(-2;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$.

На множестве M_2 $0 < x^2 < 1$, поэтому на множестве M_2 неравенство (31) по утверждению 6б § 1 равносильно неравенству

$$2 + x > x^2.$$

Решая это квадратное неравенство, находим, что множество всех его решений есть интервал $(-1;\ 2)$. Из этого интервала в M_2 содержится лишь множество $(-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (31) на M_2 есть множество $(-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$.

Объединяя множества решений, найденные на M_1 и M_2, получаем, что множество всех решений исходного неравенства (31) есть множество $(-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$.

Аналогично решается и неравенство вида

$$\log_{\varphi(x)} g(x) < b, \qquad (32)$$

где b — данное число. А именно, ищется ОДЗ неравенства. Затем ОДЗ разбивается на два множества: M_1 — всю ту часть ОДЗ, где $\varphi(x) > 1$, и M_2 — всю ту часть ОДЗ, где $0 < \varphi(x) < 1$. Тогда неравенство (32) на множестве M_1 равносильно неравенству

$$g(x) < [\varphi(x)]^b, \qquad (33)$$

а на множестве M_2 неравенство (32) равносильно неравенству

$$g(x) > [\varphi(x)]^b. \qquad (34)$$

Далее остается решить неравенства (33) и (34) на соответствующих множествах и объединить получившиеся решения. Заметим, что простейшее логарифмическое неравенство $\log_a x > b$, при помощи потенцирования неравенств, можно заменить при $a > 1$ равносильным ему алгебраическим неравенством первой степени $x > a^b$, а при $0 < a < 1$ равносильным ему двойным неравенством $0 < x < a^b$, для которых легко выписываются множества всех их решений.

Аналогично можно поступить и с неравенством $\log_a x < b$.

Преобразования, связанные с освобождением от знака абсолютной величины. Пусть дано неравенство

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_m(x)| - |f_{m+1}(x)| - \ldots$$
$$\ldots - |f_n(x)| > g(x), \qquad (35)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, $g(x)$ — многочлены, целые относительно x.

Для решения таких неравенств обычно употребляется *метод интервалов*. Описание этого метода для неравенств практически полностью повторяет описание этого метода для уравнений (см. § 4 гл. VII), а именно, пусть дано неравенство (35). Сначала *решается совокупность уравнений*

$$f_1(x) = 0, \ f_2(x) = 0, \ \dots, \ f_m(x) = 0, \ \dots, \ f_n(x) = 0. \quad (36)$$

Затем *на числовой прямой отмечаются все корни* этой совокупности уравнений.

Таким образом, *вся числовая прямая разбивается* на некоторое *число промежутков*, затем *на каждом* таком *промежутке неравенство заменяется на другое неравенство*, не содержащее знаков абсолютной величины и *равносильное исходному неравенству на этом промежутке.* На каждом таком промежутке отыскивают все решения того неравенства, которое на этом промежутке получается, а затем отбираются из них те, которые попадают в данный промежуток. Они и есть множество всех решений исходного неравенства на рассматриваемом промежутке. Наконец, для того чтобы выписать множество всех решений исходного неравенства, собирают вместе (объединяют) все его решения, найденные на всех промежутках.

Продемонстрируем применение метода интервалов на примере решения неравенства

$$x^2 + |x + 1| - 3 > 0. \quad (37)$$

В этом случае совокупность уравнений (36) состоит из одного уравнения

$$x + 1 = 0,$$

имеющего единственный корень $x_1 = -1$. Значит, числовая прямая разбивается на два промежутка: $(-\infty; -1)$ и $[-1; +\infty)$. Рассмотрим решение неравенства (37) на каждом из этих промежутков.

1. На промежутке $(-\infty, -1)$ по определению абсолютной величины

$$|x + 1| = -(x + 1).$$

Поэтому на этом промежутке неравенство (37) равносильно неравенству

$$x^2 - (x + 1) - 3 > 0.$$

Решая это квадратное неравенство, получаем, что множество всех его решений есть множество $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$. Из этого множества в рассматриваемом промежутке содержится лишь промежуток $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (37) на промежутке $(-\infty; -1)$ есть промежуток $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$.

2. На промежутке $[-1; +\infty)$ по определению абсолютной величины

$$|x+1| = (x+1).$$

Поэтому на этом промежутке неравенство (37) равносильно неравенству

$$x^2 + (x+1) - 3 > 0.$$

Решая это квадратное неравенство, получаем, что множество всех его решений есть множество $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. Из этого множества в рассматриваемом промежутке содержится лишь промежуток $(1; +\infty)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (37) на промежутке $[-1; +\infty)$ есть промежуток $(1; +\infty)$.

Объединяя множества решений, найденные на рассмотренный промежутках, получаем, что множество всех решений неравенства (37) есть множество $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

В заключение отметим, что выше рассмотрены не все преобразования неравенств, а лишь наиболее часто используемые. Кроме того, отметим, что *при решении неравенств часто приходится применять не одно, а несколько преобразований.*

Проиллюстрируем это на двух следующих примерах.

Пусть дано неравенство

$$4^{\sqrt{9-x^2}} - 6 \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}} + 8 < 0. \qquad (38)$$

Это неравенство является квадратным относительно $2^{\sqrt{9-x^2}}$. Решая неравенство

$$t^2 - 6t + 8 < 0,$$

получаем, что множество всех его решений есть интервал (2; 4). Следовательно, неравенство (38) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{9-x^2}} < 4, \\ 2^{\sqrt{9-x^2}} > 2. \end{cases} \qquad (39)$$

Решим сначала первое неравенство этой системы

$$2^{\sqrt{9-x^2}} < 4. \qquad (40)$$

ОДЗ этого неравенства есть множество $M = [-3;\ 3]$. На этом множестве обе части неравенства (40) положительны, поэтому логарифмируя неравенство (40) по основанию 2, получим неравенство

$$\sqrt{9-x^2} < 2, \qquad (41)$$

равносильное неравенству (40) на множестве M. На множестве M обе части неравенства (41) неотрицательны, поэтому возводя в квадрат это неравенство, получим неравенство

$$9 - x^2 < 4,$$

равносильное неравенству (41) на множестве M. Решая это простейшее неравенство, получаем, что множество его решений есть множество $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5},\ +\infty)$. Из этого множества в M содержится лишь множество $[-3;\ -\sqrt{5}) \cup$ $\cup\ (\sqrt{5};\ 3]$. Значит, множество всех решений неравенства (40) есть множество $[-3;\ -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5};\ 3]$.

Решая аналогично второе неравенство системы (39), получим, что множество всех его решений есть интервал

$(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$. Следовательно, множество всех решений системы (39) есть множество $(-2\sqrt{2};\ -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5};\ 2\sqrt{2})$.

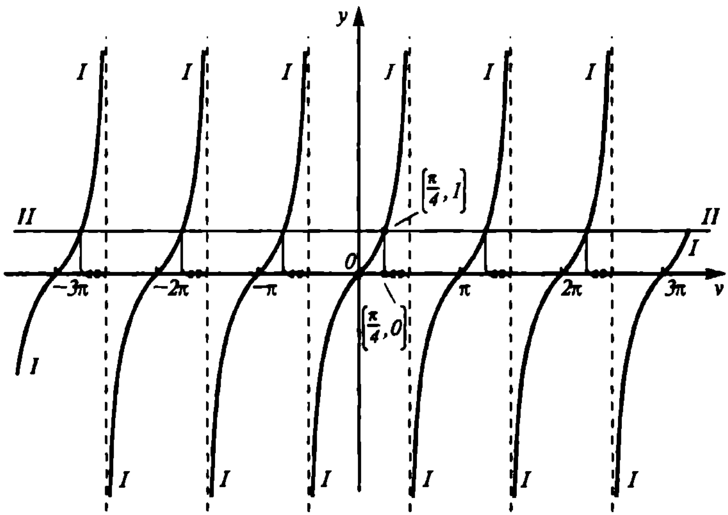
Пусть дано неравенство

$$\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2} > 1. \qquad (42)$$

Функция $y = \operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}$ есть суперпозиция двух функций: простейшей элементарной функции $y = \operatorname{tg} v$ и функции $v = \frac{1}{1+x^2}$.

Решим сначала простейшее неравенство

$$\operatorname{tg} v > 1.$$



I. y=tg v;
II. y=1.

Рис. 184.

Множество всех решений этого неравенства (рис. 184) есть серия интервалов $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Значит, исходное неравенство (42) равносильно бесконечной совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ \dfrac{1}{1+x^2} > \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \tag{43}$$

где k — любое целое число. (Проведенное преобразование неравенства есть пример преобразования, не рассмотренного ранее вида).

Рассмотрим все системы в бесконечной совокупности (43).

При любом положительном k ни одна из этих систем не имеет решения, так как $\frac{\pi}{4} + \pi k > 1$ при любом натуральном k, а $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ при любом действительном x и поэтому второе неравенство в системе (43) не имеет решений.

При отрицательном k ни одна из систем также не имеет решения, так как $\frac{1}{1+x^2} > 0$ при любом действительном x, а $\frac{\pi}{2} + \pi k < 0$ при любом отрицательном целом k и поэтому первое неравенство в системе (43) не имеет решений.

При $k = 0$ имеет систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{1+x^2} > \dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \tag{44}$$

Поскольку $\frac{1}{1+x^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ при любом действительном x, множеством всех решений первого уравнения этой системы является вся числовая прямая. Для всех действительных x функция $y = 1 + x^2$ положительна, поэтому, освобождаясь от знаменателя, получим неравенство

$$1 + x^2 < \frac{4}{\pi},$$

равносильное второму неравенству системы (44). Множество всех решений этого простейшего неравенства есть интервал $\left(-\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}, \sqrt{\frac{4}{\pi}-1}\right)$. Значит, множество всех решений системы (44) есть этот интервал.

Подводя итог, получаем, что множество всех решений исходного неравенства (42) есть интервал $\left(-\frac{\sqrt{(4-\pi)\pi}}{\pi}, \frac{\sqrt{(4-\pi)\pi}}{\pi}\right)$.

УПРАЖНЕНИЯ

Является ли число (— 4) решением следующего неравенства (1 — 48):

1. $\frac{x(2x+1)(x-5)}{(x+3)(3x-4)}<0$; **2.** $\frac{(x-1)^2(-x-5)(3+x)^3}{(x+2)\left(-x^2+x-3\right)}>0$;

3. $\frac{x^4+3x^3+3x^2+3x+2}{x^3+6x^2+5x-12}\le 0$; **4.** $\frac{\left(5x^2-8x-13\right)^3(x-2)^2(1-x)}{\left(-3x^2+5x-2x\right)(x+3)^3(x-2)^4}\ge 0$;

5. $\frac{x-2}{3x-1}\le\frac{x+2}{2x+1}$; **6.** $\frac{(x-2)(x-7)}{(x-6)(x-5)}\ge 1$;

7. $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}>\frac{8}{x^2-1}$; **8.** $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}<\frac{3}{x+1}$;

9. $|9-2x|\ge|4-3x|+|x-5|$; **10.** $|x+1|+|2-x|-|x+3|\ge 4$;

11. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|<1$; **12.** $\frac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|}>1$;

13. $\sqrt{x+5}>x+1$; **14.** $x-6<\sqrt{x^2-7x+8}$;

15. $\sqrt{6-5x-x^2}\ge x+2$; **16.** $\sqrt{7-x}-\sqrt{-3-2x}\le\sqrt{2-x}$;

17. $\sqrt{25-x^2}>3-\sqrt{x^2+7x}$; **18.** $\sqrt{-1-x}-\sqrt{\frac{-1}{x+1}}<\sqrt{2-x}$;

19. $\frac{(6+x)\sqrt{x+6}+(7-x)\sqrt{7-x}}{(6+x)\sqrt{7-x}+(7-x)\sqrt{x+6}}\le\frac{7}{6}$;

20. $\sqrt[3]{5(x+8)+7\sqrt{2(8+x)}}+\sqrt[3]{5(x+8)-7\sqrt{2(x+8)}}\ge 4$;

21. $4^{x-1}\ge 17\cdot 2^{x-3}-1$; **22.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(x^6-2x^3+1\right)^{1/2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$;

23. $|x+1|^{x^2-5x/2+3/2}>1$; **24.** $\frac{1}{5-\left(\frac{1}{3}\right)^x}+\frac{2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x}\le 1$;

25. $3\cdot 4^{-x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{2-x}>6\cdot 4^{1-x}-\frac{1}{2}9^{1-x}$;

26. $\left(4^x-1\right)^2+2^{x+1}\left(4^x-1\right)<8\cdot 4^x$;

27. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3/x}-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1/2}$;

28. $x^2\cdot 2^{\sqrt{-x}}-x+2\ge 2^{1+\sqrt{-x}}+x^2-x\cdot 2^{\sqrt{-x}}$;

29. $\lg 2+\lg\left(4^{-x-1}+9\right)\ge 1+\lg\left(2^{-x-1}+1\right)$;

30. $\lg\left(x^2-1\right)\le\lg(x-1)^2+\lg|x-2|$;

31. $(-x)^{\lg^2(-x)+3\lg(-x)+3}>-\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}+1}}$;

32. $\log_{1/3}\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>\log_3\log_{1/5}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

33. $\log_2\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<\log_{1/2}\log_{1/3}\dfrac{x+1}{x-1}$;

34. $\dfrac{\log_4^2(-x)-4\log_4(-x)+3}{\log_4^2(-x)+\log_4(-x)}\ge 0$;

35. $\dfrac{2\log_{-x}3}{1+\log_{-x}3}\le 1-\dfrac{1}{2-\log_3(-x)}$;

36. $\lg\sqrt{(x+1)^2}<\sqrt{2\lg(-x-1)}$;

37. $3\sin 2x-1>\sin x+\cos x$; **38.** $|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|<4\sqrt{3}$;

39. $4\left(x^3-2x+1\right)(\sin x+2\cos x)\ge 9\left|x^3-2x+1\right|$;

40. $\sqrt{2-\sqrt{3}\cos x+\sin x}\ge 1$; **41.** $\dfrac{2+\sqrt{2}-4\cos 2x}{\sin x-\cos 2x}\ge 2$;

42. $4\sin x\sin 2x\sin 3x<\sin 4x$;

43. $\sqrt{3+2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}^{-2}x}\ge\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{tg}x$;

44. $\cos x\cdot\sin(\sin x)+\sin x\cdot\cos(\sin x)>0$;

45. $\arccos\dfrac{4}{1-x}<\dfrac{\pi}{2}$; **46.** $\arcsin\dfrac{3}{x^2+3x}>\dfrac{\pi}{4}$;

47. $\operatorname{arctg}^2x-4\operatorname{arctg}x+3\ge 0$; **48.** $5\operatorname{arcctg}x-\operatorname{arcctg}^2x-4\le 0$?

Является ли число $\frac{3}{2}$ решением следующей системы неравенств (49 — 59):

49. $\begin{cases}6x^2-29x+30\le 0,\\ 5x+2>3x^2;\end{cases}$ **50.** $\begin{cases}\dfrac{x}{3}-3\left(5x-\dfrac{3(x-5)}{4}\right)<x+3\dfrac{19}{24},\\ \big||x|-2\big|\le 1;\end{cases}$

51. $\begin{cases}5x\le 4+x^2,\\ \dfrac{3x+1}{1-2x}<-2;\end{cases}$ **52.** $\begin{cases}x+1>\sqrt{4x-3},\\ \sqrt{4+x}-4<\sqrt{x+6};\end{cases}$

53. $\begin{cases}3\sqrt{x+6-x^2}>2-4x,\\ \sqrt{16-x^2}>2-\sqrt{7x-x^2};\end{cases}$

54. $\begin{cases} x^2 - 2x - 35 < 0, \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{16x - 3x^2} \geq 0, \\ \sqrt{x + \sqrt{6x-9}} + \sqrt{x - \sqrt{6x-9}} \leq \sqrt{6}; \end{cases}$

55. $\begin{cases} |x^3 - 1| \leq |1 - x|, \\ \dfrac{1}{3^{x+1} - 1} \geq \dfrac{1}{1 - 3^x}, \\ \log_2\left(9 - 2^x\right) > 3 - x; \end{cases}$

56. $\begin{cases} \dfrac{1}{2^x + 3} > \dfrac{1}{2^{x+3} + 1}, \\ |x + 1| - x \geq 2\,|x - 1|, \\ \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log_{4x} 2; \end{cases}$ 57. $\begin{cases} |x^2 - 3x + 2| - 4 \leq |x| - x^2, \\ 9^x \leq 3^x + 2, \\ \log_{25x} x^3 + \log_{x\sqrt{5}} \sqrt{5} < 2; \end{cases}$

58. $\begin{cases} x + 4 \geq \sqrt{x + 16}, \\ x^2 + |x - 5| \leq |x^2 - 4x + 3|, \\ \log_{3x} \dfrac{3}{x} + \log_3^2 x < 1; \end{cases}$

59. $\begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 3} + 4 > \dfrac{16}{\log_3 x - 2}, \\ \sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} \geq \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3}, \\ 1 < \log_x \dfrac{4x - 2}{3}, \\ \dfrac{9}{|x - 5| - 3} \geq |x - 2|? \end{cases}$

Равносильны ли следующие два неравенства (60 — 104):

60. $\dfrac{x(x+2)}{x+2} < 0$ и $x < 0$; 61. $\dfrac{x(x+3)}{(x+3)} > 0$ и $x > 0$;

62. $\dfrac{x^2}{x} < 0$ и $x < 0$; 63. $\dfrac{x^2}{x} \leq 0$ и $x \leq 0$;

64. $x + 2 > 4$ и $x + 2 + \dfrac{1}{x+4} > 4 + \dfrac{1}{x+4}$;

65. $x + 2 > 4$ и $x + 2 + \dfrac{1}{x-10} > 4 + \dfrac{1}{x-10}$;

66. $3x - 1 < 2x + 3$ и $(3x - 1)(x + 1) < (2x + 3)(x + 1)$;

67. $3x - 1 < 2x + 3$ и $(3x - 1)(x + 1) > (2x + 3)(x + 1)$;

68. $x^2 + 1 > x$ и $\left(x^2 + 1\right)(|x| + 2) > x(|x| + 2)$;

69. $x^2 + 1 > x$ и $\left(x^2 + 1\right)(\sqrt{x} + 1) > x(\sqrt{x} + 2)$;

70. $\dfrac{x-4}{x-3} > 2$ и $\dfrac{x - 4 - 2(x - 3)}{x - 3} > 0$;

71. $\dfrac{x+4}{x+3} > 3$ и $x + 4 > 3(x + 3)$;

72. $\dfrac{x+4}{x+3} > 3$ и $x + 4 < 3(x + 3)$;

73. $\frac{x+4}{x-1} > 0$ и $(x+4)(x-1) > 0$;

74. $\frac{x+4}{x-1} \ge 0$ и $(x+4)(x-1) \ge 0$;

75. $\frac{(x-2)(x+3)^2}{x+5} < 0$ и $\frac{x-2}{x+5} < 0$;

76. $\frac{(x-2)(x-3)^2}{(x+5)} < 0$ и $\frac{x-2}{x+5} < 0$;

77. $\frac{\sqrt{x^2+5}\,(x+1)}{x+2} > 0$ и $\frac{x+1}{x+2} > 0$;

78. $\frac{\sqrt{9-x^2}\,(x+1)}{x+2} > 0$ и $\frac{x+1}{x+2} > 0$;

79. $\frac{(x+5)\left(3x^2+x+2\right)}{x+3} > 0$ и $\frac{x+5}{x+3} > 0$;

80. $\frac{(x+5)\left(2x+4-x^2\right)}{x+3} > 0$ и $\frac{x+5}{x+3} > 0$;

81. $\sqrt{x^2-14}\left(x^2+x-2\right) \ge 0$ и $x^2+x-2 \ge 0$;

82. $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(2-x)}{x+3} < 0$ и $\frac{2-x}{x+3} < 0$;

83. $\frac{(x+8)^2(2-x)}{x+3} < 0$ и $\frac{2-x}{x+3} < 0$;

84. $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(2-x)}{x+3} \le 0$ и $\frac{2-x}{x+3} \le 0$;

85. $\frac{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+4}}{x+1} > 0$ и $\frac{\sqrt{(x-1)(x+4)}}{x+1} > 0$;

86. $\frac{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+4}}{x+1} \ge 0$ и $\frac{\sqrt{(x-1)(x+4)}}{x+1} \ge 0$;

87. $\sqrt{x-12}\,\sqrt{4-x} > 0$ и $\sqrt{(x-12)(4-x)} > 0$;

88. $\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-3} > 0$ и $\sqrt{(x+2)(x-3)} > 0$;

89. $\sqrt{100-x^2}\,\sqrt{\sin x} \ge 0$ и $\sqrt{\left(100-x^2\right)\sin x} \ge 0$;

90. $\frac{1}{3x^2} > \frac{1}{(x+2)^2}$ и $(x+2)^2 > 3x^2$;

91. $\sqrt{x} < 3$ и $x < 9$;

92. $\sqrt{x^2+1} < 3$ и $x^2+1 < 9$;

93. $(2+\sin x)^{\frac{x-1}{x+6}} < 1$ и $\frac{x-1}{x+6} < 0$;

94. $(2+\sin x)^{\frac{x-1}{x+6}} \le 1$ и $\frac{x-1}{x+6} \le 0$;

95. $(2+|\sin x|)^{\frac{x-1}{x+6}} < 1$ и $\frac{x-1}{x+6} < 0$;

96. $\left(\frac{4}{4+x^2}\right)^{x^2-9} \ge 1$ и $x^2 - 9 \le 0$;

97. $\left(\frac{4}{4+|x-4|}\right)^{x^2-9} \ge 1$ и $x^2 - 9 \le 0$;

98. $\left(1+x^2\right)^{\frac{x+4}{x-1}} < 1$ и $\frac{x+4}{x-1} < 0$;

99. $\left(1+x^2\right)^{\frac{x+4}{x+2}} < 1$ и $\frac{x+4}{x+2} < 0$;

100. $\log_2 x^2 > 0$ и $2\log_2 x > 0$;

101. $\log_2 x^2 > 0$ и $2\log_2(-x) > 0$;

102. $\log_2 x^2 > 0$ и $2\log_2 |x| > 0$;

103. $\frac{\log_2(x+7)+\log_2(x-8)}{\sqrt{x+1}} > 0$ и $\frac{\log_2(x+7)(x-8)}{\sqrt{x+1}} > 0$;

104. $\frac{\log_2(x+7)+\log_2(x-8)}{x+1} > 0$ и $\frac{\log_2(x+7)(x-8)}{x+1} > 0$?

Являются ли равносильными неравенство и система неравенств (105 — 149):

105. $\frac{x(x+2)}{x+2} < 0$ и $\begin{cases} x \ne -2, \\ x < 0; \end{cases}$

106. $2x + \frac{1}{x-6} > x + 4 + \frac{1}{x-6}$ и $\begin{cases} x \ne 6, \\ 2x > x+4; \end{cases}$

107. $(3x-1)(x+1) < (2x+3)(x+1)$ и $\begin{cases} x+1 > 0, \\ (3x-1) < 2x+3; \end{cases}$

108. $(3x-1)(x+1) < (2x+3)(x+1)$ и $\begin{cases} x+1 < 0, \\ (3x-1) > (2x+3); \end{cases}$

109. $\left(x^2+1\right)(\sqrt{x}+3) > x(\sqrt{x}+3)$ и $\begin{cases} x \ge 0, \\ x^2+1 > x; \end{cases}$

110. $\frac{x+4}{x+3} > 3$ и $\begin{cases} x+3 > 0, \\ (x+4) > 3(x+3); \end{cases}$

111. $\frac{x+4}{x+3} > 3$ и $\begin{cases} x+3 < 0, \\ x+4 < 3(x+3); \end{cases}$

112. $\frac{x+2}{x-2} \le 0$ и $\begin{cases} x \ne 2, \\ (x+2)(x-2) \le 0; \end{cases}$

113. $\frac{(x-2)(x+2)^2}{x+5}<0$ и $\begin{cases} x\neq -2, \\ \frac{x-2}{x+5}<0; \end{cases}$

114. $\frac{\sqrt{9-x^2}\,(x+1)}{x+2}>0$ и $\begin{cases} 9-x^2>0, \\ \frac{x+1}{x+2}>0; \end{cases}$

115. $\frac{|x+14|\,(x-6)}{x+5}>0$ и $\begin{cases} x+14\neq 0, \\ \frac{x-6}{x+5}>0; \end{cases}$

116. $\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-3}>0$ и $\begin{cases} x>3, \\ \sqrt{(x+2)(x-3)}>0; \end{cases}$

117. $\frac{1}{x-2}>\frac{1}{2x^2}$ и $\begin{cases} x-2>0, \\ 2x^2>x-2; \end{cases}$

118. $\frac{1}{x-2}>\frac{1}{2x^2}$ и $\begin{cases} x\neq 0, \\ x-2<0, \\ 2x^2<x-2; \end{cases}$

119. $\frac{1}{3x^2}>\frac{1}{(x+2)^2}$ и $\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq -2, \\ (x+2)^2>3x^2; \end{cases}$

120. $\sqrt{x}<3$ и $\begin{cases} x\geq 0, \\ x<9; \end{cases}$

121. $\frac{|x+5|\,(x-7)}{x+1}>0$ и $\begin{cases} x+5\neq 0, \\ \frac{x-7}{x+1}>0; \end{cases}$

122. $\frac{\sqrt{x+1}\,\sqrt{6-x}}{x-1}>0$ и $\begin{cases} x+1>0, \\ 6-x>0, \\ x-1>0; \end{cases}$

123. $\frac{\sqrt{x+2}\,\sqrt{5-x}}{(x-2)^2}>0$ и $\begin{cases} x+2>0, \\ 5-x<0, \\ x-2\neq 0; \end{cases}$

124. $\frac{\sqrt{25-x^2}\,(x+4)^2}{\sqrt{x^2-1}\,(x-2)^2}\geq 0$ и $\begin{cases} 25-x^2\geq 0, \\ x^2-1>0, \\ x-2\neq 0; \end{cases}$

125. $\left(x^2+1\right)^{\frac{x+5}{x-4}}<1$ и $\begin{cases} \frac{x+5}{x-4}<0, \\ x\neq 0; \end{cases}$

126. $\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{x-2}{x+3}}>1$ и $\begin{cases} \frac{x-2}{x+3}>0, \\ \cos x\neq 0; \end{cases}$

127. $\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{x-2}{x+3}}\geq 1$ и $\begin{cases} \cos x\neq 0, \\ \frac{x-2}{x+3}\geq 0; \end{cases}$

128. $(2+\sin x)^{\frac{x-7}{x+10}} \le 1$ и $\begin{cases} \sin x \ne -1, \\ \dfrac{x-7}{x+10} \le 0; \end{cases}$

129. $\left(\dfrac{3}{3+x^2}\right)^{x^2-9} \ge 1$ и $\begin{cases} x \ne 0, \\ x^2-9 \le 0; \end{cases}$

130. $\left(\dfrac{3}{3+|x+2|}\right)^{x^2-1} \le 1$ и $\begin{cases} x^2-1 \ge 0, \\ x+2 \ne 0; \end{cases}$

131. $\left(\dfrac{1}{1+|x|}\right)^{\frac{x+4}{x-1}} > 1$ и $\begin{cases} x \ne 0, \\ \dfrac{x+4}{x-1} < 0; \end{cases}$

132. $\left(\dfrac{1}{1+\sin^2 x}\right)^{\frac{x+4}{x+3}} < 1$ и $\begin{cases} \sin x \ne 0, \\ \dfrac{x+4}{x+3} > 0; \end{cases}$

133. $x^{x^2-4x-45} > 1$ и $\begin{cases} x > 1, \\ x^2-4x-45 > 0; \end{cases}$

134. $x^{x^2-4x-45} > 1$ и $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2-4x-45 < 0; \end{cases}$

135. $x^{x^2-4x-45} \ge 1$ и $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2-4x-45 \le 0; \end{cases}$

136. $x^{x^2-4x-45} \le 1$ и $\begin{cases} x > 1, \\ x^2-4x-45 \ge 0; \end{cases}$

137. $\log_2 x^2 > 0$ и $\begin{cases} x > 0, \\ 2\log_2 x > 0; \end{cases}$

138. $\log_2 x^2 > 0$ и $\begin{cases} x < 0, \\ 2\log_2 (-x) > 0; \end{cases}$

139. $\log_{(4+\sqrt{x})} (x+7)(x+8) > 0$ и $\begin{cases} x \ge 0, \\ (x+7)(x+8) > 1; \end{cases}$

140. $\log_{\frac{1}{2+\sqrt{x}}} (x+1)(x-7) < 0$ и $\begin{cases} x \ge 0, \\ (x+1)(x-7) > 1; \end{cases}$

141. $\log_{x^2-4}\left(x^2+6x+8\right) > 0$ и $\begin{cases} x^2-4 > 1, \\ x^2+6x+8 > 1; \end{cases}$

142. $\log_{x^2-4}\left(x^2+6x+8\right) > 0$ и $\begin{cases} 0 < x^2-4 < 1, \\ 0 < x^2+6x+8 < 1; \end{cases}$

143. $\log_2 (x+7) + \log_2 (x-8) > 0$ и $\begin{cases} x-8 > 0, \\ x+7 > 0, \\ \log_2 (x+7)(x-8) > 0; \end{cases}$

144. $\log_{x^2} (x+1)^2 > 1$ и $\begin{cases} x > 0, \\ x \ne 1, \\ \log_x (x+1) > 1; \end{cases}$

145. $\log_{x^2}(x+1)^2 > 1$ и $\begin{cases} -1 < x < 0, \\ \log_{-x}(x+1) > 1; \end{cases}$

146. $\log_{x^2}(x+1)^2 > 1$ и $\begin{cases} x < -1, \\ \log_{-x}(-x-1) > 1; \end{cases}$

147. $\log_{x^2}(x+1)^2 > 1$ и $\begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ (x+1)^2 < x^2; \end{cases}$

148. $\log_{x^2}(x+1)^2 > 1$ и $\begin{cases} x^2 > 1, \\ (x+1)^2 > x^2; \end{cases}$

149. $\log_{\sqrt{7}}|x+1| > \log_{\sqrt{7}}(x+1)^2$ и $\begin{cases} x+1 \neq 0, \\ |x+1| > (x+1)^2? \end{cases}$

Решить следующее неравенство (**150 — 298**):

150. $x^2 + 2x + \cos 5 < 0$. **151.** $x^2 + 2x + \sin\frac{7}{2} \leq 0$.

152. $\operatorname{tg}\frac{5}{2} + 6x - x^2 > 0$. **153.** $\cos\frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0$.

154. $\dfrac{\sqrt{x+7}\,(x+5)(x-1)^2}{\left(3-x^2\right)(x-6)(x-5)} \geq 0$. **155.** $\dfrac{(x+2)(x+1)^2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)^2\sqrt{6-x}} \leq 0$.

156. $\dfrac{\sqrt{100-x^2}\,(x+4)(x+3)^2}{x^2(x-2)} < 0$. **157.** $\dfrac{(x+5)\left(x^2-1\right)}{x(x+3)^2\sqrt{49-x^2}} > 0$.

158. $\dfrac{x-2}{x+2} \geq \dfrac{2x-3}{4x-1}$. **159.** $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$.

160. $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{7}{x+2} \leq \dfrac{6}{x-1}$. **161.** $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1} < 3$.

162. $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} > \dfrac{8}{x^2-1}$. **163.** $\dfrac{1}{x-8} + \dfrac{1}{x-6} + \dfrac{1}{x+8} + \dfrac{1}{x+6} \geq 0$.

164. $\dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{3x-1}{x} + 2 < 4 + \dfrac{x-7}{x-1}$.

165. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{4}{x-3} - \dfrac{1}{x-4} \leq \dfrac{1}{30}$.

166. $4|x+2| < 2x+10$. **167.** $3|x-1| \leq x+3$.

168. $2|x+1| > x+4$. **169.** $3|x+1| \geq x+5$.

170. $|x-2| \leq 2x^2 - 9x + 9$. **171.** $3x^2 - |x-3| > 9x - 2$.

172. $x^2 + 4 \geq |3x+2| - 7x$. **173.** $x^2 - |5x-3| - x < 2$.

174. $|x+1| - |3x+7| > 0$. **175.** $|13-2x| \geq |4x-9|$.

176. $|x| + |x-1| \leq 1$. **177.** $|x+2| - 3 < |x-1|$.

178. $|x^2 + 2x - 3| \geq 3 - 2x - x^2$.

179. $|4 + 3x - x^2| \leq x^2 - 3x - 4$.

180. $\left|\dfrac{x^2-5x-4}{x^2-4}\right| < 1$. **181.** $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| > 1$.

182. $\dfrac{4}{|x+1|-2} \geq |x-1|$. **183.** $\dfrac{7}{|x-1|-3} > |x+2|$.

184. $\dfrac{9}{|x-1|-3} < |x-2|$. **185.** $\dfrac{3}{|x+3|-1} < |x+2|$.

186. $|x+2|+|x+1|+|x-1| > 10$.

187. $|5-x| < |x-2| + |7-2x|$.

188. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 1$. **189.** $\dfrac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|} \leq 1$.

190. $2\sqrt{x+5} > x+2$. **191.** $x+1 < 4\sqrt{x+6}$.

192. $\sqrt{1+4x-x^2} \geq x-1$. **193.** $\sqrt{5-x^2} > x-1$.

194. $x+4 \leq \sqrt{6-4x-x^2}$. **195.** $x-2 < \sqrt{4+2x-x^2}$.

196. $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2$. **197.** $\sqrt{4x^2+16x+16} < 2x+10$.

198. $\sqrt{3x^2-6x+3} \leq x+3$. **199.** $\sqrt{2x^2+4x+2} \geq x+4$.

200. $\sqrt{9x^2+6x+1} < 2-x$. **201.** $\sqrt{x^2+2x-3} > x$.

202. $\sqrt{x^2-x-2} > x-1$. **203.** $\sqrt{2x+3} < 1-\sqrt{x+2}$.

204. $\sqrt{-x}-\sqrt{x+1} > \dfrac{1}{4}$. **205.** $\sqrt{x+1} < \sqrt{x+11}-\sqrt{2x-12}$.

206. $\sqrt{3-x} > \sqrt{8-x}-\sqrt{-1-2x}$. **207.** $\sqrt{2x+1} < \dfrac{2(x+1)}{2-x}$.

208. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1$. **209.** $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{35}{2}$.

210. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} < \dfrac{3}{5}$.

211. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} > \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

212. $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{2x-6} \geq \left(\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{6}\right)^{2x-6}$. **213.** $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)^{x+1/3} < \sqrt{2}$.

214. $5^{x^2+3x} \leq 125\cdot 5^x$. **215.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{1/x}} \leq \left(\dfrac{9}{4}\right)^{-4}$

216. $3^{\sqrt{x+1}} \geq 81\sqrt{\left(\dfrac{1}{9}\right)^{5-\frac{x}{4}}}$. **217.** $4\cdot 3^x - 9\cdot 2^x \geq 5\cdot 6^{x/2}$.

