В. П. Супрун

МАТЕМАТИКА для СТАРШЕКЛАССНИКОВ

Нестандартные методы решения задач

350 задач с подробными решениями

URSS

В. П. Супрун

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

Нестандартные методы решения задач

URSS
МОСКВА

ББК 22.1я73

Супрун Валерий Павлович

Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 272 с.

Учебное пособие предназначено старшеклассникам, прежде всего, для развития их математического образования. Пособие будет незаменимым помощником учащихся при подготовке к участию в математических олимпиадах различного уровня, а также поможет абитуриентам успешно подготовиться к вступительным экзаменам в вузы, в какой бы форме они ни проводились: письменная контрольная работа, тестирование или собеседование.

В пособии приводятся нестандартные (для большинства учащихся — весьма неожиданные) методы решения задач по математике, изучению которых в общеобразовательной школе уделяется мало внимания. Применение предлагаемых методов иллюстрируется на решении многих задач повышенной сложности из различных разделов математики (алгебра, тригонометрия и геометрия).

Изучение нестандартных методов позволит не только расширить область успешно решаемых «школьных» задач по математике, но и будет способствовать развитию у старшеклассников нестандартного мышления.

Пособие адресовано учащимся общеобразовательных школ, гимназий, лицеев, колледжей, абитуриентам, учителям математики, руководителям школьных математических кружков, репетиторам, организаторам математических олимпиад и преподавателям вузов, принимающим вступительные конкурсные экзамены по математике.

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 17. Зак. № 1810.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-00050-5

Содержание

Жизнь хороша тем, что в ней можно заниматься математикой

Леонард Эйлер

От автора

В учебном издании предлагаются нестандартные методы решения уравнений и неравенств из различных разделов математики (алгебра, тригонометрия и геометрия). Их применение требует от абитуриентов несколько необычных рассуждений. Незнание и непонимание нестандартных методов существенно уменьшает область успешно решаемых задач по математике. Тем более, что такие методы, как правило, не изучаются в общеобразовательной школе.

При решении задач, предлагаемых на вступительных конкурсных письменных экзаменах по математике, разрешается применение любых известных абитуриентам нестандартных методов. Поэтому настоящее учебное издание будет полезно, прежде всего, абитуриентам при подготовке к поступлению в вуз.

Знание нестандартных методов и приемов решения задач повышенной сложности способствует развитию у школьников и абитуриентов нестандартного математического мышления, что является необходимым условием для последующего успешного изучения высшей математики в вузах с углубленным изучением математики.

Многие из приведенных в пособии задач предлагались в течение ряда последних лет на вступительных экзаменах по математике в Белорусском государственном университете.

Настоящее издание представляет собой исправленное и переработанное переиздание учебного пособия автора «Математика для старшеклассников. Нестандартные методы решения задач» (Минск: Аверсэв, 2003). Переработка коснулась объема пособия (добавлено более 40 новых задач), а также изменения методов решения части задач, приведенных в настоящем пособии.

Пособие адресовано школьникам, абитуриентам, учителям математики общеобразовательных школ, руководителям школьных математических кружков и преподавателям вузов, принимающим вступительные конкурсные экзамены по математике.

РАЗДЕЛ 1

Метод функциональной подстановки

Метод функциональной подстановки является, пожалуй, самым распространенным методом решения сложных задач школьной математики. Суть метода состоит во введении новой переменной $y = f(x)$, применение которой приводит к более простому выражению. Частным случаем функциональной подстановки является тригонометрическая подстановка (см. раздел 2).

Основная трудность решения задач методом функциональной подстановки заключается в том, что зачастую трудно угадать вид самой подстановки и вид уравнений (или неравенств), где эту подстановку можно использовать. В настоящем разделе предлагаются наиболее часто встречающиеся уравнения и неравенства, которые эффективно решаются методом функциональной подстановки.

Задачи и решения

1.1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}. \qquad (1.1)$$

Решение. Введем новую переменную $x^2 - x + 2 = y$, тогда из (1.1) вытекает уравнение $\sqrt{y} + \sqrt{y+5} = \sqrt{2y+17}$, где $y \geq 0$.

Поскольку обе части данного уравнения неотрицательны, то после возведения в квадрат обеих его частей получаем равносильное уравнение $y + 2\sqrt{y^2 + 5y} + y + 5 = 2y + 17$. Отсюда следует

$$\sqrt{y^2+5y}=6\,,\ y^2+5y-36=0 \text{ и } y_1=-9\,,\ y_2=4\,.$$

Так как $y \geq 0$, то для нахождения корней уравнения (1.1) необходимо рассмотреть уравнение $x^2-x+2=4$, корнями которого являются $x_1=-1$ и $x_2=2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-1$, $x_2=2$.

1.2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}\,. \qquad (1.2)$$

Решение. Обозначим $\sqrt{2x-5}=y$ (очевидно, что $y \geq 0$). Тогда $y^2=$ $=2x-5$ или $x=\dfrac{y^2+5}{2}$. В таком случае

$$x-2+\sqrt{2x-5}=\frac{y^2+5}{2}-2+y=\frac{(y+1)^2}{2}\,,$$

$$x+2+3\sqrt{2x-5}=\frac{y^2+5}{2}+2+3y=\frac{(y+3)^2}{2}$$

и из (1.2) получаем уравнение

$$\frac{|y+1|}{\sqrt{2}}+\frac{|y+3|}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2} \text{ или}$$

$$|y+1|+|y+3|=14\,. \qquad (1.3)$$

Поскольку $y \geq 0$, то $|y+1|=y+1$, $|y+3|=y+3$. В этой связи уравнение (1.3) принимает вид $y+1+y+3=14$. Отсюда получаем $y=5$, $\sqrt{2x-5}=5$ и $x_1=15$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=15$.

1.3. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x(x+5)^2}+6\sqrt[4]{x^3}=5\cdot\sqrt[4]{x^2(x+5)}\,. \qquad (1.4)$$

Решение. Нетрудно видеть, что $x \geq 0$ и при этом $x_1=0$ является корнем уравнения (1.4).

Пусть теперь $x \neq 0$, тогда обе части уравнения (1.4) разделим на $\sqrt[4]{x^3}$ и получим

$$\sqrt[4]{\left(\frac{x+5}{x}\right)^2} - 5 \cdot \sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} + 6 = 0. \qquad (1.5)$$

Если обозначить $\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = y$, то уравнение (1.5) принимает вид квадратного уравнения $y^2 - 5y + 6 = 0$, корнями которого являются $y_1 = 2$ и $y_2 = 3$.

Рассмотрим уравнения $\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = 2$ и $\sqrt[4]{\frac{x+5}{x}} = 3$, откуда следует, что $x_2 = \frac{1}{3}$ и $x_3 = \frac{1}{16}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{16}$.

$\boxed{1.4.}$ Решить уравнение

$$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} - x^2 + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = 0. \qquad (1.6)$$

Решение. Обозначим $x^2 = y$. Так как $12 - \frac{12}{x^2} \geq 0$ и $x^2 - \frac{12}{x^2} \geq 0$, то $x^4 \geq 12$ или $y \geq 2\sqrt{3}$.

В таком случае уравнение (1.6) принимает вид

$$\sqrt{12 - \frac{12}{y}} = y - \sqrt{y - \frac{12}{y}}. \qquad (1.7)$$

Так как $y \geq 2\sqrt{3}$, то обе части уравнения (1.7) могут принимать только неотрицательные значения. Поэтому после возведения в квадрат обеих частей уравнения получаем равносильные уравнения

$$12 - \frac{12}{y} = y^2 - 2y\sqrt{y - \frac{12}{y}} + y - \frac{12}{y},$$

$$y^2 + y - 12 = 2y\sqrt{y - \frac{12}{y}}.$$

Если обе части уравнения разделить на y, а затем обозначить $\sqrt{y-\dfrac{12}{y}}=z$, то получаем $y+1-\dfrac{12}{y}=2\sqrt{y-\dfrac{12}{y}}$ или $z^2+1=2z$. Отсюда следует, что $z_1=1$, $\sqrt{y-\dfrac{12}{y}}=1$ или $y_1=4$.

Поскольку $x^2=y$, то $x^2=4$, т. е. $x_1=-2$ и $x_2=2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-2$, $x_2=2$.

$\boxed{1.5}$ Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+3}+3x-16. \qquad (1.8)$$

Решение. Перепишем уравнение (1.8) в виде

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2\sqrt{(2x+3)(x+1)}+(2x+3)+(x+1)-20. \qquad (1.9)$$

Положим, что $\sqrt{2x+3}=u$ и $\sqrt{x+1}=v$, тогда из (1.9) получим уравнение $u+v=2uv+u^2+v^2-20$, где $u\ge 0$ и $v\ge 0$.

Из уравнения $u+v=2uv+u^2+v^2-20$ получаем квадратное уравнение относительно $u+v$ вида $(u+v)^2-(u+v)-20=0$. Отсюда следует, что $u+v=-4$ и $u+v=5$. Так как $u\ge 0$ и $v\ge 0$, то $u+v=5$.

Так как $\sqrt{2x+3}=u$ и $\sqrt{x+1}=v$, то $u^2-2v^2=1$. Следовательно, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^2-2v^2=1. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Корнями системы уравнений (1.10) являются $u_1=3$, $v_1=2$ и $u_2=17$, $v_2=-12$. Поскольку $u\ge 0$ и $v\ge 0$, то $u=3$.

Однако $u=\sqrt{2x+3}$, поэтому $3=\sqrt{2x+3}$ или $x_1=3$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=3$.

$\boxed{1.6}$ Решить уравнение

$$x^2+\frac{81x^2}{(x+9)^2}=40. \qquad (1.11)$$

Решение. Для преобразования левой части уравнения (1.11) воспользуемся очевидным равенством $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$. Тогда из уравнения (1.11) вытекает $\left(x-\frac{9x}{x+9}\right)^2+\frac{18x^2}{x+9}=40$ или

$$\left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2+\frac{18x^2}{x+9}-40=0. \qquad (1.12)$$

Если в уравнении (1.12) положить $\frac{x^2}{x+9}=y$, то получим уравнение $y^2+18y-40=0$, корни которого равны $y_1=-20$ и $y_2=2$. Таким образом, необходимо рассмотреть два уравнения $\frac{x^2}{x+9}=-20$ и $\frac{x^2}{x+9}=2$, т. е. $x^2+20x+180=0$ и $x^2-2x-18=0$. Первое уравнение действительных корней не имеет, а из второго получаем $x_{1,2}=1\pm\sqrt{19}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1+\sqrt{19}$, $x_2=1-\sqrt{19}$.

$\boxed{1.7}$ Решить уравнение

$$\left(\frac{x}{x-2}\right)^2+\left(\frac{x}{x+2}\right)^2=2. \qquad (1.13)$$

Решение. Для преобразования левой части уравнения будем использовать равенство $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$. В таком случае уравнение (1.13) примет вид $\left(\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right)^2-2\cdot\frac{x}{x-2}\cdot\frac{x}{x+2}=2$ или

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-4}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x^2-4}=2. \qquad (1.14)$$

В уравнении (1.14) положим, что $\frac{2x^2}{x^2-4}=y$, и получим квадратное уравнение $y^2-y-2=0$, корнями которого являются $y_1=-1$ и $y_2=2$. Так как $\frac{2x^2}{x^2-4}=y$, то рассмотрим два уравнения.

1. Если $y_1=-1$, то $\frac{2x^2}{x^2-4}=-1$, $3x^2=4$ или $x_{1,2}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Если $y_2=2$, то $\frac{2x^2}{x^2-4}=2$. Очевидно, данное уравнение корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

1.8. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right). \tag{1.15}$$

Решение. Введем новую переменную $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}$. Поскольку левая часть уравнения (1.15) строго положительна, то $y>0$.

Так как $y^2=\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2=\frac{x^2}{9}-\frac{8}{3}+\frac{16}{x^2}$ или $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3y^2+8$, то уравнение (1.15) можно переписать как $3y^2+8=10y$ или

$$3y^2-10y+8=0. \tag{1.16}$$

Квадратное уравнение (1.16) имеет два положительных корня $y_1=\frac{4}{3}$ и $y_2=2$. Так как $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}$, то для получения корней уравнения (1.15) необходимо рассмотреть совокупность двух уравнений относительно переменной x, вида $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}$ и $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2$ или $x^2-4x-12=0$ и $x^2-6x-12=0$.

Отсюда получаем четыре корня уравнения (1.15) вида $x_1=-2$, $x_2=6$, $x_3=3-\sqrt{21}$ и $x_4=3+\sqrt{21}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-2$, $x_2=6$, $x_3=3-\sqrt{21}$, $x_4=3+\sqrt{21}$.

Примечание. Рассмотрим несколько иной метод решения уравнения (1.15). Для этого обе части уравнения разделим на 3 и получим

$$\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right). \tag{1.17}$$

Как и при решении уравнения (1.11) воспользуемся равенством $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ и уравнение (1.17) перепишем в виде

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2+2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{4}{x}=\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$$

или

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2-\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)+\frac{8}{3}=0. \tag{1.18}$$

Если ввести новую переменную $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}$, то из уравнения (1.18) получаем известное уравнение (1.16).

$\boxed{1.9}$ Решить уравнение

$$x^4-8x^3+17x^2-8x+1=0. \tag{1.19}$$

Решение. Нетрудно убедиться, что подбором найти корни уравнения (1.19) практически невозможно. Также очевидно, что $x\neq 0$ (в противном случае после подстановки $x=0$ в уравнение (1.19) получили бы противоречие).

Так как $x\neq 0$, то обе части уравнения (1.19) разделим на x^2 и преобразуем его к виду

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0. \tag{1.20}$$

Положим, что $x+\frac{1}{x}=y$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ и из (1.20) получаем квадратное уравнение $y^2-8y+15=0$, корнями которого являются $y_1=3$ и $y_2=5$.

Далее, рассмотрим два уравнения $x+\frac{1}{x}=3$ и $x+\frac{1}{x}=5$, т. е. $x^2-3x+1=0$ и $x^2-5x+1=0$. Корнями первого из этих уравнений являются $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, а второго — $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, $x_4 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Примечание. Уравнения вида (1.19) называются симметрическими уравнениями четвертой степени.

1.10 Решить уравнение

$$2x^4+3x^3-3x^2-3x+2=0\,. \qquad (1.21)$$

Решение. Первоначально убедимся в том, что $x=0$ не является корнем исходного уравнения, а затем разделим обе части уравнения (1.21) на x^2 и получим равносильное уравнение

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0\,. \qquad (1.22)$$

Обозначим $x-\frac{1}{x}=y$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ и из (1.22) получаем квадратное уравнение относительно переменной y вида $2y^2+3y+1=0$, корнями которого являются $y_1=-\frac{1}{2}$ и $y_2=-1$. Далее, рассмотрим два случая.

1. Если $x-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$, тогда $2x^2+x-2=0$ и $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$.
2. Если $x-\frac{1}{x}=-1$, тогда $x^2+x-1=0$ и $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, $x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Примечание. Уравнения вида (1.21) называются возвратными уравнениями четвертой степени.

1.11 Решить уравнение

$$\frac{x^4+1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{41}{15}\,. \qquad (1.23)$$

Решение. Поскольку $x \neq 0$, то числитель и знаменатель левой части уравнения (1.23) можно разделить на x^2. Тогда

$$\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}}=\frac{41}{15}. \qquad (1.24)$$

Если положить $x+\frac{1}{x}=y$, то $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ и из (1.24) получаем $\frac{y^2-2}{y}=\frac{41}{15}$ или $15y^2-41y-30=0$. Корнями последнего уравнения являются $y_1=\frac{10}{3}$ и $y_2=-\frac{3}{5}$.

Так как $y=x+\frac{1}{x}$, то согласно неравенству Коши (см. раздел 3), имеем $|y| \geq 2$. Поэтому при решении данного примера необходимо рассмотреть только одно уравнение $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$, т. е. $3x^2-10x+3=0$, корнями которого являются $x_1=3$ и $x_2=\frac{1}{3}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$.

$\boxed{1.12}$ Решить уравнение

$$6x^3-x^2-20x+12=0. \qquad (1.25)$$

Решение. Если обе части уравнения (1.25) умножить на $x+\frac{1}{2}$, то получим симметрическое уравнение четвертой степени

$$6x^4+2x^3-\frac{41}{2}x^2+2x+6=0. \qquad (1.26)$$

Так как $x=0$ не является корнем уравнения (1.26), то обе его части разделим на x^2 и получим

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{41}{2}=0. \qquad (1.27)$$

Положим $x+\frac{1}{x}=y$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ и из (1.27) следует уравнение $12y^2+4y-65=0$, корнями которого являются $y_1=\frac{13}{6}$ и $y_2=-\frac{5}{2}$.

Рассмотрим два случая.

1. Если $x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$, то $6x^2-13x+6=0$ и $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{2}{3}$.

2. Если $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$, то $2x^2+5x+2=0$ и $x_3=-2$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

Уравнение третьей степени (1.25) может иметь не более трех действительных корней. Поэтому хотя бы одно из найденных значений x_1, x_2, x_3, x_4 является лишним.

Так как при значении $x=-\frac{1}{2}$ сомножитель $x+\frac{1}{2}$ обращается в ноль, то корень $x_4=-\frac{1}{2}$ является для уравнения (1.25) посторонним.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{2}{3}$, $x_3=-2$.

$\boxed{1.13.}$ Решить уравнение

$$x^6-3x^5+2x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0. \qquad (1.28)$$

Решение. Первоначально убедимся, что $x=0$ не является корнем уравнения (1.28). Положим $x\neq 0$ и разделим обе части уравнения (1.28) на x^3. Тогда получим

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0. \qquad (1.29)$$

Пусть $x+\frac{1}{x}=y$, тогда

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y,$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$$

и уравнение (1.29) принимает вид $y^3-3y-3\left(y^2-2\right)+2y-3=0$, $y^3-3y^2-y+3=0$ или $\left(y^2-1\right)(y-3)=0$. Отсюда получаем корни кубического уравнения $y_{1,2}=\pm 1$ и $y_3=3$.

Так как $y=x+\frac{1}{x}$, то согласно неравенству Коши (см. раздел 3) имеет место неравенство $|y|\ge 2$. В этой связи необходимо рассмотреть только одно уравнение, а именно $x+\frac{1}{x}=3$ или $x^2-3x+1=0$. Корнями последнего уравнения являются $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Примечание. Уравнения вида (1.28) называются симметрическими уравнениями шестой степени.

1.14. Решить уравнение

$$x^6-2x^5-6x^4+4x^3+6x^2-2x-1=0. \tag{1.30}$$

Решение. Так как $x\ne 0$ (в этом можно легко убедиться), то обе части уравнения (1.30) можно разделить на x^3. Тогда

$$\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6\left(x-\frac{1}{x}\right)+4=0. \tag{1.31}$$

Положим $x-\frac{1}{x}=y$, тогда

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)=y^3+3y,$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=y^2+2$$

и уравнение (1.31) принимает вид $y^3+3y-2\left(y^2+2\right)-6y+4=0$ или $y^3-2y^2-3y=0$. Корнями последнего уравнения являются $y_1=0$,

$y_2=3$ и $y_3=-1$. Рассмотрим три уравнения относительно переменной x вида $x-\frac{1}{x}=0$, $x-\frac{1}{x}=3$ и $x-\frac{1}{x}=-1$. Корнями уравнений $x^2-1=0$, $x^2-3x-1=0$ и $x^2+x-1=0$ являются, соответственно, $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ и $x_{5,6}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x_4=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $x_5=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_6=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Примечание. Уравнения вида (1.30) называются возвратными уравнениями шестой степени.

1.15. Решить уравнение

$$x^8-7x^7+4x^6-21x^5+6x^4-21x^3+4x^2-7x+1=0. \qquad (1.32)$$

Решение. Поскольку $x=0$ не является корнем уравнения (1.32) (в этом легко убедиться), то обе части уравнения (1.32) можно разделить на x^4 и после этого получить равносильное уравнение

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-7\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-21\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0. \qquad (1.33)$$

Положим $x+\frac{1}{x}=y$, тогда

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,\quad y^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right) \text{ и}$$

$$y^4=\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=x^4+\frac{1}{x^4}+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6.$$

Отсюда получаем $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$ и $x^4+\frac{1}{x^4}=$ $=y^4-4\left(y^2-2\right)-6=y^4-4y^2+2$.

В этой связи уравнение (1.33) принимает вид

$$\left(y^4-4y^2+2\right)-7\left(y^3-3y\right)+4\left(y^2-2\right)-21y+6=0.$$

Отсюда вытекает уравнение $y^4-7y^3=0$, корнями которого являются $y_1=0$ и $y_2=7$. Так как $y=x+\dfrac{1}{x}$, то согласно неравенству Коши (см. раздел 3) имеем $y\le -2$ или $y\ge 2$. Следовательно, требуется рассмотреть только одно уравнение $x+\dfrac{1}{x}=7$, которое имеет корни $x_{1,2}=\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

Примечание. Уравнения вида (1.32) называются симметрическими уравнениями восьмой степени.

1.16. Решить уравнение

$$\left(x^2+4x+8\right)^2+3x^3+14x^2+24x=0. \tag{1.34}$$

Решение. Перепишем уравнение (1.34) в виде

$$\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2=0. \tag{1.35}$$

Так как $x=0$ не является корнем уравнения (1.35), то разделим обе части уравнения (1.35) на x^2 и получим равносильное ему уравнение

$$\left(\frac{x^2+4x+8}{x}\right)^2+3\left(\frac{x^2+4x+8}{x}\right)+2=0. \tag{1.36}$$

Введем новую переменную $y=\dfrac{x^2+4x+8}{x}$ и из уравнения (1.36) получим уравнение $y^2+3y+2=0$, корнями которого являются $y_1=-1$ и $y_2=-2$.

Рассмотрим два уравнения относительно переменной x, т. е. $\dfrac{x^2+4x+8}{x}=-1$ и $\dfrac{x^2+4x+8}{x}=-2$. Первое уравнение действительных корней не имеет, а второе уравнение имеет два корня $x_1=-2$ и $x_2=-4$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-2$, $x_2=-4$.

Примечание. Уравнение вида (1.35) называется однородным уравнением второй степени.

$\boxed{1.17.}$ Решить уравнение

$$\left(x^2-6x-9\right)^2=x\left(x^2-4x-9\right). \tag{1.37}$$

Решение. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x=0$ не является корнем уравнения (1.37).

Пусть $x\neq 0$, тогда разделим обе части уравнения (1.37) на x^2 и получим

$$\left(x-6-\frac{9}{x}\right)^2=x-4-\frac{9}{x}. \tag{1.38}$$

Положим $x-6-\frac{9}{x}=y$, тогда уравнение (1.38) принимает вид $y^2=y+2$, откуда получаем $y_1=-1$ и $y_2=2$.

Так как $x-6-\frac{9}{x}=y$ и $y_1=-1$, $y_2=2$, то необходимо рассмотреть два уравнения $x-6-\frac{9}{x}=-1$ и $x-6-\frac{9}{x}=2$. Первое уравнение имеет корни $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$, а корнями второго уравнения являются $x_3=-1$ и $x_4=9$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{5+\sqrt{61}}{2}$, $x_2=\frac{5-\sqrt{61}}{2}$, $x_3=-1$, $x_4=9$.

$\boxed{1.18.}$ Решить уравнение

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)=10x^2. \tag{1.39}$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения (1.39) следующим образом:

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)=$$

$$=((x-1)(x-8))\cdot((x-2)(x-4))=$$

$$=\left(x^2-9x+8\right)\left(x^2-6x+8\right).$$

Следовательно, уравнение (1.39) равносильно уравнению

$$\left(x^2-9x+8\right)\left(x^2-6x+8\right)=10x^2. \qquad (1.40)$$

Поскольку $x=0$ не является корнем уравнения (1.40), то обе его части можно разделить на x^2. Тогда

$$\left(x-9+\frac{8}{x}\right)\left(x-6+\frac{8}{x}\right)=10.$$

Пусть $x-9+\frac{8}{x}=y$, тогда $y(y+3)=10$ или $y^2+3y-10=0$. Корнями последнего уравнения являются $y_1=2$ и $y_2=-5$.

Рассмотрим два уравнения относительно переменной x, т. е. $x-9+\frac{8}{x}=2$ и $x-9+\frac{8}{x}=-5$. Отсюда получаем два квадратных уравнения $x^2-11x+8=0$ и $x^2-4x+8=0$. Корнями первого уравнения являются $x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{89}}{2}$, а второе уравнение корней не имеет.

♦ *Ответ:* $x_1=\frac{11+\sqrt{89}}{2}$, $x_2=\frac{11-\sqrt{89}}{2}$.

1.19. Решить уравнение

$$\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6. \qquad (1.41)$$

Решение. Первоначально убедимся, что $x=0$ не является корнем уравнения (1.41). Далее, положим $x\neq 0$ и разделим на x числитель и знаменатель обеих дробей левой части уравнения. Тогда получим уравнение

$$\frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}+\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}=6. \qquad (1.42)$$

Введем новую переменную $2x+\frac{3}{x}=y$. Тогда из (1.42) следует уравнение $\frac{2}{y-5}+\frac{13}{y+1}=6$, которое равносильно квадратному уравнению

$2y^2 - 13y + 11 = 0$. Корнями последнего уравнения являются $y_1 = \frac{11}{2}$
$y_2 = 1$.

Для нахождения корней уравнения (1.41) необходимо рассмотре
два уравнения $2x + \frac{3}{x} = \frac{11}{2}$ и $2x + \frac{3}{x} = 1$, которые можно переписать в б
лее удобном для решения виде, т. е. $4x^2 - 11x + 6 = 0$ и $2x^2 - x + 3 =$
Корнями первого уравнения являются $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{3}{4}$, а второе уравнен
корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

1.20. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(x-29)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = 7 - \sqrt[3]{x^2 - 30x + 29}. \qquad (1.43)$$

Решение. Перепишем уравнение (1.43) в виде

$$\sqrt[3]{(x-29)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = 7 - \sqrt[3]{(x-29)(x-1)}. \qquad (1.44)$$

Если обозначить $\sqrt[3]{x-29} = u$ и $\sqrt[3]{x-1} = v$, то отсюда и из уравнени
(1.44) следует система уравнений

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = -28, \\ u^2 + v^2 = 7 - uv. \end{cases} \qquad (1.45)$$

Из первого уравнения системы (1.45) получаем уравнение $(u-v)\left(u^2 + uv + v^2\right) = -28$. Если принять во внимание второе уравнение системы, то $(u-v)(7 - uv + uv) = -28$ или $u - v = -4$.

Следовательно, имеет место $v = u + 4$. Подставим выражение $v = u + 4$ во второе уравнение системы (1.45) и получим

$$u^2 + (u+4)^2 = 7 - u(u+4),$$

т. е. $u^2 + 4u + 3 = 0$ и $u_1 = -3$, $u_2 = -1$.

Так как $\sqrt[3]{x-29} = u$ и $u_1 = -3$, $u_2 = -1$, то требуется рассмотреть два уравнения относительно переменной x, т. е. $\sqrt[3]{x-29} = -3$ и $\sqrt[3]{x-29} = -1$. Отсюда нетрудно получить $x_1 = 2$ и $x_2 = 28$.

♦ *Ответ:* $x_1 = 2$, $x_2 = 28$.

$\boxed{1.21.}$ Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2. \tag{1.46}$$

Решение. Введем новые переменные u и v следующим образом: $\sqrt{x+1} = u$ и $\sqrt[3]{2x-6} = v$. В таком случае уравнение (1.46) принимает вид $u - v = 2$, где $u \geq 0$. Так как $u^2 = x+1$ и $v^3 = 2x-6$, то $v^3 - 2u^2 = -8$. Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ v^3 - 2u^2 = -8, \end{cases} \tag{1.47}$$

где $u \geq 0$.

Из первого уравнения системы (1.47) следует $u = v+2$. Тогда из второго уравнения получаем кубическое уравнение относительно переменной v вида $v^3 - 2v^2 - 8v = 0$, корнями которого являются $v_1 = 0$, $v_2 = -2$ и $v_3 = 4$. Так как $u = v+2$, то $u_1 = 2$, $u_2 = 0$ и $u_3 = 6$, т. е. требуемое неравенство $u \geq 0$ выполняется. Поскольку $\sqrt{x+1} = u$, то $x = u^2 - 1$ и $x_1 = u_1^2 - 1 = 3$, $x_2 = u_2^2 - 1 = -1$, $x_3 = u_3^2 - 1 = 35$.

♦ *Ответ:* $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 35$.

$\boxed{1.22.}$ Решить уравнение

$$\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1} - (x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x} - \sqrt[3]{x+1}} = 30. \tag{1.48}$$

Решение. Введем новые переменные $\sqrt[3]{34-x} = u$ и $\sqrt[3]{x+1} = v$, тогда из уравнения (1.48) имеем $u \neq v$ и $\dfrac{u^3 v - uv^3}{u-v} = 30$ или $uv \cdot (u+v) = 30$.

Так как $u = \sqrt[3]{34-x}$ и $v = \sqrt[3]{x+1}$, то $u^3 + v^3 = 35$. Известно, что $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv \cdot (u+v)$. Отсюда с учетом, что $u^3 + v^3 = 35$ и $uv \cdot (u+v) = 30$, получаем $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv \cdot (u+v) = 35 + 3 \cdot 30 = 125$, т. е. $u + v = 5$.

Поскольку $uv\cdot(u+v)=30$ и $u+v=5$, то $uv=6$. Корнями системы уравнений $\begin{cases} u+v=5, \\ uv=6 \end{cases}$ являются $u_1=2, v_1=3$ и $u_2=3$, $v_2=2$. Очевидно, что здесь неравенство $u\neq v$ выполняется.

Так как $\sqrt[3]{34-x}=u$ и $u_1=2$, $u_2=3$, то $\sqrt[3]{34-x}=2$ и $\sqrt[3]{34-x}=3$. Отсюда получаем $x_1=26$ и $x_2=7$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=26$, $x_2=7$.

1.23. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6. \qquad (1.49)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (1.49) являются $x\geq 4$.

Пусть $y=\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}$, тогда $y^2=2x+2\sqrt{x^2-16}$ и уравнение (1.49) принимает вид $y=y^2-12$ или $y^2-y-12=0$. Отсюда получаем $y_1=4$ и $y_2=-3$. Так как $y=\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}$, то $y>0$ и $y_1=4$.

Следовательно, имеем уравнение $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}=4$. После возведения в квадрат обеих его частей получаем $2x+2\sqrt{x^2-16}=16$ или $\sqrt{x^2-16}=8-x$. Отсюда следует, что $x\leq 8$. Так как $x\geq 4$, то корни уравнения (1.49) лежат на отрезке $4\leq x\leq 8$.

Возведем в квадрат обе части уравнения $\sqrt{x^2-16}=8-x$ и получим уравнение $x^2-16=(8-x)^2$. Отсюда следует $16x=80$ или $x_1=5$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=5$.

1.24. Решить уравнение

$$64\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3-\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^3=63. \qquad (1.50)$$

Решение. Обозначим $4\cdot\frac{x+3}{x-1}=u$ и $\frac{x+3}{x+2}=v$, тогда уравнение (1.50) принимает вид

$$u^3-v^3=63. \qquad (1.51)$$

Кроме того, имеем

$$u-v=(x+3)\left(\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{3(x+3)^2}{(x-1)(x+2)}=\frac{3uv}{4}.$$

В таком случае

$$u^3-v^3=(u-v)\left(u^2+uv+v^2\right)=$$

$$=(u-v)\cdot\left((u-v)^2+3\,uv\right)=\frac{3\,uv}{4}\cdot\left(\frac{9\,u^2v^2}{16}+3\,uv\right)=63.$$

Пусть $y=uv$, тогда уравнение (1.51) можно переписать как

$$\frac{3y}{4}\cdot\left(\frac{9y^2}{16}+3y\right)=63,\ \frac{y}{4}\cdot\left(\frac{3y^2}{16}+y\right)=7,\ y\left(3y^2+16y\right)=448,$$

$$3y^3+16y^2-448=0. \qquad (1.52)$$

Единственным корнем уравнения (1.52) является $y_1=4$. Так как $y=uv$, $u=4\cdot\dfrac{x+3}{x-1}$ и $v=\dfrac{x+3}{x+2}$, то $\dfrac{4(x+3)^2}{(x-1)(x+2)}=4$ и $x_1=-\dfrac{11}{5}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-\dfrac{11}{5}$.

1.25. Решить уравнение

$$4\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}=x+4. \qquad (1.53)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (1.53) являются $0\le x\le 2$.

Перепишем уравнение (1.53) в виде $\sqrt{4-x^2}=x-4\sqrt{x}+4$ или

$$\sqrt{4-x^2}=\left(\sqrt{x}-2\right)^2. \qquad (1.54)$$

Пусть $\sqrt{x}=y$, тогда $0\le y\le\sqrt{2}$ и после возведения в квадрат обеих частей уравнения (1.54) получаем $4-y^4=(y-2)^4$ или $(y-2)^4+y^4=4$.

Введем новую переменную $z=\frac{(y-2)+y}{2}=y-1$. Тогда уравнение $(y-2)^4+y^4=4$ принимает вид $(z-1)^4+(z+1)^4=4$. Отсюда следует биквадратное уравнение $z^4+6z^2-1=0$, корнями которого являются $z^2=\sqrt{10}-3$ или $z_{1,2}=\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}$.

Так как $0\le y\le\sqrt{2}$ и $z=y-1$, то $-1\le z\le\sqrt{2}-1$. Поэтому необходимо убедиться в том, что найденные значения z_1 и z_2 удовлетворяют условию $-1\le z\le\sqrt{2}-1$.

Покажем, что $\sqrt{\sqrt{10}-3}\le\sqrt{2}-1$. Для этого возведем в квадрат обе части требуемого неравенства. Тогда $\sqrt{10}-3\le 3-2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}\le 6-2\sqrt{2}$, $10\le 36-24\sqrt{2}+8$, $12\sqrt{2}\le 17$ или $288\le 289$. Таким образом, получили очевидное неравенство. Следовательно, $z_1\le\sqrt{2}-1$.

Теперь убедимся в том, что $z_2\ge -1$. Неравенство $-\sqrt{\sqrt{10}-3}\ge -1$ равносильно неравенствам $\sqrt{\sqrt{10}-3}\le 1$, $\sqrt{10}-3\le 1$ или $\sqrt{10}\le 4$. Последнее неравенство очевидно.

Поскольку $y=z+1$ и $x=y^2$, то $y_{1,2}=1\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}$ и $x_{1,2}=$ $=\sqrt{10}-2\pm 2\sqrt{\sqrt{10}-3}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\sqrt{10}-2+2\sqrt{\sqrt{10}-3}$, $x_2=\sqrt{10}-2-2\sqrt{\sqrt{10}-3}$.

1.26. Решить уравнение

$$x^2+x+6\sqrt{x+2}=18. \tag{1.55}$$

Решение. Пусть $\sqrt{x+2}=y$, тогда $y\ge 0$ и $x=y^2-2$. В таком случае уравнение (1.55) принимает вид $(y^2-2)(y^2-1)+6y=18$.

Отсюда получаем $y^4-3y^2+6y-16=0$, $(y^4-16)-3y(y-2)=0$, $(y^2+4)(y+2)(y-2)-3y(y-2)=0$ или

$$(y-2)(y^3+2y^2+y+8)=0. \tag{1.56}$$

Поскольку $y \ge 0$, то $y^3+2y^2+y+8>0$. В этой связи из уравнения (1.56) следует, что $y_1=2$. Так как $\sqrt{x+2}=y$, то $\sqrt{x+2}=2$ или $x_1=2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2$.

Примечание. Уравнение (1.55) можно решить другим способом, используя для этого свойства монотонности аналитических функций (см. раздел 4).

Поскольку $x+2\ge 0$, то $x\ge -2$.

Пусть $-2\le x\le 0$. Тогда $x^2\le 4$, $x\le 0$, $6\sqrt{x+2}\le 6\sqrt{2}$ и

$$x^2+x+6\sqrt{x+2}\le 4+6\sqrt{2}<18,$$

т. е. уравнение (1.55) на отрезке $-2\le x\le 0$ корней не имеет.

Пусть теперь $x>0$. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+x+6\sqrt{x+2}$. Очевидно, что на положительной числовой полуоси OX функция $y=f(x)$ является непрерывной и возрастающей. Следовательно, уравнение $f(x)=18$ не может иметь более одного положительного корня.

Непосредственным подбором находим единственный положительный корень уравнения (1.55) вида $x_1=2$.

1.27 Решить уравнение

$$(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=\frac{9}{2}. \qquad (1.57)$$

Решение. Если обе части уравнения (1.57) умножить на 16, то получим $(8x+7)^2(8x+6)(8x+8)=72$.

Положим, что $8x+7=y$. Тогда приведенное выше уравнение принимает вид $y^2(y-1)(y+1)=72$ или $y^4-y^2-72=0$. Отсюда получаем $y^2=9$ или $y_1=3$, $y_2=-3$.

Так как $8x+7=y$ и $y_1=3$, $y_2=-3$, то $8x_1+7=3$, $8x_2+7=-3$ или $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{5}{4}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{5}{4}$.

1.28. Решить уравнение

$$\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)=2x^2. \qquad (1.58)$$

Решение. Непосредственной подстановкой $x=0$ в уравнение (1.58) устанавливаем, что $x=0$ не является его корнем.

Пусть теперь $x\neq 0$. Тогда обе части уравнения (1.58) разделим на x^2 и получим уравнение

$$\left(x+1+\frac{2}{x}\right)\cdot\left(x+2+\frac{2}{x}\right)=2. \qquad (1.59)$$

Введем новую переменную $x+\frac{2}{x}=y$, тогда уравнение (1.59) принимает вид $(y+1)(y+2)=2$ или $y^2+3y=0$. Отсюда получаем $y_1=0$ и $y_2=-3$. Рассмотрим два уравнения относительно переменной x.

Если $x+\frac{2}{x}=0$, то $x^2+2=0$ и уравнение корней не имеет.

Если $x+\frac{2}{x}=-3$, то $x^2+3x+2=0$ и $x_1=-1$, $x_2=-2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-1$, $x_2=-2$.

1.29. Решить уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1. \qquad (1.60)$$

Решение. Если ввести новые переменные $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{1-x}$ и $w=\sqrt{x-v}$, то из уравнения (1.60) получаем систему из трех уравнений относительно переменных u,v,w следующим вида:

$$\begin{cases} u+w=1\ , \\ v^2=1-u^2\ , \\ w^2=u^2-v\ , \end{cases} \qquad (1.61)$$

где $u\geq 0$, $v\geq 0$ и $w\geq 0$.

Из первого и третьего уравнений системы (1.61) следует $(1-u)^2=$ $=u^2-v$ или $v=2u-1$. Если полученное выражение $v=2u-1$ подставить во второе уравнение системы (1.61), то $(2u-1)^2=1-u^2$ и $u_1=0$, $u_2=\frac{4}{5}$.

Однако $u_1=0$ является посторонним корнем, поскольку при этом $v_1=2u_1-1=-1<0$, а это противоречит определению переменной v.

Так как $u=\sqrt{x}$ и $u=\frac{4}{5}$, то $x_1=\frac{16}{25}$.

♦ *Ответ:* $x_1=\frac{16}{25}$.

1.30 Решить уравнение

$$2^{\frac{3x-1}{2x+1}}-2^{\frac{2-x}{2x+1}}=1. \qquad (1.62)$$

Решение. Введем новую переменную $2x+1=y$, тогда $\frac{3x-1}{2x+1}=$ $=\frac{3y-5}{2y}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2y}$ и $\frac{2-x}{2x+1}=\frac{5-y}{2y}=\frac{5}{2y}-\frac{1}{2}$. Если при этом еще обозначить $\frac{5}{2y}=z$, то уравнение (1.62) можно переписать как $2^{\frac{3}{2}-z}-2^{z-\frac{1}{2}}=1$. Пусть $2^z=u$, тогда получаем уравнение $\frac{2\sqrt{2}}{u}-\frac{u}{\sqrt{2}}=1$ или

$$u^2+\sqrt{2}u-4=0, \qquad (1.63)$$

где $u>0$.

Положительным корнем уравнения (1.63) является $u_1=\sqrt{2}$. Так как $z=\log_2 u$, $y=\frac{5}{2z}$ и $x=\frac{y-1}{2}$, то $z_1=\frac{1}{2}$, $y_1=5$ и $x_1=2$.

♦ *Ответ:* $x_1=2$.

Примечание. Существует более простое решение уравнения (1.62). Для этого надо заметить, что $\frac{3x-1}{2x+1}+\frac{2-x}{2x+1}=1$. Если при этом обозначить $\frac{3x-1}{2x+1}=y$, то $\frac{2-x}{2x+1}=1-y$ и уравнение (1.62) примет вид $2^y-2^{1-y}=1$. Отсюда легко получить $2^y=2$ или $y_1=1$.

Поскольку $\dfrac{3x-1}{2x+1}=y$ и $y_1=1$, то $\dfrac{3x_1-1}{2x_1+1}=1$ или $x_1=2$.

1.31. Решить уравнение

$$4^{x^2-x}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x+4}=0. \tag{1.64}$$

Решение. Поскольку $2^{2x}>0$, то разделим обе части уравнения (1.64) на 2^{2x} и получим равносильное уравнение

$$2^{2x^2-4x}-10\cdot 2^{x^2-2x}+16=0. \tag{1.65}$$

Если положить $2^{x^2-2x}=y$, то уравнение (1.65) принимает вид квадратного уравнения $y^2-10y+16=0$, которое имеет положительные корни $y_1=2$ и $y_2=8$.

Так как $2^{x^2-2x}=y$, то необходимо рассмотреть два уравнения относительно переменной x вида $x^2-2x-1=0$ и $x^2-2x-3=0$, решая которые получаем четыре корня исходного уравнения (1.64), а именно $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$, $x_3=-1$ и $x_4=3$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1+\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=-1$, $x_4=3$.

1.32. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt[3]{x}}(2x+1)=1+\log_{\sqrt{2x+1}}\left(2x^4+x^3\right). \tag{1.66}$$

Решение. Из уравнения (1.66) следует, что $x>0$ и $x\neq 1$. Преобразуем левую и правую части уравнения следующим образом:

$$\log_{\sqrt[3]{x}}(2x+1)=3\cdot\log_x(2x+1)=\frac{3}{\log_{2x+1}x},$$

$$1+\log_{\sqrt{2x+1}}\left(2x^4+x^3\right)=1+\log_{\sqrt{2x+1}}(2x+1)+\log_{\sqrt{2x+1}}x^3=$$

$$=3+3\cdot\log_{\sqrt{2x+1}}x=3+6\cdot\log_{2x+1}x.$$

Таким образом, уравнение (1.66) принимает вид

$$\frac{3}{\log_{2x+1}x}=3+6\cdot\log_{2x+1}x. \tag{1.67}$$

Введем новую переменную $\log_{2x+1} x = y$, тогда из уравнения (1.67) следует $\frac{3}{y} = 3 + 6y$ или $2y^2 + y - 1 = 0$. Корнями квадратного уравнения являются $y_1 = -1$ и $y_2 = \frac{1}{2}$.

Так как $y = \log_{2x+1} x$ и $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{2}$, то требуется рассмотреть два уравнения $x = \frac{1}{2x+1}$, $x = \sqrt{2x+1}$ или $2x^2 + x - 1 = 0$, $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Решая приведенные выше уравнения и отбирая при этом только положительные корни, получаем $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

1.33 Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{x}}\left(x + |x-2|\right) = \log_x\left(5x - 6 + 5|x-2|\right). \quad (1.68)$$

Решение. Из условия следует, что областью определения переменной x в уравнении (1.68) являются $x > 0$ и $x \neq 1$.

Пусть $y = x + |x-2|$. Тогда уравнение (1.68) принимает вид $\log_{\sqrt{x}} y = \log_x(5y-6)$ или $\log_x y^2 = \log_x(5y-6)$, где $y > \frac{6}{5}$. Отсюда получаем квадратное уравнение $y^2 - 5y + 6 = 0$, корнями которого являются $y_1 = 2$ и $y_2 = 3$.

Так как $y = x + |x-2|$, то рассмотрим совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{aligned} &x + |x-2| = 2; \\ &x + |x-2| = 3. \end{aligned}\right. \quad (1.69)$$

Пусть $0 < x < 1$ или $1 < x < 2$, тогда $|x-2| = -x + 2$ и из первого уравнения совокупности (1.69) получаем очевидное тождество $2 = 2$, т. е. $0 < x < 1$ и $1 < x < 2$ являются корнями уравнения (1.68).

Пусть $x \geq 2$, тогда $|x-2| = x - 2$ и из совокупности уравнений (1.69) получаем $x + x - 2 = 2$ и $x + x - 2 = 3$, т. е. $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{5}{2}$.

Следовательно, корнями уравнения (1.68) являются произвольные значения x из интервалов $0<x<1$ и $1<x\le 2$, а также $x_2=\frac{5}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $0<x<1$, $1<x\le 2$, $x_2=\frac{5}{2}$.

$\boxed{1.34}$ Решить уравнение

$$\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\cdot\sqrt{2-\sin^2 x}=3. \qquad (1.70)$$

Решение. Выполним замену переменных, пусть $\sin x=u$ и $\sqrt{2-\sin^2 x}=v$. Так как $-1\le u\le 1$ и $v\ge 1$, то $u+v\ge 0$. Кроме того, имеем $u^2+v^2=2$.

В таком случае из уравнения (1.70) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u+v+uv=3, \\ u^2+v^2=2. \end{cases} \qquad (1.71)$$

Если положить $u+v=r$ и $uv=s$, то система уравнений (1.71) принимает вид $\begin{cases} r+s=3, \\ r^2-2s=2. \end{cases}$ Поскольку $u+v\ge 0$, то $r\ge 0$. Отсюда получаем $r=2$ и $s=1$. Следовательно, имеет место $u+v=2$, $uv=1$ и $u_1=v_1=1$.

Поскольку $u=\sin x$ и $u_1=1$, то $\sin x=1$ и $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где k — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где k — целое число.

Примечание. При решении уравнения (1.70) можно выполнить более сложную замену переменных $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}=y$. Так как

$$y^2=\sin^2 x+2\sin x\cdot\sqrt{2-\sin^2 x}+2-\sin^2 x=2+2\sin x\cdot\sqrt{2-\sin^2 x};$$

то $\sin x\cdot\sqrt{2-\sin^2 x}=\frac{y^2-2}{2}$ и уравнение (1.70) принимает вид

$$y+\frac{y^2-2}{2}=3 \text{ или } y^2+2y-8=0, \text{ где } 0\le y\le 2.$$

Подходящим корнем данного уравнения является $y_1 = 2$.

Рассмотрим уравнение $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} = 2$. Отсюда нетрудно получить $\sin x = 1$ и $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — целое число.

1.35. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 6. \qquad (1.72)$$

Решение. Пусть $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = y$, тогда $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = y^2 - 2$, $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = y^3 - 3y$ и уравнение (1.72) принимает вид кубического уравнения относительно переменной y, т. е. $y^3 + y^2 - 2y - 8 = 0$. Так как $y^3 + y^2 - 2y - 8 = (y-2)(y^2 + 3y + 4)$ и $y^2 + 3y + 4 > 0$, то $y - 2 = 0$ или $y_1 = 2$.

Так как $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$ или $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2$, то $\operatorname{tg} x = 1$ и $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где k — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где k — целое число.

1.36. Решить уравнение

$$2\sin\frac{3x}{2} = 3\sin\left(x + 60^\circ\right). \qquad (1.73)$$

Решение. Пусть $\frac{x}{2} = y$, тогда $x = 2y$ и уравнение (1.73) примет вид $2\sin 3y = 3\sin\left(2y + 60^\circ\right)$. Если положить $y + 30^\circ = z$, то отсюда получим последовательность равносильных уравнений

$$2\sin\left(3z - 90^\circ\right) = 3\sin 2z,\ -2\cos 3z = 3\sin 2z,$$

$$3\sin 2z + 2\cos 3z = 0,\ 3\sin z \cdot \cos z + \cos 3z = 0,$$

$$3\sin z \cdot \cos z + 4\cos^3 z - 3\cos z = 0,$$

$$\cos z \cdot \left(3\sin z + 4\cos^2 z - 3\right) = 0,\ \cos z \cdot \left(4\sin^2 z - 3\sin z - 1\right) = 0.$$

Отсюда следует, что необходимо рассмотреть два уравнения.

1. Если $\cos z = 0$, то $z_1 = 90^\circ + 180^\circ n$, где n — целое число.

2. Если $4\sin^2 z - 3\sin z - 1 = 0$, то $\sin z = 1$ и $\sin z = -\frac{1}{4}$. Так как из условия $\cos z = 0$ следует $\sin z = \pm 1$ (а случай $\cos z = 0$ был рассмотрен выше), то $z_2 = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{4} + 180^\circ k$, где k — целое число.

Поскольку $y = z - 30^\circ$ и $x = 2y$, то

$$y_1 = 60^\circ + 180^\circ n,\ y_2 = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{4} - 30^\circ + 180^\circ k,$$

$$x_1 = 120^\circ + 360^\circ n,\ x_2 = (-1)^{k+1}\, 2\arcsin\frac{1}{4} - 60^\circ + 360^\circ k.$$

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 120^\circ + 360^\circ n$, $x_2 = (-1)^{k+1}\, 2\arcsin\frac{1}{4} - 60^\circ + 360^\circ k$, где n, k — целые числа.

1.37 Решить неравенство

$$\sqrt{x + 8\left(3 - \sqrt{x+8}\right)} < \frac{x+16}{2\sqrt{x+8} - 10}. \tag{1.74}$$

Решение. Из неравенства (1.74) следует, что $x \ge -8$.

Введем новую переменную $\sqrt{x+8} = y$. Тогда

$$x + 8\left(3 - \sqrt{x+8}\right) = x + 8 - 8\sqrt{x+8} + 16 = y^2 - 8y + 16 = (y-4)^2.$$

Так как $\sqrt{x+8} = y$, то $x + 8 = y^2$, $x + 16 = y^2 + 8$ и неравенство (1.74) принимает вид

$$|y-4| < \frac{y^2+8}{2y-10}. \tag{1.75}$$

Поскольку $|y-4| \ge 0$, то из неравенства (1.75) следует, что $\frac{y^2+8}{2y-10} > 0$, $2y - 10 > 0$ или $y > 5$. В таком случае $|y-4| = y - 4$ и неравенство (1.75) принимает вид

$$y-4<\frac{y^2+8}{2y-10}. \qquad (1.76)$$

Если $y>5$, то $2y-10>0$ и из неравенства (1.76) получаем $(y-4)\times$ $\times(2y-10)<y^2+8$ или $y^2-18y+32<0$, решением которого являются $2<y<16$. Однако $y>5$, тогда $5<y<16$.

Однако $y=\sqrt{x+8}$, тогда $x=y^2-8$ и $17<x<248$.

♦ ***Ответ:*** $17<x<248$.

1.38. Решить неравенство

$$\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4}<\sqrt{2x-1+\frac{(x+1)^2}{8}}. \qquad (1.77)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве (1.77) являются $x\ge\frac{1}{2}$. Обозначим $\sqrt{x-\frac{1}{2}}=u$ и $\frac{x+1}{4}=v$. Поскольку $x\ge\frac{1}{2}$, то $u\ge 0$ и $v\ge 0$.

В этой связи из неравенства (1.77) следует

$$u+v<\sqrt{2u^2+2v^2}. \qquad (1.78)$$

Поскольку $u+v\ge 0$, то можно возвести в квадрат обе части неравенства (1.78) и при этом получить равносильное неравенство $u^2+2uv+v^2<2u^2+2v^2$ или $(u-v)^2>0$. Последнее неравенство верно всегда, кроме случая, когда $u=v$.

Пусть $u\ne v$, т. е. $\sqrt{x-\frac{1}{2}}\ne\frac{x+1}{4}$. Отсюда получаем неравенство $x^2-14x+9\ne 0$ или $x\ne 7\pm 2\sqrt{10}$.

Так как $x\ge\frac{1}{2}$ и $7-2\sqrt{10}>\frac{1}{2}$, то решением неравенства (1.77) являются $\frac{1}{2}\le x<7-2\sqrt{10}$, $7-2\sqrt{10}<x<7+2\sqrt{10}$ и $x>7+2\sqrt{10}$.

♦ ***Ответ:*** $\frac{1}{2}\le x<7-2\sqrt{10}$, $7-2\sqrt{10}<x<7+2\sqrt{10}$ и $x>7+2\sqrt{10}$.

1.39 Решить неравенство

$$\frac{5\cdot 3^{x-2}}{3^x-2^x}\ge 1+\left(\frac{2}{3}\right)^x. \qquad (1.79)$$

Решение. Первоначально числитель и знаменатель дроби в левой части неравенства (1.79) разделим на 2^x. Затем обозначим $\left(\frac{3}{2}\right)^x=y$ и перепишем неравенство (1.79) в виде $\frac{5\cdot y}{9(y-1)}\ge 1+\frac{1}{y}$. Отсюда следует, что $y>1$ и

$$\frac{4y^2-9}{y(y-1)}\le 0. \qquad (1.80)$$

Решая неравенство (1.80) с учетом того, что $y>1$, получаем $1<y\le\frac{3}{2}$. Поскольку $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, то $1<\left(\frac{3}{2}\right)^x\le\frac{3}{2}$ или $0<x\le 1$.

♦ ***Ответ:*** $0<x\le 1$.

1.40 Решить неравенство

$$-3+\log_2 x^6<\sqrt{7+\log_2 x^2}. \qquad (1.81)$$

Решение. Обозначим $\log_2 x^2=y$. Тогда неравенство (1.81) принимает вид

$$\sqrt{y+7}>3y-3, \qquad (1.82)$$

где $y\ge -7$.

Представим неравенство (1.82) в виде $\sqrt{y+7}>3(y+7)-24$. Если обозначить $\sqrt{y+7}=z$, то имеем неравенство $z>3z^2-24$, где $z\ge 0$.

Решением неравенства $3z^2-z-24<0$ при условии, что $z\ge 0$, являются $0\le z<3$. Так как $\sqrt{y+7}=z$ и $z<3$, то $\sqrt{y+7}<3$ или $y<2$.

Итак, имеем $-7\le y<2$. Поскольку $\log_2 x^2=y$, то $-7\le\log_2 x^2<2$ или $\frac{1}{128}\le x^2<4$. Отсюда следует $-2<x\le-\frac{\sqrt{2}}{16}$ и $\frac{\sqrt{2}}{16}\le x<2$.

♦ ***Ответ:*** $-2 < x \le -\frac{\sqrt{2}}{16}$, $\frac{\sqrt{2}}{16} \le x < 2$.

