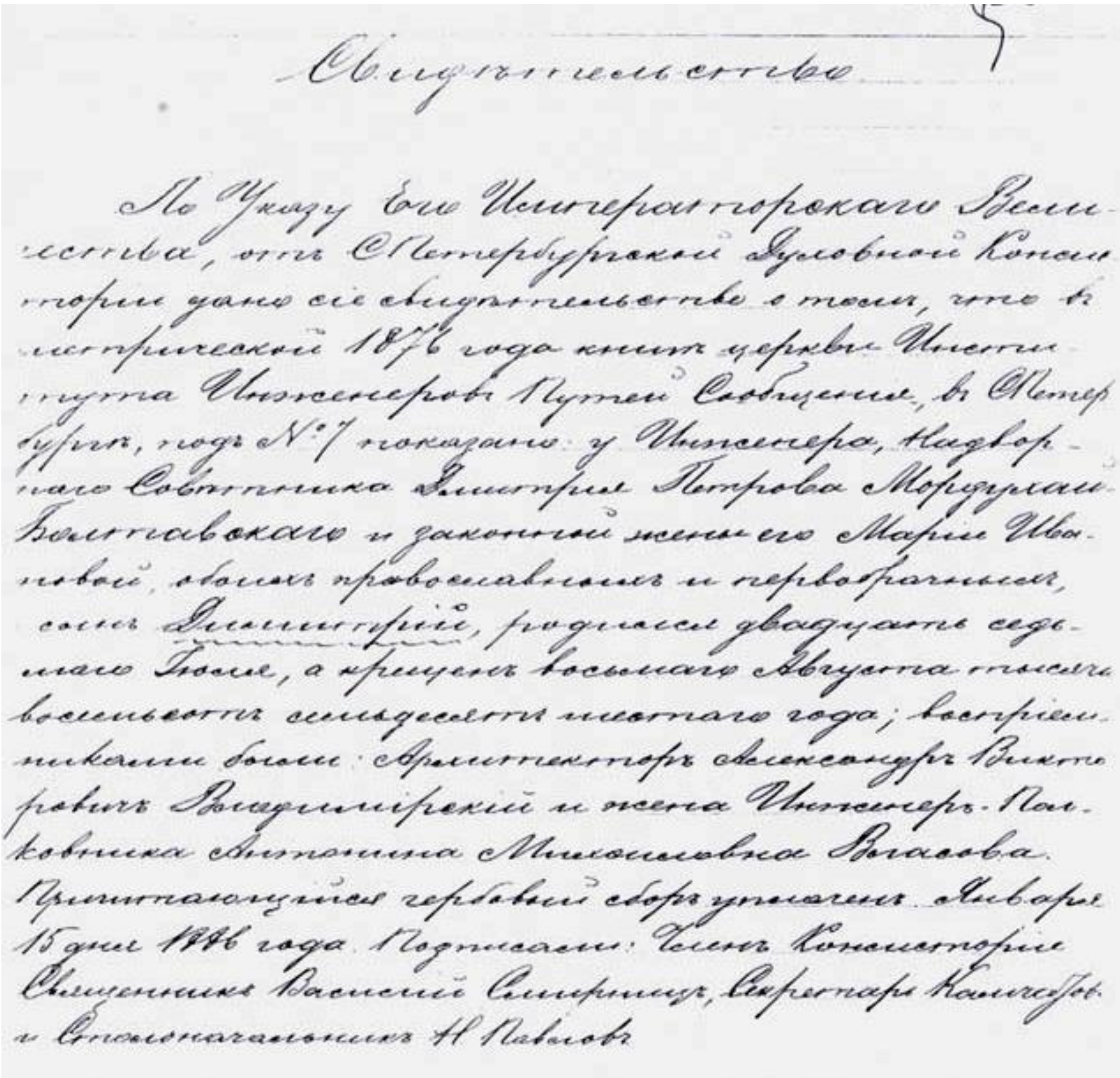
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Архивные документы и фотоматериалы к творческой биографии Д.Д. Мордухай-Болтовского



Свидѣтельство

По Указу Его Императорскаго Величества, отъ С.Петербургской Духовной Консисторіи дано сіе свидѣтельство в томъ, что въ метрической 1876 года книгѣ церкви Института Инженеровъ Путей Сообщенія, въ С.Петербургѣ, подъ № 7 показано: у Инженера, Надворнаго Совѣтника Дмитрія Петрова Мордухай-Болтавскаго и законной жены его Маріи Ивановой, обоихъ православныхъ и первобрачныхъ, сынъ Дмитрій, родился двадцать седьмаго Іюля, а крещенъ восьмаго Августа тысяча восемьсотъ семьдесятъ шестаго года; воспріемниками были: Архитекторъ Александръ Викторовичъ Владимірскій и жена Инженеръ-Полковника Антонина Михайловна Власова. Причитающійся гербовый сборъ уплаченъ. Января 15 дня 1896 года. Подписали: Членъ Консисторіи Священникъ Василій Смирновъ, Секретарь [illegible] и Столоначальникъ Н. Павловъ

М…

Метрическое свидетельство о рождении и крещении Д.Д. Мордухай-Болтовского

Дмитрий Мордухай-Болтовской, гимназист, 1886 г.

Дмитрий Мордухай-Болтовской, 1888 г.

На берегу р. Медведица. Вид усадьбы Мордухай-Болтовских в Тетьково

Господину Директору С.-Петербургской Первой Гимназіи.

6

Прошеніе.

Желая дать образованіе сыну моему Дмитрію во ввѣренномъ Вамъ учебномъ заведеніи, имѣю честь просить распоряженія Вашего о томъ, чтобы онъ былъ подвергнутъ надлежащему испытанію и медицинскому освидѣтельствованію и помѣщенъ полупансіонеромъ въ тотъ классъ, въ который онъ, по своимъ познаніямъ и возрасту, можетъ поступить, при чемъ имѣю честь сообщить, что онъ приготовлялся къ поступленію въ приготовит. классъ и до сего времени обучался дома.

Желаю чтобы сынъ мой, въ случаѣ принятія его въ заведеніе, обучался въ назначенныхъ для того классахъ обоимъ новымъ иностраннымъ языкамъ, буде окажетъ достаточные успѣхи въ обязательныхъ для всѣхъ предметахъ, въ противномъ же случаѣ ———— изъ нихъ, а также и рисованію за особую установленную по сему предмету плату. При этомъ прилагаются документы его: метрическое о рожденіи и крещеніи свидѣтельство + копія формулярнаго о службѣ списка и свидѣтельство о привитіи оспы.

Инженеръ Дѣйствительный Статскій Совѣтникъ

Д. Мордухай-Болтовской

Марта 6 1886 года.

Мѣсто жительства: Загородный проспектъ противъ Технолог. Инст. д. 57 кв 24.

Прошение о принятии Д.Д. Мордухай-Болтовского в С.-Петербургскую Первую гимназию

САНКТПЕТЕРБУРГСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА

ОТЪ

С.-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ПЕРВОЙ ГИМНАЗІИ

АТТЕСТАТЪ ЗРѢЛОСТИ.

№ 586

Данъ сей Димитрію Мордухай-Болтовскому Правосл. вѣроисповѣданія, сыну Дѣйств. Статск. Сов., родившемуся 27 Іюля 1876 г., обучавшемуся 8 л. въ Спб. 1-й Гимн. и пробывшему 1 годъ въ VIII классѣ, въ томъ,

Во первыхъ, что на основаніи наблюденій за все время обученія его въ С.-Петербургской Первой гимназіи, поведеніе его вообще было отличное, исправность въ посѣщеніи и приготовленіи уроковъ, а также въ исполненіи письменныхъ работъ достаточная, прилежаніе достаточное, и любознательность въ особенности къ математикѣ.

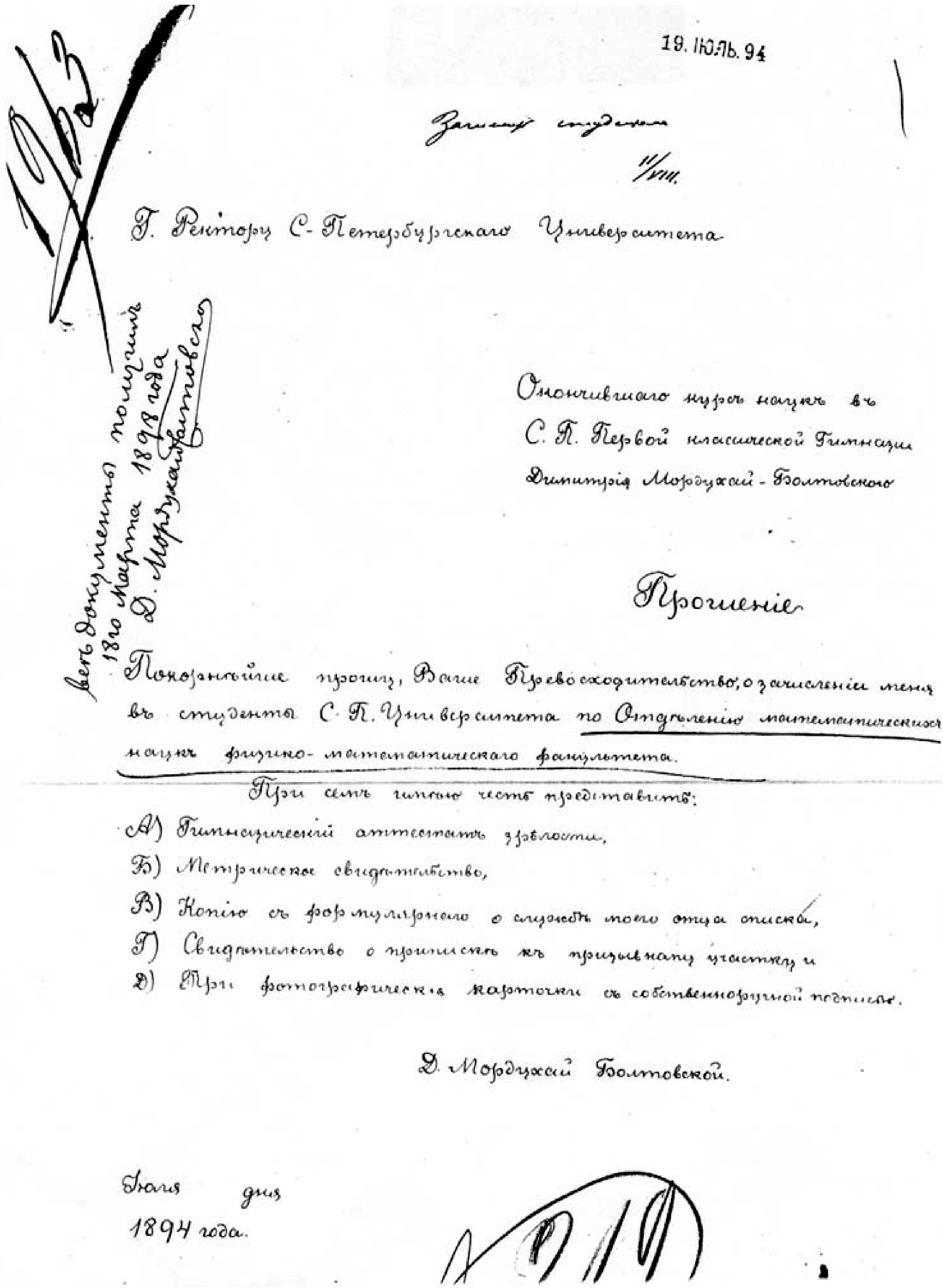
С.-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ПЕРВОЙ ГИМНА[ЗІИ]

Аттестат об окончании С.-Петербургской Первой гимназии

во вторыхъ, что онъ обнаружилъ нижеслѣдующія познанія:

Поименованіе предметовъ гимназическаго курса.	Отмѣтки, выставленныя въ педагогическомъ совѣтѣ, на основаніи § 71 Правилъ объ испытаніяхъ учениковъ Гимназій и Прогимн. вѣдомства Мин. Нар. Просв.	Отмѣтки, выставленныя на испытаніяхъ, происходившихъ въ 1894 году Апреля 25, 26, 27, 28 и Мая 7, 13, 17, 19, 21, 27, 28.
Въ Законѣ Божіемъ	5 (пять).	5 (пять).
„ Русскомъ языкѣ и Словесности.	3 (три).	4 (четыре).
„ Логикѣ	3 (три).	
„ Языкахъ: Латинскомъ	4 (четыре).	4 (четыре).
Греческомъ	4 (четыре).	4 (четыре).
„ Математикѣ	5 (пять).	4 (четыре).
„ Физикѣ и Математической Географіи	5 (пять).	
„ Исторіи	4 (четыре).	4 (четыре).
„ Географіи	5 (пять).	
„ Языкахъ: Нѣмецкомъ		
Французскомъ	5 (пять).	5 (пять).

Аттестат (продолжение)


19. ІЮЛЬ. 94

Зачислить студентомъ

11/VIII.

Г. Ректору С-Петербургскаго Университета

Окончившаго курсъ наукъ въ С. П. Первой классической Гимназіи Димитрія Мордухай-Болтовского

Прошеніе

Покорнѣйше прошу, Ваше Превосходительство, о зачисленіи меня въ студенты С. П. Университета по Отдѣленію математическихъ наукъ физико-математическаго факультета.

При семъ честь имѣю представить:

А) Гимназическій аттестатъ зрѣлости,

Б) Метрическое свидѣтельство,

В) Копію съ формулярнаго о службѣ моего отца списка,

Г) Свидѣтельство о приписке къ призывному участку и

Д) Три фотографическія карточки съ собственноручной подписью.

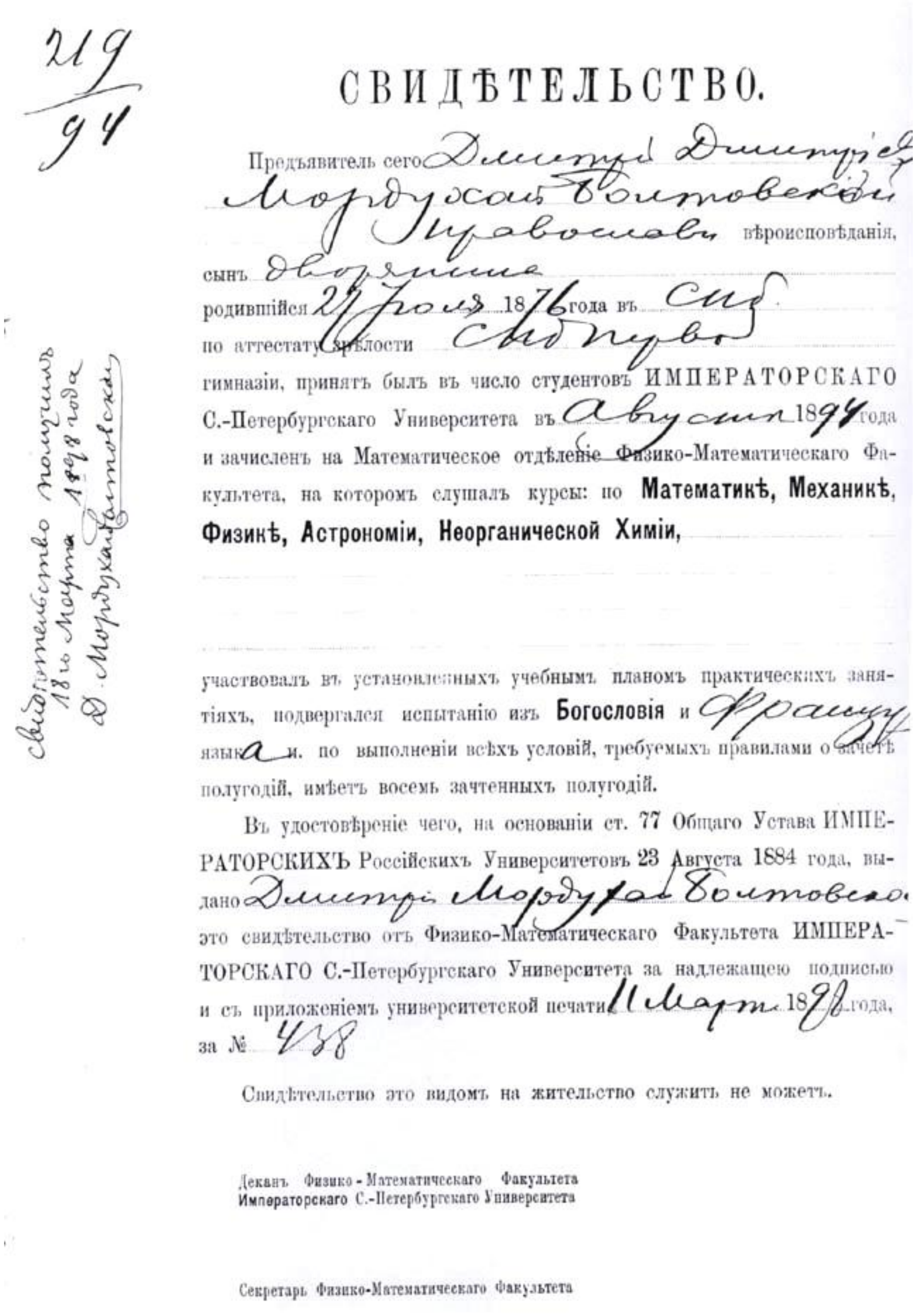
Д. Мордухай Болтовской.

Іюля дня

1894 года.

Всѣ документы получилъ 18го Марта 1898 года Д. Мордухай-Болтовской

Прошение о зачислении в студенты С.-Петербургского университета



219/94

СВИДѢТЕЛЬСТВО.

Предъявитель сего Дмитрій Дмитріевъ Мордухай-Болтовской Православнаго вѣроисповѣданія, сынъ дворянина родившійся 27 Іюля 1876 года въ СПб. по аттестату зрѣлости СПб. Первой гимназіи, принятъ былъ въ число студентовъ ИМПЕРАТОРСКАГО С.-Петербургскаго Университета въ Августѣ 1894 года и зачисленъ на Математическое отдѣленіе Физико-Математическаго Факультета, на которомъ слушалъ курсы: по **Математикѣ, Механикѣ, Физикѣ, Астрономіи, Неорганической Химіи,**

участвовалъ въ установленныхъ учебнымъ планомъ практическихъ занятіяхъ, подвергался испытанію изъ **Богословія** и Французскаго языка и, по выполненіи всѣхъ условій, требуемыхъ правилами о зачетѣ полугодій, имѣетъ восемь зачтенныхъ полугодій.

Въ удостовѣреніе чего, на основаніи ст. 77 Общаго Устава ИМПЕРАТОРСКИХЪ Россійскихъ Университетовъ 23 Августа 1884 года, выдано Дмитрію Мордухай-Болтовскому это свидѣтельство отъ Физико-Математическаго Факультета ИМПЕРАТОРСКАГО С.-Петербургскаго Университета за надлежащею подписью и съ приложеніемъ университетской печати 11 Марта 1898 года, за № 438

Свидѣтельство это видомъ на жительство служить не можетъ.

Деканъ Физико-Математическаго Факультета
Императорскаго С.-Петербургскаго Университета

Секретарь Физико-Математическаго Факультета

Свидѣтельство получилъ 18 Марта 1898 года Д. Мордухай-Болтовской

Свидетельство об обучении в С.-Петербургском университете

Годъ поступленія въ Спб. Университетъ 1894

NB. Всѣ вносимыя въ сей бланкъ свѣ

10

Господину Инспектору студентовъ ИМПЕРАТОРСКАГО С.-Петербургскаго Университета.

Студента факультета Физико-Математическаго

разряда Математическаго

Дмитрія Дмитріевича Мордухай-Болтовского

508

ЗАЯВЛЕНІЕ.

Прилагая у сего квитанцію въ уплатъ денегъ, имѣю честь заявить, что въ предстоящее осеннее *полугодіе 1894 года я записался на слѣдующіе курсы:*

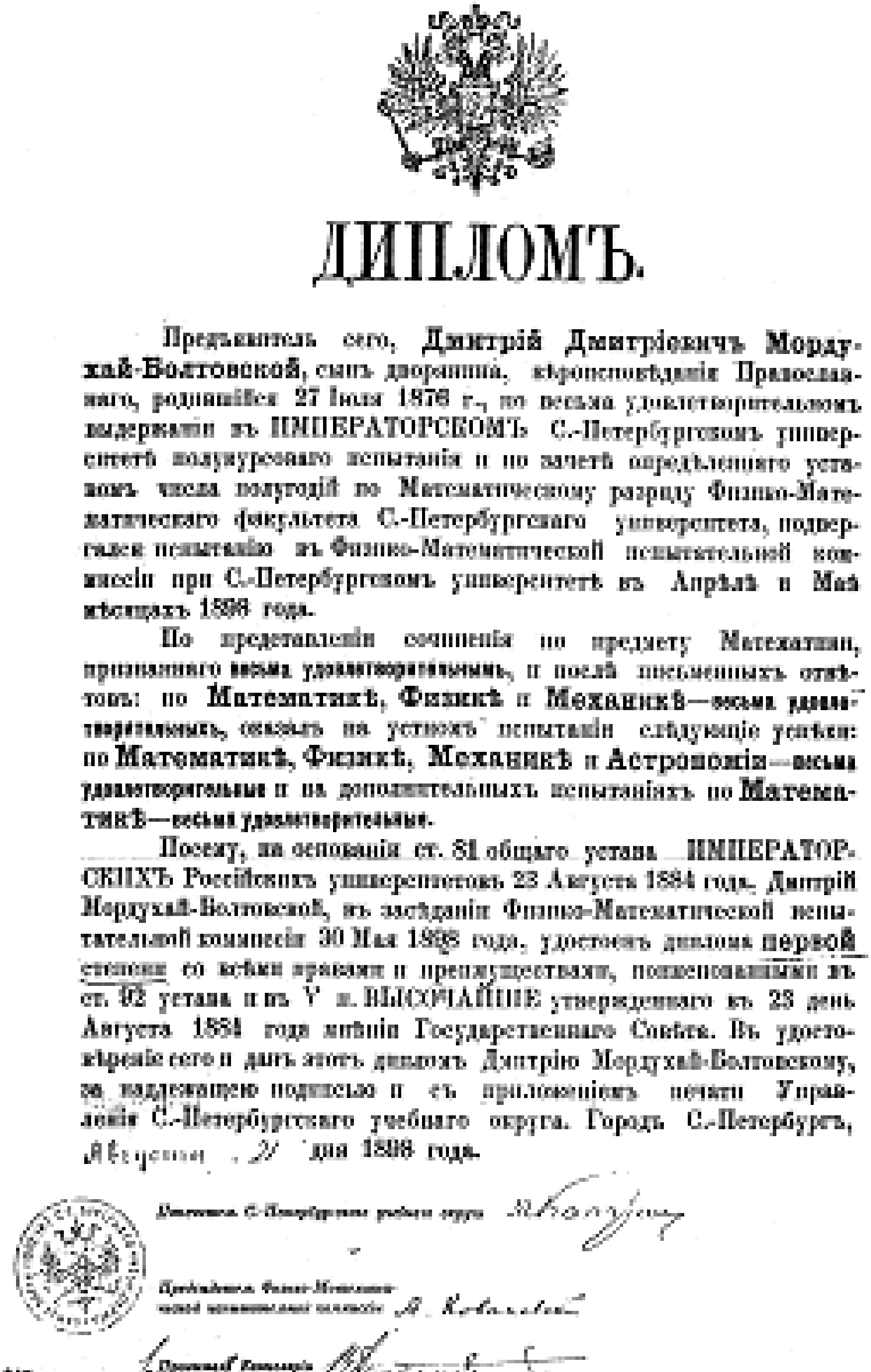
Фамилія преподавателя.	Предметъ чтеній.	Число лекцій.
Коноваловъ	Неорганическая химія	5
Пташицкій	Аналитическая геометрія	3
Марковъ	Введеніе въ анализъ	3
Петрушевскій	Измѣрительные приборы	2
Петрушевскій	Тепловыя измѣренія	1
Хвольсонъ	Механическій отдѣлъ физики	4
фонъ-Глазенапъ	Общій курсъ астрономіи	3
Рождественскій	Богословіе	2

Кв. № 151.

Тип. Б. Вольфа, Фонтанка 92.

Заявление Д.Д. Мордухай-Болтовского – студента I курса С.-Петербургского университета о записи на лекционные курсы

Д.Д. Мордухай-Болтовской – студент С.-Петербургского университета, 1896 г.



ДИПЛОМЪ.

Предъявитель сего, **Дмитрій Дмитріевичъ Мордухай-Болтовской**, сынъ дворянина, вѣроисповѣданія Православнаго, родившійся 27 Іюля 1878 г., по весьма удовлетворительномъ выдержаніи въ ИМПЕРАТОРСКОМЪ С.-Петербургскомъ университетѣ полукурсоваго испытанія и по зачетѣ опредѣленнаго уставомъ числа полугодій по Математическому разряду Физико-Математическаго факультета С.-Петербургскаго университета, подвергался испытанію въ Физико-Математической испытательной коммиссіи при С.-Петербургскомъ университетѣ въ Апрѣлѣ и Маѣ мѣсяцахъ 1898 года.

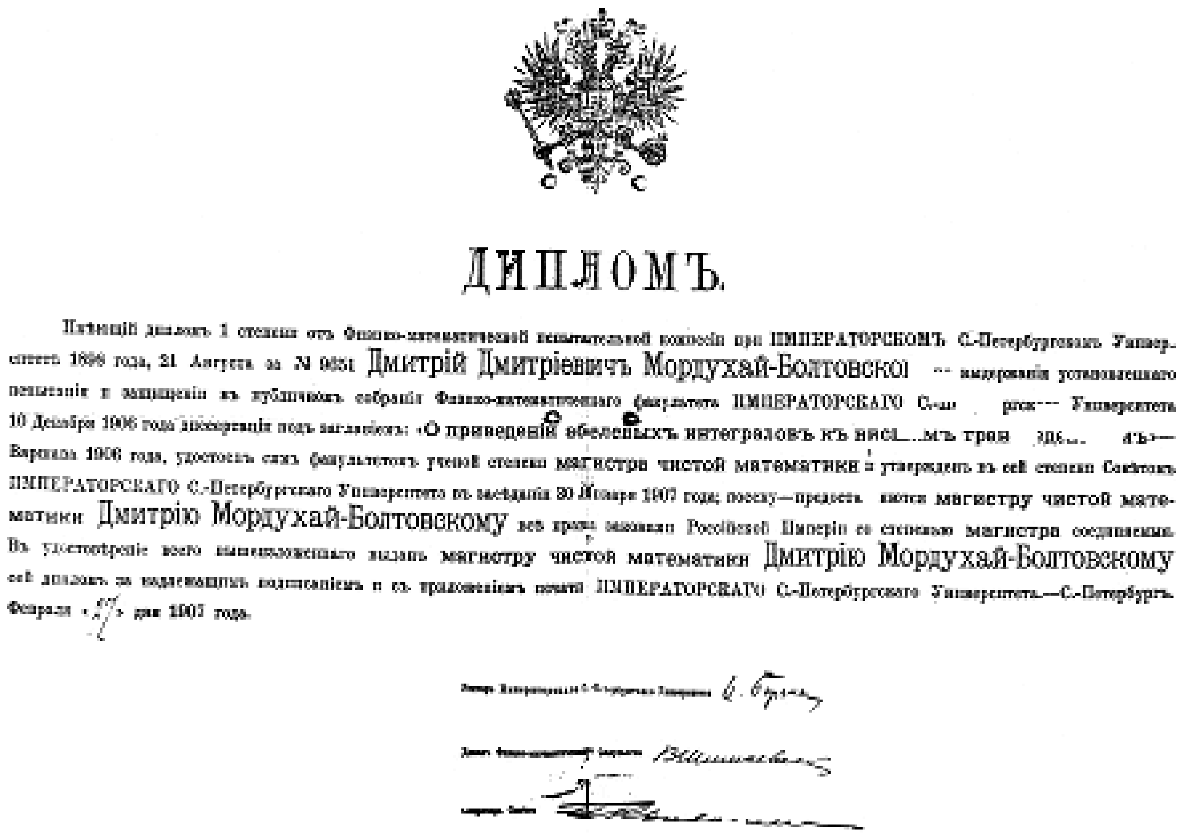
По представленіи сочиненія по предмету Математики, признаннаго весьма удовлетворительнымъ, и послѣ письменныхъ отвѣтовъ: по **Математикѣ, Физикѣ** и **Механикѣ**—весьма удовлетворительныхъ, оказалъ на устномъ испытаніи слѣдующіе успѣхи: по **Математикѣ, Физикѣ, Механикѣ** и **Астрономіи**—весьма удовлетворительные и на дополнительныхъ испытаніяхъ по **Математикѣ**—весьма удовлетворительные.