218. $(0{,}4)^{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|} < (0{,}4)^2$. **219.** $5^{\sqrt{7x}-\frac{\sqrt{7x}+1}{\sqrt{7x}-1}} \geq 125\sqrt{5}$.

220. $9^x - 2\cdot 3^x < 3$. **221.** $4^x - 2^{x+1} \geq 3$.

222. $9^x \leq 4+3^{x+1}$. **223.** $2^{2x+1} - 21\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 > 0$.

224. $35\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-3x} < 6+3^{4-3x}$. **225.** $\dfrac{1}{3^x+2} \geq \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.

226. $\frac{1}{2^x+3} > \frac{1}{2^{x+2}-1}$. **227.** $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$.

228. $3 \cdot 2^{1-x-2\sqrt{x}} > 4^{3\sqrt{2}} + 2^{x-\sqrt{x}}$.

229. $4^x < 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$.

230. $18 \cdot 3^{x+2\sqrt{x+1}} > 3^{3x-2\sqrt{x+1}} - 7 \cdot 3^{2x}$.

231. $\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$. **232.** $\frac{2^{x+3}+11}{2^{2x+1}+2^x-5} < 3$.

233. $\frac{4 - 7 \cdot 5^x}{5^{2x+1} - 12 \cdot 5^x + 4} \leq \frac{2}{3}$. **234.** $\frac{15 - 2 \cdot 13^{x+1}}{6 \cdot 13^{2x} - 13^{x+1} + 6} > 2$.

235. $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \geq 1$. **236.** $9^{\sqrt[3]{x}} - 2 \cdot 3^{\sqrt[3]{x}} \leq 3$.

237. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}+4} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$. **238.** $5^{|4x-6|} \geq 25^{3x-4}$.

239. $3^{|3x-4|} \leq 9^{2x-2}$. **240.** $25^{|1-2x|} < 5^{4-6x}$.

241. $9^{|3x-1|} > 3^{8x-2}$. **242.** $11^{3x-2} + 13^{3x-2} \geq 13^{3x-1} - 11^{3x-1}$.

243. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x$.

244. $|x|^{x^2-x-2} < 1$. **245.** $\left(x^2+x+1\right)^x \leq 1$.

246. $\log_{1/2}(2x+3) > 0$.

247. $\log_{0,3}\left(x^2+1\right) < \log_{0,3}(2x-5)$.

248. $\log_3\left(x^2-5x+4\right) > 0$. **249.** $\log_2\left(x^2+3x\right) < 2$.

250. $2\log_2(x-1) - \log_2(2x-4) > 1$.

251. $\log_2 x + \log_2(2x-1) < \log_2(2x+2)$.

252. $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 \geq 0$.

253. $\log_3(x+2)(x-3) \leq 4\log_9(2x+1) - \log_{\sqrt{7}} 7$.

254. $\log_4\left(2x^2+3x+1\right) \geq \log_2(2x+2)$.

255. $\log_3^2\left(x - \frac{2x^2}{3}\right) + \log_{1/3}\left(x - \frac{2x^2}{3}\right) < 2$.

256. $\log_8\left(x^2-4x+3\right) > \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

257. $\log_{1/2}\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leq \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$. **258.** $\log_4\frac{2x-1}{x+1} < \cos\frac{2\pi}{3}$.

259. $\log_{\sqrt{2}}\frac{x^2-4x+3}{4} < 2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$.

260. $\frac{|3-5x|-4}{\sqrt{\log_{1/3} 3|x|}} \leq 0$. **261.** $\frac{1}{\log_2 x} \leq \frac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}$.

262. $\frac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} < \frac{\log_2\sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}$.

263. $\sqrt{\log_4 \frac{2x^2-3x+3}{2}}+1>\log_2 \frac{2x^2-3x+3}{2}.$

264. $\log_x \frac{x+3}{x-1}>1.$ 265. $\log_{(2x+3)} x^2<1.$

266. $\log_{\left(4+2x-x^2\right)}\left(\frac{1-x}{2}\right)\le\frac{1}{2}.$ 267. $\log_{(x+1)}\left(x^2+x-6\right)^2\ge 4.$

268. $\log_{9x^2}\left(6+2x-x^2\right)\le\frac{1}{2}.$ 269. $\log_{(x-3)}\left(x^2-4x\right)^2<4.$

270. $\log_{(x-6)^2}\left(x^2-5x+9\right)>\frac{1}{2}.$

271. $\log_{(1-2x)}\left(6x^2-5x+1\right)-\log_{(1-3x)}\left(4x^2-4x+1\right)\ge 2.$

272. $\log_{(2x+1)}\left(5+8x-4x^2\right)+\log_{(5-2x)}\left(1+4x+4x^2\right)\le 4.$

273. $\log_{(5x-1)}\left(10x^2-7x+1\right)^4-\log_{2x-1}(25x-10x+1)>2.$

274. $\log_{3x+7}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)<4.$

275. $\frac{\log_2\left(x^2-2x-7\right)^5-\log_3\left(x^2-3x-7\right)^8}{3x^2-13x+4}\le 0.$

276. $\frac{\log_5\left(x^2-2x-14\right)^9-\log_2\left(x^2-2x-14\right)^4}{2x^2-9x-5}<0.$

277. $\frac{\log_7\left(x^2-4x-4\right)^8-\log_2\left(x^2-4x-4\right)^3}{3+x-2x^2}>0.$

278. $\frac{\log_5\left(x^2-4x+11\right)^2+\log_{11}\left(x^2-4x+11\right)^3}{2-5x-3x^2}\ge 0.$

279. $\frac{6\log_{32}^2 x-11\log_{32}x-2}{\log_{32}x-2}\ge 2+\log_{23}x.$

280. $\frac{2\lg x}{\lg x-1}\ge\frac{2}{\lg x+1}-\lg x.$

281. $\frac{\log_{\sqrt{5}}(x-4/7)+2}{\log_8|x-3/5|+1/3}\ge 0.$ 282. $\frac{\log_3(x+4/5)}{\log_7\left(x^2-2x+7/16\right)}<0.$

283. $\log_{1/3}-3\log_{(x-1)}1/3>2\left|\log_{1/3}(x-1)\right|.$

284. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/9}\left(x^2-3x+1\right)}<1.$ 285. $\log_{1/\sqrt{5}}\left(6^{x+1}-36^x\right)\ge -2.$

286. $3\cdot 9^{\log_4 x}-10\cdot 3^{\log_4 x}+\log_2 8\ge 0.$

287. $25^{\log_2 x}-6\cdot 5^{\log_2 x}+5^{\frac{1}{2}\log_2 4}\le 0.$

288. $4x+8\sqrt{2-x^2}>4+\left(x^2-x\right)\cdot 2^x+2^x+1\cdot x\sqrt{x-x^2}.$

289. $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}<2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6.$

290. $\frac{6}{2x+1} \geq \frac{1+\log_2(x+2)}{x}$. **291.** $\frac{6-3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x-1}$.

292. $\frac{2+\log_3 x}{x-1} \leq \frac{6}{2x-1}$. **293.** $\frac{2^{x+1}-7}{x-1} < \frac{10}{3-2x}$.

294. $(x-2)^2 |\cos x| \leq \cos x$. **295.** $\sin x + (x-4)^2 |\sin x| \geq 0$.

296. $\cos x < |\cos x| (x+3/2)^2$. **297.** $(x+1/2)^2 |\sin x| + \sin x > 0$.

298. $\sqrt{49-x^2}\,\sqrt{\log_2 \sin^2 x} \geq 0$.

Глава IX. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 1. Числовые последовательности

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что дана числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, или, короче, последовательность $\{x_n\}$. Чтобы задать числовую последовательность, надо задать закон (правило), по которому каждому натуральному числу ставится в соответствие некоторое число, т.е. каждая числовая последовательность может рассматриваться как функция, область определения которой — множество всех натуральных чисел.

Если функция $y = f(x)$ такова, что множество всех натуральных чисел содержится в области ее существования, тогда с помощью функции $y = f(x)$ с областью определения — множеством всех натуральных чисел — можно задать числовую последовательность $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ или $\{f(n)\}$. Например, множество всех натуральных чисел содержится в области существования каждой из следующих функций:

1. $y = x$; 2. $y = 2^{1-x}$; 3. $y = -2 - 3(x - 1)$;

4. $y = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{2}\right)$; 5. $y = \cos(2\pi x)$; 6. $y = \frac{x+1}{x}$;

7. $y = \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right)}{x}$; 8. $y = \frac{1}{x}$; 9. $y = 2^{x-1}$; 10. $y = x^2$.

На области определения — множестве всех натуральных чисел — эти функции задают соответственно следующие числовые последовательности:

1. $1, 2, \ldots, n, \ldots$;

2. $1, \frac{1}{2}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$;
3. $-2, -5, \ldots, -2-3(n-1), \ldots$;
4. $1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$;
5. $1, 1, \ldots, 1^n, \ldots$;
6. $2, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$;
7. $0, 1, \ldots, \frac{[1+(-1)^n]}{n}, \ldots$;
8. $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;
9. $1, 2, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$;
10. $1, 4, \ldots, n^2, \ldots$.

Наиболее удобно задавать числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ при помощи формулы для ее общего члена. Запишем, например, формулы общих членов последовательностей 1 — 10:

1. $a_n = n$;
2. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$;
3. $a_n = -2-3(n-1)$;
4. $a_n = (-1)^{n-1}$;
5. $a_n = 1^n$;
6. $a_n = \frac{n+1}{n}$;
7. $a_n = \frac{[1+(-1)^n]}{n}$;
8. $a_n = \frac{1}{n}$;
9. $a_n = 2^{n-1}$;
10. $a_n = n^2$.

Нередко последовательность задают рекуррентным соотношением, т.е. формулой, выражающей a_n через некоторые предшествующие ему члены последовательности, например:

11. Последовательность чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, ..., a_n, ... задается формулой $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ для $n > 2$ и условием $a_1 = a_2 = 1$.

Последовательности могут задаваться и другими способами, например:

12. Последовательность десятичных приближений числа π с недостатком 3; 3,1; 3,14; 3,141; ... .

13. Последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = \frac{1}{[\sqrt{n}]}$ ($[a]$ — целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a).

Поскольку всякая числовая последовательность может рассматриваться как функция натурального аргумента, то на числовые последовательности переносятся понятия монотонности и ограниченности функций.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей*, если для любых натуральных чисел n_1 и n_2 из условия $n_1 < n_2$ следует, что $a_{n_1} < a_{n_2}$. Возрастающими являются, например, последовательности 1, 9, 10, 12.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *неубывающей*, если для любых натуральных чисел n_1 и n_2 из условия $n_1 < n_2$ следует, что $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Неубывающими являются, например, последовательности 5 и 11.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *убывающей*, если для любых натуральных чисел n_1 и n_2 из условия $n_1 < n_2$ следует, что $a_{n_1} > a_{n_2}$. Убывающими являются, например, последовательности 2, 3, 6, 8.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *невозрастающей*, если для любых натуральных чисел n_1 и n_2 из условия $n_1 < n_2$ следует, что $a_{n_1} \geq a_{n_2}$. Например, последовательность 13 является невозрастающей, так как $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{1}{2}$ и т.д.

Числовая последовательность называется *монотонной*, если она убывающая, или возрастающая, или неубывающая, или невозрастающая. Монотонными являются все вышеприведенные последовательности, кроме последовательностей 4 и 7.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* сверху, если существует число B такое, что для любого натурального числа n справедливо неравенство $a_n \leq B$. Ограниченными сверху являются, например, последовательности 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12 и 13.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* снизу, если существует число A такое, что для любого натурального числа n справедливо неравенство $a_n \geq A$. Ограниченными снизу являются, например, последовательности 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и снизу и сверху. Ограниченными являются, например, последовательности 2, 4, 5, 6, 7, 8.

Из всевозможных последовательностей ниже подробно будут рассмотрены лишь последовательности, называемые арифметической и геометрической прогрессиями.

Арифметической прогрессией называется последовательность чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для данной последовательности числом, т.е. такая числовая последовательность $\{a_n\}$, что для любого натурального n $a_{n+1} = a_n + d$, где d — некоторое постоянное для данной последовательности число, называемое *разностью* прогрессии.

Например, последовательности

$$1,\ 2,\quad 3,\quad 4,\ \ldots, \tag{1}$$
$$3,\ 1,\ -1,\ -3,\ \ldots \tag{2}$$

— арифметические прогрессии. У арифметической прогрессии (1) разность $d = 1$, а у прогрессии (2) разность $d =$ $= -2$. Для любой арифметической прогрессии член, стоящий на n-м месте, всегда можно выразить через первый член и разность данной прогрессии

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \tag{3}$$

Эта формула называется *формулой общего члена арифметической прогрессии.*

Доказательство ее проводится методом математической индукции.

Для $n = 1$ формула (3) запишется в виде $a_1 = a_1 + 0 \cdot d$, т.е. оказывается справедливой. Предположим, что формула (3) справедлива для $n = k$, т.е. предположим, что k-й член арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_k = a_1 + (k - 1)d. \tag{4}$$

Докажем, что формула (3) справедлива для $n = k + 1$, т.е. докажем справедливость формулы

$$a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1]d. \tag{5}$$

Действительно, по определению арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$. Следовательно, используя формулу (4), можно написать, что $a_{k+1} = a_1 + (k - 1)d + d = a_1 + [(k + 1) - 1]d$, т.е. получить справедливость формулы (5). Тем самым доказана справедливость формулы (3) для любого натурального числа n.

Используя формулу (3) и свойства действий над числами, легко проверить справедливость следующего утверждения: для любой арифметической прогрессии $\{an\}$ при $m + n = k + l$ справедливо равенство

$$a_m + a_n = a_k + a_l. \tag{6}$$

Действительно,

$$a_m + a_n = a_1 + d(m - 1) + a_1 + d(n - 1) =$$
$$= 2a_1 + d(m + n - 2) = 2a_1 + d(k + l - 2) =$$
$$= a_1 + (k - 1)d + a_1 + (l - 1)d = a_k + a_l.$$

Число, равное сумме первых n членов арифметической прогрессии, обозначается S_n, т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n;$$

члены a_1 и a_n называются *крайними членами для суммы* S_n. Используя свойство (6) и свойства действий над числами, получим следующую формулу для S_n:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}. \tag{7}$$

Действительно,

$$2S_n = S_n + S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_1 + a_2 + ... + a_n) =$$
$$= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n)n,$$

т.е. *сумма первых n членов арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число суммируемых членов.*

Сумму S_n арифметической прогрессии $\{a_n\}$ можно выразить через первый член и разность данной прогрессии:

$$S_n = \frac{[2a_1 + d(n-1)]\,n}{2}.$$

Пример. Найти сумму двузначных натуральных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3.

Очевидно, что все двузначные натуральные числа образуют арифметическую прогрессию с первым числом $a_1 = 10$ и разностью $d = 1$, т.е. следующую последовательность чисел: 10, 11, 12, 13, ..., 97, 98, 99. Используя формулу (7), легко найти сумму $S^{(1)}$ всех этих чисел: $S^{(1)} = \frac{(10+99)\cdot 90}{2}$. Двузначные числа, делящиеся на 2, составляют арифметическую прогрессию 10, 12, 14, ..., 96, 98 с суммой $S^{(2)} = \frac{(10+98)\cdot 45}{2}$.

Аналогично числа, делящиеся на 3, образуют арифметическую прогрессию 12, 15, 18, ..., 96, 99 с суммой $S^{(3)} = \frac{(12+99)\cdot 30}{2}$.

Легко заметить, что последние две арифметические прогрессии имеют общие члены 12, 18, 24, ..., 96 — числа, делящиеся одновременно и на 2 и на 3, т.е. делящиеся на 6. Сумма S всех двузначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, находится следующим образом: $S = S^{(1)} - S^{(2)} - S^{(3)} + S^{(6)}$, где $S^{(6)}$ — сумма всех двузначных чисел, делящихся и на 2, и на 3, т.е. делящихся на 6. Сумму $S^{(6)}$ нужно прибавить потому, что при вычитании сумм $S^{(2)}$ и $S^{(3)}$ сумма чисел, делящихся на 6, вычитается дважды. Используя (3), найдем число членов арифметической прогрессии, составленной из таких чисел (очевидно, что разность этой прогрессии равна 6): $96 = 12 + (n-1)\,6$, откуда $n = 15$. Следовательно, $S^{(6)} = \frac{(12+96)\cdot 15}{2}$ и $S = \frac{15}{2}(109 \cdot 6 - 108 \cdot 3 - 111 \times \times 2 + 108) = 1620$, т.е. $S = 1620$.

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое, отличное от нуля, постоянное для данной последовательности число, т.е. такая числовая последовательность $\{a_n\}$, что для любого натурального n $a_{n+1} = a_n q$, где q — некоторое постоянное для данной последовательности и отличное от нуля число, называемое *знаменателем* прогрессии.

Например, последовательности

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots;$$
$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots;$$
$$\frac{1}{7},\ -\frac{1}{21},\ \frac{1}{63},\ -\frac{1}{189},\ \ldots$$

— геометрические прогрессии соответственно со знаменателями 2, (-1), $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Общий член геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{8}$$

Доказательство справедливости этой формулы для каждого натурального числа n проводится методом математической индукции. Для $n = 1$ формула (8) запишется в виде $a_1 = a_1 q^0$, т.е. оказывается справедливой. Предположим, что формула (8) справедлива для $n = k$, т.е. предположим, что справедлива формула

$$a_k = a_1 q^{k-1}. \tag{9}$$

Докажем, что формула (8) справедлива для $n = k + 1$, т.е. докажем справедливость формулы

$$a_{k+1} = a_1 q^{(k+1)-1}. \tag{10}$$

Действительно, по определению геометрической прогрессии $a_{k+1} = a_k q$. Следовательно, используя формулу (9), можно написать, что

$$a_{k+1} = (a_1 q^{k-1})q = a_1 q^{(k+1)-1},$$

т.е. получить справедливость формулы (10). Тем самым доказана справедливость формулы (8) для любого натурального числа n.

С помощью формулы общего члена найдем формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Если $q = 1$, то $S_n = na_1$.

Если $q \neq 1$, то рассмотрим выражение

$$S_n - S_n q = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} - a_1 q - a_1 q^2 - \ldots$$
$$\ldots - a_1 q^{n-1} - a_1 q^n = a_1 - a_1 q^n = a_1(1 - q^n).$$

Следовательно, $S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$. Так как $q \neq 1$, то

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

§ 2. Предел числовой последовательности

Пусть дана числовая последовательность $\{a_n\}$.

Число а называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется номер N такой, что для любого n > N справедливо неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Например, очевидно, что пределом последовательности $\{a_n\}$, где $a_n = c$, является число c.

Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{a_n\}$, записывают так: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$

Примеры.

1. Доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, если $a_n = q^n$ и $0 < q < 1$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$.

а) Если $\varepsilon < 1$, то положим $N = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$. Ясно, что $N > \log_q \varepsilon$ и для любого $n > N$ $|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N < |q|^{\log_{|q|} \varepsilon} = \varepsilon$.

б) Если $\varepsilon \geq 1$, то положим $N = 1$. Легко видеть, что для любого $n > 1$ $|q^n - 0| = |q|^n < 1 \leq \varepsilon$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $|q^n - 0| < \varepsilon$, т.е. доказано, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

2. Доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$, если $a_n = \frac{n+1}{n}$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Положим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, тогда $N > 1$ и для любого $n > N$ $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

3. Доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, если $a_n = \frac{1}{n}$.

Возьмем произвольное число $\frac{1}{n} > 0$. Положим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда для любого $n > N$ $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Будем говорить, что *последовательность* $\{a_n\}$ *имеет пределом* $(+\infty)$, и писать $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ или $a_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, если для любого сколь угодно большого положительного числа A найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $a_n > A$.

Примеры.

1. Доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, если $a_n = n^2$.

Для любого положительного числа A положим $N = ([\sqrt{A+1}] + 1)$. Тогда для любого $n > N$

$$a_n = n^2 > N^2 = ([\sqrt{A+1}] + 1)^2 > (\sqrt{A+1})^2 = A + 1 > A,$$

т.е. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

2. Доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, если $a_n = n$.

Для любого положительного числа A положим $N = ([A + 1] + 1)$.

Тогда для любого $n > N$ $a_n = n > N = [A + 1] + 1 > A + 1 > A$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

3. Доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, если $a_n = 2^{n-1}$.

Для любого положительного числа A положим $N = [\log_2 (A + 1)] + 2$. Тогда для любого $n > N$

$$a_n = 2^{n-1} > 2^{N-1} = 2^{[\log_2 (A+1)]+1} > 2^{\log_2 (A+1)} = A + 1 > A,$$

т.е. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

Будем говорить, что *последовательность* $\{a_n\}$ *имеет своим пределом* $(-\infty)$, и писать $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ или $a_n \to -\infty$, при $n \to \infty$, если для любого отрицательного числа B такого, что $|B|$ — сколь угодно большое число, найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $a_n < B$.

Примеры.

1. Доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$, если $a_n = -2 - 3(n - 1)$.

Для любого отрицательного B положим $N = \left[\frac{|B - 1|}{3}\right] + 1$. Тогда для любого $n > N$

$$a_n = -2 - 3(n - 1) < -2 - 3(N - 1) =$$
$$= -2 - 3\left[\frac{|B - 1|}{3}\right] < -2 - 3\left(\frac{|B - 1|}{3} - 1\right) =$$
$$= -2 - 3\left(\frac{1 - B}{3} - 1\right) = -2 - (1 - B - 3) = B,$$

что и требовалось доказать.

2. Доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$, если $a_n = -2^n$.

Для любого отрицательного B положим $N = [\log_2 |B| + 1]$. Тогда для любого $n > N$

$$a_n = -2^n < -2^N = -2^{[\log_2 |B| + 1]} < -2^{\log_2 |B|} = -|B| = B,$$

что и требовалось доказать.

3. Доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$, если $a_n = \log_{\frac{1}{2}} n$.

Для любого отрицательного B положим $N = [2^{|B|} + 1]$. Тогда для любого $n > N$

$$a_n = \log_{\frac{1}{2}} n < \log_{\frac{1}{2}} N = \log_{\frac{1}{2}} [2^{|B|} + 1] < \log_{\frac{1}{2}} 2^{|B|} = -|B| = B,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что *существуют последовательности, не имеющие предела*. Такой последовательностью является, например, последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = (-1)^n$.

Теоремы о пределах числовых последовательностей. В этом пункте будем рассматривать только те последовательности, которые имеют конечный предел.

Теорема 1. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел A и число $p < A$, то найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $p < a_n$.*

Доказательство. Поскольку A есть предел последовательности $\{a_n\}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Перепишем это неравенство в форме

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon. \tag{1}$$

Положим, $\varepsilon = A - p > 0$. Для этого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для любого $n > N$ будет справедливо двойное неравенство (1). Подставляя в левую часть неравенства (1) $\varepsilon = A - p$, получаем, что $p < a_n$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел A и число $q > A$, то найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $q > a_n$.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 и поэтому опускается.

Замечания.

1. Если $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$ и $A > 0$, то найдется номер N такой, что $a_n > 0$ для любого $n > N$.

2. Если $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$ и $A < 0$, то найдется номер N такой, что $a_n < 0$ для любого $n > N$.

Теорема 3. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел A, то найдется положительное число M такое, что $|a_n| \le M$, т.е. последовательность, имеющая предел, ограничена.*

Доказательство. Выберем число M_1 так, чтобы оно было больше $|A|$, т.е. чтобы было справедливо неравенство $-M_1 < A < M_1$. Обозначив $p = -M_1$, $q = M_1$, получим , что $A > p$ и $A < q$. По теореме 1 существует номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство $p < a_n$. По теореме 2 существует номер N_2 такой, что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство $q > a_n$. Выберем номер $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для любого $n > N$ справедливо двойное неравенство $p < a_n < q$, или $-M_1 < a_n < M_1$, т.е. $|a_n| < M_1$. Неравенство $|a_n| < M_1$ выполняется для любого $n > N$, т.е. для $n = N + 1$, $n = N + 2$, $n = N + 3$, $n = N + 4$ и т.д. Значит неравенство $|a_n| < M_1$ может не выполняться лишь для первых N членов последовательности.

Выберем среди чисел $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$, ..., $|a_{N-1}|$, $|a_N|$, M_1 наибольшее число и обозначим его через M. Тогда ясно, что для любого n будет справедливо неравенство $a_n \le M$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то этот предел единственный.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть одновременно $a_n \to A$ и $a_n \to B$ и пусть $A < B$. Возьмем между A и B любое число C, т.е. $A < C < B$. Поскольку $a_n \to A$ и $A < C$, то по теореме 2 найдется такой номер N_1, что для любого $n > N_1$ будет выполняться неравенство $a_n < C$. Поскольку $a_n \to B$ и $C < B$, то по теореме 1 найдется такой номер N_2, что для любого $n > N_2$ будет выполняться неравенство $a_n > C$. Выберем номер $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда член последовательности a_N одновременно удовлетворяет двум неравенствам $a_N > C$ и $a_N < C$, что невозможно. Следовательно, предположение неверно, а верно утверждение теоремы 4.

Теорема 5.

Если $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$, *то* $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = |A|$.

Доказательство.

Пусть $A = 0$. Тогда условие $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $|a_n - 0| < \varepsilon$. Поскольку это неравенство можно переписать так: $||a_n| - 0| < \varepsilon$, то получаем, что $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$.

Пусть $A \neq 0$. Тогда условие $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Если $A > 0$, то по замечанию 1 к теореме 2 найдется номер N_2 такой, что при $n > N_2$, $a_n > 0$. Взяв номер $N = \max(N_1, N_2)$, получим, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $||a_n| - A| < \varepsilon$, что и означает, что $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = |A|$. Если же $A < 0$, то по замечанию 2 к теореме 2 найдется номер N_3 такой, что $a_n < 0$. Взяв номер $N = \max(N_1, N_3)$ и учитывая, что $a_n = -|a_n|$ и $A = -|A|$, получим, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $|-(|a_n| - |A|)| < \varepsilon$, которое можно записать так: $||a_n| - |A|| < \varepsilon$, а это означает, что $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = |A|$.

Арифметические операции над последовательностями $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ и сравнение последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ производятся также, как и над функциями, т.е. при одинаковых значениях аргумента, другими словами, почленно.

Теорема 6. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $a_n = b_n$ для любого n и $a_n \to A$, а $b_n \to B$, то $A = B$, т.е. если $a_n = b_n$ для любого n, то $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.*

Доказательство. Условие $a_n = b_n$ для любого n означает, что на самом деле имеется только одна последовательность, а по теореме 4 она не может иметь двух пределов; значит, $A = B$ и теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *таковы, что* $a_n \geq b_n$ *для любого* n, $a_n \to A$ *и* $b_n \to B$, *то* $A \geq B$, *т.е. если* $a_n \geq b_n$ *для любого* n, *то* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \geq \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $A < B$. Выберем число C такое, что $A < C < B$. Так как $a_n \to A$ и $A < C$, то по теореме 2 найдется номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство $a_n < C$. Так как $b_n \to B$ и $B > C$, то по теореме 1 найдется номер N_2 такой, что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство $b_n > C$. Выберем номер $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для любого $n > N$ будут одновременно выполняться неравенства $a_n < C$ и $C < b_n$. Из них следует, что $a_n < b_n$, что противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение неверное и теорема 7 справедлива.

Замечание. Теорему 7 нельзя усилить, т.е. из строгого неравенства $a_n > b_n$ для членов последовательностей не обязательно вытекает строгое неравенство для пределов, например, если $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = -\frac{1}{3^n}$, то $a_n > b_n$ для любого n, но $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

Теорема 8. *Если последовательности* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *и* $\{c_n\}$ *таковы, что* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *для любого* n *и* $a_n \to a$, *и* $c_n \to a$, *то* $b_n \to a$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $a_n \to a$, то найдется номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Поскольку $c_n \to a$, то найдется номер N_2 такой, что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$. Выберем номер $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для любого $n > N$ будут одновременно выполняться неравенства $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$. Добавим к этим неравенствам неравенство $a_n \leq b_n \leq c_n$, верное для любого n. По свойству транзитивности неравенств для любого $n > N$ будет справедливо неравенство $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$, которое можно записать как $|b_n - a| < \varepsilon$. Итак, для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $|b_n - a| < \varepsilon$, а это означает, что $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = a$. Теорема доказана.

Замечание. Если $a \le b_n \le c_n$ для любого n и $c_n \to a$, то $b_n \to a$.

Теорема 9. *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ таковы, что $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = B$, *то последовательность* $\{a_n + b_n\}$ такова, что $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = A + B$, *т.е. если* $a_n \to A$, $b_n \to B$, то $(a_n + b_n) \to (A + B)$.

Доказательство.

Поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = B$, то для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство $A - \varepsilon_1 < a_n < A + \varepsilon_1$ и найдется номер N_2 такой, что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство $B - \varepsilon_1 < b_n < B + \varepsilon_1$. Выберем номер $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для выбранного произвольно $\varepsilon_1 > 0$ существует номер N такой, что для любого $n > N$ одновременно справедливы неравенства $A - \varepsilon_1 < a_n < A + \varepsilon_1$ и $B - \varepsilon_1 < b_n < B + \varepsilon_1$. На основании свойств неравенств справедливо неравенство

$$(A + B) - 2\varepsilon_1 < (a_n + b_n) < (A + B) + 2\varepsilon_1.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Тогда, как следует из предыдущего, найдется номер N такой, что для любого $n > N$ будет справедливо неравенство $(A + B) - \varepsilon < (a_n + b_n) < (A + B) + \varepsilon$, т.е. по определению предела $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = (A + B)$. Теорема доказана.

Теорема 10. *Если* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *то* $(a_n - b_n) \to (A - B)$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 9 и поэтому опускается.

Теорема 11. *Если* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *то* $(a_n b_n) \to AB$.

Доказательство.

Поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$, то для любого наперед заданного числа $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ будет справедливо неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon_1. \quad (2)$$

Поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = B$, то для любого наперед заданного числа $\varepsilon_2 > 0$ найдется номер N_2 такой, что для любого $n > N_2$ будет справедливо неравенство

$$|b_n - B| < \varepsilon_2. \quad (3)$$

Рассмотрим неравенство

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \le$$
$$\le |a_n|\,|b_n - B| + |B|\,|a_n - A|. \quad (4)$$

Оно справедливо для любого n. Поскольку по теореме 3 существует положительное число M такое, что $|a_n| \le M$ для любого n, то, обозначая $d = |B| + 1$ $(d > 0)$, из неравенства (4) получаем неравенство

$$|a_n b_n - AB| \le |M|\,|b_n - B| + |d|\,|a_n - A|, \quad (5)$$

справедливое для любого n. Теперь берем произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2d}$ и $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда для выбранного ε_1 существует номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство (2), а для выбранного ε_2 существует номер N_2 такой, что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство (3). Выберем номер $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для любого $n > N$ одновременно справедливы неравенства (2), (3) и (5). Подставляя в (5) оценки (2) и (3), получаем, что для любого $n > N$ справедливо неравенство

$$|a_n b_n - AB| < \varepsilon. \quad (6)$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ найден номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство (6), т.е. по определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n) = AB = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Теорема доказана.

Теорема 12. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $A \neq 0$, то найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $|a_n| > \frac{|A|}{2}$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Так как последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то по определению предела для этого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $|a_n - A| < \frac{|A|}{2}$.

Поскольку $|a_n - A| \geq |A| - |a_n|$, то получим, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $|A| - |a_n| < \frac{|A|}{2}$, откуда $\frac{|A|}{2} < a_n$. Теорема доказана.

Теорема 13. *Если $a_n \to A$, $b_n \to B$, где $b_n \neq 0$ для любого n и $B \neq 0$, то $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.*

Доказательство.

Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, то для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon_1. \tag{7}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$, то для любого $\varepsilon_2 > 0$ найдется номер N_2 такой, что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство

$$|b_n - B| < \varepsilon_2. \tag{8}$$

По теореме 3 существует положительное число M такое, что для любого n

$$|a_n| \leq M. \tag{9}$$

По теореме 12 существует номер N_3 такой, что для любого $n > N_3$ справедливо неравенство

$$b_n > \frac{|B|}{2}. \tag{10}$$

Для любого n справедливо неравенство

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|a_nB - b_nA|}{|b_nB|} = \frac{|a_nB - a_nb_n + a_nb_n - Ab_n|}{|b_n|\,|B|} \le$$

$$\le \frac{|a_n(B - b_n)| + |b_n(a_n - A)|}{|b_n|\,|B|} \le \frac{|a_n|\,|b_n - B|}{|b_n|\,|B|} + \frac{|a_n - A|}{|B|}. \tag{11}$$

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon|B|}{2}$ и $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon|B|^2}{4M}$. Тогда для выбранного ε_1 существует номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство (7), а для выбранного ε_2 существует номер N_2 такой, что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство (8). Выберем номер $N = \max(N_1, N_2, N_3)$. Тогда для любого $n > N$ одновременно справедливы неравенства (7), (8), (9), (10) и (11). Подставляя оценки (7), (8), (9) и (10) в правую часть неравенства (11), получаем, что для любого $n > N$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ найден номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство (12), а это и означает справедливость теоремы 13.

Теорема 14. *Если $a_n \to A$, b — фиксированное положительное не равное единице число, то $b^{a_n} \to b^A$.*

Доказательство. Поскольку $a_n \to A$, то для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство

$$A - \varepsilon_1 < a_n < A + \varepsilon_1. \tag{13}$$

Пусть $b > 1$. Поскольку функция $y = b^x$ возрастающая, то из неравенства (13) вытекает, что $b^{A - \varepsilon_1} < b^{a_n} < b^{A + \varepsilon_1}$, т.е. для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер N такой, что для любого $n > N$

справедливо неравенство $b^{A-\varepsilon_1} < b^{a_n} < b^{A+\varepsilon_1}$. Возьмем произвольное положительное число ε и обозначим $\varepsilon_1 = \log_b\left(1 + \frac{\varepsilon}{b^A}\right)$. Тогда для выбранного ε_1 существует номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство

$$b^{A-\varepsilon_1} < b^{a_n} < b^{A+\varepsilon_1}.$$

Ясно, что

$$b^{A-\varepsilon_1} = \frac{b^A}{b^{\varepsilon_1}} = \frac{b^A}{\left(1+\frac{\varepsilon}{b^A}\right)} = \frac{b^{2A}}{b^A+\varepsilon} > \frac{b^{2A}-\varepsilon^2}{(b^A+\varepsilon)} = b^A - \varepsilon;$$

$$b^{A+\varepsilon_1} = b^A b^{\varepsilon_1} = b^A\left(1+\frac{\varepsilon}{b^A}\right) = b^A + \varepsilon.$$

Итак, показано, что для любого положительного ε найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $b^A - \varepsilon < b^{a_n} < b^A + \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} b^{a_n} = b^A$.

В случае $0 < b < 1$ доказательство теоремы проводится аналогично.