1.41. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = x - y, \\ 3(x-2y) = 2(x+y)^2. \end{cases} \qquad (1.83)$$

Решение. Нетрудно видеть, что $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ – корни системы (1.83). Положим, что $x \ne 0$ и $y \ne 0$. Тогда для поиска других корней системы уравнений (1.82) перемножим левые и правые части обоих уравнений данной системы. Тогда получим уравнение

$$3xy(x-2y) = 2(x-y)(x+y)^2,$$

которое равносильно уравнению

$$2x^3 - x^2y + 4xy^2 - 2y^3 = 0. \qquad (1.84)$$

Так как $y \ne 0$, а уравнение (1.84) является однородным уравнением третьей степени, то разделим на y^3 обе части уравнения (1.84), а затем обозначим $\frac{x}{y} = z$.

Тогда получим $2z^3 - z^2 + 4z - 2 = 0$ или $(2z-1)(z^2+2) = 0$. Так как $z^2 + 2 > 0$, то $2z - 1 = 0$ или $z_1 = \frac{1}{2}$.

Поскольку $\frac{x}{y} = z$ и $z_1 = \frac{1}{2}$, то $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$. Подставим $y = 2x$ в первое уравнение системы (1.83) и получим $2x^2 = x - 2x$ или $x(2x+1) = 0$. Однако $x \ne 0$, тогда $x_2 = -\frac{1}{2}$ и $y_2 = 2x_2 = -1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = -1$.

1.42. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 72, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 36. \end{cases} \qquad (1.85)$$

Решение. Непосредственной подстановкой в уравнения системы (1.85) нетрудно убедиться, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Далее, умножим второе уравнение на 2 и вычтем его из первого уравнения, тогда $x^2 + y\sqrt{xy} - 2y^2 - -2x\sqrt{xy} = 0$. Так как $xy \neq 0$, то разделим полученное уравнение на xy. Тогда получаем

$$\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\frac{y}{x} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 0. \qquad (1.86)$$

Пусть $\sqrt{\frac{x}{y}} = z$, тогда из (1.86) получаем уравнение четвертой степени относительно z вида $z^4 - 2z^3 + z - 2 = 0$, которое равносильно уравнению $(z-2)\left(z^3+1\right) = 0$. Поскольку $\sqrt{\frac{x}{y}} = z$ и $x \neq 0$, то $z > 0$. В этой связи $z^3 + 1 > 0$ и $z_1 = 2$.

Следовательно, имеем $\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$ и $x = 4y$. Затем подставим выражение $x = 4y$ во второе уравнение системы (1.85), тогда $y^2 + 4y\sqrt{4y^2} = 36$ или

$$y^2 + 8y\,|\,y\,| = 36. \qquad (1.87)$$

Если $y > 0$, то из (1.87) получаем $9y^2 = 36$ и $y_1 = 2$. Если $y < 0$, то $|\,y\,| = -y$ и уравнение (1.87) принимает вид уравнения $-7y^2 = 36$, которое не имеет корней.

Поскольку $x = 4y$ и $y_1 = 2$, то $x_1 = 8$. Подстановкой найденных значений x и y в уравнения системы (1.85) убеждаемся в том, что $x_1 = 8$ и $y_1 = 2$ являются ее корнями.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 8$, $y_1 = 2$.

Примечание. Равенство $x = 4y$ при решении системы уравнений (1.85) можно получить проще. Для этого данную систему необходимо представить в виде $\begin{cases} \sqrt{x}\left(x\sqrt{x} + y\sqrt{y}\right) = 72, \\ \sqrt{y}\left(x\sqrt{x} + y\sqrt{y}\right) = 36, \end{cases}$ а затем первое уравнение системы разделить на второе уравнение. Тогда получим $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 2$ или $x = 4y$.

1.43 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{1-3x}-1=\sqrt{5y-3x}, \\ \sqrt{5-5y}+\sqrt{5y-3x}=5. \end{cases} \quad (1.88)$$

Решение. Выполним замену переменных по следующему правилу: $\sqrt{1-3x}=u$, $\sqrt{5y-3x}=v$ и $\sqrt{5-5y}=w$. Тогда из системы уравнений (1.88) следует $u=v+1$ и $w=5-v$, где $u\ge 0, v\ge 0$ и $w\ge 0$.

Так как $u^2-v^2-w^2=1-3x-5y+3x-5+5y=-4$ и $u=v+1$, $w=5-v$, то получаем $(v+1)^2-v^2-(5-v)^2=-4$, $v^2-12v+20=0$ и $v_1=2$, $v_2=10$.

Если $v_1=2$, то $u_1=3$ и $w_1=3$. Отсюда получаем систему уравнений $\begin{cases} 1-3x=9, \\ 5y-3x=4, \end{cases}$ корнями которой являются $x_1=-\frac{8}{3}$ и $y_1=-\frac{4}{5}$. Подстановкой убеждаемся, что найденная пара значений x_1 и y_1 удовлетворяет системе уравнений (1.88).

Если $v_2=10$, то $u_2=11$ и $w_2=-5$. Так как $w_2<0$, то в этом случае корней нет.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-\frac{8}{3}$, $y_1=-\frac{4}{5}$.

1.44 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases} \quad (1.89)$$

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{x+2y}=u$ и $\sqrt[3]{x-y+2}=v$. Тогда $u^3+v^3=$ $=x+2y+x-y+2=2x+y+2=9$ и систему уравнений (1.89) можно переписать в виде

$$\begin{cases} u+v=3, \\ u^3+v^3=9. \end{cases} \quad (1.90)$$

Корнями системы уравнений (1.90) являются $u_1=1$, $v_1=2$ и $u_2=2$, $v_2=1$.

Так как $\sqrt[3]{x+2y}=u$ и $u_1=1, u_2=2$, то $x+2y=1$ и $x+2y=8$. Если принять во внимание второе уравнение системы (1.89), то получаем две системы уравнений относительно переменных x,y вида

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x+y=7, \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=8, \\ 2x+y=7. \end{cases}$$

Первая из двух систем имеет корни $x_1=\dfrac{13}{3}$, $y_1=-\dfrac{5}{3}$, а из второй системы получаем $x_2=2$, $y_2=3$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\dfrac{13}{3}$, $y_1=-\dfrac{5}{3}$; $x_2=2$, $y_2=3$.

1.45. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}+2, \\ \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=3\sqrt{2}. \end{cases} \tag{1.91}$$

Решение. Очевидно, что $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Причем значения переменных x,y имеют одинаковые знаки. В левой части второго уравнения системы (1.91) вынесем за скобки $\sqrt[4]{x^2y^2}=\sqrt{xy}$, тогда

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}+2, \\ \sqrt{xy}\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}\right)=3\sqrt{2}. \end{cases} \tag{1.92}$$

Введем новые переменные $\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}=u$ и $\sqrt{xy}=v$. Тогда систему уравнений (1.92) можно переписать как

$$\begin{cases} u^2+\dfrac{1}{u^2}=\dfrac{1}{v}+2, \\ v\cdot\left(u+\dfrac{1}{u}\right)=3\sqrt{2}, \end{cases} \tag{1.93}$$

где $u>0$ и $v>0$.

Возведем в квадрат второе уравнение системы (1.93) и воспользуемся первым уравнением, тогда

$$v^2\left(u+\frac{1}{u}\right)^2=18,\ v^2\left(u^2+2+\frac{1}{u^2}\right)=18,$$

$$v^2\left(\frac{1}{v}+4\right)=18 \text{ или } 4v^2+v-18=0.$$

Так как $v>0$, то подходящим корнем уравнения $4v^2+v-18=0$ является $v_1=2$. Если найденное значение v подставить во второе уравнение системы (1.93), то получим уравнение $2u^2-3\sqrt{2}u+2=0$ и $u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2=\sqrt{2}$.

Так как $u=\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ и $v=\sqrt{xy}$, то необходимо рассмотреть две системы уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sqrt{xy}=2\end{cases} \text{ и } \begin{cases}\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}=\sqrt{2},\\ \sqrt{xy}=2.\end{cases}$$

Отсюда получаем относительно простые системы уравнений относительно переменных x и y вида

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{4},\\ xy=4\end{cases} \text{ и } \begin{cases}\dfrac{x}{y}=4,\\ xy=4.\end{cases}$$

Нетрудно установить, что корнями системы уравнений (1.91) являются $x_1=-1,\ y_1=-4$; $x_2=1,\ y_2=4$; $x_3=-4,\ y_3=-1$ и $x_4=4,\ y_4=1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-1, y_1=-4$; $x_2=1, y_2=4$; $x_3=-4, y_3=-1$; $x_4=4, y_4=1$.

1.46. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^3+y^3-z^3-xyz+11=0,\\ x^3-y^3+z^3-xyz-21=0,\\ -x^3+y^3+z^3-xyz-3=0.\end{cases} \qquad (1.94)$$

Решение. Если сложить уравнения системы (1.94), то $x^3+y^3+z^3=$ $=3xyz+13$. Если затем из полученного уравнения вычесть последовательно третье, второе и первое уравнения системы (1.94), то получим равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} x^3=xyz+5, \\ y^3=xyz-4, \\ z^3=xyz+12. \end{cases} \tag{1.95}$$

Перемножим соответственно левые и правые части уравнений системы (1.95) и при этом обозначим $xyz=u$. Тогда получим уравнение $u^3=(u+5)(u-4)(u+12)$ или $13u^2-8u-240=0$. Корнями квадратного уравнения являются $u_1=-4$ и $u_2=\frac{60}{13}$.

Если $u_1=-4$, то $x_1y_1z_1=-4$ и из системы уравнений (1.95) получаем $x_1^3=-4+5=1$, $y_1^3=-4-4=-8$, $z_1^3=-4+12=8$ или $x_1=1$, $y_1=-2$, $z_1=2$

Если $u_2=\frac{60}{13}$, то $x_2y_2z_2=\frac{60}{13}$ и из системы уравнений (1.95) следует $x_2=\frac{5}{\sqrt[3]{13}}$, $y_2=\frac{2}{\sqrt[3]{13}}$, $z_2=\frac{6}{\sqrt[3]{13}}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=-2$, $z_1=2$; $x_2=\frac{5}{\sqrt[3]{13}}$, $y_2=\frac{2}{\sqrt[3]{13}}$, $z_2=\frac{6}{\sqrt[3]{13}}$.

РАЗДЕЛ 2

Метод тригонометрической подстановки

К числу нестандартных методов решения алгебраических уравнений относится метод, основанный на применении тригонометрической подстановки. Использование такого метода целесообразно в том случае, когда искомые уравнения напоминают известные тригонометрические формулы. Это относится преимущественно к уравнениям (системам уравнений), решение которых обычными приемами весьма затруднительно, и которые после введения тригонометрических подстановок сводятся к несложным тригонометрическим уравнениям. Суть тригонометрической подстановки состоит в замене неизвестной переменной x тригонометрической функцией, например, $x = \cos\omega$ или $x = \operatorname{tg}\omega$, а также в замене x некоторой функцией, зависящей от $\sin\omega$, $\cos\omega$ или $\operatorname{tg}\omega$.

Полученные корни тригонометрических уравнений позволяют находить корни исходных уравнений, как в тригонометрической, так и в алгебраической форме. Следует особо отметить, что тригонометрические уравнения имеют, как правило, бесконечное число корней, а исходные алгебраические уравнения — конечное их число.

Задачи и решения

2.1 Решить уравнение

$$x + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{2}\left(2x^2 - 1\right). \qquad (2.1)$$

Решение. Так как областью допустимых значений переменной x в уравнении (2.1) являются $-1 \le x \le 1$, то можно сделать замену $x = \cos\omega$, где $0 \le \omega \le \pi$. В таком случае уравнение (2.1) принимает вид

$$\cos\omega + |\sin\omega| = \sqrt{2}(2\cos^2\omega - 1). \tag{2.2}$$

Поскольку $0 \le \omega \le \pi$, то $\sin\omega \ge 0$ и $|\sin\omega| = \sin\omega$. В этой связи из (2.2) получаем

$$\cos\omega + \sin\omega = \sqrt{2}\cos 2\omega,$$

$$\cos\omega + \sin\omega = \sqrt{2}(\cos\omega + \sin\omega)(\cos\omega - \sin\omega),$$

$$(\cos\omega + \sin\omega)\left(\sqrt{2}\cos\omega - \sqrt{2}\sin\omega - 1\right) = 0.$$

Пусть $\cos\omega + \sin\omega = 0$, тогда $\operatorname{tg}\omega = -1$ и $\omega = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где n — целое число. Однако $0 \le \omega \le \pi$, поэтому $\omega_1 = \frac{3\pi}{4}$.

Пусть $\sqrt{2}\cos\omega - \sqrt{2}\sin\omega - 1 = 0$, тогда

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\omega - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\omega = -\frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4}\sin\omega - \sin\frac{\pi}{4}\cos\omega = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует $\omega - \frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$ или $\omega = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, где k — целое число. Так как $0 \le \omega \le \pi$, то $\omega_2 = \frac{\pi}{12}$.

Поскольку $x = \cos\omega$, то $x_1 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x_2 = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

$\boxed{2.2.}$ Решить уравнение

$$8x\left(2x^2 - 1\right)\left(8x^4 - 8x^2 + 1\right) = 1, \tag{2.3}$$

причем требуются найти только такие корни, которые лежат на интервале $(0, 1)$.

Решение. Так как $0 < x < 1$, то можно положить $x = \cos\omega$, где $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. В таком случае уравнение (2.3) можно преобразовать следующим образом:

$$8\cos\omega\left(2\cos^2\omega-1\right)\left(8\cos^4\omega-8\cos^2\omega+1\right)=1,$$

$$8\cos\omega\cos2\omega\left(-8\cos^2\omega\sin^2\omega+1\right)=1,$$

$$8\cos\omega\cos2\omega\left(1-2\sin^2 2\omega\right)=1,$$

$$8\cos\omega\cdot\cos2\omega\cdot\cos4\omega=1. \qquad (2.4)$$

Далее, умножим обе части уравнения (2.4) на $\sin\omega$ (это можно сделать, так как $0<\omega<\frac{\pi}{2}$) и получим равносильные уравнения

$$8\sin\omega\cdot\cos\omega\cdot\cos2\omega\cdot\cos4\omega=\sin\omega,$$

$$4\sin2\omega\cdot\cos2\omega\cdot\cos4\omega=\sin\omega,$$

$$2\sin4\omega\cdot\cos4\omega=\sin\omega,\ \sin8\omega=\sin\omega.$$

Если $\sin8\omega=\sin\omega$, то $8\omega=(-1)^n\omega+\pi n$, где n — целое число. Рассмотрим два случая.

1. Если $n=2k$, то $8\omega=\omega+2\pi k$ или $\omega=\frac{2}{7}\pi k$, где k — целое число. Поскольку $0<\omega<\frac{\pi}{2}$, то $k=1$ и $\omega_1=\frac{2\pi}{7}$.

2. Если $n=2k+1$ то $8\omega=-\omega+\pi(2k+1)$ или $\omega=\frac{(2k+1)\cdot\pi}{9}$, где k — целое число. Так как $0<\omega<\frac{\pi}{2}$, то $k=0$, $k=1$ и $\omega_2=\frac{\pi}{9}$, $\omega_3=\frac{\pi}{3}$.

Следовательно, уравнение (2.3) имеет лишь три корня, которые лежат на интервале $(0;1)$, а именно $x_1=\cos\frac{2\pi}{7}$, $x_2=\cos\frac{\pi}{9}$ и $x_3=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\cos\frac{2\pi}{7}$, $x_2=\cos\frac{\pi}{9}$, $x_3=\frac{1}{2}$.

$\boxed{2.3}$ Решить уравнение

$$8x^3-6x-1=0. \qquad (2.5)$$

Решение. Поскольку $x=0$ не является корнем уравнения (2.5), то разделим обе его части на $2x$. Тогда

$$4x^2=\frac{1}{2x}+3. \tag{2.6}$$

Если $x<-1$ или $x>1$, то левая часть уравнения (2.6) будет больше 4, а правая его часть — меньше 4. Следовательно, корни уравнения (2.5) находятся на отрезке $-1\le x\le 1$.

Пусть $x=\cos\omega$, где $0\le\omega\le\pi$. Тогда уравнение (2.5) принимает вид тригонометрического уравнения $8\cos^3\omega-6\cos\omega-1=0$, $4\cos^3\omega-3\cos\omega=\frac{1}{2}$ или $\cos 3\omega=\frac{1}{2}$.

Корнями уравнения $\cos 3\omega=\frac{1}{2}$ являются $\omega=\frac{\pi}{9}(6n\pm1)$, где n — целое число. Так как $0\le\omega\le\pi$, то $\omega_1=\frac{\pi}{9}$, $\omega_2=\frac{5\pi}{9}$ и $\omega_3=\frac{7\pi}{9}$. Однако $x=\cos\omega$, поэтому $x_1=\cos\frac{\pi}{9}$, $x_2=\cos\frac{5\pi}{9}$, $x_3=\cos\frac{7\pi}{9}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\cos\frac{\pi}{9}$, $x_2=\cos\frac{5\pi}{9}$, $x_3=\cos\frac{7\pi}{9}$.

$\boxed{2.4}$ Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}. \tag{2.7}$$

Решение. Произведем тригонометрическую замену $x=\mathrm{tg}\,\omega$, где $-\frac{\pi}{2}<\omega<\frac{\pi}{2}$. В таком случае $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\cos\omega}$ (так как $-\frac{\pi}{2}<\omega<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\omega>0$) и уравнение (2.7) принимает вид тригонометрического уравнения $\frac{1}{\cos\omega}-\mathrm{tg}\,\omega=\frac{5}{2}\cos\omega$.

Отсюда получаем $1-\sin\omega=\frac{5}{2}\left(1-\sin^2\omega\right)$, $5\sin^2\omega-2\sin\omega-3=0$, $\sin\omega=1$ и $\sin\omega=-\frac{3}{5}$.

Однако $-\frac{\pi}{2}<\omega<\frac{\pi}{2}$, поэтому $-1<\sin\omega<1$. Если $\sin\omega=-\frac{3}{5}$, то $\cos\omega=\frac{4}{5}$ и $\mathrm{tg}\,\omega=-\frac{3}{4}$. Следовательно, имеем $x_1=\mathrm{tg}\,\omega=-\frac{3}{4}$.

♦ *Ответ:* $x_1 = -\frac{3}{4}$.

2.5. Решить уравнение

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}. \qquad (2.8)$$

Решение. Нетрудно видеть, что $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 > 1 \end{cases}$ или $x > 1$. Выполним замену $x = \frac{1}{\sin\omega}$, где $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. В таком случае левая часть уравнения (2.8) принимает вид

$$\frac{1}{\sin\omega} + \frac{\frac{1}{\sin\omega}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\omega} - 1}} = \frac{1}{\sin\omega} + \frac{1}{\cos\omega},$$

а из уравнения (2.8) вытекает тригонометрическое уравнение вида

$$12\cdot(\sin\omega + \cos\omega) = 35\sin\omega\cdot\cos\omega \qquad (2.9)$$

Сделаем еще одну замену переменных, пусть $z = \sin\omega + \cos\omega$, тогда $\sin\omega\cdot\cos\omega = \frac{z^2-1}{2}$ и из (2.9) получаем квадратное уравнение относительно переменной z, т. е. $35z^2 - 24z - 35 = 0$, корнями которого являются $z_1 = \frac{7}{5}$ и $z_2 = -\frac{5}{7}$. Так как $z = \sin\omega + \cos\omega$ и $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, то $z > 0$ и $\sin\omega + \cos\omega = \frac{7}{5}$. С учетом того, что $\sin\omega\cos\omega = \frac{z^2-1}{2} = \frac{12}{25}$, получаем систему тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \sin\omega + \cos\omega = \frac{7}{5}, \\ \sin\omega\cdot\cos\omega = \frac{12}{25}. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Из уравнений системы (2.10) составим квадратное уравнение относительно $\sin\omega$ вида $25\sin^2\omega - 35\sin\omega + 12 = 0$ и получаем $\sin\omega = \frac{3}{5}$, $\sin\omega = \frac{4}{5}$. Так как $x = \frac{1}{\sin\omega}$, то $x_1 = \frac{5}{3}$ и $x_2 = \frac{5}{4}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{5}{4}$.

$\boxed{2.6.}$ Решить уравнение

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x. \qquad (2.11)$$

Решение. Областью допустимых значений уравнения (2.11) являются $-1 \le x \le 1$. В этой связи можно воспользоваться тригонометрической подстановкой $x = \cos\omega$, где $0 \le \omega \le \pi$. Тогда из уравнения (2.11) следует $\sqrt{1-\cos^2\omega} = 4\cos^3\omega - 3\cos\omega$ или $|\sin\omega| = \cos 3\omega$. Поскольку $0 \le \omega \le \pi$, то $\sin\omega \ge 0$ и $\sin\omega = \cos 3\omega$.

Уравнение равносильно уравнению $\cos 3\omega = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$. Отсюда следует, что $3\,\omega = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + 2\pi n$, где n — целое число.

Рассмотрим два случая.

1. Если $3\,\omega = \frac{\pi}{2} - \omega + 2\pi n$, то $\omega = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. Так как $0 \le \omega \le \pi$, то $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ и $\omega_2 = \frac{5\pi}{8}$.

2. Если $3\,\omega = -\frac{\pi}{2} + \omega + 2\pi n$, то $\omega = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. Однако $0 \le \omega \le \pi$, поэтому $\omega_3 = \frac{3\pi}{4}$.

Поскольку $x = \cos\omega$, то уравнение (2.11) имеет три корня, значения которых вычисляются по следующим формулам:

$$x_1 = \cos\omega_1 = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_2=\cos\omega_2=\cos\frac{5\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\cos\frac{5\pi}{4}\right)}=$$

$$=-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$x_3=\cos\omega_3=\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{2.7}$ Решить уравнение

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}. \tag{2.12}$$

Решение. Из условия задачи следует, что $-1\le x\le 1$. Положим $x=\cos\omega$, где $0\le\omega\le\pi$. Тогда уравнение (2.12) принимает вид

$$\sqrt{1-\cos\omega}=2\cos^2\omega-1+2\cos\omega\cdot\sqrt{1-\cos^2\omega} \text{ или}$$

$$\sqrt{2}\cdot\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|=2\cos^2\omega-1+2\cos\omega\cdot|\sin\omega|. \tag{2.13}$$

Так как $0\le\omega\le\pi$, то $\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|=\sin\frac{\omega}{2}$ и $|\sin\omega|=\sin\omega$. В таком случае из уравнения (2.13) получаем $\sqrt{2}\sin\frac{\omega}{2}=\cos 2\omega+\sin 2\omega$ или $\sqrt{2}\sin\frac{\omega}{2}=$ $=\sqrt{2}\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{4}\right)$.

Поскольку $\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\omega}{2}$, то $2\omega+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\cdot\frac{\omega}{2}+\pi n$, где n — целое число. Рассмотрим два случая.

1. Если $n=2k$, то $2\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\omega}{2}+2\pi k$ или $\omega=-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi k}{3}$, где k — целое число. Поскольку $0\le\omega\le\pi$, то среди $\omega=-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi k}{3}$ корней уравнения (2.13) нет.

2. Если $n=2k+1$, то $2\omega+\frac{\pi}{4}=-\frac{\omega}{2}+(2k+1)\pi$ или $\omega=\frac{3\pi}{10}+\frac{4\pi k}{5}$, k — целое число. С учетом того, что $0\le\omega\le\pi$, отсюда получаем корень уравнения (2.13) вида $\omega_1=\frac{3\pi}{10}$.

Следовательно, единственным корнем уравнения (2.12) является $x_1=\cos\frac{3\pi}{10}=\cos 54^0$.

Ответ можно оставить в тригонометрической форме, а можно выразить в радикалах. Однако для этого необходимо показать, что $\sin 18^0=$ $=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos 18^0=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ и $\sin 36^0=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Тогда $x_1=\cos 54^0=$ $=\sin 36^0=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

2.8 Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1. \tag{2.14}$$

Решение. Поскольку $x^2\le 1$, то положим $x=\cos\omega$, где $0\le\omega\le\pi$. Тогда $\sin\omega\ge 0$ и уравнение (2.14) принимает вид

$$\sqrt{\frac{1+2\sin\omega\cos\omega}{2}}=1-2\cos^2\omega \tag{2.15}$$

или

$$|\sin\omega+\cos\omega|=\sqrt{2}\left(\sin^2\omega-\cos^2\omega\right). \tag{2.16}$$

Левая часть уравнения (2.15) неотрицательна, поэтому имеем $1-2\cos^2\omega\ge 0$ и $\cos^2\omega\le\frac{1}{2}$. Так как при этом $0\le\omega\le\pi$, то $\frac{\pi}{4}\le\omega\le\frac{3\pi}{4}$ и $|\sin\omega+\cos\omega|=\sin\omega+\cos\omega$. Следовательно, из (2.16) получаем

$$(\sin\omega+\cos\omega)\left(1-\sqrt{2}\sin\omega+\sqrt{2}\cos\omega\right)=0.$$

Пусть $\sin\omega+\cos\omega=0$, тогда $\operatorname{tg}\omega=-1$. Так как $\frac{\pi}{4}\le\omega\le\frac{3\pi}{4}$, то $\omega_1=\frac{3\pi}{4}$ и $x_1=\cos\omega_1=\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пусть $1-\sqrt{2}\sin\omega+\sqrt{2}\cos\omega=0$, т. е.

$$\sin\omega-\cos\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{2.17}$$

Так как на отрезке $\frac{\pi}{4}\le\omega\le\frac{3\pi}{4}$ имеем $\sin\omega\ge\cos\omega$, то левая часть уравнения (2.17) является неотрицательной. Поэтому после возведения в квадрат обеих его частей получаем равносильные уравнения

$$1-2\sin\omega\cos\omega=\frac{1}{2} \text{ или } \sin 2\omega=\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует $\omega=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$, где n — целое число. Условие $\frac{\pi}{4}\le\omega\le\frac{3\pi}{4}$ выполняется только при $n=1$, т. е. $\omega_2=\frac{5\pi}{12}=75^0$ и

$$x_2=\cos 75^0=\cos\left(30^0+45^0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Можно показать также, что $x_2=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\boxed{2.9}$ Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+1}+x=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}. \tag{2.18}$$

Решение. Выполним тригонометрическую подстановку вида $x=\operatorname{tg}\omega$, где $-\frac{\pi}{2}<\omega<\frac{\pi}{2}$. Тогда уравнение (2.18) можно переписать в виде тригонометрического уравнения

$$\frac{1}{|\cos\omega|}+\operatorname{tg}\omega=\cos^2\omega\cdot|\cos\omega|. \qquad (2.19)$$

Так как $-\frac{\pi}{2}<\omega<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\omega>0$ и $|\cos\omega|=\cos\omega$. Тогда уравнение (2.19) принимает вид $\frac{1+\sin\omega}{\cos\omega}=\cos^3\omega$. Отсюда получаем

$$1+\sin\omega=\cos^4\omega,\ 1+\sin\omega=\left(1-\sin^2\omega\right)^2,$$

$$(1+\sin\omega)\cdot\left(1-(1-\sin\omega)\cdot\left(1-\sin^2\omega\right)\right)=0 \text{ или}$$

$$\sin\omega\cdot(1+\sin\omega)\cdot\left(\sin^2\omega-\sin\omega-1\right)=0.$$

Если $\sin\omega=0$, то $\omega_1=0$ и $x_1=\operatorname{tg}\omega_1=0$. Поскольку $-\frac{\pi}{2}<\omega<\frac{\pi}{2}$, то $1+\sin\omega>0$. Подходящим корнем уравнения $\sin^2\omega-\sin\omega-1=0$ является $\sin\omega_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. В таком случае $\cos\omega_2=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $\operatorname{tg}\omega_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ и $x_2=\operatorname{tg}\omega_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

2.10 Решить уравнение

$$\frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}-6x\cdot\sqrt{1-x^2}=2. \qquad (2.20)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (2.20) являются $-1<x<1$.

Обозначим $x=\cos\omega$, где $0<\omega<\pi$. В таком случае уравнение (2.20) примет вид $\frac{5\cos\omega}{|\sin\omega|}-6\cos\omega\cdot|\sin\omega|=2$. Поскольку $0<\omega<\pi$, то $\sin\omega>0$, $|\sin\omega|=\sin\omega$ и $\frac{5\cos\omega}{\sin\omega}-6\cos\omega\cdot\sin\omega=2$. Отсюда получаем

$$\frac{5\cos\omega}{\sin\omega}-\frac{6\cos\omega\cdot\sin\omega}{\sin^2\omega+\cos^2\omega}=2,\ 5\mathrm{ctg}\,\omega-\frac{6\mathrm{ctg}\,\omega}{1+\mathrm{ctg}^2\omega}=2 \text{ или}$$

$$5\mathrm{ctg}^3\omega-2\mathrm{ctg}^2\omega-\mathrm{ctg}\,\omega-2=0. \tag{2.21}$$

Кубическое уравнение (2.21) имеет один действительный корень $\mathrm{ctg}\,\omega=1$. Следовательно, $\omega=\frac{\pi}{4}+\pi n$, где n — целое число. Так как $0<\omega<\pi$, то $\omega_1=\frac{\pi}{4}$. Поскольку $x=\cos\omega$, то $x_1=\cos\omega_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{2.11}$ Решить уравнение

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x. \tag{2.22}$$

Решение. Для определения области допустимых значений переменной x в уравнении (2.22) рассмотрим систему неравенств $\begin{cases} x\ge\sqrt{2}, \\ 2-\sqrt{2+x}\ge 0. \end{cases}$

Отсюда следует, что $\sqrt{2}\le x\le 2$.

Поскольку $\sqrt{2}\le x\le 2$, то обозначим $x=2\cos\omega$, где $0\le\omega\le\frac{\pi}{4}$. В таком случае для левой части уравнения (2.22) имеет место следующая цепочка равносильных выражений:

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\omega}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{4\cos^2\frac{\omega}{2}}}}=\sqrt{2+\sqrt{2-2\cos\frac{\omega}{2}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{4\sin^2\frac{\omega}{4}}}=\sqrt{2+2\sin\frac{\omega}{4}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\sin\frac{\omega}{8}+\cos\frac{\omega}{8}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\left(\sin\frac{\omega}{8}+\cos\frac{\omega}{8}\right)=2\cdot\cos\left(\frac{\omega}{8}-\frac{\pi}{4}\right).$$

При выполнении приведенных выше преобразований использовался тот факт, что $0 \le \omega \le \dfrac{\pi}{4}$. В данном случае $\cos\dfrac{\omega}{2} \ge 0$, $\sin\dfrac{\omega}{4} \ge 0$ и $\sin\dfrac{\omega}{8} + \cos\dfrac{\omega}{8} \ge 0$.

Следовательно, имеем уравнение $2\cdot\cos\left(\dfrac{\omega}{8} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos\omega$, из которого следует, что $\omega = \pm\left(\dfrac{\omega}{8} - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\pi n$, где n — целое число. Так как $0 \le \omega \le \dfrac{\pi}{4}$, то $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{9}$ и уравнение (2.22) имеет единственный корень $x_1 = \cos\omega_1 = \cos\dfrac{2\pi}{9}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \cos\dfrac{2\pi}{9}$.

2.12. Доказать неравенство

$$\left(2x \cdot \sqrt{1 - x^2} + 2x^2 - 1\right)^2 \le 2, \qquad (2.23)$$

где $-1 \le x \le 1$.

Доказательство. Поскольку $-1 \le x \le 1$, то можно положить $x = \cos\omega$, где $0 \le \omega \le \pi$. В таком случае неравенство (2.23) можно переписать в виде

$$\left(2\cos\omega \cdot |\sin\omega| + 2\cos^2\omega - 1\right)^2 \le 2. \qquad (2.24)$$

Так как $0 \le \omega \le \pi$, то $\sin\omega \ge 0$, $|\sin\omega| = \sin\omega$ и неравенство (2.24) равносильно неравенству $(\sin 2\omega + \cos 2\omega)^2 \le 2$. Полученное неравенство является очевидным, поскольку $\sin 2\omega + \cos 2\omega = \sqrt{2}\cdot\sin\left(2\omega + \dfrac{\pi}{4}\right)$, а $\sin^2\left(2\omega + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$.

2.13. Доказать двойное неравенство

$$-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)\cdot(1-xy)}{\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)} \le \frac{1}{2}. \qquad (2.25)$$

Доказательство. Пусть $x = \mathrm{tg}\alpha$ и $y = \mathrm{tg}\beta$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. В таком случае

$$\frac{(x+y)\cdot(1-xy)}{\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)} = \frac{(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)\cdot(1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta)}{\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)\cdot\left(1+\mathrm{tg}^2\beta\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cdot\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\beta}} = \sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\cdot\sin 2(\alpha+\beta)$$

Так как $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\cdot\sin 2(\alpha+\beta) \le \frac{1}{2}$, то неравенство (2.25) доказано.

$\boxed{2.14}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y, \\ 2y + y^2z = z, \\ 2z + z^2x = x. \end{cases} \qquad (2.26)$$

Решение. Преобразуем уравнения системы (2.26) к виду

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2}, \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2}, \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2}. \end{cases} \qquad (2.27)$$

Положим, что $x = \mathrm{tg}\omega$, где $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$. В таком случае из системы уравнений (2.27) следует, что $y = \mathrm{tg}2\omega$, $z = \mathrm{tg}4\omega$ и $x = \mathrm{tg}8\omega$.

Так как $x = \mathrm{tg}\omega$ и $x = \mathrm{tg}8\omega$, то $\mathrm{tg}\omega = \mathrm{tg}8\omega$. Отсюда следует, что $8\omega = \omega + \pi k$, т. е. $\omega = \frac{\pi}{7}k$, где k — целое число. Поскольку $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$, то $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Следовательно, система уравнений (2.26) имеет следующие корни

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7}k, \\ y = \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{7}k, \\ z = \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{7}k, \end{cases}$$

где $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

♦ ***Ответ:*** см. выше.

2.15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{1 - y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}. \end{cases} \tag{2.28}$$

Решение. Так как $-1 \le x \le 1$ и $-1 \le y \le 1$, то можно обозначить $x = \cos\varphi$ и $y = \cos\psi$, где $0 \le \varphi \le \pi$ и $0 \le \psi \le \pi$. В таком случае $\sqrt{1 - x^2} = \sin\varphi$, $\sqrt{1 - y^2} = \sin\psi$ и система (2.28) принимает вид системы тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \cos\varphi + \sin\psi = 1, \\ \cos\psi + \sin\varphi = \sqrt{3}. \end{cases} \tag{2.29}$$

Из системы уравнений (2.29) имеем $\cos^2\varphi = (1 - \sin\psi)^2$ и $\sin^2\varphi = (\sqrt{3} - \cos\psi)^2$. Поскольку $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, то

$$1 = \left(\sqrt{3} - \cos\psi\right)^2 + (1 - \sin\psi)^2 =$$

$$= 3 - 2\sqrt{3}\cos\psi + \cos^2\psi + 1 - 2\sin\psi + \sin^2\psi =$$

$$= 5 - 2\left(\sin\psi + \sqrt{3}\cos\psi\right),$$

т. е. $\sin\psi + \sqrt{3}\cos\psi = 2$ или $\sin\left(\psi + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

Отсюда получаем $\psi=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, где n — целое число. Поскольку $0\le\psi\le\pi$, то $\psi_1=\frac{\pi}{6}$ и $y_1=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Поскольку $\cos\psi_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0\le\psi\le\pi$, то $\sin\psi_1=\frac{1}{2}$ и из первого уравнения системы (2.29) получаем $\cos\varphi_1=1-\sin\psi_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Так как $x=\cos\varphi$, то $x_1=\cos\varphi_1=\frac{1}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4xy\left(2x^2-1\right)=1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{2.30}$$

Решение. Поскольку $x^2+y^2=1$, то обозначим $x=\sin\varphi$ и $y=\cos\varphi$, где $-\pi\le\varphi\le\pi$.

В таком случае первое уравнение системы (2.30) можно записать, как $4\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\left(2\sin^2\varphi-1\right)=1$, $2\sin2\varphi\cdot(-\cos2\varphi)=1$ или $\sin4\varphi=-1$. Корнями уравнения $\sin4\varphi=-1$ являются $\varphi=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n=\frac{\pi}{8}(4n-1)$, где n — целое число.

Так как $-\pi\le\varphi\le\pi$, то $\varphi_1=-\frac{5\pi}{8}$, $\varphi_2=-\frac{\pi}{8}$, $\varphi_3=\frac{3\pi}{8}$ и $\varphi_4=\frac{7\pi}{8}$.

С учетом того, что $x=\sin\varphi$ и $y=\cos\varphi$, получаем $x_1=-\sin\frac{5\pi}{8}$, $y_1=\cos\frac{5\pi}{8}$, $x_2=-\sin\frac{\pi}{8}$, $y_2=\cos\frac{\pi}{8}$, $x_3=\sin\frac{3\pi}{8}$, $y_3=\cos\frac{3\pi}{8}$, $x_4=\sin\frac{7\pi}{8}$ и $y_4=\cos\frac{7\pi}{8}$.

♦ ***Ответ:*** см. выше.

2.17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = \dfrac{(y+1)^2}{y^2+1}, \\ y = \dfrac{2z(x-1)}{1-2z^2}, \\ z = \dfrac{1-y^2}{y^2+1}. \end{cases} \tag{2.31}$$

Решение. Пусть $y = \operatorname{tg}\omega$, где $-\dfrac{\pi}{2} < \omega < \dfrac{\pi}{2}$. Тогда из первого и треть
уравнения системы (2.31) следует $x = \dfrac{(\operatorname{tg}\omega+1)^2}{\operatorname{tg}^2\omega+1} = 1+\sin 2\omega$ и $z = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\omega}{\operatorname{tg}^2\omega+1}$
$= \cos 2\omega$. Если тригонометрические выражения для переменных $x, y,$
подставить во второе уравнение системы (2.31), то

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{2\cos 2\omega \cdot (1+\sin 2\omega - 1)}{1-2\cos^2 2\omega} = \frac{2\sin 2\omega \cdot \cos 2\omega}{1-2\cos^2 2\omega} = -\operatorname{tg}4\omega .$$

Отсюда следует $\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}4\omega = 0$, $\sin 5\omega = 0$ и $\omega = \dfrac{\pi n}{5}$, где n — цел
число. Поскольку $-\dfrac{\pi}{2} < \omega < \dfrac{\pi}{2}$, то $\omega_1 = -\dfrac{2\pi}{5}$, $\omega_2 = -\dfrac{\pi}{5}$, $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = \dfrac{\pi}{5}$
$\omega_5 = \dfrac{2\pi}{5}$.

Так как $x = 1+\sin 2\omega$, $y = \operatorname{tg}\omega$ и $z = \cos 2\omega$, тогда корнями систем
уравнений (2.31) являются $x_1 = 1-\sin\dfrac{4\pi}{5}$, $y_1 = -\dfrac{2\pi}{5}$, $z_1 = \cos\dfrac{4\pi}{5}$
$x_2 = 1-\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $y_2 = -\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$, $z_2 = \cos\dfrac{2\pi}{5}$; $x_3 = 1$, $y_3 = 0$, $z_3 = 1$
$x_4 = 1+\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $y_4 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$, $z_4 = \cos\dfrac{2\pi}{5}$; $x_5 = 1+\sin\dfrac{4\pi}{5}$, $y_5 = \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5}$
$z_5 = \cos\dfrac{4\pi}{5}$.

♦ ***Ответ:*** см. выше.

2.18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1, \\ 2\arcsin x+3\arcsin y=\dfrac{4}{3}\pi. \end{cases} \qquad (2.32)$$

Решение. Поскольку $-1\le x\le 1$ и $-1\le y\le 1$, то положим $x=\sin\alpha$ и $y=\sin\beta$, тогда $\alpha=\arcsin x$ и $\beta=\arcsin y$. Отсюда следует, что $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$. В таком случае $\cos\alpha\ge 0$, $\cos\beta\ge 0$ и система уравнений (2.32) принимает вид

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=1, \\ 2\alpha+3\beta=\dfrac{4}{3}\pi. \end{cases} \qquad (2.33)$$

Из первого уравнения системы (2.33) получаем $\sin(\alpha+\beta)=1$. Поскольку $-\pi\le\alpha+\beta\le\pi$, то $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, имеет место система уравнений $\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}, \\ 2\alpha+3\beta=\dfrac{4}{3}\pi, \end{cases}$ корнями которой являются $\alpha_1=\frac{\pi}{6}$ и $\beta_1=\frac{\pi}{3}$. Так как $x=\sin\alpha$ и $y=\sin\beta$, то $x_1=\frac{1}{2}$ и $y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.19. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(4x^3-3x\right)^6+\left(4y^3-3y\right)^6=1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \qquad (2.34)$$

Решение. Так как $x^2+y^2=1$, то представим $x=\sin\omega$ и $y=\cos\omega$, где $0\le\omega<2\pi$. Однако $\sin 3\omega=-4\sin^3\omega+3\sin\omega$ и $\cos 3\omega=4\cos^3\omega-3\cos\omega$, поэтому из первого уравнения системы (2.34) получаем тригонометри-ское уравнение $\sin^6 3\omega + \cos^6 3\omega = 1$.

Приведенное выше уравнение преобразуем следующим образом:

$$\left(\sin^2 3\omega + \cos^2 3\omega\right)\cdot\left(\sin^4 3\omega - \sin^2 3\omega \cdot \cos^2 3\omega + \cos^4 3\omega\right) = 1,$$

$$\left(\sin^2 3\omega + \cos^2 3\omega\right)^2 - 3\sin^2 3\omega \cdot \cos^2 3\omega = 1,$$

$$\sin^2 3\omega \cdot \cos^2 3\omega = 0$$

или $\sin 6\omega = 0$.

Если $\sin 6\omega = 0$, то $\omega = \frac{\pi}{6}n$, где n — целое число. Так к

$0 \le \omega < 2\pi$, то $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \frac{\pi}{6}$, $\omega_3 = \frac{\pi}{3}$, $\omega_4 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_5 = \frac{2\pi}{3}$, $\omega_6 = \frac{5\pi}{6}$

$\omega_7 = \pi$, $\omega_8 = \frac{7\pi}{6}$, $\omega_9 = \frac{4\pi}{3}$, $\omega_{10} = \frac{3\pi}{2}$, $\omega_{11} = \frac{5\pi}{3}$ и $\omega_{12} = \frac{11\pi}{6}$.

Поскольку $x = \sin\omega$ и $y = \cos\omega$, то $x_1 = 0$, $y_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = 1$, $y_4 = 0$; $x_5 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_5 = -\frac{1}{2}$; $x_6 = \frac{1}{2}$, $y_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_7 = 0$, $y_7 = -1$; $x_8 = -\frac{1}{2}$, $y_8 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_9 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_9 = -\frac{1}{2}$; $x_{10} = -$

$y_{10} = 0$; $x_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{11} = \frac{1}{2}$ и $x_{12} = -\frac{1}{2}$, $y_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** см. выше.

2.20. Числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd =$ Вычислить $ab + cd$.

Решение. Так как $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$, то положим $a = \sin$ $b = \cos\alpha$, $c = \sin\beta$ и $d = \cos\beta$, где $0 \le \alpha \le 2\pi$ и $0 \le \beta \le 2\pi$.

В таком случае $ac + bd = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha - \beta)$. Од-ко, по условию $ac + bd = 0$, поэтому $\cos(\alpha - \beta) = 0$.

Поскольку

$$ab+cd=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin2\alpha+\sin2\beta)=\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

и $\cos(\alpha-\beta)=0$, то $ab+cd=0$.

♦ ***Ответ:*** $ab+cd=0$.

$\boxed{2.21}$ Числа a,b,c,d таковы, что $a^2+b^2=9$, $c^2+d^2=16$, $ad+bc\ge12$. Доказать, что $-5\le b+d\le5$.

Доказательство. Так как $a^2+b^2=9$ и $c^2+d^2=16$, то обозначим $a=3\sin\alpha$, $b=3\cos\alpha$, $c=4\sin\beta$ и $d=4\cos\beta$, где $0\le\alpha\le2\pi$ и $0\le\beta\le2\pi$.

Тогда $ad+bc=12\sin\alpha\cdot\cos\beta+12\cos\alpha\cdot\sin\beta=12\sin(\alpha+\beta)$. По условию $ad+bc\ge12$, однако $12\sin(\alpha+\beta)\le12$. Отсюда следует, что $12\sin(\alpha+\beta)=12$ или $\sin(\alpha+\beta)=1$. Следовательно, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где n — целое число.

В таком случае

$$b+d=3\cos\alpha+4\cos\beta=$$

$$=3\cos\alpha+4\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n-\alpha\right)=3\cos\alpha+4\sin\alpha=$$

$$=5\cdot\left(\frac{3}{5}\cos\alpha+\frac{4}{5}\sin\alpha\right)=5\cdot(\cos\omega\cdot\cos\alpha+\sin\omega\cdot\sin\alpha)=$$

$$=5\cdot\cos(\alpha-\omega),$$

где $\omega=\arccos\frac{3}{5}$.

Так как $-5\le5\cdot\cos(\alpha-\omega)\le5$, то $-5\le b+d\le5$.

$\boxed{2.22}$ Числа a,b,c таковы, что $ab+ac+bc=1$. Доказать, что

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}. \qquad (2.35)$$

Доказательство. Из школьного курса тригонометрии известно сле-дующее утверждение: если $x+y+z=\pi$, то

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{z}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{z}{2}=1.$$

В этой связи из условия задачи $ab+ac+bc=1$ можно сделать выв[од] о том, что существуют такие числа $x,\ y,\ z$, что $a=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $b=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$, $c=\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ и $x+y+z=\pi$. Тогда

$$\frac{a}{1-a^2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{2\cos x}=\frac{\operatorname{tg}x}{2}$$

и равенство (2.35) принимает вид $\frac{\operatorname{tg}x}{2}+\frac{\operatorname{tg}y}{2}+\frac{\operatorname{tg}z}{2}=4\cdot\frac{\operatorname{tg}x}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}y}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}z}{2}$ или

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z, \tag{2.36}$$

где $x+y+z=\pi$.

Так как $x+y+z=\pi$, то $z=\pi-(x+y)$ и выражение (2.36) мож[но] преобразовать следующим образом:

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}(\pi-(x+y))=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}(\pi-(x+y)),$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}(x+y)=-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}(x+y),$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}(x+y),$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}(x+y)(1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y)$$

или

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}.$$

Поскольку в результате несложных преобразований получили из-вестную формулу тангенса суммы двух углов, то справедливость форму-лы (2.36) доказана. Следовательно, равенство (2.35) также имеет мест[о]

РАЗДЕЛ 3

Методы, основанные на применении численных неравенств

Нестандартными методами в математике являются также методы, в основу которых положено использование известных в математике численных неравенств (Коши, Бернулли и Коши—Буняковского), изучению которых в общеобразовательной школе не уделяется или почти не уделяется никакого внимания. Однако многие математические задачи (особенно задачи повышенной сложности) эффективно решаются именно такими методами. В этой связи незнание последних может существенно ограничить круг успешно решаемых задач.

Первоначально приведем формулировки неравенства Коши, неравенства Бернулли и неравенства Коши—Буняковского, а затем проиллюстрируем их применение на примерах, многие из которых взяты из программы вступительных экзаменов по письменной математике в Белгосуниверситете.

Неравенство Коши

Пусть $a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ \ldots,\ a_n \geq 0$, тогда

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \qquad (3.1)$$

где $n \geq 2$. Причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

В частности, если в (3.1) положить $n = 2$, то

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}. \qquad (3.2)$$

Это неравенство чаще всего встречается при решении школьных задач по математике.

Если в (3.2) положить $a_1 = a$ и $a_2 = \frac{1}{a}$, где $a > 0$, то

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \qquad (3.$$

Здесь неравенство равносильно равенству лишь при $a = 1$.

Следует отметить, что имеется аналог неравенства (3.3) для отри тельных значений a, а именно, если $a < 0$, то

$$a + \frac{1}{a} \leq -2 \qquad (3.$$

Данное неравенство превращается в равенство при $a = -1$.

Неравенство Бернулли

Наиболее распространенным является неравенство Бернулли, кото формулируется в следующей форме: если $x > -1$, то для любого на рального n имеет место

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \qquad (3$$

Причем равенство в (3.5) достигается при $x = 0$ или $n = 1$.

Наряду с (3.5) существует более общее неравенство Бернулли, ко рое содержит в себе два неравенства:
если $p < 0$ или $p > 1$, то

$$(1+x)^p \geq 1 + px, \qquad (3.6$$

если $0 < p < 1$, то

$$(1+x)^p \leq 1 + px, \qquad (3.7$$

где $x > -1$.

Следует отметить, что равенства в (3.6) и (3.7) имеют место толь ко при $x = 0$. Верно также и обратное утверждение.

Неравенство Коши—Буняковского

Для произвольных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ имеет место

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right), \qquad (3.8$$

где $n \geq 2$.

Причем равенство в (3.8) достигается в том и только в том случае, когда числа x_k и y_k пропорциональны, т. е. существует константа a $(a \neq 0)$ такая, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется равенство $x_k = ay_k$.

На основе использования неравенства Коши—Буняковского (3.8) можно доказать неравенство

$$(a+b)^n \le 2^{n-1}\left(a^n + b^n\right), \tag{3.9}$$

которое справедливо для произвольных $a\,(a \ge 0)$, $b\,(b \ge 0)$ и натурального числа n.

Примечание. Доказательство неравенств (3.1), (3.5), (3.8) и (3.9) приведено, в частности, в учебном пособии Супруна В. П. «Математика для старшеклассников: задачи повышенной сложности» (М.: УРСС, 2008).

Доказательство обобщенного неравенства Бернулли (3.6), (3.7) (а также доказательство других численных неравенств) можно посмотреть в статье Сорокина Г. А. «Экстремум и неравенства» («Математика в школе», 1997, № 1).

Задачи и решения

3.1. Доказать неравенство

$$(a+2)(b+2)(a+b) \ge 16ab, \tag{3.10}$$

где $a \ge 0$ и $b \ge 0$.

Доказательство. Используя неравенство Коши (3.1), можно записать $a+2 \ge 2\sqrt{2a}$, $b+2 \ge 2\sqrt{2b}$ и $a+b \ge 2\sqrt{ab}$.

В таком случае имеет место

$$(a+2)(b+2)(a+b) \ge 2\sqrt{2a}\cdot 2\sqrt{2b}\cdot 2\sqrt{ab} = 16ab,$$

т. е. неравенство (3.10) доказано.

3.2. Доказать неравенство

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge (a+b+c)(ab+ac+bc). \tag{3.11}$$

Доказательство. Применяя неравенство Коши (3.1) при $n = 3$, получаем последовательность неравенств

$$a^3+b^3+c^3 \ge 3abc,\ a^3+b^3+c^3 \ge 3abc,$$

$$a^3+b^3+c^3 \ge 3abc\,,\ a^3+a^3+b^3 \ge 3a^2b\,,$$
$$a^3+b^3+b^3 \ge 3ab^2\,,\ a^3+a^3+c^3 \ge 3a^2c\,,$$
$$a^3+c^3+c^3 \ge 3ac^2\,,\ b^3+b^3+c^3 \ge 3b^2c\,,\ b^3+c^3+c^3 \ge 3bc^2\,.$$

Если просуммировать левые и правые части всех приведенных выше неравенств, то получаем

$$9\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge 3\cdot\left(3abc+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right)=$$
$$=3\cdot(a+b+c)(ab+ac+bc),$$

т. е. неравенство (3.11) доказано.

$\boxed{3.3.}$ Доказать неравенство

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right), \qquad (3.12)$$

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущего неравенства, воспользуемся неравенством Коши (3.1) при $n=3$, тогда можно написать

$$a^3+a^3+b^3 \ge 3a^2b\,,\ a^3+b^3+b^3 \ge 3ab^2\,,$$
$$a^3+a^3+c^3 \ge 3a^2c\,,\ a^3+c^3+c^3 \ge 3ac^2\,,$$
$$b^3+b^3+c^3 \ge 3b^2c\,,\ b^3+c^3+c^3 \ge 3bc^2\,.$$

Отсюда получаем

$$6\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge 3\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right).$$

Если к обеим частям приведенного выше неравенства прибавить выражение $3\left(a^3+b^3+c^3\right)$, то получим

$$9\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge 3\left(a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right)=$$
$$=3(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

и тем самым неравенство (3.12) доказано.

$\boxed{3.4.}$ Доказать, что

$$a^3+b^3+c^3 \ge a^2\cdot\sqrt{bc}+b^2\cdot\sqrt{ac}+c^2\cdot\sqrt{ab}. \qquad (3.13)$$

где $a \ge 0$, $b \ge 0$ и $c \ge 0$.

Доказательство. Используя (трижды) неравенство Коши (3.1) при $n=6$, получаем

$$a^3+a^3+a^3+a^3+b^3+c^3 \ge 6\cdot\sqrt[6]{a^3\cdot a^3\cdot a^3\cdot a^3\cdot b^3\cdot c^3} = 6\cdot a^2\cdot\sqrt{bc},$$

$$a^3+b^3+b^3+b^3+b^3+c^3 \ge 6\cdot b^2\cdot\sqrt{ac},$$

$$a^3+b^3+c^3+c^3+c^3+c^3 \ge 6\cdot c^2\cdot\sqrt{ab}.$$

Если сложить левые и правые части приведенных выше неравенств, то докажем справедливость неравенства (3.13).

$\boxed{3.5.}$ Доказать, что

$$abcd \le \frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{a+b+c+d}, \qquad (3.14)$$

где $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$, $d\ge 0$ и $a+b+c+d>0$.

Доказательство. Так как $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$ и $d\ge 0$, то можно применить неравенство Коши (3.1) при $n=5$. Тогда

$$a^5+a^5+b^5+c^5+d^5 \ge 5\cdot\sqrt[5]{a^5\cdot a^5\cdot b^5\cdot c^5\cdot d^5} = 5a^2bcd,$$

$$a^5+b^5+b^5+c^5+d^5 \ge 5ab^2cd,\quad a^5+b^5+c^5+c^5+d^5 \ge 5abc^2d$$

$$\text{и } a^5+b^5+c^5+d^5+d^5 \ge 5abcd^2.$$

Если сложить приведенные выше неравенства, то

$$5\left(a^5+b^5+c^5+d^5\right) \ge 5\left(a^2bcd+ab^2cd+abc^2d+abcd^2\right) \text{ или}$$

$$a^5+b^5+c^5+d^5 \ge abcd\left(a+b+c+d\right). \qquad (3.15)$$

Поскольку $a+b+c+d>0$, то из неравенства (3.15) вытекает требуемое неравенство (3.14).