Посему, на основаніи ст. 81 общаго устава ИМПЕРАТОРСКИХЪ Россійскихъ университетовъ 23 Августа 1884 года, Дмитрій Мордухай-Болтовской, въ засѣданіи Физико-Математической испытательной коммиссіи 30 Мая 1898 года, удостоенъ диплома первой степени со всѣми правами и преимуществами, поименованными въ ст. 92 устава и въ V п. ВЫСОЧАЙШЕ утвержденнаго въ 23 день Августа 1884 года мнѣнія Государственнаго Совѣта. Въ удостовѣреніе сего и данъ этотъ дипломъ Дмитрію Мордухай-Болтовскому, за надлежащею подписью и съ приложеніемъ печати Управленія С.-Петербургскаго учебнаго округа. Городъ С.-Петербургъ, Августа 21 дня 1898 года.

№ 9651

Диплом об окончании физико-математического факультета С.-Петербургского университета, 1898 г.

Д.Д. Мордухай-Болтовской по окончании магистратуры, 1900 г.



ДИПЛОМЪ.

Имѣющій дипломъ 1 степени отъ Физико-математической испытательной коммиссіи при ИМПЕРАТОРСКОМЪ С.-Петербургскомъ Университетѣ 1898 года, 21 Августа за № 9651 Дмитрій Дмитріевичъ Мордухай-Болтовской — выдержавъ установленныя испытанія и защитивъ въ публичномъ собраніи Физико-математическаго факультета ИМПЕРАТОРСКАГО С.-Петербургскаго Университета 10 Декабря 1906 года диссертацію подъ заглавіемъ: «О приведеніи абелевыхъ интеграловъ къ низшимъ трансцендентнымъ» — Варшава 1906 года, удостоенъ симъ факультетомъ ученой степени магистра чистой математики и утвержденъ въ сей степени Совѣтомъ ИМПЕРАТОРСКАГО С.-Петербургскаго Университета въ засѣданіи 30 Января 1907 года; посему — предоставляются магистру чистой математики Дмитрію Мордухай-Болтовскому всѣ права, закономъ Россійской Имперіи съ степенью магистра соединяемыя. Въ удостовѣреніе всего вышеизложеннаго выданъ магистру чистой математики Дмитрію Мордухай-Болтовскому сей дипломъ за надлежащимъ подписаніемъ и съ приложеніемъ печати ИМПЕРАТОРСКАГО С.-Петербургскаго Университета.— С.-Петербургъ. Февраля «27» дня 1907 года.

Диплом об утверждении Д.Д. Мордухай-Болтовского в научной степени магистра чистой математики, 1906 г.

Д.Д. Мордухай-Болтовской вместе с сыном Дмитрием, 1908 г.

Семейная фотография на серебряную свадьбу родителей: Дмитрий Петрович и Мария Ивановна (в центре) с сыновьями (слева направо) – Дмитрием, Иваном, Петром, Константином, Владимиром и Александром. 1897 г.

Д.Д. Мордухай-Болтовской с женой Людмилой Филаретовной и сыновьями (слева направо) – Дмитрием, Филаретом и Степаном, 1932 г.

5/III 11.

75

МИНИСТЕРСТВО
НАРОДНАГО ПРОСВѢЩЕНІЯ.

ПОПЕЧИТЕЛЬ
Варшавскаго Учебнаго Округа

КАНЦЕЛЯРІЯ.

Отдѣленіе Учебное.

3 марта 1911 г.

№ 5789

г. Варшава.

Г. Ректору ИМПЕРАТОРСКАГО Варшавскаго Университета.

Канцелярія И. В. У.
5 Мар. 1911
Вх. № 2104

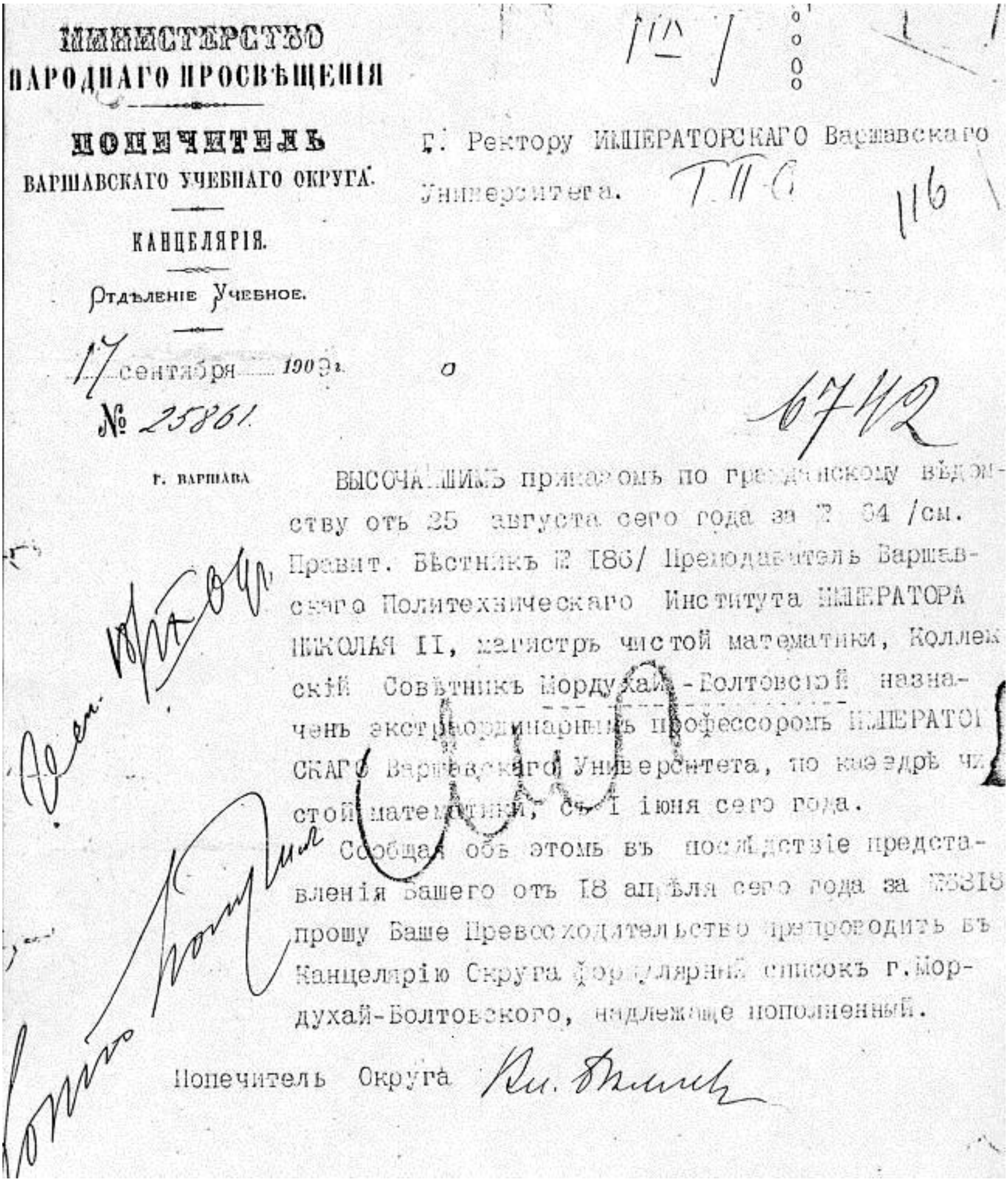
Т. Г.

Имѣю честь сообщить Вашему Превосходительству, для надлежащихъ распоряженій, что экстраординарный профессоръ ИМПЕРАТОРСКАГО Варшавскаго Университета по каѳедрѣ чистой математики, Коллежскій Совѣтникъ Дмитрій Мордухай-Болтовскій ВЫСОЧАЙШИМЪ приказомъ по гражданскому вѣдомству отъ 14 февраля 1911г. за № 12 произведенъ въ Статскіе Совѣтники, со старшинствомъ съ 14 апрѣля 1910 года.

За Попечителя Округа,
Помощникъ Попечителя [signature]

И.д. Правителя Канцеляріи [signature]

Уведомление о произведении в чин статского советника, 1910 г.



МИНИСТЕРСТВО НАРОДНАГО ПРОСВѢЩЕНІЯ

ПОПЕЧИТЕЛЬ ВАРШАВСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА.

КАНЦЕЛЯРІЯ.

Отдѣленіе Учебное.

17 сентября 1909 г.

№ 25861.

г. Варшава

Г. Ректору ИМПЕРАТОРСКАГО Варшавскаго Университета.

Т.II-6 116

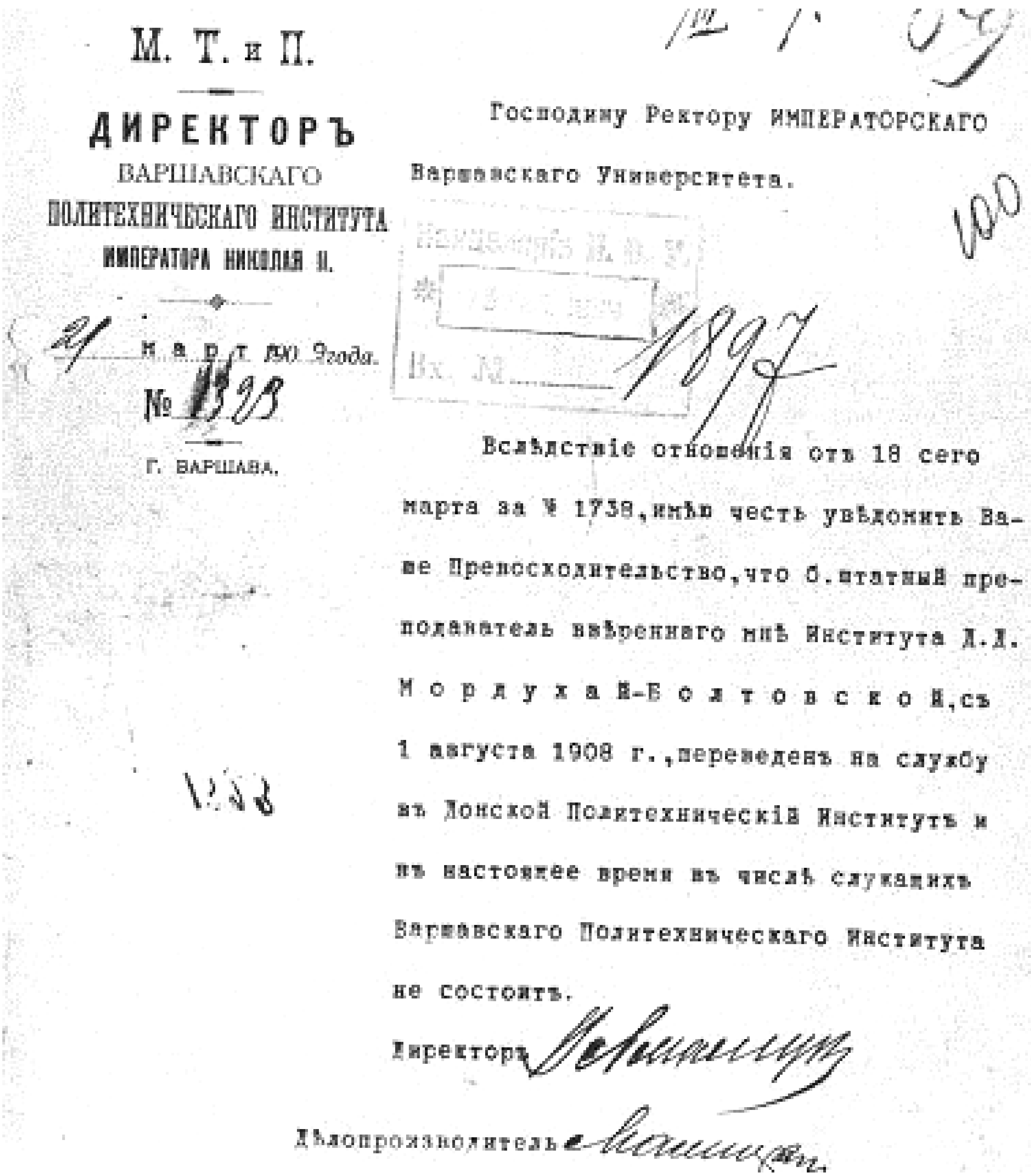
6742

ВЫСОЧАЙШИМЪ приказомъ по гражданскому вѣдомству отъ 25 августа сего года за № 64 /см. Правит. Вѣстникъ № 186/ Преподаватель Варшавскаго Политехническаго Института ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II, магистръ чистой математики, Коллежскій Совѣтникъ Мордухай-Болтовской назначенъ экстраординарнымъ профессоромъ ИМПЕРАТОРСКАГО Варшавскаго Университета, по каѳедрѣ чистой математики, съ 1 іюня сего года.

Сообщая объ этомъ въ послѣдствіе представленія Вашего отъ 18 апрѣля сего года за № 3318 прошу Ваше Превосходительство препроводить въ Канцелярію Округа формулярный списокъ г. Мордухай-Болтовского, надлежаще пополненный.

Попечитель Округа

Уведомление о назначении экстраординарным профессором Варшавского Императорского Университета, 1909 г.



М. Т. и П.

ДИРЕКТОРЪ
ВАРШАВСКАГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА
ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

21 марта 1909 года.

№ 1323

Г. Варшава.

Господину Ректору ИМПЕРАТОРСКАГО Варшавскаго Университета.

Вх. № 1897

Вслѣдствіе отношенія отъ 18 сего марта за № 1738, имѣю честь увѣдомить Ваше Превосходительство, что б. штатный преподаватель ввѣреннаго мнѣ Института Д. Д. Мордухай-Болтовской, съ 1 августа 1908 г., переведенъ на службу въ Донской Политехническій Институтъ и въ настоящее время въ числѣ служащихъ Варшавскаго Политехническаго Института не состоитъ.

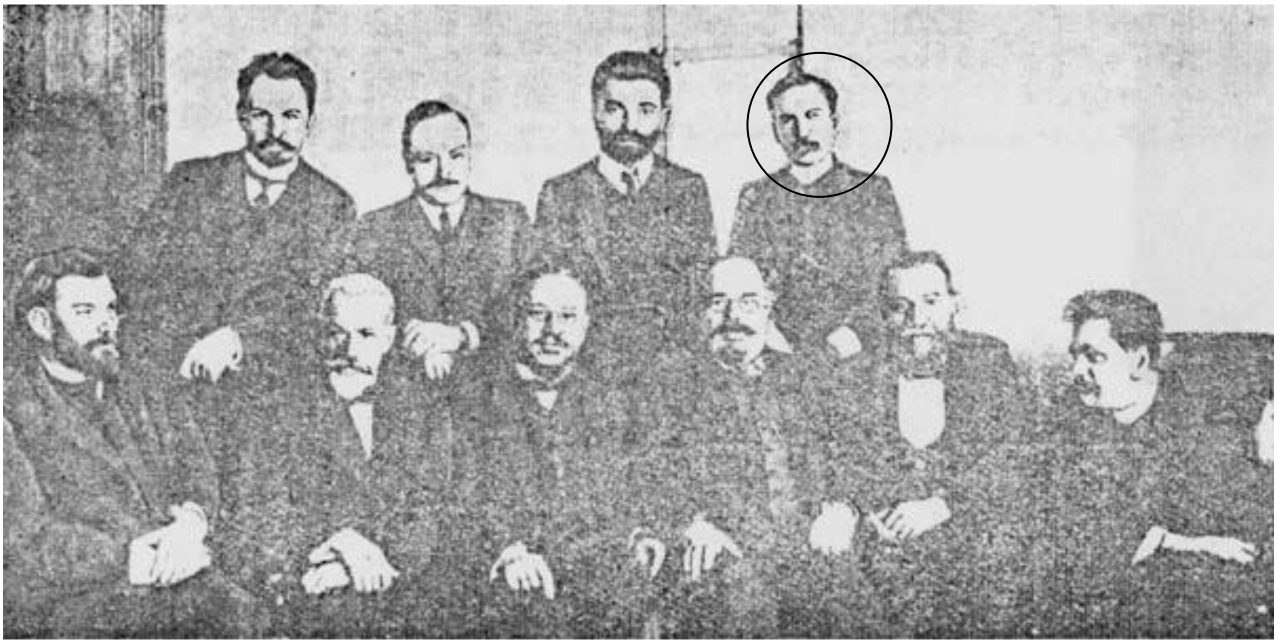
Директоръ

Дѣлопроизводитель

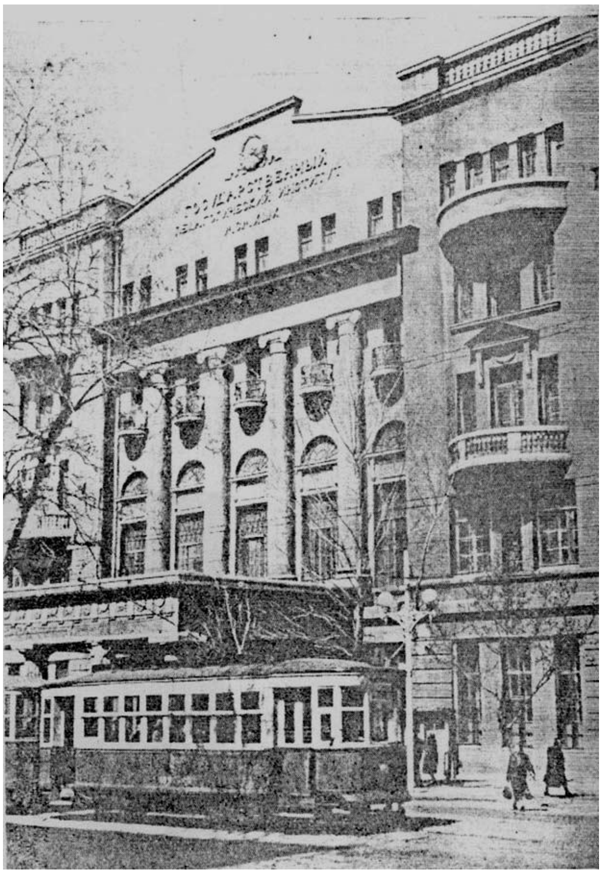
Уведомление о переводе на службу в Донской Политехнический институт, 1909 г.

Д.Д. Мордухай-Болтовской, среди группы преподавателей Варшавского университета, приехавших в Новочеркасск для организации и налаживания работы Донского политехнического института 1907 г.

Д.Д. Мордухай-Болтовской, в рабочем кабинете.



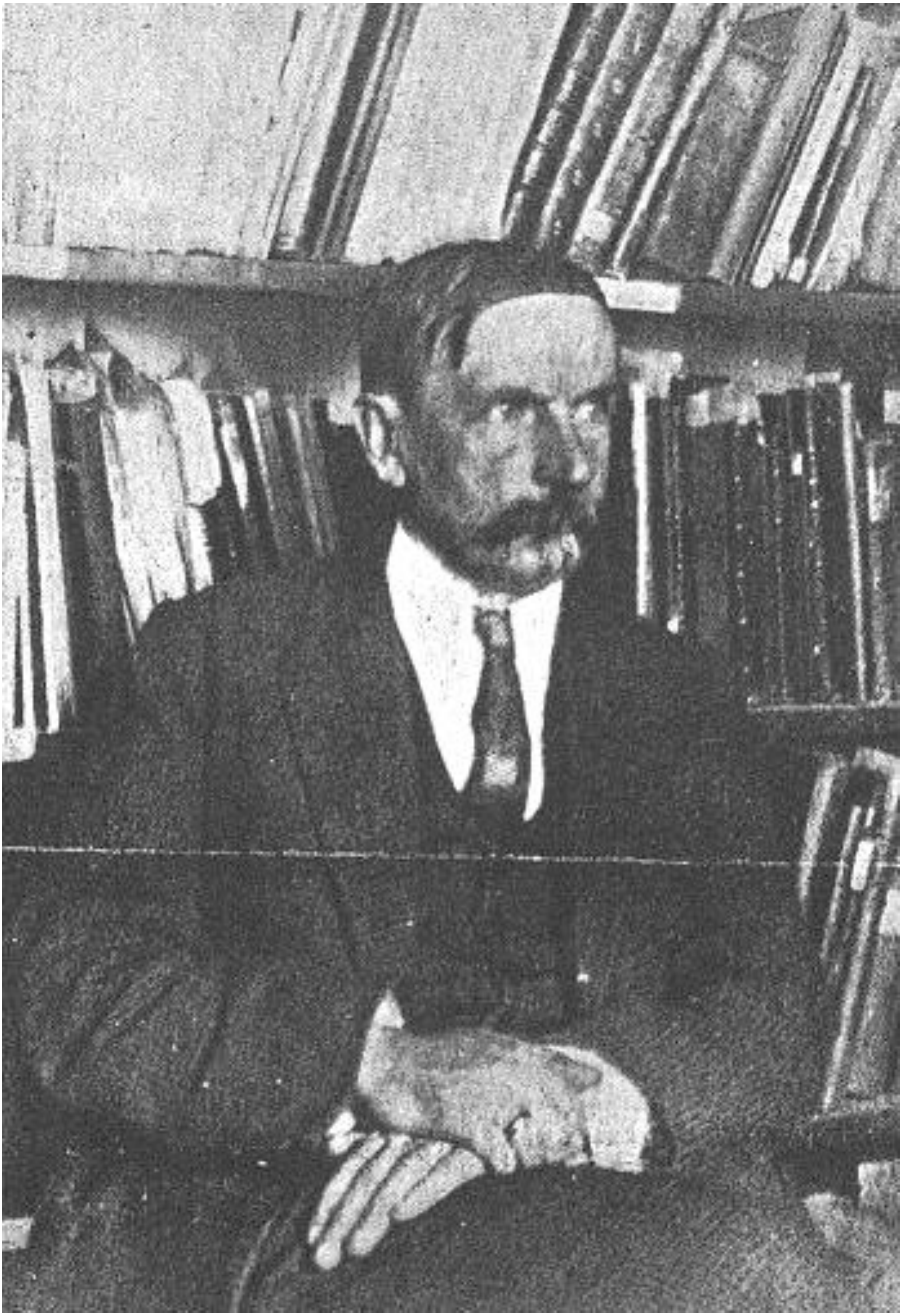
Группа профессоров физико-математического факультета, переехавшая из Варшавы вместе с университетом в Ростов-на-Дону. Слева направо: сидят – В.Ф. Хмелевский, Д.И. Ивановский, П.И. Митрофанов, В.В. Курилов, А.М. Зайцев, Д.Н. Горячев; стоят – Я.П. Щелкановцев, А.Р. Колли,
С.Д. Черный, Д.Д. Мордухай-Болтовской, 1915 г.



Здание, в котором находился университет с 1915 по 1930 г.
(ныне здание Ростовского госпедуниверситета)

Д.Д. Мордухай-Болтовской по переезде в г.Ростов-на-Дону, 1917 г.

Д.Д. Мордухай-Болтовской профессор СКГУ, 1925 г.



Д.Д. Мордухай-Болтовской в библиотеке при геометрическом кабинете СКГУ, 1928 г.

Д.Д. Мордухай-Болтовской (сидит, второй справа) с группой преподавателей и аспирантов РПИ, 1933 г.

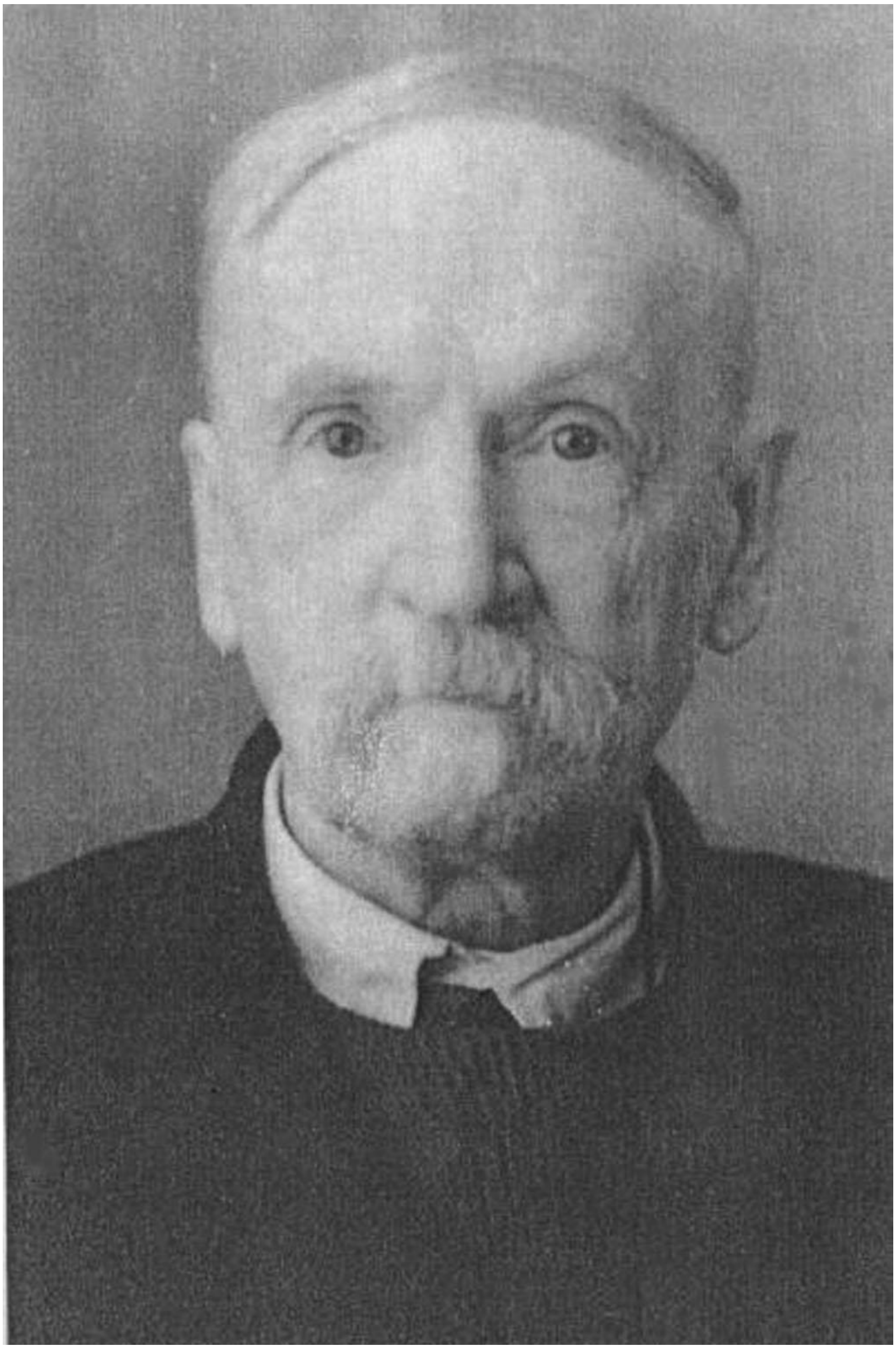
Д.Д. Мордухай-Болтовской (в центре) на кафедре геометрии РПИ с сотрудниками, 1941 г.