Теорема 15. *Возрастающая и ограниченная сверху последовательность* $\{a_n\}$ *имеет предел.*

Теорема 16. *Убывающая и ограниченная снизу последовательность* $\{a_n\}$ *имеет предел.*

Доказательство этих теорем опустим.

Примеры применения теорем о пределах числовых последовательностей.

1. Найти предел последовательности $\{a_n\}$, если $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$.

Перепишем формулу для общего члена в виде $a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}$. Применяя последовательно теоремы о пределе частного, произведения и суммы, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)\right]} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\right)}{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}\right)} = \frac{(1+0)\,(1+0)}{(1+0)\,(1+0)} = 1.$$

2. Найти предел последовательности d_n, если $d_n = \frac{a_1n^2 + b_1n + c_1}{a_2n^2 + b_2n + c_2}$ ($a_2 \neq 0$ и $a_2n^2 + b_2n + c_2 \neq 0$ для любого n).

Разделив числитель и знаменатель в выражении для d_n на n^2 и применив те же теоремы, что и в предыдущем примере, получим

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + b_1\frac{1}{n} + c_1\frac{1}{n^2}}{a_2 + b_2\frac{1}{n} + c_2\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_1 + b_1\frac{1}{n} + c_1\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_2 + b_2\frac{1}{n} + c_2\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_1}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{c_1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to+\infty} a_2 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_2}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{c_2}{n^2}} = \frac{a_1+0+0}{a_2+0+0} = \frac{a_1}{a_2}.$$

3. Выяснить, есть ли предел у последовательности $\{a_n\}$, если $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

При изучении бинома Ньютона была показана справедливость неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, т.е. показано, что последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_n < a_{n+1}$ для любого n. Из условия $a_n < a_{n+1}$ легко получить, что $a_{n_1} < a_{n_2}$ для любых $n_1 < n_2$, т.е. последовательность $\{a_n\}$ — возрастающая. Покажем теперь, что для любого n справедливо неравенство $a_n < 3$, т.е. что последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху.

Действительно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\ldots\frac{[n-(n-1)]}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} =$$
$$= 1 + 1 + 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \ldots$$
$$\ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\ldots\frac{1}{n} <$$
$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots = 3.$$

По теореме 15 возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой e. Итак,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Определение числа e позволяет вычислить его с любой степенью точности. В курсе математического анализа показывается, что число e — иррациональное число.

4. Выяснить, есть ли предел у последовательности $\{a_n\}$, которая задана рекуррентным соотношением $a_1 = \sqrt{2}$ и $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ для любого $n \geq 2$.

Прежде всего выясним, ограничена ли эта последовательность. Докажем, что $a_n < 2$. Доказательство проведем методом математической индукции.

а) Для $n = 1$ неравенство $a_1 < 2$ справедливо, поскольку $a_1 = \sqrt{2}$.

б) Предположим, что неравенство справедливо для $n = k$, т.е. $a_k < 2$.

в) Покажем, что из этого вытекает справедливость неравенства для $n = k + 1$. Действительно, $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} <$ $< \sqrt{2+2} = 2$. Итак, неравенство $a_n < 2$ справедливо для любого n.

Покажем, что последовательность $\{a_n\}$ возрастающая. Для этого достаточно показать, что $a_n < a_{n+1}$, т.е. доказать неравенство $a_n < \sqrt{2 + a_n}$.

Это неравенство равносильно неравенству $a_n^2 < 2 + a_n$, которое можно переписать так: $(a_n + 1)(a_n - 2) < 0$. Поскольку $0 < a_n < 2$, то последнее неравенство очевидно, а значит, справедливо и равносильное ему неравенство $a_n <$ $< a_{n+1}$. Итак, последовательность $\{a_n\}$ возрастает и ограничена сверху; значит; она имеет предел, который обозначим через c. Покажем, что $c = 2$. Действительно, воспользовавшись рекуррентным соотношением $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, имеем $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2 + a_{n-1}}$.

Воспользуемся теоремой (доказательство ее опускается): *если последовательность* $\{b_n\}$ *такова, что* $b_n \geq 0$, *и она имеет предел, то* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{b_n} = \sqrt{\lim\limits_{n \to +\infty} b_n}$. Получаем $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n =$ $= \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} = \sqrt{\lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \lim\limits_{n \to +\infty} a_{n-1}}$. Поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n =$ $= \lim\limits_{n \to +\infty} a_{n-1}$, то получаем, что c надо искать из условия $c = \sqrt{2 + c}$. Возводя это равенство в квадрат, получаем, что $c = 2$.

5. Пусть $a > 1$ и α — положительное иррациональное число. Вспомним определение a^α. Поскольку любое иррациональное число есть бесконечная десятичная дробь, то, обрывая эту дробь на каком-то шаге, получаем приближенное значение этого числа с недостатком, а прибавляя к последней цифре единицу, получаем приближенное значение этого числа с избытком. Значит, для приближения числа α, равного $p, q_1q_2q_3 \ldots q_n \ldots$, получаем две последовательности

$$p,\ p+\frac{q_1}{10},\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100},\ \ldots,\ p+\frac{q_1}{10}+\ldots+\frac{q_n}{10^n},\ \ldots$$

$$p+1,\ p+\frac{q_1+1}{10},\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{100},\ \ldots,\ p+\frac{q_1}{10}+\ldots+\frac{q_n+1}{10^n},\ \ldots$$

Обозначим общий член первой последовательности через b_n, а общий член второй — через c_n. Тогда очевидно, что последовательность $\{b_n\}$ возрастающая и ограниченная сверху (хотя бы числом $(p+1)$), а последовательность c_n убывающая и ограниченная снизу (хотя бы числом p). Рассмотрим последовательность a^{b_n}. Так как $a > 1$, то из условия $b_n < b_{n+1}$ вытекает, что $a^{b_n} < a^{b_{n+1}}$. Поскольку последовательность $\{b_n\}$ возрастающая, то последнее неравенство означает, что последовательность $\{a^{b_n}\}$ возрастающая. Кроме того, $a^{b_n} < a^{p+1}$, т.е. последовательность a^{b_n} ограничена сверху. По теореме 15 последовательность a^{b_n} имеет предел, который обозначим A. Аналогично показывается, что последовательность a^{c_n} имеет предел, который обозначим B. Докажем, что $A = B$.

Рассмотрим последовательность $\{a^{c_n} - a^{b_n}\}$ и покажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^{c_n} - a^{b_n}) = 0$. Действительно, применяя теоремы о пределах, имеем

$$\lim_{n\to+\infty}(a^{c_n} - a^{b_n}) = \lim_{n\to+\infty}[a^{b_n}(a^{c_n-b_n} - 1)] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a^{b_n}\cdot\lim_{n\to+\infty}(a^{c_n-b_n} - 1) = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n}\cdot\left(a^{\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-b_n)} - \lim_{n\to+\infty} 1\right) =$$

$$= A\,(a^0 - 1) = 0,$$

так как $\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n - b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{10^{n-1}} = 0$. Далее, из условия $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^{c_n} - a^{b_n}) = 0$ получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{c_n} - \lim\limits_{n\to+\infty} a^{b_n} = 0$, т.е. $A = B$.

Итак, обе последовательности имеют один предел, который и называется числом a^α.

В случае $a > 1$ и $\alpha < 0$ или $0 < a < 1$ и α — любое иррациональное число рассуждения аналогичны.

6. Пусть задана последовательность $\{a_n\}$. Тогда можно построить другую последовательность $\{S_n\}$ по правилу

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots .$$

Формально можно написать бесконечную сумму

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots,$$

которую называют *рядом*. Последовательность $\{S_n\}$ называется ***последовательностью частичных сумм этого ряда.*** В некоторых случаях последовательность $\{S_n\}$ может иметь конечный предел S. В таких случаях говорят, что ряд *сходится*, а число S называется *суммой* ряда. Приведем несколько примеров.

6.1. Пусть задана геометрическая прогрессия $\{a_n\}$ с первым членом a_1 и со знаменателем q таким, что $0 < q < 1$. Рассмотрим ряд $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + \ldots$ и составим последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда. Формула для вычисления S_n для любого n следующая:

$$S_n = a_1\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Применяя теоремы о пределах и учитывая, что $0 < |q| < 1$, получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\cdot q^n\right] = \frac{a_1}{1-q} - \lim\limits_{n\to+\infty} q^n$. Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ для $0 < |q| < 1$, то получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$, т.е. по определению суммой написанного ряда будет число $\frac{a_1}{1-q}$. Следовательно, сумма геометрической прогрессии при $0 < |q| < 1$ равна первому члену, поделенному на разность единицы и знаменателя прогрессии, т.е. $S = \frac{a_1}{1-q}$.

6.2. Пользуясь определением суммы ряда, можно дать другое определение иррационального числа α.

Пусть положительное иррациональное число α равно $p, q_1q_2 \ldots q_n \ldots$ Тогда

$$p,\ p+\frac{q_1}{10},\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100},\ \ldots,\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_n}{10^n},\ \ldots$$

— последовательность десятичных приближений числа α с недостатком, а

$$p+1,\ p+\frac{q_1+1}{10},\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{100},\ \ldots$$

$$\ldots,\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_n+1}{10^n},\ \ldots$$

— последовательность десятичных приближений числа α с избытком. Эти последовательности имеют один предел, который называется числом α. Поэтому можно определить α как сумму ряда

$$\alpha=p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_n}{10^n}+\ldots .$$

Заметим, что если α есть бесконечная периодическая дробь

$$\alpha=p,\ q_1q_2\ldots q_k(p_1p_2\ldots p_m),$$

то α тоже можно определить как сумму ряда

$$\alpha=p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_k}{10^k}+\frac{p_1}{10^{k+1}}+\frac{p_2}{10^{k+2}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{p_m}{10^{k+m}}+\frac{p_{m+1}}{10^{k+m+1}}+\ldots$$

6.3. Докажем правило перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную. Пусть дана положительная периодическая десятичная дробь, целая часть которой, для простоты, равна нулю. Тогда эта десятичная дробь равна обыкновенной, у которой: числитель есть число, равное разности чисел, составленных цифрами, стоящими до второго периода, и цифрами, стоящими до первого периода; знаменатель есть число, в изображении которого цифра 9 повторяется столько раз, сколько цифр в периоде, а затем после девяток нуль повторяется столько раз, сколько цифр от запятой до периода.

Примеры.

$0{,}3(14) = \frac{314 - 3}{990} = \frac{311}{990}$;

$0{,}127(31) = \frac{12731 - 127}{99000} = \frac{12604}{99000} = \frac{3151}{24750}$.

Доказательство. Пусть дробь α имеет вид

$$\alpha = 0,\ q_1q_2 \dots q_k(p_1p_2 \dots p_m).$$

Запишем эту дробь в виде суммы ряда

$$\alpha = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \dots + \frac{q_k}{10^k} + \frac{p_1}{10^{k+1}} + \dots + \frac{p_m}{10^{k+m}} + \\ + \frac{p_{m+1}}{10^{k+m+1}} + \dots + \frac{p_{2m}}{10^{k+2m}} + \dots$$

Сделаем очевидные преобразования этого ряда:

$$\alpha = \frac{1}{10^k}(10^{k-1}q_1 + 10^{k-2}q_2 + \dots + q_k) + \\ + \frac{1}{10^{k+m}}(10^{m-1}p_1 + 10^{m-2}p_2 + \dots + p_m) + \\ + \frac{1}{10^{k+2m}}(10^{m-1}p_1 + 10^{m-2}p_2 + \dots + p_m) + \dots \\ \dots + \frac{1}{10^{k+nm}}(10^{m-1}p_1 + 10^{m-2}p_2 + \dots + p_m) + \dots$$

В этом ряде члены, начиная со второго, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{10^m}$. Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии со знаменателем q таким, что $0 < |q| < 1$, получаем

$$\alpha = \frac{1}{10^k}(10^{k-1}q_1 + 10^{k-2}q_2 + \ldots + q_k) +$$

$$+ \frac{\frac{1}{10^{k+m}}(10^{m-1}p_1 + 10^{m-2}p_2 + \ldots + p_m)}{1 - \frac{1}{10^m}} =$$

$$= \frac{1}{10^k}(10^{k-1}q_1 + 10^{k-2}q_2 + \ldots + q_k) +$$

$$+ \frac{10^{m-1}p_1 + 10^{m-2}p_2 + \ldots + p_m}{10^k(10^m - 1)} =$$

$$= \frac{(10^m - 1)(10^{k-1}q_1 + 10^{k-2}q_2 + \ldots + q_k) + 10^{m-1}p_1 + 10^{m-2}p_2 + \ldots + p_m}{10^k(10^m - 1)} =$$

$$= \frac{10^{m+k-1}q_1 + 10^{m+k-2}q_2 + \ldots + 10^m q_k + 10^{m-1}p_1 + 10^{m-2}p_2 + \ldots + p_m}{10^k(10^m - 1)} -$$

$$- \frac{10^{k-1}q_1 + 10^{k-2}q_2 + \ldots + q_k}{10^k(10^m - 1)} = \frac{\overline{q_1q_2\ldots q_kp_1p_2\ldots p_m} - \overline{q_1q_2\ldots q_k}}{\underbrace{999\ldots9}_{m\text{ раз}}\underbrace{000\ldots0}_{k\text{ раз}}},$$

и правило перевода доказано.

§ 3. Предел функции

Пусть дана функция $y = f(x)$. Точка a (a — конечное число) называется *точкой сгущения* области существования функции $y = f(x)$, если в любом сколь угодно малом промежутке оси Ox, содержащем точку a, есть хотя бы одна точка области существования этой функции, отличная от точки a. Заметим, что сама точка a может и не принадлежать области определения функции.

Примеры. 1. Для функции $y = 2^x$ любая точка оси Ox есть точка сгущения этой функции, и все точки сгущения принадлежат области существования функции.

2. Для функции $y = \frac{1}{x}$ любая точка оси Ox есть точка сгущения этой функции. Точка $x = 0$ также есть точка сгущения , но она не принадлежат области существования функции.

3. Пусть задана функция $y = \sqrt{\log_2 \sin x}$; область существования этой функции есть $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — любое целое число. У этой функции нет точек сгущения.

Часто определение точки сгущения дается в несколько других терминах. Для любого $\delta > 0$ промежуток $a - \delta < x < a + \delta$ оси Ox называется δ (дельта)-*окрестностью точки* a.

Точка a (a — конечное число) называется *точкой сгущения* области существования функции $y = f(x)$, если в каждой δ-окрестности точки a содержится хотя бы одно, отличное от a, значение x из области существования функции.

Если точка a есть точка сгущения области существования функции $y = f(x)$, то найдется, притом бесконечно много, последовательностей $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, из области существования функции $y = f(x)$, имеющих своим пределом точку a.

Примеры. 1. Пусть задана функция $y = 2^x$ и точка $a = 1$ — точка сгущения области существования этой функции. Последовательности точек $\{x_n\}$, например, такие:

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}; \ x_n = 1 + \frac{2}{7n}; \ x_n = 1 + \frac{1}{n^2};$$

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}; \ x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}; \ x_n = 1 - \frac{1}{n(n+1)} \text{ и т.д.}$$

— последовательности точек из области существования этой функции, причем в каждом случае $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

2. Пусть задана функция $y = \frac{1}{x}$ и точка $a = 0$ — точка сгущения области существования этой функции. Последовательности точек $\{x_n\}$, например, такие:

$$x_n = \frac{1}{n}; \ x_n = \frac{1}{2^n}; \ x_n = \frac{1}{4^n + n};$$

$$x_n = -\frac{1}{n}; \ x_n = -\frac{1}{5^{n(n+1)}}; \ x_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ и т.д.}$$

— последовательности точек из области существования этой функции, причем $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Покажем, что для любой функции $y = f(x)$ и любой точки сгущения a области существования этой функции можно построить хотя бы одну последовательность точек $\{x_n\}$ из области существования такую, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Выберем положительное число δ_1 и возьмем окрестность точки a, соответствующую числу δ_1, и в ней возьмем любую точку $x_1 \neq a$ из области существования этой функции. Возьмем теперь положительное число δ_2 такое, что $\delta_2 < \delta_1$ и $\delta_2 < |a - x_1|$. В окрестности точки a, соответствующей числу δ_2, возьмем любую точку $x_2 \neq a$ из области существования этой функции и т.д. В результате получим последовательность точек:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

Последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$ берется такой, что кроме указанных условий она удовлетворяет условию $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n = 0$. Покажем, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер N такой, что $\delta_N < \varepsilon$. Для любого $n > N$ при указанном способе выбора δ_n и x_n имеем $\delta_n < \delta_N$ и $|x_n - a| < \delta_n$. Итак, для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ можно найти N такой, что для любого $n > N$ $|x_n - a| < \varepsilon$, а это означает, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.

Из построения видно, что для любой функции $y = f(x)$ и любой точки сгущения a области существования этой функции можно построить бесконечно много последовательностей точек из области существования таких, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.

Заметим, что каждой такой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ соответствует последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$

Пусть точка a — точка сгущения области существования функции $y = f(x)$. Число A называется *пределом этой функции при стремлении x к a*, если для любой последовательности точек из области существования функции $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, имеющей пределом число a, последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет пределом число A. При этом пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Пределом функции может явиться как конечное число A, так и $(+\infty)$ или $(-\infty)$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty)$, если для каждой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \to a$, $f(x_n) \to +\infty$ $(f(x_n) \to -\infty)$.

Примеры.

1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2$.

Для этого покажем, что $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{x_n} = 2$ для любой последовательности точек из области существования функции $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$; т.е. что для любой такой последовательности и любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливы неравенства $2 - \varepsilon < 2^{x_n} < 2 + \varepsilon$. Заметим, что условие $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$ означает, что для любого числа $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливы неравенства $1 - \varepsilon_1 < x_n < 1 + \varepsilon_1$.

Пусть теперь дано положительное число ε. Выберем число $\varepsilon_1 = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Ясно, что $\varepsilon_1 > 0$. Возьмем теперь любую последовательность точек из области существования функции $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$, такую, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$. Тогда для этой последовательности $\{x_n\}$ существует номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ справедливы неравенства $1 - \varepsilon_1 < x_n < 1 + \varepsilon_1$, а следовательно, и неравенства

$$2^{x_n} < 2^{1+\varepsilon_1} = 2 \cdot 2^{\varepsilon_1} = 2 \cdot 2^{\log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)} = 2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2 + \varepsilon;$$

$$2^{x_n} > 2^{1-\varepsilon_1} = \frac{2}{2^{\varepsilon_1}} = \frac{2}{2^{\log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}} = \frac{2}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{4}{2 + \varepsilon} > \frac{4 - \varepsilon^2}{2 + \varepsilon} = 2 - \varepsilon.$$

Итак, для любой последовательности точек из области существования этой функции $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$, такой, что

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$, и для любого $\varepsilon > 0$ найден номер $N = N_1$ такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $|2^{x_n} - 2| < \varepsilon$, т.е. показано, что $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{x_n} = 2$ для любой последовательности из области существования функции $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$. Следовательно, $\lim\limits_{x_n \to 1} 2^{x_n} = 2$.

2. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Пусть $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, — любая последовательность точек из области существования функции такая, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$. Это означает, что для любого числа $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливы неравенства $0 < |x_n| < \varepsilon_1$. Возьмем произвольное положительное число B и обозначим $\varepsilon_1 = \frac{1}{B}$. Тогда для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, найдется номер N такой, что для любого $n > N$ справедливы неравенства $0 < |x_n| < \frac{1}{B}$, т.е. справедливо неравенство $\frac{1}{|x_n|} > B$.

Итак, для любого $B > 0$ нашелся номер N такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $\frac{1}{|x_n|} > B$, т.е. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{|x_n|} = +\infty$ для любой последовательности точек из области существования функции $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Будем говорить, что $(+\infty)$ является *точкой сгущения* для области существования функии $y = f(x)$, если для любого большого положительного числа B найдется хотя бы одно значение x, принадлежащее области существования функции $y = f(x)$, такое, что $x > B$.

Будем говорить, что $(-\infty)$ является *точкой сгущения* для области существования функии $y = f(x)$, если для любого отрицательного числа B такого, что $|B|$ — сколь угодно большое число, найдется хотя бы одно значение x, принадлежащее области существования функции $y=f(x)$, такое, что $x < B$.

В случаях, когда $(+\infty)$ или $(-\infty)$ являются точками сгущения для области существования функции $y=f(x)$, также легко показать, что можно построить последовательность точек $\{x_n\}$ из области существования функции $y=f(x)$, которая будет иметь своим пределом $(+\infty)$ или $(-\infty)$ соответственно, и определение предела функции $y=f(x)$ можно распространить на случаи таких точек сгущения.

Пример. Для функции $y=1+\frac{1}{x}$ и $(+\infty)$ и $(-\infty)$ являются точками сгущения и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Пользоваться приведенным определением предела функции для его отыскания трудно. Поэтому чаще пользуются другим, эквивалентным ему, определением на так называемом языке «ε, δ».

Пусть точка a есть точка сгущения области существования функции $y=f(x)$ и a — конечное число. Число A называется *пределом функции $y=f(x)$ при стремлении x к a*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любого x из области существования этой функции и такого, что $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

Пусть $(+\infty)$ есть точка сгущения области существования функции $y=f(x)$. Число A называется *пределом функции $y=f(x)$ при стремлении x к* $(+\infty)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $M>0$ такое, что для любого x из области существования функции $y=f(x)$, и такого, что $M<x$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

Пусть $(-\infty)$ есть точка сгущения области существования функции $y=f(x)$. Число A называется *пределом функции $y=f(x)$ при стремлении x к* $(-\infty)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $M<0$ такое, что для любого x из области существования функции $y=f(x)$, и такого, что $x<M$, вы-

полняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Аналогично можно дать определения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ и т.д. В качестве примера приведем одно из таких определений.

Пусть точка a есть точка сгущения области существования функции $y = f(x)$ и a — конечное число. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ *имеет пределом* $(+\infty)$ *при стремлении* x *к* a, если для любого числа $B > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого x из области существования функции и такого, что $0 < |x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $f(x) > B$. При этом пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Найдем пределы некоторых функций, используя определение предела на языке «ε, δ».

Примеры. 1. Дана функция $y = 2^x$ и точка $a = 1$ — точка сгущения области существования этой функции. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2$.

Возьмем произвольное положительное число ε и выберем число $\delta > 0$. Выберем, например, $\delta = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$; ясно, что $\delta > 0$. Возьмем теперь любое x, такое, что $0 < |x - 1| < \delta$, т.е. любое $x \neq 1$ из промежутка $1 - \delta < x < 1 + \delta$.

Ясно, что

$$2^x < 2^{1+\delta} = 2 \cdot 2^{\delta} = 2 \cdot 2^{\log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)} = 2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2 + \varepsilon;$$

$$2^x > 2^{1-\delta} = 2 \cdot 2^{-\delta} = 2 \cdot 2^{-\log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{4}{2 + \varepsilon} > \frac{4 - \varepsilon^2}{2 + \varepsilon} = 2 - \varepsilon.$$

Эти неравенства означают, что $|2^x - 2| < \varepsilon$. Итак. для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$, такое, что $|2^x - 2| < \varepsilon$ для любого

x из области существования функции, и такого, что $0 < |x - 1| < \delta$. По определению это и означает, что $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2$.

2. Дана функция $y = \frac{1}{|x|}$ и точка $a = 0$ — точка сгущения области существования этой функции. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Возьмем произвольное число $B > 0$ и выберем число $\delta > 0$, например, $\delta = \frac{1}{B}$. Ясно, что как только $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, то $\frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{1}{B}} = B$. Итак, для любого $B > 0$ нашлось число $\delta > 0$, такое, что $\frac{1}{|x|} > B$ для любого x из области существования этой функции и такого, что $0 < |x - 0| < \delta$. По определению это и означает, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Выше даны два разных определения предела функции: одно на языке последовательностей, другое — на языка «ε, δ». Эти определения равносильны, т.е. если функция имеет предел в смысле определения на языке последовательностей, то она имеет тот же предел в смысле определения на языке «ε, δ» и наоборот.

Покажем равносильность двух определений предела функции в случае, когда $x = a$ — конечная точка сгущения и когда функция имеет конечный предел A.

1. Пусть A — предел функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к точке a в смысле определения на языке «ε, δ».

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется число $\delta > 0$, такое, что для любого x, принадлежащего области существования функции и удовлетворяющего неравенствам $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к a, и такую, что $x_n \neq a$ и x_n принадлежит области существования функции $y = f(x)$ при любом n. Тогда для указанного числа $\delta > 0$, зависящего от ε, существует число N такое, что для любого $n > N$ выполняются неравенства $0 < |x_n - a| < \delta$. Следовательно, при любом $n > N$ будет выполняться неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Но так как $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то это и означает, что $f(x_n) \to A$, т.е. для любой последовательности $\{x_n\}$ (из области существования функции $y = f(x)$), сходящийся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к A; это и есть определение предела функции на языке последовательностей.

2. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ в смысле определения на языке последовательностей. Покажем, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ в смысле определения на языке «ε, δ».

Доказательство проведем от противного. Пусть $f(x_n) \to A$ для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из области существования функции такой, что $x_n \to a$, причем $x_n \neq a$. Предположим, что для $f(x)$ число A не является пределом при $x \to a$ в смысле определения на языке «ε, δ», т.е. существует такое положительное число ε, что для любого положительного δ найдется хотя бы одно число $\bar{x}$ такое, что $0 < |\bar{x} - a| < \delta$, но $|f(\bar{x}) - A| \geq \varepsilon$.

Возьмем теперь последовательность $\{\delta_n\}$ такую, что $\delta_n \to 0$. По предположению для любого δ_n существует число $\overline{x_n}$ такое, что $0 < |\overline{x_n} - a| < \delta_n$, но $|f(\overline{x_n}) - A| \geq \varepsilon$. Рассмотрим последовательность $\overline{x_n}$, $\overline{x_n}$, ..., $\overline{x_n}$, ... Ясно, что $\overline{x_n} \to a$, но $f(\overline{x_n})$ не стремится к A, так как $|f(\overline{x_n}) - A| \geq \varepsilon$ для всех n.

Следовательно, нашлась последовательность $\{\overline{x_n}\}$, $\overline{x_n} \to a$, из области существования функции $y = f(x)$ такая, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \overline{x_n} = a$, но последовательность $\{f(\overline{x_n})\}$ не стремится к A. Это противоречит условию, что для любой последовательности точек из области существования функции $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, обязательно $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A$, т.е. наше предположение неверно, а верно утверждение, что из сходимости на языке последовательностей следует сходимость на языке «ε, δ».

Равносильность двух определений предела функции доказана в случае, когда точка сгущения a и $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ — конечные числа. В остальных случаях равносильность определений доказывается аналогично.

Для пределов функций справедливы свойства, аналогичные свойствам пределов последовательностей. Заметим, что их практически не надо доказывать, ибо из определения предела функции при помощи последовательностей вытекает, что все теоремы, доказанные для последовательностей, справедливы и для функций. Сформулируем некоторые из них.

Теорема 1. *Пусть точка a есть точка сгущения общей части областей существования функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и пусть существуют оба конечных предела* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$. *Тогда функции* $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ *также имеют конечные пределы, соответственно равные* $A + B$, $A - B$, AB, $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ *в случае частного*).

Теорема 2. *Пусть точка a (a — конечное число) есть точка сгущения области существования функции $y = f(x)$, и если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, *где* $A > 0$, *то существует δ-окрестность точки a такая, что для любого $x \neq a$ из области существования и принадлежащего этой окрестности, функция $y = f(x)$ положительна.*

Аналогичное свойство справедливо, если $A < 0$.

Теорема 3. *Если точка a (a — конечное число) есть точка сгущения области существования функции $y = f(x)$ и если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, *где A — конечное число, то существует такая δ-окрестность точки a, что для любого $x \neq a$ из области существования и принадлежащего этой окрестности функция $y = f(x)$ будет ограниченной, т.е. найдется такое число $M > 0$ и такое $\delta > 0$, что для любого x из области существования функции, такого, что* $0 < |x - a| < \delta$, *будет справедливо неравенство* $|f(x)| \leq M$.

Теорема 4. *Если точка a есть точка сгущения общей части областей существования функций $y = f(x)$, $y = p(x)$ и*

$y = g(x)$ и для любого $x \neq a$, принадлежащего некоторой δ-окрестности точки a и общей части областей существования этих функций, справедливы неравенства $f(x) \leq p(x) \leq g(x)$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = A$, тогда и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Пример.

Используя теорему 4, докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ четная, поэтому рассмотрим ее на интервале $(0, \pi/2)$. Докажем, что на этом интервале имеет место двойное неравенство

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (1)$$

Возьмем дугу AM единичной окружности, соответствующую углу, радианная мера которого равна x (рис. 185). Тогда $|OA| = 1$, $|MN| = \sin x$, $|ON| = \cos x$. Из подобия треугольников OAT и ONM находим $|AT| = \frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|MN|}{|ON|} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$. Так как площадь треугольника ONM меньше площади сектора OAM, а площадь этого сектора меньше площади треугольника OAT, то имеем двойное неравенство

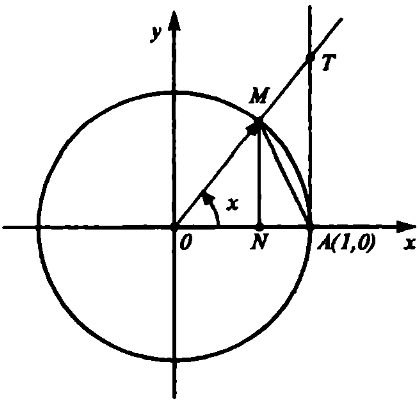


Рис. 185.

$$\frac{1}{2}|OA|\,|MN| < \frac{1}{2}|OA|^2\,|AM| < \frac{1}{2}|OA|\,|AT|$$

или

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Разделим это двойное неравенство на $\sin x$. Поскольку $\sin x > 0$, то знаки неравенства не изменятся и получим справедливость двойного неравенства

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Так как рассматривается интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и на нем $x > 0$, $\cos x > 0$, $\sin x > 0$, то имеем равносильные неравенства

$$1 < \frac{x}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1; \;\; \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

что и доказывает неравенство (1).

В силу четности функций $y = \cos x$ и $y = \frac{\sin x}{x}$ двойное неравенство (1) будет иметь место и на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Действительно, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, то $0 < (-x) < \frac{\pi}{2}$ и неравенство (1) имеет вид

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{(-x)} < 1.$$

Но $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Следовательно, неравенство (1) справедливо и при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Итак, для любого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Для того чтобы теперь воспользоваться теоремой 4, необходимо доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. Воспользуемся определением предела функции на языке «ε, δ», т.е. докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только $0 < |x| < \delta$, то $|1 - \cos x| < \varepsilon$. В качестве δ возьмем величину $\sqrt{2\varepsilon}$, тогда $|1 - \cos x| = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} = 2\left(\sin \frac{|x|}{2}\right)^2 < 2\left(\frac{|x|}{2}\right)^2 < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Итак, функция $y = \frac{\sin x}{x}$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ заключена между 1 и $\cos x$, и поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, то по теореме 4 получим $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

В определении предела функции $y = f(x)$ в точке a (точке сгущения области существования функции) x может приближаться к a по любому закону.

Иногда приходится рассматривать предел функции $y = f(x)$, когда x (из области существования функции), стремясь к a, остается все время справа от точки a. Тогда говорят, что функция $y = f(x)$ имеет *предел справа*, и записывают $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$, где $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ — либо конечное число, либо $(+\infty)$, либо $(-\infty)$. Аналогично определяется *предел слева* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$ (рис. 186).

2. $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$ (рис. 187).

3. Функция $y = x^2$ имеет в любой точке a предел и справа и слева, при этом $\lim\limits_{x \to a+0} x^2 = \lim\limits_{x \to a-0} x^2 = a^2$.

Пусть дана функция $y = f(x)$ и ее график. Если существуют точка $M(x_0, f(x_0))$ и прямая, такая, что хотя бы при одном из условий $x \to a$, $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ начиная с точки M расстояние между точками графика и прямой неограниченно уменьшается, то эта прямая называется *асимптотой* функции $y = f(x)$.

Если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty, \lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty, \lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty,$$

то асимптота $x = a$ называется *вертикальной*.

Примеры. 1. Функция $y = \log_2(x+3)$ имеет вертикальную асимптоту $x = -3$, так как $\lim\limits_{x \to -3+0} \log_2(x+3) = -\infty$ (рис. 188).

2. Функция $y = \frac{1}{|x+1|}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -1$, так как $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{|x+1|} = +\infty$ (рис. 189).

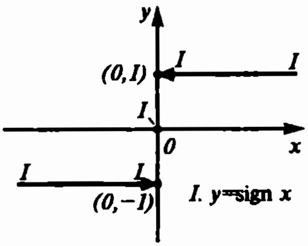


Рис. 186.

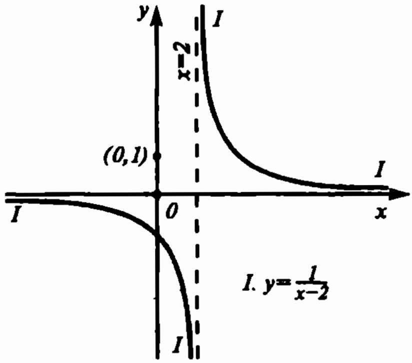


Рис. 187.

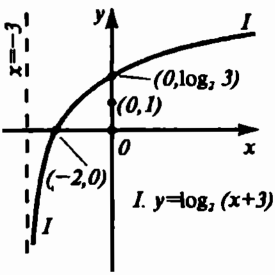


Рис. 188.

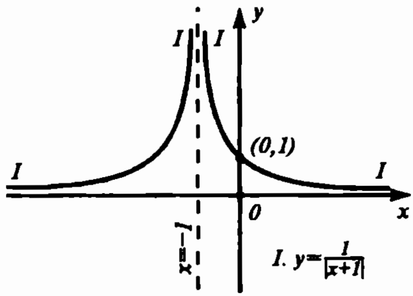


Рис. 189.

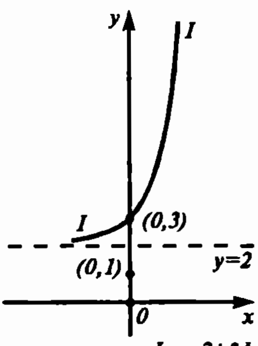


Рис. 190.

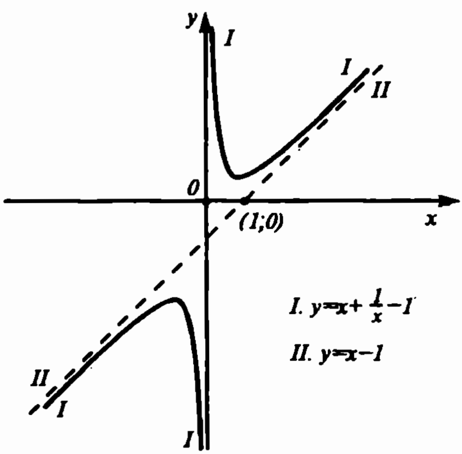


Рис. 191.