$\boxed{3.6.}$ Доказать, если $abc=1$, то

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge a+b+c. \qquad (3.16)$$

Доказательство. Согласно неравенству Коши (3.2) имеем $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \ge$ $\ge \frac{2}{ab}$. Так как по условию $\frac{1}{ab}=\frac{abc}{ab}=c$, то $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge 2c$. Аналогично можно показать, что $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\ge 2b$ и $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 2a$. Следовательно,

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 2a+2b+2c.$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства (3.16).

3.7. Доказать, что

$$2a^4+1\geq 2a^3+a^2. \qquad (3.17)$$

Доказательство. Согласно неравенству Коши (3.1) имеем

$$a^4+1\geq 2a^2 \text{ и } a^4+a^4+a^4+1\geq 4\cdot\sqrt[4]{a^4\cdot a^4\cdot a^4\cdot 1}=4a^3.$$

Если сложить приведенные выше неравенства, то получим (3.17).

3.8. Доказать, что

$$1+2a^2+b^6\geq 3ab+ab^3. \qquad (3.18)$$

Доказательство. Для доказательства (3.18) воспользуемся (дважды) неравенством Коши (3.1) и получим следующие два соотношения:

$$a^2+b^6\geq 2\sqrt{a^2\cdot b^6}=2ab^3,$$

$$1+1+a^2+a^2+a^2+b^6\geq 6\cdot\sqrt[6]{1\cdot 1\cdot a^2\cdot a^2\cdot a^2\cdot b^6}=6ab,$$

откуда следует $a^2+b^6\geq 2ab^3$ и $2+3a^2+b^6\geq 6ab$. Если сложить приведенные выше неравенства, то получим неравенство (3.18).

3.9. Доказать, что

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^n+\left(\frac{b+c}{a}\right)^n+\left(\frac{c+a}{b}\right)^n\geq 3\cdot 2^n,$$

где $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Доказательство. Согласно неравенству Коши (3.1) при $n=3$ имеем

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^n+\left(\frac{b+c}{a}\right)^n+\left(\frac{c+a}{b}\right)^n\geq 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{a+b}{c}\right)^n\cdot\left(\frac{b+c}{a}\right)^n\cdot\left(\frac{c+a}{b}\right)^n}=$$

$$=3\left(\sqrt[3]{\frac{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}{abc}}\right)^n\geq 3\left(\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{abc}}\right)^n=3\left(\sqrt[3]{\frac{8abc}{abc}}\right)^n=3\cdot 2^n$$

3.10. Доказать неравенство

$$\frac{a^2}{1+a^4}+\frac{b^2}{1+b^4}+\frac{c^2}{1+c^4}\le\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}, \tag{3.19}$$

где $a^2+b^2+c^2\le 3$ и $a\ne 0,\ b\ne 0,\ c\ne 0.$

Доказательство. Оценим левую часть неравенства (3.19), используя неравенство Коши (3.3). Имеет место

$$\frac{a^2}{1+a^4}+\frac{b^2}{1+b^4}+\frac{c^2}{1+c^4}=\frac{1}{a^2+\frac{1}{a^2}}+\frac{1}{b^2+\frac{1}{b^2}}+\frac{1}{c^2+\frac{1}{c^2}}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Для правой части неравенства (3.19) можно записать

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge$$

$$\ge\frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}}\ge\frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}.$$

Поскольку $a^2+b^2+c^2\le 3$, то из последнего неравенства получаем

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge\frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}\ge\frac{9}{3+3}=\frac{3}{2}.$$

Так как левая часть неравенства (3.19) меньше или равна $\frac{3}{2}$, а правая часть — не меньше $\frac{3}{2}$, то неравенство (3.19) доказано.

Примечание. При доказательстве неравенства

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge\frac{3}{2}$$

было использовано неравенство

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n},$$

которое доказывается путем двукратного применения к его левой части неравенства Коши (3.1).

3.11. Доказать, если $a^2+b^2+c^2=1$, то

$$a(b+c)\le\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{3.20}$$

где $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$.

Доказательство. Согласно неравенству Коши (3.2) имеем $\frac{a^2}{2}+b^2\ge$ $\ge\sqrt{2}ab$ и $\frac{a^2}{2}+c^2\ge\sqrt{2}ac$. Тогда

$$1=a^2+b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+b^2+\frac{a^2}{2}+c^2\ge\sqrt{2}ab+\sqrt{2}ac=\sqrt{2}a(b+c).$$

Отсюда следует справедливость неравенства (3.20).

3.12. Доказать неравенство

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}<2\sqrt{2}. \tag{3.21}$$

Доказательство. Оценим левую часть неравенства (3.21), используя для этого неравенство Коши—Буняковского (3.8), т. е.

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2=$$

$$=\left(1\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+1\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2\le$$

$$\le\left(1^2+1^2\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}+2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)=2\cdot 4=8.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\le 2\sqrt{2}. \tag{3.22}$$

Для доказательства строгого неравенства (3.21) необходимо показать, что в (3.22) равенства быть не может. Предположим, что

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}.$$

Это возможно лишь в том случае, когда неравенство Коши—Буняковского (3.8) превратилось в равенство. А это возможно лишь в том случае, когда $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

Очевидно, что данное равенство неверно (поскольку числители дробей совпадают, а знаменатели — нет). Следовательно, неравенство (3.21) доказано.

Примечание. Неравенство (3.21) можно доказать также при помощи неравенства Бернулли (см. пример 3.25 с более общим условием).

3.13. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\geq\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a+b}}, \tag{3.23}$$

где $a>0$ и $b>0$.

Доказательство. При доказательстве неравенства (3.23) будем применять неравенство Коши (3.2).

Имеет место $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, т. е. $\sqrt[4]{a+b}\geq\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{ab}$ или

$$\frac{1}{\sqrt[8]{ab}}\geq\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a+b}}. \tag{3.24}$$

Если к левой части неравенства (3.23) применить неравенство Коши (3.2), а затем воспользоваться неравенством (3.24), то получим требуемое неравенство (3.23), т. е. $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\geq\frac{2}{\sqrt[8]{ab}}\geq\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a+b}}$.

3.14. Доказать неравенство

$$\frac{a^2+b^2}{a-b}\geq 2\sqrt{2}, \tag{3.25}$$

где $a>b$ и $ab=1$.

Доказательство. Так как $a>b$, то $a-b>0$. Применим к левой части неравенства (3.25) неравенство Коши (3.2). Тогда с учетом того, что $ab=1$, получим

$$\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2ab}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2}{a-b}=(a-b)+\frac{2}{a-b}\geq$$

$$\geq 2\cdot\sqrt{(a-b)\cdot\frac{2}{a-b}}=2\sqrt{2}.$$

$\boxed{3.15}$ Доказать неравенство

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq 8, \tag{3.26}$$

где $a>1$ и $b>1$.

Доказательство. Пусть $a-1=x$ и $b-1=y$. Так как $a>1$ и $b>1$, то $x>0$, $y>0$ и требуемое неравенство (3.26) можно переписать как

$$\frac{(x+1)^2}{y}+\frac{(y+1)^2}{x}\geq 8, \tag{3.27}$$

где $x>0$ и $y>0$.

Поскольку $x>0$, то для доказательства неравенства (3.27) можно воспользоваться неравенством Коши (3.2) и при этом получить неравенства $\frac{x+1}{2}\geq\sqrt{x}$ или $(x+1)^2\geq 4x$. Аналогично имеет место $(y+1)^2\geq 4y$. Кроме того, известно из (3.3), что $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

Следовательно, левую часть неравенства (3.27) можно оценить снизу:

$$\frac{(x+1)^2}{y}+\frac{(y+1)^2}{x}\geq\frac{4x}{y}+\frac{4y}{x}=4\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 4\cdot 2=8.$$

Отсюда следует справедливость неравенств (3.27) и (3.26).

$\boxed{3.16}$ Доказать, если $a+b=1$ и $a>0$, $b>0$, то

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}. \tag{3.28}$$

Доказательство. Предварительно запишем два вспомогательных неравенства, а именно, $x^2+y^2\geq\frac{1}{2}(x+y)^2$ и $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$. Оба эти неравенства вытекают из неравенства Коши (3.2). Кроме того, эти неравенства можно легко доказать методом от противного.

В таком случае

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(a+b+\frac{a+b}{ab}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \ge \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{4}{(a+b)^2}\right)^2=\frac{25}{2},$$

т. е. неравенство (3.28) доказано.

3.17. Доказать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\ge 9, \qquad (3.29)$$

где $a>0$, $b>0$ и $a+b=1$.

Доказательство. Так как $a>0$, $b>0$ и $a+b=1$, то из неравенства Коши (3.2) вида $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{a\,b}$ следует, что $\sqrt{a\,b}\le\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{a\,b}\ge 4$.

С учетом того, что $a+b=1$ и $\frac{1}{a\,b}\ge 4$, преобразуем левую часть неравенства (3.29) следующим образом:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=1+\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab}=$$

$$=1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}=1+\frac{2}{ab}\ge 1+2\cdot 4=9.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (3.29).

3.18. Доказать неравенство

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\ge 2^{n+1},$$

где $a>0$ и $b>0$

Доказательство. Воспользуемся (трижды) неравенством Коши (3.2). Имеет место следующая цепочка преобразований:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\ge\left(2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n+\left(2\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n\ge$$

$$\ge 2\cdot\left(\sqrt{\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n\cdot\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n}\right)=2^{n+1}.$$

$\boxed{3.19.}$ Доказать, что

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1, \tag{3.30}$$

где $a>0, b>0, c>0$ и $abc=1$.

Доказательство. Поскольку $abc=1$, то переменные a,b,c можно представить в виде $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$ и $c=\frac{z}{x}$. В таком случае неравенство (3.30) будет равносильно неравенству

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\le xyz, \tag{3.31}$$

где $x>0, y>0, z>0$.

Введем новые переменные $u=x-y+z$, $v=y-z+x$ и $w=z-x+y$, тогда $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{v+w}{2}$, $z=\frac{u+w}{2}$ и неравенство (3.31) принимает вид

$$(u+v)(v+w)(u+w)\ge 8uvw, \tag{3.32}$$

где $u>0, v>0, w>0$.

Справедливость неравенства (3.32) легко следует из неравенства Коши (3.2), так как $u+v\ge 2\sqrt{uv}$, $v+w\ge 2\sqrt{vw}$ и $u+w\ge 2\sqrt{uw}$.

Следовательно, требуемое неравенство (3.30) доказано.

Примечание. Доказательство неравенств (3.31), (3.32) могут представлять собой самостоятельные задачи.

$\boxed{3.20.}$ Доказать, если $3a+b=1$, то

$$3a^2+b^2\ge\frac{1}{4}, \tag{3.33}$$

$$3a^3+b^3\ge\frac{1}{16}, \tag{3.34}$$

$$3a^4+b^4\ge\frac{1}{64}. \tag{3.35}$$

Доказательство неравенств (3.33), (3.34), (3.35) будем вести на основе применения неравенства Коши—Буняковского (3.8).

Имеет место

$$1=(3a+b)^2=(1\cdot a+1\cdot a+1\cdot a+1\cdot b)^2\le$$

$$\le\left(1^2+1^2+1^2+1^2\right)\left(a^2+a^2+a^2+b^2\right)=4\left(3a^2+b^2\right).$$

Таким образом, справедливость неравенства (3.33) доказана.

Используя доказанное неравенство $3a^2+b^2\ge\frac{1}{4}$, запишем

$$\frac{1}{16}\le\left(3a^2+b^2\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\right)^2\le$$

$$\le(a+a+a+b)\left(a^3+a^3+a^3+b^3\right)=(3a+b)\left(3a^3+b^3\right)$$

Так как $3a+b=1$, то отсюда следует неравенство (3.34). Далее, с учетом неравенства (3.33) получаем

$$\frac{1}{16}\le\left(3a^2+b^2\right)^2=\left(1\cdot a^2+1\cdot a^2+1\cdot a^2+1\cdot b^2\right)^2\le$$

$$\le4\left(a^4+a^4+a^4+b^4\right)=4\left(3a^4+b^4\right)$$

т. е. справедливость неравенства (3.35) также доказана.

3.21 Доказать, что если $x^2+y^3\ge x^3+y^4$, то

$$x^3+y^3\le2, \tag{3.36}$$

где $x\ge0$ и $y\ge0$.

Доказательство. Для оценки сверху выражения x^3+y^3 применим неравенство Коши—Буняковского (3.8), т. е.

$$\left(x^3+y^3\right)^2=\left(x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}+y^2\cdot y\right)^2\le\left(x^3+y^4\right)\cdot\left(x^3+y^2\right). \tag{3.37}$$

Поскольку по условию $x^3+y^4\le x^2+y^3$, то из (3.37) следует $\left(x^3+y^3\right)^2\le\left(x^2+y^3\right)\left(x^3+y^2\right)$. Теперь применим неравенство Коши (3.2), тогда $\left(x^3+y^3\right)^2\le\left(\frac{x^2+y^3+x^3+y^2}{2}\right)^2$.

Отсюда вытекает неравенство $x^3+y^3\le x^2+y^2$.

Далее, согласно неравенству (3.8), имеем

$$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2\le\left(x^3+y^3\right)(x+y). \qquad (3.38)$$

Так как $x^3+y^3\le x^2+y^2$, то из неравенства (3.38) получаем $x^2+y^2\le x+y$.

Затем опять воспользуемся неравенством Коши—Буняковского (3.8). Имеет место

$$(x+y)^2=(1\cdot x+1\cdot y)^2\le\left(1^2+1^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)=2\left(x^2+y^2\right). \qquad (3.39)$$

Однако $x^2+y^2\le x+y$ и $x+y\ge 0$, тогда из (3.39) следует $x+y\le 2$. Так как $x^3+y^3\le x^2+y^2$, $x^2+y^2\le x+y$ и $x+y\le 2$, то неравенство (3.36) доказано.

3.22. Доказать, что для любого натурального n выполняется неравенство

$$(2n-1)!\le n^{2n-1}. \qquad (3.40)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть неравенства (3.40), используя неравенство Коши (3.2), записанное в виде $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Имеет место

$$(2n-1)!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(2n-1)=$$

$$=(1\cdot(2n-1))\cdot(2\cdot(2n-2))\cdot(3\cdot(2n-3))\ldots((n-1)\cdot(n+1))\cdot n\le$$

$$\le\left(\frac{1+(2n-1)}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2+(2n-2)}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3+(2n-3)}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{(n-1)+(n+1)}{2}\right)^2\cdot n=$$

$$=\left(n^2\right)^{n-1}\cdot n=n^{2n-1}.$$

Примечание. Если $n\ge 2$, то неравенство в выражении (3.40) будет строгим

$\boxed{3.23}$ Доказать, что

$$5^{10}+6^{10}<7^{10}. \tag{3.41}$$

Доказательство. Так как имеет место $5^{10}+6^{10}<2\cdot 6^{10}$, то для доказательства неравенства (3.41) достаточно показать, что

$$2\cdot 6^{10}<7^{10}. \tag{3.42}$$

С помощью неравенства Бернулли (3.6) можно записать

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{10}=\left(1+\frac{1}{6}\right)^{10}\ge 1+\frac{10}{6}>2.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (3.42). Следовательно, требуемое неравенство (3.41) доказано.

$\boxed{3.24}$ Доказать неравенство

$$\sqrt[5]{5-\sqrt[5]{a}}+\sqrt[5]{5+\sqrt[5]{a}}\le 2\sqrt[5]{5}. \tag{3.43}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Бернулли (3.7), тогда получаем

$$\sqrt[5]{5-\sqrt[5]{a}}+\sqrt[5]{5+\sqrt[5]{a}}=\sqrt[5]{5}\cdot\left(1-\frac{\sqrt[5]{a}}{5}\right)^{\frac{1}{5}}+\sqrt[5]{5}\cdot\left(1+\frac{\sqrt[5]{a}}{5}\right)^{\frac{1}{5}}\le$$

$$\le\sqrt[5]{5}\cdot\left(1-\frac{\sqrt[5]{a}}{25}\right)+\sqrt[5]{5}\cdot\left(1+\frac{\sqrt[5]{a}}{25}\right)=2\cdot\sqrt[5]{5},$$

т. е. неравенство (3.43) доказано.

$\boxed{3.25}$ Доказать неравенство

$$\sqrt[k]{a-F(x)}+\sqrt[k]{a+F(x)}<2\sqrt[k]{a}, \tag{3.44}$$

где $0<F(x)<a$.

Доказательство. Преобразуем левую часть неравенства (3.44) с использованием неравенства (3.7), т. е.

$$\sqrt[k]{a-F(x)}+\sqrt[k]{a+F(x)}=\sqrt[k]{a}\cdot\left(1-\frac{F(x)}{a}\right)^{\frac{1}{k}}+\sqrt[k]{a}\cdot\left(1+\frac{F(x)}{a}\right)^{\frac{1}{k}}\le$$

$$\le\sqrt[k]{a}\left(1-\frac{F(x)}{ak}+1+\frac{F(x)}{ak}\right)=2\sqrt[k]{a}.$$

Так как по условию $F(x) \neq 0$, то равенства в неравенстве Бернулли (3.7) не будет, поэтому доказано строгое неравенство (3.44).

3.26. Доказать, если $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, ..., $x_n > 1$, то

$$\left(1+\frac{1}{x_2}\right)^{x_1} \cdot \left(1+\frac{1}{x_3}\right)^{x_2} \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_{n-1}} \cdot \left(1+\frac{1}{x_1}\right)^{x_n} \geq 2^n.$$

Доказательство. Для получения нижней оценки левой части требуемого неравенства первоначально воспользуемся неравенством Бернулли (3.6), а затем неравенством Коши (3.2), тогда

$$\left(1+\frac{1}{x_2}\right)^{x_1} \cdot \left(1+\frac{1}{x_3}\right)^{x_2} \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_{n-1}} \cdot \left(1+\frac{1}{x_1}\right)^{x_n} \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{x_1}{x_2}\right) \cdot \left(1+\frac{x_2}{x_3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \cdot \left(1+\frac{x_n}{x_1}\right) \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \cdot 2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}} \cdot \ldots \cdot 2\sqrt{\frac{x_{n-1}}{x_n}} \cdot 2\sqrt{\frac{x_n}{x_1}} = 2^n.$$

Следовательно, требуемое неравенство доказано.

3.27. Решить уравнение

$$\left(16x^{200}+1\right) \cdot \left(y^{200}+1\right) = 16(xy)^{100}. \qquad (3.45)$$

Решение. Используя неравенство Коши (3.2), можно записать $16x^{200}+1 \geq 2\sqrt{16x^{200}} = 8x^{100}$ и $y^{200}+1 \geq 2\sqrt{y^{200}} = 2y^{100}$, т. е. имеет место неравенство $\left(16x^{200}+1\right) \cdot \left(y^{200}+1\right) \geq 16 \cdot (xy)^{100}$.

Отсюда и из уравнения (3.45) следует, что приведенные выше неравенства Коши обращаются в равенства. А это возможно лишь в том случае, когда $16x^{200} = 1$ и $y^{200} = 1$. Следовательно, имеем $x = \pm\frac{1}{\sqrt[50]{2}}$ и $y = \pm 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{1}{\sqrt[50]{2}}$, $y_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt[50]{2}}$, $y_2 = -1$; $x_3 = -\frac{1}{\sqrt[50]{2}}$, $y_3 = 1$ и $x_4 = -\frac{1}{\sqrt[50]{2}}$, $y_4 = -1$.

$\boxed{3.28.}$ Решить уравнение

$$\sqrt[3]{25x\cdot\left(2x^2+9\right)}=4x+\frac{3}{x}. \tag{3.46}$$

Решение. Перепишем уравнение (3.46) в виде

$$\sqrt[3]{25x^4\cdot\left(2x^2+9\right)}=4x^2+3. \tag{3.47}$$

Применим к левой части уравнения (3.47) неравенство Коши (3.1) при $n=3$. Тогда

$$\sqrt[3]{25x^4\cdot\left(2x^2+9\right)}\le\frac{5x^2+5x^2+\left(2x^2+9\right)}{3}=4x^2+3.$$

Если полученное неравенство сравнить с уравнением (3.47), то видно, что примененное выше неравенство Коши превратилось в равенство. А это возможно, когда $5x^2=2x^2+9$, т. е. $x=\pm\sqrt{3}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что найденные значения $x_1=\sqrt{3}$ и $x_2=-\sqrt{3}$ являются корнями уравнения (3.46).

♦ ***Ответ:*** $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$.

$\boxed{3.29.}$ Решить уравнение

$$\left(\frac{x+4}{2}\right)^6+\left(\frac{x^2+9}{3}\right)^3=4x^3. \tag{3.48}$$

Решение. Из уравнения (3.48) следует, что $x>0$. Если обе части уравнения (3.48) разделить на x^3, то

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6+\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^3=4. \tag{3.49}$$

Так как $x>0$, то согласно неравенству Коши (3.3) имеем $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\ge 2$ и $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\ge 2$. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6+\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^3\ge 2^6+2^3=72.$$

Следовательно, уравнение (3.49), а вместе с ним и уравнение (3.48), корней не имеют.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

3.30. Решить уравнение

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}. \tag{3.50}$$

Решение. Применим неравенство Коши—Буняковского (3.8) к левой уравнения (3.50). Тогда

$$\left(x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)^2 \le \left(x^2+1^2\right)\cdot(x+1+3-x)=4\left(x^2+1\right).$$

Отсюда следует неравенство $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\le 2\sqrt{x^2+1}$. Если полученное неравенство сравнить с уравнением (3.50), то видно, что примененное выше неравенство Коши—Буняковского превращается в равенство. А это возможно только в том случае, когда выполняется равенство $\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}$. Отсюда следует, что $0<x<3$. Далее, после возведения в квадрат обеих частей уравнения $x\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1}$ получаем

$$x^3-3x^2+x+1=0. \tag{3.51}$$

Первый корень уравнения (3.51) легко находится подбором и этот корень равен $x_1=1$. Так как $x^3-3x^2+x+1=(x-1)\left(x^2-2x-1\right)$, то остальными корнями уравнения (3.51) являются $x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$.

Однако $0<x<3$. Поэтому уравнение (3.50) будет иметь только два корня, а именно, $x_1=1$ и $x_2=1+\sqrt{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{2}$.

3.31. Решить уравнение

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}=4. \tag{3.52}$$

Решение. Воспользуемся неравенством Бернулли (3.7), тогда левую часть уравнения (3.52) можно переписать в виде

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}+\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}}+\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{4}}\le$$

$$\le 1-\frac{x}{2}+1+\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{4}+1+\frac{x^2}{4}=4.$$

Если полученное неравенство сравнить с (3.52), то видно, что неравенство Бернулли обратилось в равенство, а это в данном примере возможно лишь только в том случае, когда $x=0$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x_1=0$ — корень уравнения (3.52).

♦ ***Ответ:*** $x_1=0$.

3.32. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}=\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6. \qquad (3.53)$$

Решение. Применим к левой части уравнения (3.53) неравенство Бернулли (3.7), а к правой части — неравенство (3.6), тогда

$$\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}=\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{6}}\le 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2$$

$$\text{и}\ \left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6\ge 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2.$$

Отсюда следует, что неравенства Бернулли, примененные к обеим частям уравнения (3.53), обращаются в равенство, а это возможно лишь в том случае, когда $x_1=0$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=0$.

3.33. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}}=2. \qquad (3.54)$$

Решение. Применим к слагаемым левой части уравнения (3.54) неравенство Бернулли (3.7) и получим

$$\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}}=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{4}}+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{4}}\le$$

$$\le 1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}+1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}=2.$$

Если полученное неравенство сравнить с уравнением (3.54), то видно, что примененное выше неравенство Бернулли (3.7) обращается в равенство, следовательно, имеем $\sqrt{1-x^2}=0$ или $x=\pm 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $x_2=-1$.

3.34. Решить уравнение

$$2\sin 3x\cdot\cos x+3\sin 5x\cdot\cos 3x=4+\cos^2 x. \qquad (3.55)$$

Решение. Обозначим $f(x)=2\sin 3x\cos x+3\sin 5x\cos 3x$ и $g(x)=$ $=4+\cos^2 x$. Применяя неравенство Коши—Буняковского (3.8), получаем $f^2(x)\le\left(\sin^2 3x+\cos^2 3x\right)\cdot\left(4\cos^2 x+9\sin^2 5x\right)\le 13$. Отсюда следует, что $-\sqrt{13}\le f(x)\le\sqrt{13}$. С другой стороны, имеет место $g(x)\ge 4>\sqrt{13}$. Так как $f(x)<g(x)$ для любых x, то уравнение (3.55) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

3.35. Решить уравнение

$$\left(\sin^8 x+\cos^2 2x\right)\cdot\left(\frac{1}{\sin^8 x}+\frac{1}{\cos^2 2x}\right)=4\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}. \qquad (3.56)$$

Решение. Оценим снизу левую часть уравнения (3.56), используя для этого неравенство Коши (3.2). Тогда получаем

$$\left(\sin^8 x+\cos^2 2x\right)\left(\frac{1}{\sin^8 x}+\frac{1}{\cos^2 2x}\right)\ge$$

$$\ge 2\sqrt{\sin^8 x\cdot\cos^2 2x}\cdot\frac{2}{\sqrt{\sin^8 x\cdot\cos^2 2x}}=4.$$

Таким образом, показано, что левая часть уравнения (3.56) больше или равна 4. Так как при этом правая его часть не превосходит 4, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\sin^8 x + \cos^2 2x\right)\left(\dfrac{1}{\sin^8 x} + \dfrac{1}{\cos^2 2x}\right) = 4, \\ 4\cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - x^2} = 4. \end{cases} \tag{3.57}$$

Первое уравнение системы (3.57) свидетельствует о том, что примененное выше неравенство Коши превращается в равенство. В этой связи систему (3.57) можно переписать как

$$\begin{cases} \sin^8 x = \cos^2 2x, \\ 4\cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - x^2} = 4. \end{cases} \tag{3.58}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (3.58), из которого следует $\cos\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - x^2} = \pm 1$ или

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} = \pi k, \tag{3.59}$$

где $k \in \{\, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения (3.59), тогда получим $\dfrac{\pi^2}{4} - x^2 = \pi^2 k^2$ или $x^2 = \pi^2\left(\dfrac{1}{4} - k^2\right)$. Так как левая часть равенства может принимать только неотрицательные значения, то из всех $k \in \{\, 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ здесь допустимо лишь значение $k = 0$, т. е. $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Непосредственной подстановкой в первое уравнение системы (3.57) убеждаемся в том, что $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ — корни системы уравнений (3.57) и исходного уравнения (3.56).

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -\dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

3.36. Решить уравнение

$$\cos^4 x + 16\sin^4 y = 8\cos x \cdot \sin y - 2. \tag{3.60}$$

Решение. Применим неравенство Коши (3.2) к левой части уравнения (3.60). Тогда

$$\cos^4 x + 16\sin^4 y \ge 2\sqrt{16\cos^4 x \cdot \sin^4 y} = 8\cos^2 x \cdot \sin^2 y .$$

Отсюда, принимая во внимание уравнение (3.60), получаем неравенство $8\cos x \cdot \sin y - 2 \ge 8\cos^2 x \cdot \sin^2 y$, из которого следует неравенство $(2\cos x \cdot \sin y - 1)^2 \le 0$. Полученное неравенство справедливо лишь тогда, когда

$$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}. \qquad (3.61)$$

Преобразуем уравнение (3.60) с учетом равенства (3.61) следующим образом:

$$\left(\cos^2 x + 4\sin^2 y\right)^2 - 8\cos^2 x \cdot \sin^2 y = 8\cos x \cdot \sin y - 2 ,$$

$$\left(\cos^2 x + 4\sin^2 y\right)^2 - 8 \cdot \frac{1}{4} = 8 \cdot \frac{1}{2} - 2 ,$$

$$\left(\cos^2 x + 4\sin^2 y\right)^2 = 4 , \ \cos^2 x + 4\sin^2 y = 2 ,$$

$$(\cos x + 2\sin y)^2 - 4\cos x \cdot \sin y = 2 ,$$

$$(\cos x + 2\sin y)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 , \ \cos x + 2\sin y = \pm 2 .$$

Рассмотрим две системы уравнений

$$\begin{cases} \cos x + 2\sin y = 2, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \cos x + 2\sin y = -2, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Из первой системы получаем

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = 2\pi n , \\ y_1 = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases}$$

а из второй системы следует

$$\begin{cases} \cos x = -1, \\ \sin y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = \pi(2n+1) , \\ y_2 = (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases}$$

где n, k — целые числа.

♦ *Ответ:* $\begin{cases} x_1 = 2\pi n, \\ y_1 = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \pi(2n+1), \\ y_2 = (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi k. \end{cases}$

3.37. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 y + 2 = 4 \sin x \cdot \cos y. \qquad (3.62)$$

Решение. Согласно неравенству Коши (3.2), имеет место $\sin^4 x + \cos^4 y \geq 2\sin^2 x \cdot \cos^2 y$. В таком случае из (3.62) получаем неравенство $4 \sin x \cdot \cos y \geq 2 + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 y$. Отсюда следует, что $\sin^2 x \cdot \cos^2 y - 2\sin x \cdot \cos y + 1 \leq 0$, $(\sin x \cdot \cos y - 1)^2 \leq 0$ или $\sin x \cdot \cos y = 1$. Таким образом, из уравнения (3.62) вытекает система уравнений

$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 y = 2, \\ \sin x \cdot \cos y = 1. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений следует, что $\sin^4 x + \dfrac{1}{\sin^4 x} = 2$. Если принять во внимание неравенство Коши (3.3), то $\sin^4 x = 1$ или $\sin x = \pm 1$.

Так как $\sin x = \pm 1$ и $\sin x \cdot \cos y = 1$, то имеем две системы уравнений

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos y = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos y = -1. \end{cases}$$

Корнями приведенных выше систем уравнений являются

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2}(4n+1), \\ y_1 = 2\pi k \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{2}(4r-1), \\ y_2 = \pi(2l+1), \end{cases}$$

где n, k, r, l — целые числа.

♦ *Ответ:* см. выше.

3.38. Решить уравнение

$$\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\,\mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y). \qquad (3.63)$$

Решение. Для оценки снизу левой части уравнения (3.63) воспользуемся (дважды) неравенством Коши (3.2), тогда

$$\mathrm{tg}^4 x+\mathrm{tg}^4 y+2\mathrm{ctg}^2 x\cdot \mathrm{ctg}^2 y\ge 2\sqrt{\mathrm{tg}^4 x\cdot \mathrm{tg}^4 y}+2\mathrm{ctg}^2 x\cdot \mathrm{ctg}^2 y=$$

$$=2\,\mathrm{tg}^2 x\cdot \mathrm{tg}^2 y+2\mathrm{ctg}^2 x\cdot \mathrm{ctg}^2 y\ge 4\sqrt{\mathrm{tg}^2 x\cdot \mathrm{tg}^2 y\cdot \mathrm{ctg}^2 x\cdot \mathrm{ctg}^2 y}=4.$$

Поскольку $3+\sin^2(x+y)\ngtr 4$, то равенство в уравнении (3.63) может быть только в том случае, когда обе его части равны 4. А это возможно лишь при выполнении следующих условий

$$\begin{cases}\mathrm{tg}^4 x=\mathrm{tg}^4 y,\\ \mathrm{tg}^2 x\cdot \mathrm{tg}^2 y=\mathrm{ctg}^2 x\cdot \mathrm{ctg}^2 y,\\ \sin^2(x+y)=1.\end{cases} \qquad (3.64)$$

Система уравнений (3.64) равносильна системе

$$\begin{cases}\mathrm{tg}x=\pm\,\mathrm{tg}y,\\ \mathrm{tg}x\cdot \mathrm{tg}y=\pm 1,\\ \sin(x+y)=\pm 1\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n,\\ y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}m,\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}+\pi l,\end{cases}$$

где n, m, l — целые числа.

Из последней системы уравнений имеем $x+y=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}(n+m)$ и $x+y=\dfrac{\pi}{2}+\pi l$. Отсюда следует, что $n+m$ — четное целое число, т. е. $n+m=2k$. Тогда корнями уравнения (3.63) являются

$$x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n=\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

$$y_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2k-n)=\frac{\pi}{4}(4k-2n+1),$$

где n, k — целые числа.

♦ ***Ответ:*** см. выше.

3.39. Решить уравнение

$$\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x. \qquad (3.65)$$

Решение. Преобразуем уравнение (3.65) следующим образом:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 2x - \sin 3x = 3\,,$$

$$2\sin\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{5}{2}x\cdot\sin\left(-\frac{x}{2}\right) = 3\,,$$

$$\sin\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{2} \qquad (3.66)$$

Оценим левую часть уравнения (3.66), используя для этого неравенство Коши—Буняковского (3.8). Имеет место

$$\left(\sin\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2}\right)^2 \le$$

$$\le\left(\sin^2\frac{3}{2}x + \cos^2\frac{5}{2}x\right)\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) \le 2\cdot 1 = 2.$$

Отсюда следует, что $\sin\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2} \le \sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, то уравнение (3.66), а вместе с ним и уравнение (3.65), корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

3.40. Решить уравнение

$$\frac{x^2+1}{2x} = \sin(xy). \qquad (3.67)$$

Решение. Неравенство Коши, представленное посредством формул (3.3) и (3.4), можно записать как $\left|a + \frac{1}{a}\right| \ge 2$, где $a \ne 0$.

Поскольку $\frac{x^2+1}{2x} = \frac{1}{2}\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right)$, то $\left|\frac{x^2+1}{2x}\right| \ge 1$. Вместе с тем известно, что $\left|\sin(xy)\right| \le 1$. В этой связи из уравнения (3.67) получаем две системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{2x} = -1, \\ \sin(xy) = -1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{2x} = 1, \\ \sin(xy) = 1. \end{cases}$$

Корнями приведенных выше систем уравнений являются $x_1 = -1$, $y_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x_2 = 1$, $y_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** см. выше.

3.41. Доказать, что если $0^\circ < x < 90^\circ$, то

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) > 5. \quad (3.68)$$

Доказательство. Так как $0^\circ < x < 90^\circ$, то $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$. Применим (дважды) неравенство Коши (3.2) к левой части неравенства (3.68). Тогда $\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \ge \frac{4}{\sqrt{\sin x \cdot \cos x}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}}$. Поскольку $\sin 2x \le 1$ и $4\sqrt{2} > 5$, то $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} > 5$ и неравенство (3.68) доказано.

3.42. Доказать неравенство

$$\sqrt{5x+7} + \sqrt{13-5x} < \frac{13}{2}, \quad (3.69)$$

где $-\frac{7}{5} \le x \le \frac{13}{5}$.

Доказательство. Так как $5x+7 \ge 0$ и $13-5x \ge 0$, то условие $-\frac{7}{5} \le x \le \frac{13}{5}$ является областью допустимых значений переменной x в неравенстве (3.69). Для оценки сверху левой части неравенства (3.69) воспользуемся неравенством Коши—Буняковского (3.8).

В таком случае имеет место

$$\left(\sqrt{5x+7} + \sqrt{13-5x}\right)^2 = \left(1 \cdot \sqrt{5x+7} + 1 \cdot \sqrt{13-5x}\right)^2 \le$$

$$\le \left(1^2 + 1^2\right) \cdot (5x + 7 + 13 - 5x) = 40 < 42{,}25 = \left(\frac{13}{2}\right)^2.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (3.69).

3.43 Доказать неравенство

$$\left(\frac{1}{2}+\sin^2 x\right)^n+\left(\frac{1}{2}+\cos^2 x\right)^n \geq 2 \tag{3.70}$$

для любого x.

Доказательство. Воспользуемся неравенством (3.9), из которого следует, что $\left(a^n+b^n\right) \geq 2^{1-n}\cdot(a+b)^n$. Тогда

$$\left(\frac{1}{2}+\sin^2 x\right)^n+\left(\frac{1}{2}+\cos^2 x\right)^n \geq 2^{1-n}\cdot\left(\frac{1}{2}+\sin^2 x+\frac{1}{2}+\cos^2 x\right)^n=2,$$

т. е. неравенство (3.70) доказано.

3.44 Доказать неравенство

$$\sin^2 x\cdot\cos^6 x \leq \frac{27}{256}. \tag{3.71}$$

Доказательство. Нетрудно показать, что неравенство (3.71) равносильно неравенству $\sqrt[4]{3\sin^2 x\cdot\cos^6 x} \leq \frac{3}{4}$, доказательство которого будем вести с использованием неравенства Коши (3.1) при $n=4$.

Имеет место

$$\sqrt[4]{3\sin^2 x\cdot\cos^6 x}=\sqrt[4]{3\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos^2 x} \leq$$

$$\leq \frac{3\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x}{4}=\frac{3}{4}.$$

3.45 Доказать, что

$$-\frac{3}{2} \leq \sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos z+\sin z\cdot\cos x \leq \frac{3}{2}. \tag{3.72}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши—Буняковского (3.8), тогда

$$(\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos z+\sin z\cdot\cos x)^2 \leq$$

$$\leq\left(\sin^2 x+\sin^2 y+\cos^2 x\right)\cdot\left(\cos^2 y+\cos^2 z+\sin^2 z\right)=$$

$$=\left(1+\sin^2 y\right)\cdot\left(1+\cos^2 y\right)=2+\sin^2 y\cdot\cos^2 y=2+\frac{\sin^2 2y}{4} \leq \frac{9}{4}.$$

Отсюда следует справедливость двойного неравенства (3.72).

3.46. Доказать неравенство

$$\left(\sin^2 x\right)^{\cos^2 x}+\left(\cos^2 x\right)^{\sin^2 x}\le 1+\frac{1}{2}\sin^2 2x. \qquad (3.73)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, если $x=\frac{\pi}{2}k$ (где k — целое число), то обе части неравенства (3.73) равны 1, т. е. в таком случае неравенство (3.73) справедливо.

Пусть теперь $x\ne\frac{\pi}{2}k$, тогда $0<\sin^2 x<1$ и $0<\cos^2 x<1$. Тогда левую часть неравенства (3.73) можно оценить сверху, используя для этого неравенство Бернулли (3.7). Имеет место

$$\left(\sin^2 x\right)^{\cos^2 x}+\left(\cos^2 x\right)^{\sin^2 x}=\left(1-\cos^2 x\right)^{\cos^2 x}+\left(1-\sin^2 x\right)^{\sin^2 x}\le$$

$$\le 1-\cos^4 x+1-\sin^4 x=$$

$$=\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\left(1+\cos^2 x\right)+\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\left(1+\sin^2 x\right)=$$

$$=\sin^2 x\left(1+\cos^2 x\right)+\cos^2 x\left(1+\sin^2 x\right)=$$

$$=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin^2 x\cos^2 x=1+\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Таким образом, неравенство (3.73) доказано.

3.47. Решить неравенство

$$\sqrt{8-x^2}-\sqrt{25-x^2}\ge x. \qquad (3.74)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве (3.74) являются $-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$.

Неравенство (3.74) равносильно неравенству

$$\sqrt{8-x^2}-x\ge\sqrt{25-x^2}. \qquad (3.75)$$

Оценим левую часть неравенства (3.75) с помощью неравенства Коши—Буняковского (3.8). Имеет место

$$\left(\sqrt{8-x^2}-x\right)^2\le\left(1^2+(-1)^2\right)\left(8-x^2+x^2\right)=16.$$

Отсюда следует, что левая часть неравенства (3.75) меньше или равна 4. Однако, если $-2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2}$, то $\sqrt{25-x^2} \ge \sqrt{25-8} = \sqrt{17} > 4$, т. е. правая часть неравенства (3.75) будет строго больше 4.

Отсюда следует, что неравенство (3.74) противоречиво.

♦ ***Ответ:*** решений нет.

3.48. Решить неравенство

$$\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3. \qquad (3.76)$$

Решение. Для определения области допустимых значений переменной x в неравенстве (3.76) рассмотрим систему неравенств $25-x^2 \ge 0$ и $x^2+7x \ge 0$, откуда следует, что $0 \le x \le 5$.

Для решения неравенства (3.76) воспользуемся очевидным неравенством (которое можно легко доказать самостоятельно методом от противного) вида

$$(a+b)^2 \ge a^2+b^2, \qquad (3.77)$$

где $a \cdot b \ge 0$. Причем неравенство (3.77) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a \cdot b = 0$.

Имеет место

$$\left(\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x}\right)^2 \ge \left(25-x^2\right) + \left(x^2+7x\right) = 25+7x.$$

Так как $0 \le x \le 5$, то $\left(\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x}\right)^2 \ge 25$, т. е. на области допустимых значений переменной x выполняется более сильное неравенство, а именно, $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} \ge 5$.

Приведенное выше неравенство означает, что неравенство (3.76) справедливо для любых x из области ее допустимых значений.

♦ ***Ответ:*** $0 \le x \le 5$.

3.49. Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2+2x} + \sqrt{14x^2+23x+8} \le \sqrt{17x^2+25x+8}. \qquad (3.78)$$

Решение. Первоначально заметим, что

$$\left(3x^2+2x\right)+\left(14x^2+23x+8\right)=17x^2+25x+8.$$

Отсюда следует, что для определения области допустимых значений переменной x в неравенстве (3.78) необходимо рассмотреть систему неравенств $\begin{cases} 3x^2+2x\ge 0, \\ 14x^2+23x+8\ge 0, \end{cases}$ из которой следует, что искомой областью являются $x\le -\frac{8}{7}$ или $x\ge 0$.

Применим к левой части неравенства (3.78) неравенство (3.77), тогда

$$\left(\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{14x^2+23x+8}\right)^2\ge 17x^2+25x+8$$

или

$$\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{14x^2+23x+8}\ge\sqrt{17x^2+25x+8}.$$

Если полученное неравенство сравнить с неравенством (3.78), то видно, что примененное неравенство (3.77) превратилось в равенство, а это означает, что $\left(3x^2+2x\right)\cdot\left(14x^2+23x+8\right)=0$.

Решая уравнения $3x^2+2x=0$ и $14x^2+23x+8=0$, получаем $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=0$, $x_3=-\frac{8}{7}$ и $x_4=-\frac{1}{2}$.

Так как областью допустимых значений переменной x в неравенстве (3.78) являются $x\le -\frac{8}{7}$ или $x\ge 0$, то неравенство (3.78) имеет только два корня $x_2=0$ и $x_3=-\frac{8}{7}$.

♦ ***Ответ:*** $x_2=0$, $x_3=-\frac{8}{7}$.

$\boxed{3.50}$ Доказать, что если $xy<z^2$, то

$$\log_z x<\log_y z, \tag{3.79}$$

где $x>0$, $y>0$, $y\ne 1$ и $z>1$.

Доказательство. Рассмотрим функцию от переменных x, y, z вида $f(x,y,z) = \dfrac{\log_z x}{\log_y z} = \log_z x \cdot \log_z y$. Применим к представлению функции $f(x,y,z)$ неравенство Коши (3.2) и получим

$$f(x,y,z) \le \left(\frac{\log_z x + \log_z y}{2}\right)^2 = \frac{\log_z^2 (xy)}{4}. \qquad (3.80)$$

Так как $xy < z^2$ и $z > 1$, то $\log_z(xy) < \log_z z^2 = 2$. Отсюда и из (3.80) следует, что $f(x,y,z) < 1$. Следовательно, неравенство (3.79) доказано.

$\boxed{3.51}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 10, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} + \dfrac{4}{t} = 10, \end{cases} \qquad (3.81)$$

где $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ t > 0$.

Решение. Если сложить левые и правые части обоих уравнений системы (3.81), то получим

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) + 3 \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) = 20. \qquad (3.82)$$

Поскольку $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ t > 0$, то можно воспользоваться неравенством Коши (3.3). Тогда

$$x + \frac{1}{x} \ge 2,\quad y + \frac{1}{y} \ge 2,\quad z + \frac{1}{z} \ge 2,\quad t + \frac{1}{t} \ge 2. \qquad (3.83)$$

Отсюда получаем неравенство

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) + 3 \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) \ge 20.$$

Если полученное неравенство сравнить с уравнением (3.82), то видно, что все неравенства (3.83) превращаются в равенства, а это означает, что $x = y = z = t = 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 1$, $t_1 = 1$.

3.52. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y + \sqrt{1 - 4z^2} = 2. \end{cases} \quad (3.84)$$

Решение. Поскольку $x + y = 2 - \sqrt{1 - 4z^2} \le 2$, то $1 \le x + y \le 2$. Так как по условию $xy = 1$, а $1 \le x + y \le 2$, то можно сделать вывод о том, что $x > 0$ и $y > 0$.

Если затем воспользоваться неравенством Коши (3.2), то получим неравенство $x + y \ge 2\sqrt{xy}$. Однако $xy = 1$, поэтому $x + y \ge 2$.

Ранее было установлено, что $1 \le x + y \le 2$. Следовательно, имеет место уравнение $x + y = 2$.

Если $x + y = 2$ и $xy = 1$, то $x + \frac{1}{x} = 2$. Отсюда получаем $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$ или $x_1 = 1$.

Так как $xy = 1$ и $x_1 = 1$, то $y_1 = 1$. В таком случае из второго уравнения системы (3.84) следует $\sqrt{1 - 4z^2} = 0$ или $z = \pm\frac{1}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ z_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 1,\ y_2 = 1,\ z_2 = -\frac{1}{2}$.

Примечание. Систему уравнений (3.84) можно решить другим способом. Повторяя приведенные выше рассуждения, имеем систему

$$\begin{cases} x + y \le 2, \\ xy = 1, \end{cases} \quad (3.85)$$

где $x > 0$ и $y > 0$.

Если неравенство системы (3.85) возвести в квадрат, а уравнение умножить на -4, то получим

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 \le 4, \\ -4xy = -4. \end{cases} \quad (3.86)$$

Если сложить уравнение и неравенство системы (3.86), то получим неравенство $x^2 - 2xy + y^2 \le 0$ или $(x - y)^2 \le 0$. Отсюда следует $(x - y)^2 = 0$ или $x = y$.

Так как $x + y = 2$ и $x = y$, то $x_1 = 1$ и $y_1 = 1$. В таком случае из уравнения $x + y + \sqrt{1 - 4z^2} = 2$ получаем, что $z_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$

3.53. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy-5z^2=\dfrac{9}{4}. \end{cases} \qquad (3.87)$$

Решение. Поскольку $xy=\frac{9}{4}+5z^2$, то $xy\ge\frac{9}{4}$. Отсюда и из первого уравнения системы (3.87) следует, что $x>0$ и $y>0$.

Согласно неравенству Коши (3.2), имеет место неравенство $x+y\ge2\sqrt{xy}$. Однако $x+y=3$, поэтому $2\sqrt{xy}\le3$ или $xy\le\frac{9}{4}$. Ранее было показано, что $xy\ge\frac{9}{4}$. Следовательно $xy=\frac{9}{4}$. В таком случае из второго уравнения системы (3.87) получаем $z_1=0$.

Для нахождения значений x и y рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=\dfrac{9}{4}, \end{cases} \quad \text{откуда получаем } x_1=y_1=\frac{3}{2}.$$

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{3}{2},\ y_1=\frac{3}{2},\ z_1=0$.

Примечание. Приведем другой способ решения системы уравнений (3.87), основная идея которого была использован при решении системы уравнений (3.85).

Имеет место система

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy\ge\dfrac{9}{4}, \end{cases} \qquad (3.88)$$

где $x>0$ и $y>0$.

Возведем в квадрат уравнение системы (3.88), а неравенство умножим на -4. Тогда получим

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9, \\ -4xy\le-9. \end{cases} \qquad (3.89)$$

Если сложить неравенство и уравнение системы (3.89), то получим неравенство $x^2-2xy+y^2\le 0$ или $(x-y)^2\le 0$. Отсюда следует $(x-y)^2=0$ или $x=y$.

Так как $x+y=3$ и $x=y$, то $x_1=\frac{3}{2}$ и $y_1=\frac{3}{2}$. В таком случае из уравнения $xy-5z^2=\frac{9}{4}$ получаем, что $z_1=0$.

3.54. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+2y+2z\ge 3. \end{cases} \qquad (3.90)$$

Решение. Используя неравенство Коши—Буняковского (3.8), получаем $(x+2y+2z)^2\le\left(1^2+2^2+2^2\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)=9$. Отсюда следует, что $x+2y+2z\le 3$.

С учетом неравенства из системы (3.90) получаем равенство $x+2y+2z=3$. Другими словами, примененное выше неравенство (3.8) обратилось в равенство, а это означает, что существует константа a такая, что $x=a$, $y=2a$ и $z=2a$. Отсюда и из равенства $x+2y+2z=3$ получаем уравнение относительно переменной a вида $a+2(2a)+2(2a)=$ $=9a=3$, т. е. $a=\frac{1}{3}$. Следовательно, получаем $x_1=\frac{1}{3}$ и $y_1=z_1=\frac{2}{3}$.

Непосредственной подстановкой в уравнение системы (3.90) убеждаемся, что найденные значения x,y,z являются ее корнями.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{1}{3}$, $y_1=\frac{2}{3}$, $z_1=\frac{2}{3}$.

3.55. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+y^2}=z, \\[2ex] \dfrac{2y^2}{1+z^2}=x, \\[2ex] \dfrac{2z^2}{1+x^2}=y. \end{cases} \qquad (3.91)$$

Решение. Поскольку левая часть каждого из уравнений системы (3.91) не может быть отрицательной, то $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

Нетрудно заметить, что $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$ являются корнями системы уравнений (3.91).

Положим, что $xyz \ne 0$. Если перемножить уравнения системы, то

$$\frac{8x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}{\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)\cdot\left(1+z^2\right)} = xyz. \tag{3.92}$$

Так как $xyz \ne 0$, то обе части уравнения (3.92) можно разделить на xyz. Тогда получим уравнение

$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right) = 8xyz. \tag{3.93}$$

Используя неравенство Коши (3.2) получаем цепочку неравенств $1+x^2 \ge 2x$, $1+y^2 \ge 2y$, $1+z^2 \ge 2z$ и $\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)\cdot\left(1+z^2\right) \ge 8xyz$. Если полученное неравенство сравнить с уравнением (3.93), то видно, что все примененные выше неравенства Коши превращаются в равенства, а это означает, что $x_2 = 1, y_2 = 1, z_2 = 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$; $x_2 = 1, y_2 = 1, z_2 = 1$.

3.56. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}(y-1) + \sqrt{y}(x-1) = \sqrt{2xy}, \\ x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy. \end{cases} \tag{3.94}$$

Решение. Из второго уравнения системы следует, что $x \ge 1$ и $y \ge 1$.

Воспользуемся неравенством Коши (3.2). Имеет место $\sqrt{y-1} = \sqrt{1(y-1)} \le \frac{1+y-1}{2} = \frac{y}{2}$ и $x\sqrt{y-1} \le \frac{xy}{2}$. Аналогично получаем $y\sqrt{x-1} \le \frac{xy}{2}$ и тогда $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \le xy$. Если полученное неравенство сравнить со вторым уравнением системы (3.94), то можно сделать вывод о том, что примененные выше неравенства Коши превратились в равенства, а это возможно только тогда, когда $1 = y-1$ и $1 = x-1$, т. е. $x_1 = 2$ и $y_1 = 2$.

Подставляя полученные значения x и y в первое уравнение системы (3.94) убеждаемся, что $x_1 = 2$ и $y_1 = 2$ являются корнями системы уравнений (3.94).

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 2$, $y_1 = 2$.

3.57. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3\cdot 4^{2y-1} \le 2, \\ x + 3y \ge 2 - \log_4 3. \end{cases} \qquad (3.95)$$

Решение. Оценим левую часть первого неравенства системы (3.95), используя для этого неравенство Коши (3.2) и второе неравенство системы. Имеет место

$$4^{x+y-1} + 3\cdot 4^{2y-1} \ge 2\sqrt{4^{x+y-1}\cdot 3\cdot 4^{2y-1}} = 2\sqrt{3\cdot 4^{x+3y-2}} \ge$$

$$\ge 2\sqrt{3\cdot 4^{(2-\log_4 3)-2}} = 2.$$

Из полученного неравенства следует, что оба неравенства системы (3.95) обращаются в равенства. Кроме того, обращается в равенство и примененное выше неравенство Коши. Следовательно, имеет место система уравнений

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} = 3\cdot 4^{2y-1}, \\ x + 3y = 2 - \log_4 3. \end{cases} \qquad (3.96)$$

Если прологарифмировать по основанию 4 первое уравнение системы (3.96), то $x + y - 1 = \log_4 3 + 2y - 1$ или $y = x - \log_4 3$. В таком случае из второго уравнения системы (3.96) следует

$$x + 3(x - \log_4 3) = 2 - \log_4 3,$$

$$4x = 2 + 2\log_4 3 \text{ или } x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\log_4 3 = \log_4\left(2\sqrt{3}\right).$$

Так как

$$y = x - \log_4 3, \text{ то } y_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\log_4 3 = \log_4\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \log_4\left(2\sqrt{3}\right)$, $y_1 = \log_4\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

3.58. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2}, \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} = 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2}. \end{cases} \tag{3.97}$$

Решение. Поскольку $xy - x^2y^2 \ge 0$, то $0 \le xy \le 1$. Воспользуемся неравенством Коши (3.2), тогда

$$\sqrt{xy - x^2y^2} = \sqrt{xy \cdot (1 - xy)} \le \frac{xy + (1 - xy)}{2} = \frac{1}{2}$$

и из первого уравнения системы (3.97) получаем неравенство

$$y^6 + y^3 + 2x^2 \le \frac{1}{2}. \tag{3.98}$$

Так как $\sqrt{1 + (2x - y)^2} \ge 1$, то из второго уравнения системы (3.97) следует $4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \ge 2x^2 + 1$ или

$$2x^2 - 4xy^3 - y^3 \le -\frac{1}{2}. \tag{3.99}$$

Если сложить неравенства (3.98) и (3.99), то получим в левой части полный квадрат $y^6 - 4xy^3 + 4x^2 \le 0$, т. е. $\left(y^3 - 2x\right)^2 \le 0$.

Однако $\left(y^3 - 2x\right)^2 \ge 0$, поэтому $y^3 - 2x = 0$ и $y^3 = 2x$. В таком случае неравенства (3.98) и (3.99) можно переписать в виде $6x^2 + 2x \le \frac{1}{2}$ и $-6x^2 - 2x \le -\frac{1}{2}$, откуда получаем $6x^2 + 2x = \frac{1}{2}$ или $12x^2 + 4x - 1 = 0$. Корнями квадратного уравнения являются $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{1}{6}$. Так как $y^3 = 2x$, то $y_1 = -1$ и $y_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что система уравнений (3.97) имеет единственные корни $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $y_1 = -1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -\frac{1}{2}$, $y_1 = -1$.