Д.Д. Мордухай-Болтовской и его ученики – работники кафедры математического анализа РГУ: доц. М.Г. Хапланов (сидит); стоят (слева направо) асс. Л.М. Галонен, доц. С.Я. Альпер и аспир. З.Д. Горская, 1940 г.

Д.Д. Мордухай-Болтовской на лекции по математическому анализу. Ивановский пединститут. 1946 г.

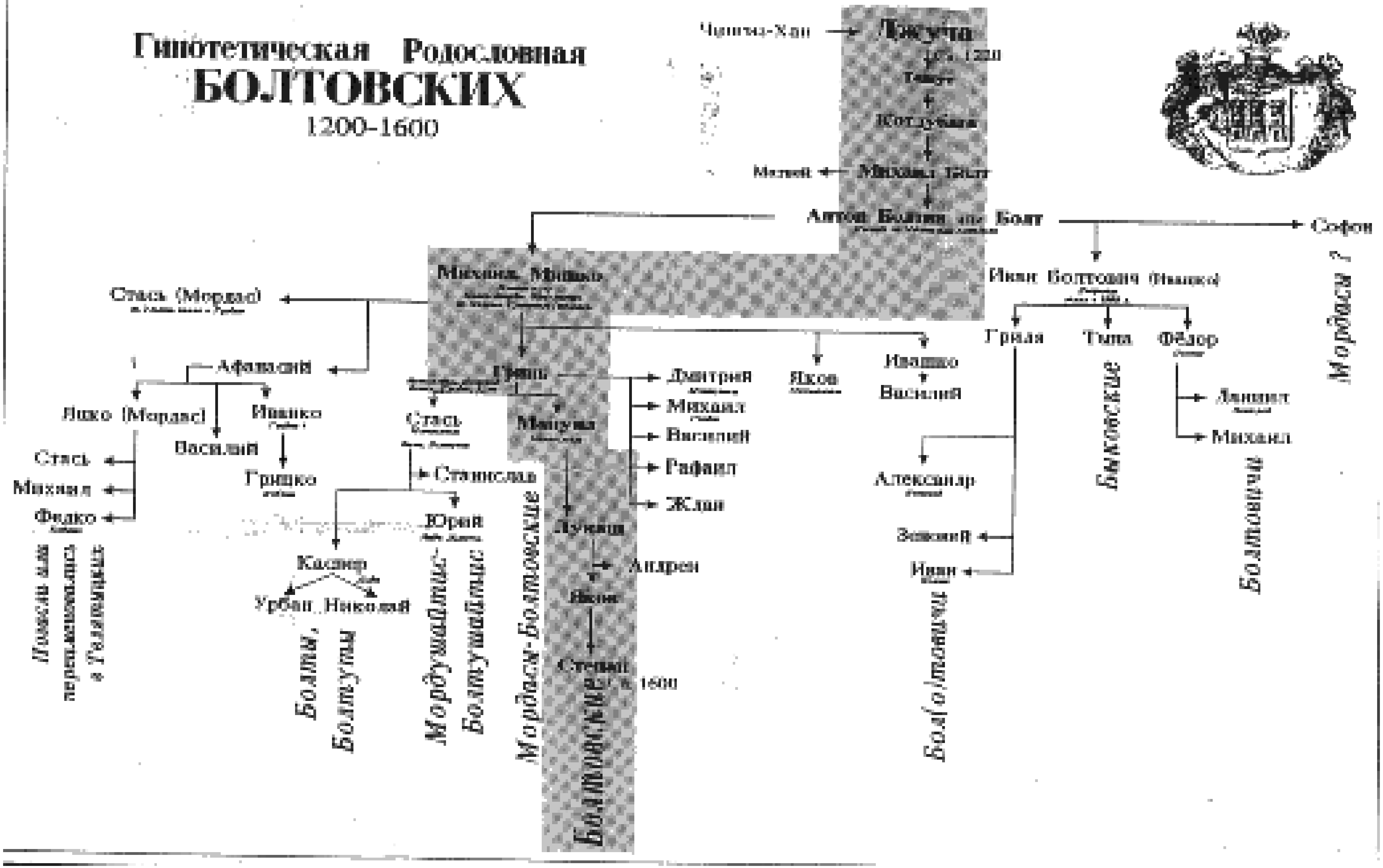
Дмитрий Дмитриевич с женой Людмилой Филаретовной. Пятигорск, 1950 г.

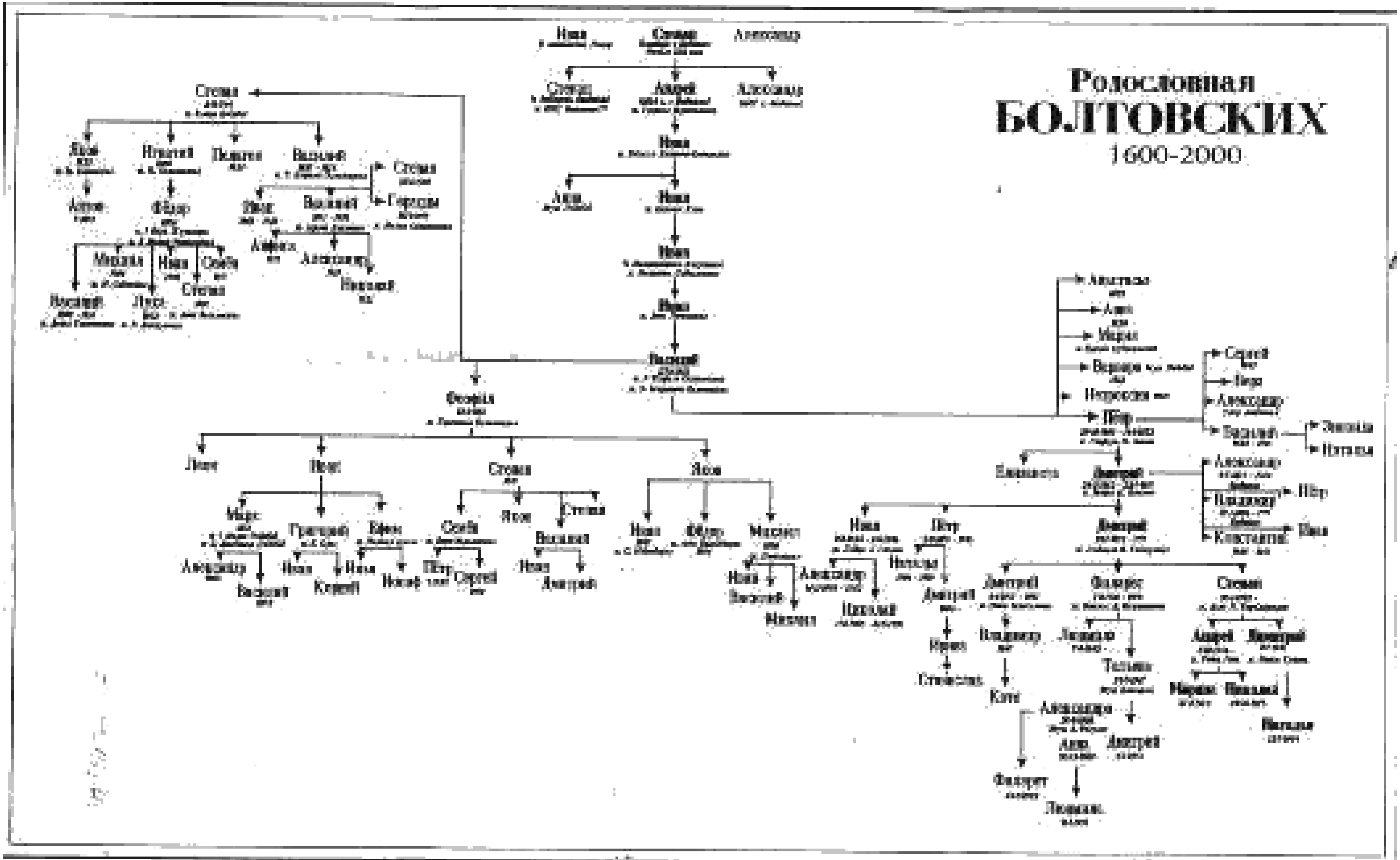
Д.Д. Мордухай-Болтовской с сыном Фоней (Филаретом Дмитриевичем) и внучкой Люшей (Людмилой Филаретовной). Ростов, набережная р. Дон, 1949 г.



Д.Д. Мордухай-Болтовской, 1950 г.

Гипотетическая Родословная
БОЛТОВСКИХ
1200-1600




Родословная
БОЛТОВСКИХ
1600-2000

ПРОТОКОЛ №7

Общего собрания научных работников, студентов, рабочих и служащих педфака СКГУ, посвященного общественному пересмотру научных работников[1]

от 22-го мая 1930 года

Присутствовало 706 человек

Президиум: 1. т. Розин (председатель)
2. т. Каменев
3. т. Сысовьев
4. т. Киреев (секретарь)

Повестка дня:

1. Отчеты о научно-педагогической и общественной деятельности
   а) т. Матисек
   б) проф. Мордухай-Болтовского
   в) доцента Миртова
   г) ассистента Бартенева

---------------------------------(*л.94 оборот*)---------------------------------------

СЛУШАЛИ

б) Отчет о научно-педагогической деятельности проф. Мордухай-Болтовского.

Родился я в 1871 году в г. Павловске. Отец – инженер путей сообщения. Прадед, дед и отец имели небольшую земельную собственность, и все трое служили на государственной службе. Приобрел образование, если не глубокое, то, во всяком случае, широкое. Жизнь моя однообразная, бедная событиями. В начале гражданской войны меня постигло то, чего я больше всего боялся, – физический труд, в результате которого я имею слишком слабые ноги.

До 15 лет особенных способностей к математике не проявлял. С 15 лет пробудился острый интерес к математике. В Университете я принимал деятельное участие в математическом кружке. По окончании оставлен в университете. Вскоре попал в Варшаву в качестве ассистента Варшавского Университета. Все курсы, которыми сейчас пользуются студенты, на-

[1] ГАРО ф.Р-46, о.1, д.404 «Материалы по вопросу общественного смотра профессорского и педагогического персонала (протоколы, резолюции, декларация группы научных работников, отчеты)», л.94-96

писаны мною в Варшаве. Административных должностей я избегал, все же был деканом Женских Курсов.

Сотрудничал по совместительству в школе взрослых, различных технических учебных заведениях и др.

НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ. Я поставлен в неловкое положение, так как приходится говорить о себе. Говорить о себе плохое я не собираюсь, но и говорить хорошее неприятно. Буду говорить то, за что меня можно и ругать и хвалить. Работал я и в хорошей обстановке – при электрическом свете и мягкой мебели, и в подвале при коптящей лампе, работал в мягком вагоне и в вагоне 4 класса. Если спросят, сколько у меня научных работ, – я не скажу. Это большого значения не имеет, важно качество, характер работы. «Абель–интегралы» моя студенческая диссертация. Эта работа очень большая, крупная монография, известная всем лицам, занимающимся этим отделом математики. Следующее – «интегрирование в конечном виде» вызвало не только сочувствие, но и продолжателей. Затем – «Об интегрировании трансцендентных функций». Больше всего – 16 лет – я работал над историей математики.

Доказать несправедливое отношение к средневековью – была моя мечта. У меня душа философа, ум математика, ум жестокий, характеризующий мое направление.

Относительно учеников скажу следующее: это понятие довольно неопределенное. Если говорить об учениках, которые меня слушали, то их тысячи. Есть немало и таких учеников, которые напечатали свои работы, являющиеся продолжением моих исследований или сопровождающихся моим руководством.

Педагогическая деятельность моя чрезвычайно разнообразна. Я преподавал и детям, и взрослым, и на Женских Курсах в Университете. К преподаванию относился с чрезвычайным интересом и любовью.

---------------------------------(*л. 95*)---

Я вполне справедливо обвинен в непопулярности изложения преподаваемого материала. Нет никакого сомнения, что ради создания цельного, методологически выдержанного курса, приходится жертвовать частью аудитории.

Я был против введения новых методов преподавания в середине года и за постепенный переход к ним, точно также, как больной человек, которому врачи решают произвести ампутацию ноги, хочет вылечиться без ампутации. Теперь я – защитник того, чтобы к лекциям не возвращаться. В настоящее время постоянно приходится видеть такие аншлаги: «Кто не работает, тот не ест». Я скажу – я не очень жестокий – что пусть едят, но после того, как поедят работающие. Таково мое отношение к выдвиженцам. Все те, которые говорят, что геометрический кабинет выставил штыки, не убеждены в том, что против неработающих выдвиженцев выставит штыки сама Республика.

ВОПРОСЫ:

1) Что студент видит в Вашем лице: только ли профессора математики, или быть может и старшего товарища?

- *Быть только профессором мало, но быть и старшим товарищем едва ли могу.*

2) Каково Ваше участие в социалистическом строительстве?

- *Я, начиная с 1921 года, работал честно, не вредил. Всякий же честно работающий гражданин уже участвует в социалистическом строительстве.*

3) Как Вы приняли Октябрьскую революцию?

- *Активного участия в революции я не принимал. Что чувствовал? Чувствовал я, как все остальные.*

4) Интересовались ли Вы политическими вопросами?

- *Ни в какой политической партии я не состоял и политической жизнью не интересуюсь.*

5) Как Вы относитесь к религии?

- *Этот вопрос, в свою очередь, можно разбить на 3 вопроса:*

    1. Интересуюсь ли я религией, как таковой.

        Да, религией я очень интересовался

    2. Каково мое участие в этой области.

        Ни в церковной жизни, ни в антирелигиозной работе участия не принимал.

    3. Каковы мои философско-религиозные убеждения.

        Мои философско-религиозные убеждения с марксизмом расходились. Это я за собой признаю.

6) Как Вы относитесь к пролетаризации ВУЗов?

- *Если понимать этот вопрос в том смысле, чтобы открыть дорогу всем бедным людям, то я, несомненно, сочувствую. Я против той пролетаризации, когда …*(нет текста)

7) Как Вы относитесь к заявлению научных работников медфака.

- *Если бы мне предложили подписаться под ним, я категорически отказался бы. Я считаю, что вопрос об аполитичности наук – схоластический вопрос. А если бы меня спросили: оказывала ли политика влияние на развитие науки, – я ответил бы: к сожалению, да – оказывала.*

ПРЕНИЯ:

1. ЧЕРНЯЕВ (ст. ассистент). Бюро научных работников поручило мне дать оценку научно-педагогической деятельности проф. Мордухай-Болтовского. Будучи в Варшавском университете, Д.Д. Мордухай-Болтовской организовал геометрический кабинет. Который был известен, как лучший кабинет в России. В Ростовском Университете Д.Д., при участии наиболее интересующихся учеников, также создал геометрический кабинет, являющийся одним из лучших в СССР. В 1924 году профессором был организован математический коллоквиум, работающий и сейчас под его руководством.

Мое официальное положение заведующего физ.технического отделения позволяет мне сделать оценку педагогической деятельности Д.Д.

Его лекции были методически продуманы и оригинально построены. И на первых порах перехода на лабораторную систему занятий Д.Д. не понял своего места в этой системе. Но то объяснение, оправданием

--------------------------------(*л.95, оборот*)--

же служить не может.

У Д.Д. много учеников, приобретших в настоящее время большую известность. Однако плановая работа подготовки кадров несколько ослабела.

Во взаимоотношениях со студентами были прения и конфликты. Причины их нужно искать в том, что Д.Д., как высококвалифицированный педагог, используется не рационально. Ответственная работа с выдвиженцами нами не мыслится без руководства Д.Д.

Следует, однако, указать, чтобы Д.Д. Мордухай-Болтовской принял более деятельное участие в строительстве новой школы.

Чтобы характеризовать научную деятельность профессора, одного докладчика мало. Перу Д.Д. принадлежит до 150 работ, из которых около 70 работ опубликованы в послереволюционное время. Условия, которыми объясняют многие научные работники бедную плодовитость своих работ, были не лучше.

Бюро коллектива считает, что проф. Мордухай-Болтовской является крупным ученым, ценным работником, но используется не рационально. Следует сделать правильную расстановку педагогических сил.

ЩЕГЛОВ (студент III курса ф.т.о.) Д.Д. Мордухай-Болтовской – несомненно крупный ученый, пользующийся широчайшей и заслуженной известностью. Но мы не замечаем на себе руководства этого ученого. Причина в том, что по мнению профессора, студент должен быть «маленьким ученым». Равнение на этих «маленьких ученых» он и держал. Когда вводился лабораторный метод, Д.Д. был против него, утверждая, что этот метод старый, который пережил несколько провалов. Во время занятий профессор часто отвлекался, говорил на различные темы, не относящиеся к математике. Пожелание нашего курса: сбросить Д.Д.Мордухай-Болтовскому с себя мнимую аполитичность. Сделать математику могучим орудием в борьбе за социализм, сойти с горных профессорских высот, прислушаться к запросам аудитории и войти в контакт со студенческой массой.

ЛОЗИНСКИЙ. Один греческий философ, определяя человека, сказал: человек политическое животное. Другой добавил, что его надо выделить в особую категорию. С тех пор прошло две с половиной тысячи лет. Однако не для всех научных работников убедительна эта истина. Нельзя изучать науку в «торричеллиевой пустоте». Когда эти работники говорят, что они занимаются чистой наукой, то они сознательно или несознательно, работают не так, как следует. Нужно разоблачить аполитичность и смело перейти к политичности, к общественности.

БОРИСОВ (III курс ф.т.о.) При поступлении в университет мы были горды сознанием, что будем учиться у такого крупного ученого, как Д.Д. Мордухай-Болтовской. Вскоре нас постигло разочарование, мы его не понимали. На новые методы преподавания профессор смотрел, как на то, что приведет университет к гибели. Он говорил: «Инвалиды Вы, не будет из Вас толку». Действительно, будут инвалиды, если слушать схоластику, в область которой часто делает экскурсии Д.Д. Мордухай-Болтовской. Выдвиженцы приняты профессором не горячо.

МАТЫШУК (ассистент). С 1921 года Д.Д. является бессменным руководителем методического коллоквиума. Я помню учебники, которые созданы Д.Д., и которые строго выдержаны в методологическом отношении. Между тем студенты не понимают его. Почему? Потому что Д.Д. Мордухай-Болтовской старается создать методологически стройный курс. Первый год РИИПСа остался для Д.Д. чрезвычайно плодотворным, там он был использован рационально. Я считаю, что в наших условиях Д.Д. еще может многое дать, поставив его на соответствующее ему место.

ИОФФЕ (III курс ф.т.о.) Я возражаю против ходатайства бюро научных работников отвести Д.Д. от непосредственного преподавания на курсах. Надо научным работникам создать условия, благоприятные для продуктивности работы Д.Д. с нами.

ДОБРОТИН. В лице Д.Д.Мордухай-Болтовского мы имеем большого учителя из учителей. Руководство коллоквиумом является большой общественной деятельностью Д.Д.

СОЛОВЬЕВ. То, что происходит на Педфаке, имело место на Медфаке, где пришлось выдержать прямую, острую политическую борьбу. Развиваемые положения проф. Мордухай-Болтовского заслуживают дружного отпора. Заявлением своим о том, что он категорически отказался бы подписаться под декларацией научных работников Медфака, он зачисляет себя в лагерь тех,

-----------------------------------(*л.96*)---

против кого эта декларация направлена.

Политический смысл этого заявления ясен. Если Вы хотите работать – работайте. Но когда Вы идете не по тому пути – мы Вас одергиваем в Ваших же интересах. Общественное действие на такого типа ученых имеет большое значение.

Мордухай-Болтовской не чужд политике – в свое время он изучал схоластику. Ученый-мистик (что никак не укладывается в нашем представлении) Мордухай-Болтовской, однако науку считает аполитичной. Разве не в интересах господствующего класса подвергались гонению Бруно и Галилей.

Когда проф. Ключевскому предложили написать историю казачества, он спросил: «а как писать?». Когда строится железная дорога, на первый взгляд кажется, что она строится для всех. В действительности же стройка эта основана на эксплуатации человека человеком.

Когда мы говорим о пролетаризации, то мы имеем в виду то, что Высшую школу должен завоевать рабочий класс. Все ли учились в Варшавском Университете? Далеко нет. Не можем и мы допускать в Высшую школу людей, которые потом будут вредителями! Мы должны поставить крепкий кордон стремлению, вытекающему из тезиса «все должны учиться».

Не всякий человек может стать политическим деятелем, но элементарные права гражданина для него обязательны.

«Ученым можешь ты не быть,
Но гражданином быть обязан».

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ СЛОВО ПРОФ. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО

Ко мне часто обращались студенты с вопросами философского характера. Я отвечал, отвлекаясь от основной темы. Теперь я этого буду избегать. Когда была введена лабораторная система занятий, я растерялся. Я был против введения её в середине года.

Нет сомнения, будут выработаны новые сокращенные программы, будет лучше. «Маленьких ученых» мне до глубины души жаль, так как они часто оказываются в несчастном положении.

Список архивных документов используемых при написании диссертации

ПФА РАН

ф.162	оп.2	д.284	ф.821	оп.1	д.119
ф.821	оп.1	д.1	ф.821	оп.1	д.124
ф.821	оп.1	д.2	ф.821	оп.1	д.125
ф.821	оп.1	д.3	ф.821	оп.1	д.126
ф.821	оп.1	д.5	ф.821	оп.1	д.127
ф.821	оп.1	д.6	ф.821	оп.1	д.159
ф.821	оп.1	д.7	ф.821	оп.1	д.162
ф.821	оп.1	д.8	ф.821	оп.1	д.163
ф.821	оп.1	д.9	ф.821	оп.1	д.164
ф.821	оп.1	д.10	ф.821	оп.1	д.174
ф.821	оп.1	д.11	ф.821	оп.1	д.175
ф.821	оп.1	д.12	ф.821	оп.1	д.179
ф.821	оп.1	д.13	ф.821	оп.1	д.180
ф.821	оп.1	д.14	ф.821	оп.1	д.181
ф.821	оп.1	д.15	ф.967	оп.3	д.116
ф.821	оп.1	д.16			

ЦГИА СПб

ф.14	оп.1	д.9593	ф.14	оп.27	д.306
ф.14	оп.3	д.30754	ф.114	оп.1	д.7533

РГИА

ф.733	оп.115	д.350	ф.740	оп.17	д.151

АРХИВ РГУ

ф.Р-46	оп.22	д.63	ф.Р-46	оп.22	д.63-а

АРХИВ РГУПС

	оп.1	д.8448

ГАРО

ф.42	оп.1	д.6
ф.42	оп.1	д.11
ф.42	оп.2	д.5
ф.42	оп.2	д.408
ф.Р-46	оп.1	д.177
ф.Р-46	оп.1	д.340
ф.Р-46	оп.1	д.382
ф.Р-46	оп.1	д.404
ф.Р-46	оп.1	д.408
ф.Р-46	оп.1	д.556
ф.Р-46	оп.10	д.57
ф.Р-46	оп.10	д.81
ф.Р-46	оп.10	д.217
ф.Р-46	оп.10	д.221
ф.Р-46	оп.10	д.266
ф.Р-46	оп.10	д.273
ф.Р-46	оп.10	д.274
ф.Р-46	оп.10	д.323
ф.Р-46	оп.15	д.24
ф.Р-46	оп.15	д.35
ф.Р-67	оп.1	д.27
ф.Р-97	оп.1	д.297
ф.527	оп.1	д.52
ф.527	оп.1	д.62
ф.527	оп.1	д.79
ф.527	оп.1	д.130
ф.527	оп.1	д.271
ф.527	оп.1	д.288
ф.527	оп.1	д.291
ф.527	оп.1	д.306
ф.527	оп.1	д.310
ф.527	оп.1	д.367
ф.527	оп.1	д.418
ф.527	оп.1	д.448
ф.527	оп.1	д.449
ф.Р-1019	оп.2	д.220
ф.Р-1452	оп.1	д.2
ф.Р-1452	оп.1	д.3
ф.Р-1452	оп.1	д.8
ф.1727	оп.1	д.177
ф.Р-2605	оп.1	д.23
ф.Р-2605	оп.1	д.78
ф.Р-2605	оп.1	д.81
ф.Р-2605	оп.1	д.89
ф.Р-2605	оп.1	д.115

Приложение 2. Библиография опубликованных работ Д.Д. Мордухай-Болтовского[1]

1898

1. Задачи по математике. Варшава, 1898-1899 (литограф.)

1899

2. Задачи по дифференциальному и интегральному исчислениям. Варшава,1899-1900, 197 с. (литограф.).
3. Задачи по приложениям дифференциального и интегрального исчислений. Варшава, 1899-1900, 384 с. (литограф.)

1900

4. Задачи по интегрированию функций. Варшава,1900,149 с. (литогр.).

1902

5. Об одном обобщении теоремы Абеля // Сообщения Харьковского математического общества, серия 2. 1902, т.7, № 6, С.268-283.
6. Об инвариантных преобразованиях ультраэллиптических интегралов // Сообщения Харьковского математического общества, серия 2, 1902, т.8, № 1-3, С.1-67.

1903

7. Задачи по дифференциальному и интегральному исчислениям. Издание студ. М. Верника, 1902/03. Варшава,1903, 210 с. (литограф.)
8. О некоторых биноминальных интегралах, приводимых к эллиптическим и ультраэллиптическим интегралам - Варшава,1903, 10 с.
9. О приведении абелевых интегралов к ультраэллиптическим интегралам первого класса // Известия Варшавского политехнического института, 1903, вып.1, С.1-87.

1904

10. К учению Д.Бернулли о нравственном имуществе и нравственном ожидании // Протоколы заседаний и труды общества естествоиспытателей при Варшавском университете, год XIV-XУ,1903-1904, протоколы отделения физики и химии, № 1, С.8-11.

[1] Прим.: основное содержание по изданию [11, С.253-297], в работах переизданных в 1998 г. в сборнике А.В. Родина имеется ссылка [148].

11. Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислениям. Вып.1. Теория пределов, дифференцирование и интегрирование функций. Варшава, 1904, 426 с.
12. То же на польском языке.

1905

13. О приведении абелевых интегралов к низшим трансцендентным // Известия Варшавского политехнического института, 1905, вып.1, С.1-96.
14. О приведении абелевых интегралов к низшим трансцендентным // Известия Варшавского политехнического института, 1905, вып.2, С. I-XV, 97-407.
15. Об определении в конечном виде абелевых интегралов // Математический сборник, 1905, т.26, вып.1, С.51 -94.

1906

16. О некоторых биноминальных интегралах, приводимых к эллиптическим и ультраэллиптическим интегралам // Протоколы заседаний и труды общества естествоиспытателей при Варшавском университете, год XIV-XV, 1903-1904, протоколы отделения физики и химии, №7. - Варшава, 1906, С.42-51
17. О приведении абелевых интегралов к низшим трансцендентным. Варшава,1906, ХУ+407 с.

1907

18. Математические и умозрительно-философские исследования основного психофизического закона. Варшава, 1907, 52 с.
19. О законе непрерывности // Вопросы философии и психологии, 1907, кн.87 (2), с. 168-184. См. также [148, С.125-137]
20. О законе непрерывности. - М., 1907, 19 с. См. также [148, С.125-137]
21. О кривизне плоских кривых. - Варшава, 1907, 32 с.
22. О некоторых арифметических свойствах регулярных интегралов линейных дифференциальных уравнений // Математический сборник, 1907, т.26, вып.2, С.130-198.
23. Об одном обобщении дифференциального уравнения Эйлера. Известия Варшавского политехнического института, 1907, вып.2, С.1-15.
24. Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка. Статья I // Сообщения Харьковского математического общества. Серия 2, 1907, т.10, № 1, С.34-64.
25. Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка. Статья 2 // Сообщения Харьковского математического общества. Серия 2, 1907, т.10, № 5-6, С.231-270

26. Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислениям. Вып.1. Теория пределов, дифференцирование и интегрирование функций. Варшава, 1907, 425 с.