Если выполняется хотя бы одно из условий $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то асимптота $y = b$ называется *горизонтальной.*

Примеры. 1. Функция $y = 2 + 3^x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$, так как $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 + 3^x) = 2$ (рис. 190).

2. Функция $y = \frac{1}{x}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$, так как $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Если выполняется хотя бы одно из условий $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, то асимптота $y = kx + b$ называется *наклонной.*

Пример. Функция $y = x + \frac{1}{x} - 1$ имеет наклонную асимптоту $y = x - 1$ (рис. 191).

§ 4. Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *если*:

1) x_0 — точка сгущения области существования функции $y = f(x)$;

2) x_0 принадлежит области существования функции $y = f(x)$;

3) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, где $y_0 = f(x_0)$).

Примеры. 1. Функция $y = 2^x$ непрерывна, например, в точке $x_0 = 1$.

Действительно, $x_0 = 1$ — точка сгущения области существования функции; точка $x_0 = 1$ принадлежит области существования функции, значит $y_0 = 2^1 = 2$; существует $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2$; наконец, $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2 = y_0$.

2. Функция $y = \log_3 x$ непрерывна, например, в точке $x_0 = 3$.

Действительно, $x_0 = 3$ — точка сгущения области существования функции; точка $x_0 = 3$ принадлежит области существования функции, значит $y_0 = \log_3 3 = 1$; существует $\lim\limits_{x \to 3} \log_3 x = 1$; наконец, $\lim\limits_{x \to 3} \log_3 x = 1 = y_0$.

3. Функция $y = \frac{1}{x-2}$ в точке $x_0 = 2$ не является непрерывной, так как нарушено, например, условие 2, т.е. точка $x_0 = 2$ не входит в область существования функции.

4. Функция $y = \operatorname{sign} x$ в точке $x_0 = 0$ не является непрерывной, так как нарушено, например, условие 3, т.е. не существует $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x$.

5. Легко проверить, что каждая основная элементарная функция является непрерывной в любой точке ее области существования.

Учитывая вышеприведенные эквивалентные между собой определения предела функции в точке, приведем еще два определения непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого x из области существования, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента из области существования, сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к значению $f(x_0)$.

Используя второе определение непрерывности функции в точке, покажем, например, что функция $y = 2^x$ является непрерывной, например, в точке $x_0 = 1$ (т.е. покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x - 1| < \delta$, будет выполняться неравенство $|2^x - 2^1| < \varepsilon$). Действительно, для любого числа $\varepsilon > 0$ возьмем, например, число $\delta = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Тогда для любого числа x, удовлетворяющего условию $|x - 1| < \delta$, т.е. для любого x из промежутка $(1 - \delta;\ 1 + \delta)$, будут справедливы неравенства

$$2^x < 2^{1+\delta} = 2 \cdot 2^{\delta} = 2 \cdot 2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = 2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2 + \varepsilon;$$

$$2^x > 2^{1-\delta} = 2 \cdot 2^{-\delta} = 2 \cdot \left[2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]^{-1} =$$

$$= \frac{2}{1+\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{4}{2+\varepsilon} > \frac{4-\varepsilon^2}{2+\varepsilon} = 2 - \varepsilon.$$

Эти неравенства означают, что $|2^x - 2^1| < \varepsilon$ для любого x такого, что $|x - 1| < \delta$, т.е. согласно второму определению непрерывности функции в точке, функция $y = 2^x$ непрерывна в точке $x_0 = 1$.

Используя третье определение непрерывности функции в точке, покажем, например, что функция $y = [x]$ не является непрерывной в точке $x = 2$, т.е. укажем хотя бы одну последовательность значений аргумента $\{x_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$, но соответствующая последовательность значений функции $\{[x_n]\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to+\infty} [x_n] \neq [2]$. Такова, например, последовательность значений аргумента с общим членом $x_n = 2 - \frac{1}{n}$. Действительно, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$, но $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2 - \frac{1}{n}\right] = 1$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2 - \frac{1}{n}\right] = 1 \neq 2 = [2]$, что требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть функция $y = f(x)$ $y = g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда в той же точке будут непрерывными и функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$* (последняя при условии, что $g(x_0) \neq 0$).

Эта теорема является следствием теорем о пределе функций в точке.

Например, согласно теореме 1 функция $y = \sin x + x^2$ является непрерывной, скажем, в точке $x_0 = 1$. Действительно, точка $x_0 = 1$ принадлежит области существования функции $y = \sin x$ и функции $y = x^2$. Так как любая основная элементарная функция непрерывна в каждой точке ее области существования, то и функция $y = \sin x$ и функция

$y = x^2$ непрерывны в точке $x_0 = 1$. Тогда согласно теореме 1 и функция $y = \sin x + x^2$ непрерывна в точке $x_0 = 1$.

Наряду с уже рассмотренной непрерывностью функции в точке часто рассматривается так называемая односторонняя непрерывность функции в точке. Приведем соответствующие определения.

Функция $y = f(x)$ ***непрерывна справа в точке*** x_0, если:

1) x_0 — точка сгущения области существования функции $y = f(x)$;

2) x_0 принадлежит области существования функции $y = f(x)$;

3) существует $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, обозначаемый $f(x_0 + 0)$;

4) $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Аналогично определяется непрерывность функции слева в точке x_0. Ясно, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она в этой точке одновременна непрерывна и справа и слева и $f(x_0 + 0) = f(x_0) = f(x_0 - 0)$.

Примеры. 1. Функция $y = [x]$ в точке $x_0 = 1$ непрерывна справа, так как $\lim\limits_{x \to 1 + 0} [x] = 1 = [1]$.

2. Функция $y = \operatorname{sign} x$ в точке $x_0 = 0$ не является непрерывной ни справа, ни слева. Действительно, хотя функция $y = \operatorname{sign} x$ в точке $x_0 = 0$ имеет и предел справа ($\lim\limits_{x \to 0 + 0} \operatorname{sign} x = 1$) и предел слева ($\lim\limits_{x \to 0 - 0} \operatorname{sign} x = -1$), но ни один из этих пределов не совпадает со значением функции $y = \operatorname{sign} x$ в точке $x_0 = 0$ ($\operatorname{sign} 0 = 0$).

3. Функция $y = 2^x$ в любой точке x непрерывна и справа и слева.

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 ***разрыв***, если не выполняется хотя бы одно из условий 1 — 4 определения непрерывности функции в точке x_0.

Пример. Функция $y = \operatorname{sign} x$ имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв. Действительно, равенство $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x = \operatorname{sign} 0$ не выполняется, так как не существует предела функции $y = \operatorname{sign} x$ в точке $x_0 = 0$ (хотя и существуют односторонние пределы, но они не равны друг другу и ни один из них не равен значению функции в точке $x_0 = 0$).

Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке x_0. По определению точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, если в этой точке функция $y = f(x)$ имеет конечный предел как справа, так и слева. Во всех остальных случаях разрыва точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода.*

Примеры. 1. Для функции $y = [x]$ точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва первого рода. Действительно, функция $y = [x]$ имеет в точке $x_0 = 1$ разрыв, так как функция $y = [x]$ в точке $x_0 = 1$ не имеет предела, но имеет конечный предел и справа ($\lim\limits_{x \to 1+0} [x] = 1$) и слева ($\lim\limits_{x \to 1-0} [x] = 0$).

2. Для функции $y = \frac{1}{x}$ точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва второго рода. Действительно, функция $y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$ имеет разрыв, так как точка $x_0 = 0$ не принадлежит области существования функции. Кроме того, функция $y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$ не имеет конечного предела справа ($\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$).

3. Для функции $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва второго рода. Действительно, функция $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ в точке $x_0 = 0$ имеет разрыв, так как точка $x_0 = 0$ не принадлежит области существования функции. Кроме того, функция $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ в точке $x_0 = 0$ не имеет предела справа, так как можно указать две последовательности значений аргумента справа $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$ такие, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n' = 0$, но соответствующие последовательности значение функции $\left\{\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right\}$ и $\left\{\sin\left(\frac{1}{x_n'}\right)\right\}$ таковы, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x_n'}\right)$. Такими, например, будут последовательность с общим чле-

ном $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ и последовательность с общим членом $x_n' = \dfrac{1}{\pi n}$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на некотором промежутке* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Другими словами, функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке (a, b), если:

1) весь промежуток входит в область существования функции $y = f(x)$;

2) любая точка x_0 этого промежутка есть точка сгущения области существования функции $y = f(x)$;

3) в любой точке x_0 этого промежутка существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

4) в любой точке x_0 этого промежутка справедливо равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, где $y_0 = f(x_0)$.

Примеры. 1. Функция $y = \cos x$ непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

2. Функция $y = \log_3 x$ непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$.

3. Функция $y = \dfrac{1}{x-1}$ непрерывна на промежутке $(1; +\infty)$; кроме того, она непрерывна на промежутке $(-\infty, 1)$, но она не является непрерывной, например, ни на промежутке $(-\infty, +\infty)$, ни на промежутке $[1, +\infty)$, ни на промежутке $(0, +\infty)$.

§ 5. Производная функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть x — некоторая точка сгущения функции, принадлежащая ее области существования, $f(x)$ — значение функции в этой точке. От значения x переходим к другому значению аргумента $x_1 \neq x$, которое также принадлежит области существования. Разность $x_1 - x$ (обозначим ее через Δx) называется *приращением аргумента в точке* x. Значение функции, соответствующее значению аргумента $x_1 = x + \Delta x$, обозначим $f(x + \Delta x)$.

Разность $f(x + \Delta x) - f(x)$ называется ***приращением функции в точке** x*, соответствующим приращением аргумента Δx в этой точке, и обозначается Δy или $\Delta f(x)$:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

В зависимости от вида функции, ее приращение Δy может быть равно нулю, быть положительным или отрицательным числом. Приращение аргумента Δx также может быть положительным или отрицательным, но $\Delta x \neq 0$.

Примеры. 1. Найти приращение функции $y = |x|$ в точках $x = 0$, $x = 1$ и $x = -1$, считая, что $|\Delta x| < 1$.

а) Если $x = 0$, то

$$\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x| = \begin{cases} \Delta x, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -\Delta x, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

б) Если $x = 1$, то

$$\Delta y = |1 + \Delta x| - |1| = 1 + \Delta x - 1 = \Delta x, \text{ если } |\Delta x| < 1.$$

в) Если $x = -1$, то

$$\Delta y = |-1 + \Delta x| - |-1| = 1 - \Delta x - 1 = -\Delta x, \text{ если } |\Delta x| < 1.$$

2. Найти приращения функции $y = \sin x$ в точках $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ и в произвольной точке x.

а) Если $x = 0$, то $\Delta y = \sin(0 + \Delta x) - \sin 0 = \sin \Delta x$.

б) Если $x = \frac{\pi}{3}$, то

$$\Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

в) Если $x = -\frac{\pi}{3}$, то

$$\Delta y = \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

г) Если x — любая точка, то

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

3. Найти приращения функции $y = \sqrt{x}$ в точках $x = 0$, $x = 1$ и любой точке $x \in (0, +\infty)$.

а) Если $x = 0$, то приращение $\Delta x > 0$ (в силу области существования функции $y = \sqrt{x}$), поэтому

$$\Delta y = \sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0} = \sqrt{\Delta x},$$

б) Если $x = 1$, то

$$\Delta y = \sqrt{1 + \Delta x} - \sqrt{1} = \frac{(\sqrt{1 + \Delta x} - 1)(\sqrt{1 + \Delta x} + 1)}{(\sqrt{1 + \Delta x} + 1)} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + \Delta x} + 1},$$

где $|\Delta x| < 1$.

в) Если x — любая точка ($x > 0$), то

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - x)(\sqrt{x + \Delta x} + x)}{(\sqrt{x + \Delta x} + x)} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + x},$$

где $|\Delta x| < x$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Дадим аргументу x приращение Δx (при этом предполагается, что точка $x + \Delta x$ принадлежит области существования функции). Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента в этой точке при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует и конечен.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x обозначается y' (читается «игрек штрих»), или $\frac{dy}{dx}$ (читается «де игрек по де икс»), или $\frac{df(x)}{dx}$ (читается «де эф по де икс»). Нахождение производной от функции называется дифференцированием.

Итак, по определению:

$$\Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

т.е.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Из определения следует, что производная функции $y = f(x)$ в точке x есть число, зависящее от рассматриваемого значения x, но не зависящее от Δx. Кроме того, производная функции $y = f(x)$ может существовать не во всех точках области существования этой функции. Рассмотрим множество M всех точек области существования функции $y = f(x)$, в которых эта функция имеет производную. Вычисляя производную функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in M$, получаем, что каждому числу $x \in M$ ставится в соответствие одно число $f'(x)$. Другими словами, этим соответствием задана функция, обозначаемая $y' = f'(x)$, с областью определения — множеством M.

Найдем производные некоторых элементарных функций.

1. Пусть на некотором интервале $(a;\ b)$ функция $y = f(x)$ имеет постоянное значение c, т.е. $y = c$ на $(a;\ b)$. Тогда $y' = (c') = 0$ для любого x из $(a;\ b)$.

Действительно, для любого x из $(a;\ b)$: $\Delta y = c - c = 0$, следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, откуда $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

2. Пусть $y = x$, тогда $y' = 1$ для любого x.

Действительно, для любого x $\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

3. Пусть $y = x^n$ (n — фиксированное натуральное число), тогда $y' = nx^{n-1}$ для любого x.

Действительно, для любого x по формуле бинома Ньютона (см. гл. II)

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots$$
$$\dots + (\Delta x)^n,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} +$$
$$+ \Delta x\left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2} + \Delta x\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3} + \dots + \Delta x^{n-2}\right]$$

и, следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$, т.е. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

4. Пусть $y = \sin x$, тогда $y' = \cos x$ для любого x. Действительно для любого x

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

и, следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right).$$

Ранее было доказано, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$. Докажем, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$, т.е. докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \cos x\right| < \varepsilon$, как только $\left|\frac{\Delta x}{2}\right| < \delta$. Для доказательства возьмем $\delta = \varepsilon$ и получим следующую цепочку неравенств:

$$\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \cos x\right| = \left|2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{4}\right)\sin\frac{\Delta x}{4}\right| < 2\left|\frac{\Delta x}{4}\right| < \varepsilon;$$

следовательно, $(\sin x)' = \cos x$.

5. Пусть $y = \cos x$, тогда $y' = -\sin x$ для любого x. Действительно, для любого x

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot(-1)\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right),$$

и, поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = \sin x$ (доказательство такое же, как и в предыдущем примере), то $y' = -\sin x$, т.е. $(\cos x)' = -\sin x$.

Если нужно найти производную функции $y = f(x)$ в некоторой фиксированной точке $x = x_0$, то обычно сначала находят производную этой функции в любой точке x, где она существует, т.е. находят $y' = f'(x)$, а затем вместо произвольного x подставляют $x = x_0$. Производную в фиксированной точке x_0 обозначают $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или $f'\big|_{x=x_0}$, $y'\big|_{x=x_0}$, $\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

Пример. Найти производную функции $y = \sin x$ в точках $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{2}$.

Так как $y' = \cos x$, то

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y'(\pi) = \cos\pi = -1,$$

$$y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Решение примеров на нахождение производных значительно упрощается, если использовать правила дифференцирования, которые вытекают из теорем для пределов. Рассмотрим некоторые из них.

В дальнейшем предполагается, что аргумент x изменяется в общей части областей существования функций, участвующих в следующих утверждениях.

1. *Если в точке x существуют конечные производные функции $y = v(x)$ и функции $y = u(x)$, то в точке x производная суммы этих функций существует и равна сумме производных этих функций, т.е.* $(v(x) + u(x))' = v'(x) + u'(x)$.

Действительно, дадим x приращение Δx. Тогда функции $y = v(x)$ и $y = u(x)$ получат приращение, соответственно равные $\Delta v(x)$ и $\Delta u(x)$, и функция $y = v(x) + u(x)$ получит приращение $\Delta y = [(v(x) + \Delta v(x)) + (u(x) + \Delta u(x))] - (v(x) + u(x)) = \Delta v(x) + \Delta u(x)$. Поскольку

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x},$$

то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\right) = v'(x) + u'(x),$$

так как предел каждого слагаемого существует и конечен.

Пример. $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$.

2. *Если в точке x существуют конечные производные функции $y = v(x)$ и функции $y = u(x)$, то в точке x производная разности этих функций существует и равна разности производных этих функций, т.е.* $(v(x) - u(x))' = v'(x) - u'(x)$.

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству предыдущего утверждения и поэтому опускается.

Пример. $(x^4 - \cos x)' = (x^4)' - (\cos x)' = 4x^3 + \sin x$.

Используя формулы нахождения производной в точке для суммы и разности двух слагаемых, легко получить формулу для нахождения производной в точке для алгебраической суммы любого числа слагаемых. Напишем, например, эти формулы для алгебраической суммы пяти слагаемых:

$$(u + v - p + g - t)' = u' + v' - p' + g' - t'.$$

Пример. $(x + x^5 - x^8 + \sin x - \cos x)' = 1 + 5x^4 - 8x^7 + \cos x + \sin x$.

3. *Если в точке x существуют конечные производные функции $y = v(x)$ и функции $y = u(x)$, то в этой точке существует производная функции $y = v(x)u(x)$, при этом*

$$y' = (v(x)u(x))' = v'(x)u(x) + v(x)u'(x).$$

Действительно, дадим приращение Δx. Тогда функции $y = v(x)$ и $y = u(x)$ получат приращения, при этом

$$y = (v(x) + \Delta v(x))(u(x) + \Delta u(x)) - v(x)u(x) = \\ = v(x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x) + \Delta v(x)\Delta u(x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} u(x) + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} v(x) + \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} \Delta u(x).$$

Применяя теоремы о пределе суммы и произведения, имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} u(x)\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} v(x)\right) + \\ + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} \Delta u(x)\right) = u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \\ + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta u(x)).$$

Учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} = v'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = u'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u(x) = 0$, получим $y' = (v(x)u(x))' = v'(x)u(x) + v(x)u'(\Delta x)$, что и требовалось доказать.

В частности, если $y = v(x) = c$ (c — константа), то $(cu(x))' = c'u(x) + cu'(x) = cu'(x)$, т.е. постоянный множитель можно вынести за знак производной: $y' = (cu(x))' = cu'(x)$.

Пример. $y = 5x^3 + 7x^2 - 4$.

$$y' = (5x^3 + 7x^2 - 4)' = 5(x^3)' + 7(x^2)' - (4)' = 15x^2 + 14x.$$

Используя формулу нахождения производной в точке для двух сомножителей, легко получить формулу для случая произведения нескольких сомножителей.

4. *Если в точке x существуют конечные производные функций $y = v(x)$ и $y = u(x)$ и функция $y = u(x)$ отлична от нуля в этой точке, существует и производная функции $y = \frac{v(x)}{u(x)}$, при этом $y' = \left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)' = \frac{v'(x)u(x) - u'(x)v(x)}{u^2(x)}$.*

Действительно, дадим x приращение Δx. Тогда функции $y = v(x)$ и $y = u(x)$ получат приращения, при этом

$$\Delta y = \frac{v(x) + \Delta v(x)}{u(x) + \Delta u(x)} - \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)}{u(x)\,(u(x) + \Delta u(x))}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x} - v(x)\dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x}}{u(x)\,(u(x) + \Delta u(x))}.$$

Применяя теоремы о пределах частного и произведения и учитывая непрерывность функции $y = u(x)$ в точке x, получим, что $y' = \frac{v'(x)u(x) - u'(x)v(x)}{u^2(x)}$.

Примеры. 1. $y = \operatorname{tg} x$.

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

т.е. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. $y = \operatorname{ctg} x$.

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

т.е. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Используя формулы производных основных элементарных функций и правила дифференцирования, можно найти производную любой функции, которая является суперпозицией основных элементарных функций. Приведем таблицу 31 производных элементарных функций:

Таблица 31

$y=f(x)$	$y'=f'(x)$	$y=f(x)$	$y'=f'(x)$
$y=c$ (c — const)	$y'=0$	$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
$y=x$	$y'=1$	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=x^2$	$y'=2x$	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=x^n$ (n — натуральное число)	$y'=nx^{n-1}$	$y=\operatorname{tg} x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y=x^{-n}$ (n — натуральное число)	$y'=-nx^{-n-1}$	$y=\operatorname{ctg} x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y=x^{\alpha}$ ($\alpha>0$)	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$	$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=x^{-\alpha}$ ($\alpha>0$)	$y'=-\alpha x^{-\alpha-1}$	$y=\arccos x$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$)	$y'=a^x\ln a$	$y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=\operatorname{arcctg} x$	$y'=\dfrac{-1}{1+x^2}$
$y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$		

УПРАЖНЕНИЯ

Выписать десять первых членов последовательности, если ее общий член задается формулой (1 — 6):

1. $a_n=\sin\dfrac{1}{x_n}$, где $x_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2\pi n}$.

2. $a_n=\sin\dfrac{1}{x_n}$, где $x_n=\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n}$.

3. $a_n = \sin\frac{1}{x_n}$, где $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$.

4. $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$. 5. $a_n = \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n$. 6. $a_n = \left(\frac{1-2n}{2n}\right)^n$.

Написать формулу общего члена последовательности, для которой заданы восемь первых ее членов (7 — 12):

7. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \frac{1}{5040}, \frac{1}{40320}, \ldots$

8. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots$

9. $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots$

10. $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, 8, \ldots$

11. $1, -1, 1, 5, 1, -5, 1, 9, \ldots$

12. $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \ldots$

13. Последовательность $\{c_n\}$ задана формулой общего члена: $c_n = 10n^2 + 4$. Найти c_{k+4}.

14. Является ли число (-21) членом последовательности $\{b_n\}$, заданной формулой общего члена $b_n = n^2 - 10n$? В случае утвердительного ответа найти его номер.

Выяснить, является ли монотонной последовательность, заданная следующей формулой общего члена (15 — 23):

15. $a_n = n^2 + 2n$. 16. $a_n = \frac{1}{n^2 + n}$.

17. $a_n = \cos n$. 18. $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

19. $a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$. 20. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

21. $a_n = 2n^2 - 2n$. 22. $a_n = |10 - 2n^2|$.

23. $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

Выяснить, является ли ограниченной последовательность, заданная следующей формулой общего члена (24 — 29):

24. $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$. 25. $a_n = \frac{n^4}{2^n}$.

26. $a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n!}$. 27. $a_n = \frac{n + 2n^2}{n}$.

28. $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$. 29. $a_n = \frac{n + \cos n}{2n + 3}$.

Привести пример последовательности (30 — 35):

30. Ограниченной сверху. но не ограниченной снизу.

31. Ограниченной снизу, но не ограниченной сверху.

32. Не ограниченной ни сверху, ни снизу.

33. Ограниченной, но не имеющей предела.

34. Которая не является возрастающей.

35. Которая не является убывающей.

36. Существует ли числовой промежуток вида $[a, b]$, которому принадлежат все члена последовательности $\{a_n\}$, заданной формулой общего члена $a_n = \frac{5+4n}{2+n}$? В случае утвердительного ответа укажите такой промежуток.

37. Найти пятый член арифметической прогрессии $\{c_n\}$, если $c_1 = -50$ и $d = 1{,}2$.

38. Найти сумму 30 первых членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1 = -2.5$ и $d = 3$.

39. Известны два члена арифметической прогрессии $\{b_n\}$: $b_7 = 4{,}9$ и $b_{17} = 10{,}9$. Каково число членов прогрессии, каждый из которых меньше 20?

40. Является ли число 35 членом арифметической прогрессии — 47, — 44, — 41,... ? В случае утвердительного ответа найти его номер.

41. Доказать, что если a, b и c есть три последовательных члена арифметической прогрессии, то $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

42. Найти 15-й член геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1 = -0{,}001$ и $q = 10$.

43. Известны 8-й член и знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$: $b_8 = 2{,}56$ и $q = 2$. Найти сумму 16 первых членов прогрессии.

44. Известны два члена геометрической прогрессии $\{b_n\}$: $b_1 = 0{,}1$ и $b_3 = 2{,}5$. Является ли эта прогрессия монотонной последовательностью?

45. Известны первый член и знаменатель геометрической прогрессии $\{a_n\}$: $a_1 = -81$ и $d = -\frac{1}{3}$. Является ли эта прогрессия монотонной последовательностью?

46. Доказать, что произведение n первых членов геометрической прогрессии равно $a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, где a_1 — первый член прогрессии, а q — ее знаменатель.

47. Доказать, что если ab, b^2, c^2 — последовательные члены арифметической прогрессии, то b, c и $(2b - a)$ — последовательные члены геометрической прогрессии.

48. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ таковы, что

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 0{,}1a_n + 14;$$
$$b_1 = 5, \quad b_{n+1} = b_n + 4;$$
$$c_1 = 5, \quad c_{n+1} = -3c_n.$$

Какая из последовательностей является: 1) арифметической прогрессией; 2) геометрической прогрессией?

49. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = \sqrt{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

Доказать, используя определение предела последовательности, следующие равенства (**50** — **55**):

50. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n + n^2} = 0$. **51**. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n - 2}{4n + 5} = \frac{3}{4}$.

52. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n - 3n^2}{(2n + 1)(n + 1)} = -\frac{3}{2}$. **53**. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n + 1} = 0$.

54. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n(n - 1)}{\left(n^2 - 4\right)} = 1$. **55**. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin 2n + 1}{n} = 0$.

Вычислить (**56** — **76**):

56. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 - 2n}{2 + 6{,}5n}$. **57**. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5n - 4}{1 - 7n} \cdot \frac{n - 3}{5 + 2n}$.

58. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{3n + 1}}{5 - 0{,}9n}$. **59**. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3n}{2n - 1} - \frac{n^2}{4n^2 - 1}\right)$.

60. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2\sqrt{1 - n^2 + n^4}}{2n - 1 + 3n^2}$. **61**. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2 - 2n} - n\right)$.

62. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3n + 1}{4n + 5}\right)^n$. **63**. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n - 1}{n + 2}\right)^n$.

64. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n(n + 3)}{(n + 1)(n + 2)}$. **65**. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{(n - 1)(n + 5)}\right)^n$.

66. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3^n + n}{3^n - 2n}$. **67**. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$.

68. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6x}{\sin 9x}$. **69**. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

70. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x$. **71**. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} (\sin 5x \cos x - \sin x \cos 5x)$.

72. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$. **73**. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x + 1}$.

74. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{(x - 1)(x + 6)}$. **75**. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

76. $\lim\limits_{x \to 0} (\sin 3x \operatorname{ctg} 4x)$.

Найти производную следующей функции (77 — 90):

77. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}(1 - x)$. 78. $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos(2x + 1)$.

79. $y = \cos 2x \sin(3x + 5)$. 80. $y = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(x - 1)}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x - 1)}$.

81. $y = \log_{1/2} \sqrt{2x - 1}$. 82. $y = \log_3\left(2x^2 - 3x + 1\right)$.

83. $y = \log_{10} \cos x$. 84. $y = x^{-\sqrt{3}} - x^{\sqrt{3}}$.

85. $y = (2 - x)^{4,8}$. 86. $y = \frac{\ln x}{\sin x}$.

87. $y = e^{2x} \operatorname{tg} x$. 88. $y = \frac{e^x}{\cos x}$.

89. $y = e^{\cos x^2}$. 90. $y = \left(\sqrt{2}x^4 - 3x^{\sqrt{3}}\right)e^{3x}$.

Глава X. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В гл. III уже рассматривались системы алгебраических уравнений с несколькими переменными. В этой главе рассматривается общая теория решения систем линейных уравнений с несколькими переменными.

Отметим, что алгебраическое уравнение $P(x, y, ..., t) = 0$ (см. гл. III) называется линейным, если $P(x, y, ..., t)$ есть многочлен степени не выше первой, целый относительно переменных $x, y, ..., t$.

§ 1. Матрицы

Матрицей размеров $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов.

Например, прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{2} \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

есть матрица размеров 2×3; прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3/4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

есть матрица размеров 3×2.

Матрица размеров $1 \times n$, т.е. состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой.* Например, матрица $(1 \ 3{\cdot}4 \ 5)$ есть матрица-строка.

Матрица размеров $m \times 1$, т.е. матрица, состоящая из одного столбца, называется *матрицей-столбцом*. Например, матрица $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец.

Матрица размеров $n \times n$ называется *квадратной матрицей*, а число n называется *ее порядком*. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

есть квадратная матрица третьего порядка.

Квадратная матрица порядка 1 есть просто число.

Числа, из которых состоит матрица, называются *элементами матрицы*.

Для записи матрицы в общем виде элементы матрицы обозначаются буквами с двумя индексами, например a_{ij}; при этом первый индекс указывает номер строки, а второй индекс — номер столбца, в которых содержится этот элемент.

Например, матрица размеров 3×4 записывается в общем виде так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Часто матрицу, элементами которой являются, например, числа b_{ij}, обозначают одной заглавной буквой B и для записи этого факта употребляют знак равенства. Например, матрицу с элементами a_{ij} принято обозначать буквой A и записывать этот факт так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Пусть дана матрица C размером $m \times n$:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Индексы i и j называются *допустимыми* для матрицы размеров $m \times n$, если i — индекс строк есть любое из чисел 1, 2, ..., m; j — индекс столбца есть любое из чисел 1, 2, ..., n.

Часто у матрицы-столбца и матрицы-строки их элементы обозначаются одним индексом. Например,

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad F=(f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4).$$

Матрицы A и B, каждая из которых размеров $m \times n$, называются *равными*, если равны их соответствующие элементы, т.е. если $a_{ij} = b_{ij}$ для любых допустимых индексов i и j. В таких случаях пишут $A = B$. Например,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{9} & 4 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{10}{5} \end{pmatrix}.$$

Для любых матриц знаки сравнения $>$, $\geq$, $<$ или $\leq$ лишены смысла, а для матриц разных размеров, кроме того, лишен смысла знак равенства.

Суммой матриц A и B, каждая из которых размеров $m \times n$, называется матрица C тех же размеров $m \times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $C = A + B$, если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для любых допустимых индексов i и j. Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для матриц A и B с разными размерами операция сложения лишена смысла.

Легко видеть, что для любых матриц A, B, C, каждая из которых размеров $m \times n$, справедливы следующие утверждения:

а) *сложение матриц коммутативно*: $A + B = B + A$;

б) *сложение матриц ассоциативно*: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Из этих утверждений следует, что в любой сумме конечного числа матриц, каждая из которых размеров $m \times n$, слагаемые можно записать в любом порядке и скобки, указывающие порядок сложения, можно расставлять произвольно. Например,

$$[A + (C + B)] + D = [(A + C) + B] + D = A + B + C + D.$$

Матрица размеров $m \times n$, у которой каждый элемент равен нулю:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

называется *нулевой матрицей* размеров $(m \times n)$ или *нуль-матрицей* размеров $m \times n$. Эта матрица обладает тем свойством, что для каждой матрицы A размером $m \times n$ справедливы равенства $A + 0 = 0 + A = A$.

Например, матрица $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ есть нуль-матрица размеров 2×3, матрица $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ есть квадратная нуль-матрица второго порядка.

Среди всех матриц, каждая из которых размеров $m \times n$, существует единственная нуль-матрица. Нуль-матрицы разных размеров принято обозначать одним и тем же символом 0, что не приводит к недоразумениям, ибо из контекста ясно, какие размеры имеет нуль-матрица в рассматриваемом случае.

Пусть дана матрица A размеров $m \times n$. Матрица $(-A)$ тех же размеров, каждый элемент которой есть элемент матрицы A, взятый с противоположным знаком, обладает тем свойством, что $A + (-A) = (-A) + A = 0$. Матрица $(-A)$ называется *противоположной матрицей* к матрице A. Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ противоположна к матрице $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; матрица $\begin{pmatrix} -5 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ противоположна к матрице $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Можно показать, что для любой матрицы A существует единственная противоположная матрица, т.е. для матрицы A только матрица $(-A)$ такова, что $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

Сложение матриц обладает обратной операцией — вычитанием. Это значит, что для любых двух матриц A и B, каждая из которых размеров $m \times n$, существует единственная матрица C тех же размеров и такая, что $A + C = B$. Матрица C называется *разностью* матриц A и B и обозначается $A - B$. Например,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A размеров $m \times n$ *на некоторое число* α называется матрица C тех же размеров $m \times n$, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением на это число α, т.е. $C = \alpha A$, если $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ для любых допустимых индексов i и j. Например,

$$2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad -3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из определения умножения матрицы на число следует, что для любых матриц A и B, каждая из которых размеров $m \times n$, и любых чисел α и β справедливы равенства:

а) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

б) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

в) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Заметим, что противоположная матрица $(-A)$ к матрице A равна $(-1)A$, т.е. $(-A) = (-1)A$.

Пусть дана матрица-строка F размеров $1 \times r$, т.е.

$$F = (f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots,\ f_r),$$

и матрица-столбец X размеров $r \times 1$, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_r \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы-строки F размеров $1 \times r$ на матрицу-столбец X размеров $r \times 1$ называется матрица, обозначаемая FX, размеров 1×1, т.е. число, которое равно сумме произведений соответствующих элементов этих матриц, т.е. по определению

$$FX = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_{r-1}x_{r-1} + f_rx_r$$

или

$$(f_1, f_2, \ldots f_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_r \end{pmatrix} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_rx_r.$$

Примеры. 1. $(1\ 2)\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 2 = 0;$

2. $\left(\frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ 0\ 1\ 3\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 + 0 \cdot (-7) + 1 \cdot 1 +$

$+ 3 \cdot (-1) = -1.$

С помощью произведения матрицы-строки размеров $1 \times r$ и матрицы-столбца размеров $r \times 1$ определяется произведение матрицы A размеров $m \times r$ и матрицы B размеров $r \times n$, т.е. таких матриц, что первый сомножитель, матрица A, имеет столько столбцов, сколько второй сомножитель, матрица B, имеет строк.

По определению *произведением матрицы A размеров $m \times r$ на матрицу B размеров $r \times n$* называется матрица C размеров

$m \times n$, обозначаемая AB, у которой элемент c_{ij} равен произведению i-й строки первого сомножителя, матрицы A, на j-й столбец второго сомножителя, матрицы B, т.е. $C = AB$, если $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{i,r-1}b_{r-1,j} + a_{ir}b_{rj}$ для любых индексов i и j матрицы C.

Примеры. 1. $(3\ 2\ -1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= (3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \quad 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (1\ 2).$$

2. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 11 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Итак, операция умножения двух прямоугольных матриц выполнима только в том случае, когда число столбцов в первом множителе равно числу строк во втором множителе, в остальных случаях произведение матриц не определяется. В частности, если матрицы A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка, то умножение матриц всегда выполнимо при любом порядке следования сомножителей.

Однако заметим, что даже в этом частном случае не всегда $AB = BA$. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

т.е. $AB \neq BA$.

Итак, умножение матриц некоммутативно, т.е. в общем случае $AB \neq BA$. Поэтому при перемножении матриц во избежание ошибок следует строго придерживаться заданного порядка следования множителей.

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными*, или *коммутативными*, между собой.

Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ перестановочны между собой, так как $AB = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, т.е. $AB = BA$.

Операция умножения матриц является *ассоциативной*, а также *дистрибутивной относительно сложения*, т.е. для любых прямоугольных матриц A, B и C, для которых имеют смысл соответствующие произведения, справедливы равенства:

а) $(AB)C = A(BC)$;

б) $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$.

Доказательство этих равенств опускается.

Операция умножения матриц соответствующим образом распространяется на случай нескольких сомножителей. В силу определения произведения матриц умножать матрицу A на себя можно только в том случае, если это квадратная матрица.

Пусть дана квадратная матрица A порядка n и натуральное число $p > 1$. Матрица $\underbrace{AA \ldots A}_{p \text{ раз}}$ называется *p-й степенью матрицы* A и обозначается A^p, т.е. для $p > 1$ по определению $A^p = \underbrace{AA \ldots A}_{p \text{ раз}}$.

Кроме того, по определению $A^1 = A$.

Пример. Найти куб матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из ассоциативного свойства умножения матриц следует, что $A^pA^q = A^{p+q}$, где p и q — произвольные натуральные числа.

Отметим, что для любой матрицы A размеров $m \times r$ произведение матрицы A на нуль-матрицу 0 размеров $r \times n$ есть нуль-матрица размеров $m \times n$ и произведение нуль-матрицы 0 размеров $l \times m$ на матрицу A размеров $m \times r$ есть нуль-матрица 0 размеров $l \times r$. Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. в тех случаях, когда произведение матриц имеет смысл, для любой матрицы A справедливы равенства $A0 = 0$ и $0A = 0$. В частности, для любой квадратной матрицы A порядка n и квадратной нуль-матрицы 0 порядка n $A0 =$ $= 0A = 0$.

Известно, что произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. В отличие от чисел, произведение двух матриц может быть равно нулю даже тогда, когда каждый из сомножителей не является нуль-матрицей, т.е. существуют матрицы $A \neq 0$ и $B \neq 0$ такие, что $AB = 0$.

Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ таковы, что произведение AB есть нуль-матрица. Действительно, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Заметим, что деление матриц не рассматривается, т.е. символ $\frac{B}{A}$ для матриц не существует.

Квадратная матрица порядка n

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

у которой элементы $a_{ii} = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, а остальные элементы равны нулю, обладает следующим свойством: $EA = A$ для каждой матрицы A размеров $n \times m$ и $AE = A$ для каждой матрицы A размеров $m \times n$. В частности, $AE = EA = A$ для каждой квадратной матрицы A порядка n; $EF = F$ для каждой матрицы-строки F размеров $1 \times n$; $EX = X$ для каждой матрицы-столбца X размеров $n \times 1$. Матрица E в произведении матриц играет ту же роль, что число 1 в произведении чисел, поэтому матрицу E принято называть *единичной матрицей* порядка n.

Транспонированием матрицы A называется перемена ролями строк и столбцов с сохранением их номеров. Таким образом, строки данной матрицы A будут в той же последовательности столбцами транспонированной матрицы, обозначаемой A^T, а столбцы матрицы A будут в той же последовательности строками транспонированной матрицы A^T.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Ясно, что при транспонировании матрица A размеров $m \times n$ переходит в матрицу A^T размеров $n \times m$. Если A — квадратная матрица порядка n, то и транспонированная матрица A^T является квадратной матрицей порядка n. Заметим, что единичная матрица не меняется при транспонировании. Легко проверяется, что транспонирование матриц обладает следующими свойствами:

а) $(A^T)^T = A$;

б) $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(A - B)^T = A^T - B^T$;

в) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ (λ — число);

г) $(AB)^T = B^T A^T$.

§ 2. Определители

Пусть дана квадратная матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Определителем второго порядка, соответствующем матрице (1), называют число $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Обозначается этот определитель символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

или буквой Δ, или символом $|A|$. Таким образом, по определению

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (3)$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-1) \cdot 4 = -6.$$

Элементы матрицы (1) принято называть *элементами определителя* (2), строки и столбцы матрицы (1) — *строками и столбцами определителя* (2).

Рассмотрим простейшие свойства определителей второго порядка.

1. Определитель квадратной матрицы (1) равен определителю ее транспонированной матрицы. Действительно, пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Так как $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, а $\Delta^T = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, то $\Delta = \Delta^T$.

Замена определителя матрицы (1) на определитель транспонированной матрицы называется *транспонированием* определителя (2). Поэтому свойство 1 можно сформулировать так: определитель (2) не меняется при его транспонировании.

Замечание. Так как по свойству 1 все строки определителя можно, не меняя его значения, заменить соответствующими столбцами, то, если доказана справедливость некоторого утверждения для столбцов определителя, тем самым будет доказана справедливость этого утверждения и для строк. Исходя из этого рассматриваемые ниже свойства определителей будут устанавливаться только для столбцов определителя.

2. При перестановке столбцов (строк) определитель меняет только знак.

Действительно, пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$. Тогда $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, $\Delta_1 = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$, т.е. $\Delta_1 = -\Delta$.

3. Если все элементы хотя бы одного столбца (строки) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

Действительно, если $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}$, то $\Delta = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{12} = 0$. Если $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}$, то по свойству 2 $\Delta_1 = -\Delta$, и поэтому $\Delta_1 = 0$.

4. Определитель, имеющий два одинаковых столбца (строки), равен нулю.

Действительно, если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}$, то $\Delta = a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11} = 0$. Если $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$, то $\Delta_1 = a_{12}a_{22} - a_{22}a_{12} = 0$.

5. Если все элементы некоторого столбца (строки) определителя умножить на одно и то же число α, то определитель умножится на это число.

Действительно, пусть, например, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix}$. Тогда $\Delta_1 = a_{11}(\alpha a_{22}) - a_{21}(\alpha a_{12}) = \alpha(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \alpha\Delta$.

Свойство 5 иногда формулируется следующим образом: *если все элементы какого-либо столбца (строки) определителя содержат общий множитель α, то его можно вынести за знак определителя.*

Так, например, по доказанному $\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Свойство 5 выражает правило умножения определителя на некоторое число.

6. Определитель, у которого элементы двух столбцов (строк) соответственно пропорциональны, равен нулю.

Действительно, пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и пусть, например, $a_{11} = \beta a_{12}$, $a_{21} = \beta a_{22}$. Тогда на основании свойств 5 и 4 определителя имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta a_{12} & a_{12} \\ \beta a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у одного из которых элементами соответствующего столбца (строки) являются первые слагаемые, у другого — вторые, а остальные элементы этих двух определителей те же, что и у данного.

Действительно, пусть, например, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Тогда $\Delta = (a_{11} + b_{11})a_{22} - (a_{21} + b_{21})a_{12} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12}) = \Delta_1 + \Delta_2$. Свойство 7 выражает правило сложения определителей.

8. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число.

Действительно, пусть, например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\alpha a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Покажем, что $\Delta = \Delta_1$. На основании свойств 7 и 6 определителей имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_{12} & a_{12} \\ \alpha a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta.$$

Пусть дана матрица третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице (4), называется число

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Обозначается этот определитель символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{6}$$

или одной буквой Δ, или символом $|A|$. Таким образом, по определению

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ = 2\,(1 + 0) - 0\,(4 - 3) + 2\,(0 + 1) = 4.$$

Элементы матрицы (4) называются *элементами* определителя (6), строки и столбцы матрицы (4) — *строками* и *столбцами* определителя (6).

Для изучения свойств определителя третьего порядка введем некоторые новые понятия.

Минором любого элемента определителя третьего порядка (6) называется определитель второго порядка, соответствующий матрице, полученной из данной матрицы (4) вычеркиванием столбца и строки, в которых содержится данный элемент. Минор элемента a_{ij} принято обозначать M_{ij}. Например, минор элемента a_{11} обозначают M_{11}, элемента a_{31} — M_{31} и т.д. Таким образом, по определению

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением любого элемента a_{ij} определителя третьего порядка (4) называют минор этого элемента M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначают заглавной буквой того же наименования и с теми же двумя индексами, что и у данного элемента.

Например, алгебраическое дополнение элемента a_{21} обозначают A_{21}, элемента a_{23} — A_{23} и т.д. Таким образом, по определению

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix},$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Определитель* (6) *равен сумме произведений элементов любого его столбца* (*строки*) *на соответствующие им алгебраические дополнения, т.е.*

$$\begin{aligned}
\Delta &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, & \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},\\
\Delta &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, & \Delta &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \quad (8)\\
\Delta &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}, & \Delta &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.
\end{aligned}$$

Докажем, например, четвертое из равенств (8). Для этого преобразуем правую часть этого равенства:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+ a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} -$$
$$- a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) -$$
$$- a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) =$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (5) определителя Δ, заключаем, что $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \Delta$. Аналогично устанавливается справедливость остальных равенств (8).

Запись определителя (6) по любой из указанных формул (8) называется *разложением* этого определителя по элементам соответствующего столбца или строки. Эти разложения удобно использовать для вычисления определителей третьего порядка. Например, разложив определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

по элементам второй строки, получим

$$\Delta = 1\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\,(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-2)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(6 - 1) + 2(2 - 12) = -25.$$

Для определителей третьего порядка остаются справедливыми свойства 1 — 8, рассмотренные для определителей второго порядка. Доказательство этих свойств непосредственно следует из теоремы 1 о разложении определителя третьего порядка по элементам строки (столбца) и соответствующих свойств определителей второго порядка. Так, свойство 1, заключающееся в том, что определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, можно доказать следующим образом. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель Δ^T по элементам первой строки, имеем

$$\Delta^T = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что определитель второго порядка от замены строк столбцами не меняется, получим

$$\Delta^T = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (5) определителя Δ, заключаем, что $\Delta^T = \Delta$.

Аналогично устанавливается справедливость свойств 2 — 8.

Свойства 1 — 8 определителей в сочетании с теоремой 1 о разложении определителя по элементам строк и столбцов часто позволяют упростить вычисления определителя третьего порядка.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 20 & 15 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

По свойству 5 определителей третьего порядка, вынося за знак определителя общий множитель 5 первой строки и общий множитель 4 второго столбца, имеем

$$\Delta = 5 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Прибавим теперь к элементам второго столбца элементы первого столбца, умноженные на (— 1), а к элементам третьего столбца — элементы первого столбца, умноженные на (— 3). По свойству 7 определитель не изменится и равен

$$\Delta = 20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Разложив полученный определитель по элементам первой строки, имеем

$$\Delta = 20 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 20(-4-0) = -80.$$

С помощью определителей третьего порядка можно квадратной матрице четвертого порядка поставить в соответствие число — определитель четвертого порядка. Затем с помощью определителей четвертого порядка ввести определители пятого порядка и т.д. Таким образом, для введения определителей n-ого порядка надо иметь определители $(n-1)$-го порядка. Такое введение определителей называется введением определителей по индукции. Приведем теперь введение определителей n-го порядка индукцией по n.

Пусть $n = 1$; определителем квадратной матрицы порядка 1 (т.е. числа a_{11}) считается само число a_{11}. Будем считать, что определители квадратных матриц порядка $(n-1)$ уже введены и доказана справедливость их основных свойств (свойств типа 1 — 8, доказанных выше для определителей порядка 2). Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Если в этой матрице вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, а порядок элементов оставить прежним, то получится квадратная матрица порядка $(n-1)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы обозначается M_{ij} и называется *минором элемента* a_{ij} матрицы (9).

Определителем матрицы (9) называется число

$$a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \quad (10)$$

Определитель матрицы (9) обозначается символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

или буквой Δ, или символом $|A|$. Таким образом, по определению

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \quad (12)$$

Элементы матрицы (9) называются *элементами определителя* (11), строки и столбцы матрицы (9) называются *строками* и *столбцами определителя* (11). Миноры элемента a_{ij} матрицы (9) называются *минорами элемента a_{ij} определителя* (11). Отметим, что определители второго порядка, введенные по формуле (3) и введенные по формуле (10), будут одинаковыми. Определитель, получаемый из определителя (11) заменой строк на столбцы, а столбцов на строки, называется *определителем, транспонированным с определителем* Δ, и обозначается Δ^T, а замена определителя Δ на определитель Δ^T называется *транспонированием определителя* Δ.

Алгебраическим дополнением любого элемента a_{ij} определителя n-порядка (11) называют минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначают заглавной буквой того же наименования и с теми же двумя индексами, что и у данного элемента, т.е. по определению $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Теорема 2. *Определитель n-го порядка* (11) *равен сумме произведений элементов любого его столбца (строки) на соответствующие им алгебраические дополнения, т.е.*

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \text{ для любого } j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \text{ для любого } i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (13)$$

Доказательство теоремы 2 опускается.

С помощью теоремы 2 о разложении определителя n-го порядка по элементам столбца (строки) и свойств 1 — 8 для определителей (n — 1)-го порядка доказываются свойства 1 — 8 определителей n-го порядка.

Не останавливаясь на доказательстве, перечислим эти свойства:

1. При транспонировании определителя его значение не изменяется, т.е. $\Delta = \Delta^T$.

2. От перестановки двух столбцов (двух строк) определитель меняет знак.

3. Если все элементы хотя бы одного столбца (строки) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

4. Определитель, имеющий два одинаковых столбца (строки), равен нулю.

5. если все элементы какого-либо столбца (строки) определителя умножить на одно и то же число α, то определитель умножится на это число (т.е. общий множитель элементов какого-либо столбца (строки) можно выносить за знак определителя).

6. Определитель, у которого элементы двух столбцов (строк) соответственно пропорциональны, равен нулю.

7. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у одного из которых элементами соответствующего столбца (строки) являются первые слагаемые, у другого — вторые, а остальные элементы этих двух определителей те же, что и у данного.

8. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца (строки) прибавить соответствующие эле-

менты другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число.

Сформулируем и докажем еще одно свойство определителей.

9. Сумма элементов некоторого столбца (строки) определителя порядка n, $n \geq 2$, умноженных на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки), равна нулю, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0$ $\left(\text{или } \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0\right)$ для любого $n \geq 2$ и любого $i \neq j$.

Доказательство. Пусть для определенности $j > i$, тогда разложив определитель по элементам j-го столбца, получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j-1} & a_{1i} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j-1} & a_{2i} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3j-1} & a_{3i} & a_{3j+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj-1} & a_{ni} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

У определителя, стоящего в правой части равенства (14), элементы i-го и j-го столбцов соответственно равны. По свойству 4 определитель (14) равен нулю, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0.$$

Для $i > j$ доказательство аналогично. Свойство 9 доказано.

Пользуясь свойствами 1 — 8, вычислим определитель единичной матрицы. единичную матрицу порядка k обозначим E_k. Пусть дана матрица E_n. Разлагая определитель этой матрицы по первому столбцу, получаем

$$|E_n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{21} + \dots + 0 \cdot E_{n1} = |E_{n-1}|.$$

Повторяя это рассуждение для определителя $|E_{n-1}|$, затем для $|E_{n-2}|$ и т.д., приходим к выводу, что $|E_n| = 1$. Итак, *определитель единичной матрицы любого порядка n равен* 1.

§ 3. Обратная матрица. Ранг матрицы

Если две квадратные матрицы A и B одного и того же порядка n таковы, что $AB = BA = E$ (где E — единичная матрица порядка n), то говорят, что матрицы A и B являются *обратными друг другу* и используют обозначение $B = A^{-1}$ и $A = B^{-1}$. Например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

являются обратными друг другу, поскольку $AB = BA = E$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е.} \quad A = B^{-1},\ B = A^{-1}.$$

По определению обратной матрицей для данной квадратной матрицы A порядка n называется квадратная матрица A^{-1} порядка n, обладающая свойствами $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичная матрица порядка n.

Для каждой матрицы A порядка n, имеющей обратную матрицу A^{-1}, обратная матрица A^{-1} единственна.

Действительно, пусть некоторая матрица A порядка n имеет обратную матрицу A^{-1}. Пусть существует матрица C порядка n, такая, что $CA = AC = E$, тогда

$$C = EC = (A^{-1}A)C = A^{-1}(AC) = A^{-1}E = A^{-1}.$$

Обратные матрицы обладают следующими свойствами:
а) $(A^{-1})^{-1} = A$,
б) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
в) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Доказательства этих свойств опускается.

Выясним, какие матрицы имеют обратные матрицы и если матрица A имеет обратную A^{-1}, то как ее находить.

Пусть дана квадратная матрица A порядка n ($n \geq 2$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составим квадратную матрицу $\tilde{A}$ порядка n следующим образом: на место каждого элемента матрицы A поставим алгебраическое дополнение этого элемента, т.е.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу A:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}^T$ называется *присоединенной* матрицей. Например, найдем присоединенную матрицу $\tilde{A}^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -18,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

то

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}6&-18&14\\0&3&-4\\0&0&2\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{A}^T=\begin{pmatrix}6&0&0\\-18&3&0\\14&-4&2\end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *вырожденной* (*особенной*), если ее определитель равен нулю ($|A|=0$), и *невырожденной*, если $|A|\neq 0$.

Теорема 3. *Для любой невырожденной матрицы A ($|A|\neq 0$) существует обратная матрица A^{-1}.*

Доказательство. Рассмотрим невырожденную матрицу первого порядка, т.е. число a_{11}, отличное от нуля; обратная матрица к этой матрице есть число $\frac{1}{a_{11}}$.

Пусть дана некоторая невырожденная матрица A второго порядка. Найдем произведение матриц $A\tilde{A}^T$ и $\tilde{A}^TA$, где $\tilde{A}^T$ — присоединенная матрица. Так как сумма произведений элементов некоторого столбца (строки) матрицы A на алгебраические дополнения этих элементов равна определителю $|A|$ (см. теорему 2), а сумма произведений элементов некоторого столбца (строки) матрицы A на алгебраические дополнения элементов другого столбца (строки) (по свойству 9 определителей) равна нулю, то

$$A\tilde{A}^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}&a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}\\a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}&a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A|&0\\0&|A|\end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}^TA=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}&A_{11}a_{12}+A_{21}a_{22}\\A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21}&A_{12}a_{12}+A_{22}a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A|&0\\0&|A|\end{pmatrix}.$$

Каждый элемент полученных матриц имеет общим множителем число $|A|$, следовательно,

$$A\tilde{A}^T=|A|\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=|A|E;\quad \tilde{A}^TA=|A|\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=|A|E.$$

Отсюда, в силу невырожденности матрицы A ($|A|\neq 0$), имеем

$$A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T\right)=E=\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T\right)A.$$

Следовательно, для невырожденной матрицы A второго порядка матрица, элементами которой являются соответствующие элементы присоединенной матрицы $\tilde{A}^T$, деленные на определитель $|A|$, является обратной матрицей A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Итак, для невырожденной матрицы A второго порядка не только доказано существование обратной матрицы A, но и указан способ ее построения.

Аналогично доказывается, что для любой невырожденной матрицы A порядка n, где $n \geq 3$, матрица, элементами которой являются соответствующие элементы присоединенной матрицы $\tilde{A}^T$, деленные на определитель $|A|$, является обратной матрицей A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & \dots & \frac{A_{1n}}{|A|} \\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{2n}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{|A|} & \frac{A_{n2}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Пример. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

невырожденная, так как $|A| = 6 \neq 0$. Ее присоединенная матрица

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -18 & 3 & 0 \\ 14 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1/2 & 0\\ 7/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Теорема 4. *Определитель произведения двух квадратных матриц A и B порядка n равен произведению их определителей, т.е.* $|AB| = |A|\,|B|$ (аналогичное свойство справедливо и для любого конечного числа сомножителей).

Доказательство теоремы 4 опускается.

Так как определитель единичной матрицы E порядка n равен 1, то определители двух взаимно-обратных матриц являются числами взаимно-обратными, т.е. $|A|\,|A^{-1}| = 1$.

Любая вырожденная матрица A порядка n не имеет обратной, так как по теореме 4 произведение вырожденной матрицы A на любую матрицу порядка n будет снова вырожденной матрицей.

Обратные матрицы часто применяются для решения матричных уравнений.

Пусть даны матрицы A, B, C. Если поставлена задача найти матрицу X такую, что справедливо матричное равенство $AX = B$, то говорят, что дано *матричное уравнение*

$$AX = B \tag{1}$$

с неизвестной матрицей X. Матрицу X, удовлетворяющую уравнению (1), называют *решением уравнения* (1).

Если поставлена задача найти матрицу Y такую, что справедливо матричное равенство $YA = C$, то говорят, что дано *матричное уравнение*

$$YA = C \tag{2}$$

с неизвестной матрицей Y. Матрицу Y, удовлетворяющую уравнению (2), называют *решением уравнения* (2).

Рассмотрим частный случай решения матричных уравнений (1) и (2). Пусть матрица A невырожденная, квадратная матрица порядка n; B — матрица размеров $n \times m$; C — матрица размеров $k \times n$, где n, m, k — любые натуральные числа. В этом случае уравнения (1) и (2) имеют решения.

Действительно, умножим обе части первого уравнения слева на матрицу A^{-1}, что можно сделать в силу выбранных размеров матрицы B. Проделав соответствующие действия:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B,$$

получим, что существует матрица $X = A^{-1}B$ размеров $n \times m$, удовлетворяющая уравнению (1).

Умножим обе части второго уравнения справа на матрицу A^{-1}, что можно сделать в силу выбранных размеров матрицы C, проделав соответствующие действия:

$$YAA^{-1} = CA^{-1}, \quad YE = CA^{-1}, \quad Y = CA^{-1},$$

получаем, что существует матрица $Y = CA^{-1}$, размеров $k \times n$, удовлетворяющая уравнению (2).

Отметим, что даже если $B = C$, но матрицы A^{-1} и B не перестановочны, то $X \neq Y$, т.е. для одних и тех же матриц A и $B = C$ уравнения (1) и (2) имеют, вообще говоря, разные решения.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решим уравнения (1) и (2). Прежде всего найдем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -11 \end{pmatrix},$$

$$Y = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 11 \\ 2 & -7 \end{pmatrix},$$

т.е. $X \neq Y$.

Ранее (см. § 2) было дано понятие минора элемента a_{ij} квадратной матрицы n-го порядка. В общем случае матрицы размеров $m \times n$ понятие минора элементов матрицы не вводится, а вводится понятие минора порядка k данной матрицы, где число k может принимать значения от единицы до наименьшего из чисел m и n, т.е. $1 \le k \le \min(m, n)$.

Пусть дана матрица A размеров $m \times n$ и пусть k — натуральное число такое, что $1 \le k \le \min(m, n)$. Выберем произвольно k строк и k столбцов матрицы A. Из элементов, стоящих на пересечениях этих строк и столбцов (не меняя их порядка) образуем квадратную матрицу M порядка k. Определитель матрицы M называется ***минором порядка k матрицы A***.

Пример. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

размеров 3×2. Тогда миноры первого порядка матрицы есть элементы этой матрицы, т.е. числа 1, 3, 3, 4, — 3, 0. Миноры второго порядка есть определители

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Миноров более высоких порядков эта матрица не имеет.

Если дана квадратная матрица A порядка n, то ее минор порядка n есть определитель A, миноры порядка $(n - 1)$ есть миноры соответствующих элементов этой матрицы, миноры порядка 1 есть элементы этой матрицы. Кроме того, эта матрица имеет миноры порядка k, где $1 < k < n - 1$.

Рангом матрицы A размеров $m \times n$ называется наивысшей порядок отличных от нуля миноров матрицы A.

Если все элементы матрицы A есть нули, то говорят, что ранг матрицы равен нулю.

Ранг невырожденной матрицы A порядка n равен n.

Например, ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ равен единице, так как миноры второго порядка этой матрицы равны нулю (в силу пропорциональности строк матрицы), но есть миноры первого порядка — элементы матрицы A — отличные от нуля.

Пусть дана матрица A размеров $m \times n$ и пусть дано натуральное число $l < \min(m, n)$. Если все миноры порядка l матрицы A равны нулю, то и все миноры этой матрицы порядка $(l + 1)$ также равны нулю.

Действительно, возьмем любой минор этой матрицы порядка $(l + 1)$ и разложим его по элементам некоторой строки. Каждое слагаемое разложения содержит множителем некоторый определитель порядка l — минор порядка l соответствующего элемента выбранной строки определителя порядка $(l + 1)$. Поскольку каждый минор порядка l равен нулю, то и сумма разложения тоже равна нулю, поэтому выбранный минор порядка $(l + 1)$ равен нулю. Следовательно, если все миноры порядка l равны нулю, то и все миноры порядка, большего чем l, также равны нулю.

Таким образом, для определения ранга матрицы размеров $m \times n$ надо сначала найти хотя бы один отличный от нуля минор первого порядка, т.е. надо выяснить, есть ли среди элементов матрицы хотя бы один, отличный от нуля. Если такого элемента нет, то ранг матрицы равен нулю. Если у матрицы есть элемент, отличный от нуля, то надо найти хотя бы один отличный от нуля минор второго порядка. Если такого минора нет, то ранг матрицы равен 1. Если есть отличный от нуля минор второго порядка, то надо искать отличный от нуля минор третьего порядка и т.д. до тех пор пока не найдется отличный от нуля минор r-го порядка; но либо все миноры порядка $r + 1$ равны нулю, либо $r = \min(m, n)$. Тогда ранг матрицы равен r.

Для нахождения ранга матрицы размеров $m \times n$ часто поступают так. Берут любой отличный от нуля элемент матрицы. Затем, дописывая некоторую строку и некоторый столбец, отличный от тех, где лежит элемент, образуют всевозможные миноры второго порядка до тех пор пока не найдется минор второго порядка, отличный от нуля. Затем, дописывая некоторую строку и некоторый столбец, отличный от тех, где лежит найденный минор второго порядка, образуют всевозможные миноры третьего порядка до тех пор пока не найдется минор третьего порядка, отличный от нуля. Продолжают этот процесс до тех пор пока не найдется минор порядка r, отличный от нуля, для которого все миноры порядка $(r + 1)$, построенные указанным образом, равны нулю, любо таких миноров не будет вообще (если матрица содержит r строк и r столбцов). Тогда ранг матрицы равен r.

Доказательство справедливости этого способа определения ранга матрицы опускается.

Пример. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

Минор первого порядка (число 1), лежащий на пересечении первого столбца и первой строки, отличен от нуля. Минор второго порядка, лежащий на пересечении первых двух столбцов и первых двух строк, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$ также отличен от нуля. Все миноры третьего порядка этой матрицы равны нулю. Значит, ранг матрицы равен двум.

§ 4. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные, a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n)$ — коэффициенты, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — свободные члены системы уравнений (1). Напомним, что числовой набор (1, 2, ..., n), соответствующий набору неизвестных $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$, называется решением системы (1), если при подстановке в каждое уравнение системы (1) соответствующих чисел вместо неизвестных получается m верных числовых равенств. Решить систему (1) — это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* (противоречивой), если она не имеет решений. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. Можно показать, что неопределенная система линейных уравнений всегда имеет бесконечное множество решений.

Примеры. Линейное уравнение с одним неизвестным $a_{11}x_1 = b_1$ при $a_{11} \neq 0$ имеет единственное решение $x = \frac{b_1}{a_{11}}$.

Линейное уравнение с двумя неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad \text{при} \quad a_{11} \neq 0 \text{ и при } a_{12} \neq 0$$

имеет бесконечно много решений.

Действительно, пусть, например, $a_{12} \neq 0$, тогда уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ равносильно уравнению

$$x_{12} = \frac{b_1 - a_{11}x_1}{a_{12}},$$

которое имеет решением $\left(\alpha, -\frac{a_{11}\alpha}{a_{12}} + \frac{b_1}{a_{12}}\right)$, где α — любое действительное число.

Система двух линейных уравнений с одним неизвестным

$$\begin{cases} a_{11}x = b_1 & (a_{11} \neq 0), \\ a_{21}x = b_2 & (a_{21} \neq 0), \end{cases}$$

такая, что $\frac{b_1}{a_{11}} \neq \frac{b_2}{a_{21}}$, несовместна.

Действительно, пусть число α — решение уравнения $a_{11}x = b_1$, т.е. пусть справедливо числовое равенство $a_{11}\alpha = b_1$. Тогда $\alpha = \frac{b_1}{a_{11}}$. Если бы $\alpha = \frac{b_1}{a_{11}}$ было решением уравнения $a_{21}x = b_2$, то было бы справедливо числовое равенство $\frac{a_{21}b_1}{a_{11}} = b_2$ или, в силу того что $a_{21} \neq 0$, числовое равенство $\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{b_2}{a_{21}}$, что противоречит условию. Итак, решение α уравнения $a_{11}x = b_1$ не является решением уравнения

$a_{21}x = b_2$, а это значит, что система двух уравнений с одним неизвестным, такая, что $\frac{b_1}{a_{11}} \neq \frac{b_2}{a_{21}}$, несовместна.

Основной матрицей системы (1) называется матрица A размеров $m \times n$, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных системы уравнений (1), т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицей неизвестных систем (1) называется матрица-столбец X, элементами которой являются неизвестные системы, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрицей свободных членов системы (1) называется матрица-столбец B, элементами которой являются свободные члены системы, т.е.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

или

$$AX = B \qquad (2)$$

называется *матричным уравнением системы* (1), если матрица A, X и B — соответствующие матрицы системы (1).

Поскольку любой числовой набор $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, являющийся решением системы (1), записанный в виде матрицы-столбца

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

является решением матричного уравнения (2), а любая числовая матрица-столбец

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

являющаяся решением матричного уравнения (2) системы (1), записанная в виде числового набора $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, является решением системы (1), то говорят, что *система линейных уравнений* (1) *равносильна матричному уравнению* (2) *системы* (1).

Рассмотрим частный случай системы (1). Пусть дана система n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

и соответствующее матричное уравнение этой системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

или

$$AX = B \tag{4}$$

Определитель матрицы A системы (3) будем называть *основным определителем* и обозначать через Δ, т.е. $\Delta = |A|$. Предположим, что основная матрица A (являющаяся квадратной матрицей порядка n) системы (3) невырожденная, т.е. пусть $\Delta = |A| \neq 0$. Тогда, как показано в § 3, существует единственная обратная матрица A^{-1}. Умножив левую и правую части матричного уравнения (4) системы (3) слева на обратную матрицу A^{-1}, получим, что $X = A^{-1}B$, причем матрица X — матрица размеров $n \times 1$, т.е. матрица-столбец. Итак, матричное уравнение (4) системы (3) в силу единственности обратной матрицы A^{-1} имеет единственное решение — матрицу-столбец $X = A^{-1}B$.

Так как матричное уравнение (4) равносильно системе (3), то, если определитель основной матрицы A линейной системы (3) не равен нулю (т.е. $|A| \neq 0$), тогда система (3) совместна и определена, т.е. имеет единственное решение.

Найти это единственное решение системы (3) можно по правилу Крамера, формулировка которого будет приведена ниже.

Если в основной матрице A системы (3) n линейных уравнений с n неизвестными вместо j-го столбца коэффициентов системы (3) поставить столбец свободных членов этой системы, то полученную матрицу называют *дополнительной матрицей системы* (3) и обозначают ее $\overset{j}{A}$, т.е.

$$\overset{j}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Определитель матрицы $\overset{j}{A}$ обозначают обычно Δ_j, т.е. $\Delta_j = |\overset{j}{A}|$.

Перейдем теперь к решению системы уравнений (3).

Пусть $n = 1$, т.е. система (3) состоит из одного уравнения с одним неизвестным: $a_{11}x = b_1$, и пусть $a_{11} \neq 0$. Ясно, что это уравнение имеет единственное решение — число $\frac{b_1}{a_{11}}$.

Пусть теперь $n = 2$. Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{6}$$

Основной матрицей A, дополнительными матрицами $\overset{1}{A}$ и $\overset{2}{A}$ этой системы являются соответственно матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \overset{1}{A} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \overset{2}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть определитель основной матрицы A не равен нулю ($\Delta = |A| \neq 0$). Тогда существует единственная обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

и справедлива цепочка матричных равенств

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1A_{11} + b_2A_{21}}{|A|} \\ \dfrac{b_1A_{12} + b_2A_{22}}{|A|} \end{pmatrix}$$

откуда

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21}}{|A|} = \frac{b_1(-1)^{1+1}M_{11} + b_2(-1)^{2+1}M_{21}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{1}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22}}{|A|} = \frac{b_1 (-1)^{1+2} M_{12} + b_2 (-1)^{2+2} M_{22}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{2}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

т.е. компоненты решения (x_1, x_2) системы (6) находятся по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{7}$$

где Δ, Δ_1, Δ_2 — определители матриц A, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$ системы (6).

Рассмотрим систему трех линейных уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_n = b_3. \end{cases} \tag{8}$$

Основной матрицей A и дополнительными матрицами $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ системы (8) являются соответственно матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\overset{1}{A} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \overset{2}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \overset{3}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть определитель основной матрицы A не равен нулю ($\Delta = |A| \neq 0$). Тогда существует единственная обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и справедлива цепочка матричных равенств

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} \\ b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}}{|A|} \\ \dfrac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}}{|A|} \\ \dfrac{b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}}{|A|} \end{pmatrix},$$

откуда

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}}{|A|} =$$

$$= \frac{b_1(-1)^{1+1}M_{11} + b_2(-1)^{2+1}M_{21} + b_3(-1)^{3+1}M_{31}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{1}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}}{|A|} =$$

$$= \frac{b_1(-1)^{1+2}M_{12} + b_2(-1)^{2+2}M_{22} + b_3(-1)^{3+2}M_{32}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{2}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$x_3 = \frac{b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}}{|A|} =$$

$$= \frac{b_1(-1)^{1+3}M_{13} + b_2(-1)^{2+3}M_{23} + b_3(-1)^{3+3}M_{33}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{3}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

т.е. компоненты решения (x_1, x_2, x_3) системы (8) находятся по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 — определители матриц A, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ системы (8).

Докажем, что если определитель основной матрицы A системы (3) не равен нулю, то j-я компонента x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) единственного решения ($x_1, x_2, \dots, x_n$) системы (4) находится по формуле

$$x_j = \frac{|\overset{j}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где $|\overset{j}{A}| = \Delta_j$ — определитель дополнительной матрицы A системы (3), а $|A| = \Delta$ — определитель основной матрицы A системы (3). Рассмотрим j-ю компоненту матрицы-столбца $A^{-1}B$, являющегося единственным решением матричного уравнения (4) системы (3). Имеем

$$x_j = \frac{b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}}{|A|} =$$

$$= \frac{b_1(-1)^{1+j}M_{1j} + b_2(-1)^{2+j}M_{2j} + \dots + b_n(-1)^{n+j}M_{nj}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{j}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

что и требовалось доказать.

Правило, по которому находится решение системы (3), называется правилом Крамера. Сформулируем его.