Примечание. При решении системы уравнений (3.97) неравенство (3.99) обратилось в равенство, т. е.

$$2x^2 - 4xy^3 - y^3 = -\frac{1}{2} \text{ или } 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} = 2x^2 + 1.$$

В таком случае из второго уравнения системы (3.97) следует, что $\sqrt{1+(2x-y)^2} = 1$ или $y = 2x$. Поскольку значения $x_2 = \frac{1}{6}$ и $y_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ не удовлетворяют условию $y = 2x$, то пара x_2, y_2 не является корнями системы уравнений (3.97).

Другими словами, система уравнений (3.97) равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} 12x^2 + 4x - 1 = 0, \\ y^3 = 2x, \\ y = 2x, \end{cases}$$

которая имеет единственные корни $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $y_1 = -1$.

3.59. Доказать, что

$$S \le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}, \tag{3.100}$$

где a, b, c – стороны треугольника, а S — его площадь.

Доказательство. Известно, что $S = \frac{ab \cdot \sin\varphi}{2}$, где φ — угол между сторонами a и b. Поскольку $\sin\varphi \le 1$, то $S \le \frac{ab}{2}$.

Из неравенства Коши (3.2), следует, что $ab \le \frac{a^2 + b^2}{2}$. В таком случае

$$S \le \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

По аналогии получаем еще два неравенства

$$S \le \frac{a^2 + c^2}{4} \text{ и } S \le \frac{b^2 + c^2}{4}.$$

Следовательно,

$$3S \le \frac{a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (3.100).

3.60. Доказать, что для площади S треугольника со сторонами a, b, c справедливо неравенство

$$S \le \frac{(a+b+c)^2}{16}. \qquad (3.101)$$

Доказательство. Согласно формуле Герона площадь S треугольника со сторонами a, b, c вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (3.102)$$

где p — полупериметр треугольника.

Используя неравенство Коши (3.1) при $n=4$ и формулу (3.102), получаем

$$\sqrt{S} = \sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)} \le \frac{p+p-a+p-b+p-c}{4} = \frac{a+b+c}{4}.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (3.101).

3.61. Доказать, что для площади S треугольника со сторонами a, b, c справедливо неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}\cdot S. \qquad (3.103)$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой косинусов, согласно которой $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\omega$, где ω — угол между сторонами a, b, неравенством Коши (3.2) $a^2+b^2 \ge 2ab$ и формулой для вычисления площади треугольника $S = \dfrac{ab\sin\omega}{2}$. Тогда

$$a^2+b^2+c^2 = a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\cos\omega =$$

$$= 2\left(a^2+b^2-ab\cos\omega\right) \ge 2(2ab-ab\cos\omega) =$$

$$= 2ab\cdot(2-\cos\omega) = \frac{4S}{\sin\omega}\cdot(2-\cos\omega).$$

Отсюда следует, что для доказательства неравенства (3.103) надо показать, что

$$\frac{2-\cos\omega}{\sin\omega} \geq \sqrt{3}. \tag{3.104}$$

Поскольку $\sin\left(\omega+\frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, то $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega+\frac{1}{2}\cos\omega \leq 1$ или $\sqrt{3}\sin\omega+$ $+\cos\omega \leq 2$, т. е. неравенство (3.104) справедливо.

Отсюда следует, что неравенство (3.103) доказано.

3.62. Доказать неравенство

$$a+b+c \geq 6\sqrt{3}\cdot r, \tag{3.105}$$

где a, b, c — стороны треугольника, а r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

Доказательство. Из формулы Герона (3.102) следует, что

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \tag{3.106}$$

где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Согласно неравенству Коши (3.1), где $n=3$, имеет место

$$3\cdot\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq p-a+p-b+p-c=p$$

или $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27}$.

Отсюда и из формулы (3.106) получаем $S^2 \leq \frac{p^4}{27}$. Так как $S=pr$, где r — радиус окружности, вписанной в рассматриваемый треугольник, то $p^2\cdot r^2 \leq \frac{p^4}{27}$ или $p \geq 3\sqrt{3}\cdot r$. Так как $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, то неравенство (3.105) доказано.

Примечание. Из доказанного выше неравенства $S^2 \leq \frac{p^4}{27}$ следует, что $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Доказательство данного неравенства представляет собой самостоятельную задачу.

3.63 Доказать, что для прямоугольного треугольника

$$h \le \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot r, \qquad (3.107)$$

где h — высота, проведенная к гипотенузе, и r — радиус вписанной окружности.

Доказательство. Пусть a, b, c — катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника, соответственно.

Применяя неравенство Коши—Буняковского (3.8), можно записать

$$(a+b)^2 = (1\cdot a + 1\cdot b)^2 \le \left(1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2\right) = 2c^2 \text{ или } a+b \le \sqrt{2}\cdot c.$$

Известно, что $S = \dfrac{c\cdot h}{2}$ и $S = \dfrac{a+b+c}{2}\cdot r$. Отсюда и из неравенства $a+b \le \sqrt{2}\cdot c$ следует, что

$$h = \frac{2S}{c} = \frac{a+b+c}{c}\cdot r \le \frac{\sqrt{2}\cdot c + c}{c}\cdot r = \left(\sqrt{2}+1\right)\cdot r.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (3.107).

Примечание. Равенство $h = \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot r$ имеет место только в том случае, когда прямоугольный треугольник является равнобедренным.

3.64 Доказать, что для площади S произвольного треугольника со сторонами a, b, c справедливо неравенство

$$S^2 \ge \frac{27}{2}\cdot r^3 R, \qquad (3.108)$$

где r — радиус вписанной в треугольник окружности, а R — радиус окружности, описанной вокруг треугольника.

Доказательство. Известно, что $S = \dfrac{r\cdot(a+b+c)}{2}$. Отсюда и из неравенства Коши $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ следует неравенство $S \ge \dfrac{3r\cdot\sqrt[3]{abc}}{2}$ или

$$S^3 \ge \frac{27r^3\cdot abc}{8}. \qquad (3.109)$$

Поскольку $S = \dfrac{abc}{4R}$, то $abc = 4RS$ и из неравенства (3.109) вытекает требуемое неравенство (3.108).

3.65. Пусть a, b, c — стороны треугольника и p — полупериметр. Доказать, что

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{1}{8} \cdot abc. \qquad (3.110)$$

Доказательство. Используя (трижды) неравенство Коши (3.2), получаем

$$(p-a)\cdot(p-b) \le \left(\frac{p-a+p-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

$$(p-a)\cdot(p-c) \le \left(\frac{p-a+p-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$(p-b)\cdot(p-c) \le \left(\frac{p-b+p-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Путем перемножения приведенных выше неравенств получаем

$$(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 \le \left(\frac{abc}{8}\right)^2.$$

Отсюда следует неравенство (3.110).

3.66. Доказать, что

$$h_a + h_b + h_c \ge 9 \cdot r, \qquad (3.111)$$

где h_a, h_b, h_c — высоты произвольного треугольника, а r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Доказательство. Первоначально докажем вспомогательное соотношение между h_a, h_b, h_c и r вида

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}. \qquad (3.112)$$

Известно, что площадь S треугольника со сторонами a, b, c вычисляется по формулам $S = \frac{1}{2} \cdot ah_a = \frac{1}{2} \cdot bh_b = \frac{1}{2} \cdot ch_c = pr$, где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}.$$

Используя неравенство Коши (3.1) при $n = 3$, можно записать, что

$$h_a+h_b+h_c \ge 3\cdot\sqrt[3]{h_a\,h_b\,h_c} \text{ и } \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{h_a\,h_b\,h_c}}, \text{ тогда}$$

$$\left(h_a+h_b+h_c\right)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\ge 9. \qquad (3.113)$$

Непосредственно из неравенства (3.113) и равенства (3.112) следует

$$h_a+h_b+h_c \ge \frac{9}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}=\frac{9}{\frac{1}{r}}=9r,$$

т. е. неравенство (3.111) доказано.

3.67 Пусть S — площадь четырехугольника, вписанного в окружность, и p ~~—~~ полу периметр четырехугольника. Доказать, что

$$S \le \frac{p^2}{4}. \qquad (3.114)$$

Доказательство. Поскольку искомый четырехугольник вписан в окружность, то его площадь S вычисляется по формуле

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,,$$

где a, b, c, d — стороны четырёхугольника.

Отсюда следует, что

$$\sqrt{S}=\sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,.$$

Если воспользоваться неравенством Коши (3.1) при $n = 4$, то из последнего равенства получим

$$\sqrt{S}\le\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4}=\frac{p}{2}.$$

Отсюда следует требуемое неравенство (3.114).

3.68 Доказать, что для всякого прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c и диагональю d имеет место неравенство

$$a+b+c \le d\sqrt{3}. \qquad (3.115)$$

Доказательство. Применим неравенство Коши—Буняковского (3.8), тогда

$$(a+b+c)^2=(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c)^2\le$$
$$\le\left(1^2+1^2+1^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Поскольку в прямоугольном параллелепипеде $a^2+b^2+c^2=d^2$, то $(a+b+c)^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=3d^2$. Отсюда следует справедливость неравенства (3.115).

Примечание. Равенство в (3.115) достигается тогда и только тогда, когда прямоугольный параллелепипед является кубом.

3.69. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, если его размеры a, b, c удовлетворяют соотношению $3a+4b+10c=500$, а диагональ d равна $20\sqrt{5}$.

Решение. Для прямоугольного параллелепипеда имеет место $a^2+b^2+c^2=d^2$. Поскольку $d=20\sqrt{5}$, то $a^2+b^2+c^2=2000$.

Применим неравенство Коши—Буняковского (3.8), тогда

$$(3a+4b+10c)^2\le(9+16+100)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=125\cdot 2000=250000.$$

Так как по условию задачи $3a+4b+10c=500$, то примененное выше неравенство Коши—Буняковского превратилось в равенство, поэтому выполняется цепочка равенств $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{10}$. Если обозначить $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{10}=k$, то $a=3k$, $b=4k$, $c=10k$. В таком случае из равенства $3a+4b+10c=500$ следует, $9k+16k+100k=500$ или $k=4$. Следовательно, $a=12$, $b=16$, $c=40$ и объем параллелепипеда $V=abc=7680$.

♦ ***Ответ:*** объем параллелепипеда $V=7680$.

3.70. Пусть M — точка, лежащая внутри прямоугольника $ABCD$, и S — его площадь. Доказать, что

$$S\le AM\cdot CM+BM\cdot DM. \qquad (3.116)$$

Доказательство. Через точку M, лежащую внутри прямоугольника $ABCD$, проведем $EG \perp AB$ и $FH \perp BC$. Обозначим $AE = DG = a$, $BE = CG = b$, $AH = BF = c$ и $CF = DH = d$.

В таком случае $S = (a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$, $AM = \sqrt{a^2+c^2}$, $BM = \sqrt{b^2+c^2}$, $CM = \sqrt{b^2+d^2}$, $DM = \sqrt{a^2+d^2}$ и требуемое неравенство (3.116) принимает вид

$$ac + ad + bc + bd \le \sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+d^2} + \sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+d^2}. \quad (3.117)$$

Используя неравенство Коши—Буняковского (3.8), можно записать два неравенства

$$(ac+bd)^2 \le \left(a^2+d^2\right)\cdot\left(b^2+c^2\right) \text{ и } (ad+bc)^2 \le \left(a^2+c^2\right)\cdot\left(b^2+d^2\right).$$

Следовательно, имеет место $ac + bd \le \sqrt{a^2+d^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}$ и $ad + bc \le$ $\le \sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+d^2}$. Суммируя приведенные выше неравенства, получаем неравенство (3.117).

3.71. Найти минимальное значение функции

$$f(x) = \frac{x^6 + 5x^3 + 5}{x^3 + 1}.$$

Решение. Представим функцию $y = f(x)$ в виде

$$f(x) = x^3 + 4 + \frac{1}{x^3+1} = \left(x^3 + 1 + \frac{1}{x^3+1}\right) + 3.$$

Используя неравенство Коши (3.3), получаем неравенство $x^3 + 1 +$ $+\frac{1}{x^3+1} \ge 2$. Поэтому имеет место нижняя оценка функции $y = f(x)$ вида $f(x) \ge 5$. Поскольку $f(0) = 5$, то полученная нижняя оценка достижима, т. е. $f_{\min} = 5$.

♦ ***Ответ:*** $f_{\min} = 5$.

3.72. Найти минимальное значение функции

$$f(x) = \left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^n + \left(\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^n,$$

где n — натуральное число.

Решение. Оценим снизу функцию $y=f(x)$, используя неравенство Коши (3.2), следующим образом:

$$\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^n+\left(\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^n=\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^n+\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^n\geq$$

$$\geq 2\cdot\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)}\right)^n=$$

$$=2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}}\right)^n=$$

$$=2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}}\right)^n=2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{8}{\sin^2 2x}}\right)^n\geq 2\cdot\left(\sqrt{1+8}\right)^n=2\cdot 3^n.$$

Теперь покажем, что $f_{\min}=2\cdot 3^n$. Для этого необходимо найти такое x, при котором функция $y=f(x)$ принимает минимальное значение $2\cdot 3^n$.

Нетрудно видеть, что если $f(x)=2\cdot 3^n$, то примененные выше неравенства Коши обращаются в равенства, и поэтому равенство $f(x)=2\cdot 3^n$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\sin^2 x=\cos^2 x\\ \sin^2 2x=1\end{cases},$$

одним из корней которой является $x_1=\dfrac{\pi}{4}$.

Тогда

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n+\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n=3^n+3^n=2\cdot 3^n.$$

Следовательно, доказано, что $f_{\min}=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cdot 3^n$.

♦ ***Ответ:*** $f_{\min}=2\cdot 3^n$.

РАЗДЕЛ 4

Методы, основанные на использовании монотонности функций

При решении уравнений типа $f(x)=g(x)$ в ряде случаев весьма эффективным является метод, который использует монотонность функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) на отрезке $a \le x \le b$, а функция $y=g(x)$ непрерывна и убывает (возрастает) на этом же отрезке, то уравнение $f(x)=g(x)$ на отрезке $a \le x \le b$ может иметь не более одного корня.

Напомним, что функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной***, если малому изменению (приращению) аргумента x соответствует малое изменение (приращение) функции y. Другими словами, функция $y=f(x)$ является ***непрерывной***, если ее график представляет собой непрерывную линию. Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей*** (или ***убывающей***) на отрезке $a \le x \le b$, если для любых x_1 и x_2, удовлетворяющим неравенствам $a \le x_1 < x_2 \le b$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (соответственно, неравенство $f(x_1)>f(x_2)$). Если функция $y=f(x)$ является непрерывной и возрастающей (или убывающей) на отрезке $a \le x \le b$, то она называется ***монотонной*** на этом отрезке.

В этой связи при решении уравнения $f(x)=g(x)$ необходимо исследовать функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ на монотонность, и если одна из этих функций на отрезке $a \le x \le b$ непрерывно убывает, а другая функция — непрерывно возрастает, то необходимо или попытаться подбором найти единственный корень уравнения, или показать, что такого корня не существует. Если, например, функция $y=f(x)$ непрерывна и возрастает, а функция $y = g(x)$ непрерывна и убывает на отрезке $a \le x \le b$ и при этом $f(a) > g(a)$, то на данном отрезке уравнение $f(x) = g(x)$ корней не имеет.

Особенно такой метод эффективен в том случае, когда обе части уравнения $f(x) = g(x)$ представляют собой весьма «неудобные» для совместного исследования функции.

Кроме того, если функция $y = f(x)$ является возрастающей (или убывающей) на отрезке $a \le x \le b$ и уравнение $f(x) = c$ (где c — некоторая константа) на данном отрезке имеет корень, то этот корень единственный.

Для установления монотонности непрерывных функций $y = f(x)$ можно использовать понятие производной. Функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей) на отрезке $a \le x \le b$, если на данном отрезке $f'(x) > 0$ (соответственно $f'(x) < 0$).

Задачи и решения

4.1. Решить уравнение

$$2\sqrt{x+18} + \sqrt{4x-3} = 15. \qquad (4.1)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (4.1) являются $x \ge \frac{3}{4}$.

Так как на области допустимых значений функция $f(x) = 2\sqrt{x+18} + \sqrt{4x-3}$ является непрерывной и возрастающей, то уравнение (4.1) имеет не более одного корня. Этот единственный корень $x_1 = 7$ находится подбором.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 7$.

4.2. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt[3]{5x+2} = 7. \qquad (4.2)$$

Решение. Из уравнения (4.2) следует, что $x \ge -\frac{1}{3}$. Так как функция $f(x) = \sqrt{3x+1} + \sqrt[3]{5x+2}$ при условии, что $x \ge -\frac{1}{3}$, является непрерывной и возрастающей, то уравнение (4.2) не может иметь более одного корня. Подбором находим, что $x_1 = 5$ — единственный корень уравнения (4.2).

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 5$.

4.3. Решить уравнение

$$3\cdot\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{3x-2}+5\cdot\sqrt[3]{x+3}=0. \quad (4.3)$$

Решение. Так как функция $f(x)=3\cdot\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{3x-2}+5\cdot\sqrt[3]{x+3}$ является непрерывной и возрастающей на всей числовой оси OX, то уравнение (4.3) имеет не более одного корня. Искомым корнем является $x_1=-2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -2$.

4.4. Решить уравнение

$$2\cdot\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{3-x}+4. \quad (4.4)$$

Решение. Область допустимых значений переменной x в уравнении (4.4) составляют $1\le x\le 3$. На данном отрезке функция $f(x)=2\cdot\sqrt[3]{3x+2}+$ $+\sqrt[4]{x-1}$ является непрерывной и возрастающей, а функция $g(x)=$ $=\sqrt{3-x}+4$ — непрерывной и убывающей. В этой связи уравнение (4.4) может иметь только один корень (если он есть). Подбором находим единственный корень уравнения $x_1=2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 2$.

4.5. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+7}-\sqrt{5-4x}=1-\sqrt{x+5}. \quad (4.5)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (4.5) являются $-\frac{7}{3}\le x\le\frac{5}{4}$.

Уравнение (4.5) перепишем в виде

$$\sqrt{3x+7}+\sqrt{x+5}=1+\sqrt{5-4x}. \quad (4.6)$$

Пусть $f(x)=\sqrt{3x+7}+\sqrt{x+5}$ и $g(x)=1+\sqrt{5-4x}$. Нетрудно видеть, что на отрезке $-\frac{7}{3}\le x\le\frac{5}{4}$ функция $y=f(x)$ является непрерывной и возрастающей, а функция $y=g(x)$ — непрерывной и убывающей. Поэтому уравнение (4.6) может иметь только один корень. Искомым корнем является $x_1=-1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-1$.

$\boxed{4.6.}$ Решить уравнение

$$\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[8]{x-2}=2. \tag{4.7}$$

Решение. Первоначально устанавливаем, что областью допустимых значений переменной x в уравнении (4.7) являются $2\le x\le 18$.

Уравнение (4.7) равносильно уравнению

$$\sqrt[4]{18-x}=\sqrt[8]{x-2}+2. \tag{4.8}$$

Рассмотрим функции $f(x)=\sqrt[4]{18-x}$ и $g(x)=\sqrt[8]{x-2}+2$. Нетрудно видеть, что функция $y=f(x)$ является непрерывной и убывающей на отрезке $2\le x\le 18$, а функция $y=g(x)$ — непрерывной и возрастающей. В такой связи уравнение (4.8) может иметь только один корень. Подбором нетрудно определить, что $x_1=2$ является корнем уравнений (4.8) и (4.7).

♦ ***Ответ:*** $x_1=2$.

$\boxed{4.7.}$ Решить уравнение

$$x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4=0. \tag{4.9}$$

Решение. Уравнение (4.9) равносильно уравнению

$$x^5+x^3+4=\sqrt{1-3x}. \tag{4.10}$$

Функция $f(x)=x^5+x^3+4$ является непрерывной и возрастающей на всей числовой оси OX, а функция $g(x)=\sqrt{1-3x}$ определена только для $x\le\frac{1}{3}$. На области определения функции $y=g(x)$ левая часть уравнения (4.10) представляет собой непрерывную и возрастающую функцию, а правая часть уравнения — непрерывную и убывающую функцию. В этой связи уравнение (4.10) имеет не более одного корня. Легко видеть, что $x_1 = -1$ является его единственным корнем.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -1$.

$\boxed{4.8}$ Решить уравнение

$$\sqrt{x^3+17} = 3x-5+\sqrt{x^3+8}. \qquad (4.11)$$

Решение. Преобразуем уравнение (4.11) следующим образом:

$$\sqrt{x^3+17}-\sqrt{x^3+8} = 3x-5,$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^3+17}-\sqrt{x^3+8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^3+17}+\sqrt{x^3+8}\right)}{\sqrt{x^3+17}+\sqrt{x^3+8}} = 3x-5,$$

$$\frac{x^3+17-\left(x^3+8\right)}{\sqrt{x^3+17}+\sqrt{x^3+8}} = 3x-5, \quad \frac{9}{\sqrt{x^3+17}+\sqrt{x^3+8}} = 3x-5. \qquad (4.12)$$

Отметим, что левая часть уравнения (4.12) является непрерывной и убывающей функцией, а правая часть — непрерывной и возрастающей функцией на всей оси OX. В этой связи уравнение (4.12) может иметь только один корень. Этот единственный корень можно найти подбором, а именно, $x_1 = 2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 2$.

$\boxed{4.9}$ Решить уравнение

$$4\sqrt{x^2-24}+3\sqrt{x^2-21}+2\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9} = \frac{20}{x-4}. \qquad (4.13)$$

Решение. Поскольку левая часть уравнения (4.13) может принимать только неотрицательные значения, то $\frac{20}{x-4} \ge 0$ или $x > 4$.

Если $x > 4$, то левая часть уравнения (4.13) представляет собой непрерывную и возрастающую функцию, а правая часть — непрерывную убывающую функцию. Поэтому уравнение (4.13) имеет не более одного корня. Подбором находим единственный корень уравнения $x_1 = 5$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 5$.

$\boxed{4.10}$ Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 18x + 25} + \sqrt{4x^2 - 24x + 29} = 6x - x^2 - 4. \qquad (4.14)$$

Решение. Представим уравнение (4.14) в равносильном виде

$$\sqrt{3(x-3)^2 - 2} + \sqrt{4(x-3)^2 - 7} = 5 - (x-3)^2. \qquad (4.15)$$

Если обозначить $(x-3)^2 = y$, то из уравнения (4.15) получаем

$$\sqrt{3y-2} + \sqrt{4y-7} = 5 - y, \qquad (4.16)$$

где $y \ge 0$.

Так как функция $f(y) = \sqrt{3y-2} + \sqrt{4y-7}$ на своей области определения $y \ge \frac{7}{4}$ является непрерывной и возрастающей, а функция $g(y) = 5 - y$ будет непрерывной и убывающей на всей числовой оси OY, то уравнение (4.16) не может иметь более одного корня. Подбором убедимся, что таким единственным корнем уравнения (4.16) является $y_1 = 2$.

Так как $(x-3)^2 = y$, то $(x-3)^2 = 2$ или $x - 3 = \pm\sqrt{2}$. Следовательно, $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 3 + \sqrt{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 3 - \sqrt{2}$, $x_2 = 3 + \sqrt{2}$.

$\boxed{4.11}$ Решить уравнение

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = 9. \qquad (4.17)$$

Решение. Из уравнения (4.17) следует, что $-\frac{1}{4} \le x \le 9$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}}.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $y=f(x)$ при условии $-\frac{1}{4}\le x\le 9$ является непрерывной и возрастающей. Следовательно, уравнение $f(x)=9$ может иметь не более одного корня.

Подбором находим единственный корень уравнения (4.17) вида $x_1=6$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=6$.

$\boxed{4.12}$ Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16. \qquad (4.18)$$

Решение. Введем новую переменную $y=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}$. Так как $y^2=3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3}$, то уравнение (4.18) принимает вид $y=y^2-20$ или $y^2-y-20=0$. Поскольку $y\ge 0$, то подходящим корнем уравнения $y^2-y-20=0$ является $y_1=5$.

Следовательно, необходимо рассмотреть уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5. \qquad (4.19)$$

Так как функция $f(x)=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}$ при $x\ge -1$ является непрерывной и возрастающей, то уравнение (4.19) не может иметь более одного корня.

Подбором устанавливаем, что $x_1=3$ — корень уравнения (4.19).

♦ ***Ответ:*** $x_1=3$.

$\boxed{4.13}$ Решить уравнение

$$3^x+4^x+5^x=6^x. \qquad (4.20)$$

Решение. Разделим обе части уравнения (4.20) на 5^x и получим равносильное уравнение

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x+1=\left(\frac{6}{5}\right)^x. \qquad (4.21)$$

Пусть $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x+1$ и $g(x)=\left(\frac{6}{5}\right)^x$. Поскольку $\frac{3}{5}<1$, $\frac{4}{5}<1$ и $\frac{6}{5}>1$, то функция $y=f(x)$ для любого x является непрерывной и убывающей, а функция $y=g(x)$ — непрерывной и возрастающей. Следовательно, уравнение (4.21), а вместе с ним и уравнение (4.20), имеет единственный (если он есть) корень. Этот корень $x_1=3$ несложно найти из уравнения (4.20).

♦ ***Ответ:*** $x_1=3$.

$\boxed{4.14}$ Решить уравнение

$$3\cdot 5^{2x+1}-7\cdot 2^{4x+1}=19. \tag{4.22}$$

Решение. Перепишем уравнение (4.22) в виде

$$15\cdot 5^{2x}-14\cdot 2^{4x}=19$$

или

$$15\cdot 5^{2x}=14\cdot 4^{2x}+19. \tag{4.23}$$

Если разделить обе части уравнения (4.23) на 4^{2x}, то получим

$$15\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{2x}=14+19\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}. \tag{4.24}$$

Поскольку левая часть уравнения (4.24) является непрерывной и возрастающей функцией, а правая его часть — непрерывной и убывающей функцией, то уравнение (4.24) может иметь только один корень, которым является $x_1=\frac{1}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{1}{2}$.

$\boxed{4.15}$ Решить уравнение

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=\left(2\sqrt{2}\right)^x. \tag{4.25}$$

Решение. Разделим обе части уравнения (4.25) на $\left(2\sqrt{2}\right)^x$. Тогда

$$\left(\frac{\sqrt{4-\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}\right)^x=1. \qquad (4.26)$$

Подбором нетрудно установить, что $x_1=2$ является корнем уравнения (4.26). Покажем, что других корней это уравнение не имеет.

Обозначим $\frac{\sqrt{4-\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}=u$ и $\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}=v$. Очевидно, что $0<u<v<1$.

Следовательно, каждая из функций $y=u^x$ и $y=v^x$ является непрерывной и убывающей и при этом $u^2+v^2=1$.

Если $x<2$, то $u^x>u^2$, $v^x>v^2$ и $u^x+v^x>u^2+v^2=1$. Если $x>2$, то $u^x<u^2$, $v^x<v^2$ и $u^x+v^x<u^2+v^2=1$.

Следовательно, если $x<2$ или $x>2$, то уравнение (4.26) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2$.

Примечание. Поскольку $0<\frac{\sqrt{4-\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}<1$, $0<\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}<1$ и

$$\left(\frac{\sqrt{4-\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}\right)^2=1,$$

то можно положить $\frac{\sqrt{4-\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}=\sin\omega$ и $\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}=\cos\omega$, где $0<\omega<\frac{\pi}{2}$.

В таком случае уравнение (4.26) принимает вид $\sin^x\omega+\cos^x=1$. Однако известно, что уравнение $\sin^x\omega+\cos^x=1$ имеет единственный корень $x_1=2$.

4.16. Решить уравнение

$$\log_2(7-x)=x-1. \qquad (4.27)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (4.27) являются $x<7$.

Рассмотрим функции $f(x)=\log_2(7-x)$ и $g(x)=x-1$. Известно, что функция $y=f(x)$ при $x<7$ является непрерывной и убывающей, а функция $y = g(x)$ — непрерывной и возрастающей. В этой связи уравнение (4.27) может иметь только один корень, т. е. $x_1 = 3$, который легко находится подбором.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 3$.

4.17. Решить уравнение

$$\log_2\left(1+\sqrt{x}\right) = \log_3 x. \qquad (4.28)$$

Решение. Введем новую переменную $y = \log_3 x$. Тогда $x = 3^y$, $1+\sqrt{x} = 1+(\sqrt{3})^y$ и уравнение (4.28) принимает вид

$$1+\left(\sqrt{3}\right)^y = 2^y. \qquad (4.29)$$

Уравнение (4.29) имеет очевидный корень $y_1 = 2$. Покажем, что других корней нет. Для этого разделим обе части уравнения (4.29) на $\left(\sqrt{3}\right)^y$, тогда

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^y + 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^y. \qquad (4.30)$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, а $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$, то левая часть уравнения (4.30) является непрерывной и убывающей функцией, а правая часть — непрерывной и возрастающей функцией. Поэтому уравнение (4.30) если имеет корень, так только один. Ранее было установлено, что $y_1 = 2$ — корень уравнения (4.29). Следовательно, этот корень единственный.

Таким образом, имеем $\log_3 x_1 = 2$. Тогда единственным корнем уравнения (4.28) является $x_1 = 9$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 9$.

4.18. Решить уравнение

$$x \cdot 3^{x+1} = 5x+4. \qquad (4.31)$$

Решение. Первоначально убедимся, что $x = 0$ не является корнем уравнения (4.31). Пусть теперь $x \neq 0$. Тогда обе части уравнения разделим на x и получим уравнение

$$3^{x+1} = 5 + \frac{4}{x}. \tag{4.32}$$

Пусть $f(x) = 3^{x+1}$ и $g(x) = 5 + \frac{4}{x}$. Первая из этих функций является непрерывной и возрастающей на всей числовой оси OX, а вторая функция — убывающая, но не является непрерывной, так как функция $g(x) = 5 + \frac{4}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Поэтому необходимо рассмотреть два случая, а именно, $x < 0$ и $x > 0$.

Если $x < 0$, то обе функции являются непрерывными и одна из них возрастающая, а другая — убывающая. Поэтому уравнение (4.32) имеет не более одного отрицательного корня. Этот корень $x_1 = -1$ находим подбором.

Если $x > 0$, то по аналогии с рассмотрением предыдущего случая делаем вывод о том, что уравнение (4.32) имеет не более одного положительного корня. Этим корнем является $x_2 = 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

4.19. Решить уравнение

$$x^{\log_2 3} + 1 = x^2. \tag{4.33}$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (4.33) являются $x > 0$. Поскольку $x > 0$, то можно обозначить $x = 2^y$, где y — любое число. В таком случае уравнение (4.33) принимает вид $\left(2^y\right)^{\log_2 3} + 1 = \left(2^y\right)^2$ или $3^y + 1 = 4^y$. Последнее уравнение имеет корень $y_1 = 1$. Этот корень единственный, так как уравнение $3^y + 1 = 4^y$ равносильно уравнению $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^y = \left(\frac{4}{3}\right)^y$, в котором левая часть представляет собой непрерывную и убывающую на всей числовой оси OY функцию, а правая часть — непрерывную и возрастающую функцию.

Так как $x = 2^y$ и $y_1 = 1$, то $x_1 = 2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 2$.

✓ $\boxed{4.20}$ Решить уравнение

$$2^{-|x|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|x+1|+|x-1|\right). \qquad (4.34)$$

Решение. Для раскрытия модулей в правой части уравнения (4.34) необходимо рассмотреть три случая.

1. Если $x<-1$, то $|x|=-x$, $|x+1|+|x-1|=-x-1-x+1=-2x$ и уравнение (4.34) принимает вид $2^x=-\frac{x}{\sqrt{2}}$. Пусть $f(x)=2^x$ и $g(x)=-\frac{x}{\sqrt{2}}$. Первая из этих функций при $x<-1$ непрерывно возрастает, а вторая функция непрерывно убывает. Однако $f(-1)=\frac{1}{2}<g(-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому уравнение $2^x=-\frac{x}{\sqrt{2}}$ корней не имеет.

2. Если $-1\le x\le 1$, то из (4.34) получаем уравнение $2^{-|x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, из которого следует $|x|=\frac{1}{2}$ или $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$.

3. Если $x>1$, тогда $2^{-x}=\frac{x}{\sqrt{2}}$. По аналогии с первым случаем можно установить, что это уравнение корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}$.

$\boxed{4.21}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2y\cdot\left(3+10\cdot\log_x 2\right)=x^2+x+3y^2,\\ (x+3)^{\log_5(3-y)}=1.\end{cases} \qquad (4.35)$$

Решение. Областью допустимых значений переменных x и y в системе уравнений (4.35) являются $x>0$, $x\ne 1$ и $y<3$.

Поскольку $x>0$, то $x+3>3$ и из второго уравнения системы (4.35) следует, что $\log_5(3-y)=0$, $3-y=1$ или $y_1=2$.

Подставляя значение $y_1 = 2$ в первое уравнение системы (4.35), получаем $4(3+10\cdot\log_x 2) = x^2 + x + 12$, $40\cdot\log_x 2 = x^2 + x$ или

$$\log_2 x = \frac{40}{x^2 + x}. \qquad (4.36)$$

Пусть $f(x) = \log_2 x$ и $g(x) = \dfrac{40}{x^2 + x}$. Поскольку при $x > 0$ функция $y = f(x)$ является непрерывной и возрастающей, а функция $y = g(x)$ — непрерывной и убывающей, то уравнение (4.36) может иметь только один корень. Так как $f(4) = 2$ и $g(4) = 2$, то $x_1 = 4$ — искомый корень уравнения (4.36).

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 4$, $y_1 = 2$.

4.22. Решить неравенство

$$\sqrt{11-5x} > x-1. \qquad (4.37)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве (4.37) являются $x \le \dfrac{11}{5}$.

Пусть $f(x) = \sqrt{11-5x}$ и $g(x) = x-1$. Рассмотрим уравнение $f(x) = g(x)$. Функция $y = f(x)$ на области допустимых значений x является непрерывной и убывающей, а функция $y = g(x)$ — непрерывной и возрастающей. Поскольку уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень $x_1 = 2$ (который легко найти подбором), то этот корень является единственным. Следовательно, решением неравенства $f(x) > g(x)$ являются любые значения x, для которых $x < 2$.

♦ ***Ответ:*** $x < 2$.

4.23. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} > 3 - \sqrt[3]{x}. \qquad (4.38)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве (4.38) являются $x \ge -3$.

Пусть $f(x)=\sqrt{x+3}$ и $g(x)=3-\sqrt[3]{x}$. Нетрудно показать, что непрерывная функция $y=f(x)$ на области допустимых значений переменной x возрастает, а непрерывная функция $y=g(x)$ — убывает. В этой связи уравнение $f(x)=g(x)$ может иметь только единственный корень, который легко найти подбором, т. е. $x_1=1$.

Поскольку функция $y=f(x)$ возрастающая, а функция $y=g(x)$ убывающая, то при $x>1$ справедливы неравенства $f(x)>f(1)$ и $g(x)<g(1)$. С учетом того, что $f(1)=g(1)$, отсюда получаем неравенство $f(x)>g(x)$ для всех $x>1$.

♦ ***Ответ:*** $x>1$.

4.24. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt{x-3}>\sqrt{2-\sqrt[4]{x}}. \tag{4.39}$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве (4.39) являются $3\le x\le 16$.

Пусть $f(x)=\sqrt[4]{x-2}+\sqrt{x-3}$ и $g(x)=\sqrt{2-\sqrt[4]{x}}$. Нетрудно видеть, что $f(3)=1$ и $g(3)=\sqrt{2-\sqrt[4]{3}}<1$. Поскольку на области допустимых значений переменной x функция $y=f(x)$ непрерывно возрастает, а функция $y=g(x)$ непрерывно убывает, то при $x>3$ имеем $f(x)>f(3)=1$ и $g(x)<g(3)<1$. Отсюда следует, что неравенство $f(x)>g(x)$ имеет место для любых x из отрезка $3\le x\le 16$.

♦ ***Ответ:*** $3\le x\le 16$.

РАЗДЕЛ 5

Методы решения функциональных уравнений

К числу наиболее сложных задач на вступительных конкурсных экзаменах по математике относятся задачи, решение которых сводится к рассмотрению функциональных уравнений вида

$$\underbrace{f(f(\ldots(f(x))\ldots))}_{n\ раз} = x \tag{5.1}$$

или

$$f(g(x)) = f(h(x)), \tag{5.2}$$

где $f(x), g(x), h(x)$ — некоторые функции и $n \geq 2$.

Методы решения функциональных уравнений (5.1), (5.2) основаны на использовании следующих теорем.

Теорема 1

Корни уравнения $f(x) = x$ ***являются корнями уравнения*** **(5.1)**.

Доказательство. Пусть $x = x_0$ — корень уравнения $f(x) = x$, т. е. $f(x_0) = x_0$. Тогда справедливы равенства

$$f(f(x_0)) = f(x_0),$$

$$f(f(f(x_0))) = f(f(x_0)),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\underbrace{f(f(\ldots(f(x_0))\ldots))}_{n\ раз} = \underbrace{f(f(\ldots(f(x_0))\ldots))}_{n-1\ раз}.$$

Отсюда следует, что

$$\underbrace{f\Big(f\big(\ldots\big(f(x_0)\big)\ldots\big)\Big)}_{n\ раз}=x_0,$$

т. е. $x=x_0$ является корнем уравнения (5.1).

Теорема 2

Если** $y=f(x)$ **— возрастающая функция на отрезке** $a\le x\le b$ **и** $a\le f(x)\le b$**, то на данном отрезке уравнения (5.1) и** $f(x)=x$ **равносильны.

Доказательство. Пусть $x=x_0$ является корнем уравнения (5.1), т. е.

$$\underbrace{f\Big(f\big(\ldots\big(f(x_0)\big)\ldots\big)\Big)}_{n\ раз}=x_0.$$

Предположим, что $x=x_0$ не является корнем уравнения $f(x)=x$, т. е. $f(x_0)\ne x_0$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $x_0<f(x_0)$. Тогда в силу возрастания функции $y=f(x)$ справедливы неравенства

$$a\le x_0<f(x_0)<f\big(f(x_0)\big)<\ldots<\underbrace{f\Big(f\big(\ldots\big(f(x_0)\big)\ldots\big)\Big)}_{n\ раз}\le b.$$

Так как

$$\underbrace{f\Big(f\big(\ldots\big(f(x_0)\big)\ldots\big)\Big)}_{n\ раз}=x_0,$$

то из приведенных выше неравенств следует, что $x_0<x_0$. Таким образом, получили ложное неравенство. А это означает, что $f(x_0)=x_0$.

Отсюда и из теоремы 1 следует справедливость теоремы 2.

Следствие 1

Если функция** $y=f(x)$ **возрастает для любого** x**, то уравнения (5.1) и** $f(x)=x$ **равносильны.

Следствие 2

Если функция** $y=f(x)$ **возрастает на своей области определения, то уравнения (5.1) и** $f(x)=x$ **равносильны.

Более сложным является решение уравнения (5.1) в том случае, когда на некотором отрезке $a \le x \le b$ функция $y = f(x)$ является убывающей.

В данном случае имеет место аналоги теоремы 2 и двух следствий только при условии, что в уравнении (5.1) значение n нечетное.

Теорема 3

Если $y = f(x)$ — убывающая функция на отрезке $a \le x \le b$, n — нечетное и $a \le f(x) \le b$, то на данном отрезке уравнения (5.1) и $f(x) = x$ равносильны.

Доказательство. Пусть $x = x_0$ является корнем уравнения (5.1), т. е.

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x_0))\dots))}_{n\ раз} = x_0.$$

Предположим, что $x = x_0$ не является корнем уравнения $f(x) = x$, т. е. $f(x_0) \ne x_0$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $a \le x_0 < f(x_0) \le b$. Тогда в силу убывания функции $y = f(x)$ на отрезке $a \le x \le b$ получаем неравенства $f(x_0) > f(f(x_0))$, $f(f(x_0)) < f(f(f(x_0)))$, $f(f(f(x_0))) > f(f(f(f(x_0))))$ и т. д.

Так как n — нечетное, то

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x_0))\dots))}_{n-1\ раз} < \underbrace{f(f(\dots(f(x_0))\dots))}_{n\ раз}.$$

Поскольку

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x_0))\dots))}_{n\ раз} = x_0,$$

то из последнего неравенства получаем

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x_0))\dots))}_{n-1\ раз} < x_0.$$

Так как $y = f(x)$ — убывающая функция, то

$$\underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f\left(x_0\right)\right)\ldots\right)\right)}_{n \text{ раз}} > f\left(x_0\right),$$

т. е. $x_0 > f\left(x_0\right)$. Получили противоречие тому, что по предположению $x_0 < f(x_0)$. Следовательно, $f(x_0) = x_0$.

Отсюда с учетом теоремы 1 следует справедливость теоремы 3.

Следствие 3

Если функция $y = f(x)$ убывает для любого x и n — нечетное, то уравнения (5.1) и $f(x) = x$ равносильны.

Следствие 4

Если функция $y = f(x)$ убывает на области определения и n — нечетное, то уравнения (5.1) и $f(x) = x$ равносильны.

Так как в рассмотренных выше случаях функция $y = f(x)$ является убывающей, то уравнение $f(x) = x$ может иметь только один корень. Поскольку уравнение (5.1) с убывающей функцией $y = f(x)$ и нечетным значением n равносильно уравнению $f(x) = x$, то уравнение (5.1) также имеет не более одного корня.

Если в уравнении (5.1) $y = f(x)$ — убывающая функция, а n — четное, то в общем случае уравнения (5.1) и $f(x) = x$ не являются равносильными. Например, уравнение $\sqrt{1-\sqrt{1-x}} = x$ имеет три корня $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и только третий корень удовлетворяет уравнению $\sqrt{1-x} = x$.

В данном случае для поиска корней уравнения (5.1) необходимо проводить дополнительные исследования.

Теорема 4

Если $y = f(x)$ — возрастающая (или убывающая) функция, то уравнения (5.2) и $g(x) = h(x)$ равносильны на области допустимых значений переменной x в уравнении (5.2).

Доказательство.

1. Пусть x_0 — корень уравнения (5.2), т. е. $f(g(x_0)) = f(h(x_0))$. Предположим, что x_0 не является корнем уравнения $g(x) = h(x)$,

т. е. $g(x_0) \neq h(x_0)$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $g(x_0) < h(x_0)$. Отсюда в зависимости от того, какой является функция $y = f(x)$ на области допустимых значений уравнения (5.2) возрастающей или убывающей, получаем неравенство $f(g(x_0)) < f(h(x_0))$ или $f(g(x_0)) > f(h(x_0))$, соответственно. В каждом из двух случаев имеем ложное неравенство. Значит, $g(x_0) = h(x_0)$.

2. Пусть x_0 — корень уравнения $g(x) = h(x)$, т. е. $g(x_0) = h(x_0)$. Отсюда следует $f(g(x_0)) = f(h(x_0))$.

Следствие 5

Если $y = f(x)$ ***— возрастающая (или убывающая) функция на множестве значений функций*** $y = g(x)$ ***и*** $y = h(x)$***, то уравнения*** (5.2) ***и*** $g(x) = h(x)$ ***равносильны.***

Также следует отметить, что при решении функционального уравнения (5.2) необходимо внимательно рассматривать случай, когда функция $y = f(x)$ является четной.

Теорема 5

Если четная функция $y = f(x)$ ***определена на отрезке*** $-a \le x \le a$ ***и возрастает (или убывает) при*** $0 \le x \le a$***, то на данном отрезке уравнение*** (5.2) ***равносильно совокупности уравнений*** $g(x) = h(x)$ ***и*** $g(x) = -h(x)$ ***при условии, что*** $-a \le g(x) \le a$ ***и*** $-a \le h(x) \le a$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством предыдущей теоремы. При этом используется четность функции $y = f(x)$, т. е. если $f(g(x)) = f(h(x))$, то $f(g(x)) = f(-h(x))$.

Примечание. Для более глубокого изучения методов решения уравнений (5.1), (5.2) и функциональных уравнений других типов можно обратиться к статье Чучаева И. И. и Мещеряковой С. И. «Уравнения вида $f(g(x)) = f(h(x))$ и нестандартные методы решения» («Математика в школе», 1995, № 3).

Задачи и решения

5.1. Решить уравнение

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2 + \sqrt{x}}}}, \qquad (5.3)$$

где квадратный корень берется n раз $(n \geq 2)$.

Решение. Из уравнения (5.3) следует, что $x \geq 2$. Введем функцию $f(x) = 2 + \sqrt{x}$. Тогда уравнение (5.3) принимает вид функционального уравнения (5.1). Так как функция $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ возрастает при $x \geq 0$, то уравнение (5.1) равносильно уравнению $x = f(x)$ (см. **Теорему 2**), т. е. уравнение (5.3) равносильно уравнению $x = 2 + \sqrt{x}$, которое имеет единственный положительный корень $x_1 = 4$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 4$.

5.2. Решить уравнение

$$x^3 - 6 = \sqrt[3]{x+6}. \qquad (5.4)$$

Решение. Уравнение (5.4) равносильно уравнению

$$x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x+6} + 6}. \qquad (5.5)$$

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x+6}$, тогда уравнение (5.5) принимает вид $f(f(x)) = x$. Поскольку функция $y = f(x)$ возрастает на всей числовой оси OX, то уравнение $f(f(x)) = x$ равносильно уравнению $f(x) = x$, т. е. уравнение (5.5) равносильно уравнению $\sqrt[3]{x+6} = x$ или $x^3 - x - 6 = 0$.

Так как $x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$ и $x^2 + 2x + 3 > 0$, то уравнение $x^3 - x - 6 = 0$ имеет единственный корень $x_1 = 2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 2$.

5.3. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \sqrt{x}} = x - 1. \qquad (5.6)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (5.6) являются $x \ge 1$. Уравнение (5.6) равносильно уравнению

$$1+\sqrt{1+\sqrt{x}}=x. \qquad (5.7)$$

Пусть $f(x)=1+\sqrt{x}$. Тогда уравнение (5.7) принимает вид функционального уравнения $f(f(x))=x$. Так как функция $y=f(x)$ является возрастающей на области допустимых значений переменной x, то уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$, т. е. уравнение (5.7) равносильно уравнению $1+\sqrt{x}=x$, из которого получаем $\sqrt{x_1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ или $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$\boxed{5.4.}$ Решить уравнение

$$\left(x^2+4x+2\right)^2+4\left(x^2+4x+2\right)+2=x. \qquad (5.8)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (5.8) является числовая ось OX.

Пусть $f(x)=x^2+4x+2$, тогда уравнение (5.8) можно переписать в виде функционального уравнения $f(f(x))=x$. Однако на всей области допустимых значений переменной x функция $f(x)=x^2+4x+2$ не является монотонной. Поэтому уравнения $f(f(x))=x$ и $f(x)=x$ в общем случае не являются равносильными, т. е. переход от уравнения $f(f(x))=x$ к уравнению $f(x)=x$ может сопровождаться потерей части корней.

В этой связи будем действовать следующим образом.

Рассмотрим уравнение $f(x)=x$, корни которого являются корнями уравнения $f(f(x))=x$ (см. **Теорему 1**), т. е. уравнение

$$x^2+3x+2=0. \qquad (5.9)$$

Решая уравнение (5.9), получаем $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$. Естественно, что x_1, x_2 — корни уравнения (5.8).

Для поиска остальных корней уравнения (5.8) представим его левую часть в виде многочлена четвертой степени путем раскрытия скобок, т. е.

$$x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 31x + 14 = 0. \qquad (5.10)$$

Так как $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$ являются корнями уравнения (5.10), то для поиска остальных корней уравнения (5.10) необходимо разделить многочлен $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 31x + 14$ последовательно на $x + 2$ и $x + 1$, т. е. разделить на выражение $(x+2)(x+1) = x^2 + 3x + 2$. В результате таких действий получим квадратное уравнение $x^2 + 5x + 7 = 0$, которое действительных корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

5.5 Решить уравнение

$$x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 6 = \sqrt[3]{2-x}. \qquad (5.11)$$

Решение. Преобразуем уравнение (5.11) следующим образом:

$$x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 8 = \sqrt[3]{2-x} - 2,$$

$$\left(x^3 - 2\right)^3 = \sqrt[3]{2-x} - 2, \ \left(2 - x^3\right)^3 = 2 - \sqrt[3]{2-x}.$$

Отсюда получаем уравнение

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{2-x}}}. \qquad (5.12)$$

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$, тогда уравнение (5.12) принимает вид

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x. \qquad (5.13)$$

Поскольку функция $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$ является убывающей на всей числовой оси OX и при этом n — нечетное (см. **Теорему 3**), то уравнение (5.13) равносильно уравнению $f(x) = x$, т. е. уравнение (5.12) равносильно уравнению $\sqrt[3]{2-x} = x$ или $x^3 + x - 2 = 0$. Уравнение $x^3 + x - 2 = 0$ имеет единственный действительный корень $x_1 = 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1$.

5.6. Решить уравнение

$$\sqrt{6-2\sqrt{6-2x}}=x. \qquad (5.14)$$

Решение. Пусть $f(x)=\sqrt{6-2x}$. Тогда уравнение (5.14) принимает вид $x=f(f(x))$. Так как функция $f(x)=\sqrt{6-2x}$ на области определения $x\le 3$ является убывающей и при этом n – четное (см. **Теорему 3**), то вопрос о равносильности уравнений (5.14) и $\sqrt{6-2x}=x$ остается открытым.

В этой связи целесообразно решать уравнение (5.14) другими методами, не рассматривая его как функциональное уравнение. Проиллюстрируем решение уравнения (5.14) одним из таких методов.

Обозначим $\sqrt{6-2x}=y$. Тогда из уравнения (5.14) получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{6-2y}=x,\\ \sqrt{6-2x}=y.\end{cases} \qquad (5.15)$$

Из системы уравнений (5.15) следует, что $0\le x\le\sqrt{6}$ и $0\le y\le\sqrt{6}$. Возведем в квадрат оба уравнения системы (5.15), а затем из первого уравнения вычтем второе. Тогда получим $2x-2y=x^2-y^2$ или

$$(x-y)(x+y-2)=0. \qquad (5.16)$$

Пусть $x-y=0$. Так как $y=\sqrt{6-2x}$, то получили уравнение $x=$ $=\sqrt{6-2x}$, где $0\le x\le\sqrt{6}$. Уравнение $x=\sqrt{6-2x}$ равносильно уравнению $x^2+2x-6=0$, подходящим корнем которого является $x_1=-1+\sqrt{7}$.

Пусть $x+y-2=0$. Тогда имеет место уравнение $\sqrt{6-2x}=2-x$, из которого следует, что $x\le 2$. Отсюда получаем квадратное уравнение $x^2-2x-2=0$, которое имеет два корня $x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$. Ранее было установлено, что $0\le x\le 2$. Поэтому значения x_2 и x_3 не могут быть корнями уравнения (5.14).

♦ ***Ответ:*** $x_1=-1+\sqrt{7}$.

5.7. Решить уравнение

$$\ln(\ln x+1)=x-1. \qquad (5.17)$$

Решение. Уравнение (5.17) можно переписать как $\ln(\ln x+1)+1=x$. Пусть $f(x)=\ln x+1$, тогда уравнение (5.17) принимает вид функционального уравнения $f(f(x))=x$. Поскольку функция $y=\ln x$ является непрерывной и возрастающей при $x>0$, то уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$, т. е. уравнение (5.17) равносильно уравнению

$$\ln x+1=x. \tag{5.18}$$

Очевидно, что $x_1=1$ является корнем уравнения (5.18). Покажем, что этот корень единственный.

Для этого рассмотрим функцию $g(x)=\ln x+1-x$, заданную на интервале $0<x<\infty$. Известно, что $g(1)=0$. Кроме того, имеет место

$$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

Пусть $0<x<1$, тогда $g'(x)>0$. Следовательно, функция $y=g(x)$ возрастает и поэтому $g(x)<g(1)=0$

Пусть $x>1$, тогда $g'(x)<0$ и функция $y=g(x)$ является убывающей, т. е. $g(x)<g(1)=0$.

Отсюда следует, что $g(x)<0$ для любого $x>0$ и $x\neq1$. Значит, уравнение (5.17) имеет единственный корень $x_1=1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$.

$\boxed{5.8.}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=1,\\ y-\sqrt{z}=1,\\ z-\sqrt{x}=1. \end{cases} \tag{5.19}$$

Решение. Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} x=\sqrt{y}+1,\\ y=\sqrt{z}+1,\\ z=\sqrt{x}+1. \end{cases} \tag{5.20}$$

Из первого уравнения системы (5.20) следует, что $x \ge 1$. Введем в рассмотрение функцию $f(x) = \sqrt{x} + 1$, определенную для $x \ge 1$. Тогда из системы уравнений (5.20) получаем $x = f(y)$, $y = f(z)$ и $z = f(x)$. Отсюда вытекает функциональное уравнение

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x. \tag{5.21}$$

Так как функция $f(x) = \sqrt{x} + 1$ на области определения является возрастающей, то уравнение (5.21) равносильно уравнению $f(x) = x$, т. е. $\sqrt{x} + 1 = x$ или $\sqrt{x} = x - 1$.

Так как $x \ge 1$, то после возведения в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x} = x - 1$ получаем равносильное квадратное уравнение $x^2 - 3x + 1 = 0$, которое имеет два корня $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Однако только один его корень удовлетворяет неравенству $x \ge 1$, т. е. $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Поскольку получили единственное значение переменной x, которое удовлетворяет системе уравнений (5.19), и уравнения заданной системы являются симметрическими относительно вхождения переменных x, y и z, то $y_1 = z_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $y_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $z_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

$\boxed{5.9.}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y - 1, \\ y^2 = z - 1, \\ z^2 = x - 1. \end{cases} \tag{5.22}$$

Решение. Перепишем систему уравнений (5.22) в виде

$$\begin{cases} x = z^2 + 1, \\ y = x^2 + 1, \\ z = y^2 + 1. \end{cases} \tag{5.23}$$

Отсюда следует, что $x \ge 1$. Пусть $f(x) = x^2 + 1$, тогда из (5.23) получаем функциональное уравнение

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x. \tag{5.24}$$

Так как функция $f(x) = x^2 + 1$ при $x \ge 1$ является возрастающей, тогда вместо уравнения (5.24) можно рассматривать уравнение $f(x) = x$, т. е. $x^2 + 1 = x$. Нетрудно убедиться в том, что уравнение $x^2 - x + 1 = 0$ не имеет корней (дискриминант уравнения отрицательный), поэтому заданная система уравнений (5.22) также не имеет корней.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

$\boxed{5.10}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\left(1+\sqrt{y}\right) = 2; \\ y\left(1+\sqrt{z}\right) = 2; \\ z\left(1+\sqrt{x}\right) = 2. \end{cases} \tag{5.25}$$

Решение. Областью допустимых значений переменных x, y и z в системе уравнений (5.25) являются $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

Систему уравнений (5.25) перепишем в равносильном виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{1+\sqrt{y}}; \\ y = \dfrac{2}{1+\sqrt{z}}; \\ z = \dfrac{2}{1+\sqrt{x}}. \end{cases} \tag{5.26}$$

Пусть $f(x) = \dfrac{2}{1+\sqrt{x}}$, где $x > 0$. Тогда из системы уравнений (5.26) получаем функциональное уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x$. Так как функция $f(x) = \dfrac{2}{1+\sqrt{x}}$ является убывающей, то уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x$ равносильно уравнению $f(x) = x$, т. е. $\dfrac{2}{1+\sqrt{x}} = x$.