1908

27. Курс дифференциального интегрального исчисления. Ростов н/Д, 1908, листы 1-9 (литограф.).
28. О кривизне плоских кривых // Известия Варшавского политехнического института, 1908, вып.2, с.1-32.
29. О преобразовании ультраэллиптических интегралов 1-го класса формы $\int \frac{Cy+D}{\sqrt{R(y)}}dy = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{R(x)}}dx$ // Сообщения Харьковского математического общества. Серия 2, 1908, т.10, № 5-6, С.202-216.
30. Практические упражнения по аналитической геометрии. Новочеркасск, изд.студентов Донского политехнического ин-та.1908 (литограф.).
31. Психология математического мышления // Вопросы философии и психологии, 1908, год 19, кн.4 (94), С.491-534. См. также [148, С.74-108].

1909

32. Аналитическая геометрия. Курс лекций. Варшава,1909. (литограф.).
33. Арифметика теоретическая. Лекции, чит.на I курсе Высших женских курсов при Варшавском университете. Варшава ,1909, 50 с (литограф.).
34. Василий Афанасьевич Анисимов. Некролог // Известия Варшавского политехнического института, 1909, С.1-14 с портр.
35. Курс дифференциального и интегрального исчислений. Варшава, 1909 (литограф.)
36. Курс дифференциального и интегрального исчислений. Лекции, читанные в Донском политехническом институте в 1908-1909 гг. Новочеркасск, изд. студ. Джевульского, 1909, 398 с. (литограф.).
37. Курс дифференциального и интегрального исчислений. Новочеркасск, 1909, листы 10-14. (литограф.)
38. Курс дифференциального и интегрального исчислений. Ростов н/Д, лит. И.Л.Алексанова, 1909, 224 с. с черт. (литограф.)
39. О геометрических построениях с помощью алгебраических кривых. - Варшава, 1909, 23 с.
40. О спрямляемой сумме дуг алгебраической кривой // Известия Варшавского политехнического института, 1909, вып.1, С.1-6.
41. Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений в конечном виде // Варшавские университетские известия, 1909, № 8, С.1-16; № 9, С. 17-48.

42. Об одном приложении исследований Брио и Букэ, относящихся к дифференциальным уравнениям первого порядка // Известия Варшавского политехнического института,1909, С.1-5.
43. Об одном свойстве Абелевых интегралов с проводящейся системой периодов // Известия Варшавского политехнического института, 1909, С.1-7.
44. Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка. Статья 2. - Харьков, 1909, 40 с.

1910

45. Две теоремы, относящиеся к алгебраическим кривым // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавской университете, год XXII, 1910, № 1-2, Варшава, 1910. С. 54-71.
46. Лекции по интегральному исчислению. Варшава, 1910, 215с.
47. О геометрических построениях с помощью алгебраических кривых // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, год XXI, 1909-1910, № 4. - Варшава, 1910, С.180-202.
48. О геометрических построениях с помощью линейки при условии, что дана неизменная дуга круга с центром // Вестник опытной физики и элементарной математики, 1910, № 522 (44 семестр № 6), С.137-146.
49. О некоторых арифметических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений // Математический сборник, 1910, т.27, вып.3, С. 360-406.
50. Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений. Варшава,1910, XL+344 с.
51. Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений в конечном виде // Варшавские университетские известия, 1910, № 1, С.49-96; №2, С.97-112; № 3, С.113-152; № 4, С.153-184; № 5, С.184-216; № 6, С.217-224; № 7, С.225-232; № 8, С.233-248; № 9, С.249-280.
52. Математические работы в Annales de l'institute Polytchnique de Varsovie, 1900-1901 // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1910, V.18, p.128-130.
53. Математические работы в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1900 // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1910, V.18, p.130-131.
54. Математические работы в Comptes rendus et memoires de la Societe des Naturalistes a l'Universite Imperiale de Varsovie, 1904-1906 // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1910, V.18, p.131-132.

1911

55. Лекции по интегральному исчислению, чит. на 3 курсе Варшавского ун-та. Часть 2. Варшава, 1911, 74 с. (литограф.).

56. Лекции по определенным интегралам, чит. на 3 курсе Варшавского ун-та. Варшава, 1911, 67 с. (литограф.).
57. О взаимных метрических теоремах. - Варшава, 1911, 22 с.
58. О геометрически построениях с помощью диска и линейки // Известия Варшавского политехнического института, 1911, № 2, С.1-6.
59. О некоторых интегральных уравнениях. Варшава, 1911. 10 с.
60. Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений в конечном виде // Варшавские университетские известия, 1911, № 1, С. 281-343. Введение С.1-40.
61. Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Варшавские университетские известия, 1911, № 8, С. 1-24; № 9,С.25-47.
62. Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Варшава, 1911, 48 с.
63. Отчет о командировке депутатом на столетний юбилей института инженеров Путей Сообщения им. Александра I // Варшавские университетские известил, 1911, № 4, С.1-3.
64. Математические работы в Annales de l'institute Polytchnique de Varsovie, 1909 // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1911, V.19, № 1, p.107-108.
65. Математические работы в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1909(4,5) // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1911, V.19, №1, p.109.
66. Математические работы в Annales de l'institute Polytchnique de Varsovie, 1910 // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1911, V.19, № 2, p.115.
67. Математические работы в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1910(6-8) // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1911, V.19, № 2, p.115.
68. Математические работы в Comptes rendus et memoires de la Societe des Naturalistes a l'Universite Imperiale de Varsovie, 1909 // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1911, V.19, № 1, p.109.
69. Математические работы в Comptes rendus et memoires de la Societe des Naturalistes a l'Universite Imperiale de Varsovie, 1910 // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1911, V.19, № 2, p.115.

1912

70. Аналитическая геометрия. Курс лекций. 2-е изд. Варшава, 1912,450+407 с. (литограф.).
71. Лекции по теории эллиптических функций, читанные на 4 курсе Варшавского ун-та в 1911-1912 ак. году. Варшава, 1912, 101 с. (литограф.)
72. О взаимных метрических теоремах // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, год XXШ, 1911, № 1-2. Варшава, 1912, С.157-178.

73. О некоторых интегральных уравнениях // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, год XXIII, 1911, № 1-2 . Варшава,1912, С.179-188.
74. О первом Всероссийском съезде преподавателей математики. - Варшава, 1912, 42 с.
75. Отзыв о кандидатской диссертации В. Георгианова "Об эволютоидах" // Варшавские университетские известия, 1912, № 9, С.1-8.
76. Отзыв о диссертации, представленной 22 сентября 1911 г. в физико-математический факультет имп. Варшавского университета исп. д. доцента В.И.Романовским на степень магистра чистой математики "К теории интегрирования дифференциальных уравнений с частотными прозводными 2-го и 3-го порядков // Варшавские университетские известия, 1912, № 8, С.1-21.
77. Отзыв о кандидатской диссертации А. Писецкого "Об алгебраическом интегрировании" // Варшавские университетские известия, 1912, № 9, С.1-8.
78. Отзыв о сочинении под девизом "Математик", поданном 19 января 1912 г. на тему: "Об арифметических свойствах степенного разложения алгебраических функций" // Варшавские университетские известия, 1912, № 9, С.1-8.
79. Очерк научной деятельности И.П.Долбни // Математический Сборник, 1912, т. 28, вып.4, С.473-491.
80. Случай и бессознательное // Вопросы философии и психологии, 1912, кн. 1(111), ср. 97-117. См. также [148, С.109-124].
81. Труды математического семинария Варшавского университета за 1911 г. Варшава, 1912, 96 с. (литограф)[1].
82. Математические работы в Annales de l'institute Polytchnique de Varsovie, 1911 (1) // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1912, V.20, №1, p.114.
83. Математические работы в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1911(2-6) // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1912, V.20, № 1, p.120.

1913

84. К теории трансцендентных чисел // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, год XXУ, 1913, № I- 2. Варшава, 1913, С.49-59.
85. О гиперболоидальном расположении тетраэдров в связи с геометрией многообразия пятого порядка // Протоколы заседаний общества естество-

[1] В сборник включены темы докладов, рекомендации Д.Д.Мордухай-Болтовского, включающие постановку задач, библиографию и комментарии, краткие сообщения студентов, а также изложение докладов самого Д.Д.Мордухай-Болтовского (С.55-73).

испытателей при Варшавском университете, год ХХУ, 1913, № I- 2. Варшава, 1913, С.100-110.

86. О научной деятельности А.Пуанкарэ // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, год ХХIУ, 1912, № 4. Варшава, 1913, С.27-80.
87. Об интегрировании трансцендентных функций. - Варшава, 1913, 276 с.
88. Об интегрировании трансцендентных функций // Варшавские университетские известия, 1913, № 6, С..1-1У и 1-16; № 7, С.17-24; № 8, С.25-128; № 9,с.129-277.
89. О первом Всероссийском съезде преподавателей математики // Варшавские университетские известия, 1913, № 3, С. 1-42.
90. Труды математического семинария Варшавского университета за 1912 г. Варшава,1913,134 с. (литограф.)[1].
91. Труды математического семинария Варшавского университета за 1913 г. Варшава,1913,99 с. (литограф.)[2].
92. Четыре лекции по философии математики,прочитанные на курсах для преподавателей средней школы летом 1912 г. - Варшава, 1913, [2], IV+78с. с илл. См. также [148, С.26-73].
93. Математические работы в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1911 // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1913, V.21, № 1, p.123-125.
94. Математические работы в Annales de l'institute Polytchnique de Varsovie, 1911 (2,3) // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1913, V.21, № 2, p.122.
95. Математические работы в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1912(6-9) // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1913, V.21, № 2, p.122-123.
96. Математические работы в Comptes rendus et memoires de la Societe des Naturalistes a l'Universite Imperiale de Varsovie, 1912, XXIII // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1913, V.21, № 2, p.123-124.
97. О работе Romanowsky: Sur la theorie de l'integration des equations differentielles partielles du second et du troisieme ordre // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1913, V.21, № 1, p.124-125.
98. О работе Romanowsky: Sur l'integration de quelques types d'equations partielles du second ordre au moyen de methode d'Ampere // Revue semestrielle des publications mathematiques, 1913, V.21, № 1, p.125.

1914

99. Второй Всероссийский съезд преподавателей математики. Варшава, 1914, 82 с.

---

[1] В сборник включены темы докладов, рекомендации Д.Д.Мордухай-Болтовского, включающие постановку задач, библиографию и комментарии, краткие сообщения студентов.

[2] То же.

100. К вопросу об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений // Варшавские университетские известия, 1914, № 6, С. 1-65.
101. К вопросу об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений . - Варшава, 1914, 65 с.
102. О гипертрансцендентности функций $\zeta(s,x)$ // Известия Варшавского политехнического института, 1914. Вып. 2, С. 1-13.
103. Об алгебраических функциях, определяемых метациклическими уравнениями // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, год ХХУ,1913-1914, № 3- 4. Варшава,1914, с.81-96.
104. Отзыв Д.Д.Мордухай-Болтовского о кандидатской работе С. Хвялковского под названием "О функциональных у равнениях", представленной в марте 1913 г. Варшава, 1914, 11 с.
105. Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислениям. Т.1. Дифференциальное исчисление. Пг: Изд-во Риккера,1914, Х1У+356 с. с черт.
106. Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислениям. Вып.I. Теория пределов, дифференцирование и интегрирование функций. Пг: Изд-во Риккера,1914, 425 с. с черт.
107. То же на польском языке.

1915

108. Аналитическая геометрия. Курс лекций, изд.3-е. Ростов н/Д, 1915, 671 с. (литограф.).
109. Второй Всероссийский съезд преподавателей математики. Философские, методологические и дидактические очерки по поводу докладов съезда // Варшавские университетские известия, 1915, № I, С.1-95.
110. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Лекции, читанные в Варшавском политехническом ин-те в 1914-1915 гг. Изд. студентов В.Тарасова и В.Вершковского. Варшава, 1915, 365 с. (литограф.).
111. Лекции по дифференциальному и интегральному исчислениям. Изд.2-е. Варшава, 1915, 365 с. (литограф).
112. Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислением. Т.2. Интегральное исчисление. Пг: Изд-во Риккера, 1915, XVI+512 с.

1916

113. Из прошлого пятой книги "Начал" Эвклида // Математическое образование,1916, № 7, С.255-268; № 8, С.277-289. См. также [148, С.192-212].
114. Лекции по аналитической геометрии. Курс, читанный студ. мат. 1-го курса Варшавского ун-та в I9I5-I9I6 ак.году. Ростов н/Д, 1916, 172 с. (литограф.).

115. Лекции по интегральному исчислению. ч.1. Ростов н/Д, 1916 (литограф.).
116. О моделях ко второй книге "Начал" Эвклида // Вестник опытной физики и элементарной математики, 1916, № 655-656, 18 с.
117. Очерк научной деятельности Н.Я.Сонина.- Харьков, 1916, 34 с. с портр.
118. Очерк научной деятельности Н.Я.Сонина // Варшавские университетские известия, 1916, № 3, С.1-32 с портр.
119. Этюды по планиметрической и стереометрической теории трансверсалей в связи с начертательной геометрией четырехмерного и пятимерного пространства. - Варшава, 1916, 40с.
120. Этюды по планиметрической и стереометрической теории трансверсалей в связи с начертательной геометрией четырехмерного и пятимерного пространства // Варшавские университетские известия, I9I6, № 3, с.1-40.

1917

121. Границы вселенной // Вопросы философии и психологии, I9I7, кн. 37, с.61-101.
122. Теорема подобия Вольфа и постулат Левека // Вестник опытной физики и элементарной математики, 1917, № 673-674 (вторая серия семестра, № 1-2), с.1-13.
123. Ответ Kepouses на работу G.Loria: Sur un cas d'integrabilite en termes finis // L'intermediaire des Mathematiciens, Paris,1917, t.24, p.130-132.
124. К открытию физико-математического кружка в Ростове // Приазовский край, № 5, 6 января 1917 г.
125. Демократически-индивидуалистическая педагогика // Ростовская речь,№ 252, 26 октября 1917г.
126. Массовая психология // Ростовская речь, № 261, 5 ноября 1917г.
127. Поход на интеллигенцию // Ростовская речь, № 269, 15 ноября 1917 г.
128. Об учениках-беженцах // Ростовская речь, № 277, 25 ноября 1917 г.
129. Буква Ъ // Ростовская речь, № 284, 8 декабря 1917 г.
130. Об ученических и студенческих организациях// Ростовская речь, № 294, 21 декабря 1917 г.
131. Воскресший Лазарь // Ростовская речь, № 296, 23 декабря 1917 г.

1918

132. Курс аналитической геометрии, читанный студентам Донского университета и курсисткам Высших женских курсов в 1917/18 ак. году. Ростов н/Д, 1918, 336 с. (литограф.).
133. Сказка о стеклянном доме // Ростовская речь, № 4, 5 января 1918г.
134. О воспитании народа // Ростовская речь, № 11, 14 января 1918 г.
135. Воспитание народа // Ростовская речь, № 16, 20 января 1918 г.
136. Социалистический сон // Ростовская речь, № 25, 2 февраля 1918 г.

1919

137. Об учреждении математического отделения Ростовского общества естествоиспытателей // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Донском университете. Годы 1916-1918, вып. 1. Ростов н/Д, 1919, С. 17-18.
138. Философско-математические идеи XVI века // Известия Донского университета, 1919, т.2, С.1-48. См. также [148, С.235-267].

1922

139. О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. Самара, 1922, 11 с.
140. Об апагогических доказательствах // Научный вестник (Ростов н/Д), 1922, №1, С.7.

1923

141. Sur certaines categories des nombres transcendents // Comptes rendus des seances de 1'Academie des Sciences. Paris, 1923, v.177, p. 475-478.
142. Sur le logarithme d'un nombre algebrique // Comptes rendus des seances de 1'Academie des Sciences, Paris, 1923, v. 177, 4p.

1924

143. Некоторые теоремы о кривых второго и третьего порядка // Известия Донского университета, 1924, т.4, С. 4-7.
144. О диаметральных свойствах алгебраической кривой в геометрии Лобачевского // Известия Донского университета, 1924, т.4, С.99-102.
145. О пересечении алгебраических кривых // Известия Донского университета, 1924, т.4, С.1-3.
146. О разложении на примерные множители целой трансцендентной функции // Математический Сборник, 1924, т.31, вып.3-4, С.579-584.
147. Sur la transcendance de ee et de certains autres nombres // Comptes rendus des seances de 1'Academie des sciences, Paris, 1924, v. 179, p. 1020-1023.
148. Sur l'implissibilite d'une relation algebrique entre π et e // Comptes rendus des seances de 1'Academie des sciences, Paris, 1924, v.179, p.1239-1242.
149. Sur queiques proprietes arithmetiques des integrales des equations du premier ordre // Comptes rendus des seances de l'Acedemie des sciences, Paris, 1924, v. 179.

1925

150. О летучках крылатых растений // Вестник Ростовского индустриального политехникума, 1925.
151. О числовой характеристике утверждаемого тождества // Известия Донского университета, 1925, т.7, С.40-43. См. также [148, С.161-165].

152.Основания геометрии неизогенных и негомогенных пространств с точки зрения теории групп // Известия Донского университета, 1925, т.7, С.29-39

153.Функции в арифметике // Общешкольный журнал. Орган школ взрослых повышенного типа. Ростов н/Д, 1925, № 1, С.12.

154.В разделе "Lősungen": Die Aufgabe 16, поставленная Färber'om (Jahresbericht der deutsch. Mathematiker Vereinigung, 1924, Bd.33, H.1/4, S.27): дается решение Färber'a и Д.Д. Мордухай-Болтовского // Jahresbericht der deutsch. Mathematiker Vereinigung, 1925, Bd.33, H.9-12, Abtielung 2, 1925, S.114-116.

155.Ответы Kepouses на работу E. Dubouis: Sur Solution d'une equation differentielle // L'intermediaire des Mathematiciens, 2-e serie, I925, t.4, p.59.

156.Sur les facteurs primaires de la fonction entiere // Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences, Paris, 1925, v.180, p.191-194.

1926

157.Квадратичные диаметры и поляры кривых третьего порядка // Труды Северо-Кавказской ассоциации научно-исследовательских институтов, 1926, №1. Институт математики и естествознания при Северо-Кавказском университете, вып.2 , С. 19-39.

158.Краткий очерк жизни и научной деятельности Н.И.Лобачевского (доклад на заседании об-ва естествоиспытателей при СКГУ 7 марта 1926г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете, годы 1919-1926, т.3. Ростов н/Д, 1926,С.7.

159.О геометрических построениях в пространстве Лобачевского (доклад на заседании 9 мая 1922 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете, годы 1919-1926, т.3. Ростов н/Д, 1926, С.11.

160.О гиперплоскостном сечении гиперконусов // Труды Северо-Кавказской ассоциации научно-исследовательских институтов, 1926, №1. Институт математики и естествознания при Северо-Кавказском Университете, вып.2, С.17-28.

161.О задаче Шварца, относящейся к абелевым интегралам // Труды Северо-Кавказской ассоциации научно-исследовательских институтов, 1926, № 1. Институт математики и естествознания при Северо-Кавказском Университете, вып.2, 39 с.

162.Об академиках, работавших в области физико-математических наук (к двухсотлетию Российской Академии наук) // Известия Северо-Кавказского университета, 1926, т.8, С.111-118.

163.Об интегрировании в конечном виде дифференциальных биномов в случае иррациональных показателей // Известия физико-математического общества при Казанском университете, серия 3, т.1. Казань, 1926, С.14-25.

164.Об одевании поверхностей // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете, годы 1919-1926, т.3. Ростов н/Д, 1926, С.13.

165. Об одном обобщении задачи Ж. Бертрана, относящейся к центральным силам (доклад на заседании 30 октября 192I г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете, годы 1919-1926, т.3. Ростов н/Д, 1926, С.10.
166. Sur 1'application de la methode de Morgan auz equations partielles du troisieme ordre (О приложении метода Моргана к дифференциальным уравнениям в частных производных 3-го порядка. Сообщение на заседании 10 мая 1926 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете, годы 1919-1926, т.3. Ростов н/Д, 1926, С. 45-46.
167. Sur la cosmogonie d'Arrenius (Мысли математика о космогонии Аррениуса. Сообщение на заседании 3.V.1923 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете, годы 1919-1926, т.3. Ростов н/Д, 1926, С.40-41.
168. Sur la formule de Secretan pour le calcul des logarithmes (О формуле Секретена и ей аналогичных формулах для вычисления логарифмов. Доклад на заседании 15 мая 1921 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете, годы 1919-1926, т.3. Ростов н/Д, 1926, С. 38-39.
169. Sur les syllogismes en logique et les hypersyllogismes en metalogique (Силлогизмы в логике и металогике. Доклад на заседании общества 19 октября 1919 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете, годы 1919-1926, т.3. Ростов н/Д, 1926, С.34-35.
170. Sur la mecanique dans 1'espace Lobatczewskienne (Механика в пространстве Лобачевского. Сообщение на заседании 25 ноября 1923 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете, годы 1919-1926, т.3. Ростов н/Д, 1926, С.41-43.
171. Ueber hyperboloidische Lage zweier Tetraeder // Сборник Huygens, I926, стр.10.
172. Sur la generalisation du theoreme d'Eisenstein, indiquee par Tchebyscheff // Comptes rendus des seances de 1'Academie des sciences, Paris, 1926, v.182, p.258-260.
173. Sur les proprietes arithmetiques des developpements holomorphes des fonctions exprimables en termes finis // Bulletin des sciences mathematiques, 1926, v.50, p.343-360,370-381.

1927

174. Лобачевский и основные логические проблемы в математике. Речь на юбилее 100-летия открытия неэвклидовой геометрии в Казани и Ростове-на-Дону // Известия Северо-Кавказского университета, 1927,т .1(12), С. 78-95. См. также [148, С.166-277].
175. Начертательная геометрия трехмерного и четырехмерного пространства как метод геометрических построений в ограниченной области //Журнал физико-математического об-ва при Пермском ун-те, 1927, т. 4 , С. 63-71.

176.О геометрических построениях в пространстве Лобачевского // In memoriam N.I. Lobatschevski, v.2. Казань, Главнаука, 1927,р.67-82.

177.О некоторых свойствах трансцендентных чисел первого класса // Математический сборник, 1927, т.34, вып.1, С.55-100.

178.Об арифметических свойствах интегралов дифференциальных уравнений первого порядка типа Пенлеве // Известия физико-математического общества при Казанском университете. Серия 3, 1927, т. 2, С.1-13.

179.Ньютон // Очерки по истории знаний. Т.1., Л. 1927. С.1-73.

180.Der beweis der Unmöglichkeit des Ziehens eines Grosskreises mit dem Zirkel durch zwei Punkte auf einer Kugelfläche // Jahresberioht der Deutchsch. Mathematiker Vereinigung. I927.

1928

181.Дюрер как художник и как математик. Информация о заседании отделения математики и астрономии общества естествоиспытателей 12 мая 1928 г., посвящ. Дюреру // Бюллетень научных обществ и учреждений Северо-Кавказского края, 1928, № 16/10. С.5-6.

182.Из истории метода наложения в элементарной геометрии // Математическое образование, 1928, №3 , С.107-113. См. также [148, С.227-234].

183.Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики // Известия Северо-Кавказского ун-та, 1928, т.3, С.35-129. См. также [148, С.268-365].

184.Математики и вычислители. Сообщение о докладе на заседании общества естествоиспытателей и психологии математического мышления 13 апреля 1928 г. // Бюллетень научных обществ и учреждений Северо-Кавказского края, 1928, № 15/4, С.4.

185.Метод исчерпывания // Математическое образование,1928, № 6, С.229-240. См. также [148, С.213-226].

186.О некоторых свойствах иррациональных преобразований алгебраических кривых // Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля - 4 мая 1927 г. М.-Л.,ГИЗ, 1928, С.201-205.

187.О школьных ошибках в математике // Отчет о деятельности математической конференции Научно-Педагогического общества Дальневосточного ун-та, 32, VI-XII. Владивосток,1928,С.85-90.

188.Об алгебраических площадях и объемах // Отчет о деятельности математической конференции Научно-Педагогического о-ва Дальневосточного ун-та. Владивосток, 1928.

189.Опытные вычисления в уме // Бюллетень научных обществ и учреждений Северо-Кавказского края, 1928, № 13, С.2.

190.Paedagogia de puero et de adulta. Scienza e Vita.Milano, 1928.

191.Sur les proprietes diametrales de la conique gauche // Известия физико-математического общества при Казанской университете. Серия 3, 1928, т.3, вып.1, С.25-35.

1929

192.Ненатуральное и апагогическое доказательство в прошедшем и будущем // Математическое образование, 1929, № 1, С. 19-34. См. также [148, С.138-155].

193. О примерных множителях целой трансцендентной функции бесконечного ряда // Журнал физико-математического общества при Донецком горном ин-те, 1929, т.1, вып.1, С.40-50.

194.Об изогенности и гомогенности пространства // Отчет о деятельности математической конференции физико-математического общества ДВГУ. Владивосток, 1929, С.10.

195.Основания динамики материальной точки в пространстве Лобачевского // Научные известия Смоленского ун-та, 1929, вып.I, С.33-48.

196.Die Pädagogie des Kindes und die Pädagodie des Erwach-senen // Zeitschr. f. Pad. Psych.,1929.

197.Methodica de demonst. Scholastico // Scienza e vita, Milano, I929, № 6-7, стр. I4I-I42.

198.Psychologia de cocpob. mathem. // Scienza e vita, Milano, 1929.

199.Sur les forces centrales sous l'action dosquelles le point d'ecrit une conique // Записки фізико-математичну відділу. Київ, 1929, t.3, в.3, С.17-26.

1930

200.Об одевании поверхностей // Сборник статей по математике Института математики и естествознания при Северо-Кавказском университете, 1930, вып.16, С. 21-52. (Труды Северо-Кавказской ассоциации научно-исследовательских институтов, № 77).

201.Про українську та білоруську математичну термінологію в зв'язку з історією російскоі // Збірник математично-природописно-лікарськоі секції наукового товариства ім. Шевченка, Львові, 1930, т.28-29, С.277-297.

1931

202.О школьном геометрическом доказательстве // Физика, химия, математика и техника в советской школе, 1931, № 1, С.96-100.

203.Про особливі точки спеціальних типів функцій даних у вигляді Taylor'ового ряду (Sur les points singuliers des types specianx des fonctions donnees par la serie de Taylor) // Записки природнично-техничного відділу АН УССР, 1931, № 3, С.69-92.

204.De errores Scholastico in Machemax. // Scienza e vita, Milano,1931, № 11-12, стр. 297-303.

1932

205.Некоторые проблемы школьной геометрической терминологии // Физика, химия, математика и техника в советской школе, 1932, № 3, С.49-54.

206. О новейших немецких учебниках по элементарной математике // Физика, химия, математика и техника в советской школе, 1932, № I, С.93-97.
207. О точечном множестве, проходимом любой алгебраической кривой // Математический сборник, 1932, т.39, вып.3, стр.120-128.
208. Про деякі задачі небесноі механіки в неэвклідовому просторі // Журнал математического цикла АН УССР, 1932, № 1, С.47- 70.
209. Das Theorem uber die Hypertranszendenz der Funktion £(s,x) und einige Verallgemeinerungen // The Tohoku Mathematical Journal, 1932, vol.35, №.2, p.19-34.
210. Sege biogenetico in Mathemat. // Scienza e Vita, Milano, 1932.
211. The concept of Infinity-Historical and Critical Notes // Scripta Mathematica,1932, v.I, №.2, p.132-134.