Правило Крамера. *Если система* (3) *n уравнений с n неизвестными такова, что определитель ее основной матрицы не равен нулю* ($\Delta \neq 0$), *то система имеет единственное решение* ($x_1, x_2, \dots, x_n$), *каждая компонента которого находится по формулам Крамера, т.е.* $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), *где*

Δ_j — *определитель дополнительной матрицы A, полученной из основной матрицы A системы* (3) *заменой j-го столбца на столбец свободных членов системы.*

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 = 4. \end{cases}$$

Определитель основной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 8 \end{vmatrix} = -72 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное решение. Найдем его по правилу Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 12 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 36,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 4 \end{vmatrix} = -90.$$

Следовательно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{4}$, т.е. система имеет единственное решение: $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

В случае, когда определитель $|A|$ основной матрицы A системы (3) равен нулю, правило Крамера не применимо.

Перейдем к изучению систем m линейных уравнений с n неизвестными.

Расширенной матрицей системы уравнений (1) называется матрица, получаемая добавлением к основной матрице A системы (1) столбца свободных членов, располагая его последним столбцом и отделяя его вертикальной чертой, т.е. матрица

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

Отметим, что ранг расширенной матрицы B не меньше ранга основной матрицы A системы (1). Точнее, если ранг основной матрицы равен r, а ранг расширенной — R, то $r \le R$. В то же время очевидно, что $R \le r + 1$.

Вопрос о совместности системы (1) решает критерий Кронекера — Капелли: ***система* (1) *т линейных уравнений с п неизвестными совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы В равен рангу основной матрицы А системы* (1).**

Доказательство этой теоремы опускается.

Пусть ранг основной матрицы системы (1) равен r, причем $1 \le r \le \min(m, n)$. В этом случае любой отличный от нуля минор порядка r основной матрицы системы (1) называют *главным минором системы*.

Решение системы линейный уравнений состоит в следующем. Вычисляем ранг основной матрицы A системы (1) и расширенной матрицы B.

Если ранг основной матрицы A системы (1) не равен рангу расширенной матрицы B, то согласно критерию Кронекера — Капелли система несовместна, т.е. система (1) не имеет ни одного решения. На этом решение системы (1) заканчивается.

Если ранги основной и расширенной матриц равны между собой и равны r, т.е. система (1) совместна, то берут любой отличный от нуля минор основной матрицы порядка r и рассматривают r уравнений, коэффициенты которых входят в этот главный минор, а остальные уравнения системы отбрасывают. Неизвестные, коэффициенты которых входят в этот главный минор, объявляют *главными*, а остальные неизвестные — *свободными*. Новую систему переписывают так, что в левых частях всех уравнений остаются только члены, содержащие r главных неизвестных, а все остальные члены уравнений, содержащие $(n - r)$ неизвестных, переносятся в правые части уравнений. Затем по правилу Крамера находят главные неизвестные. Легко видеть, что при этом главные неизвестные выражаются через свободные неизвестные, каждое из которых может принимать любое числовое значение. Полученные решения новой системы с r главными неизвестными называются *общим решением системы* (1).

Придавая всем свободным неизвестным некоторые числовые значения, из общего решения находят соответствующие числовые значения главных неизвестных и тем самым находят находят решение исходной системы уравнений (1), которое называется *частным решением* при данных числовых значениях свободных неизвестных. Указанным путем можно получить любое решение системы (1).

Примеры. 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Ранг основной матрицы этой системы равен двум, так как существует отличный от нуля минор второго порядка этой матрицы, например

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

а все миноры третьего порядка равны нулю.

Ранг расширенной матрицы этой системы равен трем, так как существует отличный от нуля минор третьего порядка этой матрицы, например

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35.$$

Согласно критерию Кронекера — Капелли система несовместна, т.е. не имеет решений.

2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 9x_2 - 11x_3 = 2. \end{cases}$$

Ранг основной матрицы этой системы равен двум и ранг расширенной матрицы тоже равен двум, так как, например, минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -17$$

основной матрицы отличен от нуля, а все миноры третьего порядка основной и расширенной матрицы равны нулю.

Значит, система совместна. Возьмем за главный минор, например, минор $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. Так как третье уравнение системы не содержит элементов этого главного минора, то третье уравнение отбрасываем. Неизвестные x_1 и x_2 объявляем главными, ибо их коэффициенты входят в главный минор, неизвестную x_3 объявляем свободной.

Получаем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2x_3 + 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3x_3. \end{cases}$$

Решаем ее по правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2x_3 + 2 & 3 \\ -3x_3 & -2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-4x_3 - 4 + 9x_3}{-17} = \frac{5x_3 - 4}{-17} = -\frac{5}{17}x_3 + \frac{4}{17},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2x_3 + 2 \\ 1 & -3x_3 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-21x_3 - 2x_3 - 2}{-17} = \frac{-23x_3 - 2}{-17} = \frac{23}{17}x_3 + \frac{2}{17}.$$

Итак, общим решением исходной системы является бесконечное множество наборов (x_1, x_2, x_3) вида $\left(-\frac{5}{17}t + \frac{4}{17}, \frac{23}{17}t + \frac{2}{17}, t\right)$, где t — любое действительное число. Частным решением исходного уравнения будет, например, числовой набор $\left(\frac{4}{17}, \frac{2}{17}, 0\right)$, получающийся при $t = 0$.

3. При каких k совместна система уравнений

$$\begin{cases} x+ky=3, \\ kx+4y=6? \end{cases}$$

Поскольку $r \neq 0$, то эта система совместна в двух случаях: когда $\Delta \neq 0$ и когда $R = r = 1$. Поэтому рассмотрим два случая.

а) Если $\Delta \neq 0$, т.е. если $\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, т.е. если $k^2 \neq 4$, то по правилу Крамера система имеет единственное решение.

Значит, для любого k, кроме $k = 2$ и $k = -2$, система имеет единственное решение.

б) Если $R = r = 1$, т.е. если

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & k \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. если $k = 2$, то система совместна.

Подводя итог, получаем, что исходная система совместна при любых k, кроме $k = -2$.

Используя критерий Кронекера — Капелли, проведем *исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y*:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{9}$$

Основная матрица этой системы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

имеет ранг r, причем $0 \leq r \leq 2$.

Расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

имеет ранг R, причем $0 \leq r \leq R$. Очевидно, что $r \leq R \leq r + 1$.

Имеет место следующее утверждение.

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными (9). *Тогда*:

1. *если* $r = R = 0$, *т.е. если все коэффициенты* a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 *равны нулю, то любая пара действительных чисел является решением системы* (9);

2. *если* $r = 0$, $R = 1$, *т.е.* $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ *и* $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, *то система* (9) *не имеет решений*;

3. *если* $r = 1$, $R = 1$, *то система* (9) *имеет бесконечно много решений, но не любая пара действительных чисел есть ее решение*;

4. *если* $r = 1$, $R = 2$, *то система* (9) *не имеет решений*;

5. *если* $r = 2$, $R = 2$, *то система* (9) *имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера.*

Справедливо и обратное утверждение.

1. *Если система* (9) *имеет единственное решение, то* $r = R = 2$;

2. *если система* (9) не имеет решений, то $r \neq R$, т.е. либо $r = 0$ *и* $R = 1$, *либо* $r = 1$ *и* $R = 2$;

3. *если любая пара действительных чисел является решением системы* (9), *то* $r = R = 0$;

4. *если система* (9) *имеет бесконечно много решений, но не любая пара действительных чисел является ее решением, то* $r = R = 1$.

Приведем доказательство этих утверждений только в том случае, когда оба уравнения системы (9) являются уравнениями первой степени, т.е. когда выполняются условия $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. В этом случае каждое уравнение этой системы в отдельности определяет прямую на плоскости, где задана система координат xOy (см. гл. III). Это дает возможность придать геометрический характер дальнейшим рассуждениям при исследовании системы (9).

Теорема. *Пусть две прямые заданы уравнениями*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y - c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y - c_2 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

где $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

1. *Для того чтобы две прямые пересекались, необходимо и достаточно, чтобы* $R = r = 2$.

2. *Для того чтобы две прямые были параллельными, но не совпадали, необходимо и достаточно, чтобы* $r = 1$, $R = 2$.

3. *Для того чтобы две прямые совпадали, необходимо и достаточно, чтобы* $r = R = 1$.

Доказательство. Сначала докажем достаточность условий.

1. Если $r = R = 2$, то система (10) имеет единственное решение, которое легко найти по правилу Крамера, а это означает, что прямые имеют одну общую точку, т.е. пересекаются.

2. Если $r = 1$, $R = 2$, то система (10) несовместна, и поэтому прямые не имеют общих точек, т.е. параллельны и не совпадают.

3. Если $r = R = 1$, то все миноры второго порядка основной и расширенной матриц равны нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Эти условия можно переписать так:

$$a_1b_2 = b_1a_2, \tag{11}$$
$$c_1b_2 = b_1c_2, \tag{12}$$
$$a_1c_2 = a_2c_1. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь все возможные случаи.

а) если $a_1 = 0$, то $b_1 \neq 0$, т.к. $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. Тогда из (11) следует, что $a_2 = 0$, а так как $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, то $b_2 \neq 0$. Тогда из (12) находим, что $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} = \alpha$ и при этом уравнения прямых примут вид

$$b_1(y - \alpha) = 0, \quad b_2(y - \alpha) = 0.$$

Поскольку $b_1 \neq 0$, и $b_2 \neq 0$, то отсюда вытекает, что эти прямые совпадают с прямой $y - \alpha = 0$.

б) Если $b_1 = 0$, то $a_1 \neq 0$, а из (11) тогда следует, что $b_2 = 0$ (причем $a_2 \neq 0$). Тогда из (13) имеем $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \beta$, и поэтому уравнения прямых примут вид $a_1(x - \beta) = 0$, $a_2(x - \beta) = 0$. Поскольку $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, то отсюда вытекает, что эти прямые совпадают с прямой $x - \beta = 0$.

в) Если $a_1 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$, то из (11) вытекает, что $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \gamma$, а из (12) и (13) вытекает, что $c_2 = \frac{b_2}{b_1} c_1 = \frac{a_2}{a_1} c_1$. Таким образом, получаем что $a_2 = \gamma a_1$, $b_2 = \gamma b_1$, $c_2 = \gamma c_1$, и поэтому уравнения прямых примут вид

$$a_1 x + b_1 y - c_1 = 0, \quad \gamma (a_1 x + b_1 y - c_1) = 0.$$

Поскольку $\gamma \neq 0$, то отсюда вытекает, что эти прямые совпадают.

Теперь докажем необходимость условий. Доказательство проведем методом от противного.

1. Пусть прямые пересекаются. Докажем, что $r = R = 2$. Если бы оказалось, что $r = 1$, $R = 2$, то по доказанному прямые были бы параллельны и не совпадали. Если бы оказалось, что $r = R = 1$, то по доказанному прямые оказались бы совпавшими.

Следовательно, $r = R = 2$.

2. Пусть прямые параллельны. Докажем, что $r = 1$, $R = 2$. Если бы оказалось, что $r = R = 2$, то по доказанному прямые оказались бы пересекающимися. Если бы оказалось, что $r = R = 1$, то по доказанному прямые оказались бы совпавшими.

Следовательно, $r = 1$, $R = 2$.

3. Пусть прямые совпадают. Докажем, что $r = R = 1$. Если бы оказалось, что $r = R = 2$, то по доказанному прямые оказались бы пересекающимися. Если бы оказалось, что $r = 1$, $R = 2$, то по доказанному прямые были бы параллельны.

Следовательно, $r = R = 1$. Теорема доказана полностью.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $A + B$, $A - B$, $2A + 2B$, $3A - 2B$.

2. Найти матрицу C, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $A + 2C = 3B$.

3. Найти произведения AB и BA, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти все матрицы X, перестановочные A, т.е. те, для которых $AX = XA$.

5. Матрица $S = \alpha E$, где E — единичная матрица порядка n, а α — число, называется скалярной. Показать, что скалярная матрица S перестановочна с каждой матрицей порядка n, т.е. если A — матрица порядка n, то $SA = AS$.

6. Показать, что матрицы $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ перестановочны. Найти их произведение.

7. Найти все квадратные матрицы B, для которых $AB = 0$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Найти общий вид матрицы A третьего порядка, для которой $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = 0$.

9. Пусть $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Показать, что $J^2 = -E$, $E^2 = E$.

10. Дан многочлен $P(x) = x^2 - 5x + 6$ и матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $P(A) = A^2 - 5A + 6E$.

Написать транспонированные матрицы для матриц (11 — 14):

11. $A = (2 \;\; 1 \;\; 3)$; 12. $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; 13. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 14. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Проверить выполнение свойства транспонирования на примере матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

16. Показать, что при умножении матрицы $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ слева на произвольную матрицу A третьего порядка меняются местами первые две строки матрицы A. Установить, что произойдет при умножении справа.

17. Показать, что при умножении матрицы $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ слева на произвольную матрицу A третьего порядка 2-я строка матрицы A умножается на α. Установить, что происходит при умножении справа.

18. Показать, что при умножении матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ на произвольную матрицу A третьего порядка справа к первому столбцу матрицы A добавляется 3-й столбец, умноженный на α. Установить, что происходит при умножении слева.

Вычислить определители (**19** — **25**):

19. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **20.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$. **22.** $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & -a & -1 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix}$. **24.** $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$. **25.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Найти ранг матрицы (**26** — **28**):

26. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. **27.** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 5 & -1 & -17 \\ 2 & -1 & 13 \end{pmatrix}$.

28. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

29. Убедиться, что для $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, если $|A| = ad - cb \neq 0$, то $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

30. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

31. Доказать, что если матрицы A и B перестановочны, то перестановочны и обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}.

32. Убедиться, что $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решить систему уравнений (**33** — **40**):

33. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 7, \\ -2x_1 + 9x_2 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 = -2. \end{cases}$

35. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 0, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} 2x - 4y + z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 10. \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = 6, \\ x_2 - 6x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 3, \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$

Глава XI. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

При рассмотрении действительных чисел отмечалось, что в множестве действительных чисел нельзя, например, найти число, квадрат которого равен (— 1). Чтобы подобные задачи были разрешимы, понятие числа расширяется с помощью введения комплексных чисел.

§ 1. Понятие комплексного числа

Пусть даны выражения вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, i — некоторый символ, смысл и связь которого с действительным числом b, а также смысл знака «+», соединяющего a и bi, будут выяснены позже. Введем определения равенства, суммы и произведения таких выражений.

Выражения $a + bi$ и $c + di$ считаются *равными* в том и только в том случае, если одновременно $a = c$ и $b = d$. Равенство выражений $a + bi$ и $c + di$ принято записывать в виде $a + bi = c + di$.

Из определения равенства вытекает, что два выражения $a + bi$ и $c + di$ *различны*, т.е. $a + bi \neq c + di$, если выполнено хотя бы одно из неравенств $a \neq c$ или $b \neq d$.

Замечание. Из всех знаков неравенств $\neq$, $<$, $\geq$, $\leq$, $>$ для выражений вида $a + bi$ употребляется только знак $\neq$.

Суммой выражений $a + bi$ и $c + di$ называется выражение $(a + c) + (b + d)i$. Сумму выражений $a + bi$ и $c + di$ принято обозначать через $(a + bi) + (c + di)$, т.е. по определению $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Произведением выражений $a + bi$ и $c + di$ называется выражение $(ac - bd) + (ad + bc)i$. Произведение выражений

$a + bi$ и $c + di$ принято обозначать через $(a + bi)(c + di)$, т.е. по определению $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Множество всех выражений вида $a + bi$, которые различают, складывают и перемножают по только что сформулированным определениям, называется *множеством комплексных чисел*, а каждый элемент этого множества, т.е. выражение $a + bi$, называется *комплексным числом*.

Часто комплексное число $a + bi$ обозначают одной буквой, например буквой z. В таких случаях пишут $z = a + bi$.

Пусть даны комплексные числа $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z_3 = a_3 + b_3 i$, ..., $z_n = a_n + b_n i$. Для того чтобы найти сумму комплексных чисел $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, надо найти сумму первых двух чисел, затем к полученной сумме прибавить третье число, к полученной сумме прибавить четвертое и т.д., пока не переберем все слагаемые.

Аналогично определяется и произведение нескольких комплексных чисел.

Если комплексное число z взято сомножителем n раз ($n \geq 2$), то произведение $\underbrace{zzz \ldots z}_{n \text{ раз}}$ называют n-й *степенью* ($n \geq 2$) *числа* z и обозначают z^n, т.е. по определению

$$\underbrace{zzz \ldots z}_{n \text{ раз}} = z^n.$$

Кроме того, по определению $z^1 = z$.

Приведем *основные законы* сложения и умножения комплексных чисел:

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения);

б) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность сложения);

в) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (коммутативность умножения);

г) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (ассоциативность умножения);

д) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Справедливость этих законов следует из определения суммы и произведения комплексных чисел и из справедливости аналогичных законов для сложения и умножения действительных чисел (проверка их справедливости опускается).

Для действий сложения и умножения комплексных чисел вводятся действия, обратные им.

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z_3, которое в сумме с z_2 дает z_1.

Покажем, что для любых комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ их разность $z_3 = z_1 - z_2$ существует, единственна и вычисляется по правилу $z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, т.е. существует единственное комплексное число $z_3 = x + yi$, которое в сумме с z_2 дает z_1. По определению суммы комплексных чисел $z_2 + z_3 = (a_2 + x) + (b_2 + y)i$. По определению равенства комплексных чисел числа z_1, $z_2 + z_3$ равны тогда и только тогда, когда одновременно справедливы равенства

$$a_2 + x = a_1, \quad b_2 + y = b_1.$$

Из этих равенств числа x и y всегда определяются и притом единственным образом: $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$, т.е. существует и притом единственное комплексное число $z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, которое и является разностью z_1 и z_2.

Частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число z_2 такое, что $z_2 \neq 0 + 0i$, называется такое комплексное число z_3, которое при умножении на z_2 дает z_1.

Можно показать, что для любых комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(z_2 \neq 0 + 0i)$ их частное $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ существует, единственно и вычисляется по правилу

$$z_3 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Доказательство этого факта опускается.

Рассмотрим комплексные числа вида $a + 0i$. Каждое такое число принято рассматривать как действительное число a, т.е. каждое число вида $a + 0i$ отождествляется с действительным числом a. Обычно числа a и $a + 0i$ не различаются, и даже принято писать равенство $a + 0i = a$.

В частности, числа 0 и $0 + 0i$ не различают; число $0 + 0i$ также называют нулем и пишут $0 + 0i = 0$.

Рассмотрим теперь комплексные числа вида $0 + bi$. Принято такие числа обозначать просто bi и писать равенство $0 + bi = bi$. В частности, комплексное число $0 + 1i$ принято обозначать просто i и писать равенство $0 + 1i = i$. Комплексное число i называется *мнимой единицей*. Покажем, что мнимая единица обладает свойством $i^2 = -1$. Действительно, на основании принятых соглашений справедливы следующие равенства: $i^2 = (0 + 1i)^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1)(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1 + 0i = -1$.

Комплексные числа вида $0 + bi$ называют ***чисто мнимыми числами***.

Согласно принятым соглашениям любое чисто мнимое число bi представляет собой произведение двух комплексных чисел: числа b и мнимой единицы i. Действительно,

$$(b + 0i)(0 + 1i) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1) + (b \cdot 1 + 0 \cdot 0)i = 0 + bi = bi.$$

Любое комплексное число $a + bi$ представляет собой сумму двух комплексных чисел: числа a и чисто мнимого числа bi. Действительно, $(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi$.

Из определения действий сложения, вычитания и умножения комплексных чисел вытекает, что эти действия можно проводить по правилам действий над многочленами (см. гл. II), заменяя i^2 на -1 и объединяя затем члены, содержащие и не содержащие i.

Примеры. $(2 + 3i) - 4 + (7 - 13i) + 4i = (2 - 4 + 7) + (3 - 13 + 4)i = 5 - 6i$;

$(4 + 5i) + (x + yi) - (a^2 - bi) = (4 + x - a^2) + (5 + y + b)i$;

$(a + bi)(x + yi) = ax + ayi + bxi + byi^2 = (ax - by) + (ay + bx)i$;

$(2 + 4i)(7 - i) = 14 - 2i + 28i - 4i^2 = 18 + 26i$.

Пусть z_1 и z_2 — любые комплексные числа, n — любое натуральное число. Пользуясь правилами действий над комплексными числами, легко доказать справедливость формул сокращенного умножения:

$$(z_1+z_2)^n = z_1^n + C_n^1 z_1^{n-1}z_2 + C_n^2 z_1^{n-2}z_2^2 + \ldots + C_n^{n-1}z_1 z_2^{n-1} + z_2^n;$$
$$z_1^n - z_2^n = (z_1-z_2)(z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z_2 + z_1^{n-3}z_2^2 + \ldots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1});$$

и в частности формул

$$(z_1+z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2; \quad z_1^2 - z_2^2 = (z_1+z_2)(z_1-z_2).$$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Пусть на плоскости дана прямоугольная система координат. Каждому комплексному числу $z = a + bi$ поставим в соответствие точку на плоскости с координатами a и b, т.е. точку $M(a, b)$ (рис. 192). Легко видеть, что тем самым между множеством комплексных чисел и множеством точек плос-

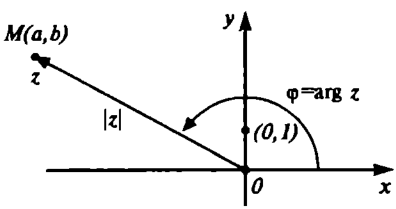


Рис. 192.

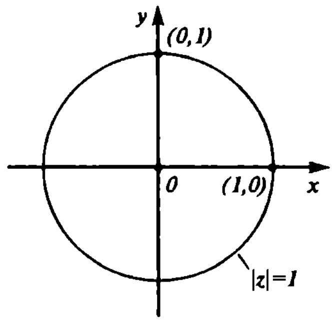


Рис. 193.

кости установлено такое соответствие, что каждому числу соответствует только одна точка и разным числам соответствуют разные точки. При этом на плоскости нет ни одной точки, которая бы не соответствовала какому-нибудь комплексному числу. Значит, между множеством комплексных чисел и множеством точек на плоскости установлено взаимно однозначное соответствие и поэтому можно считать, что комплексное число $z = a + bi$ есть точка на плоскости с координатами (a, b).

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется действительное число $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Поскольку комплексному числу $z = a + bi$ можно поставить в соответствие точку M плоскости с координатами a и b, то модулю комплексного числа можно придать следующий геометрический смысл: $|z|$ — расстояние соответствующей точки $M(a, b)$ до начала координат. Рассмотрим следующие задачи.

1. Найти множество точек плоскости, соответствующих комплексным числам z таким, что $|z| = 1$.

Согласно геометрическому смыслу модуля комплексного числа это будут точки, находящиеся от начала координат на расстоянии единица, т.е. точки, которые лежат на окружности радиуса, равного единице, и с центром в начале координат (рис. 193).

2. Найти множество точек плоскости, соответствующих комплексным числам z таким, что $2 \le |z| < 3$.

Согласно геометрическому смыслу модуля комплексного числа это будут точки, расположенные внутри кольца, образованного окружностями с радиусами 2 и 3, и с центром в начале координат, включая окружность радиуса 2 (рис. 194).

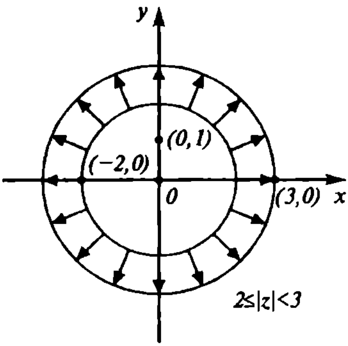


Рис. 194.

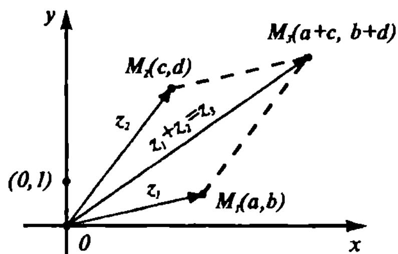


Рис. 195.

Комплексное число $z = a + bi$ можно рассматривать как вектор z, начало которого находится в начале координат, а конец — в точке $M(a, b)$, изображающей это число (см. рис. 192). Далее, говоря о векторах, изображающих комплексные числа, будем подразумевать, что начало этих векторов находится в начале координат.

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию сложения и вычитания двух комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$

в том случае, когда три точки $O(0, 0)$, $M_1(a, b)$ и $M_2(c, d)$ не лежат на одной прямой.

Пусть даны числа $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ и $z_3 = (a + c) + (b + d)i$. Рассмотрим вектор z_1, конец которого находится в точке $M_1(a, b)$, вектор z_2, конец которого — в точке $M_2(c, d)$, и вектор z_3, конец которого — точка $M_3(a + c, b + d)$. Вектор z_3 является диагональю параллелограмма $OM_1M_3M_2$ (рис. 195). Поскольку число z_3 есть сумма чисел z_1 и z_2, то отсюда вытекает, что сложение двух комплексных чисел можно геометрически интерпретировать как сложение по правилу параллелограмма векторов z_1 и z_2, начала которых находятся в начале координат, а концы — в точках $M_1(a, b)$ и $M_2(c, d)$, изображающих эти числа.

Векторы, изображающие комплексные числа $z = a + bi$ и $(-z) = -a - bi$, расположены симметрично относительно начала координат, поскольку концы этих векторов, точки $M(a, b)$ и $N(-a, -b)$, симметричны относительно начала координат (рис. 196).

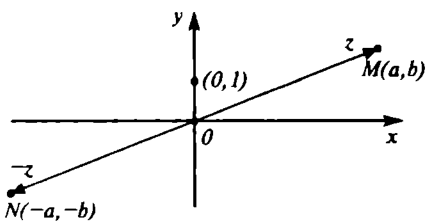


Рис. 196.

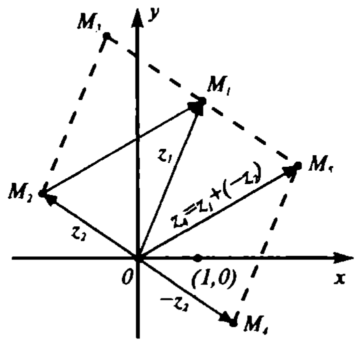


Рис. 197.

Пусть даны числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. Рассмотрим вектор z_1, конец которого находится в точке $M_1(a, b)$, и вектор z_2, конец которого находится в точке $M_2(c, d)$ (рис. 197). На этих векторах построим параллелограмм $OM_1M_3M_2$. Рассмотрим вектор $(-z_2)$, конец которого находится в точке $M_4(-c, -d)$. Складывая векторы z_1 и $(-z_2)$ по правилу параллелограмма, получаем их сумму — вектор

z_4, конец которого находится в точке $M_5(a - c,\ b - d)$. Очевидно, что длина вектора z_4 равна длине отрезка M_1M_2.

Поскольку длина вектора z_4 равна $|z_4| = |z_1 - z_2|$, то отсюда вытекает, что длина диагонали M_1M_2 равна $|z_1 - z_2|$ и модуль разности двух комплексных чисел z_1 и z_2 представляет собой расстояние между точками M_1 и M_2, изображающими эти числа.

Такое геометрическое толкование суммы и модуля разности двух комплексных чисел часто применяется при решении задач.

Примеры 1. Найти множество точек плоскости, соответствующих комплексным числам z таким, что $|z - i| = |z + 2|$.

Расстояние от искомых точек до точек, соответствующих комплексным числам i и $(- 2)$, равны. Значит, искомое множество состоит из точек прямой, перпендикулярной к отрезку, соединяющему точки $(0;\ 1)$ и $(- 2;\ 0)$, и проходящей через середину этого отрезка (рис. 198).

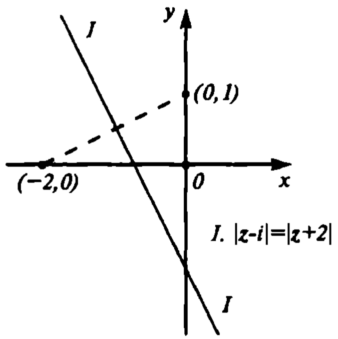


Рис. 198.

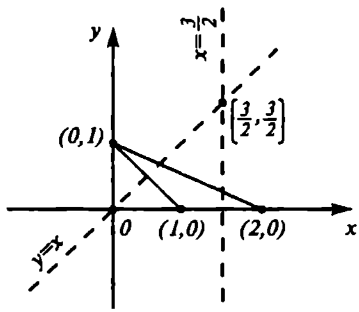


Рис. 199.

2. Найти точки z, удовлетворяющие условию $|z - 1| = |z - 2| = |z - i|$.

Точки, соответствующие числам 1, 2, и i, образуют треугольник. Условию задачи удовлетворяет единственная точка — центр описанной окружности этого треугольника. Так как она равноудалена от точек $(1;\ 0)$ и $(2;\ 0)$, то ее координата $x = \frac{3}{2}$, а так как она равноудалена от точек $(1;\ 0)$

и (0; 1), то $y = x = \frac{3}{2}$, т.е. условию задачи удовлетворяет единственное число $z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ (рис. 199).

Аргументом комплексного числа $z = a + bi$, отличного от нуля, называется любое из чисел φ, являющихся решением системы уравнений

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Для числа $z = 0$ аргумент не определяется. Данная система имеет бесконечное множество решений (так как на координатной плоскости пара чисел $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ определяет точку единичной окружности), причем если φ_0 есть одно из ее решений, то все остальные решения получаются из него по формуле $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, где k — любое целое число. Таким образом, любое комплексное число $z \neq 0$ имеет бесконечно много аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π.

Главным аргументом комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ принято называть его аргумент из интервала $[0; 2\pi)$ и обозначать этот аргумент $\arg z$.

Аргумент комплексного числа z имеет следующий геометрический смысл. Если комплексное число $z = a + bi \neq 0$ рассматривать как вектор z, конец которого — точка $M(a, b)$, то величина угла φ, на который нужно повернуть против часовой стрелки положительную ось Ox до первого совмещения ее с вектором z, является главным аргументом комплексного числа z (см. рис. 192). Величина любого угла, отличающегося от главного аргумента $\arg z$ на целое число полных углов, является также аргументом рассматриваемого числа z.

Пример. Найти на плоскости точки z, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{4} \leq \arg z < \frac{5\pi}{3}$.

Все точки, расположенные на каком-либо луче, выходящем из начала координат, имеют один и тот же главный аргумент, поэтому условию задачи удовлетворяют все точки той части плоскости, которая расположена между лучами, выходящими из начала координат под углами $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{3}$, а также точки, лежащие на первом луче (рис. 200).

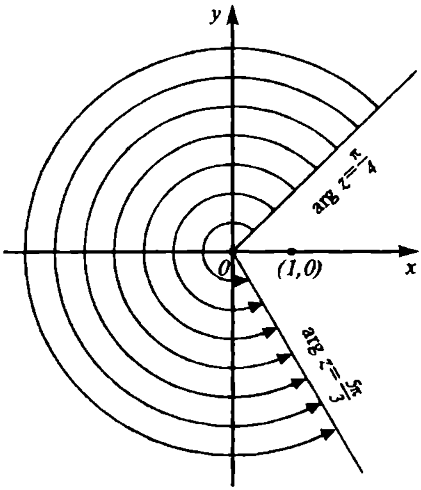


Рис. 200.

Сопряженные комплексные числа. Комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называют *числом, сопряженным комплексному числу* $z = a + bi$.

По формулам сокращенного умножения

$$z\bar{z} = (a + bi) \times (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

Это свойство сопряженных комплексных чисел позволяет деление комплексного числа z_1 на комплексное число z_2 ($z_2 \neq 0$) свести к умножению комплексных чисел z_1 и $\bar{z}_2$. Действительно, пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ и $z_2 \neq 0$, тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 - a_1b_2 i + b_1a_2 i - b_1b_2 i^2}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Пример.

$$\frac{2 + i}{4 - i} = \frac{(2 + i)(4 + i)}{(4 + i)(4 - i)} = \frac{8 + 2i + 4i + i^2}{16 + 1} = \frac{7}{17} + \frac{6}{17} i.$$

По определению, если $z \neq 0$, то $z^0 = 1$; если $z \neq 0$ и n — натуральное число, то $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

П р и м е р ы . 1. $(2+i)^0=1$;

2. $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{-i}{i(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=-i$.

3. $(2+i)^{-2}=\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{1}{4+4i+i^2}=\frac{1}{3+4i}=\frac{1(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=$

$=\frac{3-4i}{9+16}=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i.$

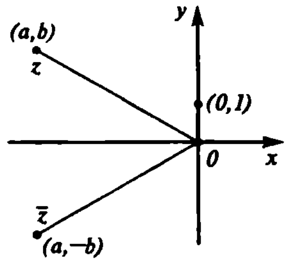


Рис. 201.

Легко видеть, что число, сопряженное числу $\bar z$, есть число z, т.е. $\bar{\bar z}=z$, и поэтому числа $\bar z$ и z называются *взаимно сопряженными*. В геометрической интерпретации комплексных чисел взаимно сопряженные числа представляют собой точки, симметричные относительно действительной оси Ox (рис. 201). Отметим ряд свойств взаимно сопряженных чисел.

а) $|\bar z|=z$.

Действительно, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|\bar z|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$, т.е. $|\bar z|=|z|$.

б) Если $z=a$, где a — действительное число, то $\bar z=z$, $\arg\bar z=\arg z$.

в) Если $\bar z\neq z$, то $\arg\bar z=2\pi-\arg z$.

Действительно, если φ есть решение системы уравнений

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\end{cases}$$

то число $\varphi_1=2\pi-\varphi$ есть решение системы уравнений

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi=\dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$$

г) $|z|=\sqrt{z\bar z}$.

Действительно, так как $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и так как $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, то $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

д) Сумма и произведение взаимно сопряженных комплексных чисел есть действительное число.

Действительно, если $z = a + bi$, то $z + \bar{z} = 2a$ (действительное число) и $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (действительное число).

е) Число, сопряженное к сумме двух любых комплексных чисел, равно сумме чисел, сопряженных к слагаемым, т.е. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Действительно, если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = [\overline{(a + c) + (b + d)i}] = \overline{z_1 + z_2}$.

ж) Число, сопряженное к произведению двух комплексных чисел, равно произведению чисел, сопряженных к сомножителям, т.е. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$.

Действительно, если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ и $(\overline{z_1 z_2}) = (ac - bd) - (ad + bc)i$, а $\bar{z}_1\,\bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) + (-ad - bc)i = (ac - bd) - (ad + bc)i$, т.е. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$.

з) Число, сопряженное к разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных чисел, т.е. $(\overline{z_1 - z_2}) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

Свойство з) доказывается так же, как и свойство е).

и) Если $z_2 \neq 0$, то $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Свойство и) доказывается так же, как и свойство ж).

к) Число, сопряженное n-й степени комплексного числа z, равно n-й степени числа, сопряженного к числу z, т.е. $(\overline{z^n}) = (\bar{z})^n$, где n — натуральное число.

Докажем это свойство методом математической индукции. Для $n = 1$ теорема очевидна. Предположим, что она справедлива для $n = k$, т.е. предположим, что справедливо равенство $(\overline{z^k}) = (\bar{z})^k$, и докажем, что $(\overline{z^{k+1}}) = (\bar{z})^{k+1}$. Действительно, $(\overline{z^{k+1}}) = (\overline{z^k \cdot z})$. По свойству ж) сопряженных чисел $(\overline{z^k z}) = (\overline{z^k})\,\bar{z}$. Используя теперь предположение для

$n = k$, получаем $(\overline{z^k})\,\overline{z} = (\overline{z})^k\,\overline{z} = (\overline{z})^{k+1}$ и свойство к) доказано.