Отсюда получаем $x\sqrt{x}+x-2=0$ или

$$\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+2\sqrt{x}+2\right)=0. \quad (5.27)$$

Так как $x>0$, то $x+2\sqrt{x}+2>0$ и из уравнения (5.27) следует, что $\sqrt{x}-1=0$ или $x_1=1$. Проведя аналогичные рассуждения относительно переменных y и z, получаем $y_1=1$ и $z_1=1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=1$, $z_1=1$.

Примечание. Приведем еще один способ решения системы уравнений (5.25), который не использует понятие функционального уравнения.

Нетрудно заметить, что $x_1=1$, $y_1=1$, $z_1=1$ является корнями системы уравнений (5.25). Покажем, что других корней нет.

Если $x>1$. Так как $x\left(1+\sqrt{y}\right)=2$, то $1+\sqrt{y}<2$ или $y<1$. Однако, $y\left(1+\sqrt{z}\right)=2$. Поскольку $y<1$, то $1+\sqrt{z}>2$ или $z>1$. Далее, $z>1$ и $z\left(1+\sqrt{x}\right)=2$, тогда $1+\sqrt{x}<2$ или $x<1$. Получили противоречие, так как по предположению $x>1$.

Если $x<1$, то по аналогии с предыдущими рассуждениями получим, что $y>1$, $z<1$ и $x>1$. Следовательно, здесь также имеет место противоречие.

5.11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x=\dfrac{4z^2}{1+4z^2}, \\ y=\dfrac{4x^2}{1+4x^2}, \\ z=\dfrac{4y^2}{1+4y^2}. \end{cases} \quad (5.28)$$

Решение. Из системы уравнений (5.28) следует, что $0\le x<1$, $0\le y<1$ и $0\le z<1$.

Введем в рассмотрение функцию $f(x)=\dfrac{4x^2}{1+4x^2}$. Тогда систему уравнений (5.28) можно представить в виде $x=f(z)$, $y=f(x)$ и $z=f(y)$, т. е. $x=f(z)=f\left(f(y)\right)=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$.

Поскольку $f(x)=1-\frac{1}{1+4x^2}$, то функция $f(x)=\frac{4x^2}{1+4x^2}$ является возрастающей при условии, что $0\le x<1$. В этой связи уравнение $x=f(f(f(x)))$ равносильно уравнению $x=f(x)$. Следовательно, имеем уравнение $x=\frac{4x^2}{1+4x^2}$. Отсюда получаем $x(2x-1)^2=0$ и $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$. Если найденные значения переменной x подставить в уравнения системы (5.28), то получим $y_1=z_1=0$ и $y_2=z_2=\frac{1}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$; $x_2=\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{1}{2}$, $z_2=\frac{1}{2}$.

5.12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+2x^2+2x=y, \\ y^3+2y^2+2y=z, \\ z^3+2z^2+2z=x. \end{cases} \tag{5.29}$$

Решение. Обозначим $f(x)=x^3+2x^2+2x$. Тогда из системы уравнений (5.29) получаем $f(x)=y$, $f(y)=z$ и $f(z)=x$. Отсюда следует, что $f(f(f(x)))=x$.

Поскольку

$$f'(x)=3x^2+4x+2=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0,$$

то функция $y=f(x)$ возрастает на всей числовой оси OX и поэтому уравнение $f(f(f(x)))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$. Корнями уравнения $x^3+2x^2+2x=x$ являются $x_1=0$ и $x_2=-1$. Если значения x_1 и x_2 подставить в уравнения системы (5.29), то получим $y_1=0, z_1=0$ и $y_2=-1, z_2=-1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=0$, $y_1=0, z_1=0$; $x_2=-1$, $y_2=-1, z_2=-1$.

$\boxed{5.13}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+x+6=8y, \\ y^3+y+6=8z, \\ z^3+z+6=8x. \end{cases} \tag{5.30}$$

Решение. Пусть $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3+x+6\right)$, тогда систему уравнений (5.30) можно переписать в виде функционального уравнения

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=x. \tag{5.31}$$

Так как функция $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3+x+6\right)$ является непрерывной и возрастающей на всей числовой оси OX, то уравнение (5.31) равносильно уравнению $f(x)=x$, т. е. $\frac{1}{8}\left(x^3+x+6\right)=x$ или $x^3-7x+6=0$. Корнями кубического уравнения являются $x_1=1$, $x_2=2$ и $x_3=-3$. Используя уравнения системы (5.30), нетрудно вычислить значения переменных y и z.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=1$, $z_1=1$; $x_2=2$, $y_2=2$, $z_2=2$; $x_3=-3$, $y_3=-3$, $z_3=-3$.

$\boxed{5.14}$ Решить уравнение

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0. \tag{5.32}$$

Решение. Пусть $f(x)=x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)$. Тогда уравнение (5.32) принимает вид $f(2x+1)+f(x)=0$ или $f(2x+1)=-f(x)$. Так как функция $f(x)=x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)$ является нечетной, то $-f(x)=f(-x)$.

В этой связи уравнение (5.32) принимает вид функционального уравнения $f\left(g(x)\right)=f\left(h(x)\right)$, где $g(x)=2x+1$ и $h(x)=-x$. Так как функция $y=f(x)$ возрастает на всей числовой оси OX, то вместо уравнения

$f(g(x)) = f(h(x))$ можно рассматривать уравнение $g(x) = h(x)$ (см. Теорему 4), т. е. $2x+1=-x$. Тогда $x_1 = -\frac{1}{3}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -\frac{1}{3}$.

$\boxed{5.15.}$ Решить уравнение

$$4x - x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1}}. \tag{5.33}$$

Решение. Уравнение (5.33) равносильно уравнению

$$\left(4x - x^2\right)\left(1+\sqrt{\left(4x-x^2\right)^2+1}\right) = \sqrt{3}\left(1+\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}\right). \tag{5.34}$$

Поскольку правая часть уравнения (5.34) является положительной, то $4x - x^2 > 0$ или $0 < x < 4$.

Пусть $f(x) = x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)$. Тогда уравнение (5.34) можно переписать как

$$f\left(4x - x^2\right) = f\left(\sqrt{3}\right), \tag{5.35}$$

где $0 < x < 4$.

Так как функция $y = f(x)$ является непрерывной и возрастающей на всей числовой оси OX, то уравнение (5.35) равносильно уравнению $4x - x^2 = \sqrt{3}$. Отсюда получаем уравнение $x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0$, корнями которого являются $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-\sqrt{3}}$.

Поскольку $0 < x_1 < 4$ и $0 < x_2 < 4$, то корнями уравнения (5.33) являются x_1, x_2.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 2+\sqrt{4-\sqrt{3}}$, $x_2 = 2-\sqrt{4-\sqrt{3}}$.

$\boxed{5.16.}$ Решить уравнение

$$x^4 - 2x^2 + 2\left|x^2 - 1\right| + 1 = 4x^2 + 4|x|. \tag{5.36}$$

Решение. Уравнение (5.36) можно переписать как

$$\left(x^2-1\right)^2+2\left|x^2-1\right|=(2x)^2+2|2x|. \qquad (5.37)$$

Пусть $f(x)=x^2+2|x|$, тогда уравнение (5.37) принимает вид функционального уравнения (5.2), а именно

$$f(g(x))=f(h(x)), \qquad (5.38)$$

где $g(x)=x^2-1$ и $h(x)=2x$.

Отметим, что функция $y=f(x)$ является четной, так как $f(-x)=$ $=f(x)$. Нетрудно видеть, что при $x\ge 0$ функция $f(x)=x^2+2|x|$ является непрерывной и возрастающей, а при $x<0$ — непрерывной и убывающей. В этой связи (согласно **Теореме 5**) уравнение (5.38) равносильно совокупности уравнений $g(x)=h(x)$ и $g(x)=-h(x)$.

Уравнение $g(x)=h(x)$ принимает вид $x^2-1=2x$ или $x^2-2x-1=0$. Тогда $x_1=1+\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$. Из уравнения $g(x)=-h(x)$ вытекает уравнение $x^2-1=-2x$ или $x^2+2x-1=0$. Отсюда получаем $x_3=-1+\sqrt{2}$ и $x_4=-1-\sqrt{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1+\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=-1+\sqrt{2}$, $x_4=-1-\sqrt{2}$.

5.17 Решить уравнение

$$\left(x^2+x-2\right)^3+x^2-2=x^3. \qquad (5.39)$$

Решение. Представим уравнение (5.39) в виде

$$\left(x^2+x-2\right)^3+x^2+x-2=x^3+x. \qquad (5.40)$$

Пусть $f(x)=x^3+x$, $g(x)=x^2+x-2$ и $h(x)=x$, тогда уравнение (5.40) представляет собой функциональное уравнение вида (5.2), т. е. $f(g(x))=f(h(x))$.

Поскольку функция $f(x)=x^3+x$ является непрерывной и возрастающей на всей числовой оси OX, то (согласно **Теореме 4**) уравнение

$f(g(x)) = f(h(x))$ равносильно уравнению $g(x) = h(x)$, т. е. уравнение (5.40) равносильно уравнению $x^2 + x - 2 = x$ или $x^2 = 2$. Отсюда получаем $x_1 = -\sqrt{2}$ и $x_2 = \sqrt{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.

$\boxed{5.18}$ Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{x^2+1} + \sin\frac{1}{x^2+x+2} = 0. \qquad (5.41)$$

Решение. Обозначим $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ и $h(x) = \frac{1}{x^2+x+2}$, тогда уравнение (5.41) можно записать в виде функционального уравнения $f(g(x)) + f(h(x)) = 0$. Поскольку функция $f(x) = \sin x$ является нечетной, то $-f(h(x)) = f(-h(x))$.

В таком случае уравнение $f(g(x)) + f(h(x)) = 0$ будет равносильно уравнению $f(g(x)) = f(-h(x))$.

Известно, что функция $f(x) = \sin x$ на промежутке $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ является возрастающей. Так как $-\frac{1}{2} \le g(x) \le \frac{1}{2}$ и $0 < h(x) \le \frac{4}{7}$, то можно утверждать, что функция $f(x) = \sin x$ возрастает на множестве значений функций $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $h(x) = \frac{1}{x^2+x+2}$ и поэтому уравнение $f(g(x)) = f(-h(x))$ равносильно уравнению $g(x) = -h(x)$, т. е.

$$\frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{x^2+x+2}.$$

Отсюда получаем кубическое уравнение $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$, которое имеет единственный действительный корень $x_1 = -1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -1$.

5.19. Решить уравнение

$$(x-1)^4+4x-4=x^2+4\sqrt{x}. \qquad (5.42)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (5.42) являются $x \ge 0$.

Уравнение (5.42) равносильно уравнению

$$(x-1)^4+4(x-1)=x^2+4\sqrt{x},$$

которое можно переписать в виде функционального уравнения $f(g(x))=$ $=f(h(x))$, где $f(x)=x^4+4x$, $g(x)=x-1$ и $h(x)=\sqrt{x}$.

Так как $f'(x)=4x^3+4$, то функция $f(x)=x^4+4x$ возрастает при условии, что $x \ge -1$. Поскольку на области допустимых значений переменной x выполняются неравенства $g(x) \ge -1$ и $\sqrt{x} \ge 0$, то можно утверждать, что функция $f(x)=x^4+4x$ возрастает на множестве значений функций $y=g(x)$ и $y=h(x)$. В этой связи (см. **Следствие 5**) уравнение $f(g(x))=f(h(x))$ равносильно уравнению $g(x)=h(x)$.

Из уравнения $x-1=\sqrt{x}$ получаем $\sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ или $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

5.20. Решить уравнение

$$\sin^6 x-3\sin^2 x=\cos^3 2x-3\cos 2x. \qquad (5.43)$$

Решение. Перепишем уравнение (5.43) в виде функционального уравнения $f(g(x))=f(h(x))$. Для этого положим $f(x)=x^3-3x$, $g(x)=\sin^2 x$ и $h(x)=\cos 2x$.

Поскольку $f'(x)=3x^2-3$ и $0 \le g(x) \le 1$, $-1 \le h(x) \le 1$, то функция $f(x)=x^3-3x$ убывает на множестве значений функций $g(x)$, $h(x)$, т. е. на отрезке $-1 \le x \le 1$. В таком случае уравнение $f(g(x))=f(h(x))$ равносильно уравнению $\sin^2 x=\cos 2x$, из которого следует

$$\frac{1-\cos 2x}{2}=\cos 2x \text{ или } \cos 2x=\frac{1}{3}.$$

Отсюда получаем корни уравнения (5.43)

$$x_1=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi n,$$

где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi n$, где n — целое число.

$\boxed{5.21}$ Решить уравнение

$$2^{x^2-3x+1}-3^{3x-x^2-1}=4^x-9^{-x}. \qquad (5.44)$$

Решение. Перепишем уравнение (5.44) в виде равносильного уравнения

$$2^{x^2-3x+1}-3^{-\left(x^2-3x+1\right)}=2^{2x}-3^{-2x}. \qquad (5.45)$$

Положим $f(x)=2^x-3^{-x}$, $g(x)=x^2-3x+1$ и $h(x)=2x$. Тогда уравнение (5.45) принимает вид функционального уравнения $f(g(x))=$ $=f(h(x))$.

Так как $f'(x)=\ln 2\cdot 2^x+\ln 3\cdot 3^{-x}>0$, то функция $f(x)=2^x-3^{-x}$ является возрастающей на всей числовой оси OX. Тогда уравнение (5.45) равносильно уравнению $g(x)=h(x)$, т. е. $x^2-3x+1=2x$. Квадратное уравнение $x^2-5x+1=0$ имеет два корня $x_1=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ и $x_2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$, $x_2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

$\boxed{5.22}$ Решить уравнение

$$8\cdot\log_2\left(x^2-x+5\right)=3\left(x^2-x+5\right). \qquad (5.46)$$

Решение. Из уравнения (5.46) следует, что область допустимых значений переменной x совпадает с множеством всех действительных чисел.

Перепишем уравнение (5.46) в виде

$$\frac{\log_2\left(x^2-x+5\right)}{x^2-x+5}=\frac{3}{8} \qquad (5.47)$$

и положим $f(x)=\frac{\log_2 x}{x}$, $g(x)=x^2-x+5$, $h(x)=8$. Отметим, что здесь

$$g(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>4.$$

Нетрудно заметить, что уравнение (5.47) имеет вид функционального уравнения $f(g(x))=f(h(x))$, где $g(x)>4$ и $h(x)=8$.

Поскольку $f'(x)=\frac{\log_2 e-\log_2 x}{x^2}$, то $f'(x)<0$ при $x>e$. Отсюда следует, что функция $f(x)=\frac{\log_2 x}{x}$ убывает на множестве значений функций $y=g(x)$ и $y=h(x)$, т. е. убывает на интервале $x>4$. Поэтому уравнение (5.47) равносильно уравнению $x^2-x+5=8$. Отсюда получаем уравнение $x^2-x-3=0$, которое имеет два корня $x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ и $x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

5.23. Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right). \qquad (5.48)$$

Решение. Если разделим на 2 обе части уравнения (5.48), то, используя свойство логарифмов $\log_{b^n} a=\frac{1}{n}\cdot\log_b a$, получим уравнение

$$\log_{8+4\sqrt{3}}\left(x^2-2x-2\right)=\log_{7+4\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right). \qquad (5.49)$$

Обозначим $x^2-2x-3=a$ и $7+4\sqrt{3}=b$, тогда уравнение (5.49) можно переписать в виде $\log_{b+1}(a+1)=\log_b a$. Полученное уравнение преобразуем как

$$\frac{\log_b(a+1)}{\log_b(b+1)} = \log_b a,$$

$$\frac{\log_b(a+1)}{\log_b a} = \log_b(b+1) \text{ или } \log_a(a+1) = \log_b(b+1).$$

Пусть $f(z) = \log_z(z+1)$. Вычислим производную функции $y = f(z)$. Тогда

$$f'(z) = \frac{z \cdot \ln z - (z+1) \cdot \ln(z+1)}{z \cdot (z+1) \cdot \ln^2 z}.$$

Очевидно, что $f'(z) < 0$ для любых z из области определения функции $y = f(z)$. Следовательно, функция $y = f(z)$ убывает при $0 < z < 1$ и $z > 1$. В этой связи уравнение $f(a) = f(b)$ равносильно уравнению $a = b$. Равносильность данных уравнений следует из того факта, что $b > 1$.

Так как $a = x^2 - 2x - 3$ и $b = 7 + 4\sqrt{3}$, то получаем уравнение $x^2 - 2x - 3 = 7 + 4\sqrt{3}$, которое имеет два корня $x_1 = 1 - \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1 - \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$, $x_2 = 1 + \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.

5.24 Решить уравнение

$$\left(x^2 + x + 2\right)^{x^2 + x + 1} = 9. \tag{5.50}$$

Решение. Поскольку $x^2 + x + 2 > 1$ при всех x, то областью допустимых значений переменной x в уравнении (5.50) является множество всех действительных чисел.

Положив $f(x) = x^{x-1}$, $g(x) = x^2 + x + 2$ и $h(x) = 3$, увидим, что уравнение (5.50) принимает вид $f(g(x)) = f(h(x))$, где $g(x) > 1$ и $h(x) = 3$.

Так как из двойного неравенства $1 < x_1 < x_2$ следует, что

$$f(x_1) = x_1^{x_1 - 1} < x_1^{x_2 - 1} < x_2^{x_2 - 1} = f(x_2),$$

то функция $f(x) = x^{x-1}$ является возрастающей на множестве значений функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$. В этой связи уравнение (5.50) равносильно уравнению $x^2+x+2=3$, которое имеет два корня $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5.25. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6, \\ x^6+x^2=8y^3+2y. \end{cases} \tag{5.51}$$

Решение. Нетрудно установить, что $x_1=0$, $y_1=0$ являются корнями системы уравнений (5.51).

Пусть теперь $y\neq 0$. Разделим обе части первого уравнения системы (5.51) на y^5 и перепишем систему уравнений (5.51) в виде

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^5+\frac{x}{y}=y^5+y, \\ \left(x^2\right)^3+x^2=(2y)^3+2y. \end{cases} \tag{5.52}$$

Пусть $f(z)=z^5+z$ и $g(z)=z^3+z$. Тогда система уравнений (5.52) принимает вид

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right)=f(y), \\ g\left(x^2\right)=g(2y). \end{cases} \tag{5.53}$$

Поскольку функции $f(z)=z^5+z$, $g(z)=z^3+z$ являются возрастающими на всей оси OZ, то из системы (5.53) получаем

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=y, \\ x^2=2y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=y^2, \\ x^2=2y. \end{cases}$$

Так как $y \neq 0$, то корнями последней системы уравнений являютс $x_2 = \sqrt[3]{4}$ и $y_2 = \sqrt[3]{2}$.

Следовательно, система уравнений (5.51) имеет две пары корней $x_1 = 0, y_1 = 0$ и $x_2 = \sqrt[3]{4}$, $y_2 = \sqrt[3]{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_2 = \sqrt[3]{4}$, $y_2 = \sqrt[3]{2}$.

5.26. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 7 + \sqrt{y^2 + x - 7}} = x, \\ \sqrt{x^2 + 2 + \sqrt{x^2 + y + 2}} = y. \end{cases} \qquad (5.54)$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt{a+z}$, где a — некоторы параметр. Очевидно, что эта функция является возрастающей на сво ей области определения. Поскольку $f(f(z)) = \sqrt{a + \sqrt{a+z}}$, то урав нение $f(f(z)) = z$ (согласно **Следствию 2**) равносильно уравнени $f(z) = z$, которое имеет вид $\sqrt{a+z} = z$.

Положив $z = x$ и $a = y^2 - 7$, получим, что первое уравнение систем (5.54) равносильно уравнению

$$\sqrt{y^2 + x - 7} = x. \qquad (5.55)$$

Если $z = y$ и $a = x^2 + 2$, то окажется, что второе уравнение систем (5.54) равносильно уравнению

$$\sqrt{x^2 + y + 2} = y. \qquad (5.56)$$

Возведем в квадрат левые и правые части уравнений (5.55) и (5.56) тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 + x - 7 = x^2, \\ x^2 + y + 2 = y^2. \end{cases} \qquad (5.57)$$

Если сложить уравнения системы (5.57), то $x + y - 5 = 0$ или $y = 5 - x$. Подставим $y = 5 - x$ в первое уравнение системы (5.57), тогда $(5-x)^2 + x - 7 = x^2$ или $x_1 = 2$. Так как $y = 5 - x$, то $y_1 = 3$.

Непосредственной подстановкой в (5.54) убеждаемся в том, что $x_1 = 2$ и $y_1 = 3$ — корни системы уравнений (5.54).

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 2$, $y_1 = 3$.

$\boxed{5.27}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = e^y - e^x, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases} \qquad (5.58)$$

Решение. Из первого уравнения системы (5.58) получаем уравнение $x + e^x = y + e^y$. Пусть $f(x) = x + e^x$, тогда имеем функциональное уравнение $f(x) = f(y)$. Известно, что функция $f(x) = x + e^x$ возрастает на всей числовой оси OX, поэтому уравнение $f(x) = f(y)$ равносильно равенству $x = y$. В этой связи из второго уравнения системы (5.58) получаем $3x^2 = 12$ или $x_{1,2} = \pm 2$.

Так как $x = y$, то корнями системы уравнений (5.58) являются $x_1 = -2, y_1 = -2$ и $x_2 = 2, y_2 = 2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -2, y_1 = -2$; $x_2 = 2, y_2 = 2$.

РАЗДЕЛ 6

Методы, использующие понятие вектора

Недостаточное внимание в общеобразовательной школе уделяется применению векторов для решения уравнений и неравенств. Тем не менее, как будет показано ниже, в ряде случаев применение свойств векторов позволяет эффективно решать довольно-таки сложные уравнения и неравенства.

Вектор $\bar{a}$ в трехмерном пространстве характеризуется тремя координатами a_1, a_2, a_3 и модуль (длина) вектора $\bar{a}$ вычисляется по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ .$$

Суммой (разностью) двух векторов $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ называется вектор $\bar{c}(c_1; c_2; c_3)$, координаты которого вычисляются как $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$ (соответственно, $c_1 = a_1 - b_1$, $c_2 = a_2 - b_2$, $c_3 = a_3 - b_3$).

Два отличных от нуля вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. Верно и обратное утверждение: если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарные.

Для векторов $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ справедливо неравенство

$$|\bar{a}| + |\bar{b}| \ge |\bar{a} \pm \bar{b}|, \text{ т. е.}$$

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \ge$$

$$\ge \sqrt{(a_1 \pm b_1)^2 + (a_2 \pm b_2)^2 + (a_3 \pm b_3)^2} \qquad (6.1)$$

Формула (6.1) обобщается на случай суммы (или разности) трех и более векторов. Геометрический смысл (6.1) состоит в том, что длина ломаной линии, соединяющей две точки трехмерного пространства, больше или равна длине отрезка прямой, проведенного между этими точками. Формула (6.1) иначе называется ***неравенством треугольника.***

Следует особо отметить, что равенство в (6.1) достигается тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные. В частности, из равенства в (6.1) следует, что $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

Причем равенство $|\bar{a}|+|\bar{b}|=|\bar{a}+\bar{b}|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ***сонаправлены***, т. е. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}>0$.

В свою очередь, равенство $|\bar{a}|+|\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$ свидетельствует о том, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ ***противоположно направлены*** и $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}<0$.

Скалярным произведением $\bar{a}\circ\bar{b}$ векторов $\bar{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\bar{b}(b_1;b_2;b_3)$ называется число (скаляр), которое вычисляется по формуле

$$\bar{a}\circ\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\omega, \tag{6.2}$$

где ω — угол, образованный векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Из формулы (6.2) вытекает неравенство $\bar{a}\circ\bar{b}\le|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$.

Для вычисления скалярного произведения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных в координатной форме, существует еще одна формула

$$\bar{a}\circ\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{6.3}$$

Из формул (6.2) и (6.3) легко получить формулу для вычисления косинуса угла ω между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е.

$$\cos\omega=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{6.4}$$

Из формулы (6.2) следует, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ являются коллинеарными тогда и только тогда, когда $\bar{a}\circ\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$.

Отметим, что формулы (6.1)–(6.4) обобщаются на случай векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных в n — мерном пространстве (где $n\ge2$).

Задачи и решения

6.1 Доказать, что если $x^2+y^2+z^2=1$, то

$$\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}+\sqrt{z^4+1}\ge\sqrt{10}. \qquad (6.5)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение три вектора на плоскости $\bar{a}(x^2;1)$, $\bar{b}(y^2;1)$ и $\bar{c}(z^2;1)$. Тогда $|\bar{a}|=\sqrt{x^4+1}$, $|\bar{b}|=\sqrt{y^4+1}$ и $|\bar{c}|=$ $=\sqrt{z^4+1}$. Если положить $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, то

$$|\bar{d}|=\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+(1\pm1+1)^2}=\sqrt{10}.$$

В таком случае неравенство (6.1) принимает вид $|\bar{a}|+|\bar{b}|+|\bar{c}|\ge|\bar{d}|$. Если в данное неравенство подставить выражения для $|\bar{a}|,|\bar{b}|,|\bar{c}|$ и $|\bar{d}|$, то получим неравенство (6.5).

6.2 Доказать, что если $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$, то

$$\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}+\ldots+\sqrt{x_n^2+1}\ge n\sqrt{2}, \qquad (6.6)$$

где $n\ge2$.

Доказательство. Пусть $\overline{a_1}(x_1;1)$, $\overline{a_2}(x_2;1)$, …, $\overline{a_n}(x_n;1)$, тогда $|\overline{a_1}|=\sqrt{x_1^2+1}$, $|\overline{a_2}|=\sqrt{x_2^2+1}$, …, $|\overline{a_n}|=\sqrt{x_n^2+1}$. Введем в рассмотрение вектор $\bar{a}=\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}$.

Так как $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$, то вектор $\bar{a}$ имеет координаты $(n;n)$ и $|\bar{a}|=n\sqrt{2}$. Поскольку $\bar{a}=\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}$, то неравенство треугольника принимает вид

$$|\overline{a_1}|+|\overline{a_2}|+\ldots+|\overline{a_n}|\ge|\bar{a}|. \qquad (6.7)$$

Если в неравенство (6.7) подставить выражения для $|\overline{a_1}|$, $|\overline{a_2}|$, …, $|\overline{a_n}|$ и $|\bar{a}|$, то получим требуемое неравенство (6.6).

$\boxed{6.3.}$ Доказать, что

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+y_n^2}\ge\sqrt{p^2+q^2}, \tag{6.8}$$

где $x_1+x_2+\ldots+x_n=p$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n=q$.

Доказательство. Пусть векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, ..., $\overline{a_n}$ имеют координаты $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, ..., $(x_n;y_n)$ соответственно, тогда $\left|\overline{a_1}\right|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, $\left|\overline{a_2}\right|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$, ..., $\left|\overline{a_n}\right|=\sqrt{x_n^2+y_n^2}$. Пусть $\overline{a}=\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}$. По условию задачи $x_1+x_2+\ldots+x_n=p$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n=q$, поэтому $\overline{a}(p;q)$ и $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{p^2+q^2}$. Отсюда с учетом неравенства треугольника $\left|\overline{a_1}\right|+\left|\overline{a_2}\right|+\ldots+\left|\overline{a_n}\right|\ge\left|\overline{a}\right|$ следует справедливость неравенства (6.8).

$\boxed{6.4.}$ Пусть $x_1+x_2+\ldots+x_n=3$, $y_1+y_2+\ldots+y_n=4$ и $z_1+z_2+\ldots+z_n=5$. Доказать, что

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+y_n^2+z_n^2}\ge5\sqrt{2}. \tag{6.9}$$

Доказательство. Рассмотрим в трехмерном пространстве n векторов $\left|\overline{a_k}\right|$ с координатами $(x_k;y_k;z_k)$, где $k=1,2,\ldots,n$. Тогда $\left|\overline{a_k}\right|=\sqrt{x_k^2+y_k^2+z_k^2}$.

Пусть $\overline{a}=\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}$. Тогда

$$\overline{a}(x_1+x_2+\ldots+x_n;\ y_1+y_2+\ldots+y_n;\ z_1+z_2+\ldots+z_n)=\overline{a}(3;4;5)$$

$$\text{и } \left|\overline{a}\right|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}.$$

Так как в рассматриваемом примере неравенство (6.1) принимает вид $\left|\overline{a_1}\right|+\left|\overline{a_2}\right|+\ldots+\left|\overline{a_n}\right|\ge\left|\overline{a}\right|$, то после подстановки в него выражений для $\left|\overline{a_1}\right|$, $|\overline{a_2}|$, ..., $|\overline{a_n}|$ и $|\overline{a}|$, получаем неравенство (6.9).

$\boxed{6.5.}$ Доказать, что

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+y_n^2}\ge1, \tag{6.10}$$

если $x_1+x_2+\ldots+x_n=\sin\omega$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n=\cos\omega$.

Доказательство проводится по аналогии с задачей $\boxed{6.3}$. При этом полагается, что $p = \sin\omega$ и $q = \cos\omega$. Кроме того, здесь используется известное равенство $\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$.

$\boxed{6.6}$ Решить неравенство

$$\sqrt{(6-x)^2+4} + \sqrt{(x-2)^2+1} \le 5 . \qquad (6.11)$$

Решение. Пусть на плоскости вектор $\bar{a}$ имеет координаты $(6-x; 2)$, а вектор $\bar{b}$ — координаты $(x-2; 1)$. Тогда имеем $|\bar{a}| = \sqrt{(6-x)^2+4}$ и $|\bar{b}| = \sqrt{(x-2)^2+1}$. Пусть $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, тогда координаты вектора $\bar{c}(c_1; c_2)$ будут вычисляться по формулам $c_1 = a_1 + b_1 = 6 - x + x - 2 = 4$ и $c_2 = {}$ $= a_2 + b_2 = 2 + 1 = 3$. Отсюда следует, что $|\bar{c}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Поскольку $|\bar{c}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$, то имеет место неравенство треугольника $|\bar{a}| + |\bar{b}| \ge |\bar{a} + \bar{b}|$. Если в последнее неравенство подставить выражения для $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$ и $|\bar{c}|$, то получим неравенство $\sqrt{(6-x)^2+4} + \sqrt{(x-2)^2+1} \ge 5$. Отсюда и из (6.11) следует равенство

$$\sqrt{(6-x)^2+4} + \sqrt{(x-2)^2+1} = 5 . \qquad (6.12)$$

Равенство (6.12) означает, что $|\bar{a}| + |\bar{b}| = |\bar{a} + \bar{b}|$. Отсюда следует, что векторы $\bar{a}(6-x; 2)$ и $\bar{b}(x-2; 1)$ коллинеарные. Используя основное свойство коллинеарных векторов, получаем уравнение $\dfrac{6-x}{x-2} = \dfrac{2}{1}$, откуда вытекает $x_1 = \dfrac{10}{3}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \dfrac{10}{3}$.

Примечание. Неравенство (6.11) можно задать в более усложненном виде, т. е. $\sqrt{x^2 - 12x + 40} + \sqrt{x^2 - 4x + 5} \le 5$.

$\boxed{6.7.}$ Решить неравенство

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}\le 12. \tag{6.13}$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве (6.13) являются $\frac{3}{2}\le x\le\frac{50}{3}$.

Рассмотрим в трехмерном пространстве два вектора $\bar{a}(1;1;1)$ и

$$\bar{b}\left(\sqrt{x+1};\sqrt{2x-3};\sqrt{50-3x}\right).$$

Поскольку $\bar{a}\circ\bar{b}=\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}$, $|\bar{a}|=\sqrt{3}$ и $|\bar{b}|=\sqrt{x+1+2x-3+50-3x}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$, то известное неравенство $\bar{a}\circ\bar{b}\le$ $\le|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$ принимает вид неравенства (6.13). Отсюда делаем вывод о том, что неравенство (6.13) справедливо для любого x из области допустимых значений.

Следовательно, решением неравенства (6.13) являются $\frac{3}{2}\le x\le\frac{50}{3}$.

♦ ***Ответ:*** $\frac{3}{2}\le x\le\frac{50}{3}$.

$\boxed{6.8.}$ Решить неравенство

$$\sqrt{\sin^4 x+1}+\sqrt{\cos^4 x+1}\le\sqrt{5}. \tag{6.14}$$

Решение. Введем в рассмотрение три вектора $\bar{a}\left(\sin^2 x;1\right)$, $\bar{b}\left(\cos^2 x;1\right)$ и $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$. Тогда $|\bar{a}|=\sqrt{\sin^4 x+1}$, $|\bar{b}|=\sqrt{\cos^4 x+1}$, $|\bar{c}|=$ $=\sqrt{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$ и неравенство треугольника (6.1) принимает вид $\sqrt{\sin^4 x+1}+\sqrt{\cos^4 x+1}\ge\sqrt{5}$. Отсюда и из неравенства (6.14) получаем равенство $\sqrt{\sin^4 x+1}+\sqrt{\cos^4 x+1}=\sqrt{5}$, из которого следует, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные.

Следовательно, имеет место $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1$ или $\operatorname{tg}x=\pm 1$. Корнями последнего уравнения являются $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, где k — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, где k — целое число.

$\boxed{6.9}$ Решить уравнение

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (6.15)$$

Решение. Введем в рассмотрение два вектора $\overline{a}(x;1)$ и $\overline{b}\left(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x}\right)$. Тогда $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{x^2+1}$, $\left|\overline{b}\right|=\sqrt{(x+1)+(3-x)}=2$ и, согласно формуле (6.3), $\overline{a}\circ\overline{b}=x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$.

Принимая во внимание уравнение (6.15), получаем равенство $\overline{a}\circ\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|$, наличие которого свидетельствует о том, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ являются коллинеарными. Следовательно, имеет место уравнение

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3-x}}\,. \qquad (6.16)$$

Отсюда следует, что $0<x<3$. Если возвести в квадрат обе части уравнения (6.16), то получим уравнение $x^3-3x^2+x+1=0$, которое имеет следующих три корня: $x_1=1$ и $x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$. Поскольку $0<x<3$, то корнями уравнения (6.15) являются $x_1=1$ и $x_2=1+\sqrt{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{2}$.

Примечание. В разделе 3 (см. задачу $\boxed{3.30}$) предлагается решение уравнения (6.15) на основе применения неравенства Коши—Буняковского.

$\boxed{6.10}$ Решить уравнение

$$x\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+x-1}\cdot\sqrt{2x+3}\,. \qquad (6.17)$$

Решение. Пусть $\bar{a}\left(x;\sqrt{x-1}\right)$ и $\bar{b}\left(\sqrt{2x-1};2\right)$. Тогда $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{x^2+x-1}$, $\left|\bar{b}\right|=\sqrt{2x+3}$ и формула (6.3) принимает вид $\bar{a}\circ\bar{b}=x\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1}$.

В таком случае из уравнения (6.17) следует равенство $\bar{a}\circ\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|$, наличие которого свидетельствует о том, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные.

Следовательно, имеем уравнение

$$\frac{x}{\sqrt{2x-1}}=\frac{\sqrt{x-1}}{2}, \tag{6.18}$$

где $x\geq 1$. Возведем в квадрат обе части уравнения (6.18), тогда $\frac{x^2}{2x-1}=\frac{x-1}{4}$ или $2x^2+3x-1=0$.

Корнями квадратного уравнения являются $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$. Однако ранее было отмечено, что $x\geq 1$. Так как $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}<1$, то уравнение (6.17) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

$\boxed{6.11.}$ Решить уравнение

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{\left(x^2+4\right)\cdot\left(x+24\right)}. \tag{6.19}$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (6.19) являются $x>1$.

Пусть $\bar{a}\left(2;x\right)$ и $\bar{b}\left(\sqrt{x-1};5\right)$. Тогда $\bar{a}\circ\bar{b}=2\sqrt{x-1}+5x$ и $\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|=$ $=\sqrt{\left(x^2+4\right)\cdot\left(x+24\right)}$. Следовательно, уравнение (6.19) представляет собой равенство $\bar{a}\circ\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|$. Отсюда следует, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ являются коллинеарными. В этой связи можно записать уравнение

$$\frac{2}{\sqrt{x-1}}=\frac{x}{5}. \tag{6.20}$$

Обозначим $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$ и $g(x)=\frac{x}{5}$. Функция $y=f(x)$ является непрерывной и убывающей при $x>1$, а функция $y=g(x)$ — непрерывной и возрастающей на всей числовой оси OX. Поэтому уравнение (6.20) имеет не более одного корня. Подбором находим его единственный корень $x_1=5$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=5$.

6.12. Решить уравнение

$$\sqrt{(x+y)^2+(2x-y)^2+1}+\sqrt{(2y-x)^2+(y+1)^2+9}=$$
$$=\sqrt{9y^2+(2x+1)^2+16}. \qquad (6.21)$$

Решение. Положим $\bar{a}(x+y;2x-y;1)$ и $\bar{b}(2y-x;y+1;3)$. Тогда $|\bar{a}|=\sqrt{(x+y)^2+(2x-y)^2+1}$ и $|\bar{b}|=\sqrt{(2y-x)^2+(y+1)^2+9}$. Пусть $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$, тогда $\bar{c}(3y;2x+1;4)$ и $|\bar{c}|=\sqrt{9y^2+(2x+1)^2+16}$.

В таком случае из уравнения (6.21) вытекает равенство $|\bar{a}|+|\bar{b}|=|\bar{a}+\bar{b}|$. Следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ являются коллинеарными. В этой связи имеет место $\frac{x+y}{2y-x}=\frac{2x-y}{y+1}=\frac{1}{3}$. Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{x+y}{2y-x}=\frac{1}{3},\\ \frac{2x-y}{y+1}=\frac{1}{3}\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}4x+y=0,\\ 6x-4y=1.\end{cases}$$

Корнями последней системы уравнений являются $x_1=\frac{1}{22}$ и $y_1=-\frac{2}{11}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{1}{22}$, $y_1=-\frac{2}{11}$.

6.13. Решить уравнение

$$\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4. \qquad (6.22)$$

Решение. Введем в рассмотрение векторы $\bar{a}\left(\sqrt{3}\sin x;\, 2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x\right)$ и $\bar{b}\left(2-\sqrt{3}\sin x;\, \sqrt{3}\cos x\right)$, тогда $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{15-12\cos x}$ и $\left|\bar{b}\right|=\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}$.

Пусть $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$. В таком случае вектор $\bar{c}\left(c_1;c_2\right)$ имеет координаты $c_1=\sqrt{3}\sin x+2-\sqrt{3}\sin x=2$ и $c_2=2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}$, а его длина равна $\left|\bar{c}\right|=\sqrt{4+12}=4$.

Нетрудно видеть, что уравнение (6.22) представляет собой равенство $\left|\bar{a}\right|+\left|\bar{b}\right|=\left|\bar{a}+\bar{b}\right|$. Следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные, а еще точнее, сонаправленые. А этот факт означает, что их одноименные координаты пропорциональны и их отношение больше нуля, т. е. имеет место система

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2-\sqrt{3}\sin x}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{3}\cos x}, \\ \dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2-\sqrt{3}\sin x}>0. \end{cases} \qquad (6.23)$$

Из уравнения системы (6.23) следует $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+$ $+\dfrac{1}{2}\cos x=1$, $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ и $x_1=\dfrac{\pi}{3}\left(6n+1\right)$, где n — целое число.

Так как $\sqrt{3}\sin x<2$, то из неравенства $\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2-\sqrt{3}\sin x}>0$ получаем неравенство $\sin x>0$, которое выполняется для $x_1=\dfrac{\pi}{3}\left(6n+1\right)$, где n — целое число. Следовательно, найденные значения x удовлетворяют системе (6.23).

♦ ***Ответ:*** $x_1=\dfrac{\pi}{3}\left(6n+1\right)$, где n — целое число.

$\boxed{6.14}$ Решить в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x+y^2+z^3=2, \\ x^2+y^3+z^4=4, \\ x^3+y^4+z^5=8. \end{cases} \tag{6.24}$$

Решение. Рассмотрим два вектора $\bar{a}\left(\sqrt{x};y;z\sqrt{z}\right)$ и $\bar{b}\left(x\sqrt{x};y^2;z^2\sqrt{z}\right)$. Тогда с учетом первого и третьего уравнений системы (6.24) можно определить $|\bar{a}|=\sqrt{x+y^2+z^3}=\sqrt{2}$ и $|\bar{b}|=\sqrt{x^3+y^4+z^5}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Вычислим косинус угла ω, образованного векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по формуле (6.4), т. е.

$$\cos\omega=\frac{\bar{a}\circ\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{x^2+y^3+z^4}{\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{4}{4}=1.$$

Отсюда следует, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные, а это означает, что их одноименные координаты пропорциональны, т. е. $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{y^2}{y}=$ $=\frac{z^2\sqrt{z}}{z\sqrt{z}}$ или $x=y=z$. В таком случае система уравнений (6.24) принимает вид

$$\begin{cases} x+x^2+x^3=2, \\ x^2+x^3+x^4=4, \\ x^3+x^4+x^5=8. \end{cases} \tag{6.25}$$

Так как $x+x^2+x^3=x\left(1+x+x^2\right)>0$ и $1+x+x^2>0$, то $x>0$. Кроме того, из первого уравнения системы (6.25) следует, что $x<1$, поскольку в противном случае $x+x^2+x^3\geq3$. В тоже время из второго уравнения этой системы получаем $x>1$, так как иначе $x^2+x^3+x^4\leq3$.

Следовательно, система уравнений (6.25) несовместна, т. е. система уравнений (6.24) не имеет корней.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

$\boxed{6.15}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4, \\ x^2+y^2-6x+5=0. \end{cases} \tag{6.26}$$

Решение. Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ имеют координаты $(x+2;y)$ и $(x-2;y)$, соответственно. Тогда $|\bar{a}|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ и $|\bar{b}|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$. Пусть $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$. Тогда координатами вектора $\bar{c}$ являются $(4;0)$ и $|\bar{c}|=4$. В таком случае из первого уравнения системы (6.26) следует, что $|\bar{a}|+|\bar{b}|=|\bar{c}|$, а это означает, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные.

Так как векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные, то $\frac{x+2}{x-2}=\frac{y}{y}$. Если при этом $y\neq 0$, то соотношение $\frac{x+2}{x-2}=1$ противоречиво.

Пусть $y=0$. Тогда из (6.26) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |x+2|+|x-2|=4, \\ x^2-6x+5=0, \end{cases}$$

которая имеет единственный корень $x_1=1$.

Поскольку $|\bar{a}|+|\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ противоположно направленные. Следовательно, при $x_1=1$ должно выполняться неравенство $\frac{x+2}{x-2}<0$. Легко можно убедиться, что это действительно так.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=0$.

$\boxed{6.16}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=\sqrt{13}, \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}=7. \end{cases} \tag{6.27}$$

Решение. Пусть $\bar{a}(x;1)$, $\bar{b}(y;2)$, $\bar{c}(z;3)$ и $\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$. Тогда, с учетом первого уравнения системы (6.27) имеем $\bar{s}(\sqrt{13};6)$ и $|\bar{s}|=\sqrt{13+36}=7$. Так как при этом $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+1}$, $|\bar{b}|=\sqrt{y^2+4}$ и $|\bar{c}|=\sqrt{z^2+9}$, то из второго уравнения системы (6.27) следует равенство $|\bar{a}|+|\bar{b}|+|\bar{c}|=|\bar{s}|$, где $\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

Из равенства $|\bar{a}|+|\bar{b}|+|\bar{c}|=|\bar{s}|$ следует, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{s}$ являются коллинеарными, т. е. $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{\sqrt{13}}{6}$. Отсюда получаем $x_1=\frac{\sqrt{13}}{6}$, $y_1=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $z_1=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{\sqrt{13}}{6}$, $y_1=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $z_1=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

$\boxed{6.17}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z+t=6, \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-z^2}+\sqrt{16-t^2}=8. \end{cases} \qquad (6.28)$$

Решение. Определим на плоскости векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ следующим образом: $\bar{a}\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$, $\bar{b}\left(y,\sqrt{4-y^2}\right)$, $\bar{c}\left(z,\sqrt{9-z^2}\right)$, $\bar{d}\left(t,\sqrt{16-t^2}\right)$. В таком случае $|\bar{a}|=\sqrt{x^2-\left(1-x^2\right)}=1$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$ и $|\bar{d}|=4$.

Пусть $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}=\bar{s}$, тогда из системы уравнений (6.28) следует, что координатами вектора $\bar{s}(s_1;s_2)$ являются $s_1=6$ и $s_2=8$, т. е. $|\bar{s}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$. Поскольку $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}=\bar{s}$, то

$$|\bar{a}|+|\bar{b}|+|\bar{c}|+|\bar{d}|\ge|\bar{s}|. \qquad (6.29)$$

Ранее было установлено, что $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$, $|\bar{d}|=4$ и $|\bar{s}|=10$. Отсюда следует, что неравенство (6.29) превращается в равенство. А это означает, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ и $\bar{s}$ являются коллинеарными.

Следовательно, имеет место

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}=\frac{z}{\sqrt{9-z^2}}=\frac{t}{\sqrt{16-t^2}}=\frac{3}{4}. \qquad (6.30)$$

Корнями системы уравнений (6.30) являются $x_1=\frac{3}{5}$, $y_1=1\frac{1}{5}$, $z_1=1\frac{4}{5}$ и $t_1=2\frac{2}{5}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{3}{5}$, $y_1=1\frac{1}{5}$, $z_1=1\frac{4}{5}$, $t_1=2\frac{2}{5}$.

$\boxed{6.18.}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+y-2}. \end{cases} \qquad (6.31)$$

Решение. Из системы уравнений (6.31) имеем $x>1$. Пусть $\bar{a}(x,y)$ и $\bar{b}\left(\sqrt{y-1},\sqrt{x-1}\right)$. Тогда $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=2$ и $\left|\bar{b}\right|=\sqrt{x+y-2}$. Вычислим скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, тогда $\bar{a}\circ\bar{b}=x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}$.

Так как $\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|=2\sqrt{x+y-2}$, то из второго уравнения (6.31) следует, что $\bar{a}\circ\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|$, а это равенство означает, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ являются коллинеарными. Следовательно, $\frac{x}{\sqrt{y-1}}=\frac{y}{\sqrt{x-1}}$ или $x\sqrt{x-1}=y\sqrt{y-1}$.

Введем в рассмотрение функцию $f(x)=x\sqrt{x-1}$. Тогда получаем функциональное уравнение $f(x)=f(y)$ (методы решения функциональных уравнений приведены в разделе 5). Поскольку функция $f(x)=x\sqrt{x-1}$ является возрастающей при $x>1$, то из уравнения $f(x)=f(y)$ следует $x=y$. В таком случае первое уравнение системы (6.31) принимает вид $x^2+x^2=4$, откуда следует $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$. Так как $x>1$, то окончательно получаем $x_1=y_1=\sqrt{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\sqrt{2}$, $y_1=\sqrt{2}$.

6.19. Пусть $\overline{a}(2;1;1)$, $\overline{b}(1;2;1)$, $\overline{c}(1;1;2)$ и $\overline{d}(7;8;9)$. Выразить вектор $\overline{d}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Решение. Будем искать представление вектора $\overline{d}$ в виде

$$\overline{d} = x_1\overline{a} + x_2\overline{b} + x_3\overline{c}. \tag{6.31}$$

Принимая во внимание координаты векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ и формулу (6.31), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \end{cases}$$

решая которую получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

В таком случае формула (6.31) принимает вид $\overline{d} = \overline{a} + 2\overline{b} + 3\overline{c}$.

♦ ***Ответ:*** $\overline{d} = \overline{a} + 2\overline{b} + 3\overline{c}$.

6.20. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в одной плоскости и образуют попарно друг с другом угол 120°. Разложить вектор $\overline{a}$ по векторам $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$ и $|\overline{c}| = 1$.

Решение. Требуется найти представление вектора $\overline{a}$ в виде

$$\overline{a} = p\overline{b} + q\overline{c}. \tag{6.32}$$

Вектор $\overline{a}$, представленный посредством (6.32), умножим скалярно сначала на вектор $\overline{b}$, а затем на вектор $\overline{c}$, тогда

$$\begin{cases} \overline{a} \circ \overline{b} = p\overline{b} \circ \overline{b} + q\overline{b} \circ \overline{c}, \\ \overline{a} \circ \overline{c} = p\overline{b} \circ \overline{c} + q\overline{c} \circ \overline{c}. \end{cases} \tag{6.33}$$

Поскольку векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют попарно друг с другом угол 120° и $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $|\overline{c}| = 1$, то

$$\overline{a} \circ \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos 120^\circ = 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3,$$

$$\bar{b}\circ\bar{c}=|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos 120^\circ=2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,$$

$$\bar{a}\circ\bar{c}=|\bar{a}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos 120^\circ=3\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2},$$

$$\bar{b}\circ\bar{b}=|\bar{b}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 0^\circ=4 \text{ и } \bar{c}\circ\bar{c}=|\bar{c}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos 0^\circ=1.$$

В таком случае из системы (6.33) получаем систему уравнений относительно неизвестных p и q следующего вида:

$$\begin{cases} -3=4p-q, \\ -\dfrac{3}{2}=-p+q. \end{cases} \qquad (6.34)$$

Корнями системы уравнений (6.34) являются $p_1=-\frac{3}{2}$ и $q_1=-3$.

Следовательно, искомое разложение (6.32) имеет вид $\bar{a}=-\frac{3}{2}\bar{b}-3\bar{c}$.

♦ ***Ответ:*** $\bar{a}=-\frac{3}{2}\bar{b}-3\bar{c}$.

6.21. Найти минимальное значение функции

$$F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2+6x-4y+13}.$$

Решение. Представим функцию $F(x,y)$ в виде

$$F(x,y)=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}. \qquad (6.35)$$

Введем на плоскости векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ с координатами $(x-2;y+1)$ и $(x+3;y-2)$, соответственно. Так как $|\bar{a}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$ и $|\bar{b}|=$ $=\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}$, то из формулы (6.35) следует, что $F(x,y)=|\bar{a}|+|\bar{b}|$.

Пусть $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$, тогда координатами вектора $\bar{c}$ являются $(-5;3)$ и $|\bar{c}|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

Поскольку $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$, то $|\bar{a}|+|\bar{b}|\geq|\bar{a}-\bar{b}|$ и $F(x,y)\geq\sqrt{34}$. Теперь необходимо показать, что полученная нижняя оценка функции $F(x,y)$ достижима, т. е. существуют такие значения $x = x_1$ и $y = y_1$, при которых функция $F(x, y)$ принимает значение $\sqrt{34}$.

Если $F(x,y) = \sqrt{34}$, то $|\bar{a}| + |\bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$, т. е. векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные. Отсюда следует, что $\dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{y+1}{y-2}$ или $x = \dfrac{1-5y}{3}$. Положим $y_1 = -1$, тогда $x_1 = \dfrac{1-5y_1}{3} = 2$.

Если значения x_1 и y_1 подставить в (6.35), то $F(2,-1) = \sqrt{34}$. Следовательно, минимальное значение функции $F(x, y)$ равно $\sqrt{34}$.

♦ ***Ответ:*** $F_{\min} = \sqrt{34}$.

РАЗДЕЛ 7

Комбинированные методы

При решении сложных задач по математике используются самые разнообразные нестандартные методы, большинство из которых трудно поддается классификации. Как правило, такие методы ориентированы на решении относительно узкого круга задач, однако их знание и умение ими пользоваться весьма необходимо для успешного решения математических задач повышенной сложности. В настоящем разделе приведены задачи, решение которых базируется на применении оригинальных (эффективных, но сравнительно редко встречающихся) комбинированных методов.

Задачи и решения

$\boxed{7.1.}$ Решить уравнение

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0. \tag{7.1}$$

Решение. Рассмотрим уравнение с параметром a вида

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0, \tag{7.2}$$

которое совпадает с уравнением (7.1) при условии, что $a=\sqrt{2}$.

Представим уравнение (7.2) в виде квадратного уравнения относительно неизвестной переменной a, т. е. $a^2-ax^2+x^3-x^2=0$. Решая квадратное уравнение, получаем

$$a_{1,2}=\frac{x^2\pm\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}}{2}=\frac{x^2\pm x(x-2)}{2},$$

или $a_1 = x^2 - x$, $a_2 = x$.

Поскольку $a = \sqrt{2}$, то имеем два уравнения относительно переменной x вида $x^2 - x - \sqrt{2} = 0$ и $x = \sqrt{2}$. Отсюда нетрудно получить три корня уравнения (7.1), т. е.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2} \text{ и } x_3 = \sqrt{2}.$$

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$.

7.2. Решить уравнение

$$x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0. \tag{7.3}$$

Решение. Перепишем уравнение (7.3) в виде уравнения с параметром a, которое совпадает с (7.3) при $a = \sqrt{3}$, т. е. имеем $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$. Полученное уравнение является квадратным уравнением относительно параметра a, которое имеет вид

$$a^2 - a\left(2x^2 + 1\right) + x^4 + x = 0. \tag{7.4}$$

Квадратное уравнение (7.4) имеет два корня

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x - 1)}{2},$$

т. е. $a_1 = x^2 + x$ и $a_2 = x^2 - x + 1$. Так как $a = \sqrt{3}$, то получаем два уравнения относительно переменной x вида $x^2 + x - \sqrt{3} = 0$ и $x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0$, корнями которых являются

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2} \text{ и } x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}.$$

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$, $x_3 = \dfrac{1 + \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$, $x_4 = \dfrac{1 - \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$.

7.3. Решить уравнение

$$x^3-\left(\sqrt{7}+1\right)x^2+x+7-\sqrt{7}=0. \qquad (7.5)$$

Решение. Вместо уравнения (7.5) будем рассматривать уравнение

$$x^3-(p+1)x^2+x+p^2-p=0,$$

которое совпадает с уравнением (7.5) при $p=\sqrt{7}$.