1933

212. Genese und Geschichte der Limestheorie // Accheion, Roma, 1933, v.15, p.45-72.
213. Heterogome des fines in Mathematica // Scienza e Vita, Milano, 1933.
214. Sur les modeles du second livre des elements d'Eucklide // Bologna Zonidolli,1933,15p. Estratto dal Periodico di matematiche storia-didattica-filosofia. Maggio,1933, S.4, vol.13, №3, P.169-183.
215. Sur quelques proprietes des transformations irrationelles des courbes algebriques // Записки Харьковского математичного товариства та Науково-дослідного інституту математики и механіки. Серия 4, 1933, т.7, С.25-37.

1934

216. О парашютах и планерах в растительном и животном царствах // Ученые записки Ростовского ун-та, 1934, вып.1, С.1-14.
217. О пределе сумм // Ученые записки Ростовского ун-та, 1934, вып. 1, С. 99-110.
218. О трансцендентных числах с последовательными приближениями, определяемыми алгебраическими уравнениями // Математический сборник, 1934, т.41, вып.2, С.221-232.
219. Об обращении определенных интегралов с помощью теории вычетов // Ученые записки Ростовского ун-та, 1934, вып.1, С.111- 118.
220. Про будування за допомогою алгебрічних крівих в Евклідовому і не Евклідовому просторах // Журнал математичного циклу Всеукраінської Академіі наук, 1934, т.1, вып.3, С.15-30.
221. L’attraction de la couche spherique et le monde quadridemensional (Притяжение сферическим слоем в 4-мерный мир) // Известия физико-математического общества при Казанском университете, 1932-1933 г. Серия 3, 1934, т.6, С.80-87.

222. Origine et Histoire de Regula faese // Scienza e Vita, Milano,1934, № 6, C.207-213.
223. Regula infura // Scienza e Vita, Milano, 1934.
224. Sur les constructions au moyen de la regle et constructions de cercle fixe dont le centre et connu // Periodico di mathematiche Marzo. Ser.4. Bologna, 1934, vl.14, № 2, p.101-111.
225. Sur les facteurs primaires de la fonction entiere transcendente du genre infini // Записки Харківського математичного товариства та Науково-дослідного інституту математики. Серия 4, 1934, т.10, С.77-85.
226. Sur les integrales abeliennes avec les systemes reductibles des periodes // Comptes rendus des seances de I'Academie des sciences, Paris, 1934, v.198, p.1006-1008.

1935

227. Исследовательская работа по математике за десять лет в Ростовском университет // XX лет Ростовского-на-Дону университета. Ученые записки (юбилейный выпуск). Ростов н/Д, 1935, С. 103-107.
228. Математика и логика в школе // Математическое просвещение. Сборник статей по элементарной математике и началам высшей, 1935, вып.4, С. 113-128.
229. О штейнеровых построениях на сфере // Математический сборник, 1935, т.42, вып. 5, С. 535-546.
230. Про діаметральні властивості алгебраичних кривих на сфері // Журнал Інституту математики Украінськоі Академіі наук, 1935, № 2, С.105-113.
231. Про необхідні умови зведения многограників за допомогою подібних частин // Журнал Інституту математики Украінськоі Академіі наук, 1935, № 2, С.115-126.
232. Uber einige Eigenschaften der transzendenten Zahlen // The Tohoku Mathematical Journal, 1935, v.40, p.99-127.
233. Sur les courbures des ordres superieures des courbes planes // Збірник математично-природописно-лікарськоі секціі наукового товариства ім.Шевченка. Львов, 1934, т.30, С.105-115.

1936

234. Геометрия радиолярий // Ученые записки Ростовского ун-та, 1936, вып.8, С.I-91 с XIII табл.
235. О невозможности выражения в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных функций модулярных функций // Доклады Акад.наук СССР, 1936, т.1, № 8, С.307-310.
236. Про дуги алгебричних кривих // Журнал Інституту математики Украінськоі Академіі наук,1936, № 2, С.53-70.
237. Sur les reductions monomes des integrales abeliennes // Annali di Mathematika pura ed applicata, Bologna., 1936, v. 15, p.47-75.

1937

238. Вводная статья и комментарии // Ньютон Исаак. Математические работы. Пер. с латин., вводная статья и комментарии Д.Д.Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ОНТИ, 1937, с.V-XV, 263-416.
239. Метаалгебра // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т.1, С.21-25. См. также [148, С.156-160].
240. О мероморфной функции, определяемой степенным разложением с коэффициентами, равными алгебраическим числам или трансцендентным первого класса // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т.1, С.26-27.
241. О нулях целой функции, определенной разложением с алгебраическими коэффициентами // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т.1, С.41-42.
242. Скелеты радиолярий, с точки зрения сопротивления материалов // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т.1, С.74-75.
243. Эволюция понятия функций в прошлом и в настоящем // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т. 1, С.50-52.
244. Sur la resolution des equations differentielles de premier ordre en forme finie // Rendiconti del circolo matematico di Palermo, I937, v.61, p.49-72.
245. Sur quelques applications de la theorie analytique des equations differentielles a I'integration, en forme finie (Про деякі застосування аналітичноі теоріі диференціальних рівнянь які можна інтегруваті в скінченній формі) // Журнал Інституту математики Украінськоі Академіі наук,1937, № I, С.53-65.

1938

246. Измерение в геометрии и инверсия (лекции по спец. курсу для матем., прочитан. в РПИ в 1937-1938). Ростов н/Д, 1938,109 с.
247. Методические проблемы, относящиеся к поверхностям и объемам // Математика в школе, 1938, № 1, С.34-40.
248. О заполнении неевклидовых пространств правильными многоугольниками и многогранниками // Сборник ученых записок Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1938, т.2, С.35-37.
249. О некоторых формулах стереометрической теории транверсалей // Известия Ростовского пед. ин-та, 1938, т.9, С.31-42.
250. Об абелевых интегралах, зависящих от пространственных кривых третьего и четвертого порядков // Сборник ученых записок Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1938, т.2, С.40-41.

251.Об иррациональных функциях, наименее отклоняющихся от нуля // Известия Ростовского пед. ин-та, 1938, т.9, С.19-23.

252.Об одной задаче Чезаро, относящейся к исчислению вероятностей // Известия Ростовского пед. ин-та, 1938, т.9, С.24-26.

253.Об одном обобщении признака сходимости Куммфе // Известия Ростовского пед. ин-та, 1938, т.9, С.27-30.

254.Про властивості косого чотирикутника і гексаедра, одержуваних проектуванням в чотириірному просторі // Журнал Інституту математики Украінськоі Академіі наук, 1938, № 1, С.53-63.

255.Эвклид и Лобачевский. Лекции по спец. курсу для матем., прочитанные в РПИ в 1937-1938 гг. Ростов н/Д, 1938, 61 с.

256.Sur les syllogismes en logique et les hypersyllogismes en Metalogique // Известия физико-математического общества и научно-исследовательского ин-та математики и механики при Казанском ун-те. Серия 3, 1938, т.10, С.161-173.

1939

257.Конспект лекций по основаниям геометрии, прочитанных в 1938-1939 гг. в РПИ. Ростов н/Д, 1939, 135с.

258.Эллиптические функции. Ростов н/Д, 1939, 200 с.

259.Insolubies in Scholastica et paradoxos de infinito de nostro tempore // Wiadomosci Matematyczne. T. XLVII. Warszawa, 1939.

1940

260.Высшая геометрия. Конспект курса, прочитанного в РПИ. Ростов н/Д, 1940, 151 с.

261.Геометрия как наука о пространстве // Известия Ростовского пед.ин-та, 1940, т.10, С.10-25. См. также [148, С.178-191].

262.Заметка о гипертрансцендентных числах // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, I940, т.4, С.117-118.

263.Заметка о теореме Принсгейма // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т.4, С.119-121.

264.Математические ошибки в науке и в школе // Известия Ростовского пед.ин-та,1940,т.10,с.36-51.

265.Метациклические уравнения и абелевы интегралы // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т.4, С.27-28.

266.Методика геометрических определений // Математика в школе, 1940, № 2, С.1-8.

267.Методический коллоквиум при кафедре математики Ростовского пед.ин-та // Известия Ростовского пед. ин-та, 1940, т.10, С.26-35.

268. Некоторые проблемы динамики материальной точки в неэвклидовом пространстве // Известия Ростовского пед. ин-та, 1940, т.10, С.126-157 с черт.
269. О кривизне на плоскости Лобачевского // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т.4, С.29-30.
270. О неразрешимости в конечном виде с помощью элементарных функций трансцендентных уравнений Кеплера // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т.4, С.25-26.
271. О полуправильных телах // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т.4, С.3-22 с черт.
272. О росте трансцендентной функции, выражаемой в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных // Сборник, посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. М.-Л.: ОГИЗ, 1940, С.172-192.
273. Основные теоремы теории транверсалей на плоскости Лобачевского // Известия Ростовского пед.ин-та, 1940, т.10, С.114-125 с черт.
274. Основные формулы теории транверсалей на плоскости Лобачевского // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т.4, С.23-24.

1941

275. Математика в Ростовском университете // Ростовский университет. Юбилейный сборник. ХХУ,1915-1940. Под редакцией С.Е. Белозерова. Ростов н/Д, 1941, С.46-52.
276. О кривизне кривых на плоскости Лобачевского // Труды Ленинградского кораблестроительного ин-та, 1941, вып.6, С.77-96.
277. Основы арифметики в середине ХУШ века // Математика в школе, 1941, № 4, С.1-5.

1946

278. Об условиях определяемости числа трансцендентными уравнениями некоторого общего типа // Доклады Акад. наук СССР,1946, т.52,№ 6,с.487-490.
279. Поризмы и данные // Тезисы докладов к Совещанию по истории естествознания 24-26 декабря 1946 г. М.,1946,с.161-172. См. также [148, С.388-400].
280. Sur les conditions pour qu'un nombre s'exprime au moyen d'equations transcendantes d'un type general // Comptes rendus de 1'Academie des Sciences de l'URSS, I946, v.52, № .6, p. 483-486.

1947

281. Теорема Эйзенштейна для функций от многих переменных // Конференция научных работников Дона и Северного Кавказа. Тезисы докладов по

математике, физике, прикладной механике, астрономии, органической и физической химии, неорганической и аналитической химии, геологии и петрографии, почвоведению и географии. Ростов н/Д, 1947, С.3-6.

282. Трехмерный и четырехмерный аналогоны теоремы Паскаля // Конференция научных работников Дона и Северного Кавказа. Тезисы докладов по математике, физике, прикладной механике, астрономии, органической и физической химии, неорганической и аналитической химии, геологии и петрографии, почвоведению и географии. Ростов н/Д, 1947, С.7.

1948

283. История и методика математического символа // Математика в школе, 1948, № 1, С. 24-28.
284. Перевод и комментарии // Евклид. Начала Евклида. Пер.с греческого и комментарии Д.Д. Мордухая-Болтовского при ред. участии М.Я.Выгодского и И.Н.Веселовского. М.-Л.: Гос.изд-во техн.-теорет. лит-ры,1948, т.1, кн.1-6, 1948, 447 с. с черт. Коммент. с.219-446.
285. Поризмы и данные // Труды совещания по истории естествознания 24-26 декабря 1946 г. Под ред. Х.С. Коштоянца. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948, С.161-172.
286. Об аспирантуре в педагогических институтах // Народное образование,1948, № 4, С.39-43.

1949

287. Косые проекции в четырехмерном эвклидовом пространстве и их приложение к выводу стереометрических теорем // Научная конференция, посвященная 80-летию университета. Тезисы докладов, вып.2. Ростов н/Д, 1949, С.87.
288. Кривые Бертрана в пространстве Лобачевского // Доклады Академии наук СССР, 1949, т.69, № 6, С.729-730.
289. О гипертрансцендентных функциях и гипертрансцендентных числах // Доклады Академии наук СССР, 1949, т.64, № 1, С.21-24.
290. О дугах алгебраических кривых, алгебраически связанных // Доклады Академии наук СССР, 1949, т.68, № 6, С.993-995..
291. О случаях центрального движения, разрешимых в элементарных трансцендентных и в эллиптических интегралах // Доклады Акад. наук УССР, 1949, № 3, С.3-8.
292. О специфических уравнениях кривых // Ученые записки Ростовского пед. ин-та, 1949, вып.1, стр.5-14.
293. Перевод и комментарии // Евклид. Начала Евклида. Пер. с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И.Н. Веселовского. М.-Л.: Гостехиздат, 1949, т.2 , кн. 7-10, 1949, 511 с. с черт. Комментарии стр 255-510.

294.Принцип достаточного основания в механике и в геометрии // Научная конференция, посвященная 80-летию Ростовского университета. Тезисы докладов, вып.2. Ростов н/Д, 1949, С.86.

1950

295.Косые проекции в четырехмерном эвклидовом пространстве и приложение их к выводу стереометрических задач // Ученые записки Пятигорского пед.ин-та, 1950, т.7, С.25-31.

296.Перевод и комментарии // Евклид. Начала Евклида. Пер.с греческого и комментарии Д.Д. Мордухая-Болтовского при ред. участии М.Я.Выгодского и И.Н.Веселовского. 2-е издание, М.-Л.: Гос.изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1950, т.1, кн.1-6, 1948, 447 с. с черт.

297.Перевод и комментарии // Евклид. Начала Евклида. Пер. с греч. коммент. Д.Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И.Н.Веселовского. М..-Л.: Гос.изд.техн.-теорет. лит-ры, 1950, т.3, кн.11-15, 331 с. с черт. Комментарии с.161-330.

298.Принцип непрерывности и его методическое значение //Ученые записки Пятигорского пед. ин-та, 1950, т.7, С.3-12.

299.О псевдоцикле на плоскости Лобачевского // Ученые записки Пятигорского пед.ин-та, 1950, т.7, С.13-24.

19 51

300.О кривизне плоских кривых в пространстве Лобачевского // Наукові записки Київського Державного ун-та, 1951, т.10, в.1. Математичний збірник, № 5, С.43-52.

301.Об одной арифметической задаче, относящейся к абелевым интегралам // Ученые записки Ростовского ун-та, 1951, т.14. Труды физико-математического факультета, вып.1, С.31-39.

302.Об условиях рациональности в данной области чисел, выраженных рядами // Ученые записки Ростовского ун-та, 1951, т.14. Труды физико-математического факультета, вып.1, С.41-47.

303.Параллельность и перпендикулярность прямых плоскостей и гиперплоскостей в трехмерном и четырехмерном пространствах Лобачевского // Успехи математических наук, 1951, т.6, вып.4, С.176-183.

304.Теорема Понслэ на плоскости Лобачевского и эллиптические интегралы // Доклады Академии наук СССР, 1951, т.77, № 6, С.961-964.

1952

305.Из прошлого аналитической геометрии // Труды института истории естествознания Академии наук СССР, 1952, т.4, С.217-235. См. также [148, С.366-387].

306.О кривизне пространственных кривых в пространстве Лобачевского // Математический сборник, 1952, т.30, вып.3, С.483-508.

Посмертные издания

1953

307. Трехмерный и четырехмерный аналогон теоремы Паскаля // Успехи математических наук, 1953, т.8, вып.2, С.135-138.

1954

308. Геодезические линии эллипсоида в неевклидовой пространстве // Доклады Академии наук СССР, 1954, т.94, № 6, С.991-993.
309. О дуге кривой второго порядка на плоскости Лобачевского // Доклады Академии наук СССР, 1954, т.95, № 3, С.449-450.

1955

310. Начертательная геометрия в пространстве Лобачевского // Методы начертательной геометрии и ее приложения. М.: Гостех-издат, 1955, С.305-310.

1957

311. Пример псевдоэллиптического интеграла // Ученые записки Ростовского пед. ин-та, 1957, вып.4, С.31-33.
312. Стереометрические обобщения теоремы Фаньяно // Ученые записки Ростовского пед. ин-та, 1957, вып.4, С.25-30.

1971

313. Средние века // La Renaissance, №233. С.57-71 См. также [148, С.432-444].

1998

314. Проблема смерти // Философия. Психология. Математика. М.: Серебряные нити, 1998. С. 401-431.

2002

315. Психология и метафизика сновидений // Гуманитарные и социально-экономические науки, №1-3.

Приложение 3. Содержание архивного фонда Д.Д. Мордухай-Болтовского (ПФА РАН ф.821, оп.1)

№	год	название	вид	объем
		1. МЕТОДИКА		
1	1947	Установка понятия в тригонометрических величинах	статья, НАМ	6
2	1947	Методика формальных операций при решении уравнений первой степени	статья, НАМ	6
3	1947	Неразрешимые задачи в науке и в школе	статья, НАМ	6
4	1947	Решение треугольников без тригонометрическо-логарифмических таблиц	статья, НАМ	7
5	1947	О разложении на множители	статья, НАМ	8
6	1947	Исторический материал при преподавании математики в средней школе	статья, АМ	5
7	1947	Геометрические построения в школе	статья, АМ	12
8	1947	Геометрические модели в средней школе	статья, АМ	9
9	1947	Логика построения математической школьной дисциплины	статья, НАМ	6
10	б/д	Исчисление причин и мотивов	статья, НАМ	9
11	б/д	Мнение о программах пединститутов (без конца)	статья, НАМ	3
12	б/д	Математическая мнемоника	статья, НАМ	9
13	б/д	Психофизический закон и приложение его к педагогике	статья, НАМ	6
14	б/д	Анализ и синтез в методике математике	статья, НАМ	7
15	б/д	Эволюция русской математической терминологии	статья, НАМ	10+9
16	б/д	Прошлое, настоящее и будущее методики математики	статья, НАМ	6
		2. ЛОГИКА И АКСИОМАТИКА		
17	1948	"Металогика". Часть 1. Металогика гиперпредложений	статья, АМ	8
18	б/д	Математическая аксиоматика и Гегель	статья, НАМ	18
19	б/д	Из истории трех основных законов логики	статья, НАМ	23
20	б/д	Принцип достаточного основания	статья, НАМ	10
21	б/д	Метаалгебра и металогика	статья, НАМ	51
22	б/д	Логика и металогика	статья, НАМ	42
23	б/д	Общие схемы аксиоматического исследования	статья, НАМ	5

3. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ				
24	1939	"Эвклид и учебник". Перевод "Начал" Евклида с комментариями	НАМ	84
25	1947	Основные понятия механики в схоластике	статья, НАМ	9
26	1948	Из истории дробей	статья, НАМ	7
27	б/д	История логарифма отрицательного числа.	НАМ	25
28	б/д	Реализм и номинализм в схоластике и математике	статья, НАМ	43
29	б/д	Угол касания.	статья, НАМ	43
30	б/д	История касательной	статья, НАМ	25
31	б/д	Очерки из истории обыкновенных дифференциальных уравнений	статья, НАМ	11
32	б/д	Античные геометрические проблемы	статья, НАМ	14
33	б/д	Схоластика и математика	статья, НАМ	16
34	б/д	Аристотель и математика	статья, НАМ	24
35	б/д	Из истории континуума	статья, НАМ	18
36	1929	Основания геометрии в 16в.	статья, НАМ	24
37	б/д	Кардинальные и ординальные числа в науке и в методике	статья, НАМ	10
38	б/д	Происхождение иррационального числа	статья, НАМ	35
39	б/д	Эволюция понятия функции	статья, НАМ	33
40	б/д	Комментарий - пять основных этапов развития анализа бесконечно малых	статья, НАМ	2
41	б/д	Комментарий - из истории Эйлеровых и Лежандровых функций	статья, НАМ	2
42	б/д	Комментарий - из истории объемов и поверхностей	статья, НАМ	2
4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ				
43	б/д	Кривые и поверхности в биологии	статья, НАМ	9
44	б/д	О движении водных организмов	статья, НАМ	17
45	б/д	Геометрия и механика водорослей	статья, НАМ	6
46	б/д	Деление яйца и планиметрические конфигурации	статья, НАМ	8
47	б/д	Проблемы о сферах и кругах в биологии	статья, НАМ	2
48	б/д	Органические формы в четырехмерном пространстве	статья, НАМ	12

49	б/д	Биологическая аксиоматика	статья, НАМ	11
50	б/д	Некоторые механические задачи, относящиеся к скелетам радиолярий	статья, НАМ	5
51	б/д	Вариационные задачи в биологии	статья, НАМ	8
5. НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ И МЕХАНИКА				
52	1946	Теория поверхностей в пространстве Лобачевского	статья, НАМ	28
53	1946	Некоторые теоремы об алгебраических кривых на плоскости Лобачевского	статья, НАМ	15
54	1947	О псевдоцикле на плоскости Лобачевского	статья, НАМ	5
55	1948	О круговых сечениях и прямолинейно-образующих алгебраических поверхностей в эвклидовом и неевклидовом пространствах и их аналогонах в четырехмерном пространстве	статья, НАМ	5
56	1949	О некоторых свойствах асимптот алгебраических кривых на плоскости Лобачевского.	статья, НАМ	2
57	1950	О луночках Гиппократа на плоскости Лобачевского.	статья, НАМ	3
58	1950	Геометрография в трехмерном и четырёхмерном эвклидовом и неевклидовом пространстве.	статья, НАМ	3
59	б/д	О некоторых теоремах, относящихся к треугольнику на плоскости Лобачевского	статья, НАМ	16
60	б/д	Начертательная геометрия в пространстве Лобачевского	статья, НАМ	6
61	б/д	Кривые третьего порядка плоскости Лобачевского	статья, НАМ	3
62	б/д	О некоторых формулах геометрии Лобачевкого, выводимых из геометрических тождеств	статья, НАМ	6
63	б/д	Соотношение между диагоналями и сторонами четырёх угольника на плоскости Лобачевского	статья, НАМ	3
64	б/д	Об углах и полосах и их стереометрических аналогонах в пространстве Лобачевского	статья, НАМ	3
65	б/д	О равновесии гибкой и нерастяжимой нити на плоскости Лобачевского	статья, НАМ	9
66	б/д	О стационарных точках кривых второго порядка на плоскости Лобачевского	статья, НАМ	
67	б/д	О дуге кривой 2-го порядка на плоскости Лобачевского	статья, НАМ	4 см №147
68	б/д	Правильные тела в не-Евклидовом пространстве	статья, НАМ	7
69	б/д	О правильных многогранниках и правильных гипергранниках в трёхмерном и четырёхмерном неевклидовых пространствах	статья, НАМ	7
70	б/д	Заметка об уравнениях движения материальной точки в неевклидовом пространстве	статья, НАМ	2
71	б/д	Некоторые кинематические теоремы в четырёхмерном как Евклидовом, так и неевклидовом пространстве	статья, НАМ	4

72	б/д	Об аналогонах теоремы Пифагора на не-евклидовой плоскости	статья, НАМ	4
73	б/д	Звёздчатые многогранники в неевклидовом пространстве	статья, НАМ	4
74	б/д	Геодезические линии эллипсоида в неевклидовом пространстве	статья, НАМ	4 см №148
6. МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И МЕХАНИКА				
75	1950	Об аналогах в n-мерном евклидовом пространстве теоремы Дезарга	статья, НАМ	3
76	б/д	Аксонометрия четырёхмерного пространства	статья, НАМ	6
77	б/д	Некоторые теоремы из теории трансверсалей трёхмерного и четырёхмерного пространства	статья, НАМ	8
78	б/д	Кривизна кривых в четырёхмерном евклидовом пространстве	статья, НАМ	7
79	б/д	Динамика системы точек при двухмерном времени	статья, НАМ	9
80	б/д	Косые проекции в четырёхмерном эвклидовом пространстве и приложение их к выводу стереометрических задач	статья, НАМ	4
81	б/д	О четырёхмерном аналогоне многогранника Вейля	заметка, НАМ	2
82	б/д	Деление гиперпространства гиперплоскостями	статья, НАМ	7
83	б/д	Об одевании гиперплоскостей в четырёхмерном пространстве	статья, НАМ	6
84	б/д	О некоторых свойствах гипергранников	заметка, НАМ	3
85	б/д	О шаровых сечениях и плоскостных, образующих гиперповерхностей второго порядка	заметка, НАМ	
86	б/д	О шаровых сечениях гиперповерхностей второго порядка	заметка, НАМ	2
87	б/д	Заметка о гипергранниках	статья, НАМ	4
88	б/д	О сферах и гиперсферах, объемлющих замкнутые многообразия пространства	статья, НАМ	3
89	б/д	Комбинированная задача, относящаяся к гиперпространству	статья, НАМ	1
7. АНАЛИЗ И ДРУГИЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ				
90	1947	Об особенных точках трансцендентных кривых первого класса	статья, НАМ	10
91	1948	Некоторые теоремы о диаметральных свойствах алгебраических кривых	статья, НАМ	4
92	1948	О гипертрансцендентности функций определяемых степенными разложениями	статья, НАМ	6
93	1948	О признаках выражаемости чисел через трансцендентные построения определенных классов	статья, АМ	2
94	1949	Основные свойства асимптот алгебраических пространственных кривых	заметка, АМ	1
95	1949	О периодах мероморфной функции от нескольких переменных	статья, АМ	4

96	1949	Об аналитических и конструктивных свойствах функции в связи с арифметическими свойствами коэффициентов их степенных разложений	статья, АМ	29
97	1950	О стереометрических аналогонах теоремы Фаньяно	статья, АМ	4
98	1950	О некоторых свойствах пентаэдроида	статья, АМ	4
99	б/д	Об интегрировании в конечном виде эллиптических функций	статья, НАМ	7
100	б/д	Заметка о теореме Шаля	НАМ	2
101	б/д	Аналогоны тождества Шаля	заметка, НАМ	4
102	б/д	Об обобщениях теоремы Сколема, относящейся к алгеброидам.	заметка, НАМ	2
103	б/д	Актуальная бесконечность и ряды	статья, НАМ	9
104	б/д	Приложение теоремы Абеля к исследованию зрительных свойств алгебраических кривых	статья, НАМ	6
105	б/д	Заметка о Ньютоновском диаметре алгебраической кривой	статья, НАМ	2
106	б/д	О трехмерных аналогонах теорем Брианшона и Паскаля, относящихся к октаэдру и гексаэдру и соответственные аналогоны в четырехмерном	заметка, НАМ	2
107	б/д	Обратные теоремы о диаметральных свойствах алгебраических кривых и поверхностей	статья, НАМ	4
108	б/д	Некоторые теоремы о диаметральных плоскостях алгебраических поверхностей	статья, НАМ	7
109	б/д	О некоторых арифметических задачах, относящихся к тригонометрическим и эллиптическим функциям	заметка, НАМ	3
110	б/д	Заметка о полярных и диаметральных свойствах алгебраических поверхностей	НАМ	2
111	б/д	Об иррациональности значений некоторых функций при рациональных значениях переменного	статья, НАМ	5
112	б/д	О невозможности деления дуги большого круга на сфере с помощью круговой линейки	заметка, НАМ	2
113	б/д	Стереометрический аналогон второй книги Начал Евклида	статья, НАМ	9
114	б/д	О методе Эрмита доказательства иррациональности и	заметка, НАМ	2
8. УЧЕБНИКИ И КУРСЫ ЛЕКЦИЙ				
115	1938	Лекции по специальному курсу элементарной математики, прочитанные в Ростовском пединституте в 1937-1938 уч.году. Часть 1. Евклид и Лобачевский	литография	31
116	1938	Лекции по специальному курсу элементарной математики, прочитанные в Ростовском пединституте в 1937-1938 уч.году. Часть 2. Измерение в геометрии и инверсия	литография	56
117	1939	Лекции по эллиптическим функциям. Часть1-3.	литография	104
118	1939	Конспект лекции по основаниям геометрии, прочитанных в 1938-39 уч.году в Ростовском пединституте	литография	69
9. ОТЗЫВЫ О ТРУДАХ ДРУГИХ ЛИЦ				
119	1948	Отзыв о работе Н.А.Колмогорова "Геометрия тетраэдра евклидова и неевклидова пространства"	АМ	3