В качестве следствия доказанных выше свойств (е, з, к) получаем справедливость следующего утверждения.

Если число z выражено через комплексное число α при помощи суммы и разности натуральных степеней этого числа, то заменяя в этом выражении число α на ему сопряженное число $\overline{\alpha}$, получим число $\overline{z}$, сопряженное с числом z.

§ 2. Тригонометрическая форма комплексных чисел

Пусть $z = a + bi$ — некоторое комплексное число, отличное от нуля. Обозначим через r его модуль, а через φ — один из его аргументов. Тогда число z можно записать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1}$$

Правая часть равенства (1) называется *тригонометрической формой* комплексного числа z.

Тригонометрическая форма комплексного числа, отличного от нуля, определена однозначно: это запись комплексного числа z в виде (1), где r — положительное число, равное модулю числя z, косинус и синус берутся от одного и того же угла φ, равного аргументу числа z, при этом между косинусом и синусом стоит знак плюс.

Ясно, что следующие комплексные числа записаны не в тригонометрической форме:

$$z_1 = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right); \quad z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$
$$z_3 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}; \quad z_4 = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма этих комплексных чисел следующая:

$$z_1 = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}; \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right);$$
$$z_3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}; \quad z_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}.$$

Действия умножения, деления, возведения в целую степень над любыми комплексными числами удобнее производить, если они записаны в тригонометрической форме.

Теорема 1. *Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент равен сумме аргументов.*

Доказательство. Пусть даны комплексные числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Рассмотрим число $z_3 = z_1 z_2$. Применяя правила действия над комплексными числами и формулы для косинуса и синуса суммы двух углов, имеем

$$\begin{aligned} z_3 = z_1 z_2 &= [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)][r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ &+ (\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)i] = \\ &= r_1 r_2[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Итак, $z_3 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, т.е. число z_3 записано в тригонометрической форме и его модуль равен $r_1 r_2$, а аргумент равен $(\varphi_1 + \varphi_2)$, что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Модуль частного двух комплексных чисел z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$) равен частному их модулей, а аргумент равен разности аргументов.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1, надо только предварительно умножить числитель и знаменатель частного $\frac{z_1}{z_2}$ на $(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$.

Теорема 3. (формула Муавра). *Пусть z — любое, отличное от нуля, комплексное число, n — любое целое число, тогда*

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (2)$$

Доказательство. 1. Для любого натурального n докажем эту формулу методом математической индукции.

Для $n = 1$ формула верна. Предположим, что формула (2) верна для $n = k$, т.е. предположим, что справедливо равенство

$$z^k = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi). \qquad (3)$$

Докажем, что из справедливости равенства (3) вытекает, что формула (2) справедлива и для $n = k + 1$. Применяя формулу (3), правила действия над комплексными числами, формулы для синуса и косинуса суммы двух углов, имеем

$$\begin{aligned} z^{k+1} = z^k z = [r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)][r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \\ = r^{k+1}[(\cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi) + \\ + i(\sin k\varphi\cos\varphi + \cos k\varphi\sin\varphi)] = \\ = r^{k+1}[(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi], \end{aligned}$$

т, е, формула (2) доказана для $n = k + 1$. Следовательно, по методу математической индукции формула (2) справедлива для любого натурального n.

2. Если $n = 0$ и $z \neq 0$, то по определению $z^0 = 1$, поэтому $z^0 = 1 \cdot (\cos 0\varphi + i\sin 0\varphi)$, т.е. формула (2) верна для $n = 0$.

3. Пусть $n = -1$. Применяя определение степени с целым отрицательным показателем и теорему 2, получим, что

$$z^{-1} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)],$$

т.е. для $n = -1$ формула (2) верна.

4. Пусть n — любое целое отрицательное число, тогда $n = -m$, где $m = n$ — натуральное число. Применяя сначала определение степени с целым показателем, затем справедливость формулы (2) сначала для $n = -1$, затем для любого натурального m, имеем

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^m = \left\{\frac{1}{r\,[\cos(+\varphi) + i\sin(+\varphi)]}\right\}^m =$$

$$= \left\{\frac{1}{r}\,[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]\right\}^m =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\right)^m [\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)] = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Итак, формула (2) верна для любого целого n. Теорема доказана.

Приведем пример на применение формулы Муавра. Вычислим $\sin 3x$ и $\cos 3x$ через $\sin x$ и $\cos x$. По формуле Муавра

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x.$$

В то же время по формуле бинома Ньютона

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + i\,3\cos^2 x\sin x + 3\cos x\,(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3 = (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i\,(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x).$$

Итак, по правилу равенства комплексных чисел имеем

$$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x,$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x.$$

Применяя основное тригонометрическое тождество, эти формулы можно переписать так:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

З а м е ч а н и е. Эти же формулы были получены в гл. V другим способом. Используя формулы Муавра и бинома Ньютона, можно вычислить $\cos nx$ и $\sin nx$ для любого натурального числа n.

Тригонометрическая форма комплексных чисел позволяет доказать свойства модулей комплексных чисел:

а) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$;

б) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, если $z_2 \neq 0$;

в) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;
г) $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$;
д) $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2|$;
е) $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$.

Докажем эти свойства. Свойство а) доказано в теореме 1, а свойство б) — в теореме 2.

Докажем свойство в). Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Поскольку

$$(z_1 + z_2) = (r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2) + i\,(r_1\sin\varphi 1 + r_2\sin\varphi_2),$$

то

$$|z_1 + z_2| = (r_1^2\cos^2\varphi_1 + 2r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + r_2^2\cos^2\varphi_2 + \\ + r_1^2\sin^2\varphi_1 + 2r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + r_2^2\sin^2\varphi_2)^{1/2} = \\ = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Поскольку $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \le 1$, то $|z_1 + z_2| \le \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2} = r_1 + r_2 = |z_1| + |z_2|$. Свойство в) доказано.

Свойство г) доказывается аналогично.

Свойство д) вытекает из свойства г). Действительно, $|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \le |z_1 + z_2| + |z_2|$, откуда

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|. \tag{4}$$

Аналогично $|z_2| = |(z_2 + z_1) - z_1| \le |z_2 + z_1| + |z_1|$, откуда

$$|z_2| - |z_1| \le |z_1 + z_2|. \tag{5}$$

Из справедливости неравенств (4) и (5) и вытекает справедливость свойства д).

Свойство е) доказывается аналогично.

Корни из комплексных чисел и их свойства. В главе IV решалась задача: для любого данного числа a и любого данного натурального числа n найти число b такое, что $b^n = a$. Такие числа b принято называть корнями степени n из числа a. Там было показано, что если число a — действительное положительное число, а n — четное натуральное число, то существуют два действительных числа b_1

и b_2 таких, что $b_1^n = a$ и $b_2^n = a$; если a — действительное число, а n — нечетное натуральное число, то существует одно действительное число b такое, что $b^n = a$.

Однако найти число, четная степень которого была бы равна отрицательному числу, в области действительных чисел уже нельзя. В области комплексных чисел это сделать можно. Справедливо более общее утверждение: в множестве комплексных чисел можно найти корень любой натуральной степени из любого комплексного числа. Это утверждение является следствием следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть z — комплексное число, $z \neq 0$, n — натуральное число. Существует n различных комплексных чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ *таких, что $\alpha_i^n = z$, где* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Эти числа называются *корнями степени n комплексного числа z*. Для обозначения этих корней нет специальных символов, подобных символу, которым обозначается арифметический корень.

Доказательство. Для $n = 1$ теорема очевидна. Пусть $n \geq 2$ и пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(z \neq 0)$. Будем искать комплексное число $\alpha = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ такое, что $\alpha^n = z$. Покажем, что такое число α существует. Более того, покажем, что таких чисел бесконечно много, но различных между собой их только n.

По формуле Муавра

$$z = \alpha^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

По определению модуля комплексного числа $|z| = \rho^n$, т.е. $r = \rho^n$, откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$ (по определению модуля комплексного числа $z \neq 0$ числа ρ и r положительны, поэтому символ арифметического корня здесь употреблен правильно).

Применяя определение равенства двух комплексных чисел, получаем, что одновременно справедливы равенства

$$\begin{cases} \cos n\psi = \cos\varphi, \\ \sin n\psi = \sin\varphi. \end{cases}$$

Эти равенства одновременно выполнены тогда и только тогда, когда $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k — любое целое число, т.е.

для $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, где k — любое целое число. Значит, числа α такие, что каждое из них удовлетворяет равенству $\alpha^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, существуют и могут быть записаны в виде

$$\alpha = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right\}, \qquad (6)$$

где k — любое целое число. Обозначая через α_p корень, вычисляемый по формуле (6) для $k = p$, получаем:

$$\alpha_0 = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right\},$$

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right)\right\},$$

$$\alpha_2 = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi\cdot 2}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\cdot 2}{n}\right)\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n}\right)\right\},$$

$$\alpha_n = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right)\right\} = \alpha_0,$$

$$\alpha_{n+1} = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi(n+1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi(n+1)}{n}\right)\right\} = \alpha_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{2n} = \alpha_0,$$
$$\alpha_{-1} = \alpha_{n-1},$$
$$\alpha_{-2} = \alpha_{n-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{-n} = \alpha_0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Отсюда легко видеть, что для любого целого p справедливы равенства $\alpha_0 = \alpha_{pn}$, $\alpha_1 = \alpha_{pn+1}$, $\alpha_2 = \alpha_{pn+2}$, ..., $\alpha_{n-1} = \alpha_{pn+n-1}$.

Итак, различных корней ровно n: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Они могут быть вычислены по формуле

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right\}, \qquad (7)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1)$.

Заметим, что из формулы (7) можно получить все n различных корней, если вместо k подставить в нее любые n целых чисел, идущих подряд.

Пример. Найти корни третьей степени из числа $z = \sqrt{3} + i$.

Поскольку $r = 2$, а $\varphi = \frac{\pi}{6}$, то

$$\alpha_k = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{3}\right)\right\},$$

где $k = 1, 2, 3$, т.е.

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{18}\right)\right\},$$
$$\alpha_2 = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{25\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{18}\right)\right\},$$
$$\alpha_3 = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right\}.$$

Рассмотрим частный случай: отыскание корня n-й степени из единицы, т.е. найдем числа α_k такие, что $\alpha_k^n = 1$. Поскольку $r = 1$ и $\varphi = 0$, то

$$\alpha_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \qquad (8)$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Если $n = 2m$ (четное число), то среди этих корней существует два действительных корня $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_m = -1$. Если $n = 2m + 1$ (нечетное число), то существует один единственный корень $\alpha_0 = 1$.

Приведем еще другие свойства корней n-й степени из единицы:

а) $|\alpha_k| = 1$;

б) $\alpha_k\alpha_m = \alpha_{k+m}$;

в) $\frac{\alpha_k}{\alpha_m} = \alpha_{k-m}$;

г) $\alpha_k^m = \alpha_{km}$, где m — любое целое число (корень α_n находится по формуле (8), где вместо k следует взять n).

Докажем эти свойства. Свойство а) вытекает из определения модуля комплексного числа.

Для доказательства свойства б) воспользуемся теоремой о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\alpha_k\alpha_m = \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi m}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi m}{n}\right) = \alpha_{k+m}.$$

Свойство в) доказывается аналогично.

Докажем свойство г). По формуле Муавра

$$\alpha_k^m = \cos\left[\left(\frac{2\pi k}{n}\right)m\right] + i\sin\left[\left(\frac{2\pi k}{n}\right)m\right] = \alpha_{km}.$$

Рассмотрим теперь геометрическую интерпретацию n-й степени из единицы:

$$\alpha_0 = 1,$$
$$\alpha_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$
$$\alpha_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right),$$
$$\alpha_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{n}\right),$$
$$\ldots,$$
$$\alpha_{n-2} = \cos\left[\frac{2\pi(n-2)}{n}\right] + i\sin\left[\frac{2\pi(n-2)}{n}\right],$$
$$\alpha_{n-1} = \cos\left[\frac{2\pi(n-1)}{n}\right] + i\sin\left[\frac{2\pi(n-1)}{n}\right].$$

Очевидно, что точки $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ будут вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, одна из вершин которого — точка $A_0(1;\ 0)$.

Примеры. 1. Пусть $n = 3$, тогда $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\alpha_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$. Точки $A_0(1;\ 0)$, $A_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ являются вершинами правильного треугольника $A_0A_1A_2$, вписанного в единичную окружность (рис. 202).

2. Пусть $n = 4$, тогда $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -i$. Точки $A_0(1;\ 0)$, $A_1(0;\ 1)$, $A_2(-1;\ 0)$ и $A_3(0;\ -1)$ являются вершинами квадрата $A_0A_1A_2A_3$, вписанного в единичную окружность (рис. 203).

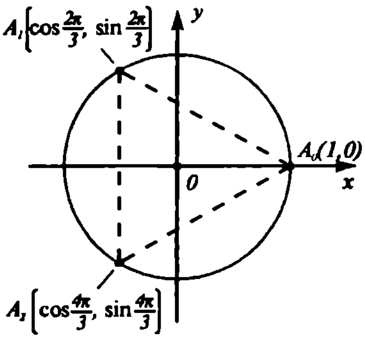


Рис. 202.

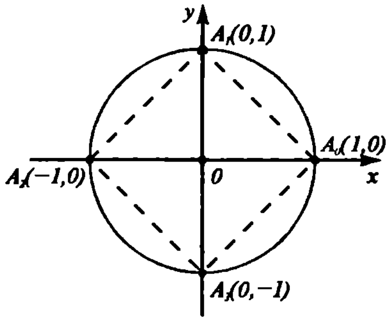


Рис. 203.

Приведем формулу для корня n-й степени из числа (-1). Поскольку $r = 1$ и $\varphi = \pi$, то $\alpha_k = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{n}\right)$, где $k = 0, 1, 2, .., n - 1$.

Отсюда видно, что если $n = 2m$ (четное число), то среди α_k нет ни одного действительного числа. Если $n = 2m + 1$ (нечетное число), то существует одно действительное число $\alpha_m = -1$.

Вообще для любого положительного числа a и любого четного натурального числа n существует только два действительных числа b_1 и b_2 таких, что $b_1^n = b_2^n = a$.

Действительно, поскольку для любого положительного числа $a = |a|(\cos 0 + i\sin 0)$, то все корни n-й степени из этого числа вычисляются по формуле

$$b_k = \sqrt[n]{|a|}\left\{\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right\}.$$

Если $n = 2m$, то среди этих чисел будут только два действительных числа $b_0 = \sqrt[n]{|a|}$ и $b_m = -\sqrt[n]{|a|}$, что и утверждалось выше.

Аналогично можно доказать справедливость следующих утверждений:

Для любого положительного числа a и любого нечетного натурального числа n существует только одно действительное число $b = \sqrt[n]{|a|}$ такое, что $b^n = a$.

Для любого отрицательного числа a и любого нечетного натурального числа n существует только одно действительное число $b = -\sqrt[n]{|a|}$ такое, что $b^n = a$.

Для любого отрицательного числа a и любого четного натурального числа n не существует ни одного действительного числа b такого, что $b^n = a$.

§ 3. Числовые поля и кольца

В этом параграфе рассматриваются *множества чисел*, причем под множеством чисел понимаются либо все комплексные числа, либо какая-нибудь их часть.

Ниже под *операцией* понимается одно из четырех арифметических действий: сложение, умножение, вычитание и деление.

Некоторое множество называется *замкнутым* относительно данной операции, если применение этой операции к любой паре чисел из этого множества дает число из этого же множества.

Примеры. 1. Множество натуральных чисел замкнуто относительно операции сложения, так как сумма любых двух натуральных чисел есть натуральное число.

2. Множество натуральных чисел не замкнуто относительно операции вычитания, так как разность двух натуральных чисел не всегда есть натуральное число, например, $2 - 3 = -1$ (-1 — не натуральное число).

3. Множество, состоящее из чисел 0, 1 и -1, замкнуто относительно операции умножения.

4. Множество целых чисел замкнуто относительно операции вычитания, но не замкнуто относительно операции деления.

Множество чисел, замкнутое относительно операций сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на нуль), называется *числовым полем.*

Примеры. 1. Множество всех комплексных чисел образует поле, называемое полем комплексных чисел.

2. Множество всех действительных чисел образует поле, называемое полем действительных чисел.

3. Множество всех рациональных чисел образует поле, называемое полем рациональных чисел.

4. Множество целых чисел не образует числового поля, так как оно не замкнуто относительно операции деления.

5. Множество чисел вида $(p + q\sqrt{2})$, где p и q — любые рациональные числа, образует числовое поле.

Доказательство. а) Поскольку

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2},$$

а $(p_1 + p_2)$ и $(q_1 + q_2)$ — рациональные числа, то замкнутость этого множества относительно операции сложения доказана.

Аналогично доказывается замкнутость относительно вычитания.

б) Поскольку

$$(p_1 + q_1\sqrt{2})(p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1p_2 + 2q_1q_2) + (p_1q_2 + p_2q_1)\sqrt{2},$$

а $(p_1p_2 + 2q_1q_2)$ и $(p_1q_2 + p_2q_1)$ — рациональные числа, то доказана замкнутость этого множества относительно операции умножения.

в) Поскольку

$$\frac{(p_1 + q_1\sqrt{2})}{(p_2 + q_2\sqrt{2})} = \frac{(p_1 + q_1\sqrt{2})(p_2 - q_2\sqrt{2})}{(p_2 + q_2\sqrt{2})(p_2 - q_2\sqrt{2})} = \frac{p_1p_2 - 2q_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2} + \frac{q_1p_2 - p_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}\sqrt{2}$$

и $p_2^2 - 2q_2^2 \neq 0$, то замкнутость относительно операции деления очевидна.

Итак, множество чисел виде $(p + q\sqrt{2})$, где p, q — любые рациональные числа, является полем.

6. Множество чисел вида $(p + q\sqrt{2})$, где p и q — любые натуральные числа, не является полем, так как множество натуральных чисел не замкнуто относительно операции вычитания.

Множество чисел, замкнутое относительно операций сложения, вычитания и умножения, называется *числовым кольцом*.

Примеры. 1. Любое числовое поле есть числовое кольцо.

2. Множество целых чисел является числовым кольцом, так как это множество замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения.

3. Множество четных чисел является числовым кольцом, так как при сложении, вычитании и умножении четных чисел вновь получается четное число.

4. Множество нечетных чисел не будет числовым кольцом, так как уже при сложении нечетных чисел получается четное число, т.е. такое числовое множество не является замкнутым относительно операции сложения.

5. Множество чисел вида $(p + q\sqrt{2})$, где p и q — любые целые числа, является числовым кольцом, но не является числовым полем. Действительно, так как множество целых чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения, то

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2},$$
$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) - (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 - p_2) + (q_1 - q_2)\sqrt{2},$$
$$(p_1 + q_1\sqrt{2})(p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1p_2 + 2q_1q_2) + (p_1q_2 + p_2q_1)\sqrt{2},$$

где $(p_1 + p_2)$, $(q_1 + q_2)$, $(p_1 - p_2)$, $(q_1 - q_2)$, $(p_1p_2 + 2q_1q_2)$, $(p_1q_2 + p_2q_1)$ — целые числа. Следовательно, множество чисел вида $(p + q\sqrt{2})$ замкнуто относительно операции сложения, вычитания и умножения, то есть является числовым кольцом.

Рассмотрим операцию деления. Поскольку

$$\frac{p_1 + q_1\sqrt{2}}{p_2 + q_2\sqrt{2}} = \frac{p_1p_2 - 2q_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2} + \frac{q_1p_2 - p_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}\sqrt{2}$$

и множество целых чисел не замкнуто относительно операции деления, то при целых p_1, p_2, q_1, q_2 числовые выражения $\frac{p_1p_2 - 2q_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}$, $\frac{q_1p_2 - p_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}$ могут принимать и нецелые значения. Следовательно, множество чисел вида $(p + q\sqrt{2})$ не замкнуто относительно операции деления, т.е. не является числовым полем.

§ 4. Многочлены над полем комплексных чисел

Многочленом степени n (*n* — данное некоторое неотрицательное целое число) *от переменного x над числовым полем K* называется выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — данные числа из поля K, причем $a_0 \neq 0$.

Из этого определения, в частности, вытекает, что многочлены нулевой степени — это отличные от нуля числа из поля K. Число нуль считается многочленом, причем это единственный многочлен, степень которого не определена.

Для сокращенной записи многочленов обычно употребляют следующие символы: $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$, $R(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ и другие; при этом если хотят подчеркнуть, что многочлен $P(x)$ степени n, то пишут $P_n(x)$. В § 5 гл. II многочлены рассматривались над полем действительных чисел.

В этом параграфе многочлены рассматриваются в основном над полем комплексных чисел, поэтому дальше под многочленом понимается *многочлен над полем комплексных чисел*. В тех случаях, когда многочлены рассматриваются над другими числовыми полями, об этом будет сказано особо.

Два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ считаются *тождественно равными* (иногда говорят кратко — равными) тогда и только тогда, когда равны их степени и равны коэффициенты при x в одинаковых степенях. Для записи тождественного равенства многочленов употребляется знак равенства, если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равны, то пишут $P(x) = Q(x)$. Значит, если

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

то $P_n(x) = Q_m(x)$ тогда и только тогда, когда $n = m$ и $a_{n-i} = b_{m-i}$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$.

Суммой двух многочленов

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

где $n \geq m$, называется многочлен $T(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$ такой, что $c_{n-i} = a_{n-i} + b_{m-i}$ для каждого $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, причем $b_{m-i} = 0$ для каждого $i = m + 1, m + 2, \ldots, n$, т.е. суммой многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен $T(x)$, коэффициенты которого при каждой степени переменного x равны сумме коэффициентов при той же степени x в многочленах $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, причем если $n > m$, то коэффициенты $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n$ следует считать равными нулю. Для нахождения суммы многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ нужно записать подряд все члены этих двух многочленов и затем сделать приведение подобных членов.

Произведением двух многочленов

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

называется многочлен

$$R(x) = d_0x^{m+n} + d_1x^{m+n-1} + d_2x^{m+n-2} + \ldots$$
$$\ldots + d_{n+m-1}x + d_{n+m},$$

такой, что $d_i = \sum\limits_{p+q=i} a_{n-p}b_{m-q}$ для каждого $i = 0, 1, 2, \ldots, n + m$, т.е. произведением многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен $R(x)$, коэффициент которого d_i есть результат сложения всех произведений, в каждом из которых перемножаются такие коэффициенты a_k и b_l многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, сумма индексов $k + l$ которых равна $n + m — i$. Для нахождения произведения многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ нужно каждый член многочлена $P_n(x)$ умножить на каждый член многочлена $Q_m(x)$, сложить полученные произведения и привести подобные члены.

Нетрудно проверить, что справедливы следующие **основные законы** сложения и умножения многочленов:

1. $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$ (коммутативность сложения);

2. $[P(x) + Q(x)] + T(x) = P(x) + [Q(x) + T(x)]$ (ассоциативность сложения);

3. $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$ (коммутативность умножения);

4. $[P(x)Q(x)]T(x) = P(x)[Q(x)T(x)]$ (ассоциативность умножения);

5. $[P(x) + Q(x)]T(x) = P(x)T(x) + Q(x)T(x)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Вычесть из многочлена $P(x)$ многочлен $T(x)$ — это значит найти такой многочлен $Q(x)$, что $P(x) = T(x) + Q(x)$.

Нетрудно проверить, что для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$ такой многочлен $Q(x)$ существует и единственный, он называется ***разностью*** многочленов $P(x)$ и $T(x)$ и обозначается $Q(x) = P(x) - T(x)$.

Если $T(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ и

$$T^*(x) = -T(x) = (-a_0)x^n + (-a_1)x^{n-1} + (-a_2)x^{n-2} + ... \\ ... + (-a_{n-1})x + (-a_n),$$

то $Q(x) = P(x) + T^*(x)$. Значит, в множестве многочленов всегда выполнена операция вычитания, обратная к операции сложения.

Разделить нацело многочлен $P(x)$ на многочлен $T(x)$, отличный от нуля, — это значит найти многочлен $Q(x)$ такой, что $P(x) = T(x)Q(x)$. Если такой многочлен $Q(x)$ существует, то говорят, что многочлен $T(x)$ является ***делителем*** многочлена $P(x)$, а многочлен $Q(x)$ называется ***частным*** от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$.

Не любой многочлен $P(x)$ можно разделить нацело на многочлен $T(x)$. Например, многочлен $x^2 + i$ не делится нацело на многочлен $x + 1$. Значит, в множестве многочленов не всегда выполнена операция деления нацело, обратная к операции умножения. Зато в множестве многочленов всегда выполнена операция деления с остатком.

Разделить с остатком многочлен $P(x)$ на многочлен $T(x)$, отличный от нуля, — это значит найти два многочлена $q(x)$ и $r(x)$ такие, что

$$P(x) = T(x)q(x) + r(x), \tag{1}$$

причем либо степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $T(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.

В случае, если выполнено равенство (1), говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком $r(x)$ и частным $q(x)$. В частности, если $r(x) = 0$, то говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком нуль или многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $T(x)$.

Аналогично теореме 5 из § 5 гл. II доказывается теорема о делимости многочленов, заданных над полем комплексных чисел.

Теорема. 1. *Для любых двух многочленов* $P(x)$ *и* $T(x)$, *где* $T(x) \neq 0$, *существует и притом единственная пара многочленов* $q(x)$ *и* $r(x)$ *таких, что* $P(x) = T(x)q(x) + r(x)$, *причем либо степень многочлена* $r(x)$ *строго меньше степени многочлена* $T(x)$, *либо* $r(x)$ *есть нуль.*

Для определения коэффициентов многочлена $q(x)$ и $r(x)$ существует несколько способов. Наиболее распространенным среди них является метод неопределенных коэффициентов, рассмотренный в § 5 гл. II. Там же был детально рассмотрен вопрос о делении многочлена на двучлен (x — a), где α — действительное число. Все результаты, полученные в § 5 гл. II, остаются верными и в том случае, когда коэффициентами многочлена и число α являются любыми комплексными числами.

В частности справедливы следующие теоремы.

Теорема 2 (теорема Безу). *Остаток от деления многочлена* $P(x)$ *на двучлен* $(x - \alpha)$ *равен значению многочлена* $P(x)$ *при* $x = \alpha$, *т.е.* $r = P(\alpha)$.

Теорема 3. *Многочлен* $P(x)$ *делится нацело на двучлен* $(x - \alpha)$ *тогда и только тогда, когда значение многочлена при* $x = \alpha$ *равно нулю, т.е. когда* $P(\alpha) = 0$.

Число α называется *корнем многочлена* $P(x)$, если $P(\alpha) = 0$. Сформулируем теорему 3, используя определение корня многочлена.

Теорема 4. *Число α является корнем многочлена $P(x)$, тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $(x - \alpha)$.*

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Ответ на этот вопрос дает основная теорема алгебры.

Теорема (Основная теорема алгебры). *Любой многочлен степени n $(n \geq 1)$ над полем комплексных чисел имеет хотя бы один корень.*

Эта теорема принимается без доказательств. Докажем в качестве следствия этой теоремы такую теорему.

Теорема 5. *Любой многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ степени n $(n \geq 1)$ над полем комплексных чисел разлагается в произведение n линейных множителей, т.е.*

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n). \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть P_n — многочлен степени n. Тогда по основной теореме алгебры у него есть корень. Обозначим его α_1. Тогда по теореме 4 $P_n(x) = (x - \alpha_1)q_1(x)$, где $q_1(x)$ — многочлен степени $(n - 1)$. Для многочлена $q_1(x)$ опять применима основная теорема алгебры, поэтому $q_1(x)$ имеет корень α_2. Тогда по теореме 4 $q_1(x) = (x -$ $- \alpha_2)q_2(x)$, где $q_2(x)$ есть многочлен степени $(n - 2)$. Продолжая этот процесс, получим, что $q_{n-1}(x) = (x - \alpha_{n-1}) \times$ $\times\, q_n(x)$, где $q_n(x)$ есть многочлен первой степени, т.е. $q_n(x) =$ $= b_0(x - \alpha_n)$ $(b_0 \neq 0)$. Из этих рассуждений вытекает, что

$$P_n(x) = b_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n). \qquad (3)$$

Раскрыв скобки в произведении, стоящем в правой части равенства (3), получим, что у многочлена $P_n(x)$ коэффициент при x^n будет b_0, но в то же время этот коэффициент равен a_0, поэтому $b_0 = a_0$.

Итак, показано, что $P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots$ $\ldots (x - \alpha_n)$. Теорема доказана.

Заметим, что в равенстве (3) некоторые из чисел α_1, α_2, $\ldots$, α_n могут быть равны между собой. Объединяя вместе одинаковые линейные множители, равенство (2) можно переписать в виде

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}(x - \alpha_3)^{k_3} \dots (x - \alpha_m)^{k_m}, \quad (4)$$

где $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = n$, при этом предполагается, что среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ уже нет равных. Можно показать, что в равенстве (4) число α_l является корнем кратности k_l многочлена $P_n(x)$.

Из теоремы 2 вытекают следующие теоремы.

Теорема 6. *Любой многочлен степени n над полем комплексных чисел имеет n корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность.*

Теорема 7 (формулы Виета). *Если* $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, *т.е. если старший коэффициент многочлена равен единице* $(a_0 = 1)$, *а числа* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ *— его корни, то справедливы равенства*

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n),$$

$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_2\alpha_n + \dots \\ \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

. . . .

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-2}\alpha_n + \dots \\ \dots + \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n),$$

$$a_n = (-1)^n(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{n-1}\alpha_n).$$

Доказательство. По теореме 5

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n).$$

Раскрывая скобки и пользуясь правилом равенства многочленов, получим справедливость этих равенств, которые называются формулами Виета.

Теорема 8. *Если многочлен*

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$ *имеет комплексный корень* $a + bi$, *то он обязательно имеет и корень* $a - bi$, *т.е. число, сопряженное к корню многочлена с действительным коэффициентом, также является корнем этого многочлена.*

Доказательство. Пусть число $a + bi$ — корень многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0).$$

Тогда $P_n(a + bi) = 0$, т.е. справедливо равенство

$$a_0(a + bi)^n + a_1(a + bi)^{n-1} + a_2(a + bi)^{n-2} + ...$$
$$... + a_{n-1}(a + bi) + a_n = 0.$$

Применяя формулу бинома Ньютона, левую часть этого равенства можно записать в виде $A + Bi$, откуда по правилу равенства нулю комплексного числа получаем, что $A = 0$ и $B = 0$.

Теперь рассмотрим

$$P_n(a - bi) = a_0(a - bi)^n + a_1(a - bi)^{n-1} +$$
$$+ a_2(a - bi)^{n-2} + ... + a_{n-1}(a - bi) + a_n.$$

Выше было доказано, что произведение, степень и алгебраическая сумма чисел, сопряженных с данными комплексными числами, есть комплексное число, сопряженное соответственно к произведению, степени и алгебраической сумме данных чисел, поэтому $P_n(a - bi) = A - Bi$ (здесь еще учтено, что коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n — действительные числа), то так как $A = B = 0$, то $P_n(a - bi) = 0$, а это значит, что число $(a - bi)$ является корнем многочлена $P_n(x)$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень* $a + bi$, *то он делится нацело на квадратный трехчлен* $x^2 + px + q$, где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.

Доказательство. Если число $x_1 = a + bi$ — корень многочлена $P(x)$, то согласно теореме 8 число $x_2 = a - bi$ — также корень этого многочлена. Тогда $P(x)$ делится нацело и на двучлен $(x - x_1)$ и на двучлен $(x - x_2)$, значит, он делится на их произведение

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - a - bi)(x - a + bi) =$$
$$= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 10. *Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на произведение либо двучленов $(x - \alpha_k)$, либо трехчленов $x^2 + p_m x + q_m$, либо двучленов $(x - \alpha_k)$ и трехчленов $x^2 + p_m x + q_m$, где α_k, p_m, q_m — действительные числа, а трехчлены $x^2 + p_m x + q_m$ не имеют действительных корней.*

Теорема 10 есть следствие теоремы 5 и 9.

Пример. Известно, что многочлен $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 4$ имеет корень $x_1 = 1 + i$. Разложить его на произведение двучленов и трехчленов с действительными коэффициентами.

Поскольку многочлен $P(x)$ имеет корень $x = 1 + i$, то по теореме 9 он делится на трехчлен $x^2 - 2x + 2$. Разделив многочлен $P(x)$ на этот трехчлен, получим $x^4 - 2x^3 + 4x - 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)$. Разлагая теперь многочлен $x^2 - 2$ на линейные множители, получаем ответ:

$$P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Пусть дан многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0) \qquad (5)$$

Выше было показано:

1. Многочлен (5) над полем комплексных чисел может быть записан в виде

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n),$$

где числа a_0, α_1, α_2, α_3, ..., α_n из этого же поля.

2. Многочлен (5) над полем действительных чисел может быть записан в виде

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots$$
$$\ldots(x - \alpha_k)\,(x^2 + p_1 x + q_1) \ldots (x^2 + p_m x + q_m), \qquad (6)$$

где $k + 2m = n$, числа a_0, α_1, α_2, ..., α_k, p_1, q_1, ..., p_m, q_m — действительные числа. При этом в разложении (6) квадратные трехчлены нельзя представить как произведение двух множителей $(x - \alpha_l)(x - \alpha_j)$ с действительными α_l и α_j.

Перейдем теперь к вычислению корней многочленов. Начнем с многочлена первой степени

$$P_1(x) = a_0 x + a_1 \quad (a_0 \neq 0).$$

В любом числовом поле этот многочлен имеет один корень $x_1 = -\frac{a_1}{a_0}$. Рассмотрим многочлен второй степени

$$P_2(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \quad (a_0 \neq 0).$$

Как следует из теоремы 6, многочлен $P_2(x)$ над полем комплексных чисел имеет два корня. Для нахождения этих корней преобразуем многочлен $P_2(x)$, выделив полный квадрат:

$$P_2(x) = a_0\left[x^2 + 2x\frac{a_1}{2a_0} + \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + \frac{a_2}{a_0}\right] =$$

$$= a_0\left[\left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{D}{4a_0^2}\right],$$

где $D = a_1^2 - 4a_0a_2$. Найдем комплексное число β такое, что $\beta^2 = \frac{D}{4a_0^2}$. Тогда

$$P_2(x) = a_0\left(x + \frac{a_1}{2a_0} - \beta\right)\left(x + \frac{a_1}{2a_0} + \beta\right),$$

откуда очевидно, что многочлен $P_2(x)$ имеет два корня:

$$x_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + \beta, \quad x_2 = -\frac{a_1}{2a_0} - \beta.$$

Заметим, что если $D \neq 0$, то существует два комплексных числа β_1 и β_2 таких, что $\beta_1^2 = \beta_2^2 = \frac{D}{4a_0^2}$. Так как $\beta_1 = -\beta_2$, то для нахождения корней многочлена $P_2(x)$ все равно, какой из них принять за β. Если $D=0$, то $x_1=x_2=-\frac{a_1}{2a_0}$ и многочлен $P_2(x)$ имеет один корень кратности два.