Перепишем данное уравнение в виде квадратного относительно параметра p, т. е. в виде

$$p^2-p\left(x^2+1\right)+x^3-x^2+x=0. \qquad (7.6)$$

Корнями уравнения (7.6) являются

$$p_{1,2}=\frac{x^2+1\pm\sqrt{\left(x^2+1\right)^2-4\left(x^3-x^2+x\right)}}{2}=$$

$$=\frac{x^2+1\pm\sqrt{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}}{2}=\frac{x^2+1\pm\sqrt{(x-1)^4}}{2}=\frac{x^2+1\pm(x-1)^2}{2}.$$

Отсюда получаем $p_1=x$ и $p_2=x^2-x+1$. Так как $p=\sqrt{7}$, то $x=\sqrt{7}$ и $x^2-x+1-\sqrt{7}=0$. Отсюда получаем три корня уравнения (7.5), т. е. $x_1=\sqrt{7}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$ и $x_3=\dfrac{1-\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\sqrt{7}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$, $x_3=\dfrac{1-\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$.

7.4. Решить уравнение

$$\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}}=x-5. \qquad (7.7)$$

Решение. Первоначально определим область допустимых значений переменной x в уравнении (7.7). Имеет место

$$\begin{cases}45-2x\geq 0,\\ 35-2\sqrt{45-2x}\geq 0,\\ x-5\geq 0,\end{cases}$$

откуда следует, что $5 \le x \le 22{,}5$.

Введем новую переменную $y = \sqrt{45-2x}$, тогда $x = \dfrac{45-y^2}{2}$ и уравнение (7.7) принимает вид

$$2\sqrt{35-2y} = 35 - y^2, \tag{7.8}$$

где $0 \le y \le \sqrt{35}$. Возводить в квадрат обе части уравнения (7.8) нецелесообразно, поскольку в таком случае получаем уравнение четвертой степени относительно переменной y.

Рассмотрим уравнение с параметром a вида

$$2\sqrt{a-2y} = a - y^2, \tag{7.9}$$

которое совпадает с уравнением (7.8) при $a = 35$. После возведения в квадрат обеих частей уравнения (7.9) получаем уравнение второй степени относительно параметра a, т. е. $a^2 - 2a\left(y^2+2\right) + y^4 + 8y = 0$ или

$$a_{1,2} = y^2 + 2 \pm \sqrt{y^4 + 4y^2 + 4 - y^4 - 8y} =$$

$$= y^2 + 2 \pm \sqrt{4y^2 - 8y + 4} = y^2 + 2 \pm 2(y-1).$$

Отсюда следует $a_1 = y^2 + 2y$ и $a_2 = y^2 - 2y + 4$. Так как $a = 35$, то имеем совокупность двух уравнений относительно переменной y, т. е. $y^2 + 2y - 35 = 0$ и $y^2 - 2y - 31 = 0$, из которой получаем единственный ее корень $y_1 = 5$, который удовлетворяет условию $0 \le y \le \sqrt{35}$.

Так как $x = \dfrac{45-y^2}{2}$ и $y_1 = 5$, то $x_1 = 10$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 10$.

$\boxed{7.5.}$ Решить уравнение

$$x + \sqrt{3+\sqrt{x}} = 3. \tag{7.10}$$

Решение. Обозначим $3 + \sqrt{x} = y$, тогда из уравнения (7.10) получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{y} = 3, \\ 3 + \sqrt{x} = y. \end{cases} \tag{7.11}$$

Из системы уравнений (7.11) следует, что $0 \le x \le 3-\sqrt{3}$ и $y \ge 3$. Если сложить оба уравнения системы (7.11), то получим $x+\sqrt{y}+3+\sqrt{x}=3+y$, $x-y+\sqrt{x}+\sqrt{y}=0$ или

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+1\right)=0. \qquad (7.12)$$

Поскольку $\sqrt{x} \ge 0$, $y \ge 3$, то $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$. Следовательно, из уравнения (7.12) получаем $\sqrt{x}-\sqrt{y}+1=0$ или $\sqrt{y}=\sqrt{x}+1$. Отсюда следует $y=\left(\sqrt{x}+1\right)^2$ или $y=x+2\sqrt{x}+1$. Поскольку $3+\sqrt{x}=y$, то $3+\sqrt{x}=$ $=x+2\sqrt{x}+1$ или $x+\sqrt{x}-2=0$, решая которое относительно переменной $\sqrt{x}$, получаем $\sqrt{x}=1$ или $x_1=1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$.

***Примечание* 1.** Уравнение (7.10) можно решить методом введения параметра. Для этого необходимо решить относительно параметра a уравнение $x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a$, которое совпадает с уравнением (7.10) при $a=3$.

***Примечание* 2.** Имеется еще один метод решения уравнения (7.10). Пусть $f(x)=x+\sqrt{3+\sqrt{x}}$, тогда нетрудно установить, что функция $y=f(x)$ является непрерывной и возрастающей на области ее определения $x \ge 0$. В этой связи уравнение (7.10) имеет не более одного корня. Подбором можно установить, что $x_1=1$ является единственным корнем уравнения (7.10).

7.6 Решить уравнение

$$\sqrt{5-x}=x^2-5. \qquad (7.13)$$

Решение. Так как $5-x \ge 0$ и $x^2-5 \ge 0$, то областью допустимых значений переменной x в уравнении (7.13) являются $x \le -\sqrt{5}$ и $\sqrt{5} \le x \le 5$.

Обозначим $\sqrt{5-x}=y$, тогда $5=y^2+x$ и уравнение (7.13) принимает вид $y=x^2-y^2-x$, откуда получаем уравнение $(x+y)(x-y-1)=0$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x+y=0$, тогда $x+\sqrt{5-x}=0$. Так как $\sqrt{5-x} \ge 0$, то $x \le 0$ и $x \le -\sqrt{5}$. Из уравнения $x+\sqrt{5-x}=0$ получаем $x^2+x-5=0$, от-

куда следует, что $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$. Так как $x\le-\sqrt{5}$, то уравнение $x+\sqrt{5-x}=0$ имеет единственный корень $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

2. Пусть $x-y-1=0$, тогда $x-1=\sqrt{5-x}$, где $\sqrt{5}\le x\le 5$. Возведем обе части данного уравнения в квадрат и получим квадратное уравнение $x^2-x-4=0$, корнями которого являются $x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. Поскольку $\sqrt{5}\le x\le 5$, то уравнение $x-1=\sqrt{5-x}$ имеет также единственный корень $x_3=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x_3=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Примечание. Уравнение (7.13) можно было решить методом введения параметра a (см. решение уравнений (7.1), (7.3), (7.5) и (7.8)).

$\boxed{7.7}$ Решить уравнение

$$8\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}. \tag{7.14}$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (7.14) являются $x\ne\dfrac{\pi}{2}n$, где n — целое число.

Из уравнения (7.14) получаем

$$4\sin^2 x\cdot\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x,\ 2\sin 2x\cdot\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\cos x-\cos 3x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\ \cos x-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x,$$

$$-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\cos 3x,\ \cos 3x+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0,$$

$$\cos 3x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=0,\ \cos 3x+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=0,$$

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

Рассмотрим совокупность из двух уравнений

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \text{ и } \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0,$$

корнями которых являются $x_1=\frac{\pi}{6}(6k+1)$ и $x_2=\frac{\pi}{12}(6m+5)$, где k, m — целые числа.

♦ *Ответ:* см. выше.

7.8. Решить уравнение

$$\arcsin^2 x+\arccos^2 x=\frac{5\pi^2}{32}. \quad (7.15)$$

Решение. Обозначим $\arccos x=y$, тогда $0\le y\le\pi$. Известно, что $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, поэтому $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-y$ и из уравнения (7.15) получаем уравнение относительно переменной y вида

$$\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2+y^2=\frac{5\pi^2}{32} \text{ или } 64y^2-32\pi y+3\pi^2=0.$$

Решая последнее уравнение, получаем $y_1=\frac{3\pi}{8}$ и $y_2=\frac{\pi}{8}$. Таким образом, имеет место

$$y_1=\arccos x_1=\frac{3\pi}{8} \text{ и } y_2=\arccos x_2=\frac{\pi}{8}.$$

Отметим, что найденные значения y удовлетворяют условию $0\le y\le\pi$.

Следовательно, $x_1=\cos\frac{3\pi}{8}$ и $x_2=\cos\frac{\pi}{8}$.

♦ *Ответ:* $x_1=\cos\frac{3\pi}{8}$, $x_2=\cos\frac{\pi}{8}$.

7.9. Решить уравнение

$$\lg(\operatorname{arctg} x)+\lg(\operatorname{arcctg} x)=0. \quad (7.16)$$

Решение. Используя свойства логарифмов, уравнение (7.16) можно переписать в виде

$$\mathrm{arctg}x \cdot \mathrm{arcctg}x = 1. \qquad (7.17)$$

Обозначим $\mathrm{arctg}x = y$. Так как $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}x < \frac{\pi}{2}$, а из уравнения (7.16) следует $\mathrm{arctg}x > 0$, то $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

Так как $\mathrm{arctg}x = y$, то из уравнения (7.17) получаем $\mathrm{arcctg}x = \frac{1}{y}$. Поскольку $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x = \frac{\pi}{2}$, то $y + \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$. Однако известно (см. неравенство (3.3)), если $y > 0$, то $y + \frac{1}{y} \ge 2$. В связи с тем, что $\frac{\pi}{2} < 2$, можно сделать вывод о том, что уравнение $y + \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$ корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

7.10 Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 3. \qquad (7.18)$$

Решение. Преобразуем уравнение (7.18), используя известное равенство $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, где $\sqrt{a} - \sqrt{b} \ne 0$, тогда

$$\frac{3x^2 - 5x + 7 - 3x^2 + 7x - 2}{\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2}} = 3 \text{ или}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = \frac{2x + 5}{3}. \qquad (7.19)$$

Если уравнение (7.18) сложить с уравнением (7.19), то получим уравнение $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \frac{x + 7}{3}$. Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, то $x \ge -7$. Возведем обе части уравнения в квадрат, и получим квадратное уравнение $26x^2 - 59x + 14 = 0$, корнями которого являются

$x_1=2$ и $x_2=\frac{7}{26}$. Непосредственной подстановкой в (7.18) убеждаемся, что найденные значения x являются его корнями.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2$, $x_2=\frac{7}{26}$.

Примечание. Проверка в примере $\boxed{7.10}$ требуется по той причине, что необходимо убедиться в том, что при найденных значениях x подкоренные выражения в уравнении (7.18) будут неотрицательны.

Кроме того, необходимо также убедиться, что $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq 0$, т. е. $\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+2}\neq 0$. Для этого достаточно значения x_1 и x_2 подставить в правую часть равенства (7.19), которая после подстановки должна принимать значения, отличные от нуля.

$\boxed{7.11}$ Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}\,. \qquad (7.20)$$

Решение. Преобразуем уравнение (7.20) на основе использования равенства $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, где $a\geq 0, b\geq 0$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$.

Тогда уравнение (7.20) принимает вид

$$\frac{3x^2-7x+3-3x^2+5x+1}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{x^2-2-x^2+3x-4}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}. \qquad (7.21)$$

Из уравнения (7.21) следует, что $x_1=2$. Непосредственной подстановкой в (7.20) убеждаемся, что найденное значение x является его корнем.

Покажем, что других корней уравнение (7.20) не имеет. Пусть $x\neq 2$. Тогда разделим обе части уравнения (7.21) на $x-2$ и получим

$$\frac{-2}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}. \qquad (7.22)$$

Поскольку левая часть уравнения (7.22) может принимать только отрицательные значения, а правая часть — только положительные значения, то уравнение (7.22) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 2$.

7.12. Решить уравнение

$$x = \left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x^2+x-7\right). \qquad (7.23)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (7.23) являются $x \ge -1$. Умножим обе части уравнения (7.23) на $\sqrt{x+1}-1$, тогда получим

$$x\left(\sqrt{x+1}-1\right) = \left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+x^2+x-7\right),$$

$$x\sqrt{x+1}-x = (x+1-1)\left(\sqrt{x+1}+x^2+x-7\right),$$

$$x\sqrt{x+1}-x = x\sqrt{x+1}+x^3+x^2-7x,$$

$$x^3+x^2-6x=0. \qquad (7.24)$$

Корнями уравнения (7.24) являются $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ и $x_3 = 2$. Однако $x_1 = 0$ — посторонний корень для уравнения (7.23), поскольку при этом значении x его левая часть уравнения равна 0, а правая часть меньше 0. Так как $x \ge -1$, то $x_2 = -3$ не может быть корнем уравнения (7.23). В этой связи $x_3 = 2$ – единственный корень уравнения (7.23).

♦ ***Ответ:*** $x_3 = 2$.

7.13. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1} = \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}. \qquad (7.25)$$

Решение. Возведем в куб обе части уравнения (7.25) и при этом воспользуемся формулой $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$. Тогда получим

$$x+x^3-x+1+3\cdot\sqrt[3]{x\left(x^3-x+1\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}\right) =$$

$$= x+1+x^3-x+3\cdot\sqrt[3]{(x+1)\left(x^3-x\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}\right).$$

Отсюда следует уравнение

$$\sqrt[3]{x\left(x^3-x+1\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{(x+1)\left(x^3-x\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}\right). \qquad (7.26)$$

Однако по условию $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}$, поэтому уравнение (7.26) принимает вид

$$\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^4-x^2+x}-\sqrt[3]{x^4+x^3-x^2-x}\right)=0.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{x^3-x+1}$, тогда $x=-x^3+x-1$ или $x^3=-1$. Следовательно, имеем $x_1=-1$.
2. Пусть $\sqrt[3]{x^4-x^2+x}=\sqrt[3]{x^4+x^3-x^2-x}$. Отсюда получаем $x^3-2x=0$ и $x_2=0$, $x_3=-\sqrt{2}$, $x_4=\sqrt{2}$.

Выполним проверку и убедимся в том, что все найденные значения переменной x являются корнями уравнения (7.25).

♦ ***Ответ:*** $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-\sqrt{2}$, $x_4=\sqrt{2}$.

$\boxed{7.14}$ Решить уравнение

$$\sqrt[4]{10+x^2+x}+\sqrt[4]{7-x^2-x}=3. \qquad (7.27)$$

Решение. Обозначим $\sqrt[4]{10+x^2+x}=u$ и $\sqrt[4]{7-x^2-x}=v$. Тогда из уравнения (7.27) вытекает система двух уравнений относительно переменных u, v вида

$$\begin{cases} u+v=3, \\ u^4+v^4=17, \end{cases} \qquad (7.28)$$

где $u\ge 0$ и $v\ge 0$.

Преобразуем левую часть второго уравнения системы (7.28) следующим образом:

$$u^4+v^4=\left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=\left((u+v)^2-2uv\right)^2-2u^2v^2.$$

Так как $u+v=3$, то имеем уравнение $(9-2uv)^2-2u^2v^2=17$. Отсюда получаем $uv=2$ и $uv=16$.

Рассмотрим две системы

$$\begin{cases} u+v=3, \\ uv=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} u+v=3, \\ uv=16. \end{cases}$$

Корнями первой системы являются $u_1=1, v_1=2$ и $u_2=2, v_2=1$, а вторая система корней не имеет.

Следовательно, $\sqrt[4]{10+x^2+x}=1$ и $\sqrt[4]{10+x^2+x}=2$. Отсюда получаем два уравнения относительно переменной x вида $x^2+x+9=0$ и $x^2+x-6=$ $=0$. Первое уравнение корней не имеет, а из второго следует $x_1=-3$ и $x_2=2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-3$, $x_2=2$.

$\boxed{7.15.}$ Решить уравнение

$$(x-2)^5-(x-3)^5=1. \tag{7.29}$$

Решение. Введем новые переменные $u=x-2$ и $v=x-3$, тогда получим систему уравнений относительно переменных u и v вида

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^5-v^5=1. \end{cases} \tag{7.30}$$

Для левой части второго уравнения системы (7.30) имеет место следующая цепочка равносильных преобразований:

$$u^5-v^5=(u-v)\cdot\left(u^4+u^3v+u^2v^2+uv^3+v^4\right)=$$

$$=(u-v)\cdot\left(u^4+v^4+uv\cdot\left(u^2+uv+v^2\right)\right)=$$

$$=(u-v)\cdot\left(\left((u-v)^2+2uv\right)^2-2u^2v^2+uv\cdot\left((u-v)^2+3\,uv\right)\right).$$

Отсюда с учетом уравнений системы (7.30) получим уравнение $(1+2uv)^2-2\,u^2v^2+uv(1+3uv)=1$ или $5u^2v^2+5uv=0$. Отсюда следует, что $uv=0$ и $uv=-1$. Рассмотрим два случая.

Если $uv=0$ и $u-v=1$, то $u_1=0$, $v_1=-1$ и $u_2=1$, $v_2=0$.

Если $uv=-1$ и $u-v=1$, то имеем квадратное уравнение $u^2-u+1=0$, которое корней не имеет.

Поскольку $u=x-2$, то $x=u+2$ и $x_1=u_1+2=2$, $x_2=u_2+2=3$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2$, $x_2=3$.

7.16. Решить уравнение

$$(x+8)(4-x)\left(\sqrt{x-8}+2\right)=6. \tag{7.31}$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (7.31) являются $x\geq 8$. В таком случае $x+8>0$, $4-x<0$, $\sqrt{x-8}+$ $+2>0$ и, следовательно, левая часть уравнения (7.31) на области допустимых значений x является отрицательной. Поскольку левая часть уравнения (7.31) принимает положительное значение, то уравнение (7.31) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

7.17. Решить уравнение

$$\left|x+\sqrt{x+2}\right|=\left|1+2x+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right|-\left|\sqrt{x+3}+x+1\right|. \tag{7.32}$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (7.32) являются $x\geq -2$. Перепишем уравнение в виде

$$\left|x+\sqrt{x+2}\right|+\left|\sqrt{x+3}+x+1\right|=\left|1+2x+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right|. \tag{7.33}$$

Нетрудно заметить, что для выражений, находящихся под знаком модуля, имеет место равенство

$$\left(x+\sqrt{x+2}\right)+\left(\sqrt{x+3}+x+1\right)=1+2x+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}.$$

Поскольку из равенства $|a|+|b|=|a+b|$ следует, что $ab\geq 0$, то из уравнения (7.33) получаем неравенство $\left(x+\sqrt{x+2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+x+1\right)\geq 0$, которое равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x+\sqrt{x+2}\geq 0, \\ \sqrt{x+3}+x+1\geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+\sqrt{x+2}\leq 0, \\ \sqrt{x+3}+x+1\leq 0. \end{cases}$$

Из первой системы неравенств получаем $x \geq -1$, а из второй системы следует $x_1 = -2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -2$, $x \geq -1$.

7.18. Решить уравнение

$$\frac{2x^2+x+4}{x^2+3} = \frac{3x^2+x+3}{2x^2+2}. \qquad (7.34)$$

Решение. Преобразуем уравнение (7.34), на основе использования следующего свойства пропорции: если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.

В таком случае уравнение (7.34) принимает вид

$$\frac{2x^2+x+4}{x^2+x+1} = \frac{3x^2+x+3}{x^2+x+1}. \qquad (7.35)$$

Поскольку $x^2+x+1>0$, то из уравнения (7.35) получаем уравнение $2x^2+x+4=3x^2+x+3$ или $x^2=1$, т. е. $x_{1,2}=\pm 1$. Следовательно, корнями уравнения (7.34) являются $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Примечание. Примененное выше свойство пропорции имеет более общую формулировку. Если

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{na+mb}{pa+qb} = \frac{nc+md}{pc+qd},$$

где n, m, p, q — произвольные действительные числа за тем лишь исключением, что $p^2+q^2 \neq 0$.

7.19. Решить уравнение

$$1+\sqrt{1+8x^2-6x\sqrt{1-x^2}} = 10x^2. \qquad (7.36)$$

Решение. Первоначально необходимо заметить, что

$$1+8x^2-6x\sqrt{1-x^2} = \left(3x-\sqrt{1-x^2}\right)^2.$$

В таком случае уравнение (7.36) принимает вид

$$\left|3x-\sqrt{1-x^2}\right| = 10x^2 - 1. \tag{7.37}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} x^2 \le 1, \\ 10x^2 \ge 1. \end{cases}$$

Таким образом, областью допустимых значений переменной x в уравнении (7.37) являются $\frac{1}{\sqrt{10}} \le |x| \le 1$.

Правую часть уравнения (7.37) можно представить в виде разности двух квадратов $10x^2 - 1 = (3x)^2 - \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2$ и поэтому из (7.37) следует

$$\left|3x-\sqrt{1-x^2}\right| = \left(3x-\sqrt{1-x^2}\right)\left(3x+\sqrt{1-x^2}\right). \tag{7.38}$$

Нетрудно видеть, что корни уравнения $3x-\sqrt{1-x^2}=0$ являются корнями уравнения (7.38). Из уравнения $\sqrt{1-x^2} = 3x$ следует, что $x \ge 0$. Далее, $1-x^2 = 9x^2$ или $x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. Однако $x \ge 0$, поэтому корнем уравнения (7.38) является $x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Положим теперь $3x-\sqrt{1-x^2} \ne 0$, тогда из (7.38) получаем уравнение $3x+\sqrt{1-x^2} = \pm 1$. Возведем обе части уравнения в квадрат, тогда

$$9x^2 + 6x\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 = 1$$

или

$$4x^2 + 3x\sqrt{1-x^2} = 0. \tag{7.39}$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{10}} \le |x| \le 1$, то $x \ne 0$ и из (7.39) получаем уравнение $3\sqrt{1-x^2} = -4x$. Отсюда вытекает, что $x < 0$. Возведем в квадрат обе части уравнения, тогда $25x^2 = 9$ или $x = \pm\frac{3}{5}$. Так как здесь $x < 0$, то $x_2 = -\frac{3}{5}$ — второй корень уравнения (7.38).

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $x_2 = -\frac{3}{5}$.

7.20 Решить уравнение

$$\sqrt{6x^2-40x+150}-\sqrt{4x^2-60x+100}=2x-10. \qquad (7.40)$$

Решение. Обозначим $\sqrt{6x^2-40x+150}=y$ и $\sqrt{4x^2-60x+100}=z$. Тогда уравнение (7.40) принимает вид $y-z=2(x-5)$. Кроме того, имеет место $y^2+z^2=\left(6x^2-40x+150\right)+\left(4x^2-60x+100\right)=10(x-5)^2$.

Следовательно, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y-z=2(x-5), \\ y^2+z^2=10(x-5)^2, \end{cases} \qquad (7.41)$$

где $y\geq 0$ и $z\geq 0$.

Из системы уравнений (7.41) нетрудно получить квадратное уравнение относительно переменных y и z вида $3y^2-10yz+3z^2=0$.

Пусть $z=0$, тогда из уравнения $3y^2-10yz+3z^2=0$ следует, что $y=0$. Тогда из второго уравнения системы имеем $x=5$. Однако подстановкой найденного значения x в уравнение (7.40) убеждаемся в том, что это значение не является его корнем.

Пусть теперь $z>0$. Тогда обе части уравнения $3y^2-10yz+3z^2=0$ разделим на z^2 и получим уравнение $3k^2-10k+3=0$, где $k=\frac{y}{z}$. Корнями уравнения $3k^2-10k+3=0$ являются $k_1=3$ и $k_2=\frac{1}{3}$.

Рассмотрим два случая.

1. Если $k_1=3$, то $\frac{y}{z}=3$ или $y=3z$. В таком случае имеем уравнение $\sqrt{6x^2-40x+150}=3\sqrt{4x^2-60x+100}$ или $3x^2-50x+75=0$. Корнями последнего уравнения являются $x_1=15$ и $x_2=\frac{5}{3}$.

2. Если $k_2=\frac{1}{3}$, то $\frac{y}{z}=\frac{1}{3}$ или $3y=z$. Тогда

$$3\sqrt{6x^2-40x+150}=\sqrt{4x^2-60x+100} \text{ или } 5x^2-3x+125=0.$$

Однако уравнение $5x^2 - 3x + 125 = 0$ действительных корней не имеет (его дискриминант отрицательный).

Для завершения решения задачи необходимо в уравнение (7.40) подставить значения $x_1 = 15$, $x_2 = \frac{5}{3}$ и убедиться в том, что они являются его корнями.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 15$, $x_2 = \frac{5}{3}$.

Примечание. Рассмотрим другой метод решения уравнения (7.40). Для этого первоначально убедимся в том, что $x = 5$ не является его корнем (непосредственной подстановкой это просто сделать).

Пусть $x \neq 5$. Тогда обе части уравнения (7.40) разделим на $x - 5$ и получим

$$\sqrt{\frac{6x^2 - 40x + 150}{(x-5)^2}} - \sqrt{\frac{4x^2 - 60x + 100}{(x-5)^2}} = 2,$$

$$\sqrt{\frac{5(x-5)^2 + (x+5)^2}{(x-5)^2}} - \sqrt{\frac{5(x-5)^2 - (x+5)^2}{(x-5)^2}} = 2,$$

$$\sqrt{5 + \left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2} - \sqrt{5 - \left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2} = 2. \qquad (7.42)$$

Если положить $\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2 = y$, то уравнение (7.42) принимает вид $\sqrt{5+y} - \sqrt{5-y} = 2$, где $y \geq 0$. Уравнение $\sqrt{5+y} = 2 + \sqrt{5-y}$ имеет не более одного корня (поскольку на отрезке $0 \leq y \leq 5$ левая его часть представляет собой непрерывную возрастающую функцию, а правая часть — непрерывную убывающую функцию). Этим корнем является $y_1 = 4$.

Так как $\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2 = y$, то $\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2 = 4$ или $\frac{x+5}{x-5} = \pm 2$. Рассматривая два случая, получаем корни заданного уравнения $x_1 = 15$ и $x_2 = \frac{5}{3}$.

7.21. Решить уравнение

$$\left(x^2 + 3x\right)^2 + 9x^2 = 7(x+3)^2. \qquad (7.43)$$

Решение. Если левую часть уравнения (7.43) преобразовать по формуле $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$, то

$$\left(x^2 + 3x - 3x\right)^2 + 2 \cdot \left(x^2 + 3x\right) \cdot 3x = 7(x+3)^2$$

или

$$x^4+6x^2(x+3)-7(x+3)^2=0. \qquad (7.44)$$

Уравнение (7.44) относится к однородным уравнениям второй степени. Поэтому для его решения необходимо вначале убедиться в том, что $x=-3$ не является его корнем, а затем обе его части разделить на $(x+3)^2$.

Если при этом обозначить $\frac{x^2}{x+3}=y$, то в результате приведенных выше действий получим квадратное уравнение относительно переменной y вида $y^2+6y-7=0$. Нетрудно видеть, что $y_1=-7$ и $y_2=1$.

Так как $\frac{x^2}{x+3}=y$, то $\frac{x^2}{x+3}=-7$ и $\frac{x^2}{x+3}=1$. Отсюда получаем два квадратных уравнения $x^2+7x+21=0$ и $x^2-x-3=0$. Первое уравнение действительных корней не имеет (дискриминант уравнения отрицательный), а из второго уравнения следует $x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ и $x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

7.22. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+12=4x+6y, \\ |x-2|+y=4. \end{cases} \qquad (7.45)$$

Решение. Представим систему уравнений (7.45) в равносильном виде

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-3)^2=1, \\ |x-2|=4-y. \end{cases} \qquad (7.46)$$

Из второго уравнения системы (7.46) следует, что $y\le 4$. Возведем в квадрат обе его части и получим $(x-2)^2=(y-4)^2$. В таком случае из первого уравнения получаем $(y-4)^2+(y-3)^2=1$ или $y^2-7y+12=0$, корнями которого являются $y_1=4$ и $y_2=3$.

Если значения $y_1 = 4$ и $y_2 = 3$ подставить во второе уравнение системы (7.46), то $|x-2| = 0$ и $|x-2| = 1$. Отсюда получаем $x_1 = 2, x_2 = 1$ и $x_3 = 3$. Так как $y = 4 - |x-2|$, то корнями системы уравнений (7.46) являются $x_1 = 2$, $y_1 = 4$; $x_2 = 1$, $y_2 = 3$ и $x_3 = 3$, $y_3 = 3$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 2$, $y_1 = 4$; $x_2 = 1$, $y_2 = 3$; $x_3 = 3$, $y_3 = 3$.

$\boxed{7.23}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1. \end{cases} \qquad (7.47)$$

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы (7.47) и при этом воспользуемся известным равенством $a + b = \dfrac{a^2 - b^2}{a-b}$, где $a \neq b$.

Тогда

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{y}}\right)^2 - \left(\sqrt{x-\sqrt{y}}\right)^2}{\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}}} =$$

$$= \frac{x+\sqrt{y} - \left(x-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}}} = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}}} = 2$$

или

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{y}. \qquad (7.48)$$

Если принять во внимание первое уравнение системы (7.47) и уравнение (7.48), то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{y}. \end{cases} \qquad (7.49)$$

Если сложить уравнения системы (7.49), то $2\sqrt{x+\sqrt{y}} = \sqrt{y} + 2$. Возведя в квадрат обе части данного уравнения, получаем $4x - y = 4$.

Из второго уравнения системы (7.47) с помощью равенства $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a+b}$, где $a + b \neq 0$, получаем

$$\sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{y+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\sqrt{y-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{y+\sqrt{x}}+\sqrt{y-\sqrt{x}}}=$$

$$=\frac{y+\sqrt{x}-\left(y-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{y+\sqrt{x}}+\sqrt{y-\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y+\sqrt{x}}+\sqrt{y-\sqrt{x}}}=1$$

или

$$\sqrt{y+\sqrt{x}}+\sqrt{y-\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\,. \qquad (7.50)$$

Второе уравнение системы (7.47) и уравнение (7.50) образует систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1,\\ \sqrt{y+\sqrt{x}}+\sqrt{y-\sqrt{x}}=2\sqrt{x}.\end{cases} \qquad (7.51)$$

Складывая уравнения системы (7.51), получаем уравнение $2\sqrt{y+\sqrt{x}}=$ $=2\sqrt{x}+1$, после возведения в квадрат обеих частей которого следует $4x-4y=-1$.

Следовательно, имеет место система уравнений

$$\begin{cases}4x-y=4,\\ 4x-4y=-1,\end{cases}$$

корнями которой являются $x_1=\frac{17}{12}$ и $y_1=\frac{5}{3}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{17}{12}$, $y_1=\frac{5}{3}$.

Примечание. Так как $x=0$ и $y=0$ не являются корнями системы уравнений (7.47), то $\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}\neq 0$ и $\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}\neq 0$. Поэтому приведенные выше преобразования уравнений системы (7.47) обоснованы.

7.24 Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+5y^2-4xy+2x-6y+2=0,\\ 3x^2-2y^2+xy-3x+2y-1=0.\end{cases} \qquad (7.52)$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы (7.52) следующим образом:

$$x^2+5y^2-4xy+2x-6y+2=0,$$

$$x^2+2x(1-2y)+(1-2y)^2-(1-2y)^2+5y^2-6y+2=0,$$

$$(x-2y+1)^2+y^2-2y+1=0,\ (x-2y+1)^2+(y-1)^2=0.$$

Отсюда следует, что первое уравнение системы (7.52) равносильно системе уравнений $x-2y+1=0$ и $y-1=0$, корни которой равны $x_1=1$ и $y_1=1$.

Подставляя найденные значения x_1 и y_1 во второе уравнение системы (7.52), убеждаемся в том, что $x_1=1$, $y_1=1$ являются корнями системы уравнений (7.52).

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=1$.

$\boxed{7.25.}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3-3xy=13, \\ x^2+y^2-xy-x-y=6. \end{cases} \qquad (7.53)$$

Решение. Воспользуемся равенством, которое нетрудно доказать путем раскрытия скобок в правой его части, т. е.

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\cdot\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right). \qquad (7.54)$$

Если в равенство (7.54) подставить $z=1$, то

$$x^3+y^3+1-3xy=(x+y+1)\cdot\left(x^2+y^2+1-xy-x-y\right). \qquad (7.55)$$

Перепишем систему уравнений (7.53) в равносильном виде следующим образом:

$$\begin{cases} x^3+y^3+1-3xy=14, \\ x^2+y^2+1-xy-x-y=7. \end{cases}$$

Отсюда и из уравнения (7.55) следует, что $x+y+1=2$ или $y=1-x$. Подставим $y=1-x$ во второе уравнение системы (7.53), тогда $x^2+(1-x)^2-$ $-x(1-x)-x-(1-x)=6$ или $x^2-x-2=0$.

Корнями уравнения $x^2-x-2=0$ являются $x_1=2$ и $x_2=-1$. Поскольку $y=1-x$, то $y_1=-1$ и $y_2=2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2$, $y_1=-1$; $x_2=-1$, $y_2=2$.

$\boxed{7.26}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y(xy-1)}{y^2+1}=\dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{x(xy-1)}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{7.56}$$

Решение. Вычтем из второго уравнения системы (7.56) первое уравнение, тогда

$$\frac{x(xy-1)\left(y^2+1\right)-y(xy-1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{(xy-1)\left(xy^2+x-yx^2-y\right)}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=\frac{1}{10}$$

или

$$\frac{(xy-1)^2(y-x)}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=\frac{1}{10}. \tag{7.57}$$

Из уравнений системы (7.56) следует, что $y^2+1=\dfrac{5y(xy-1)}{2}$ и $x^2+1=2x(xy-1)$. Если выражения для x^2+1 и y^2+1 подставить в уравнение (7.57), то получим

$$\frac{2(xy-1)^2(y-x)}{10xy(xy-1)^2}=\frac{1}{10},\quad \frac{2(y-x)}{xy}=1 \text{ или } y=\frac{2x}{2-x}.$$

Подставим выражение $y=\dfrac{2x}{2-x}$ во второе уравнение системы (7.56), тогда

$$\frac{x\left(\dfrac{2x^2}{2-x}-1\right)}{x^2+1}=\frac{1}{2},\quad 2x\left(\frac{2x^2}{2-x}-1\right)=x^2+1,$$

$$2x\left(2x^2-2+x\right)=\left(x^2+1\right)(2-x)\,,\; 5x^3-3x-2=0\,,$$

$$\left(5x^3-5\right)-(3x-3)=0\,,$$

$$(x-1)\left(5x^2+5x+2\right)=0. \qquad (7.58)$$

Если учесть, что $5x^2+5x+2>0$, то из уравнения (7.58) следует, что $x-1=0$ или $x_1=1$. Поскольку $y=\dfrac{2x}{2-x}$, то $y_1=2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=2$.

$\boxed{7.27.}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+\log_2 y=y\cdot\log_2 3+\log_2 x, \\ x\cdot\log_2 72+\log_2 x=2y+\log_2 y. \end{cases} \qquad (7.59)$$

Решение. Из условия задачи следует, что $x>0$ и $y>0$. Используя свойства логарифмов, преобразуем систему уравнений (7.59) следующим образом:

$$\begin{cases} 2^x\cdot y=3^y\cdot x, \\ 72^x\cdot x=2^{2y}\cdot y \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2^x\cdot y=3^y\cdot x, \\ 3^{2x}\cdot 2^{3x}\cdot x=2^{2y}\cdot y. \end{cases}$$

Из второй системы после перемножения левых и правых частей обоих уравнений получаем $xy\cdot 3^{2x}\cdot 2^{4x}=xy\cdot 3^y\cdot 2^{2y}$. Так как $x>0$ и $y>0$, то из последнего уравнения следует $12^{2x}=12^y$ или $y=2x$.

Подставим выражение $y=2x$ в уравнение $2^x\cdot y=3^y\cdot x$ и получим $2^x\cdot 2x=3^{2x}\cdot x$. Поскольку $x>0$, то $2^{x+1}=3^{2x}$.

Полученное уравнение прологарифмируем по основанию 2, тогда

$$x+1=2x\cdot\log_2 3 \text{ или } x_1=\frac{1}{2\log_2 3-1}.$$

Так как $y=2x$, то имеем $y_1=\dfrac{2}{2\log_2 3-1}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\dfrac{1}{2\log_2 3-1}$, $y_1=\dfrac{2}{2\log_2 3-1}$.

7.28. Решить уравнение

$$4\cdot\log_4\left(6x^2+\frac{3}{8x^2}+13\right)=2\cos\left(\frac{5\pi}{14+\sin\pi x}\right)+7. \qquad (7.60$$

Решение. Первоначально оценим снизу левую часть уравнения (7.60) применяя для этого неравенство Коши (3.1) при $n=6$. Так как

$$6x^2+\frac{3}{8x^2}=2x^2+2x^2+2x^2+\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{8x^2}\geq$$

$$\geq 6\cdot\sqrt[6]{2x^2\cdot 2x^2\cdot 2x^2\cdot\frac{1}{8x^2}\cdot\frac{1}{8x^2}\cdot\frac{1}{8x^2}}=6\cdot\frac{1}{2}=3,$$

то $6x^2+\frac{3}{8x^2}+13\geq 16$ или $4\cdot\log_4\left(6x^2+\frac{3}{8x^2}+13\right)\geq 8$.

Далее, оценим сверху правую часть уравнения (7.60). Поскольку $-1\leq\sin\pi x\leq 1$, то $\frac{\pi}{3}\leq\frac{5\pi}{14+\sin\pi x}\leq\frac{5\pi}{13}$. Известно, что функция $y=\cos x$ на отрезке $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ является непрерывно убывающей и поэтому $\cos\left(\frac{5\pi}{14+\sin\pi x}\right)\leq\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. В этой связи $2\cos\left(\frac{5\pi}{14+\sin\pi x}\right)+7\leq 8$.

Следовательно, равенство в уравнении (7.60) достигается только в том случае, когда обе его части равны 8. А это означает, что примененное выше неравенство Коши обращается в равенство и, кроме того, $\sin\pi x=1$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases}2x^2=\frac{1}{8x^2},\\ \sin\pi x=1.\end{cases} \qquad (7.61)$$

Из первого уравнения системы (7.61) получаем $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$. Однако только $x_1=\frac{1}{2}$ удовлетворяет второму уравнению системы (7.61).

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{1}{2}$.

7.29. Решить уравнение

$$\sqrt{8x-2x^2-6}+1=x\cdot\left(1-\log_5 x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right). \qquad (7.62$$

Решение. Для определения области допустимых значений переменной x в уравнении (7.62) рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} 8x - 2x^2 - 6 \ge 0, \\ x^2 - 4x + 3 \ge 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что приведенная выше система неравенств равносильна уравнению $x^2 - 4x + 3 = 0$, корнями которого являются $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Следовательно, в область допустимых значений переменной x входят только два значения $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

Непосредственной подстановкой в уравнение (7.62) убеждаемся, что только $x_1 = 1$ является его корнем.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1$.

7.30 Решить неравенство

$$\sqrt{9 - \frac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \frac{9}{x}}. \tag{7.63}$$

Решение. Первоначально определим область допустимых значений переменной x в неравенстве (7.63). Для этого рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} 9 - \dfrac{9}{x} \ge 0, \\ x - \dfrac{9}{x} \ge 0, \\ x - \sqrt{x - \dfrac{9}{x}} > 0, \\ x \ne 0, \end{cases}$$

из которой следует, что $x \ge 3$.

Возведем обе части неравенства (7.63) в квадрат, тогда

$$9 - \frac{9}{x} < x^2 - 2x \cdot \sqrt{x - \frac{9}{x}} + x - \frac{9}{x}$$

или

$$\left(x^2-9\right)+x>2x\cdot\sqrt{\frac{x^2-9}{x}}. \qquad (7.64)$$

Пусть $\sqrt{x^2-9}=a$ и $\sqrt{x}=b$. Тогда неравенство (7.64) принимает вид $a^2+b^2>2b^2\cdot\frac{a}{b}$ или $a^2+b^2>2ab$, где $a\ge 0$ и $b>0$.

Отсюда получаем неравенство $(a-b)^2>0$, которое имеет место для любых a и b, удовлетворяющих условию $a\ne b$. Следовательно,

$$\sqrt{x^2-9}\ne\sqrt{x},\ x^2-x-9\ne 0 \text{ или } x\ne\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}.$$

Поскольку неравенство (7.63) определено только для $x\ge 3$ и при этом $x\ne\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}$, то его решением является совокупность двух интервалов

$$3\le x<\frac{1+\sqrt{37}}{2} \text{ и } x>\frac{1+\sqrt{37}}{2}.$$

♦ ***Ответ:*** $3\le x<\frac{1+\sqrt{37}}{2}$ и $x>\frac{1+\sqrt{37}}{2}$.

7.31. Решить неравенство

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}. \qquad (7.65)$$

Решение. Область допустимых значений переменной x в неравенстве (7.65) определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}\ge 0, \\ 1-\dfrac{1}{x}\ge 0. \end{cases} \qquad (7.66)$$

Поскольку $1-\frac{1}{x}\ge 0$ или $\frac{x-1}{x}\ge 0$, то из неравенства (7.65) получаем $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>0$ или $\sqrt{x-\frac{1}{x}}>\sqrt{1-\frac{1}{x}}$, т. е. $x>1$.

Отметим, что $x>1$ удовлетворяет системе неравенств (7.66).

Преобразуем неравенство (7.65) следующим образом:

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>1-\frac{1}{x},$$

$$\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>1-\frac{1}{x},$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{x+1}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>1-\frac{1}{x}. \qquad (7.67)$$

Поскольку $x>1$, то $\sqrt{1-\frac{1}{x}}>0$. Тогда, если обе части неравенства (7.67) разделить на $\sqrt{1-\frac{1}{x}}$, то получим

$$\sqrt{x+1}-1>\sqrt{1-\frac{1}{x}},\ \left(\sqrt{x+1}\right)^2>\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2,$$

$$x+1>1+2\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x},\quad x-1>2\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x},$$

$$x^2-x>2x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1,\ x^2-x>2\sqrt{x^2-x}-1,$$

$$\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2>0.$$

Полученное неравенство выполняется на всей области допустимых значений переменной x, кроме случая, когда $\sqrt{x^2-x}=1$.

Из неравенства $\sqrt{x^2-x}\neq 1$ следует, что $x^2-x-1\neq 0$ или $x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Так как $x>1$, то решением неравенства (7.65) являются

$$1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{и}\ x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

♦ ***Ответ:*** $1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

7.32. Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2-x+1}{x-1}\right|<|x|+\frac{1}{|x-1|}, \tag{7.68}$$

где $x\neq 1$.

Решение. Поскольку

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\text{, то }\left|x^2-x+1\right|=x^2-x+1$$

и неравенство (7.68) равносильно неравенствам

$$\frac{x^2-x+1}{|x-1|}<|x|+\frac{1}{|x-1|},\ \frac{x^2-x}{|x-1|}<|x|,\ x^2-x<|x|\cdot|x-1|$$

или

$$x^2-x<\left|x^2-x\right|. \tag{7.69}$$

Поскольку правая часть неравенства (7.69) неотрицательна, то неравенство (7.68) выполняется только для таких x, при которых левая его часть строго отрицательна, т. е. $x^2-x<0$ или $x(x-1)<0$. Отсюда следует, что $0<x<1$.

♦ ***Ответ:*** $0<x<1$.

7.33. Доказать неравенство

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\leq 2, \tag{7.70}$$

где $0\leq a\leq 1$, $0\leq b\leq 1$ и $0\leq c\leq 1$.

Доказательство. Поскольку $0\leq b\leq 1$ и $0\leq c\leq 1$, то $(1-b)(1-c)\geq 0$, т. е. $1-b-c+bc\geq 0$ или $b+c\leq bc+1$.

Так как $0\leq a\leq 1$ и $bc+1\geq 1$, то

$$\frac{a}{bc+1}\leq\frac{2a}{a+bc+1}\leq\frac{2a}{a+b+c}.$$

По аналогии получим неравенства

$$\frac{b}{ac+1}\leq\frac{2b}{a+b+c}\text{ и }\frac{c}{ab+1}\leq\frac{2c}{a+b+c}.$$

Следовательно, для левой части неравенства (7.70) имеет место

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\le\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=2,$$

т. е. неравенство (7.70) доказано.

7.34 Доказать неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}, \qquad (7.71)$$

где $a>0$ и $b>0$.

Доказательство. Предположим, что неравенство (7.71) не выполняется, т. е. существуют такие значения a и b, при которых

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}<\sqrt{a}+\sqrt{b}. \qquad (7.72)$$

Если умножить на $\sqrt{ab}$ обе части неравенства (7.72), то

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}<a\sqrt{b}+b\sqrt{a}, \quad a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)-b\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)<0,$$

$$(a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)<0, \quad \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2<0.$$

Так как $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ и $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge0$, то $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge0$, т. е. получили противоречие. Этот факт свидетельствует о том, что не существует таких чисел $a>0$ и $b>0$, при которых выполнялось бы неравенство (7.72). Следовательно, неравенство (7.71) справедливо для любых положительных a и b.

7.35 Доказать неравенство

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\ge\frac{2}{1-ab}, \qquad (7.73)$$

где $-1<a<1$ и $-1<b<1$.

Доказательство. Доказательство неравенства (7.73) будем вести методом от противного. Допустим, что существуют такие значения a и b, где $-1<a<1$ и $-1<b<1$, при которых выполняется неравенство

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}<\frac{2}{1-ab}. \qquad (7.74)$$

Из неравенства (7.74) получаем неравенство

$$\frac{2-a^2-b^2}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}<\frac{2}{1-ab}. \qquad (7.75)$$

Так как $-1<a<1$ и $-1<b<1$, то $1-a^2>0$, $1-b^2>0$, $1-ab>0$ и из неравенства (7.75) следует

$$\left(2-a^2-b^2\right)(1-ab)<2\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right),$$

$$a^2+b^2+ab\left(a^2+b^2\right)<2ab(ab+1),$$

$$\left(a^2+b^2\right)(ab+1)<2ab(ab+1),$$

$$a^2+b^2<2ab,\ (a-b)^2<0.$$

Таким образом, получено очевидное противоречие, которое доказывает справедливость требуемого неравенства (7.73).

$\boxed{7.36}$ Доказать неравенство

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}, \qquad (7.76)$$

где $a>0$, $b>0$ и $c>0$.

Доказательство. Предварительно докажем вспомогательное неравенство

$$a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c). \qquad (7.77)$$

Поскольку $(a-b)^2\ge0$, то $a^2-ab+b^2\ge ab$,

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\ge(a+b)ab,\ a^3+b^3\ge a^2b+ab^2,$$

$$a^3+b^3+abc\ge a^2b+ab^2+abc \text{ или } a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c).$$

Принимая во внимание доказанное неравенство (7.77), можно записать

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \le \frac{1}{ab(a+b+c)}.$$

По аналогии получаем

$$\frac{1}{a^3+c^3+abc} \le \frac{1}{ac(a+b+c)} \text{ и } \frac{1}{b^3+c^3+abc} \le \frac{1}{bc(a+b+c)}.$$

Следовательно, имеет место

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{a^3+c^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} \le$$

$$\le \frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{ac(a+b+c)} + \frac{1}{bc(a+b+c)} =$$

$$\le \frac{c}{abc\,(a+b+c)} + \frac{b}{abc\,(a+b+c)} + \frac{a}{abc\,(a+b+c)} =$$

$$= \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}.$$

Таким образом, неравенство (7.76) доказано.

$\boxed{7.37}$ Доказать неравенство

$$\sqrt{a^2+ab+b^2} + \sqrt{a^2+ac+c^2} + \sqrt{b^2+bc+c^2} \ge 3\sqrt{ab+ac+bc}, \quad (7.78)$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Доказательство. Предварительно покажем, что

$$\sqrt{a^2+ab+b^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a+b). \quad (7.79)$$

Имеет место очевидное неравенство $a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$. Если к его обеим частям прибавить трехчлен $3a^2 + 6ab + 3b^2$, то получим неравенство $4a^2 + 4ab + 4b^2 \ge 3a^2 + 6ab + 3b^2$, из которого следует $4\left(a^2+ab+b^2\right) \ge$ $\ge 3(a+b)^2$, т. е. неравенство (7.79) доказано.

Аналогично доказывается справедливость неравенств

$$\sqrt{a^2+ac+c^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(a+c) \text{ и } \sqrt{b^2+bc+c^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c).$$

С учетом доказанных выше неравенств имеем

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\ge\sqrt{3}(a+b+c).$$

Отсюда следует, что для доказательства справедливости неравенства (7.78) осталось показать, что

$$\sqrt{3}(a+b+c)\ge 3\sqrt{ab+ac+bc}. \qquad (7.80)$$

Для доказательства неравенства (7.80) достаточно обе его части возвести в квадрат. Тогда

$$3\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)\ge 9(ab+ac+bc),$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\ge 0 \text{ или } (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0.$$

Так как в результате равносильных преобразований получено очевидное неравенство, то справедливость (7.80) доказана и тем самым неравенство (7.78) имеет место.

$\boxed{7.38}$ Доказать неравенство

$$\frac{12}{a+b+c+d}\le f(a,b,c,d)\le\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right), \qquad (7.81)$$

где

$$f(a,b,c,d)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d} \text{ и}$$

$$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0.$$

Доказательство. Первоначально докажем вспомогательное неравенство

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}, \qquad (7.82)$$

где $x>0$ и $y>0$.

Согласно неравенству Коши (3.2), имеем $x+y\ge 2\sqrt{xy}$. Тогда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}\ge\frac{2\sqrt{xy}}{xy}=\frac{2}{\sqrt{xy}}\ge\frac{2}{\frac{x+y}{2}}=\frac{4}{x+y}.$$

При доказательстве двойного неравенства (7.81) воспользуемся неравенством (7.82).

Имеет место

$$f(a,b,c,d)=\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)+\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}\right)+\left(\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}\right)\geq$$

$$\geq\frac{4}{a+b+c+d}+\frac{4}{a+b+c+d}+\frac{4}{a+b+c+d}=\frac{12}{a+b+c+d}.$$

Далее, можно записать

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq$$

$$\geq\frac{4}{a+b}+\frac{4}{a+c}+\frac{4}{a+d}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{b+d}+\frac{4}{c+d}=4f(a,b,c,d).$$

Отсюда следует справедливость двойного неравенства (7.81).

7.39. Доказать неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}, \qquad (7.83)$$

где $a>0$, $b>0$ и $c>0$.

Доказательство. Введем новые переменные $x=b+c$, $y=a+c$ и $z=a+b$. Тогда $2a=-x+y+z$, $2b=x-y+z$ и $2c=x+y-z$. В таком случае для левой части неравенства (7.83) получаем нижнюю оценку

$$\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=$$

$$=\frac{-3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)}{2}\geq\frac{-3+2+2+2}{2}=\frac{3}{2}$$

На последнем шаге доказательства неравенства с учетом того, что $x>0$, $y>0$ и $z>0$, было трижды использовано неравенство Коши (3.3).

7.40. Доказать, что если

$$\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)\left(\sqrt{b^2+1}+b\right)=1, \qquad (7.84)$$

то $a+b=0$.

Доказательство. Поскольку

$$\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)=1 \text{ и } \left(\sqrt{b^2+1}+b\right)\left(\sqrt{b^2+1}-b\right)=1,$$

то из условия (7.84) получаем систему

$$\begin{cases}\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)\left(\sqrt{b^2+1}+b-\sqrt{a^2+1}+a\right)=0,\\ \left(\sqrt{b^2+1}+b\right)\left(\sqrt{a^2+1}+a-\sqrt{b^2+1}+b\right)=0.\end{cases} \qquad (7.85)$$

Так как $\sqrt{a^2+1}+a>0$ и $\sqrt{b^2+1}+b>0$, то из системы (7.85) следует

$$\begin{cases}a+b=\sqrt{a^2+1}-\sqrt{b^2+1},\\ a+b=\sqrt{b^2+1}-\sqrt{a^2+1}.\end{cases}$$

Отсюда получаем требуемое равенство $a+b=0$.

$\boxed{7.41.}$ Доказать неравенство

$$\left(a^3+b\right)\left(b^3+c\right)\left(c^3+a\right)\ge 125abc, \qquad (7.86)$$

где $a\ge 2$, $b\ge 2$ и $c\ge 2$.

Доказательство. Представим неравенство (7.86) в равносильном виде

$$\left(a^2+\frac{b}{a}\right)\left(b^2+\frac{c}{b}\right)\left(c^2+\frac{a}{c}\right)\ge 125. \qquad (7.87)$$

Так как $a\ge 2$, $b\ge 2$ и $c\ge 2$, то

$$a^2+\frac{b}{a}\ge a^2+\frac{2}{a},\ b^2+\frac{c}{b}\ge b^2+\frac{2}{b} \text{ и } c^2+\frac{a}{c}\ge c^2+\frac{2}{c}.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$, определенную на промежутке $x\ge 2$. Поскольку производная $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}$ на рассматриваемом промежутке положительна, то функция $y=f(x)$ является возрастающей и поэтому $f(x)\ge f(2)=5$.

Отсюда получаем неравенства

$$a^2+\frac{b}{a}\ge 5,\ b^2+\frac{c}{b}\ge 5 \text{ и } c^2+\frac{a}{c}\ge 5.$$

Следовательно, неравенства (7.87) и (7.86) доказаны.

7.42. Доказать неравенство

$$\sqrt[5]{2}+7<8\sqrt[10]{2}. \qquad (7.88)$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство, содержащее неизвестную переменную x, вида $x^2-8x+7<0$, которое совпадает с неравенством (7.88) при $x=\sqrt[10]{2}$.

Так как решением неравенства $x^2-8x+7<0$ являются $1<x<7$ и при этом $1<\sqrt[10]{2}<2$, то неравенство (7.88) справедливо.

7.43. Доказать, если $a(a-b+c)<0$, то

$$b^2>4ac. \qquad (7.89)$$

Доказательство. Из условия следует, что $a\ne 0$. Рассмотрим функцию $f(x)=ax^2+bx+c$. Тогда $f(-1)=a-b+c$ и заданное неравенство можно переписать как $a\cdot f(-1)<0$. Исследуем два случая.

1. Пусть $a>0$ и $f(-1)<0$. Так как $a>0$, то ветви параболы $y=$ $=ax^2+bx+c$ направлены вверх. Однако $f(-1)<0$, поэтому парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось OX в двух точках.
2. Пусть $a<0$ и $f(-1)>0$. По аналогии с предыдущим случаем делаем вывод о том, что парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось OX в двух точках.

Поскольку в обоих случаях парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось OX в двух точках, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеем два различных корня. Следовательно, дискриминант данного уравнения строго больше нуля и поэтому имеет место неравенство (7.89).

7.44. Доказать равенство

$$1+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{5\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{2}{(3n-1)\cdot3n\cdot(3n+1)}=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}, \qquad (7.90)$$

где $n\geq1$.

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (7.90) следующим образом:

$$1+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{5\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{2}{(3n-1)\cdot3n\cdot(3n+1)}=$$

$$=1+\frac{4-2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{7-5}{5\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{(3n+1)-(3n-1)}{(3n-1)\cdot3n\cdot(3n+1)}=$$

$$=1+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}-\frac{1}{6\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)\cdot3n}-\frac{1}{3n\cdot(3n+1)}=$$

$$=1+\frac{3-2}{2\cdot3}-\frac{4-3}{3\cdot4}+\frac{6-5}{5\cdot6}-\frac{7-6}{6\cdot7}+\ldots+\frac{3n-(3n-1)}{(3n-1)\cdot3n}-\frac{(3n+1)-3n}{3n\cdot(3n+1)}=$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{3n+1}\right)-3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{3n}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}.$$

Таким образом, равенство (7.90) доказано.