120	1948	Отзыв о диссертации на степень кандидата физ.-мат. наук А.Г. Квасова	АМ	4
121	1949	Отзыв о работе С.П. Волкова "Параллельные проекции и родственные фигуры"	АМ	3
122	1950	Отзыв о диссертации аспиранта А.Т. Подколзина "Рост целой функции в зависимости от ее арифметических свойств"	АМ	6
123	б/д	О проекте биографий математиков. Записка по обсуждению рукописи для БСЭ	НАМ	4
			5 марта 1953 г.	
ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОСТУПЛЕНИЕ 22 АПРЕЛЯ 1954 ГОДА				
1. МЕТОДИКА				
124	1947	Дидактика опроса ученика по математике	статья, НАМ	11
125	б/д	Эвристическая метода при преподавании математики в школе	статья, НАМ	4
126	б/д	Методика дифференциальных уравнений первого порядка	статья, НАМ	18
127	б/д	Научная строгость и методика математики	статья, НАМ	10
2. ПСИХОЛОГИЯ				
128	б/д	Психология детского рисунка и школьного чертежа	статья, НАМ	12
129	б/д	Психология математического мышления. Монография	НАМ	198
3.ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ				
130	б/д	Введение к сборнику по истории математики	НАМ	5
131	б/д	Сущность и происхождение аналитической геометрии	НАМ	104
132	б/д	Основания геометрии в 16 веке	НАМ	117
133	б/д	Геометрия без аксиом	НАМ	74
134	б/д	Закон гетерогонии целей в истории математики	НАМ	119
135	б/д	Происхождение понятия пространства	НАМ	195
136	б/д	Философия математики Гегеля	НАМ	40
4.РАЗНОЕ				
137	б/д	Кристаллические формы в четырехмерном пространстве	НАМ	52
138	б/д	О признаках выражаемости чисел через трансцендентные построения различных классов	НАМ	109
139	б/д	О космогонии Аррениуса	статья, НАМ	15
140	б/д	Об образовании белорусских фамилий	статья, НАМ	27
141	б/д	О гипертрансцедентных функциях гипертрансцедентных чисел	статья, НАМ	5
142	1945	Об условиях рациональности в данной области чисел, выраженных рядами	статья, НАМ	11
143	б/д	Параллельность и перпендикулярность прямых плоскостей и гиперплоскостей в трехмерном и четырехмерном пространствах Лобачевского.	статья,АМ	17+4

144	б/д	Из прошлого аналитической геометрии	статья, АМ	20
ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОСТУПЛЕНИЕ 25 АПРЕЛЯ 1955 ГОДА				
145	б/д	Интегрирование функций в различные эпохи	статья, НАМ	27
146	б/д	Соотношение между хордами окружностей на плоскости Лобачевского	заметка, НАМ	3
147	б/д	Дуги кривых второго порядка на плоскости Лобачевского	заметка, оригинал	3
148	б/д	Геодезические линии эллипсоида в неевклидовом пространстве	заметка, оригинал	2
149	б/д	Некоторые кинематические теоремы на плоскости Лобачевского	заметка, оригинал	6
150	б/д	О парах и сверхпарах сил на плоскости Лобачевского	статья, оригинал	4
151	б/д	О неразрешимости некоторых диофантовых уравнений в целых функциях + рецензия	статья, НАМ	6
152	б/д	О приведении интегралов, зависящих от биномов, к эллиптическим	статья, НАМ	4
153	б/д	О периодах мероморфной функции от двух независимых переменных	статья, НАМ	6
154	б/д	Основное свойство алгеброида, принимающего целые алгебраические значения при целых алгебраических значениях переменного	заметка, НАМ	3
155	б/д	Теорема Эйнзейштейна для функции от многих переменных	заметка, НАМ	7
156	1929	О великорусском элементе в литовско-русском боярстве 16 века	исследование, НАМ	60
157	б/д	Истина и реальность	статья, НАМ	18
ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОСТУПЛЕНИЕ 1992 ГОДА				
158	1951	Средние века	статья, НАМ	15
159	1952	Наша сокращенная родословная. Результаты общих генеалогических исследований. Схемы родословной Болтовских.	очерк, схемы	10
160	1898	Дипломы первой степени, выданные СПБГУ и удостоверяющие успешное окончание семестра и присвоение ученой степени магистра чистой математики	подлинники	4
161	1898	Свидетельство о явке к исполнению воинской повинности	подлинники	1
162	1908-1950	Автобиографии, личные листки по учету кадров, характеристика, выданная РГУ	АМ	55
163	1935	Диплом доктора наук, аттестат профессора, выписка из протокола заседания ВАК о присуждении ученой степени д.ф.-м.н. без защиты диссертации, извещение о произведении в ранг статского советника	подлинники	6
164	1914,1946,1947	Ходатайство Императорского Варшавского университета о возведении в звание ординарного профессора, Ивановского государственного пединститута о представлении в член.кор. АПН, к правительственной награде в связи с 70-летием со дня рождения и о	подлинники	12

		присвоении ему звания заслуженного деятеля науки РСФСР, переписка Института с Президиумом АПН и Минвузом		
165	1925-1951	Списки научных работ	АМ	29
166	1931-1950	Документы по хозяйственно-бытовым вопросам: справки о пенсионном обеспечении, о прописке и домовладении, о состоянии здоровья	подлинники	14
167	1886-1940	Портреты Д.Д.Мордухай-Болтовского. 3 фото:6х8,5 - 8х12	подлинники	3
168	1951	Мордухай-Болтовской Д.Д. с Ганжулевич Л.Ф., женой 1 фото 8,5х12	подлинники	1
169	1947	Мордухай-Болтовской Д.Д., на кафедре математики Пятигорского ГПИ с неустановленными лицами	подлинники	1
170	1900-1920	Мордухай-Болтовской Дмитрий Петрович, инженер путей сообщения, помещик Тверской губернии, отец, в имении Тетьково и Власова Мария Ивановна, мать. 2 фото на паспарту 6х8, 9х12	подлинники	2
171	1954-1955	Мордухай-Болтовской Филарет Дмитриевич, сын, на станции "Борок", 2 фото 8,5х11-12,5х17	подлинники	2
172	1880	Вид имения Тетьково тверской губернии 1 фото 10х15	подлинники	1
173	б/д	Герб Пржонса - родовой герб Мордухай-Болтовских, 1фото, 3х4	фотокопия	1
174	1909	Отзыв о работах Мордухай-Болтовского	НАМ	6
175	1909-1951	Документы о деятельности магистра, экстраординарного и ординарного профессора чистой математики Императорского Варшавского университета, ВПИ имени императора Николая II, Донского политехнического института, С-К индустриально-педагогического института; заведующего кафедрами Пятигорского и Ивановского ГПИ; выписка из приказа о зачислении на должность заведующего кафедрой, переписка о представлении к конкурсу, извещения об избрании профессором и др.	подлинники	31
176	17-18вв	Документы предков Д.Д.Мордухай-Болтовского 17-18 веков: купчая крепость на землю, духовное завещание, заставное право, дело о тяжбе с монахами Тупичевского монастыря на право владения селами Бабенки и Малашковичи Могилевской губернии и др.	подлинники	78
177	1882	Список членов Плюсского общества охоты в 1882 году, с упоминанием Д.П.-отца и Сергея Петровича - дяди	типография	1
178	1927	Документы М-Б.Ф.Д., сына: свидетельство об окончании средней школы, диплом об окончании МТИ, дипломы кандидата и доктора наук, аттестаты доцента и профессора.	подлинники	13
179	1928	М-Б.Д.Д. М-Б.Ф.Д., переписка	подлинники	49
180	1950	М-Б.Ф.Д. Реуту, редактору отдела науки газеты "Правда".Из Пятигорска в Москву	рукопись	1

181	1957	М-Б.Ф.Д. Введенскому Б.А., акад. гл.ред.БСЭ из Риги в Москву	рукопись	2
182	1950	Любищев А.А. "Мысли о многом" дневник с дарственной надписью Д.Д.М-Б.	АМ	130
ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОСТУПЛЕНИЕ 2001 ГОДА				
183	1949	"Психология и метафизика сновидений". Ксерокопия с рукописи, преподнесенной в дар Ростовскому педагогическому университету Болтовской Людмилой Филаретовной, внучкой Д.Д. Мордухай-Болтовского	рукопись	120
184	1952	Каган Вениамин Федорович, математик. Письмо его к Филарету Дмитриевичу Мордухай-Болтовскому. Ксерокопия	рукопись	1
185	1952	Каган Вениамин Федорович, математик. Письмо его к Дмитрию Дмитриевичу Мордухай-Болтовскому. Ксерокопия	рукопись	2
186	1952	Любищев Александр Александрович, энтомолог. Письмо его к Филарету Дмитриевичу Мордухай-Болтовскому	АМ	1
187	б/д	Мордухай-Болтовской Д.Д. во время учебы в 1 классической гимназии г.Петербурга; с Ганжулевич Л.Ф., женой; рабочий кабинет Д.Д. Мордухай-Болтовского в Ростове-на-Дону и т.д. Ксерокопии с 10 фотографий		3
188	1952	Посмертные материалы: некрологи, соболезнования в связи со смертью Д.Д. Мордухай-Болтовского от друзей и знакомых. Ксерокопии с телеграмм, экз. газеты "Пятигорская правда" от 8 февраля 1952 г.		5
ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОСТУПЛЕНИЕ 2003 ГОДА				
189	б/д	"Les courles ge odesigbes de'l ellipsoide dans l'eshase non Euclidien" На фр. Яз.	рукопись	2
190	1949	Тезисы докладов проф. Д.Д. Мордухай-Болтовского: "Прошлое, настоящее и будущее методики математики", "Дидактика опроса ученика по математике" Ксерокопии	рукопись	4
191	1917-1918	"К открытию физико-математического кружка в Ростове" и др.Статьи. Принтерный вывод текстов, опубликованных в газетах: "Ростовская речь", "Приазовский край".		56
192	1946-1951	Любищев Александр Александрович, энтомолог. Письма его к Дмитрию Дмитриевичу Мордухай-Болтовскому из Фрунзе. Принтерный вывод		36
193	2001	Эмилия Д. Икранникова, жена Ф.Д. Мордухай-Болтовского. Письмо её к В.Е. Пыркову, аспиранту Ростовского государственного педагогического университета. Ксерокопия		1
194	2001	Удостоверение, выданное В.Е. Пыркову о перерегистрации захоронения Д.Д. Мордухай-Болтовского на Братском кладбище г.Ростова-на-Дону. Ксерокопия		1
195	б/д	Отзыв о статье Д.Д. Мордухай-Болтовского "Трехмерный и четырехмерный аналогон теоремы Паскаля"	НАМ	1

Приложение 4. Программа и дидактические материалы к занятиям элективного курса «Двойственные преобразования».

Занятие 1 (вводное)

Тема: *«Презентация элективного курса «Двойственные преобразования».*

Цель: *Вызвать заинтересованность элективным курсом «Двойственные преобразования» у учителей и учащихся; способствовать проявлению интереса к математике, её законам и принципам.*

Задачи:

- *способствовать формированию представления о математике, как форме отражения устройства бытия;*
- *показать общность и универсальность математических методов;*
- *проиллюстрировать примерами проявление двойственности в окружающем мире и в математике;*
- *воспитывать отношение к математике как общекультурной ценности посредством эмоциональных воздействий;*
- *наметить план занятий и краткое содержание курса.*

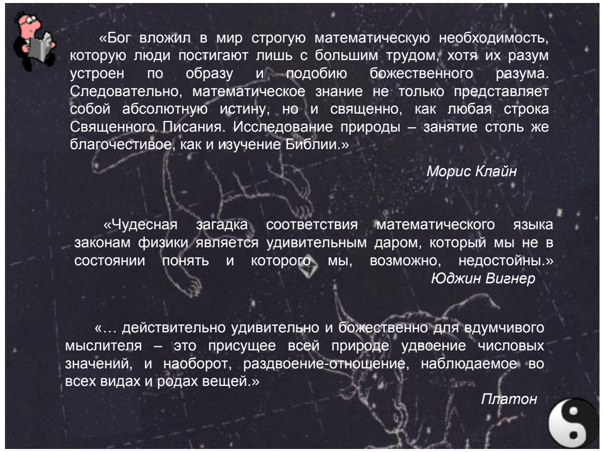
План.

1. Двойственность – фундаментальный принцип строения бытия.
2. Формулировка принципа двойственности.
3. Примеры проявления принципа двойственности в различных науках.
4. Проявление принципа двойственности в математике.
5. Обзор содержания курса «Двойственные преобразования».
6. Рефлексия.

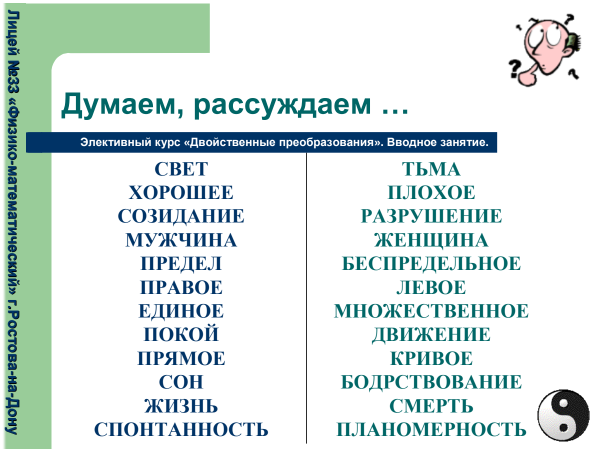
Оборудование: мультимедийный компьютер с проектором, программа-презентация, печатные основы занятия, таблички на столы для четырех групп.

Организация пространства и подготовка к проведению занятия: Творческая работа учащихся спланирована для четырех групп, что требует соответствующей расстановки мебели. На столах для каждой группы (6-7 человек) имеются печатные основы соответствующего варианта, ручки и табличка с указанием номера группы. Во время занятия звучит легкая спокойная музыка.

ТЕХНОЛОГИЯ	ХОД ЗАНЯТИЯ	СЛАЙД ПРЕЗЕНТАЦИИ
Вступительное слово учителя. Создание эмоционального фона презентации курса «Двойственные преобразования»	На титульном слайде изображен древнекитайский символ гармонии *Тайцзи-ту*. Этим символом выражалась сущность бытия, существо всего живого, состоящее в неразрывном единстве и симметричном дополнении двух противоположных начал мироздания *Инь* и *Янъ*. В соединении и взаимодействии этих двух мировых начал – источник жизни. Янъ для древних китайцев означал одновременно Солнце, свет, добро, красоту, правду, действие, мужское начало; Инь – Землю, тьму, зло, безобразие, ложь, бездействие, женское начало. Маленькие круги противоположного цвета в символе Тайцзи напоминают о том, что даже в самом центре одного начала имеется элемент противоположного: даже добро содержит крупицу зла, а во всяком зле есть крупица добра; даже безобразие может быть в чем-то привлекательным, а всякая красота может иметь что-то отталкивающее; даже в истине содержится что-то от заблуждения; а во всяком заблуждении имеется элемент истины. Этот мудрый и красивый символ Тайцзи составленный из самых совершенных, как считали древние китайцы, линий – окружностей может стать и символом нашей сегодняшней встречи с вами, на которой мы поговорим о том, что же такое двойственность, и как она проявляется в окружающем нас мире и в гео-	

	метрии.	
Знакомство с культурно-историческими аналогами (высказывания мыслителей о математике, универсальности её методов, её красоте и таинственности).	Исконное значение слова «Математика» (с греч. – знание, наука) не утрачено и сегодня. Математика была и остаётся стержнем любой науки, царицей всех наук, символом мудрости и красоты.	
Проблемный вопрос	Чем вы можете объяснить такое представление древних о математике и её методах, как универсальных и совершенных? Познакомьтесь с высказываниями некоторых выдающихся мыслителей, дающих свой ответ на этот вопрос. «Создатель вложил в мир строгую математическую необходимость, которую люди постигают лишь с большим трудом, хотя их разум устроен по образу и подобию его разума. Следовательно, математическое знание не только представляет собой абсолютную истину, но и священно, как любая строка Священного Писания» *Морис Клайн* «Чудесная загадка соответствия математического языка законам физики является удивительным даром, который мы не в состоянии понять и которого мы, возможно, недостойны.» *Юджин Вигнер* «… действительно удивительно и божественно для вдумчивого мыслителя – это присущее всей природе удвоение числовых значений, и наоборот, раздвоение-отношение, наблюдаемое во всех видах и родах вещей.» *Платон* На слайде и в раздаточных материалах вам пред-	

Задание учащимся. Проблемная ситуация	лагается набор понятий, расположенных в два столбца. Попробуйте сами установить соответствие между двойственными объектами этих столбцов. Давайте обсудим, что у вас получилось.(После обсуждения сравнение с соответствием, появляющемся на слайде).
Творческое задание	Следующее задание немного сложнее предыдущего. Проявите творчество и сообразительность, записав в правом столбце понятие, которое, по вашему мнению, будет двойственным по отношению к понятию из левого столбца.
Обсуждение, уточнение представлений, сравнение собственного результата с культурно-историческими аналогами.	Давайте обсудим полученные результаты и сравним их с теми понятиями, которые понимались как двойственные к указанным в философии древних.
Обобщение и формулировка принципа.	Итак, мы уже убедились в наличии двойственности понятий и двойственности устройства бытия. Сформулируем теперь суть принципа двойственности, который будем использовать в дальнейшей работе. Суть принципа двойственности заключается в том, что из одного верного высказывания путем замены входящих в него понятий на так называемые двойственные понятия можно получить другое, также верное высказывание. Попробуем применить данный принцип и посмотреть, как он работает. вам предлагаются следующие высказывания: «В движенье – жизнь» «Днём властвует свет»



«Любовь созидает»

Используя составленный вами словарик двойственных понятий, сконструируйте высказывания двойственные данным. Оцените истинность исходных высказываний и полученных вами двойственных высказываний.

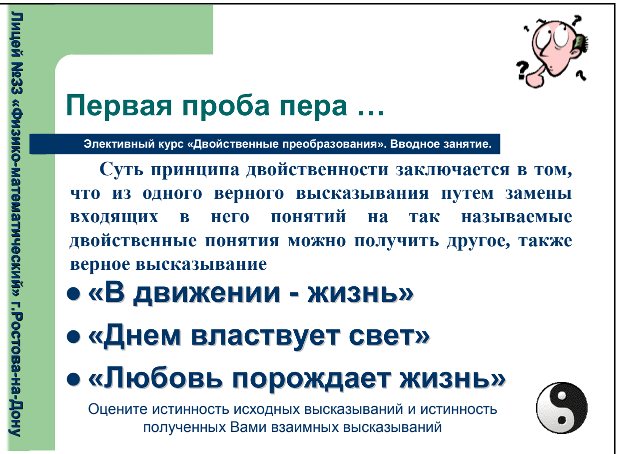
Слушаем группы, обсуждаем.

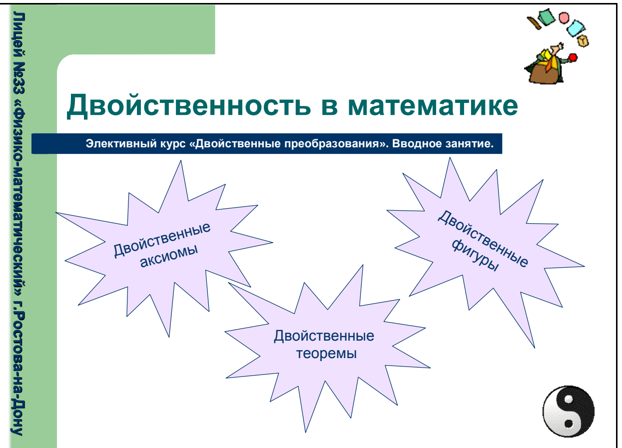
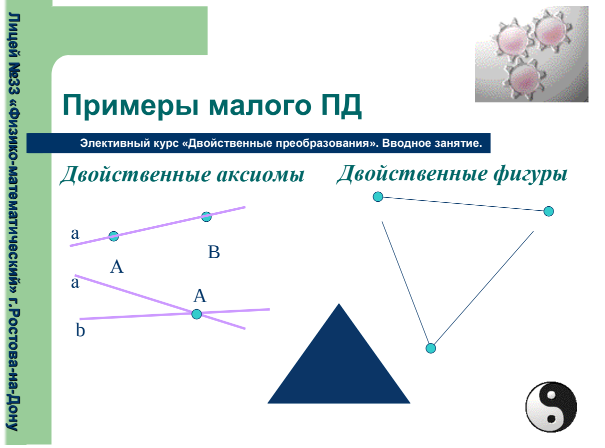
Итак, вы убедились в том, что двойственность имеет место в окружающей нас действительности и сформулированный выше закон двойственности верен. Естественно предположить, что двойственность будет проявляться и в науках, изучающих окружающий мир и устройство бытия. Это действительно так. Науке известны примеры проявления двойственности в физике, астрономии, химии, биологии, экономике и др.

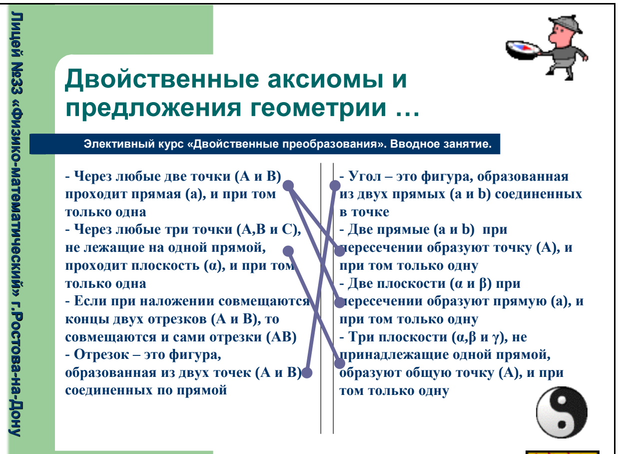
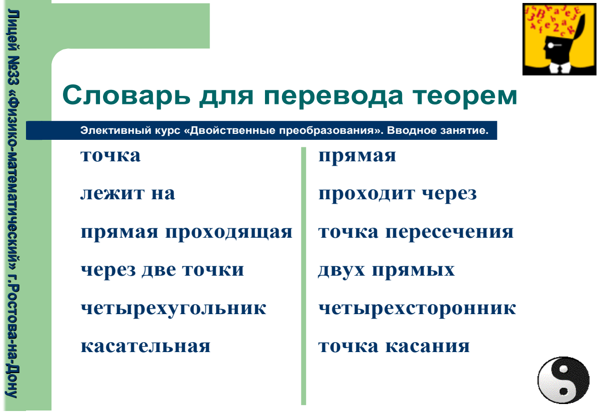
Математика также изучает законы природы и устройства мироздания, поэтому двойственность присутствует и в математике. Причем именно в математике, как в наиболее строгой и логической науке, двойственность впервые была явно выявлена (Об этой удивительной истории, которая по стечению обстоятельств связана с Россией, мы подробнее поговорим на следующих занятиях).

Известны примеры проявления двойственности в таких разделах математики как: геометрия, алгебра, номография, математическая логика, стохастика, линейное программирование и др.

На занятиях элективного курса вы будете знакомиться с примерами проявления принципа двойствен-



Задание группам	ности в геометрии. Если же вас заинтересуют другие разделы математики, то я готов помочь вам с самостоятельным ознакомлением с этим вопросом. Вернемся к геометрии. Уже в самом фундаменте этой науки, который составляет аксиоматический метод, содержатся двойственные объекты: двойственные аксиомы, двойственные фигуры и, как следствие, двойственные теоремы. Примером двойственных аксиом может быть: - *Две точки при соединении определяют единственную прямую;* -- *Две прямые при пересечении определяют единственную точку.* Двойственными неопределяемыми понятиями здесь являются точка и прямая (в проективной геометрии этот случай известен как ***малый принцип двойственности***). Примером двойственных фигур могут служить отрезок (как фигура состоящая из двух точек соединенных по прямой) и угол (как фигура состоящая из двух прямых соединенных в точке). Треугольник, как фигура составленная из трех отрезков и содержащая три угла, двойственен сам себе. На слайде и в опорных конспектах вам предлагаются два столбца, содержащие в себе некоторые аксиомы и предложения геометрии. Попробуйте самостоятельно установить соответствие, выявляющее двойственность этих высказываний. Слушаем группы. Обсуждаем. Сверяем с аналогом	 

Организация творческой работы	проявляющихся связей на слайде. Предложению «*Через любые две точки (А и В) проходит прямая (а), и при том только одна*» соответствуют два предложения: - *Две прямые (а и b) при пересечении образуют точку (А), и притом только одну;* - *Две плоскости (α и β) при пересечении образуют прямую (а), и притом только одну*. В первом случае двойственными объектами является уже знакомая Вам пара «точка – прямая». Во втором случае двойственными объектами являются «точка» и «плоскость», а «прямая» остается без изменений. (Такой случай известен в проективной геометрии как ***большой принцип двойственности***). Вы сейчас изучаете планиметрию, поэтому нам понадобится следующий словарик двойственных объектов, который с каждым занятием вы будете пополнять и который будете использовать для перевода геометрических предложений и конструирования из них новых предложений им двойственных. Заполните его в своих опорных конспектах. Итак, пришло время проявить свои творческие способности и самостоятельность. Сейчас каждая из групп получит задание: уже известное вам из курса геометрии утверждение. Ваша задача: сконструировать предложение, двойственное данному, оценить его истинность и определить, чем являются исходное и двойственное высказывания. **Задание 1 группе.** *В треугольнике с двумя равны-*	 

ми сторонами, равные стороны лежат против равных углов

Задание 2 группе. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны*

Задание 3 группе. *Если стороны одного треугольника a:b:c относятся также, как и стороны другого треугольника a1:b1:c1, то треугольники подобны*

Слушаем группы, обсуждаем. Сверяем результат обсуждения с проявляющейся информацией на слайде.