В случае, если коэффициенты a_0, a_1, a_2 — действительные числа, то D также действительное число и поэтому:

а) если $D>0$, то многочлен $P_2(x)$ имеет два действительных неравных корня: $x_1=\frac{-a_1+\sqrt{D}}{2a_0}$, $x_2=\frac{-a_1-\sqrt{D}}{2a_0}$;

б) если $D=0$, то многочлен $P_2(x)$ имеет один единственный корень кратности два: $x_1=x_2=-\frac{a_1}{2a_0}$;

в) если $D<0$, то многочлен $P_2(x)$ имеет два комплексных корня: $x_1=-\frac{a_1}{2a_0}+\frac{\sqrt{|D|}}{2a_0}i$, $x_2=-\frac{a_1}{2a_0}-\frac{\sqrt{|D|}}{2a_0}i$.

Для любого многочлена третьей или четвертой степени над полем комплексных чисел существуют способы нахождения его корней. Эти способы здесь не приводятся, так как они весьма трудоемки.

Что касается многочленов степени пять и выше, то для них нет общих способов нахождения корней.

В частных случаях, пользуясь теоремами о целых и рациональных корнях многочлена (см. § 5 гл. II), удается представить данный многочлен в виде произведения многочленов первого и второго порядков и, таким образом, найти все его корни.

Пример. Найти корни многочлена $P_3(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Рассмотрим многочлен $Q_3(x)=8P_3(x)=(2x)^3+(2x)^2+2(2x)-4$ или $T_3(t)=t^3+t^2+2t-4$, где $t=2x$. Делители свободного члена многочлена $T_3(t)$: $+1$, -1, $+2$, -2, $+4$, -4.

Найдем значения многочлена $T_3(t)$ в этих точках:

$$T_3(1)=1+1+2-4=0,$$
$$T_3(-1)=-1+1-2-4=-6\neq 0,$$
$$T_3(2)=8+4+4-4=12\neq 0,$$
$$T_3(-2)=-8+4-4-4=-12\neq 0,$$

$$T_3(4) = 64 + 16 + 8 - 4 = 84 \neq 0,$$
$$T_3(-4) = -64 + 16 - 8 - 4 = -60 \neq 0.$$

По теореме о целом корне (§ 5 гл. II) многочлен $T_3(t)$ имеет один целый корень 1. Поэтому его можно представить в виде произведения двучлена $(t - 1)$ и квадратного трехчлена. Для нахождения коэффициентов квадратного трехчлена применим схему Горнера:

1	1	2	-4
1	$1 \cdot 1 + 1$	$1 \cdot 2 + 2$	$1 \cdot 4 + (-4)$
1	2	4	0

Итак, $T_3(t) = (t - 1)(t^2 + 2t + 4)$.

Квадратный трехчлен $t^2 + 2t + 4$ имеет комплексные корни $t_2 = -1 + \sqrt{3}i$, $t_3 = -1 - \sqrt{3}i$. Следовательно, исходный многочлен $P_3(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ имеет один рациональный корень $x_1 = \frac{1}{2}$ и два комплексный корня $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

В заключение рассмотрим вопрос о нахождении корней многочлена, заданного над другими числовыми полями. Если многочлен задан над полем действительных чисел, то из теоремы 6 следует, что число действительных корней меньше или равно степени данного многочлена. О нахождении действительных корней можно сказать то же самое, что было сказано выше о нахождении комплексных корней. Если многочлен задан над полем рациональных чисел, то; используя теорему 9 (§ 5 гл. II), можно найти все рациональные корни данного многочлена. Аналогично, если многочлен задан над кольцом целых чисел, то все целые корни данного многочлена можно найти, используя теорему 8 из § 5 гл. II.

§ 5. Кольца, поля, группы

В предыдущих параграфах и главах наряду с числами рассматривались и более сложные объекты: многочлены, матрицы, функции и т.д.

Над этими объектами производились некоторые действия или операции, аналогичные арифметическим операциям над числами. Например, рассматривались сложение матриц, деление многочлена на многочлен и т.д. Поэтому естественно расширить понятия числовых полей, колец на множества, состоящие из более сложных объектов или элементов. Но для этого надо определить операции над элементами данного множества.

Пусть дано некоторое непустое множество элементов. Будем говорить, что в этом множестве определена *алгебраическая операция*, если указан закон, по которому любой паре элементов a и b этого множества однозначным образом ставится в соответствие некоторый элемент c, также принадлежащий этому множеству.

Если эта операция называется *сложением*, то элемент c будет называться *суммой* a и b и обозначаться $c = a + b$.

Если эта операция называется *умножением*, то элемент c будет называться *произведением* элементов a и b и обозначаться $c = ab$.

Кольца. Непустое множество элементов называется *кольцом*, если в нем определены две операции — сложение и умножение, обладающие свойствами:

1. Сложение коммутативно: $a + b = b + a$;

2. Сложение ассоциативно: $a + (b + c) = (a + b) + c$;

3. Сложение и умножение связаны левым и правым законом дистрибутивности: $c(a + b) = ca + cb$, $(a + b)c = = ac + bc$;

4. Существует такой элемент этого множества, что прибавление его к любому элементу этого множества не меняет последнего. Этот элемент называется *нулем* кольца и обозначается символом 0; другими словами, существует элемент 0 такой, что $a + 0 = 0 + a = a$;

5. Для любого элемента a этого множества существует так называемый *противоположный* элемент, принадлежа-

щий этому же множеству, и такой, что сумма a и этого элемента равна нулю кольца; обозначая этот элемент через $(-a)$, запишем это свойство в виде $a + (-a) = 0$.

Заметим, что из приведенного определения вытекают следующие свойства кольца:

1. Любое кольцо имеет единственный нуль.

2. В любом кольце для каждого элемента a существует единственный противоположный элемент.

3. Для любого элемента a кольца справедливы равенства $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Если в данном кольце операция умножения обладает еще свойствами коммутативности, т.е. если для любых двух элементов кольца a и b справедливо равенство $ab = ba$, то кольцо называется *коммутативным*.

Если в данном кольце операция умножения обладает еще свойствами ассоциативности, т.е. если для любых трех элементов кольца a, b и c справедливо равенство $(ab)c = a(bc)$, то кольцо называется *ассоциативным*.

Числовые кольца, рассмотренные в § 3, представляют собой простейшие примеры коммутативных и ассоциативных колец.

Приведем другие примеры колец.

1. Множество многочленов, целых относительно одной буквы x, с коэффициентами из данного числового поля, образует коммутативное и ассоциативное кольцо, которое называется кольцом многочленов над данным полем.

Действительно, как указано в § 4, сумма и произведение многочленов есть многочлен, т.е. в множестве многочленов определены две операции: сложение и умножение. Причем в § 4 указано, что обе эти операции коммутативны, ассоциативны и связаны законом дистрибутивности. Нулем этого кольца является многочлен, все коэффициенты которого равны нулю. Противоположный элемент для каждого многочлена есть многочлен, который получается умножением этого многочлена на число (-1).

2. Множество всех функций, непрерывных на данном отрезке $[a; b]$, также образует коммутативное и ассоциативное кольцо.

Действительно, в гл. IX дано определение непрерывности на данном отрезке функции и указано, что сумма и произведение двух непрерывных функций есть непрерывная функция. Легко проверить, что операция сложения и умножения непрерывных функций коммутативны, ассоциативны и связаны законом дистрибутивности. Нулем этого кольца является функция, тождественно равная нулю, противоположным элементом для функции $f(x)$ является функция $[-f(x)]$.

3. Множество всех квадратных матриц данного порядка n образует кольцо. Действительно, в гл. X показано, что сумма и произведение квадратных матриц данного порядка есть квадратная матрица того же порядка. Нулем этого кольца является квадратная матрица порядка n, все элементы которой суть нули. Противоположным элементом для данной матрицы является матрица, все элементы которой получены из элементов данной матрицы умножением на число (-1).

В гл. X указано, что операция умножения матриц является ассоциативной, но не является коммутативной. Поэтому кольцо квадратных матриц данного порядка n будет ассоциативным, но не коммутативным кольцом.

Поля. Множество элементов называется *полем*, если это множество состоит не менее чем из двух элементов, и является коммутативным и ассоциативным кольцом и если в нем существует элемент (называемый единицей поля) такой, что произведение любого элемента a поля на эту единицу равно этому элементу a, и если в нем для любого элемента a, отличного от нуля, существует элемент (называемый *обратным* элементом) такой, что произведение любого элемента a на его обратный элемент равно единице поля.

Примерами полей могут служить все числовые поля, рассмотренные в § 3.

Приведем другие примеры полей и колец.

1. Множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где числа a и b — любые числа из некоторого числового кольца, образует коммутативное и ассоциативное кольцо относительно обычных операций сложения и умножения матриц. Действительно, рассмотрим сумму и произведение матриц вида (1). Ясно, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(ad+bc) & ac+2bd \end{pmatrix}.$$

Поскольку числа, являющиеся элементами матриц, стоящих в правых частях этих равенств, есть числа из данного кольца, то это означает, что сумма и произведение матриц вида (1) есть матрицы вида (1). Другими словами, показано, что на множестве матриц вида (1) определены операции сложения и умножения.

Столь же легко показывается, что справедливы свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности сложения и умножения матриц вида (1).

Матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 \cdot 0 & 0 \end{pmatrix}$ является нулем этого кольца, а матрица $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -2b & -a \end{pmatrix}$ является противоположным элементом для матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$.

Таким образом, показано, что множество матриц вида (1), где числа a и b — любые числа из данного числового кольца, образует коммутативное и ассоциативное кольцо.

2. Множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где a и b — рациональные числа, образуют поле.

Так как множество рациональных чисел есть числовое кольцо, то, как показано выше, множество матриц вида (2) с рациональными a и b образует коммутативное и ассоциативное кольцо. Единицей этого кольца является матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть теперь матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, не является нулем кольца, т.е. хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля. Покажем, что для любой матрицы найдется матрица вида (2), т.е. матрица $\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$ такая, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

т.е. покажем, что у любого элемента этого кольца, отличного от нуля, есть обратный элемент. Применяя правило перемножения матриц, получаем, что справедливость равенства (3) равносильна справедливости равенства

$$\begin{pmatrix} ax + 2by & bx + ay \\ 2(ay + bx) & ax + 2by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Равенство (4) справедливо тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2by = 1, \\ bx + ay = 0 \end{cases} \tag{5}$$

имеет решения. Вычислим определитель системы (5)

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 2b^2. \tag{6}$$

Поскольку a и b — рациональные числа, то выражение $a^2 - 2b^2 \neq 0$. Значит, для данных рациональных чисел a и b существует единственная пара чисел x и y, удовлетворяющая системе (5).

Таким образом, показано, что существует и притом только одна матрица вида (2), удовлетворяющая условиям (3). Другими словами, показано, что отличный от нуля элемент имеет единственный обратный элемент.

Значит, действительно, множество матриц вида (2) с рациональными a и b образует поле.

З а м е ч а н и е. Множество матриц вида (2) с действительными a и b поля не образует, так как для действительных чисел определитель (6) может обращаться в нуль, например, если $a = b\sqrt{2}$, и тогда у элемента, отличного от нуля, нет обратного элемента.

3. Рассмотрим множество элементов, где каждый элемент — упорядоченная пара целых чисел (n, m). Введем следующие определения.

Два элемента (n, m) и (p, q) равны тогда и только тогда, когда $n = p$ и $m = q$.

Суммой двух элементов (n, m) и (k, l) называется элемент $(n + k, m + l)$, т.е. $(n, m) + (k, l) = (n + k, m + l)$.

Произведением двух элементов (n, m) и (k, l) называется элемент (nk, ml), т.е. $(n, m)(k, l) = (nk, ml)$.

Покажем, что так введенное множество есть коммутативное и ассоциативное кольцо. Будем обозначать элемент этого множества одной буквой A, т.е. $A = (n, m)$. Проверим, что операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $AB = BA$;
4. $(AB)C = A(BC)$;
5. $(A + B)C = AC + BC$.

Действительно, пусть $A = (n, m)$, $B = (k, l)$, $C = (p, q)$. Тогда, используя свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности сложения и умножения целых чисел, получаем, что

$$A + B = (n, m) + (k, l) = (n + k, m + l),$$
$$B + A = (k, l) + (n, m) = (k + n, l + m) = (n + k, m + l),$$

откуда и вытекает, что $A + B = B + A$, т.е. свойство 1 доказано.

Докажем свойство 5. По определению

$$(A + B)C = (n + k, m + l)(p, q) = (np + kp, mq + lq),$$
$$AC = (n, m)(p, q) = (np, mq),$$
$$BC = (l, k)(p, q) = (kp, lq),$$
$$AC + BC = (np, mq) + (kp, lq) = (np + kp, mq + lq),$$

т.е. $(A+B)C = AC + BC$. Остальные свойства доказываются аналогично.

Нулем этого кольца является элемент (0; 0). Для элемента (n, m) противоположным элементом является элемент $(-n, -m)$. Покажем, что это кольцо не является полем. Легко видеть, что единицей является элемент (1; 1). Рассмотрим, например, элемент (3; 2) и покажем, что для него нет обратного элемента.

Предположим противное: такой элемент есть. Пусть это будет элемент (x, y). Тогда должно быть справедливо равенство $(3; 2)(x, y) = (1; 1)$, откуда следует, что должны быть справедливы равенства $3x = 1$ и $2y = 1$. Но в множестве целых чисел эти равенства не выполняются. Значит, наше предположение было неверным, а это и означает, что рассматриваемое кольцо не является полем.

4. Рассмотрим множество, состоящее из трех элементов A_0, A_1, A_2. Под элементом A_0 понимается класс всех целых чисел, делящихся нацело на 3; под элементом A_1 понимается класс всех целых чисел, которые при делении на 3 дают остаток, равный 1; под элементом A_2 понимается класс всех целых чисел, которые при делении на 3 дают остаток, равный 2.

Определим в множестве $\{A_0, A_1, A_2\}$ операции сложения и умножения следующими правилами:

$$A_k + A_l = \begin{cases} A_{k+l}, & \text{если } k+l < 3, \\ A_{k+l-3}, & \text{если } k+l \geq 3; \end{cases}$$

$$A_k A_l = \begin{cases} A_{kl}, & \text{если } kl < 3, \\ A_{kl-3}, & \text{если } kl \geq 3. \end{cases}$$

Можно показать, что операции сложения элементов A_k и A_l означает сложение любых чисел из классов A_k и A_l и отнесение их суммы в соответствующий класс A_m $(k, l, m = 0, 1, 2)$; операция умножения элементов A_k и A_l означает умножение любых чисел из классов A_k и A_l и отнесение их произведения в соответствующий класс A_m $(k, l, m = 0, 1, 2)$.

Легко также проверить, что операции сложения и умножения элементов A_k и A_l обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Нулем в этом множестве является класс A_0. Противоположным элементом для элементом для элемента A_k является элемент A_{3-k}.

Единицей в этом множестве является класс A_1. Для элемента A_1 обратным элементом будет он сам, т.е. A_1, для элемента A_2 обратным элементом будет он сам, т.е. A_2. Значит, у любого, отличного от нуля, элемента этого множества есть обратный элемент. Все эти свойства легко проверяются на основании правил сложения и умножения этих классов. Значит, это множество есть поле.

Замечание. Если рассмотреть множество, состоящее их k элементов ($k \geq 2$): $A_0, A_1, A_2, ..., A_{k-1}$, где под элементом A_l понимается класс всех целых чисел, которые при делении на k дают остаток, равный l (где $l = 0, 1, 2, ..., k - 1$), то в каждом таком множестве можно определить операции сложения и умножения аналогично рассмотренному примеру. Для любого натурального k ($k \geq 2$) множество элементов A_0, A_1, A_2, ..., A_{k-1} с операциями сложения и умножения элементов, определенными указанным образом, является кольцом, а если число k будет простым числом, то такое множество будет полем.

5. Рассмотрим множество упорядоченных пар натуральных чисел (n, m). Разобьем это множество на классы, относя в один класс A те и только те пары (n, m) и (k, l), которые обладают свойством $n + l = m + k$. По определению пары, принадлежащие одному и тому же классу A, называются равными и считается, что каждая пара определяет класс A. В множестве, элементами которого будут классы равных пар, определим операции сложения и умножения по следующим правилам.

Сложить два элемента A и B — значит сложить любую пару (n, m) из класса A и любую пару (p, q) из класса B по правилу $(n, m) + (p, q) = (n + p, m + q)$. Каждая такая пара $(n + p, m + q)$ попадает к некоторый класс C, который называется суммой элементов A и B и обозначается $A + B$, т.е. $C = A + B$.

Умножить два элемента A и B — это значит умножить любую пару (n, m) из класса A и любую пару (p, q) из класса B по правилу $(n, m)(p, q) = (np + mq, nq + mp)$. Каждая такая пара $(np + mq,\ nq + mp)$ попадает в некоторый класс D, который и называется произведением A и B и обозначается AB, т.е. $D = AB$.

Введенное множество классов пар есть коммутативное и ассоциативное кольцо. Действительно, легко проверить, что операции сложения и умножения обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Докажем, например, свойство дистрибутивности: $(A + B)M = AM + BM$. Пусть пара $(n, m) \in A$, пара $(k, l) \in B$, пара $(p, q) \in M$. Если $A + B = C$, то класс C определяется парой $(n + k, m + l)$. Если $CM = D$, то класс D определяется парой $(np + kp + mq + lq,\ nq + kq + mp + lp)$. Если $AM = N_1$, то класс N_1 определяется парой $(np + mq,\ nq + mp)$. Если $BM = N_2$, то класс N_2 определяется парой $(kp + lq,\ kq + lp)$. Если $N_1 + N_2 = N$, то класс N определяется парой $(np + mq + kp + lq,\ nq + mp + kq + lp)$.

Теперь очевидно, что классы D и N определяются одной парой, т.е. это один класс; таким образом, показано, что $(A + B)M = AM + BM$. Аналогично доказываются и другие свойства сложения и умножения.

Нулем в этом множестве является класс пар вида (k, k).

Покажем, что у каждого класса A, определяемого парой (n, m) имеется противоположный класс. Выберем натуральное число p такое, что $p > n$ и $p > m$. Тогда числа $x = p - n$ и $y = p - m$ есть натуральные числа. Покажем, что класс B, определяемый парой (x, y), и есть класс, противоположный классу A. Действительно, $A + B = C$, где класс C определяется парой (p, p). Но пара (p, p) как раз и определяет класс, являющийся нулем этого множества. Итак, у каждого элемента этого множества есть противоположный элемент. Значит, рассматриваемое множество есть коммутативное и ассоциативное кольцо.

Замечание. При построении этого кольца были использованы только свойства натуральных чисел. Это кольцо можно использовать для конструктивного построения кольца целых чисел на базе натуральных чисел. Делается это так: класс A, определяемый парой (n, m), отождествляется:

а) с натуральным числом k, если $n > m$ и $n - m = k$;

б) с числом нуль, если $n = m$;

в) с отрицательным числом $(-k)$, если $n < m$ и $m - n = k$.

Полученное множество и будет кольцом целых чисел.

6. Рассмотрим множество упорядоченных пар целых чисел $[a, b]$ таких, что $b \neq 0$. Разобьем это множество на классы, относя в один класс α те и только те пары $[a, b]$ и $[c, d]$, которые обладают свойством $ad = bc$. По определению пары, принадлежащие одному и тому же классу, называются равными и считается, что каждая такая пара определяет класс α. В множестве, элементами которого будут классы разных пар, определим операции сложения и умножения по следующим правилам:

Сложить два элемента α и β — значит сложить любую пару $[a, b]$ из класса α и любую пару $[c, d]$ из класса β по правилу $[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$. Каждая такая пара $[ad + bc, bd]$ попадает в некоторый класс γ, который и называется суммой элементов α и β и обозначается $\alpha + \beta$, т.е. $\gamma = \alpha + \beta$.

Умножить два элемента α и β — это значит умножить любую пару $[a, b]$ из чисел класса α и любую пару $[c, d]$ из класса β по правилу $[a, b][c, d] = [ac, bd]$. Пара $[ac, bd]$ попадает в некоторый класс δ, который и называется произведением элементов α и β и обозначается $\alpha\beta$, т.е. $\delta = \alpha\beta$.

Веденное множество классов пар есть поле. Действительно, легко проверить, что операции сложения и умножения обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Докажем, например, свойство дистрибутивности: $(\alpha + \beta)\mu = \alpha\mu + \beta\mu$. Пусть пара $[a, b] \in \alpha$, пара $[c, d] \in \beta$, пара $[l, f] \in \mu$. Если $\alpha + \beta = \gamma$, то класс γ определяется парой $[ad + bc, bd]$, если $\gamma\mu = \nu$, то класс ν определяется парой $[adl + bcl, bdf]$. Если $\alpha\mu = \delta_1$, то класс δ_1 определяется парой $[al, bf]$, если $\beta\mu = \delta_2$, то класс δ_2 определяется парой $[cl, df]$. Если $\delta_1 + \delta_2 = \delta$, то класс δ определяется парой $[aldf + bfcl, bfdf]$. Так как пары $[aldf + bfcl, bfdf]$ и $[ald + bcl, bdf]$ удовлетворяют условию равенства пар, то они относятся к одному и тому же классу, т.е. класс ν и класс δ есть один и тот же класс. Таким образом, показано, что $(\alpha + \beta)\mu = \alpha\mu + \beta\mu$. Аналогично доказываются и другие свойства сложения и умножения. Нулем в этом множестве является класс γ_0, определяемый парой $[0, 1]$.

Покажем, что для любого класса α имеется противоположный класс β, т.е. такой, что $\alpha + \beta = \gamma_0$. Пусть пара $[a, b] \in \alpha$, тогда пара $[-a, b]$ определяет класс β, который и является противоположным классу α. Действительно, если $\alpha + \beta = \sigma$, то класс σ определяется парой $[0, b^2]$, где $b^2 \neq 0$. Так как пары $[0, b^2]$ и $[0, 1]$ удовлетворяют условию равенства пар, то они относятся к одному и тому же классу, т.е. класс σ и класс γ есть один и тот же класс, что и означает, что $\alpha + \beta = \gamma_0$.

Итак, у каждого элемента рассматриваемого множества есть противоположный элемент. Значит, рассматриваемое множество есть коммутативное и ассоциативное кольцо. Единицей в этом кольце является класс E, определяемый парой $[1; 1]$.

Покажем, что у каждого класса α, отличного от нуля, есть обратный класс β, т.е. такой, что $\alpha\beta = E$. Пусть пара $[a, b] \in \alpha$ и α не нуль кольца, т.е. пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Рассмотрим класс β, определяемый парой $[b, a]$. Если $\alpha\beta = \mu$, то класс μ определяется парой $[ab, ab]$. Так как пары $[ab, ab]$ и $[1; 1]$ удовлетворяют условию равенства пар, то они относятся к одному и тому же классу. Значит, класс μ совпадает с классом E, т.е. $\alpha\beta = E$.

Итак, у любого отличного от нуля элемента рассматриваемого множества есть обратный элемент. Значит, это множество есть поле.

Замечание. При построении этого поля были использованы только свойства целых чисел. Это поле можно использовать для конструктивного построения поля рациональных чисел на базе целых чисел. Делается это так: класс τ, определяемый парой $[a, b]$, отождествляется с рациональным числом $\frac{a}{b}$; при этом если $a = bn$, где n — целое число, то класс, определяемый парой $[bn, b]$, отождествляется с целым числом n. Полученное множество и будет полем рациональных чисел.

7. Рассмотрим множество упорядоченных пар действительных чисел $\{a, b\}$. Будем считать, что два элемента этого множества $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$. Введем в этом множестве пар действительных чисел операции сложения и умножения: $\{a, b\} + \{c, d\} = \{a + c, b + d\}$, $\{a, b\} \{c, d\} = \{ac - bd, ad + bc\}$.

Можно показать, что это множество является полем. Если отождествить пару $\{a, b\}$ с комплексным числом $a + bi$, то получится поле комплексных чисел, рассмотренное выше в этой главе.

Группы. Рассмотрим теперь множества, в которых определена лишь одна операция. Если эта операция обладает некоторыми определенными свойствами, то это множество принято называть группой. А именно, имеет место следующее определение.

Непустое множество элементов называется *группой*, если в нем определена операция, обозначаемая $*$ и обладающая свойствами:

а) ассоциативностью $(a * b) * c = a * (b * c)$;

б) в этом множестве существует так называемый нейтральный элемент, обозначаемый символом e такой, что $a * e = e * a = a$ для любого элемента a этого множества;

в) для любого элемента a из этого множества существует элемент b из этого же множества, такой, что $a * b = b * a = e$.

Поскольку наиболее распространены две операции — сложение и умножение, то наряду с этим общим определением приведем еще два частных случая — определение группы по сложению и группы по умножению.

Множество элементов называется *группой по сложению*, если в нем определена операция, называемая сложением и обладающая свойствами:

а) ассоциативностью сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

б) в этом множестве существует элемент, называемый нулем и обозначаемый символом 0, такой, что для любого элемента a этого множества $0 + a = a + 0 = a$;

в) для любого элемента a из этого множества существует элемент b из этого же множества такой, что $b + a = a + b = 0$.

Элемент b называется противоположным для элемента a и обозначается через $(-a)$.

Множество элементов называется *группой по умножению*, если в нем определена операция, называемая умножением и обладающее следующими свойствами:

а) ассоциативностью умножения: $(ab)c = a(bc)$;

б) в этом множестве существует элемент, называемый единицей группы и обозначаемый символом e, такой, что для любого элемента a этого множества $ae = ae = a$;

в) для любого элемента a из этого множества существует элемент c из этого же множества такой, что $ac = ca = e$.

Элемент c называется противоположным для элемента a и обозначается через a^{-1}.

Если операция, определенная в группе, будет коммутативной, то группа называется *коммутативной* группой.

Приведем примеры групп.

1. Отметим, что каждое кольцо является коммутативной группой по сложению, каждое поле является коммутативной группой по сложению.

Любое кольцо или любое поле не является группой по умножению, однако если рассмотреть любое поле, исключив из него нулевой элемент, то это новое множество уже является коммутативной группой по умножению.

2. Рассмотрим множество, состоящее из числа нуль и всех многочленов, целых относительно одной буквы x степени не выше чем n, с коэффициентами из данного числового поля.

На этом множестве определена лишь одна операция — сложение многочленов (операция умножения многочленов выводит произведение за пределы этого множества). Легко видеть, что в этом множестве операция сложения многочленов является коммутативной и ассоциативной, нулевой элемент множества — многочлен, все коэффициенты которого равны нулю, и у любого многочлена есть противоположный элемент.

Значит, рассматриваемое множество образует коммутативную группу по сложению.

3. Рассмотрим множество матриц, имеющих n строк и m столбцов, причем $n \neq m$. Легко видеть, что в этом множестве определена лишь одна операция — сложения матриц (операция умножения для таких матриц не определена). Легко видеть, что в этом множестве: а) операция сложения является коммутативной и ассоциативной; б) существует нулевой элемент — матрица, у которой все элементы равны нулю; в) у любой матрицы есть противоположный элемент — матрица, все элементы которой получены из элементов данной матрицы умножением на число (— 1).

Значит, множество таких матриц образует коммутативную группу по сложению.

4. Рассмотрим множество, состоящее из всех чисел вида 2^k, где k — любое целое число. Очевидно, что операция умножения этих чисел не выводит за пределы этого множества, другими словами, на этом множестве определена операция умножения элементов (обычная операция умножения чисел). Ясно также, что эта операция является коммутативной и ассоциативной. Единичным элементом является число 1, принадлежащее этому множеству, так как $1 = 2^0$; у каждого элемента 2^k есть обратный элемент 2^{-k}. Значит, это множество образует коммутативную группу по умножению.

5. Рассмотрим множество всех положительных рациональных чисел. На этом множестве определена операция умножения. Причем эта операция является коммутативной и ассоциативной. Число единица является нейтральным элементом этого множества; у каждого элемента $\frac{p}{q}$ этого множества есть обратный элемент $\frac{q}{p}$. Значит, множество всех положительных рациональных чисел образует коммутативную группу по умножению.

6. Рассмотрим множество всех положительных рациональных чисел и выясним, образует ли это множество группу относительно операции $*$, где $*$ — деление рациональных чисел. Хотя операция $*$ не выводит за пределы

этого множества и в этом множестве есть нейтральный элемент — число 1, ибо у каждого элемента $\frac{p}{q}$ есть элемент $\frac{p}{q}$ такой, что $\frac{p}{q} * \frac{p}{q} = 1$, это множество относительно введенной операции * не является группой, так как легко проверить, что операция * не будет ассоциативной.

7. Рассмотрим множество всех решений уравнения $x^n = 1$, или, другими словами, рассмотрим множество всех комплексных корней n-й степени из числа единица. Как показано выше в этой главе, произведение любых двух корней степени n из числа единица есть также корень степени n из числа единица, причем эта операция является коммутативной и ассоциативной. Единичным элементом является элемент $\alpha_0 = 1$, обратным элементом для элемента α_k — элемент α_{-k}. Значит, это множество образует коммутативную группу относительно операции умножения.

8. Рассмотрим множество вращений правильного треугольника вокруг его центра, совмещающих треугольник с самим собой. Если за умножение двух вращений принять их последовательное выполнение, то это множество образует коммутативную группу относительно этой операции. Можно проверить, что выполнены все свойства, определяющие коммутативную группу.

9. Рассмотрим множество вращений шара вокруг его центра. В качестве произведения вращений естественно взять последовательное выполнение двух вращений. Можно показать, что это множество относительно введенной операции образует некоммутативную группу.

УПРАЖНЕНИЯ

Выполнить указанные действия (1 — 4):

1. $(2 + 3i)(3 - 2i) + (2 - 3i)(3 + 2i)$. 2. $\frac{4+i}{2-i} + \frac{5-3i}{3+i}$.

3. $\frac{1}{1+4i} + \frac{1}{4-i}$. 4. $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i} - \frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$.

5. Построить на плоскости точки, изображающие следующие комплексные числа: $3 + 2i$; 3; $2 + 4i$; $3i$; $-1 + 2i$; -4; $-2 - 3i$; $-4i$.

6. Концы отрезка заданы некоторыми комплексными числами z_1 и z_2. Найти комплексные числа, соответствующие: а) середине отрезка; б) точке, делящей отрезок в отношении 1 : 3, считая от точки z_1.

7. Вершинами треугольника являются некоторые комплексные числа z_1, z_2, z_3. Найти все комплексные числа z, дополняющие этот треугольник до параллелограмма.

8. Вычислить модули комплексных чисел i; $1 + i$; $-i$; -1; $3 - i$; $1 + 2i$.

9. Определить аргументы комплексных чисел $1 + i$; $3 - i$; i; 1; $-i$; -1.

10. Дана точка $z = a + bi$. Где расположена точка $z - 2 + i$?

11. Пусть $|z| = 1$. Где расположены точки, изображающие комплексные числа $1 + 2z$?

12. Пусть $|z| = 5$. Где расположены точки, изображающие комплексные числа $1 - 2i + 3z$?

Указать, где расположена точка, изображающая комплексное число z, для которого выполняется следующее условие (13 — 18):

13. $|i - z| = 1$. 14. $|z + 1 - 2i| = 7$. 15. $\arg z = -\frac{5\pi}{6}$.

16. $|z - i| = |z + 2|$. 17. $-\pi < \arg z < \pi$. 18. $1 < |z + 2 - 3i| < 2$.

Записать в тригонометрической форме следующее число (19 — 21):

19. $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2$. 20. $z = \operatorname{ctg} \alpha + i$, где $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.

21. $z = 1 + \cos 40° + i \sin 40°$.

Найти все z, удовлетворяющие следующему равенству (22 — 24):

22. $(z + i)^5 + (z - i)^5 = 1$. 23. $z^5 = \bar{z}^5$. 24. $\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^4 = 1$.

25. Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z + 3i| \le 1$, найти число, имеющее наименьший главный аргумент.

26. Найти необходимое и достаточное условие того, что сумма двух комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ была бы действительным числом.

Доказать, что каждое из следующих множеств является кольцом (27 — 31):

27. Все целые числа, кратные данному натуральному числу n.

28. Все числа вида $a + bi$, где a, b — целые числа.

29. Все числа вида $a + b\sqrt{3}$, где a, b — целые числа.

30. Матрицы порядка n с целыми элементами (относительно сложения и умножения матриц).

31. Многочлены от одного неизвестного с целыми коэффициентами.

Доказать, что каждое из следующих множеств образует поле (32 — 34):

32. Числа вида $a + b\sqrt{3}$, где a, b — рациональные числа;

33. Числа вида $a + bi$, где a, b — рациональные числа;

34. Множество из двух элементов α и β с операциями $\oplus$ и $\otimes$, задаваемыми следующими правилами:

$$\alpha \oplus \alpha = \alpha, \qquad \alpha \otimes \alpha = \alpha,$$
$$\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = \beta, \qquad \alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha = \alpha,$$
$$\beta \oplus \beta = \beta, \qquad \beta \otimes \beta = .\beta$$

35. Образует ли кольцо или поле множество пар (a, b) целых чисел a и b с операциями $\oplus$ и $\otimes$, задаваемыми следующими правилами:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d); \ (a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd)?$$

Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множество при указанной операции над элементами (36 — 44):

36. Четные числа относительно сложения.

37. Целые числа, кратные данному натуральному числу n относительно сложения.

38. Нечетные целые числа относительно сложения.

39. Целые числа относительно вычитания.

40. Рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения.

41. Невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения.

42. Матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным единице, относительно умножения.

43. Положительные действительные числа, если операция определяется так: $a \oplus b = a^b$.

44. Действительные многочлены степени n от неизвестного x относительно сложения.

45. Образуют ли группу вращения квадрата вокруг своего центра на 0°, 90°, 180°, 270°?

Содержание

Учебное издание

Потапов Михаил Константинович
Александров Владимир Васильевич
Пасиченко Петр Иванович

АЛГЕБРА, ТРИГОНОМЕТРИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Научный редактор *М. К. Потапов*
Редактор *Л. В. Честная*
Художественный редактор *Ю. Э. Иванова*
Художник *К. Э. Семенков*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ-220. Подп. в печать 17.05.2001
Формат 60x90[1]/16. Бумага газетная. Гарнитура «Таймс»
Печать офсетная. Объем: 46,00 усл. печ. л., 46,00 усл. кр.-отт., 37,78 уч.-изд. л. Тираж 6000 экз. Заказ № 1269

ГУП «Издательство «Высшая школа», 127994, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Факс: 200-03-01, 200-06-87
E-mail: V-Shkola@g23.relcom.ru http: // www.v-shkola.ru

Отпечатано во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14