РАЗДЕЛ 8

Методы, основанные на использовании ограниченности функций

Одним из эффективных методов решения уравнений или неравенств является метод, основанный на использовании ограниченности функций. К наиболее известным ограниченным функциям относятся, например, некоторые тригонометрические функции; обратно тригонометрические функции; функции, содержащие модуль, степень, корень с четной степенью и т. д.

Приведем наиболее распространенные простейшие неравенства. Имеет место

$$|f(x)| \geq 0,\ -1 \leq \sin x \leq 1,\ -1 \leq \cos x \leq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \arccos x \leq \pi,\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2},\ 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi,\ a^{f(x)} > 0,$$

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)^{2n} \geq 0,\ \sqrt[2n]{h(x)} \geq 0,\ a + \frac{1}{a} \geq 2,\ b + \frac{1}{b} \leq -2$$

и многие другие. Здесь n — натуральное число, $h(x) \geq 0$, $a > 0$ и $b < 0$.

Кроме приведенных выше неравенств имеются и более сложные, в частности, тригонометрические неравенства

$$\frac{1}{2} \leq \sin^4 x + \cos^4 x \leq 1,\ \frac{1}{4} \leq \sin^6 x + \cos^6 x \leq 1$$

и $-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$, а также неравенства с модулями вида $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

Следует также отметить, что при решении некоторых задач, приведенных в настоящем разделе, можно эффективно применять неравенства Коши, Бернулли и Коши—Буняковского, описанные в разделе 3.

Задачи и решения

8.1. Решить уравнение

$$2^{x^2+1}=1-x^8. \qquad (8.1)$$

Решение. Оценим обе части уравнения (8.1). Имеет место $2^{x^2+1}=$ $=2\cdot 2^{x^2}\ge 2$ и $1-x^8\le 1$. Так как левая часть уравнения больше или равна 2, а правая ее часть не превосходит 1, то уравнение корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

8.2. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}=3-5x^2. \qquad (8.2)$$

Решение. Нетрудно видеть, что левая часть уравнения (8.2) $\sqrt{x^2+4}+$ $+\sqrt{x^2+1}\ge 2+1=3$, а правая его часть $3-5x^2\le 3$.

Следовательно, получаем систему

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}=3,\\ 3-5x^2=3.\end{cases}$$

Корнем второго уравнения системы является $x_1=0$. Подстановкой в первое уравнение убеждаемся, что $x_1=0$ является корнем системы уравнений и уравнения (8.2).

♦ ***Ответ:*** $x_1=0$.

8.3. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11. \qquad (8.3)$$

Решение. Первоначально определим область допустимых значений переменной x в уравнении (8.3). Имеет место $2\le x\le 4$. Пусть теперь $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ и $g(x)=x^2-6x+11$.

Тогда

$$f^2(x)=x-2+2\sqrt{(x-2)(4-x)}+4-x=2+2\sqrt{-x^2+6x-8}=$$

$$=2+2\sqrt{1-(x-3)^2}\le 2+2=4,$$

т. е. $f(x)\le 2$. Одновременно с этим имеем

$$g(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2\ge 2 .$$

Отсюда следует, что $f(x)=g(x)=2$, т. е. получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2,\\ x^2-6x+11=2.\end{cases} \qquad (8.4)$$

Из второго уравнения системы (8.4) получаем $x_1=3$. Если значение x_1 подставить в первое уравнение системы (8.4), то убедимся, что данное значение x является корнем системы уравнений (8.4). Следовательно, $x_1=3$ является корнем уравнения (8.3).

♦ ***Ответ:*** $x_1=3$.

Примечание. Оценить сверху левую часть уравнения (8.3) можно на основе использования неравенства Коши—Буняковского (3.8). Имеет место $\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)(x-2+4-x)=4$. Отсюда следует, что $\sqrt{x-2}+$ $+\sqrt{4-x}\le 2$.

8.4. Решить уравнение

$$\left(4x^2+4x+17\right)\left(x^2-x+1\right)=12 . \qquad (8.5)$$

Решение. Поскольку

$$4x^2+4x+17=(2x+1)^2+16\ge 16 \text{ и } x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4},$$

$$\text{то } \left(4x^2+4x+17\right)\left(x^2-x+1\right)\ge 16\cdot\frac{3}{4}=12 .$$

Отсюда и из уравнения (8.5) следует, что равенство в уравнении (8.5) достигается только в том случае, когда одновременно выполняются два равенства $4x^2+4x+17=16$ и $x^2-x+1=\frac{3}{4}$. Корнем первого уравнения является $x_1 = -\frac{1}{2}$, а второго уравнения — $x_2 = \frac{1}{2}$. Так как $x_1 \neq x_2$, то уравнение (8.5) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

8.5. Решить уравнение

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{5-x} = (x-1)^2 (x-8). \tag{8.6}$$

Решение. Так как $x-4 \geq 0$ и $5-x \geq 0$, то областью допустимых значений переменной x в уравнения (8.6) являются $4 \leq x \leq 5$.

Так как $\sqrt{x-4} \geq 0$ и $\sqrt{5-x} \geq 0$, то левая часть уравнения (8.6) является неотрицательной. В то же время, если $4 \leq x \leq 5$, то $x-8 < 0$ и $(x-1)^2(x-8) < 0$, т. е. правая часть уравнения (8.6) на области допустимых значений строго меньше 0. В этой связи уравнение (8.6) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

8.6. Решить уравнение

$$x^2 - x + 2 = 2 \cdot \sqrt[4]{2x-1}. \tag{8.7}$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (8.7) являются $x \geq \frac{1}{2}$.

Применим к правой части уравнения (8.7) неравенство Коши (3.1), т. е.

$$2 \cdot \sqrt[4]{2x-1} = 2 \cdot \sqrt[4]{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (2x-1)} \leq 2 \cdot \frac{1+1+1+(2x-1)}{4} = x+1.$$

Отсюда и из уравнения (8.7) получаем неравенство $x^2 - x + 2 \leq x + 1$ или $(x-1)^2 \leq 0$. Однако для любых x всегда справедливо неравенство $(x-1)^2 \geq 0$. Поэтому $(x-1)^2 = 0$ или $x_1 = 1$.

Подставим найденное значение $x_1 = 1$ в уравнение (8.7) и убедимся в том, что $x_1 = 1$ является его корнем.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1$.

$\boxed{8.7.}$ Решить уравнение

$$\sqrt{10+3\sqrt{x^2-1}}+x^4\cdot\sqrt{5-x}=3\,. \qquad (8.8)$$

Решение. Так как $\sqrt{x^2-1}\ge 0$, то $\sqrt{10+3\sqrt{x^2-1}}\ge\sqrt{10}>3$. Если при этом еще учесть, что $x^4\cdot\sqrt{5-x}\ge 0$, то левая часть уравнения (8.8) строго больше 3, а это означает, что уравнение (8.8) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

$\boxed{8.8.}$ Решить уравнение

$$\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}=\frac{3}{x}\,. \qquad (8.9)$$

Решение. Первоначально избавимся от иррациональности в знаменателе обеих дробей левой части уравнения (8.9), т. е.

$$\frac{4\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}{x^2-\left(x^2+x\right)}-\frac{x+\sqrt{x^2-x}}{x^2-\left(x^2-x\right)}=\frac{3}{x}\,.$$

Отсюда получаем $4\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=5x+3$. Далее, возведем в квадрат обе части последнего уравнения, тогда

$$16x^2+16x-8\sqrt{x^4-x^2}+x^2-x=25x^2+30x+9\,,$$

$$8\sqrt{x^4-x^2}+8x^2+15x+9=0\,. \qquad (8.10)$$

Поскольку дискриминант уравнения $8x^2+15x+9=0$ меньше нуля, то $8x^2+15x+9>0$. Кроме того, $8\sqrt{x^4-x^2}\ge 0$. В этой связи левая часть уравнения (8.10) принимает только положительные значения. Поэтому уравнение (8.10), а вместе с ним и уравнение (8.9), не имеет корней.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

$\boxed{8.9.}$ Решить уравнение

$$x^2+2x+3=\left(x^2+x+1\right)\left(x^4+x^2+4\right). \qquad (8.11)$$

Решение. Так как $x^2+x+1>0$ и $x^4+x^2+4\ge 4$, то

$$x^2+2x+3\ge 4\left(x^2+x+1\right).$$

Отсюда получаем квадратное неравенство

$$3x^2+2x+1\le 0. \qquad (8.12)$$

Однако неравенство (8.12) является противоречивым, поскольку

$$3x^2+2x+1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0.$$

Следовательно, уравнение (8.11) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

8.10 Решить уравнение

$$\sqrt{2x-y^2-z^2}-\sqrt{2z-y-3}=\sqrt{x^2+y}. \qquad (8.13)$$

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения (8.13), тогда

$$2x-y^2-z^2-2\sqrt{\left(2x-y^2-z^2\right)(2z-y-3)}+2z-y-3=x^2+y,$$

$$-2\sqrt{\left(2x-y^2-z^2\right)(2z-y-3)}=x^2+y-2x+y^2+z^2-2z+y+3,$$

$$-2\sqrt{\left(2x-y^2-z^2\right)(2z-y-3)}=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2. \qquad (8.14)$$

Левая часть уравнения (8.14) меньше или равна 0, а правая часть является неотрицательной. Поэтому равенство в уравнении (8.14) может быть только в том случае, что обе его части одновременно равны 0. А это возможно лишь тогда, когда $x_1=1$, $y_1=-1$ и $z_1=1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=-1$, $z_1=1$.

8.11 Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+3x+4}=\left|x^2-x-2\right|+\sqrt{4x^2-9x+16}. \qquad (8.15)$$

Решение. Уравнение (8.15) можно переписать как

$$\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{4x^2-9x+16}=\left|x^2-x-2\right|. \qquad (8.16)$$

Поскольку $\left|x^2-x-2\right|\geq 0$, то из уравнения (8.16) получаем неравенство $\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{4x^2-9x+16}\geq 0$. Отсюда следует

$$\sqrt{x^2+3x+4}\geq\sqrt{4x^2-9x+16},\ x^2+3x+4\geq 4x^2-9x+16,$$

$$3x^2-12x+12\leq 0 \text{ или } (x-2)^2\leq 0.$$

Так как $(x-2)^2\geq 0$, то $(x-2)^2=0$ или $x_1=2$. Подстановкой в уравнение (8.15) убеждаемся, что $x_1=2$ является корнем этого уравнения.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2$.

$\boxed{8.12}$ Решить уравнение

$$\frac{|3x-4|+x^2-12|x|+36}{x-5}=|x-2|. \qquad (8.17)$$

Решение. Так как $x^2=|x|^2$, то уравнение (8.17) можно переписать как

$$\frac{|3x-4|+(|x|-6)^2}{x-5}=|x-2|. \qquad (8.18)$$

Так как $|3x-4|+(|x|-6)^2\geq 0$ и $|x-2|\geq 0$, то из уравнения (8.18) следует, что $x-5>0$ или $x>5$. В таком случае $|3x-4|=3x-4$, $|x|=x$, $|x-2|=x-2$ и из уравнения (8.18) вытекает уравнение

$$\frac{3x-4+(x-6)^2}{x-5}=x-2,$$

которое имеет единственный корень $x_1=11$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=11$.

$\boxed{8.13}$ Решить уравнение

$$3x\sqrt{x^2-9}+4x\sqrt{x^2-16}+5x\sqrt{x^2-25}=120. \qquad (8.19)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (8.19) являются $x\geq 5$. Перепишем уравнение (8.19) в виде

$$3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\frac{120}{x}. \qquad (8.20)$$

Пусть $f(x)=3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}$ и $g(x)=\frac{120}{x}$. Нетрудно видеть, что функция $y=f(x)$ является непрерывно возрастающей на области допустимых значений, а функция $y=g(x)$ — непрерывно убывающей. В этой связи уравнение (8.20) имеет не более одного корня. Этой единственно возможный корень $x_1=5$ нетрудно найти подбором.

♦ ***Ответ:*** $x_1=5$.

8.14. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{8x^2-2}+2\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3}. \qquad (8.21)$$

Решение. Так как $\sqrt[4]{8x^2-2}\ge 0$ и

$$2\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{4x^2-4x+4}=\sqrt{(2x-1)^2+3}\ge\sqrt{3},$$

то левая часть уравнения (8.21) больше или равна $\sqrt{3}$. Отсюда и из уравнения (8.21) следует система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[4]{8x^2-2}=0,\\ \sqrt{(2x-1)^2+3}=\sqrt{3}.\end{cases}$$

Система уравнений имеет единственный корень $x_1=\frac{1}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{1}{2}$.

8.15. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x^2}<\sqrt[8]{5-x}. \qquad (8.22)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в неравенстве (8.22) являются $-1\le x\le 1$.

Нетрудно видеть, что на области допустимых значений $\sqrt{1-x^2}\le 1$ и $\sqrt[8]{4}\le\sqrt[8]{5-x}\le\sqrt[8]{6}$. Так как $1<\sqrt[8]{4}$, то неравенство (8.22) выполняется для любых x из области допустимых значений, т. е. решением неравенства (8.22) являются $-1 \le x \le 1$.

♦ ***Ответ:*** $-1 \le x \le 1$.

8.16. Решить неравенство

$$\sqrt{3+\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} < \sqrt[3]{9-x^2-\frac{1}{x^2+1}}. \tag{8.23}$$

Решение. Поскольку, согласно неравенству Коши (3.3), имеет место неравенство

$$\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2,$$

то для левой части неравенства (8.23) справедлива нижняя оценка

$$\sqrt{3+\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \ge \sqrt{3+2} = \sqrt{5}.$$

Перепишем правую часть неравенства (8.23) в виде

$$\sqrt[3]{9-x^2-\frac{1}{x^2+1}} = \sqrt[3]{10-\left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)}.$$

Применим неравенство Коши (3.3) к правой части неравенства (8.23) и получим

$$\sqrt[3]{9-x^2-\frac{1}{x^2+1}} = \sqrt[3]{10-\left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)} \le \sqrt[3]{10-2} = 2.$$

Поскольку $\sqrt{5} > 2$, то неравенство (8.23) решения не имеет.

♦ ***Ответ:*** решения нет.

8.17. Решить уравнение

$$25 \cdot 3^{|x-3|+|x-5|} + 9 \cdot 5^{|x-4|+|x-6|} = 450. \tag{8.24}$$

Решение. Воспользуемся неравенством $|a|+|b| \ge |a-b|$, тогда получим $|x-3|+|x-5| \ge 2$, $|x-4|+|x-6| \ge 2$ и

$$25\cdot 3^{|x-3|+|x-5|}+9\cdot 5^{|x-4|+|x-6|}\geq 25\cdot 3^2+9\cdot 5^2=450\,.$$

Отсюда и из уравнения (8.24) получаем систему уравнений

$$\begin{cases}|x-3|+|x-5|=2,\\ |x-4|+|x-6|=2.\end{cases} \tag{8.25}$$

Известно, что равенство $|a|+|b|=|a-b|$ равносильно неравенству $a\cdot b\leq 0$. В этой связи корнями первого уравнения системы (8.25) являются произвольные значения x из отрезка $3\leq x\leq 5$, а корнями второго уравнения — произвольные значения x из отрезка $4\leq x\leq 6$. Следовательно, корнями уравнения (8.24) будут произвольные значения x из отрезка $4\leq x\leq 5$.

♦ ***Ответ:*** $4\leq x\leq 5$.

$\boxed{8.18}$ Решить уравнение

$$3^{|x-2|}+3^{|x+2|}=3^x\,. \tag{8.26}$$

Решение. Рассмотрим два случая, а именно, $x\leq 0$ и $x>0$.

Пусть $x\leq 0$, тогда $3^x\leq 1$. Так как $|x-2|\geq 0$ и $|x+2|\geq 0$, то $3^{|x-2|}+$ $+3^{|x+2|}\geq 3^0+3^0=2$. Поскольку $3^x\leq 1$, то уравнение (8.26) среди $x\leq 0$ корней не имеет.

Пусть $x>0$, тогда $|x-2|\geq 0$ и $|x+2|=x+2$. Поэтому левую часть уравнения (8.26) можно оценить как

$$3^{|x-2|}+3^{|x+2|}\geq 3^0+3^{x+2}=1+9\cdot 3^x.$$

Поскольку $3^x>0$, то $1+9\cdot 3^x>3^x$. Следовательно, и в данном случае уравнение (8.26) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

$\boxed{8.19}$ Решить уравнение

$$x^4+5\cdot 4^x+4x^2\cdot 2^x-2\cdot 2^x+1=0\,. \tag{8.27}$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения (8.27) путем выделения полных квадратов и представим уравнение в виде

$$\left(x^2+2\cdot 2^x\right)^2+\left(2^x-1\right)^2=0. \qquad (8.28)$$

Так как $\left(x^2+2\cdot 2^x\right)^2 \ge 0$ и $\left(2^x-1\right)^2 \ge 0$, то из уравнения (8.28) следует система двух уравнений

$$\begin{cases} x^2+2\cdot 2^x=0, \\ 2^x-1=0. \end{cases} \qquad (8.29)$$

Корнем второго уравнения системы (8.29) является $x_1=0$, однако подстановкой в первое уравнение убеждаемся, что $x_1=0$ не является корнем системы уравнений (8.29), т. е. уравнение (8.28) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

Примечание. Если уравнение (8.27) рассматривать как квадратное уравнение относительно x^2, то его дискриминант

$$\frac{D}{4}=4\cdot 4^x-5\cdot 4^x+2\cdot 2^x-1=-\left(2^x-1\right)^2$$

принимает неотрицательное значение только в том случае, когда $x=0$. Однако данное значение x не является корнем уравнения (8.27).

8.20. Решить уравнение

$$\log_2\left(\sqrt{x^4+x^2}+1\right)+\log_2\left(x^2+1\right)=0. \qquad (8.30)$$

Решение. Поскольку $\sqrt{x^4+x^2}+1\ge 1$ и $x^2+1\ge 1$, то

$$\log_2\left(\sqrt{x^4+x^2}+1\right)\ge 0 \text{ и } \log_2\left(x^2+1\right)\ge 0.$$

Отсюда, принимая во внимание уравнение (8.30), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2\left(\sqrt{x^4+x^2}+1\right)=0, \\ \log_2\left(x^2+1\right)=0. \end{cases} \qquad (8.31)$$

Корнем системы уравнений (8.31), а также уравнения (8.30), является $x_1 = 0$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 0$.

8.21. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+2x+4}+\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}}=4-\log_2^3\left(x^4+x^2+1\right). \quad 8.32)$$

Решение. Очевидно, что областью допустимых значений переменной x в уравнении (8.32) являются числовая ось OX. Оценим обе части уравнения (8.32).

Используя неравенство Коши (3.3), получаем

$$\sqrt{x^2+2x+4}+\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}}=2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)\ge 4$$

Поскольку $x^4+x^2+1\ge 1$, то $\log_2^3\left(x^4+x^2+1\right)\ge 0$ и правая часть уравнения (8.32) не превосходит 4. Отсюда следует, что равенство в уравнении (8.32) достигается только в том случае, когда обе его части равны 4.

Пусть $4-\log_2^3\left(x^4+x^2+1\right)=4$, тогда $\log_2\left(x^4+x^2+1\right)=0$, $x^4+x^2+1=$ $=1$ или $x^2\left(x^2+1\right)=0$. Следовательно, $x_1=0$.

Подстановкой в уравнение (8.32) убеждается, что $x_1 = 0$ является его корнем.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 0$.

8.22. Решить неравенство

$$\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>0. \quad (8.33)$$

Решение. Нетрудно установить, что областью допустимых значений переменной x в неравенстве (8.33) являются $x>1$.

Перепишем неравенство (8.33) в виде

$$\log_2\frac{x-1}{x+1}+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>0. \quad (8.34)$$

Пусть $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Поскольку $y=1+\dfrac{2}{x-1}$ и $x>1$, то $y>1$.

В таком случае из неравенства (8.34) следует

$$-\log_2 y+\frac{1}{\log_2 y}>0$$

или

$$\frac{\log_2^2 y-1}{\log_2 y}<0. \tag{8.35}$$

Если $y>1$, то $\log_2 y>0$. Поэтому из неравенства (8.35) получаем

$$0<\log_2 y<1,\ 1<y<2,\ 1<1+\frac{2}{x-1}<2,\ 0<\frac{2}{x-1}<1,\ x-1>2$$

или $x>3$.

♦ ***Ответ:*** $x>3$.

$\boxed{8.23.}$ Решить неравенство

$$2^{-|x-2|}\cdot\log_2\left(4x-x^2-2\right)\geq 1. \tag{8.36}$$

Решение. Неравенство (8.36) равносильно неравенству

$$\log_2\left(4x-x^2-2\right)\geq 2^{|x-2|}. \tag{8.37}$$

Так как $4x-x^2-2=2-(x-2)^2\leq 2$, то $\log_2\left(4x-x^2-2\right)\leq 1$. Поскольку $|x-2|\geq 0$, то $2^{|x-2|}\geq 2^0=1$. Следовательно, верхняя оценка левой части неравенства (8.37) совпадает с нижней оценкой его правой части и равна 1. Поэтому имеет место система уравнений

$$\begin{cases}2^{|x-2|}=1,\\ \log_2\left(4x-x^2-2\right)=1.\end{cases}$$

Система уравнений имеет единственный корень $x_1=2$, который легко найти из приведенных выше рассуждений.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2$.

$\boxed{8.24}$ Решить уравнение

$$\sin \pi x = x^2 - x + \frac{5}{4}. \tag{8.38}$$

Решение. Выделим полный квадрат в правой части уравнения (8.38), т. е.

$$x^2 - x + \frac{5}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1.$$

Отсюда следует, что

$$x^2 - x + \frac{5}{4} \geq 1.$$

Так как при этом $\sin \pi x \leq 1$, то из уравнения (8.38) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin \pi x = 1, \\ x^2 - x + \dfrac{5}{4} = 1. \end{cases} \tag{8.39}$$

Единственным корнем второго уравнения системы является $x_1 = \frac{1}{2}$. Подстановкой в первое уравнение убеждаемся, что найденное значение x является корнем системы уравнений (8.39) и уравнения (8.38).

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{1}{2}$.

$\boxed{8.25}$ Решить уравнение

$$x^2 + 2x \cdot \sin(xy) + 1 = 0. \tag{8.40}$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения (8.40) следующим образом:

$$x^2 + 2x \cdot \sin(xy) + 1 = x^2 + 2x \cdot \sin(xy) + \sin^2(xy) - \sin^2(xy) + 1 =$$

$$= (x + \sin(xy))^2 + \cos^2(xy).$$

Таким образом, уравнение (8.40) равносильно уравнению

$$(x + \sin(xy))^2 + \cos^2(xy) = 0. \tag{8.41}$$

Так как $(x+\sin(xy))^2 \geq 0$ и $\cos^2(xy) \geq 0$, то из уравнения (8.41) вытекает система уравнений

$$\begin{cases} \sin(xy) = -x, \\ \cos(xy) = 0. \end{cases} \tag{8.42}$$

Так как $\cos(xy)=0$, то $\sin(xy)=\pm 1$ и из первого уравнения (8.42) следует, что $x_{1,2}=\pm 1$. Если значения $x_1=1$ $x_2=-1$ подставить в уравнения системы (8.42), то дважды получаем систему уравнений $\sin y=-1$ и $\cos y=0$, корнями которой являются $y=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, где k — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$; $x_2=-1$, $y_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, где k — целое число.

8.26 Решить уравнение

$$\sin x+\cos x=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x. \tag{8.43}$$

Решение. С одной стороны, $-\sqrt{2} \leq \sin x+\cos x \leq \sqrt{2}$. С другой,

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}$$

и согласно неравенству Коши (3.3), (3.4) справедливы неравенства $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x \geq 2$ и $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x \leq -2$. Следовательно, нет таких значений, которые могут одновременно принимать левая и правая части уравнения (8.43), т. е. уравнение корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

8.27 Решить уравнение

$$\sin x+\cos x=\sqrt{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}. \tag{8.44}$$

Решение. Для левой части уравнения (8.44) имеет место верхняя оценка вида $\sin x+\cos x \leq \sqrt{2}$. Из уравнения (8.44) следует, что $\operatorname{tg}x>0$. Поэтому, применяя неравенство Коши (3.3), для правой части уравнения (8.44) получаем нижнюю оценку вида

$$\sqrt{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}=\sqrt{\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}} \geq \sqrt{2}.$$

Следовательно, равенство в уравнении (8.44) может быть только в том случае, когда обе его части равны $\sqrt{2}$, т. е. имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ \sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sqrt{2}, \end{cases}$$

корнями которой являются $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где n — целое число.

8.28. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 15x \cdot \cos x = \frac{3}{2}. \tag{8.45}$$

Решение. Поскольку $|\sin 15x| \le 1$ и $-\sqrt{2} \le \sin x \pm \cos x \le \sqrt{2}$, то левую часть уравнения (8.45) можно оценить сверху, как

$$\sin x + \sin 15x \cdot \cos x \le \sin x + |\sin 15x| \cdot |\cos x| \le \sin x + |\cos x| \le \sqrt{2}.$$

Так как $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, то $\sin x + \sin 15x \cdot \cos x < \frac{3}{2}$. Следовательно, уравнение (8.45) корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

Примечание. Для получения верхней оценки левой части уравнения (8.45) можно использовать неравенство Коши—Буняковского (3.8). Тогда

$$(\sin x + \sin 15x \cdot \cos x)^2 \le \left(1 + \sin^2 15x\right) \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \le 2 \cdot 1 = 2.$$

Отсюда следует, что $\sin x + \sin 15x \cdot \cos x \le \sqrt{2}$.

8.29. Решить уравнение

$$\sin x + \cos 8x \cdot \cos x = \sqrt{\frac{5 - \sin 2x}{2}}. \tag{8.46}$$

Решение. По аналогии с решением уравнения (8.45) получаем верхнюю оценку левой части уравнения (8.46) в виде

$$\sin x + \cos 8x \cdot \cos x \le \sqrt{2}\,.$$

Поскольку $-1 \le \sin 2x \le 1$, то имеет место нижняя оценка правой части уравнения (8.46) вида

$$\sqrt{\frac{5-\sin 2x}{2}} \ge \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{2}\,.$$

Сравнивая оценки левой и правой частей уравнения (8.46), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin 8x \cdot \cos x = \sqrt{2}, \\ \sqrt{\dfrac{5-\sin 2x}{2}} = \sqrt{2}. \end{cases} \tag{8.47}$$

Система уравнений (8.47), равносильна совокупности двух систем уравнений

$$\begin{cases} \cos 8x = -1, \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2}, \\ \sin 2x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 8x = 1, \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ \sin 2x = 1. \end{cases} \tag{8.48}$$

Так как $\sin 2x = 1$, то $\cos 2x = 0$ и $\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x = 0$. Далее, поскольку $\cos 8x = 1 - 2\sin^2 4x$, то $\cos 8x = 1$. Отсюда следует, что первая система уравнений (8.48) является несовместной, а вторая система равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ \sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{8.49}$$

Решая систему уравнений (8.49), получаем $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отсюда следует, что $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n = \dfrac{\pi}{4} \cdot (8n+1)$, где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \dfrac{\pi}{4} \cdot (8n+1)$, где n — целое число.

8.30 Решить уравнение

$$\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x\,. \tag{8.50}$$

Решение. Поскольку $\sin x \le 1$ и $\cos x \le 1$, то левую часть уравнения (8.50) оценим как $\sin^5 x + \cos^5 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, т. е. $\sin^5 x + \cos^5 x \le 1$. В тоже время $\sin^4 x \le 1$ и поэтому $2 - \sin^4 x \ge 1$.

Следовательно, из уравнения (8.50) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^5 x = \sin^2 x, \\ \cos^5 x = \cos^2 x, \\ \sin^4 x = 1. \end{cases} \tag{8.51}$$

Из системы (8.51) следует, что $\sin x = 1$ и поэтому корнями уравнения (8.50) являются $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, где k — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, где k — целое число.

8.31. Решить уравнение

$$2\cos x + \cos 4x - \cos 6x = -3. \tag{8.52}$$

Решение. Так как $\cos 4x - \cos 6x = -2\sin 5x \cdot \sin(-x)$, то уравнение (8.52) равносильно уравнению $2\cos x - 2\sin 5x \cdot \sin(-x) = -3$ или

$$\cos x + \sin 5x \cdot \sin x = -\frac{3}{2}. \tag{8.53}$$

Однако $|\sin 5x| \le 1$ и $-\sqrt{2} \le \sin x \pm \cos x \le \sqrt{2}$, поэтому

$$\cos x + \sin 5x \cdot \sin x \ge \cos x - |\sin 5x| \cdot |\sin x| \ge \cos x - |\sin x| \ge -\sqrt{2}.$$

Поскольку $-\sqrt{2} > -\frac{3}{2}$, то $\cos x + \sin 5x \cdot \sin x > -\frac{3}{2}$ и уравнение (8.53) корней не имеет. Следовательно, исходное уравнение (8.52) также не имеет корней.

♦ ***Ответ:*** корней нет.

Примечание. . Используя неравенство Коши—Буняковского (3.8), можно показать, что

$$(\cos x + \sin 5x \cdot \sin x)^2 \le (1 + \sin^2 5x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) \le 2,$$

т. е. $-\sqrt{2} \le \cos x + \sin 5x \cdot \sin x \le \sqrt{2}$.

8.32. Решить уравнение

$$\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2-5=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right). \qquad (8.54)$$

Решение. Поскольку

$$\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin 2x+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 2,$$

то $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2-5\le -1$. Так как $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\ge -1$, то из уравнения (8.54) следует система уравнений

$$\begin{cases}\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2-5=-1,\\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1.\end{cases}$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1,\\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1.\end{cases} \qquad (8.55)$$

Корнями второго уравнения системы (8.55) являются $x_1=\frac{7\pi}{12}+\pi n$, где n — целое число. Подставим найденные значения x в первое уравнение системы (8.55), тогда

$$\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n+\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{3\pi}{2}=1.$$

Следовательно, корнями системы уравнений (8.55) является

$$x_1=\frac{7\pi}{12}+\pi n,$$

где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{7\pi}{12}+\pi n$, где n — целое число.

$\boxed{8.33}$ Решить уравнение

$$(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x. \qquad (8.56)$$

Решение. Так как $-1 \le \cos 2x \le 1$ и $-1 \le \cos 4x \le 1$, то

$$-2 \le \cos 2x - \cos 4x \le 2 \text{ или } (\cos 2x - \cos 4x)^2 \le 4.$$

Поскольку $\cos^2 3x \ge 0$, то $4 + \cos^2 3x \ge 4$. Отсюда следует вывод о том, что равенство в уравнении (8.56) возможно лишь в том случае, когда обе его части равны 4. Следовательно, из уравнения (8.56) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |\cos 2x - \cos 4x| = 2, \\ \cos 3x = 0. \end{cases} \qquad (8.57)$$

Система уравнений (8.57) равносильна совокупности двух систем уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 4x = -1, \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos 4x = 1, \\ \cos 3x = 0. \end{cases} \qquad (8.58)$$

Первая из систем (8.58) является несовместной, поскольку при $\cos 2x = 1$ имеем $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2 - 1 = 1$, а это противоречит второму уравнению этой системы.

Рассмотрим вторую систему уравнений (8.58). Пусть $\cos 2x = -1$, тогда $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2 - 1 = 1$. Следовательно, вторая система уравнений (8.58) равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos 3x = 0. \end{cases} \qquad (8.59)$$

Решая систему уравнений (8.59), получаем $\cos x = 0$ или $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где n — целое число.

$\boxed{8.34}$ Решить уравнение

$$\left(\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 1\right)\cdot\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = \frac{1}{4}. \qquad (8.60)$$

Решение. Оценим снизу левую часть уравнения (8.60). Для этого преобразуем ее следующим образом:

$$\left(\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+1\right)\cdot\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=$$

$$=\left(\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right)=$$

$$=\left(\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Так как нижняя оценка левой части уравнения (8.60) совпадает с его правой частью, то получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin^2 2x=1.\end{cases}\qquad(8.61)$$

Пусть $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, тогда

$$\sin^2 2x=4\sin^2 x\cdot\cos^2 x=4\sin^2 x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Другими словами, если $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, то $\sin^2 2x=1$. Значит система уравнений (8.61) равносильна уравнению $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Следовательно, корнями системы уравнений (8.61), а также уравнения (8.60), являются $x_1=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, где n — целое число.

$\boxed{8.35}$ Решить уравнение

$$2^{1-x^2}+2^{x^2-1}=2\sin\frac{\pi y}{2}.\qquad(8.62)$$

Решение. Оценим снизу левую часть уравнения (8.62) с помощью неравенства Коши (3.2), т. е. $2^{1-x^2}+2^{x^2-1}\ge 2\sqrt{2^{1-x^2}\cdot 2^{x^2-1}}=2$. Если учесть, что $2\sin\frac{\pi y}{2}\le 2$, то отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{1-x^2}+2^{x^2-1}=2, \\ 2\sin\frac{\pi y}{2}=2. \end{cases} \tag{8.63}$$

Из первого уравнения системы (8.63) получаем $x_{1,2}=\pm 1$. Из второго уравнения системы (8.63) следует, что $\sin\frac{\pi y}{2}=1$, $\frac{\pi y}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ или $y_1=1+4n$, где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_{1,2}=\pm 1$, $y_1=1+4n$, где n — целое число.

$\boxed{8.36}$ Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2\pi(x+y)+\operatorname{ctg}^2\pi(x+y)=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}+1}. \tag{8.64}$$

Решение. Применяя неравенство Коши (3.2) к левой части уравнения (8.64), получаем $\operatorname{tg}^2\omega+\operatorname{ctg}^2\omega\ge 2\sqrt{\operatorname{tg}^2\omega\cdot\operatorname{ctg}^2\omega}=2$, где $\omega=\pi(x+y)$.

Известно, что $x^2+1\ge 2x$. Поэтому $\frac{2x}{x^2+1}\le 1$. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}+1}\le 2.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2\pi(x+y)+\operatorname{ctg}^2\pi(x+y)=2, \\ \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}+1}=2. \end{cases} \tag{8.65}$$

Корнем второго уравнения системы уравнений (8.65) является $x_1=1$. Подставим найденное значение x в первое уравнение системы, тогда

$$\operatorname{tg}^2\pi(1+y)=1,\ \operatorname{tg}\pi(1+y)=\pm 1,\ \pi(1+y)=\frac{\pi}{4}(2n+1)\ \text{или}\ y_1=\frac{2n-3}{4},$$

где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=\dfrac{2n-3}{4}$, где n — целое число.

8.37. Решить уравнение

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sin^2 x-14\sin x\cdot\cos x-5\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=$$

$$=\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5}{4}\pi^2. \qquad (8.66)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (8.66) являются $-1\le x\le 1$.

Первоначально покажем, что функция

$$f(x)=\sin^2 x-14\sin x\cdot\cos x-5\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}$$

при любых x может принимать только положительные значения.

Представим функцию $y=f(x)$ следующим образом:

$$f(x)=1+3\sqrt[3]{33}-14\sin x\cdot\cos x-6\cos^2 x=$$

$$=3\sqrt[3]{33}-2-14\sin x\cdot\cos x-3\left(2\cos^2 x-1\right)=$$

$$=3\sqrt[3]{33}-2-(7\sin 2x+3\cos 2x).$$

Поскольку $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin 2x+b\cos 2x\le\sqrt{a^2+b^2}$, то имеет место $-\sqrt{58}\le 7\sin 2x+3\cos 2x\le\sqrt{58}$, т. е. $f(x)\ge 3\sqrt[3]{33}-2-\sqrt{58}$.

Следовательно, для доказательства неравенства $f(x)>0$, необходимо показать, что $3\sqrt[3]{33}>2+\sqrt{58}$. С этой целью возведем обе части данного неравенства в куб, тогда

$$27\cdot 33>8+12\sqrt{58}+6\cdot 58+58\sqrt{58},$$

$$891>356+70\sqrt{58},\ 535>70\sqrt{58},\ 107>14\sqrt{58},$$

$$(107)^2>\left(14\sqrt{58}\right)^2,\ 11449>11368.$$

Полученное численное неравенство свидетельствует о том, что $f(x)>0$. Если при этом еще учесть, что $\sqrt{1-x^2}\ge 0$, то левая часть уравнения (8.66) неотрицательна.

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (8.66). Поскольку

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, \text{ то}$$

$$\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5}{4}\pi^2=\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)^2+\arccos^2 x-\frac{5}{4}\pi^2=$$

$$=2\arccos^2 x-\pi\arccos x-\pi^2=(2\arccos x+\pi)(\arccos x-\pi)$$

Однако известно, что $0\le\arccos x\le\pi$. Отсюда следует, что $(2\arccos x+\pi)(\arccos x-\pi)\le 0$, т. е. правая часть уравнения (8.66) не превосходит 0. Ранее было доказано, что левая часть уравнения (8.66) неотрицательна, поэтому равенство в (8.66) может быть только в том случае, когда обе его части равны 0, а это возможно лишь при $x_1=-1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-1$.

8.38 Решить уравнение

$$\log_2(5+3\cos 4x)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right). \tag{8.67}$$

Решение. Поскольку $\cos 4x\ge -1$, то $5+3\cos 4x\ge 2$ и поэтому $\log_2(5+3\cos 4x)\ge 1$. С другой стороны, имеет место $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$. В этой связи равенство в (8.67) может быть только в том случае, когда обе части уравнения равны 1, т. е.

$$\begin{cases}\log_2(5+3\cos 4x)=1,\\ \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1.\end{cases}$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\cos 4x=-1,\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm 1.\end{cases} \tag{8.68}$$

Из второго уравнения системы (8.68) получаем $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где n — целое число. Подставим значения $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$ в первое уравнение системы (8.68) и покажем, что найденные значения x являются его корнем.

Имеет место $\cos 4x = \cos(\pi + 4\pi n) = \cos\pi = -1$. Отсюда следует, что корнями системы уравнений (8.68) являются $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где n — целое число.

8.39. Решить уравнение

$$\sin\frac{\pi x}{2} = \log_2\left(x^2 + 1\right) - \log_2 x. \qquad (8.69)$$

Решение. Областью допустимых значений переменной x в уравнении (8.69) являются $x > 0$. Используя свойства логарифмов, перепишем уравнение (8.69) как

$$\sin\frac{\pi x}{2} = \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right). \qquad (8.70)$$

Поскольку $x > 0$, то согласно неравенству Коши (3.3) имеем

$$x + \frac{1}{x} \ge 2 \text{ или } \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) \ge 1.$$

Однако известно, что $\sin\frac{\pi x}{2} \le 1$. Следовательно, равенство в (8.70) достигается лишь в том случае, когда обе его части равны единице, т. е.

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi x}{2} = 1, \\ \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1. \end{cases} \qquad (8.71)$$

Корнем системы уравнений (8.71) является $x_1 = 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1$.

8.40 Решить уравнение

$$\left(5+\frac{3}{\sin^2 x}\right)\cdot\left(2-\sin^6 x\right)=7+\sin 2y. \qquad (8.72)$$

Решение. Поскольку $0 \le \sin^2 x \le 1$, то

$$5+\frac{3}{\sin^2 x} \ge 8,\ 2-\sin^6 x \ge 1 \text{ и } \left(5+\frac{3}{\sin^2 x}\right)\cdot\left(2-\sin^6 x\right) \ge 8.$$

Однако $\sin 2y \le 1$, поэтому $7+\sin 2y \le 8$.

Отсюда следует, что обе части уравнения (8.72) равны 8, а это возможно только тогда, когда $\sin^2 x = 1$ и $\sin 2y = 1$. Следовательно, корнями уравнения (8.72) являются $x_1 = \frac{\pi}{2}+\pi n$ и $y_1 = \frac{\pi}{4}+\pi k$, где n, k — целые числа.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{\pi}{2}+\pi n$, $y_1 = \frac{\pi}{4}+\pi k$, где n, k — целые числа.

8.41 Решить уравнение

$$\arccos\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\left(1-\sqrt[3]{x}\right). \qquad (8.73)$$

Решение. Первоначально отметим, что для обратной тригонометрической функции $y = \arccos x$ справедливы неравенства $-1 \le x \le 1$ и $0 \le \arccos x \le \pi$.

Следовательно, для уравнения (8.73) имеем $0 \le \arccos\frac{1}{x} \le \pi$. В этой связи

$$0 \le \frac{\pi}{2}\left(1-\sqrt[3]{x}\right) \le \pi,\ 0 \le 1-\sqrt[3]{x} \le 2,\ -1 \le \sqrt[3]{x} \le 1 \text{ или } -1 \le x \le 1.$$

Кроме того, здесь $-1 \le \frac{1}{x} \le 1$. Отсюда и из двойного неравенства $-1 \le x \le 1$ получаем $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

8.42. Решить уравнение

$$54\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{x}\right)=3^{\frac{x^2}{4}}+3^{\frac{36}{x^2}}. \qquad (8.74)$$

Решение. Используя неравенство Коши (3.2), можно записать

$$\frac{x^2}{4}+\frac{36}{x^2}\ge 2\cdot\sqrt{\frac{x^2}{4}\cdot\frac{36}{x^2}}=6. \qquad (8.75)$$

Если неравенство Коши применить к правой части уравнения (8.74), то с учетом (8.75) получим

$$3^{\frac{x^2}{4}}+3^{\frac{36}{x^2}}\ge 2\cdot\sqrt{3^{\frac{x^2}{4}}\cdot 3^{\frac{36}{x^2}}}=2\cdot\sqrt{3^{\frac{x^2}{4}+\frac{36}{x^2}}}\ge 2\sqrt{3^6}=54.$$

Поскольку $54\cdot\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{x}\right)\le 54$, то из уравнения (8.74) следует, что обе его части равны 54, т. е.

$$\begin{cases}\cos\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{3}{x}\right)=1,\\ \dfrac{x^2}{4}=\dfrac{36}{x^2}.\end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $x^2=12$ или $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=-2\sqrt{3}$. Нетрудно убедиться, что $x_1=2\sqrt{3}$ и $x_2=-2\sqrt{3}$ удовлетворяют первому уравнению системы.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=-2\sqrt{3}$

8.43. Решить уравнение

$$\mathrm{ctg}^4 x+9=\mathrm{ctg}^2 x\cdot(5-\sin 3x). \qquad (8.76)$$

Решение. Уравнение (8.76) будем рассматривать как квадратное уравнение относительно $\mathrm{ctg}^2 x$, т. е. $\mathrm{ctg}^4 x-\mathrm{ctg}^2 x\cdot(5-\sin 3x)+9=0$. Это уравнение будет иметь корни, если его дискриминант будет неотрицательным, т. е. $(5-\sin 3x)^2-36\ge 0$ или $|5-\sin 3x|\ge 6$.

Нетрудно видеть, что неравенство $|5-\sin 3x| \geq 6$ выполняется только в том случае, когда $\sin 3x = -1$. Причем в этом случае неравенство превращается в равенство.

Если подставить значение $\sin 3x = -1$ в уравнение (8.76), то получим $\text{ctg}^4 x - 6\text{ctg}^2 x + 9 = 0$, $\left(\text{ctg}^2 x - 3\right)^2 = 0$ или $\text{ctg} x = \pm\sqrt{3}$.

Следовательно, имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \sin 3x = -1, \\ \text{ctg}^2 x = 3. \end{cases} \tag{8.77}$$

Из второго уравнения системы получаем $\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = 3$ или $\sin^2 x = \frac{1}{4}$.

Тогда первое уравнение системы (8.77) преобразуём следующим образом:

$$-4\sin^3 x + 3\sin x = -1, \ \sin x \cdot \left(4\sin^2 x - 3\right) = 1,$$

$$\sin x \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{4} - 3\right) = 1 \text{ или } \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что система уравнений (8.77) равносильна уравнению $\sin x = -\frac{1}{2}$. Значит, корнями уравнения (8.76) являются

$$x_1 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,$$

где n — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, где n — целое число.

Примечание. Систему уравнений (8.77) можно построить, используя иные рассуждения.

1. Из уравнения (8.76) следует, что $\text{ctg}^2 x \neq 0$ (в противном случае уравнение (8.76) превращается в противоречивое неравенство). Тогда разделим обе части уравнения (8.76) на $\text{ctg}^2 x$ и получим уравнение

$$\text{ctg}^2 x + \frac{9}{\text{ctg}^2 x} = 5 - \sin 3x. \tag{8.78}$$

Используя неравенство Коши (3.2), получаем

$$\text{ctg}^2 x + \frac{9}{\text{ctg}^2 x} \geq 2 \cdot \sqrt{\text{ctg}^2 x \cdot \frac{9}{\text{ctg}^2 x}} = 6.$$

Так как $-1 \le \sin 3x \le 1$, то $4 \le 5 - \sin 3x \le 6$. Следовательно, равенство в уравнении (8.78) достигается только в том случае, когда обе его части одновременно равны 6. Это означает, что

$$\mathrm{ctg}^2 x = \frac{9}{\mathrm{ctg}^2 x} \text{ или } \mathrm{ctg}^2 x = 3,$$

а также $\sin 3x = -1$.

2. Перепишем уравнение (8.76) в виде равносильного уравнения

$$\left(\mathrm{ctg}^2 x - 3\right)^2 + \mathrm{ctg}^2 x \cdot (1 + \sin 3x) = 0. \tag{8.79}$$

Так как

$$\left(\mathrm{ctg}^2 x - 3\right)^2 \ge 0 \text{ и } \mathrm{ctg}^2 x \cdot (1 + \sin 3x) \ge 0,$$

то равенство в уравнении (8.79) возможно только при условии, что $\mathrm{ctg}^2 x = 3$ и $\sin 3x = -1$.

8.44. Решить уравнение

$$\log_2(y+1) + \arcsin\left(2^{|x|} + y\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{8.80}$$

Решение. Обозначим $f(x,y) = \arcsin\left(2^{|x|} + y\right)$, тогда из определения обратной тригонометрической функции $f(x,y)$ имеем $-\frac{\pi}{2} \le f(x,y) \le \frac{\pi}{2}$ и $-1 \le 2^{|x|} + y \le 1$.

Так как $f(x,y) \le \frac{\pi}{2}$, то из уравнения (8.80) следует неравенство $\log_2(y+1) \ge 0$, т. е. $y \ge 0$. Поскольку $2^{|x|} + y \le 1$ и $y \ge 0$, то $2^{|x|} \le 1$ и $|x| \le 0$. Однако $|x| \ge 0$ и поэтому $x_1 = 0$.

Если $2^{|x|} + y \le 1$ и $x_1 = 0$, то $y \le 0$. Так как ранее было установлено, что $y \ge 0$, то $y_1 = 0$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

8.45. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases} \tag{8.81}$$

Решение. Областью допустимых значений переменных x и y в системе уравнений (8.81) являются $x \ge 0$ и $y \ge 0$.

Так как $y \ge 0$, то $y+1 \ge 1$ или $\sqrt{y+1} \ge 1$. С учетом того, что $\sqrt{x} \ge 0$, получаем неравенство $\sqrt{x}+\sqrt{y+1} \ge 1$. Если полученное неравенство сравнить с первым уравнением системы уравнений (8.81), то $\sqrt{x}=0$ и $\sqrt{y+1}=1$. Отсюда следует $x_1=0$ и $y_1=0$. Непосредственной подстановкой во второе уравнение системы (8.81) убеждаемся в том, что $x_1=0$, $y_1=0$ является корнями заданной системы уравнений.

♦ ***Ответ:*** $x_1=0$, $y_1=0$.

8.46 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+y^2+\sqrt{x-y^2-1}=1, \\ \sqrt{x^3-3y^2}-7y^2+5x=6. \end{cases} \tag{8.82}$$

Решение. Так как $x-y^2-1 \ge 0$, то $x \ge y^2+1 \ge 1$ или $\sqrt{x} \ge 1$. Поскольку $\sqrt{x} \ge 1$, $y^2 \ge 0$ и $\sqrt{x-y^2-1} \ge 0$, то имеет место неравенство

$$\sqrt{x}+y^2+\sqrt{x-y^2-1} \ge 1. \tag{8.83}$$

Сравнивая неравенство (8.83) с первым уравнением системы (8.82), получаем $\sqrt{x}=1$, $y^2=0$ и $\sqrt{x-y^2-1}=0$. Отсюда следует $x_1=1$ и $y_1=0$.

Подставим найденные значения x_1 и y_1 во второе уравнение системы (8.82) и убедимся в том, что $x_1=1$, $y_1=0$ являются корнями этой системы уравнений.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=0$.

8.47 Решить неравенство

$$y-\sqrt{1-y-x^2} \ge \frac{1}{|\cos x|}. \tag{8.84}$$

Решение. Так как $1-y-x^2 \ge 0$, то $y \le 1-x^2 \le 1$ или $y \le 1$. Если учесть, что $\sqrt{1-y-x^2} \ge 0$, то $y-\sqrt{1-y-x^2} \le 1$.

Однако $|\cos x| \le 1$, поэтому $\dfrac{1}{|\cos x|} \ge 1$.

Следовательно, неравенство (8.84) имеет место лишь в том случае, когда обе его части равны между собой и равны 1, т. е.

$$\begin{cases} y = 1, \\ \sqrt{1 - y - x^2} = 0, \\ |\cos x| = 1. \end{cases} \tag{8.85}$$

Корнями системы уравнений (8.85) являются $x_1 = 0$ и $y_1 = 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 0$, $y_1 = 1$.

8.48. Решить неравенство

$$\sin^3 x + \cos x > \frac{5}{4}. \tag{8.86}$$

Решение. Так как $\sin x \le 1$, то $\sin^3 x \le \sin^2 x$ или

$$\sin^3 x + \cos x \le \sin^2 x + \cos x. \tag{8.87}$$

Рассмотрим вспомогательное неравенство

$$\sin^2 x + \cos x > \frac{5}{4}. \tag{8.88}$$

Из неравенства (8.88) получаем

$$\left(1 - \cos^2 x\right) + \cos x > \frac{5}{4},\ \cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} < 0 \text{ или } \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 < 0.$$

Получили противоречивое неравенство. Следовательно, неравенство (8.88) не выполняется, т. е. для любых x имеет место $\sin^2 x + \cos x \le \dfrac{5}{4}$.

Отсюда с учетом неравенства (8.87) можно записать, что $\sin^3 x + {}$ $+ \cos x \le \dfrac{5}{4}$. А это означает, что неравенство (8.86) не имеет решения.

♦ ***Ответ:*** решений нет.

8.49. Решить неравенство

$$\left(x^2 - 4x + 3\right) \cdot \log_2\left(\cos \pi x + \cos x + 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) \le -1. \tag{8.89}$$

Решение. Неравенство (8.89) равносильно неравенству

$$\left(-x^2+4x-3\right)\cdot\log_2\left(\cos\pi x+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)\ge 1. \qquad (8.90)$$

Поскольку $-x^2+4x-3=1-(x-2)^2\le 1$, то $-x^2+4x-3\le 1$. Далее, имеет место

$$\cos\pi x+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}=\cos\pi x+\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)+2\sin^2\frac{x}{2}=\cos\pi x+1\le 2,$$

$$\text{т. е. } \log_2\left(\cos\pi x+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)\le 1.$$

Отсюда и из неравенства $-x^2+4x-3\le 1$ вытекает неравенство

$$\left(-x^2+4x-3\right)\cdot\log_2\left(\cos\pi x+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)\le 1.$$

Полученное неравенство свидетельствует о том, что неравенство (8.90) превращается в равенство. А это возможно только в том случае, когда одновременно выполняются следующие два условия: $-x^2+4x-3=1$ и $\log_2\left(\cos\pi x+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)=1$. Отсюда получаем единственное решение неравенства (8.89) вида $x_1=2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2$.

8.50. Решить неравенство

$$\log_3(4-\sin 3x)\le\cos\frac{12x}{5}. \qquad (8.91)$$

Решение. Так как $4-\sin 3x\ge 3$, то $\log_3(4-\sin 3x)\ge 1$. Отсюда и из очевидного неравенства $\cos\frac{12x}{5}\le 1$, следует неравенство

$$\log_3(4-\sin 3x)\ge\cos\frac{12x}{5}. \qquad (8.92)$$

Из неравенств (8.91) и (8.92) получаем уравнение

$$\log_3(4-\sin 3x)=\cos\frac{12x}{5}, \qquad (8.93)$$

которое имеет место только в том случае, когда обе его части равны 1, т. е.

$$\begin{cases}\log_3(4-\sin 3x)=1,\\ \cos\dfrac{12x}{5}=1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\sin 3x=1,\\ \cos\dfrac{12x}{5}=1.\end{cases}$$

Корнями каждого из уравнений последней системы являются

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}(4n+1),\\ x=\dfrac{5\pi k}{6},\end{cases} \tag{8.94}$$

где n, k — целые числа.

Для получения корней уравнения (8.93) необходимо построить пересечение системы корней (8.94).

Пусть $\dfrac{\pi}{6}(4n+1)=\dfrac{5\pi k}{6}$ или $4n+1=5k$. Поскольку левая часть равенства нечетная, то k — нечетное, т. е. $k=2u+1$, где u — целое число. Тогда $4n+1=5(2u+1)$ или $2n-2=5u$. Так как левая часть последнего равенства является четной, то u — четное или $u=2m$, где m — целое число. В таком случае получаем $2n-2=10m$ или $n=5m+1$. Если подставить $n=5m+1$ в выражение для n из системы (8.94), то

$$x=\frac{\pi}{6}(4n+1)=\frac{\pi}{6}(4(5m+1)+1)=\frac{5\pi}{6}(4m+1).$$

Следовательно, корнями уравнения (8.93), а также решением неравенства (8.91), являются $x_1=\dfrac{5\pi}{6}(4m+1)$, где m — целое число.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\dfrac{5\pi}{6}(4m+1)$, где m — целое число.

$\boxed{8.51}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0,\\ 2x^2-4x+y^3+3=0.\end{cases} \tag{8.95}$$

Решение. Из первого уравнения системы (8.95) получаем уравнение

$$y^2 = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Так как $(x-1)^2 \geq 0$ или $x^2+1 \geq 2x$, то

$$y^2 = \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \text{ или } -1 \leq y \leq 1.$$

Представим второе уравнение системы (8.95) в виде

$$2(x-1)^2 + \left(y^3+1\right) = 0. \qquad (8.96)$$

Поскольку $-1 \leq y \leq 1$, то $y^3+1 \geq 0$. Так как при этом $(x-1)^2 \geq 0$, то из уравнения (8.96) получаем

$$\begin{cases} x-1=0, \\ y^3+1=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -1. \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой в первое уравнение системы (8.95) убеждаемся, что эта пара значений x_1 и y_1 является корнем этой системы.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1,\ y_1 = -1$.