Общее задание группам. *Какое высказывание двойственно теореме о соотношении между сторонами и углами в треугольнике?*

Итак, сконструированные вами с помощью принципа двойственности предложения оказались вам уже известными из курса геометрии. Но с помощью принципа двойственности можно также

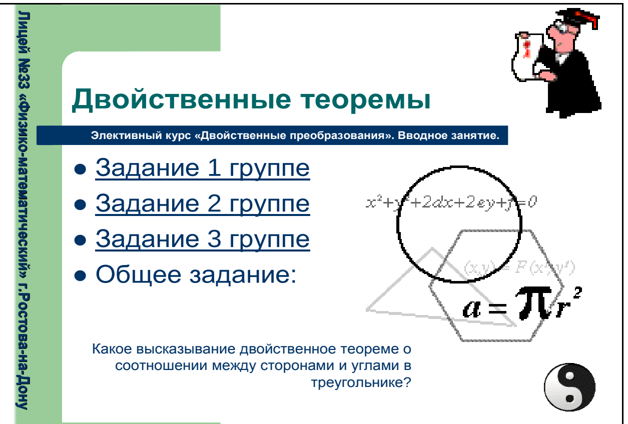
- открывать новые теоремы;

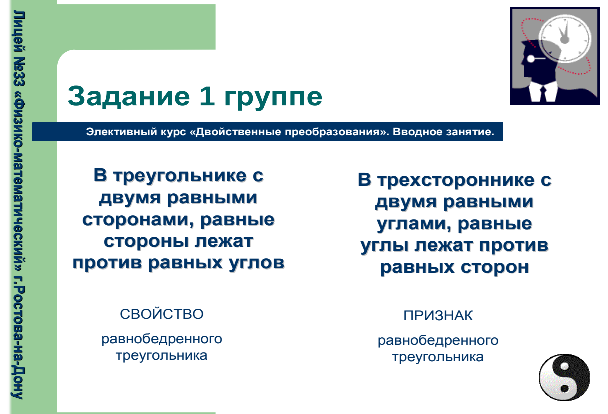
- использовать новые методы решения задач на построение;

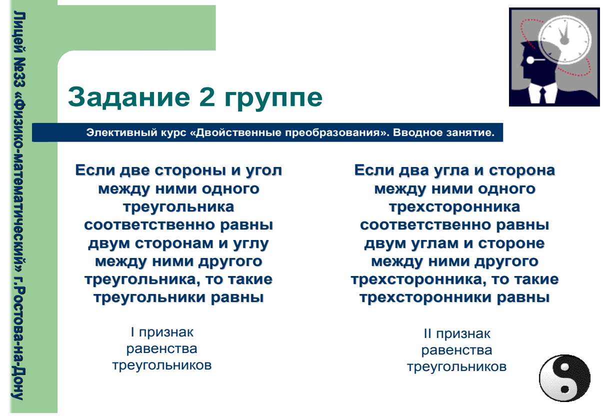
- конструировать и решать новые классы задач на использование двойственных элементов и меровых соотношений между ними;

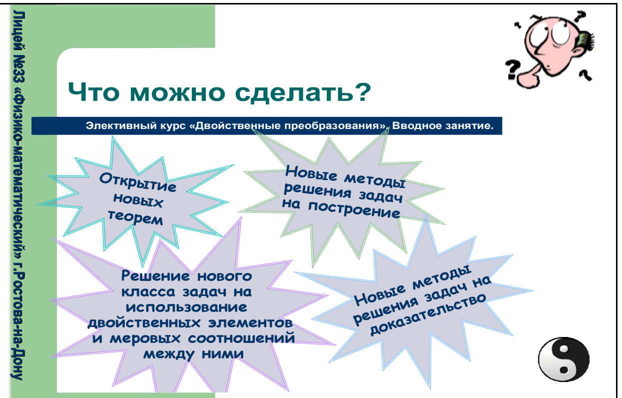
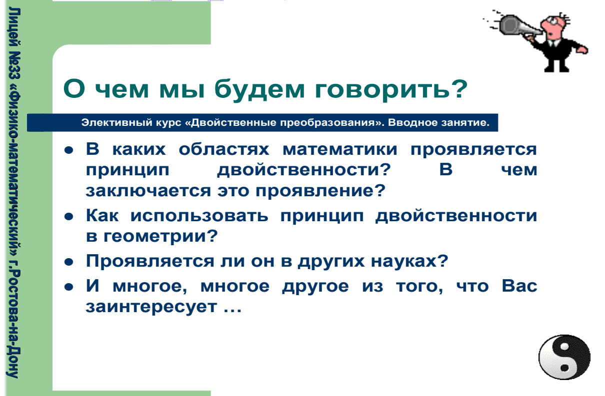
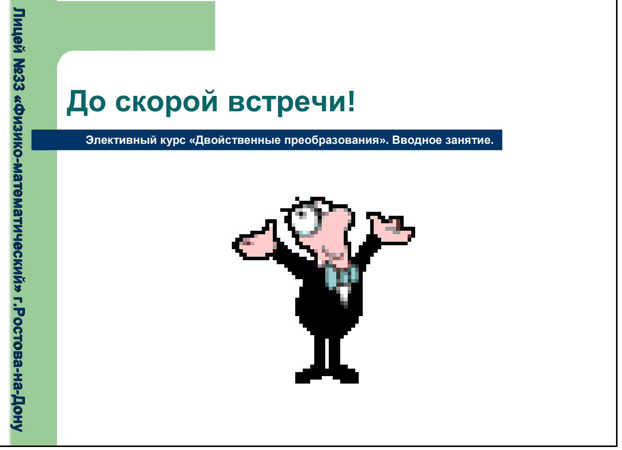
- применять метод двойственности для решения задач на доказательство, и др.

Обо всем этом вы узнаете на последующих занятиях элективного курса «Двойственные преобразова-







Рефлексия	ния». Кроме того, вы узнаете о том • В каких областях математики проявляется принцип двойственности? В чем заключается это проявление? • Как использовать принцип двойственности в геометрии? • Проявляется ли он в других науках? • И многое, многое другое из того, что Вас заинтересует … Сейчас, для решения организационных вопросов по комплектованию групп, мы предлагаем вам ответить на вопросы предложенные в опорных конспектах. Отметьте, пожалуйста, в какой степени вас заинтересовал данный элективный курс и собираетесь ли вы в дальнейшем посещать наши занятия? Запишите также вопросы, возникшие у вас в ходе занятия. О чем вы хотели бы узнать по этой теме и т.п. На этом мы заканчиваем презентацию элективного курса «Двойственные преобразования». Вы хорошо поработали. Спасибо вам и до скорой встречи!	  

II Раздел. Принцип двойственности в элементарной геометрии

<u>Занятие 2</u>

Тема: *«Принцип двойственности в геометрии. Необходимые математические сведения».*

Цель: *Обеспечить ознакомление учащихся с принципом двойственности, историей его открытия. Охарактеризовать его роль и значение в математике, известные области применения принципа двойственности. Способствовать формированию понятия малого и большого принципа двойственности в геометрии.*

План.

1. Определение принципа двойственности.
2. История открытия принципа двойственности.
3. Введение несобственных элементов.
4. Принцип двойственности на плоскости.
5. Принцип двойственности в пространстве.

Литература.

Боголюбов А.Н. Математики и механики. Киев, 1983. С.385.

Бородин А.И., Бугай А.С. Биографический словарь деятелей в области математики. Киев, 1979. С.403.

Волошинов А.В. Математика и искусство. М., 2000. С. 293.

Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М., 1979. С. 356.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. М., 1947.

Мантуров О.В. Толковый словарь математических терминов. М., 1970. С.95.

Математическая энциклопедия. Т.2. М., с. 31-32.

Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия (§21, §22). М., 1969.

Энциклопедия элементарной математики, том 4 (геометрия). М., 1970. С.407.

Индивидуальные задания учащимся

Разработать, подготовить и защитить исследовательские проекты по следующим темам:

- *Двойственность – математическая абстракция или реальная действительность?*
- *Двойственность в работах математиков античности, средневековья, нового времени.*
- *Двойственность в изречениях выдающихся мыслителей.*
- *Понселе, Жергон, Плюккер… Кто открыл принцип двойственности в геометрии?*
- *Двойственность в физике.*
- *Двойственность в химии.*
- *Двойственность в астрономии.*
- *Двойственность в биологии.*
- *Двойственность в экономике.*

- *Двойственность в задачах линейного программирования.*
- *Двойственность в номографии.*
- *Двойственность в математической логике.*
- *Двойственные фигуры и их свойства.*
- *Двойственные многогранники и их свойства.*

Проспект занятия

1. Суть принципа двойственности заключается в том, что **из** одного **верного высказывания путем замены** входящих в него **понятий на** так называемые **двойственные** понятия **можно получить** другое, также **верное высказывание.**

2. Этот, скорее философский принцип, сформулировал известный французский ученый Жан Виктор Понселе. Примечательно то, что этот закон – «закон двойственности», Понселе сформулировал в России. Во время войны 1822 года Ж.В.Понселе был молодым французским офицером. После поражения армии Наполеона Понселе оказался в плену в Саратове. Именно здесь он написал свой математический трактат «Исследование проективных свойств фигур», где впервые был сформулирован принцип двойственности. В этой, и в дальнейших своих работах он находил новые способы применения принципа двойственности, и с его легкой руки этот «закон двойственности» получил широкое распространение и признание математиков.

Принцип двойственности находит своё применение во многих областях высшей математики (теория множеств, математическая логика, проективная геометрия и др.).

3. Для того, чтобы иметь возможность полностью использовать принцип двойственности потребуется ввести несобственные элементы: бесконечно-удаленную точку и бесконечно-удалённую прямую.

Допустим, что параллельные прямые в бесконечности пересекаются, тогда: *бесконечно-удалённая точка*, это точка пересечения параллельных прямых. Аналогично предположив, параллельные плоскости будут пересекаться по бесконечно-удалённой прямой, т.е. *бесконечно-удалённая прямая*, это прямая пересечения параллельных плоскостей.

Плоскость, дополненную бесконечно-удалённой точкой, называют *проективной плоскостью*. Пространство, дополненное бесконечно-удалённой прямой, называют *проективным пространством*. Геометрию, изучающую проективную плоскость и проективное пространство, называют *проективной геометрией*. **Все** сформулированные **предложения** в **евклидовой геометрии верны** и **в проективной геометрии**, но добавляются еще новые теоремы.

В геометрии сформулировано два принципа двойственности: один для проективной плоскости – *малый принцип двойственности*, а другой, для проективного пространства – *большой принцип двойственности*.

4. *Малый принцип двойственности* гласит:

«Каждому предложению относительно элементов (точек и прямых) на плоскости соответствует второе, двойственное предложение, которое может быть получено из первого заменой в нем слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» словом «точка». Оба взаимодвойственных предложения справедливы, если доказано одно из них».

Или короче: «Если в одном предложении заменить слово «точка» на слово «прямая» и наоборот, то из верности одного из предложений будет следовать и верность другого предложения»

В качестве примера рассмотрим:

А. *Двойственные друг другу аксиомы*:

1. Две точки определяют одну прямую

1/. Две прямые определяют одну точку.

Б. *Двойственные друг другу фигуры:*

1. Отрезок – это фигура, состоящая из двух точек, соединенных по прямой.

1/. Угол – это фигура, состоящая из двух прямых, соединенных в точке.

2. Треугольник, как фигура образованная тремя точками и тремя прямыми является сам себе двойственным.

3. Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы равны.

3/. Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

И т.д.

! Найдите в учебнике геометрии двойственные друг другу определения фигур.

5. *Большой принцип двойственности* гласит:

«Каждому предложению относительно элементов (точек, прямых и плоскостей) пространства соответствует второе (двойственное) предложение, которое получается из первого предложения заменой в нём слова «точка» словом «плоскость» и слова «плоскость» словом «точка». При этом слово «прямая» не подвергается замене. Оба взаимодвойственных предложения справедливы, если доказано одно из них».

Или короче: «Если в одном предложении заменить слово «точка» на слово «плоскость» и наоборот, то из верности одного из предложений будет следовать и верность другого предложения».

В качестве примера рассмотрим:

А. *Двойственные друг другу аксиомы*:

1. Две различные точки (A и B) всегда принадлежат одной, и только одной прямой (a).

$1'$. Две различные плоскости (α и β) всегда принадлежат одной, и только одной прямой (a).

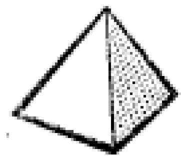
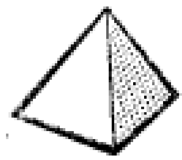
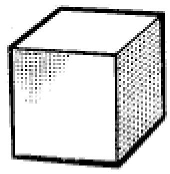
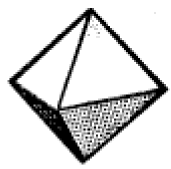
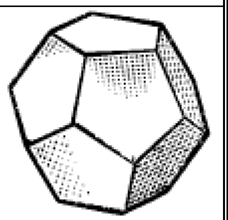
2. Точка (A) и не принадлежащая ей прямая (b) всегда принадлежат одной, и только одной плоскости (α)

$2'$. Плоскость (α) и не принадлежащая ей прямая (b) всегда принадлежит одной, и только одной точке (A).

3. Три различные точки (A, B и C), не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной, и только одной, плоскости (α)

$3'$. Три различные плоскости (α, β и γ), не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной, и только одной, точке (A).

Б. *Двойственные друг другу фигуры*:

Количество			Название	Рисунок	Количество			Название	Рисунок
вершин	граней	ребер			вершин	граней	ребер		
4	4	6	Тетраэдр		4	4	6	Тетраэдр	
8	6	12	Куб		6	8	12	Октаэдр	
?	?	?	Додекаэдр		?	?	?	?	?

! Определите, существует ли многогранник, двойственный додекаэдру и заполните имеющиеся в таблице пробелы.

III Раздел. Конструктивное определение двойственных преобразований

Занятие 3

Тема: *«Конструктивное определение двойственных элементов».*

Цель: *Способствовать уяснению и усвоению понятий «двойственное преобразование», «поляра», «полюс»; выработке навыков построения взаимных элементов. Ознакомить с понятиями: «угол между двумя точками», «расстояние между двумя прямыми», «параллельные точки», «ортогональные точки», «биссекториальная точка».*

План.

1. Построение поляры.
2. Построение полюса.
3. Двойственные фигуры несобственных элементов.
4. Конструктивное определение «угла между двумя точками».
5. Следствия из определения «угла между двумя точками»: параллельные, ортогональные и биссекториальные точки.
6. Конструктивное определение «расстояния между двумя прямыми».
7. Д.Д. Мордухай-Болтовской и его двойственные метрические понятия.

Литература.

Волошинов А.В. Математика и искусство. М., 2000. С. 286-288, 292-294.

Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии – к неевклидовой (вокруг абсолюта). М., 1979. С. 15-20.

Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. М., 1978. С. 163-166.

Мордухай-Болтовской Д.Д. О взаимных метрических теоремах // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете. XXIII, 1912, №1-2. С.157-178.

Пистрак М.М. Этюды по геометрии // Журнал Московского математического кружка. №8. 1916. С.303-306.

Яглом И.М. Геометрические преобразования II. М., 1956.

Индивидуальные задания учащимся

Разработать, подготовить и защитить исследовательские проекты по следующим темам:

- *Построение взаимных фигур на плоскости.*
- *Взаимные фигуры в пространстве.*
- *Построение фигур, двойственных отрезку в зависимости от его расположения относительно базисной окружности.*
- *Различные варианты построения фигур двойственных треугольнику в зависимости от его расположения относительно базисной окружности.*
- *Построение биссекториальных точек треугольника. Исследование их свойств.*
- *Выдающийся математик Д.Д. Мордухай-Болтовской и его взаимные метрические теоремы.*

Проспект занятия

Рассмотрим конструктивное определение двойственных друг другу на плоскости элементов точек и прямых.

Используем для этого полярное преобразование относительно окружности. *Полярное преобразование*, это такое преобразование которое переводит прямую в точку, а точку в прямую. В этом случае двойственная прямой точка называется *полюсом* прямой, а двойственная точке прямая называется *полярой* точки.

1. Рассмотрим в плоскости окружность S, радиус которой равен единице. Всякой точке плоскости (полюсу) можно относительно окружности S отнести определённую прямую (поляру) и обратно. Построение прямой, двойственной данной точке, или, как мы будем говорить «взаимной данной точке», производится следующим образом:

а) Точка (A, рис. 1) лежит вне S. Проводим из A касательные AM и AN к S, MN есть искомая прямая a.

б) Точка (B, рис. 1) лежит внутри S. Проводим хорды KL, FT. Через K и L проводим касательные к S до встречи их в точке P; через F и T до встречи в Q. PQ – есть искомая прямая b.

в) Точка (C, рис. 1) лежит на S. Искомая прямая есть касательная c к S в этой точке.

2. Отсюда, легко видеть, как по данным прямым (полярам) найти взаимные им точки (полюсы).

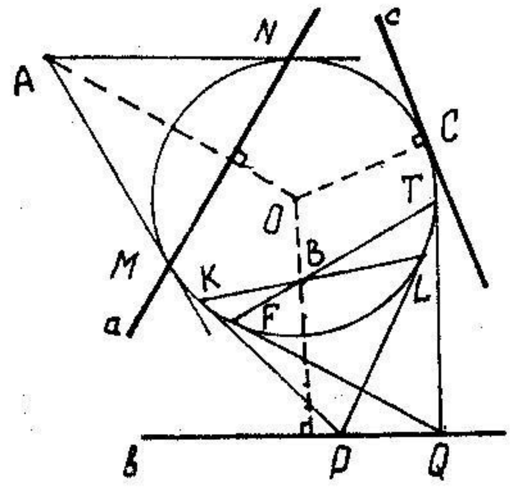


Рис.1

3. В дальнейшем нам потребуются следующие два замечания:

1) Точке O – центру S взаимна бесконечно удалённая прямая и обратно; назовем поэтому O «*особенной точкой*».

Всякой прямой, проходящей через особенную точку (диаметру S) взаимна бесконечно-удалённая точка.

2) Прямая(OA, OB, OC), соединяющая O с данной точкой (A, B, C), перпендикулярна взаимной ей прямой (a, b, c) и обратно.

Бесконечно-удалённая точка, взаимная данному диаметру лежит на луче, перпендикулярном этому диаметру.

4. Рассмотрим две прямые a и b и взаимные им точки A и B. Очевидно, что $OA \perp a$, $OB \perp b$. Следовательно $\angle AOB$ или равен $\angle(a, b)$, или дополняет его до π.

Если O лежит вне $\angle(a, b)$, то $\angle(a, b) = \angle AOB$.

Если O лежит внутри $\angle(a, b)$, то $\angle(a, b) = \pi - \angle AOB$.

Понятие «**угла между двумя точками**» определим следующим образом:

углом между двумя точками A и B назовем угол, под которым расстояние AB видно из особенной точки (или угол с ним смежный).

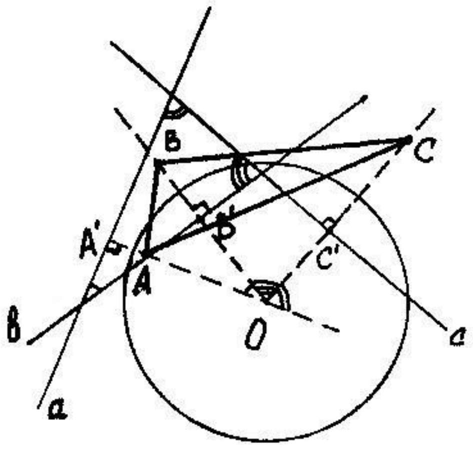


Рис.2

Нетрудно в каждом случае определить, какой именно угол принять за угол между двумя точками (см. рис. 2- углы между А и В, В и С, С и А)

$\angle(A, B) = \angle AOB$
$\angle(B, C) = \angle BOC$
$\angle(A, C) = \pi - \angle AOC$

5. Из определения «угла между двумя точками» вытекают три важных следствия:

1. Две точки будут «параллельны», если они лежат на прямой, проходящей через особенную точку.

2. Угол между двумя точками будет прямой (т.е. две точки «ортогональны» друг другу), если расстояние между ними видно из особенной точки под прямым углом.

3. Биссекториальной точкой угла между двумя точками A и B будет пересечение сектора угла $\angle AOB$ с AB.

! Докажите утверждение: «угол между двумя точками» равен углу между их полярами.

Докажите утверждение: Если полюс B лежит на поляре a, то поляра b проходит через полюс A.

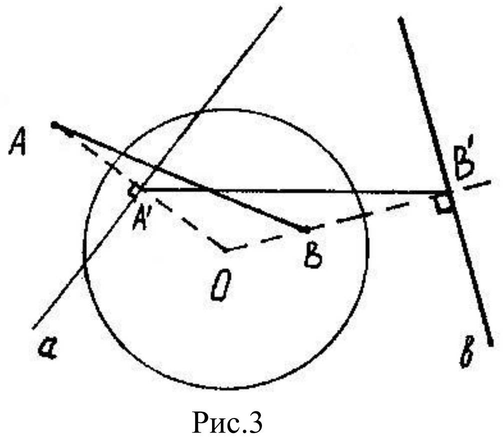


Рис.3

6. Пусть (рис.3) дана точка A и взаимная ей прямая a. Соединим O с A и найдем A' - как пересечение OA с a. Из A проводим AP – касательную к окружности. Из ΔAOP находим: $OP^2=OA \cdot OA'$. Но OP=1, следовательно $OA = \frac{1}{OA'}$ (1).

Рассмотрим отрезок AB (рис.3). Точкам A и B отвечают прямые a и b. Опустим перпендикуляры OA' и OB' на a и b и соединим A' и B' между собой. Рассмотрим ΔAOB. Имеем:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot O \cdot cos(AOB) \qquad (2),$$

из $\Delta A'OB'$ имеем: $A'B'^2=OA'^2+OB'^2-2\cdot OA'\cdot OB'\cdot cos(AOB)$ (3),

но по (1) $OA = \frac{1}{OA'}; OB = \frac{1}{OB'}$, следовательно из (3):

$$A'B'^2 = \frac{OA^2 + OB^2 - 2\cdot OA\cdot OB\cdot cos(AOB)}{OA^2 \cdot OB^2}$$ или по

$$A'B' = \frac{AB}{OA\cdot OB}; \; AB = \frac{A'B'}{OA'\cdot OB'} \qquad (4).$$

Равенство (4) можем принять как определение нового понятия. Т.к. понятию «расстояние между двумя точками A и B» двойственным является понятие «**расстояние между двумя прямыми *a* и *b***», то определим последнее используя (4) следующим образом:

Расстоянием между двумя прямыми a и b будем называть расстояние $A'B'$ между основаниями перпендикуляров (OA', OB') из особенной точки (O) на прямые a и b, делённое на произведение OA' OB' этих перпендикуляров.

Далее расстояние между a и b будем обозначать через $\overline{(a,b)}$:

$$\overline{(a,b)} = \frac{A'B'}{OA' \cdot OB'}.$$

7. Впервые, понятия «угол между двумя точками» и «расстояние между двумя прямыми» ввел известный математик, ростовчанин, Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской.

! Самостоятельно отыщите информацию о Д.Д. Мордухай-Болтовском и подготовьте сообщение о нем к следующему занятию.

Занятие 4

Тема: *«Применение двойственных преобразований при решении задач на построение».*

Цель: *Ознакомление с приемами использования двойственных преобразований в решении задач на построение. Способствовать формированию умений и навыков использования двойственных преобразований при решении задач на построение.*

План.

1. Общий способ использования двойственных преобразований при решении задач на построение.
2. Примеры решения задач на построение с использованием двойственных преобразований.

Литература.

Пырков В.Е. Применение принципа двойственности в задачах геометрии построения // Тезисы докладов студенческой научной конференции. Ростов-н/Д, 1998. С.221-222.

Пистрак М.М. Этюды по геометрии // Журнал Московского математического кружка. №8. 1916.

Яглом И.М. Геометрические преобразования II. М., 1956.

Индивидуальные задания учащимся

Разработать, подготовить и защитить исследовательские проекты по следующим темам:

- *Метрические свойства двойственного преобразования.*
- *Инварианты двойственного преобразования.*
- *Решение задачи трисекции угла с помощью метода двойственных преобразований.*
- *Построение автополярного треугольника. Исследование свойств автополярных треугольников.*
- *Разработка банка задач на построение решаемых методом двойственных преобразований.*

Проспект занятия

1. Понятие поляры точки относительно окружности позволяет определить «двойственное преобразование» плоскости, которое оказывается полезным для решения задач и доказательства теорем.

Пусть мы имеем какую-либо фигуру F на плоскости, образованную любым числом точек и прямых линий. Поставим в соответствие этой фигуре новую фигуру F', заменив каждую точку первоначальной фигуры F её полярой и каждую прямую фигуры F – её полюсом относительно какой-либо фиксированной окружности S. Преобразование, которое ставит в соответствие F новую фигуру F', полученную из первоначальной описанным образом, называется полярным преобразованием или двойственным преобразованием.

При помощи двойственного преобразования иногда удается свести задачу на построение к более простой и тем самым облегчить её решение. Использовать двойственное преобразование при решении задач на построение можно следующим образом. Сначала определяют элементы двойственные данным в задаче и строят конфигурацию двойственную конфигурации исходной задачи. Затем выполняют построение элемента, двойственного требуемому в исходной задаче и, наконец, подвергают выполненное построение двойственному преобразованию. Полученная конфигурация и есть искомое построение.

2. Рассмотрим решение задач на построение с применением свойств двойственного преобразования.

Задача.

Дана дуга MN окружности S и прямая l, не пересекающая этой дуги (рис. 4). С помощью одной линейки определите точки пересечения прямой l с окружностью S.

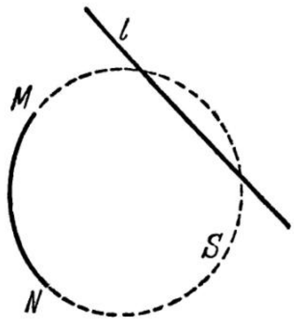


Рис.4

Решение.

Если у вписанного в окружность S четырехугольника ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 пересекаются в точке P, то полярой p точки P будет прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей AB_1 и BA_1 и точку пересечения противоположных сторон AB и A_1B_1. Но отсюда следует, что p является полярой точки P относительно пары прямых AB, A_1B_1. Итак, p – есть поляра относительно пары прямых AB, A_1B_1, любой из точек прямой OP, где O – точка в которой сходятся прямые AB и A_1B_1 и p. Отсюда можно также вывести, что A_1B_1 является полярой любой из точек прямой AB относительно пары прямых OP и p. [Для доказательства достаточно спроектировать четверку прямых AB, A_1B_1, OP и p с плоскости π на новую плоскость π' так, чтобы прямая OP являлась выделенной прямой плоскости π. При этом прямые AB и A_1B_1 перейдут в параллельные прямые $A'B'$ и $A_1'B_1'$; OP перейдет в бесконечно удаленную прямую $O'P'$ плоскости π', а p – в среднюю линию p' – полосы образованной прямыми $A'B'$ и $A_1'B_1'$ (рис. 6). Согласно определению поляры точки относительно пары прямых следует, что $A_1'B_1'$, есть поляра точки $\overline{Đ'}$ прямой $A'B'$ относительно прямых p', $O'P'$. Но в таком случае A_1B_1 является полярой точки $\overline{Đ'}$ прямой AB относительно прямых p, OP]. Поэтому, зная прямые OP, p и AB мы можем построить прямую A_1B_1 с помощью одной линейки: для

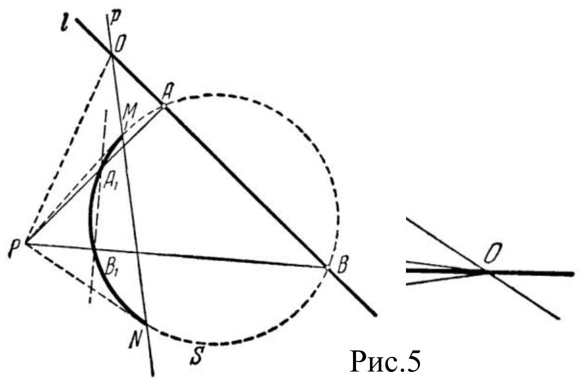


Рис.5

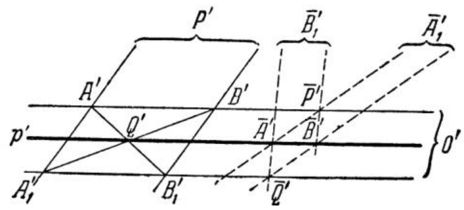


Рис.6

этого надо провести две пары прямых $\overline{Đ}\,\overline{Ŕ}\,\overline{Ŕ_1}$ и $\overline{Đ}\,\overline{Â}\,\overline{Â_1}$, пересекающихся в точке $\overline{Đ}$ прямой AB ($A^{/}$ и $B^{/}$ – точки p, $\overline{Ŕ_1}$ и $\overline{Â_1}$ – точки OP), и соединить точку $\overline{Q}$ пересечения $\overline{ŔÂ_1}$ и $\overline{ÂŔ_1}$ с точкой O пересечения p и AB.