8.52. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y - |x-2y+1| = 3, \\ |y| + |y-2| + (y-4)^2 = 5. \end{cases} \qquad (8.97)$$

Решение. Из первого уравнения системы (8.97) получаем $y = |x-2y+1|+3$. Поскольку $|x-2y+1| \geq 0$, то $y \geq 3$. В этой связи $|y| = y$, $|y-2| = y-2$ и второе уравнение системы (8.97) принимает вид $y+y-2+(y-4)^2 = 5$, $y^2-6y+9=0$ или $(y-3)^2 = 0$.

Отсюда получаем $y_1 = 3$. Если подставить значение $y_1 = 3$ в первое уравнение системы (8.97), то $3-|x-6+1| = 3$ или $x_1 = 5$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 5$, $y_1 = 3$.

8.53. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x+3)^3=3-2y,\\ z^2+4y^2=8y,\\ (2z-x)(x+3)=5x+16,\end{cases} \qquad (8.98)$$

при условии, что $z\ge 0$.

Решение. Из второго уравнения системы (8.98) получаем $z^2+4(y-1)^2=4$ или $z^2=4-4(y-1)^2$. Отсюда следует, что $z^2\le 4$ или $-2\le z\le 2$. Так как по условию $z\ge 0$, то $0\le z\le 2$.

Перепишем третье уравнение системы (8.98) в виде квадратного уравнения относительно переменной x, т. е. $x^2+2x(4-z)+16-6z=0$.

Для существования действительных корней приведенного выше квадратного уравнения необходимо потребовать, чтобы его дискриминант принимал неотрицательные значения, т. е. $(4-z)^2-16+6z\ge 0$ или $z(z-2)\ge 0$. Отсюда с учетом того, что $0\le z\le 2$, получаем $z_1=0$ и $z_2=2$.

Если найденные значения переменной z подставить в уравнения системы (8.98), то получим две системы уравнений

$$\begin{cases}(x+3)^3=3-2y,\\ 4y^2=8y,\\ -x(x+3)=5x+16\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}(x+3)^3=3-2y,\\ 4+4y^2=8y,\\ (4-x)(x+3)=5x+16.\end{cases}$$

Корнями первой системы уравнений являются $x_1=-4$, $y_1=2$, а из второй системы уравнений получаем $x_2=-2$, $y_2=1$.

♦ *Ответ:* $x_1=-4$, $y_1=2$, $z_1=0$; $x_2=-2$, $y_2=1$, $z_2=2$.

8.54. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\cos x-\arccos y=1,\\ \cos(\pi y)-\arcsin x=-1.\end{cases} \qquad (8.99)$$

Решение. Из первого уравнения системы (8.99) получаем

$$\cos x = 1 + \arccos y. \tag{8.100}$$

Поскольку $\cos x \le 1$ и $\arccos y \ge 0$, то из уравнения (8.100) следует, что

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \arccos y = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем корни первого уравнения системы (8.99) вида $x = 2\pi k$ и $y_1 = 1$, где k — целое число.

Подставим значение $y_1 = 1$ во второе уравнение системы (8.99), тогда $\cos \pi - \arcsin x = -1$ или $\arcsin x = 0$, т. е. $x_1 = 0$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 0$, $y_1 = 1$.

8.55. Решить систему

$$\begin{cases} 5^{\left|x^2-5x+4\right|-\log_5 2} = 2^{y-3}, \\ 3|y| - |y+1| + (y-2)^2 \le 3. \end{cases} \tag{8.101}$$

Решение. Из уравнения системы (8.101) получаем

$$\frac{5^{\left|x^2-5x+4\right|}}{5^{\log_5 2}} = 2^{y-3} \text{ или } 5^{\left|x^2-5x+4\right|} = 2^{y-2}.$$

Так как $\left|x^2 - 5x + 4\right| \ge 0$, то $5^{\left|x^2-5x+4\right|} \ge 1$. Отсюда следует, что $2^{y-2} \ge 1$ или $y \ge 2$. Поскольку установлено, что $y \ge 2$, то $|y| = y$, $|y+1| = y+1$ и неравенство из системы (8.101) принимает вид $3y - y - 1 + (y-2)^2 \le 3$ или $y(y-2) \le 0$, т. е. $0 \le y \le 2$.

С учетом того, что $y \ge 2$, отсюда получаем $y_1 = 2$.

Подставим значение y_1 в уравнение системы (8.101), тогда $5^{\left|x^2-5x+4\right|} = 1$ или $x^2 - 5x + 4 = 0$. Решая квадратное уравнение, получаем $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

Следовательно, корнями системы (8.101) являются $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ и $x_2 = 4$, $y_2 = 2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 4$, $y_2 = 2$.

РАЗДЕЛ 9

Методы решения симметрических систем уравнений

В ряде случаев приходится решать системы уравнений с симметрическим вхождением переменных, слагаемых или сомножителей. Системы с таким свойством будем называть ***симметрическими***. К таким системам уравнений относятся, в частности, системы вида

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=a, \\ f(x)+h(x)=b, \\ g(x)+h(x)=c \end{cases} \tag{9.1}$$

и

$$\begin{cases} f(x)\cdot g(x)=a, \\ f(x)\cdot h(x)=b, \\ g(x)\cdot h(x)=c. \end{cases} \tag{9.2}$$

Метод решения системы (9.1) заключается в сложении левых и правых частей уравнений с целью формирования уравнения $f(x)+g(x)+h(x)=$ $=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Затем из данного уравнения поочередно вычитаются третье, второе и первое уравнения системы (9.1), в результате чего получается система

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}(a+b-c), \\ g(x)=\frac{1}{2}(a-b+c), \\ h(x)=\frac{1}{2}(-a+b+c). \end{cases}$$

При решении системы уравнений (9.2) необходимо перемножить левые и правые части уравнений, тогда получаем $f^2(x)\cdot g^2(x)\cdot h^2(x)=abc$ или $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=\pm\sqrt{abc}$.

Здесь необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие $abc\geq 0$. Если затем полученное уравнение разделить поочередно на третье, второе и первое уравнения системы (9.2), то получаем две системы уравнений относительно $f(x), g(x), h(x)$ вида

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{\dfrac{ab}{c}}, \\ g(x)=\sqrt{\dfrac{ac}{b}}, \\ h(x)=\sqrt{\dfrac{bc}{a}} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x)=-\sqrt{\dfrac{ab}{c}}, \\ g(x)=-\sqrt{\dfrac{ac}{b}}, \\ h(x)=-\sqrt{\dfrac{bc}{a}}. \end{cases}$$

Полученные системы уравнений относительно $f(x), g(x), h(x)$ допускают более простое решение по сравнению с решением систем уравнений (9.1), (9.2). Следует отметить, что данный метод обобщается на случай произвольного числа уравнений, содержащихся в симметрических системах.

Кроме изложенного выше метода, существует еще довольно-таки много других методов решения, которые учитывают специфику заданной симметрической системы уравнений.

Задачи и решения

9.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}=3, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=4, \\ \sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}=5. \end{cases} \qquad (9.3)$$

Решение. После сложения уравнений системы (9.3) получим $\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}=6$. Если из полученного уравнения вычесть поочередно уравнения системы (9.3), то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}=1, \\ \sqrt{x+z}=2, \\ \sqrt{y+z}=3. \end{cases} \qquad (9.4)$$

Из системы уравнений (9.4) следует $x+y=1$, $x+z=4$ и $y+z=9$. Отсюда получаем $x+y+z=7$ и $x_1=-2$, $y_1=3$, $z_1=6$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-2$, $y_1=3$, $z_1=6$.

9.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy+xz=5, \\ xy+yz=8, \\ xz+yz=9. \end{cases} \qquad (9.5)$$

Решение. Путем сложения левых и правых частей уравнений системы (9.5) получаем $xy+xz+yz=11$. Если из последнего уравнения вычесть поочередно уравнения системы (9.5), то $xy=2$, $xz=3$, $yz=6$. Если перемножить между собой три приведенные выше уравнения, то $x^2y^2z^2=36$ или $xyz=\pm 6$.

Рассмотрим два возможных случая. Если $xyz=6$ и $xy=2$, $xz=3$, $yz=6$, то $x_1=1$, $y_1=2$ и $z_1=3$. Если $xyz=-6$, то $x_2=-1$, $y_2=-2$ и $z_2=-3$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=2$, $z_1=3$; $x_2=-1$, $y_2=-2$, $z_2=-3$.

9.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x=\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}, \\ 4y=\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}, \\ 5z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}, \end{cases} \qquad (9.6)$$

где $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$.

Решение. Система уравнений (9.6) равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y}{xz}+\dfrac{z}{xy}=3, \\ \dfrac{x}{yz}+\dfrac{z}{xy}=4, \\ \dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{xz}=5. \end{cases} \tag{9.7}$$

Если сложить между собой уравнения системы (9.7), а затем обе его части разделить на 2, то получим

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}=6. \tag{9.8}$$

Далее, вычтем из уравнения (9.8) последовательно первое, второе и третье уравнения системы (9.7), тогда

$$\begin{cases} \dfrac{x}{yz}=3, \\ \dfrac{y}{xz}=2, \\ \dfrac{z}{xy}=1. \end{cases} \tag{9.9}$$

Если перемножить между собой уравнения системы (9.9), то $xyz=\frac{1}{6}$.

Отсюда и из уравнений системы (9.9) получаем $x^2=\frac{1}{2}$, $y^2=\frac{1}{3}$ и $z^2=\frac{1}{6}$, т. е. $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $z=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Нетрудно убедиться, что корнями системы уравнений (9.6) являются

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_1=\frac{\sqrt{3}}{3},\ z_1=\frac{\sqrt{6}}{6};\ x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_2=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ z_2=\frac{\sqrt{6}}{6};\ x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y_3=\frac{\sqrt{3}}{3},\ z_3=-\frac{\sqrt{6}}{6}\ \text{и}\ x_4=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_4=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ z_4=-\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

♦ ***Ответ:*** см. выше.

$\boxed{9.4.}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)=45, \\ y\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)=40, \\ z\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=13, \end{cases} \qquad (9.10)$$

где $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Решение. Раскрывая скобки в левых частях уравнений системы (9.10), получаем систему уравнений вида (9.1), т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}=45, \\ \dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}=40, \\ \dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}=13. \end{cases} \qquad (9.11)$$

Если сложить левые и правые части уравнений (9.11), то получим

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=49.$$

Если затем из полученного уравнения вычесть третье, второе и первое уравнения системы (9.11), то

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{z}=36, \\ \dfrac{xz}{y}=9, \\ \dfrac{yz}{x}=4. \end{cases} \qquad (9.12)$$

Система уравнений (9.12) имеет вид симметрической системы (9.2). Поэтому здесь необходимо перемножить левые и правые части уравнений (9.12). Тогда $xyz=1296$. Затем разделим выражение $xyz=1296$ на третье, второе и первое уравнения системы (9.12) и получим $x^2=324$, $y^2=144$ и $z^2=36$, т. е. $x=\pm 18$, $y=\pm 12$ и $z=\pm 6$.

Проверкой устанавливаем, что корнями системы уравнений (9.10) являются $x_1=18$, $y_1=12$, $z_1=6$; $x_2=18, y_2=-12, z_2=-6$; $x_3=-18$, $y_3=12$, $z_3=-6$ и $x_4=-18$, $y_4=-12$, $z_4=6$.

♦ ***Ответ:*** см. выше.

$\boxed{9.5.}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=15,\\[2ex] \dfrac{xz}{x+z}=12,\\[2ex] \dfrac{yz}{y+z}=20,\end{cases}\tag{9.13}$$

где $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$.

Решение. Простым преобразованием уравнений системы (9.13) получаем

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{15},\\[2ex] \dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{1}{12},\\[2ex] \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{20}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{15},\\[2ex] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{12},\\[2ex] \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{20}.\end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}\ \text{или}\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}.$$

Тогда $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{20}$, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{60}$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{30}$ или $x_1=20$, $y_1=60$ и $z_1=30$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=20$, $y_1=60$, $z_1=30$.

$\boxed{9.6.}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy+x+y=1, \\ xz+x+z=2, \\ yz+y+z=5. \end{cases} \tag{9.14}$$

Решение. Если к обеим частям каждого уравнения системы (9.14) прибавить 1, то получаем

$$\begin{cases} xy+x+y+1=2, \\ xz+x+z+1=3, \\ yz+y+z+1=6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x+1)(y+1)=2, \\ (x+1)(z+1)=3, \\ (y+1)(z+1)=6. \end{cases}$$

Из последней системы уравнений следует

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=36 \text{ или } (x+1)(y+1)(z+1)=\pm 6.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $(x+1)(y+1)(z+1)=6$, тогда $x+1=\dfrac{6}{(y+1)(z+1)}=1$, $y+1=$ $=\dfrac{6}{(x+1)(z+1)}=2$, $z+1=\dfrac{6}{(x+1)(y+1)}=3$ или $x_1=0$, $y_1=1$, $z_1=2$.
2. Если $(x+1)(y+1)(z+1)=-6$, то по аналогии с предыдущим случаем, получаем $x_2=-2$, $y_2=-3$ и $z_2=-4$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=0$, $y_1=1$, $z_1=2$; $x_2=-2$, $y_2=-3$, $z_2=-4$.

$\boxed{9.7.}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=18, \\ x^2+y^2+z^2=108. \end{cases} \tag{9.15}$$

Решение. Умножим на 12 обе части первого уравнения системы (9.15) и вычтем его из второго уравнения, тогда

$$x^2-12x+y^2-12y+z^2-12z=-108.$$

Отсюда получаем уравнение $(x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=0$, корнями которого являются $x_1=y_1=z_1=6$. Найденные значения переменных x, y, z подставим в оба уравнения системы (9.15) и убедимся в том, что эти значения являются ее корнями.

♦ ***Ответ:*** $x_1=6, y_1=6, z_1=6$.

9.8 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=12, \\ xy+xz+yz=12. \end{cases} \tag{9.16}$$

Решение. Из первого уравнения системы (9.16) вычтем второе уравнение, тогда $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=0$. Если обе части полученного уравнения умножить на 2, то после несложных преобразований получим $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0$, откуда следует, что $x=y=z$. В таком случае из первого уравнения системы (9.16) получаем $3x^2=12$ или $x=\pm2$.

Поскольку $x=y=z$, то $x_1=y_1=z_1=2$ и $x_2=y_2=z_2=-2$. Для завершения решения системы уравнений (9.16) необходимо обязательно выполнить проверку.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2, y_1=2, z_1=2$; $x_2=-2, y_2=-2, z_2=-2$.

9.9 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^2+xz+z^2=28, \\ y^2+yz+z^2=19. \end{cases} \tag{9.17}$$

Решение. Нетрудно заметить, что $x\neq y$, $x\neq z$ и $y\neq z$. Например, если бы $x=y$, то второе уравнение системы (9.17) противоречило бы третьему уравнению.

В таком случае система (9.17) равносильна системе

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 37(x-y), \\ z^3 - x^3 = 28(z-x), \\ y^3 - z^3 = 19(y-z). \end{cases} \qquad (9.18)$$

Если сложить, соответственно, левые и правые части уравнений системы (9.18), то получим $37x - 37y + 28z - 28x + 19y - 19z = 0$, откуда следует $x + z = 2y$.

Уравнение $x + z = 2y$ можно трактовать, как выполнение условия того, что значения переменных x, y и z образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна d, где $d \neq 0$. В таком случае $x = y - d$ и $z = y + d$.

Далее, подставим выражения $x = y - d$ и $z = y + d$, соответственно, в первое и третье уравнения системы (9.17) и получим

$$\begin{cases} (y-d)^2 + y(y-d) + y^2 = 37, \\ y^2 + y(y+d) + (y+d)^2 = 19 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3y^2 - 3yd + d^2 = 37, \\ 3y^2 + 3yd + d^2 = 19. \end{cases}$$

Если из первого уравнения последней системы вычесть второе уравнение, то

$$yd = -3 \text{ и } \begin{cases} yd = -3, \\ 3y^2 + d^2 = 28, \end{cases}$$

откуда следует $3y^2 + \frac{9}{y^2} = 28$, $3y^4 - 28y^2 + 9 = 0$ или $y^2 = 9$, $y^2 = \frac{1}{3}$. Отсюда с учетом того, что $d = -\frac{3}{y}$, вытекает $y_1 = 3$, $d_1 = -1$; $y_2 = -3$, $d_2 = 1$; $y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $d_3 = -3\sqrt{3}$ и $y_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $d_4 = 3\sqrt{3}$.

Далее, используя формулы $x = y - d$ и $z = y + d$, получаем корни системы уравнений (9.17).

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 4$, $y_1 = 3$, $z_1 = 2$; $x_2 = -4$, $y_2 = -3$, $z_2 = -2$;

$x_3 = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_3 = -\frac{8}{\sqrt{3}}$; $x_4 = -\frac{10}{\sqrt{3}}$, $y_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_4 = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

9.10 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)\left(x^2+y^2\right)=15, \\ (x+z)\left(x^2+z^2\right)=40, \\ (y+z)\left(y^2+z^2\right)=65. \end{cases} \tag{9.19}$$

Решение. Первоначально отметим, что $x \neq y$, $x \neq z$ и $y \neq z$. Если, например, выполнялось бы равенство $x = y$, то левые части второго и третьего уравнений системы (9.19) были бы равны, а правые части — нет. Поэтому, умножив обе части первого уравнения на $x-y$, обе части второго уравнения на $z-x$ и обе части третьего уравнения на $y-z$, получим равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} x^4-y^4=15x-15y, \\ z^4-x^4=40z-40x, \\ y^4-z^4=65y-65z. \end{cases}$$

Если затем сложить левые и правые части уравнений приведенной выше системы, то получим $15x-15y+40z-40x+65y-65z=0$ или $2y=x+z$.

По аналогии с решением системы уравнений (9.17) здесь значения переменных x, y, z также образуют арифметическую прогрессию, разность которой обозначим через d. Тогда $x=y-d$ и $z=y+d$.

Подставим выражения x и z в первое и третье уравнения системы (9.19), тогда после несложных преобразований получаем

$$\begin{cases} 4y^3-6y^2d+4yd^2-d^3=15, \\ 4y^3+6y^2d+4yd^2+d^3=65. \end{cases} \tag{9.20}$$

Если сначала сложить (а затем вычесть) уравнения системы (9.20), то получим систему уравнений

$$\begin{cases} y^3+yd^2=10, \\ 6y^2d+d^3=25. \end{cases} \tag{9.21}$$

Из второго уравнения системы (9.21) следует, что $d \neq 0$. Кроме того, из уравнений системы (9.21) имеем

$$\frac{y^3+yd^2}{6y^2d+d^3}=\frac{2}{5}.$$

Поскольку $d\neq 0$, то разделим числитель и знаменатель дроби на d^3 и после этого положим $\frac{y}{d}=u$. Тогда $\frac{u^3+u}{6u^2+1}=\frac{2}{5}$ или $5u^3-12u^2+5u-2=0$.

Кубическое уравнение имеет единственный корень $u_1=2$. Так как $u=\frac{y}{d}$ и $u_1=2$, то $y=2d$.

Подставим выражение $y=2d$ в первое уравнение системы (9.21), тогда $(2d)^3+2d\cdot d^2=10$ или $d_1=1$. Следовательно, имеем $y_1=2d_1=2$, $x_1=y_1-d_1=1$ и $z_1=y_1+d_1=3$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1,\quad y_1=2,\quad z_1=3$.

9.11 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2=(y-z)^2+2, \\ y^2=(z-x)^2+3, \\ z^2=(x-y)^2+6. \end{cases} \tag{9.22}$$

Решение. Перепишем систему уравнений (9.22) в равносильном виде

$$\begin{cases} x^2-(y-z)^2=2, \\ y^2-(z-x)^2=3, \\ z^2-(x-y)^2=6 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z)=2, \\ (x+y-z)(-x+y+z)=3, \\ (-x+y+z)(x-y+z)=6. \end{cases} \tag{9.23}$$

Если перемножить левые и правые части уравнений системы (9.23), то получим $(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=\pm 6$. Рассмотрим два случая.

Пусть $(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=6$. Если разделить данное уравнение последовательно на уравнения системы (9.23), то получим систему уравнений

$$\begin{cases} -x+y+z=3, \\ x-y+z=2, \\ x+y-z=1. \end{cases} \tag{9.24}$$

После сложения уравнений системы (9.24) имеем уравнение $x+y+z=6$. Если из данного уравнения вычесть первое уравнение системы (9.24), то $2x=3$ или $x_1=\frac{3}{2}$. Аналогично получаем $y_1=2$ и $z_1=\frac{5}{2}$.

Пусть теперь $(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=-6$, тогда по аналогии с предыдущим случаем, получаем

$$x+y+z=-6 \text{ и } x_2=-\frac{3}{2},\ y_2=-2,\ z_2=-\frac{5}{2}.$$

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{3}{2}$, $y_1=2$, $z_1=\frac{5}{2}$; $x_2=-\frac{3}{2}$, $y_2=-2$, $z_2=-\frac{5}{2}$.

9.12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+yz=6, \\ y+zx=6, \\ z+xy=6. \end{cases} \tag{9.25}$$

Решение. Если вычесть первое уравнение системы (9.25) из остальных двух уравнений системы, то

$$\begin{cases} x+yz=6, \\ (x-y)(z-1)=0, \\ (x-z)(y-1)=0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для отыскания корней уравнений системы (9.25) необходимо рассмотреть четыре системы уравнений

$$\begin{cases} x+yz=6, \\ x-y=0, \\ x-z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+yz=6, \\ x-y=0, \\ y-1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+yz=6, \\ z-1=0, \\ x-z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+yz=6, \\ z-1=0, \\ y-1=0. \end{cases}$$

Решая приведенные выше системы уравнений, получаем следующие корни:

$$x_1=-3,\ y_1=-3,\ z_1=-3;\ \ x_2=2,\ y_2=2,\ z_2=2;\ \ x_3=1,\ y_3=1,\ z_3=5;$$

$$x_4=1,\ y_4=5,\ z_4=1 \text{ и } x_5=5,\ y_5=1,\ z_5=1.$$

♦ ***Ответ:*** см. выше.

9.13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\left(x^3+1\right)\left(y^3+1\right)=56,\\ xy+x+y=7.\end{cases} \tag{9.26}$$

Решение. Из системы уравнений (9.26) следует, что $x\neq-1$ и $y\neq-1$ (в этом нетрудно убедиться, если данные значения переменных x и y подставить в первое уравнение системы).

Преобразуем систему уравнений к виду

$$\begin{cases}\left(x^3+1\right)\left(y^3+1\right)=56,\\ (x+1)(y+1)=8.\end{cases} \tag{9.27}$$

Поскольку $x\neq-1$ и $y\neq-1$, то можно разделить первое уравнение системы (9.27) на второе уравнение и получить равносильные системы уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)=7,\\ xy+x+y=7,\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy\left(xy-(x+y)\right)+(x+y)^2-(xy+x+y)=6,\\ xy+x+y=7,\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy\left(xy-(x+y)\right)+(x+y)^2=13,\\ xy+x+y=7.\end{cases} \tag{9.28}$$

Введем новые переменные $x+y=u$, $xy=v$ и перепишем систему уравнений (9.28) в виде

$$\begin{cases} v(v-u)+u^2=13, \\ u+v=7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u^2+v^2-uv=13, \\ u+v=7. \end{cases}$$

Корнями последней системы уравнений являются $u_1=3$, $v_1=4$ и $u_2=4$, $v_2=3$.

Рассмотрим две системы

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=4, \\ xy=3. \end{cases}$$

Первая система уравнений корней не имеет, а из второй системы уравнений получаем $x_1=1$, $y_1=3$ и $x_2=3$, $y_2=1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=1$.

Примечание. Симметрические системы двух уравнений, зависящих от переменных x и y, зачастую эффективно решаются с помощью стандартной замены переменных $x+y=u$ и $xy=v$.

9.14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2+x+1\right)\cdot\left(y^2+y+1\right)=3, \\ (x-1)\cdot(y-1)=6. \end{cases} \tag{9.29}$$

Решение. Представим систему уравнений (9.29) в виде равносильной системы

$$\begin{cases} xy(xy+x+y-1)+(x+y)^2+(x+y)=2, \\ xy-(x+y)=5. \end{cases} \tag{9.30}$$

Введем новые переменные $x+y=u$ и $xy=v$. Тогда систему уравнений (9.30) можно переписать, как

$$\begin{cases} v(v+u-1)+u^2+u=2, \\ v-u=5. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем $v=u+5$. Если выражение $v=u+5$ подставить в первое уравнение системы, то получим квадратное уравнение $u^2+5u+6=0$, корнями которого являются $u_1=-3$ и $u_2=-2$. Поскольку $v=u+5$, то $v_1=2$ и $v_2=3$.

Так как $x+y=u$ и $xy=v$, то имеем совокупность двух систем уравнений, относительно переменных x и y, вида

$$\begin{cases} x+y=-3, \\ xy=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=-2, \\ xy=3. \end{cases}$$

Из первой системы уравнений получаем $x_1=-1$, $y_1=-2$ и $x_2=-2$, $y_2=-1$, а вторая система уравнений корней не имеет.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-1$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=-1$.

9.15 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=10, \\ (x+y)(xy-1)=3. \end{cases} \tag{9.31}$$

Решение. Система уравнений (9.31) равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^2+(xy-1)^2=10, \\ (x+y)(xy-1)=3. \end{cases} \tag{9.32}$$

Пусть $x+y=u$ и $xy-1=v$, тогда система уравнений (9.32) примет вид

$$\begin{cases} u^2+v^2=10, \\ uv=3. \end{cases}$$

Корнями данной системы уравнений являются $u_1=1$, $v_1=3$; $u_2=-1$, $v_2=-3$; $u_3=3$, $v_3=1$ и $u_4=-3$, $v_4=-1$.

Поскольку $x+y=u$ и $xy-1=v$, то имеем четыре системы уравнений относительно переменных x и y, т. е.

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=4, \end{cases} \begin{cases} x+y=-1, \\ xy=-2, \end{cases} \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=-3, \\ xy=0. \end{cases}$$

Первая система уравнений корней не имеет. Решая остальные системы уравнений, получаем следующие корни: $x_1=1$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=1$; $x_3=1$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_4=1$; $x_5=0$, $y_5=-3$ и $x_6=-3$, $y_6=0$.

♦ ***Ответ:*** см. выше.

Примечание. Для того, чтобы система уравнений (9.31) была совместной необходимо, чтобы

$$-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)\cdot(xy-1)}{\left(x^2+1\right)\cdot\left(y^2+1\right)} \le \frac{1}{2}.$$

Это двойное неравенство было доказано в разделе 2 (см. задачу $\boxed{2.13.}$). Уравнения системы (9.31) удовлетворяют приведенным выше условиям.

$\boxed{9.16.}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=24, \\ x^3+y^3+z^3=64. \end{cases} \tag{9.33}$$

Решение. Обозначим $x+y=u$ и $xy=v$. Тогда из первого уравнения системы (9.33) следует, что $z=4-u$.

Преобразуем второе и третье уравнения системы (9.33) следующим образом:

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy+z^2=24, \\ (x+y)\cdot\left((x+y)^2-3xy\right)+z^3=64, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2-2v+(4-u)^2=24, \\ u\left(u^2-3v\right)+(4-u)^3=64, \end{cases} \quad \begin{cases} u^2-v-4u-4=0, \\ 12u^2-3uv-48u=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2-v-4u-4=0, \\ u(12u-3v-48)=0. \end{cases} \tag{9.34}$$

Из второго уравнения системы (9.34) следует необходимость рассмотрения двух случаев.

1. Пусть $u=0$. Тогда $z=4-u=4$, а из первого уравнения системы (9.34) получаем $v=-4$. Так как $x+y=u$ и $xy=v$, то имеет место система уравнений $\begin{cases} x+y=0, \\ xy=-4, \end{cases}$ из которой следует $x_1=2, y_1=-2$ и $x_2=-2$, $y_2=2$, где $z_{1,2}=4$.

2. Пусть $12u-3v-48=0$, тогда $v=4u-16$ и второе уравнение системы (9.34) будет равносильно квадратному уравнению $u^2-8u+12=0$, которое имеет два корня $u=2$ и $u=6$.

Если $u=2$, то $z=4-u=2$ и из первого уравнения системы (9.34) получаем $v=-8$. В таком случае

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-8 \end{cases} \text{ и } x_3=4, y_3=-2,\ x_4=-2, y_4=4.$$

При этом $z_{3,4}=2$.

Если $u=6$, то $z=4-u=-2$, $v=4u-16=8$ и

$$\begin{cases} x+y=6; \\ xy=8. \end{cases}$$

Отсюда следует $x_5=2, y_5=4$ и $x_6=4, y_6=2$. Здесь $z_{5,6}=-2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=2, y_1=-2, z_1=4$; $x_2=-2, y_2=2, z_2=4$;

$x_3=4, y_3=-2, z_3=2$; $x_4=-2, y_4=4, z_4=2$; $x_5=2, y_5=4, z_5=-2$;

$x_6=4, y_6=2, z_6=-2$.

9.17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=5, \\ x^4+y^4+z^4=17. \end{cases} \qquad (9.35)$$

Решение. Система уравнений (9.35) равносильна системе

$$\begin{cases} x+y=3-z, \\ x^2+y^2=5-z^2, \\ x^4+y^4=17-z^4. \end{cases} \qquad (9.36)$$

Возведем в квадрат первое уравнение системы (9.36) и вычтем из него второе уравнение. Тогда получим $xy=z^2-3z+2$. Далее, возведем в квадрат второе уравнение и вычтем из него третье уравнение, тогда

$x^2y^2 = z^4 - 5z^2 + 4$. Принимая во внимание оба полученных выше уравнения, можно составить уравнение относительно переменной z вида $\left(z^2 - 3z + 2\right)^2 = z^4 - 5z^2 + 4$ или $z^3 - 3z^2 + 2z = 0$. Отсюда получаем $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ и $z_3 = 2$.

Подставляя полученные значения z в первое и второе уравнения системы (9.36), получаем три системы уравнений относительно переменных x и y вида

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x^2+y^2=5, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=4, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{9.37}$$

Совокупность систем уравнений (9.37) имеет шесть пар корней $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$; $x_3 = 0$, $y_3 = 2$; $x_4 = 2$, $y_4 = 0$; $x_5 = 0$, $y_5 = 1$; $x_6 = 1$, $y_6 = 0$.

Поскольку в процессе решения системы уравнений (9.36) использовалась операция возведения в квадрат обеих частей первого и второго уравнений системы (9.36), то требуется проверка найденных значений переменных x, y и z.

Однако в силу симметрии вхождения переменных x, y и z в уравнения системы (9.35) достаточно в уравнения этой системы подставить только значения $x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 0$ и убедиться в том, что эта тройка является ее корнями.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 0$; $x_2 = 2, y_2 = 1, z_1 = 0$;

$x_3 = 0, y_3 = 2, z_2 = 1$; $x_4 = 2, y_4 = 0, z_2 = 1$; $x_5 = 0, y_5 = 1, z_3 = 2$;

$x_6 = 1, y_6 = 0, z_3 = 2$.

9.18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 3^x = 5^y, \\ 2^y + 3^y = 5^z, \\ 2^z + 3^z = 5^x. \end{cases} \tag{9.38}$$

Решение. Перепишем систему уравнений (9.38) в виде

$$\begin{cases} y = \log_5\left(2^x + 3^x\right), \\ z = \log_5\left(2^y + 3^y\right), \\ x = \log_5\left(2^z + 3^z\right). \end{cases} \tag{9.39}$$

Пусть $f(x) = \log_5\left(2^x + 3^x\right)$, тогда систему уравнений (9.39) можно представить посредством функционального уравнения вида (5.1), т. е.

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x. \tag{9.40}$$

Так как функция $y = f(x)$ является возрастающей на всей числовой оси OX, то уравнение (9.40) равносильно уравнению $f(x) = x$, т. е. $\log_5\left(2^x + 3^x\right) = x$ или $2^x + 3^x = 5^x$. Последнее уравнение перепишем как

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1. \tag{9.41}$$

Левая часть уравнения (9.41) представляет собой непрерывную убывающую функцию, а правая ее часть является константой, поэтому уравнение (9.41) может иметь не более одного корня, который легко находится подбором. Имеет место $x_1 = 1$. Подставляя найденное значение x в уравнения системы (9.38), получаем $y_1 = 1$ и $z_1 = 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 1$.

Примечание. Методы решения функциональных уравнений рассмотрены в разделе 5, а методы решения уравнений, основанные на использование свойства монотонности функций, — в разделе 4 настоящего учебного пособия.

$\boxed{9.19}$ Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases} \tag{9.42}$$

Решение. Используя свойства логарифмов, перейдем в каждом из уравнений системы (9.42) к одному основанию, т. е.

$$\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y + \frac{1}{2}\log_2 z = 2, \\ \log_3 y + \frac{1}{2}\log_3 z + \frac{1}{2}\log_3 x = 2, \\ \log_4 z + \frac{1}{2}\log_4 x + \frac{1}{2}\log_4 y = 2. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} \log_2\left(x\sqrt{yz}\right) = 2, \\ \log_3\left(y\sqrt{xz}\right) = 2, \\ \log_4\left(z\sqrt{xy}\right) = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x\sqrt{yz} = 4, \\ y\sqrt{xz} = 9, \\ z\sqrt{xy} = 16. \end{cases} \tag{9.43}$$

Перемножим левые и правые части уравнений системы (9.43) и получим $x^2y^2z^2 = 576$ или $xyz = \pm 24$. Поскольку областью допустимых значений переменных x, y, z в уравнениях системы (9.43) являются $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то $xyz = 24$.

Возведем в квадрат каждое из уравнений системы (9.43), а затем полученные уравнения разделим на $xyz = 24$, тогда

$$x_1 = \frac{2}{3},\ y_1 = \frac{27}{8} \text{ и } z_1 = \frac{32}{3}.$$

♦ ***Ответ:*** $x_1 = \frac{2}{3}$, $y_1 = \frac{27}{8}$, $z_1 = \frac{32}{3}$.

9.20. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + 9x_9 + 10x_{10} = 55, \\ x_2 + 2x_3 + \ldots + 9x_{10} + 10x_1 = 55, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{10} + 2x_1 + \ldots + 9x_8 + 10x_9 = 55. \end{cases} \tag{9.44}$$

Решение. Если сложить все уравнения системы (9.44), то

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 10. \tag{9.45}$$

Если из второго уравнения системы (9.44) вычесть первое уравнение, то получим $9x_1 - x_2 - \ldots - x_{10} = 0$. Отсюда и из уравнения (9.45) следует, что $10x_1 = 10$ или $x_1 = 1$.

Проведя аналогичные рассуждения, получаем $x_2 = \ldots = x_{10} = 1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = 1$.

9.21. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x \ge (y-a)^2, \\ y \ge (x-a)^2 \end{cases} \tag{9.46}$$

имеет единственное решение ?

Решение. В систему неравенств (9.46) переменные x, y входят симметрично, поэтому единственное ее решение необходимо искать в виде $x = c$ и $y = c$, где $c \ge 0$.

Подставим $x = y = c$ в любое из неравенств системы (9.46), тогда $c \ge (c-a)^2$ или $c^2 - c(2a+1) + a^2 \le 0$. Для того, чтобы квадратное неравенство имело бы единственное решение, необходимо его дискриминант приравнять нулю, т. е. $(2a+1)^2 - 4a^2 = 0$, $4a+1=0$ или $a = -\frac{1}{4}$.

♦ ***Ответ:*** $a = -\frac{1}{4}$.

РАЗДЕЛ 10

Методы решения уравнений, содержащих целые или дробные части числа

К числу нестандартных относятся методы решения уравнений, которые содержат целые и (или) дробные части действительных чисел. В программе школьной математики методы решения таких уравнений не изучаются. В настоящем разделе применение существующих методов и приемов иллюстрируется на примерах решения ряда уравнений.

Целой частью действительного числа x (или ***антье***) называется наибольшее целое число, не превосходящее x, и это число обозначается через $[x]$. Очевидно, что $[x] \le x$. Разность $x-[x]$ называется дробной частью числа x (или ***мантисса***) и обозначается через $\{x\}$. Из определения следует, что $0 \le \{x\} < 1$.

Непосредственно из определения $[x]$ и $\{x\}$ следует, что

$$x = [x] + \{x\} \tag{10.1}$$

и

$$0 \le x - [x] < 1. \tag{10.2}$$

Например, имеет место $[6] = 6$, $[2,45] = 2$, $\left[\sqrt{3}\right] = 1$, $[-4,15] = -5$ и $\{5\} = 0$, $\{3,77\} = 0,77$, $\{-4,15\} = 0,85$.

Отметим некоторые свойства введенного выше понятия целой части действительного числа.

Для произвольных действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 1)$ имеет место неравенство

$$[x_1]+[x_2]+\ldots+[x_n] \leq [x_1+x_2+\ldots+x_n].$$

Кроме того, для любого действительного числа x справедливо двойное неравенство

$$[x] \leq x < [x]+1. \qquad (10.3)$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений, содержащих целую и (или) дробную части неизвестной переменной.

Задачи и решения

10.1. Решить уравнение

$$\left[x^2-5x\right]=x+7. \qquad (10.4)$$

Решение. Поскольку $\left[x^2-5x\right]$ является целым числом, то $x+7$ — тоже целое число. Следовательно, число x также является целым. В таком случае $\left[x^2-5x\right]=x^2-5x$ и уравнение (10.4) принимает вид $x^2-5x=$ $=x+7$ или $x^2-6x-7=0$. Целыми корнями последнего уравнения являются $x_1=-1$ и $x_2=7$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=-1$, $x_2=7$.

10.2. Решить уравнение

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}. \qquad (10.5)$$

Решение. Обозначим $\frac{x-1}{2}=y$. Тогда $x=2y+1$ и уравнение (10.5) принимает вид

$$\left[\frac{4y+1}{3}\right]=y, \qquad (10.6)$$

где y — целое число.

Из уравнения (10.6), согласно формуле (10.2), получаем двойное неравенство $0 \le \frac{4y+1}{3} - y < 1$ или $-1 \le y < 2$.

Поскольку y — целое число и $-1 \le y < 2$, то $y_1 = -1$, $y_2 = 0$ и $y_3 = 1$. Однако $x = 2y+1$, поэтому $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$.

♦ ***Ответ:*** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

10.3. Решить уравнение

$$[x]+[2x]=3. \tag{10.7}$$

Решение. Рассмотрим три случая.

1. Если $[x]<1$, то $[2x]<2$ и $[x]+[2x]<3$, т. е. равенство в уравнении (10.7) не выполняется. Значит, корнями уравнения (10.7) могут быть только $x \ge 1$.
2. Пусть $[x]=1$, тогда из уравнения (10.7) следует, что $[2x]=3-[x]=2$. Так как $[x]=1$ и $[2x]=2$, то получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 1 \le x < 2; \\ 2 \le 2x < 3. \end{cases}$$

Решением системы неравенств являются $1 \le x < \frac{3}{2}$.

3. Если $[x]>1$, то $[2x]>2$ и $[x]+[2x]>3$. Следовательно, уравнение (10.7) не имеет корней при условии, что $x \ge 2$.

Итак, корнями уравнения (10.7) являются $1 \le x < \frac{3}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $1 \le x < \frac{3}{2}$.

10.4. Решить уравнение

$$[x]=2\{x\}+4. \tag{10.8}$$

Решение. Из уравнения (10.8) следует

$$\{x\}=\frac{[x]-4}{2}. \tag{10.9}$$

Принимая во внимание двойное неравенство (10.2), получаем $0\le \le\frac{[x]-4}{2}<1$, $0\le[x]-4<2$ или $4\le[x]<6$. Поскольку $[x]$ — целое число, то из $4\le[x]<6$ следует, что $[x_1]=4$ и $[x_2]=5$.

Найденные значения $[x_1]=4$ и $[x_2]=5$ подставим в формулу (10.9), тогда

$$\{x_1\}=\frac{[x_1]-4}{2}=0 \text{ и } \{x_2\}=\frac{[x_2]-4}{2}=\frac{1}{2}.$$

Поскольку $x=[x]+\{x\}$, то $x_1=4+0=4$ и $x_2=5+\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=4$, $x_2=5{,}5$.

$\boxed{10.5}$ Решить уравнение

$$7x-4[x]=3\{x\}+8. \tag{10.10}$$

Решение. Так как по определению $x=[x]+\{x\}$, то уравнение (10.10) принимает вид $7([x]+\{x\})-4[x]=3\{x\}+8$ или

$$\{x\}=\frac{8-3[x]}{4}. \tag{10.11}$$

Поскольку $0\le\{x\}<1$, то $0\le\frac{8-3[x]}{4}<1$. Отсюда следует, что $0\le 8-3[x]<4$ или $\frac{4}{3}<[x]\le\frac{8}{3}$. По определению $[x]$ — целое число, поэтому из двойного неравенства $\frac{4}{3}<[x]\le\frac{8}{3}$ получаем $[x_1]=2$.

Если $[x_1]=2$ подставить в формулу (10.11), то $\{x_1\}=\frac{1}{2}$. Известно, что $x=[x]+\{x\}$, поэтому $x_1=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=\frac{5}{2}$.

10.6. Решить уравнение

$$\{2\{2x\}\} = x. \tag{10.12}$$

Решение. Из уравнения (10.12) следует, что $0 \le x < 1$. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $0 \le x < \frac{1}{4}$. Тогда $0 \le 2x < \frac{1}{2}$, $\{2x\} = 2x$, $\{2\{2x\}\} = \{4x\} = 4x$ и уравнение принимает вид $4x = x$. Отсюда получаем $x_1 = 0$.

2. Пусть $\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$. В таком случае $\frac{1}{2} \le 2x < 1$, $\{2x\} = 2x$ и $\{2\{2x\}\} = \{4x\}$. Так как $1 \le 4x < 2$, то $\{4x\} = 4x - 1$ и уравнение можно переписать как $4x - 1 = x$, т. е. $x_2 = \frac{1}{3}$. Здесь следует отметить, что значение x_2 принадлежит рассматриваемому промежутку.

3. Пусть $\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4}$. Тогда $1 \le 2x < \frac{3}{2}$, $\{2x\} = 2x - 1$ и $\{2\{2x\}\} = \{4x - 2\}$. Принимая во внимание тот факт, что $2 \le 4x < 3$, получаем $0 \le 4x - 2 < 1$, $\{4x - 2\} = 4x - 2$ и из уравнения следует $4x - 2 = x$. Отсюда вытекает $x_3 = \frac{2}{3}$. Так как $\frac{1}{2} \le x_3 < \frac{3}{4}$, то x_3 — корень заданного уравнения.

4. Пусть $\frac{3}{4} \le x < 1$. Так как $\frac{3}{2} \le 2x < 2$, то $\{2x\} = 2x - 1$ и $\{2\{2x\}\} = \{4x - 2\}$. Поскольку $3 \le 4x < 4$ и $1 \le 4x - 2 < 2$, то $\{4x - 2\} = 4x - 3$ и уравнение принимает вид $4x - 3 = x$. Отсюда получаем $x = 1$. Однако ранее было отмечено, что $0 \le x < 1$. Поэтому $x = 1$ не является корнем уравнения (10.12).

♦ ***Ответ:*** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

10.7. Решить уравнение

$$x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{6}\right]. \tag{10.13}$$

Решение. Используя свойство (10.3), можно записать

$$\left[\frac{x}{2}\right] \le \frac{x}{2} < \left[\frac{x}{2}\right]+1,\ \left[\frac{x}{3}\right] \le \frac{x}{3} < \left[\frac{x}{3}\right]+1 \text{ и } \left[\frac{x}{6}\right] \le \frac{x}{6} < \left[\frac{x}{6}\right]+1.$$

Так как $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=x$, то после сложения приведенных выше двойных неравенств получаем

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{6}\right] \le x < \left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]+3.$$

Отсюда, принимая во внимание уравнение (10.13), следует уравнение

$$0 \le \left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{x}{5}\right] < 3. \qquad (10.14)$$

Поскольку $\left[\frac{x}{5}\right] \le \left[\frac{x}{4}\right]$, то из неравенств (10.14) следует, что $0 \le$ $\le 2\cdot\left[\frac{x}{5}\right] < 3$ или $0 \le \left[\frac{x}{5}\right] < \frac{3}{2}$. Так как $\left[\frac{x}{5}\right]$ — целое число, то отсюда получаем, что $\left[\frac{x}{5}\right]=0$ и $\left[\frac{x}{5}\right]=1$. Следовательно, имеем $0 \le x < 10$.

Из уравнения (10.13) вытекает, что x — целое число. Так как $0 \le x < 10$, то остается лишь проверить целые значения x от 0 до 9. Нетрудно установить, что корнями уравнения (10.13) являются $x_1=0$, $x_2=4$ и $x_3=5$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=5$.

10.8 Решить уравнение

$$\left[2x-x^2\right]=\left[x^2+\frac{1}{2}\right]. \qquad (10.15)$$

Решение. Так как для любых x верно $(x-1)^2 \ge 0$, то $2x-x^2 \le 1$. Кроме того, очевидно, что $x^2+\frac{1}{2} \ge \frac{1}{2}$. В этой связи $\left[2x-x^2\right] \le 1$, $\left[x^2+\frac{1}{2}\right] \ge 0$ и из уравнения (10.15) следует совокупность двух систем уравнений

$$\begin{cases}\left[2x-x^2\right]=0,\\ \left[x^2+\dfrac{1}{2}\right]=0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}\left[2x-x^2\right]=1,\\ \left[x^2+\dfrac{1}{2}\right]=1.\end{cases}$$

Отсюда получаем две системы неравенств

$$\begin{cases}0\le 2x-x^2<1,\\ 0\le x^2+\dfrac{1}{2}<1\end{cases} \text{ и } \begin{cases}1\le 2x-x^2<2,\\ 1\le x^2+\dfrac{1}{2}<2.\end{cases}$$

Решением первой системы неравенств являются $0\le x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, а из второй системы неравенств получаем единственный корень $x_1=1$.

♦ ***Ответ:*** $0\le x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1=1$.

10.9 Решить уравнение

$$x(x-2)\cdot[x]=\{x\}-1. \qquad (10.16)$$

Решение. Из формулы (10.1) следует, что $\{x\}=x-[x]$. В этой связи уравнение (10.16) можно переписать, как $x(x-2)[x]=x-[x]-1$.

Отсюда следует уравнение

$$[x]\cdot(x-1)^2=x-1. \qquad (10.17)$$

Очевидно, что $x_1=1$ является корнем уравнения (10.17). Положим, что $x\ne 1$. Тогда разделим обе части уравнения (10.17) на $x-1$ и получим уравнение

$$[x]\cdot(x-1)=1. \qquad (10.18)$$

Если $x<0$, то $[x]\le -1$ и $x-1<-1$. В таком случае $[x]\cdot(x-1)>1$.

Если $0\le x<1$, то $[x]=0$ и $[x]\cdot(x-1)=0$.

Если $1<x<2$, то $[x]=1$ и $0<x-1<1$, тогда $[x]\cdot(x-1)<1$.

Если $x\ge 2$, то $[x]\ge 2$, $x-1\ge 1$ и $[x]\cdot(x-1)>1$.

Отсюда следует, что уравнение (10.18) корней не имеет.

Следовательно, уравнение (10.16) имеет единственный корень $x_1=1$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$.

10.10. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\left[\frac{\pi}{6x}\right]\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (10.19)$$

Решение. Решая тригонометрическое уравнение (10.19), получаем

$$\frac{\pi}{6}+\left[\frac{\pi}{6x}\right]=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, \qquad (10.20)$$

где k — целое число. Из уравнения (10.20) получаем совокупность двух уравнений

$$\left[\frac{\pi}{6x}\right]=2\pi k \text{ и } \left[\frac{\pi}{6x}\right]=-\frac{\pi}{3}+2\pi k.$$

Левые части обоих уравнений являются рациональными числами, в то время как их правые части (за исключением случая $k=0$ в первом уравнении) принимают иррациональные значения.

Следовательно, равенство в уравнениях совокупности может иметь место только в том случае, когда их правые части являются рациональными (точнее, целыми) числами. А это возможно лишь в первом уравнении при условии, что $k=0$. В таком случае получаем уравнение

$$\left[\frac{\pi}{6x}\right]=0,$$

откуда следует

$$0\le\frac{\pi}{6x}<1 \text{ или } x>\frac{\pi}{6}.$$

♦ ***Ответ:*** $x>\frac{\pi}{6}$.

10.11. Решить уравнение

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=[x], \qquad (10.21)$$

где $x>0$.

Решение. Так как $x>0$, то $[x]=n$, где n — целое неотрицательное число. Тогда из уравнения (10.21) получаем $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=n$ или

$$x^2-2nx+4=0. \qquad (10.22)$$

Корнями уравнения (10.22) являются $x_{1,2}=n\pm\sqrt{n^2-4}$. Причем для существования корней x_1 и x_2 необходимо потребовать, чтобы $n\geq 2$.

Пусть $n=2$, тогда $x=n\pm\sqrt{n^2-4}=2$. Значит, уравнение (10.21) имеет корень $x_1=2$.

Если $n\geq 3$, то $\sqrt{n^2-4}>1$ и поэтому $x_1>n+1$, $x_2<n-1$, а это означает, что $[x_1]>n$ и $[x_2]<n$. Однако каждое из этих неравенств противоречит тому, что $[x]=n$. Следовательно, данные значения x_1 и x_2 не могут быть корнями уравнения (10.21).

♦ ***Ответ:*** $x_1=2$.

$\boxed{10.12.}$ Решить уравнение

$$x^2-10[x]+9=0. \qquad (10.23)$$

Решение. Если $x<1$, то $[x]\leq 0$ и тогда $x^2-10[x]+9>0$. Следовательно, корнями уравнения (10.23) могут быть только $x\geq 1$. Если обозначить $[x]=k$, где k — целое число, то $k\geq 1$.

Так как $[x]=k$, то уравнение (10.23) принимает вид $x^2-10k+9=0$, откуда следует $x=\sqrt{10k-9}$. Отсюда, согласно неравенству (10.2), получаем двойное неравенство

$$k\leq\sqrt{10k-9}<k+1, \qquad (10.24)$$

где $k\geq 1$. Если возвести в квадрат двойное неравенство (10.24), то

$$\begin{cases} k^2-10k+9\leq 0, \\ k^2-8k+10>0. \end{cases} \qquad (10.25)$$

Решением системы неравенств (10.25) являются $1\leq k<4-\sqrt{6}$ и $4+\sqrt{6}<k\leq 9$. Поскольку здесь k — целое число, то $k_1=1$, $k_2=7$, $k_3=8$ и $k_4=9$. Если при этом учесть, что $x=\sqrt{10k-9}$, то $x_1=1$, $x_2=\sqrt{61}$, $x_3=\sqrt{71}$ и $x_4=9$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=1$, $x_2=\sqrt{61}$, $x_3=\sqrt{71}$, $x_4=9$.

10.13. Решить уравнение

$$\left[\frac{x^3-3x^2+2x}{6}\right]=x-2. \qquad (10.26)$$

Решение. Левая часть уравнения (10.26) принимает только целые значения, поэтому число x является целым.

Так как $x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$, то при любом целом x многочлен x^3-3x^2+2x представляет собой произведение трех последовательно расположенных на числовой оси OX целых чисел, среди которых имеется хотя бы одно четное число и число, кратное трем. Следовательно, многочлен x^3-3x^2+2x делится на 6 без остатка, т. е. $\frac{x^3-3x^2+2x}{6}$ является целым числом.

В этой связи

$$\left[\frac{x^3-3x^2+2x}{6}\right]=\frac{x^3-3x^2+2x}{6}$$

и уравнение (10.26) принимает вид

$$\frac{x^3-3x^2+2x}{6}=x-2$$

или

$$x^3-3x^2-4x+12=0. \qquad (10.27)$$

Так как $x^3-3x^2-4x+12=(x-3)\left(x^2-4\right)$, то корнями уравнения (10.27) являются $x_1=3$, $x_2=-2$ и $x_3=2$.

♦ ***Ответ:*** $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=2$.

10.14. Доказать равенство

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x], \qquad (10.28)$$

где x — произвольное действительное число.

Доказательство. Для доказательства равенства (10.28) рассмотрим два возможных варианта представления числа x.

1. Пусть $x = y + a$, где y — целое число и $0 \le a < \frac{1}{2}$. Тогда

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[y+a]+\left[y+a+\frac{1}{2}\right]=y+y=2y \text{ и } [2x]=[2y+2a]=2y.$$

2. Пусть $x = y + a + \frac{1}{2}$, где y — целое число и $0 \le a < \frac{1}{2}$. Тогда

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[y+a+\frac{1}{2}\right]+[y+a+1]=y+(y+1)=2y+1$$

и

$$[2x]=[2y+2a+1]=2y+1.$$

Так как в обоих случаях равенство (10.28) выполняется, а других вариантов представления x не существует, то требуемое равенство доказано для произвольного числа x.

Рекомендуемая литература

1. *Азаров А. И., Барвенов С. А., Федосенко В. С.* Математика для старшеклассников. Методы решения задач с параметрами. Мн.: Аверсэв, 2003.
2. *Амелькин В. В., Рабцевич В. Л.* Задачи с параметрами. Мн.: Асар, 2004.
3. *Арлазаров В. В., Татаринцев А. В., Тиханина И. Г., Чекалкин Н. С.* Сборник задач по математике для физико-математических школ. М.: Издательство ЛКИ, 2007.
4. *Горнштейн П. И., Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.* Экзамен по математике и его подводные рифы. М.: Илекса, 2004.
5. *Готман Э. Г., Скопец З. А.* Задача одна — решения разные: геометрические задачи. М.: Просвещение, 2000.
6. *Жуков А. В., Самовол П. И., Аппельбаум М. В.* Элегантная математика. Задачи и решения. М.: КомКнига/URSS, 2005.
7. *Кушнир И. А.* Шедевры школьной математики // Задачи с решениями: в 2 т. Киев: Астарта, 1995.
8. *Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И.* Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. М.: Дрофа, 2001.
9. *Петраков И. С.* Математика для любознательных. М.: Просвещение, 2000.
10. *Седракян Н. М., Авоян А. М.* Неравенства. Методы доказательства. М.: Физматлит, 2002.
11. *Супрун В. П.* Математика для старшеклассников. Нестандартные методы решения задач. Мн.: Аверсэв, 2003.
12. *Супрун В. П.* Математика для старшеклассников. Задачи повышенной сложности. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.