Вернемся к условию задачи. Пусть p – произвольная прямая, пересекающая l в точке O и данную дугу в точках M и N (которые могут совпадать с концами дуги; нам надо только, чтобы p была не параллельна l и дуга MN была меньше полуокружности). Полюс P прямой p относительно S совпадает с точкой пересечения касательных к S в точках M и N и его можно построить с помощью одной линейки. Пусть l пересекает окружность S в точках A и B (которые нам требуется определить), PA и PB пересекают S еще в точках A_1 и B_1. Как мы уже видели, зная прямые AB (прямую l) и p, мы можем построить прямую A_1B_1 с помощью одной линейки; при этом если прямая l проходит вне угла MOP (а лишь в этом случае l пересекает S, но не пересекает дугу MN), то A_1B_1 проходит внутри угла MOP и, следовательно, или совсем не пересекает S (в этом случае l тоже не пересекает S и точек A, B не существует) либо пересекает дугу MN в точках A_1 и B_1. Точки пересечения прямых PA_1, PB_1 с прямой l и будут искомыми точками пересечения l и S.

Рис.7

Аналогично рассматриваем случай, когда A_1 и B_1 совпадают, т.е. прямая A_1B_1 касается S в точке A_1; в этом случае и l касается S в точке A пересечения PA, и l и p есть поляра точки P, относительно пары прямых OA, OA_1.

Раздел IV.

Занятие 5

Тема: *«Взаимные теоремы планиметрии».*

Цель: *Обобщить и систематизировать геометрические знания учащихся посредством выявления взаимных теорем курса геометрии основной школы. Способствовать формированию понятия «взаимная теорема».*

План.

1. Понятие теоремы взаимной данной.
2. Словарь конструирования взаимных теорем.
3. Технология построения двойственной теоремы.
4. Примеры взаимных теорем.

Литература.

Волошинов А.В. Математика и искусство. М., 2000. С.286-287, 292-294.

Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. М., 1978. С.166-167.

Пистрак М.М. Этюды по геометрии // Журнал Московского математического кружка. №8. 1916. С.306.

Яглом И.М. Геометрические преобразования II. М., 1956. С.84-106, 411-437.

Энциклопедия элементарной математики. Т.4, М., 1970. С.147-156.

Индивидуальные задания учащимся

Разработать, подготовить и защитить исследовательские проекты по следующим темам:

- *Словарь для получения взаимных теорем.*
- *Двойственные теоремы о треугольнике.*
- *Двойственные теоремы о четырехугольниках.*
- *Двойственные теоремы об окружностях.*

Проспект занятия

1. Двойственное (полярное) преобразование имеет большое значение как источник совершенно новых теорем, которые можно вывести из уже известных предложений. Если мы подвергнем двойственному преобразованию чертеж, соответствующий какой-либо теореме, то мы придем к чертежу, выражающему совершенно новое предложение. Это предложение может быть проще первоначального, и, доказав его, мы докажем тем самым и первоначальную теорему. Но если даже новая теорема доказывается и не проще первоначальной, мы все же остаемся в выигрыше, т.к. вместо одной теоремы мы получим две.

Теоремы, получаемые одна из другой при помощи полярного преобразования, называют *взаимными* (двойственными) теоремами.

2. Для построения теоремы взаимной данной требуется выделить входящие в нее базовые элементы и заменить их им взаимными. С этой целью для каждой теоремы мы будем составлять «словарик» взаимных понятий входящих в нее элементов. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся пары этого «словарика».

Исходное понятие	**Двойственное понятие**
Точка A	Прямая a
Прямая a	Точка A
Точка A, лежащая на прямой b	Прямая a, проходящая через точку B
Расстояние OA от O до точки A	Величина $\frac{1}{OA'}$, обратная расстоянию OA', от O до прямой a
Параллельные прямые	Точки, принадлежащие проходящей через O прямой
Угол между прямыми a и b	Угол между точками A и B ($\angle AOB$ или $\pi - \angle AOB$)
Расстояние между точками A и B	Расстояние между прямыми a и b, величина $\overline{(a,b)} = \frac{A'B'}{OA' \cdot OB'}$, где A' и B' проекции точки O на прямые a и b
Расстояние AH от точки A до прямой b	Величина $\frac{HQ}{OH \cdot OA'}$, где Q и A' – проекции точек H и A на прямую a
Окружность с центром O и радиусом r	Окружность с центром O и радиусом $\frac{1}{r}$

! Продолжите словарик самостоятельно.

Этот «словарь» позволяет составить много новых геометрических теорем, получаемых из известных теорем при помощи двойственного преобразования.

3. Рассмотрим технологию конструирования двойственной теоремы.

① Построение чертежа соответствующего теореме;

② Нахождение взаимных элементов;

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы;

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

Заметим, что применяя двойственное преобразование к взаимной теореме мы получим исходную теорему лишь в том случае, если не будем изменять местоположение особенной точки и базисной окружности; в противном случае мы опять получим предложение выражающее совершенно новую конфигурацию и соответствующую ей теорему.

4. Рассмотрим на примерах двойственные фигуры и теоремы описывающие их свойства, содержащиеся в курсе геометрии основной школы (учебник Л.С. Атанасян и др. Геометрия 7-9).

7 класс

Глава I. Начальные геометрические сведения.

Двойственные понятия: точка-прямая, отрезок-угол.

Глава II. Треугольники.

Двойственные понятия: треугольник-трехсторонник.

Двойственные теоремы:

а) I и II признаки равенства треугольников (рис. 8).

I признак: ***Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.***

II признак: ***Если два угла и сторона прилежащая к ним одного треугольника равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.***

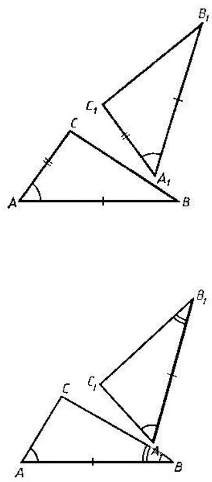


Рис.8

б) свойство и признак равнобедренного треугольника.

Свойство равнобедренного треугольника: ***В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.***

Признак равнобедренного треугольника: ***Если в треугольнике две стороны равны, то он равнобедренный.***

в) теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника сама себе двойственна: ***В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) против большего угла лежит большая сторона.***

8 класс

Глава V. Четырехугольники.

Двойственные понятия: прямоугольник-ромб, квадрат-квадрат.

Прямоугольник **–** параллелограмм у которого соседние углы равны.

Ромб **–** параллелограмм у которого соседние стороны равны.

Квадрат **–** параллелограмм у которого соседние стороны равны и соседние углы равны.

Двойственные теоремы:

а)свойство сторон ромба и углов прямоугольника

В прямоугольнике все углы равны	***В ромбе все стороны равны***

б) свойство диагоналей прямоугольника и ромба

Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам	***Диагонали ромба взаимоперпендикулярны и делят его углы пополам***

в) квадрат двойственен сам себе, поэтому его свойства тоже сами себе двойственны.

- ***Все углы квадрата равны и все стороны квадрата равны;***

- ***Диагонали квадрата равны и взаимоперпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.***

Глава VII. Подобные треугольники.

Двойственные теоремы: I и III признак подобия треугольников.

I признак: ***Если три угла одного треугольника пропорциональны (равны) трем углам другого, то такие треугольники подобны.***

II признак: ***Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.***

Глава VIII. Окружность.

Двойственные теоремы: о вписанном и описанном треугольнике, о вписанном и описанном четырехугольнике.

1. В любой треугольник можно вписать окружность.	***1′. Около любого треугольника можно описать окружность.***
2. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон одинаковы и равны половине суммы всех его сторон $\frac{1}{2}(a+b+c+d)=\frac{1}{2}P$.	***2′. В любом вписанном четырехугольнике суммы противоположных углов одинаковы и равны половине суммы всех его углов*** $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)=180^{o}$.

9 класс

Глава XII. Длина окружности и площадь круга.

Двойственные понятия: правильный многоугольник двойственен сам себе.

Двойственные теоремы:

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность	***В любой правильный многоугольник можно вписать окружность***

<u>Дополнительные главы к учебнику геометрии 7-9</u>

Двойственные теоремы: Теорема Чева и теорема Менелая.

! Самостоятельно покажите двойственность теорем Чева и Менелая.

Технология конструирования взаимной теоремы (на примере I и II признака равенства треугольников)

Т е о р е м а. ***Если две стороны (AB и AC) и угол, заключенный между ними ($\angle A$), одного треугольника равны двум сторонам(A_1B_1 и A_1C_1) и углу, заключенному между ними ($\angle A_1$), другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 9: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$).***

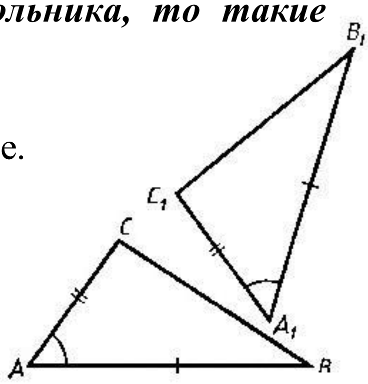


Рис.9

① Построение чертежа соответствующего теореме.

② Нахождение взаимных элементов.

<u>Исходное понятие</u>	***<u>Двойственное понятие</u>***
треугольник ABC	Трехсторонник abc (ABC)
сторона AB	угол $(\hat{ab})$, $\angle C$
сторона AC	угол $(\hat{ac})$, $\angle B$
угол A	сторона a, BC

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы.

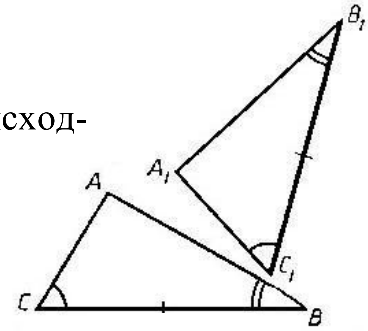


Рис.10

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

В з а и м н а я т е о р е м а. ***Если два угла ($\angle B$ и $\angle C$) и сторона между ними (CB), одного треугольника равны двум углам($\angle B_1$ и $\angle C_1$) и стороне между ними (C_1B_1) другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 10: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$).***

! Подвергните технологии получения взаимных теорем приведенные выше примеры взаимных теорем школьного курса геометрии и убедитесь в их двойственности.

Занятие 6

Тема: *«Взаимные теоремы планиметрии. Продолжение».*

Цель: *Ознакомить учащихся с взаимными теоремами не имеющими аналогов в школьном курсе геометрии. Способствовать усовершенствованию умений использования двойственных преобразований при конструировании новых теорем.*

План.

1. Теорема о высотах треугольника и ей взаимная.
2. Пример многократного использования двойственного преобразования для получения новых теорем.
3. Теорема о биссектрисах треугольника и ей взаимная.
4. Обобщение теоремы о биссектрисах треугольника и взаимное ему положение.
5. Теорема о медианах треугольника и ей взаимная.
6. Теорема о серединных перпендикулярах треугольника и ей взаимная.

Литература.

Волошинов А.В. Математика и искусство. М., 2000.

Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. М., 1978.

Пистрак М.М. Этюды по геометрии // Журнал Московского математического кружка. №8. 1916. С.306-308

Яглом И.М. Геометрические преобразования II. М., 1956. С.434-437.

Энциклопедия элементарной математики. Т.4, М., 1970. С.150-151.

Индивидуальные задания учащимся

Разработать, подготовить и защитить исследовательские проекты по следующим темам:

- *Конструирование теоремы взаимной для взаимной теоремы о высотах треугольника.*
- *Конструирование теоремы взаимной для взаимной теоремы о биссектрисах треугольника.*
- *Конструирование теоремы взаимной для взаимной теоремы о медианах треугольника.*
- *Конструирование теоремы взаимной для взаимной теоремы о серединных перпендикулярах треугольника.*

Проспект занятия

Применим технологию конструирования взаимных теорем к известным вам теоремам о замечательных точках треугольника. Как вы помните, треугольнику всегда взаимен треугольник (кроме того случая, когда «особенная» точка лежит на стороне треугольника или её продолжении, т.к. тогда одна из вершин треугольника будет в бесконечности).

1. Т е о р е м а 1. ***Высоты треугольника пересекаются в одной точке*** (рис. 11).

① Построение чертежа соответствующего теореме.

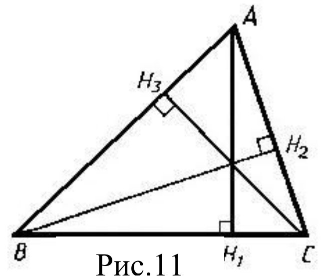


Рис.11

② Нахождение взаимных элементов.

Двойственное преобразование переводит ΔABC в новый $\Delta A'B'C'$, а высоты AH_1, BH_2 и CH_3 треугольника ABC – в такие точки H'_1, H'_2 и H'_3 сторон треугольника $A'B'C'$, что $\angle A'OH'_1=\angle B'OH'_2=\angle C'OH'_3=90^{o}$[1], где O – особенная точка (центр базисной окружности S, относительно которой производится двойственное преобразование). H'_1, H'_2, H'_3 – ***ортогональные точки*** Δ $A'B'C'$.

Исходное понятие	***Двойственное понятие***
ΔABC	Δ $A'B'C'$
высоты AH_1, BH_2 и CH_3	ортогональные точки H'_1, H'_2 и H'_3
точка H, пересечения высот	прямая h, соединяющая ортогональные точки

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы.

В зависимости от выбора точки О могут получиться следующие конфигурации (рис. 12, 13)

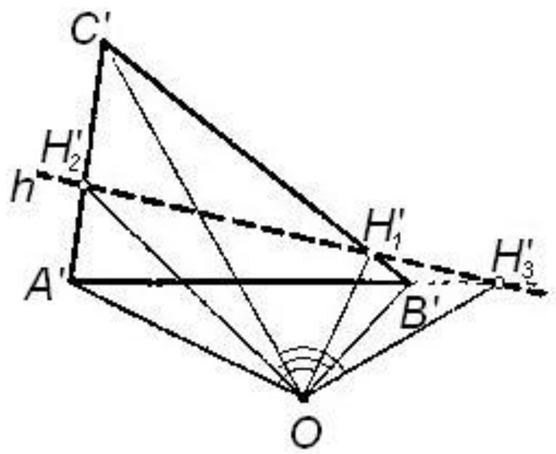


Рис.12

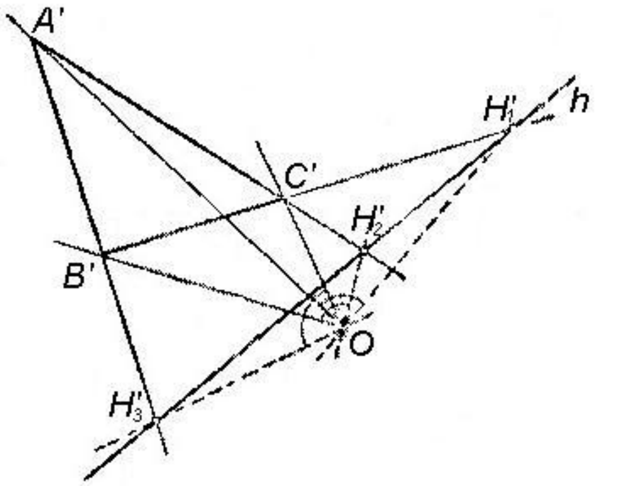


Рис.13

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

В з а и м н а я т е о р е м а 1. ***Три ортогональные точки треугольника лежат на одной прямой.***

---

[1] Под высотой треугольника к стороне a понимают прямую a', проходящую через вершину A и перпендикулярную к a. Взаимным понятием будет точка A' лежащая на a и ортогональная к A (т.е. видимая из O по отношению к A под прямым углом $\angle AOA'=90^{o}$).

Если не использовать понятие «ортогональной точки», то теорема примет вид: ***Если через какую-либо точку O в плоскости*** $\triangle$ ***$A'B'C'$ проведены три прямые, перпендикулярные к прямым OA', OB' и OC', то точки пересечения этих прямых с соответствующими сторонами треугольника лежат на одной прямой.***

2. К полученной только что теореме двойственное преобразование можно применить еще раз (с новым центром O_1). Тогда она перейдет в более сложное предложение. В свою очередь и эту последнюю теорему можно преобразовать при помощи двойственного преобразования и получить новое, еще более сложное предложение. Таким образом, при помощи двойственного преобразования из одной теоремы можно получить неограниченно много новых теорем.

Приведем пример теоремы полученной двойственным преобразованием из теоремы взаимной теореме о высотах треугольника. Построим конфигурацию двойственную конфигурации (рис. 12).

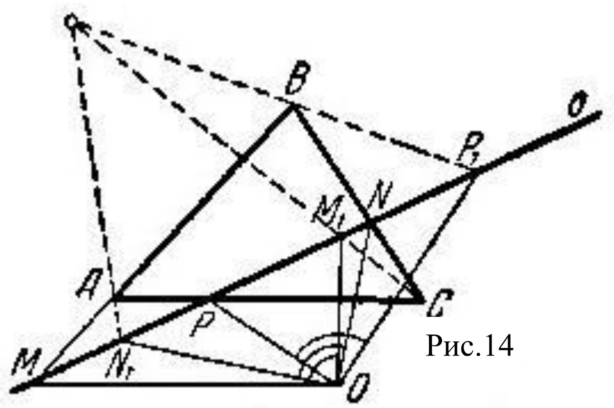


Рис.14

Соответствующая данному чертежу теорема формулируется следующим образом:

Пусть o – произвольная прямая и O – произвольная точка в плоскости $\triangle ABC$, M, N и P – точки пересечения прямой o со сторонами AB, BC и CA треугольника, M_1, N_1 и P_1 – три такие точки прямой o, что $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \angle POP_1 = 90^o$, в таком случае прямые AN_1, BP_1 и CM_1 пересекаются в одной точке (рис.14**).**

! Покажите это самостоятельно, используя приведенную выше технологию построения взаимных теорем.

3. Т е о р е м а 2. ***Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке*** (рис. 15).

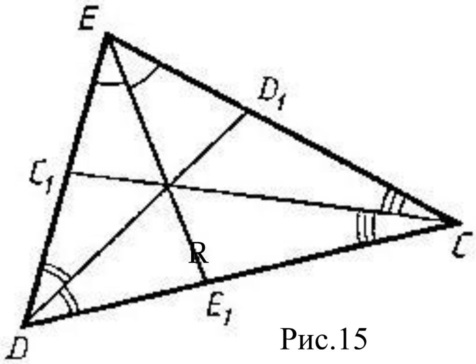


Рис.15

① Построение чертежа соответствующего теореме.

② Нахождение взаимных элементов.

Пусть прямая l является биссектрисой угла, образованного прямыми m и n. При двойственном преобразовании прямые m, n и l переходят в точки M, N и L, лежащие на одной прямой, причем отрезки ML и NL видны из центра O базисной окружности S под равными или смежными углами; другими словами, L – биссекториальная точка, есть точка пересечения прямой MN с биссектрисой одного из двух углов, образованных прямыми OM и ON.

<u>***Исходное понятие***</u>	<u>***Двойственное понятие***</u>
$\Delta\, CDE$	$\Delta\ ABC$
биссектрисы CC_1, DD_1, EE_1	биссекториальные точки A', B', C'
точка R, пересечения биссектрис	прямая r, соединяющая биссекториальные точки

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы.

Проведем из O лучи OA, OB, OC и биссектрисы образовавшихся углов OA', OB', OC' до их пересечения с a, b, c в A', B', C' соответственно. Тогда A', B', C' – ***биссекториальные*** точки треугольника, лежат на одной прямой r.

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

Взаимная теорема 2. ***Три биссекториальные точки лежат на одной прямой*** (рис. 16).

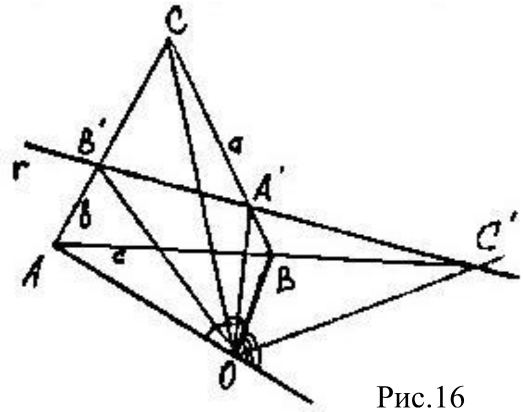


Рис.16

4. Рассмотрим более общий случай теоремы, учитывая и биссектрисы внешних углов треугольника ABC. Сформулируем теорему о пересечении биссектрис следующим образом:

Теорема 2/. ***Шесть биссектрис внутренних и внешних углов треугольника ABC пересекаются по три в четырех точках*** (рис. 17).

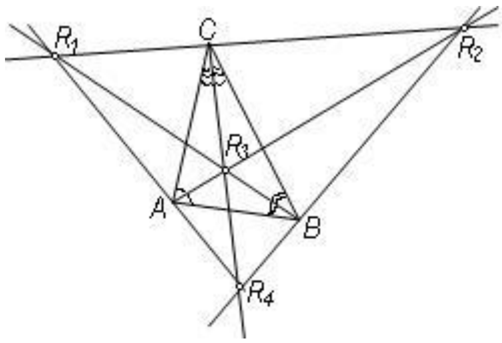


Рис.17

Эта теорема переходит при двойственном преобразовании в следующее предложение.

Взаимная теорема $2'$. ***Для любой точки O в плоскости треугольника $A'B'C'$ (O не лежит на прямых содержащих стороны треугольника), точки пересечения шести биссектрис углов, образованных прямыми OA' и OB', OB' и OC', OC' и OA' с соответствующими сторонами треугольника $A'B'C'$, лежат по три на четырех прямых*** (рис.18).

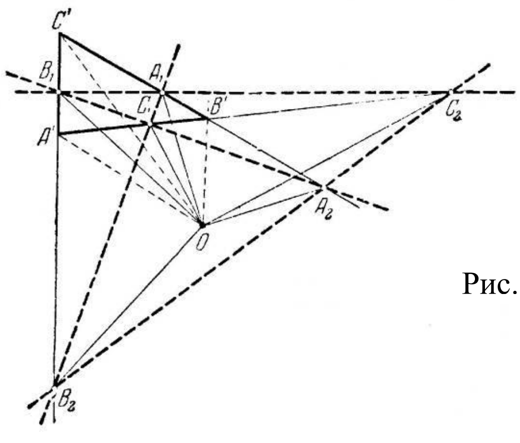


Рис.18

! Покажите это самостоятельно, используя приведенную выше технологию построения взаимных теорем.

5. Т е о р е м а 3 . ***Три медианы треугольника пересекаются в одной точке*** (рис. 19).

① Построение чертежа соответствующего теореме.

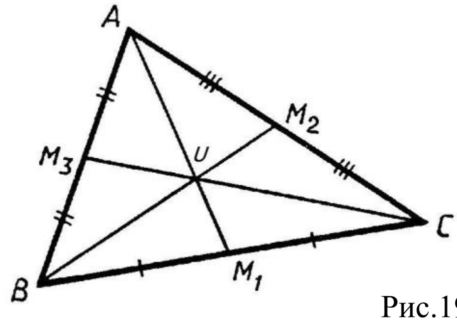


Рис.19

② Нахождение взаимных элементов.

Рассмотрим частный случай, приняв за базисную окружность полярного преобразования описанную окружность S треугольника. При полярном преобразовании относительно описанной окружности S треугольник ABC переходит в описанный вокруг S треугольник $A'B'C'$, середины сторон ΔABC – в прямые, проведенные через вершины $\Delta A'B'C'$ перпендикулярно к биссектрисам OA', OB' и OC' (O – центр S), т.е. в биссектрисы внешних углов $\Delta A'B'C'$, медианы ΔABC – в точки пересечения биссектрис внешних углов $\Delta A'B'C'$ с противоположными

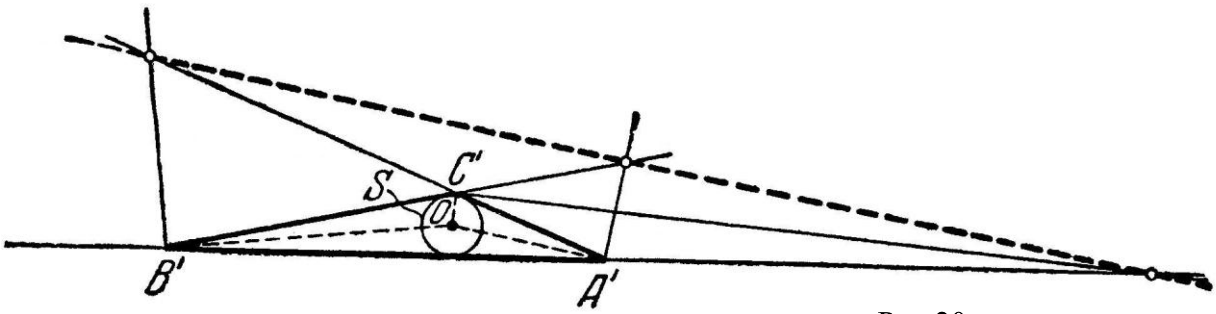


Рис.20

сторонами $\Delta A'B'C'$ (см. рис.20).

Итак, мы приходим к теореме: ***Точки пересечения биссектрис внешних углов произвольного треугольника с противоположными сторонами лежат на одной прямой.***

Рассмотрим теперь более общий случай.

Определим элемент двойственный середине отрезка. Рассмотрим отрезок AB, M – середина отрезка AB (рис. 21). Построим прямую m, взаимную точке M.

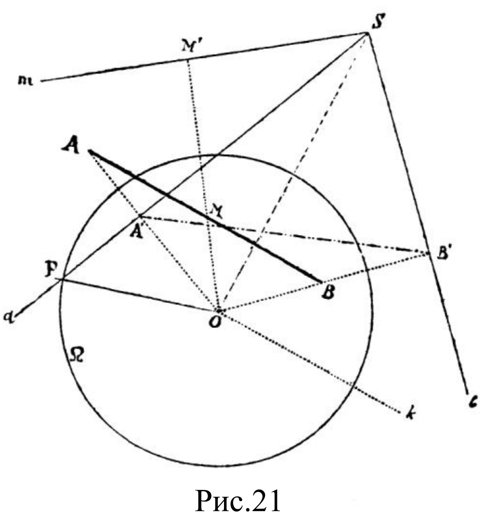


Рис.21

Известно, что к точкам A, M, B четвертой гармонической точкой будет бесконечно удаленная точка прямой AB. Четыре луча, опирающиеся на точки A, M, B и ∞ будут четырьмя гармоническими лучами. Таким образом OA, OM, OB, и OK ($OK || AB$) будут четырьмя гармоническими лучами. Но $OA \perp a$, $OM \perp m$, $OB \perp b$ и $OK \perp OS$, следовательно и прямые a, m, OS, b образуют четыре гармонических луча. Таким образом, взаимным элементом точки M - середины отрезка AB, является прямая m, делящая расстояние между двумя прямыми (a и b) пополам, т.е. четвертый гармонический луч к трем прямым: к двум данным (a и b) и прямой, соединяющей их пересечение S с особенной точкой O.

Найдем теперь взаимные элементы теоремы 3.

Исходное понятие	***Двойственное понятие***
ΔABC	$\Delta\ ABC$
Точка M_1, делящая сторону $BC - a$ пополам.	Четвертый гармонический луч $AA^{/}$ к OA, b, c
Прямая AM_1, соединяющая эту точку с противоположной a вершиной (медиана)	Точка $A^{/}$, пересечения луча $AA^{/}$ с противоположной A стороной a (медианная точка)
Точка U пересечения медиан треугольника	Прямая u содержащая медианные точки треугольника

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы.

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

Взаимная теорема 3. ***Три медианнные точки лежат на одной прямой*** (рис. 22).

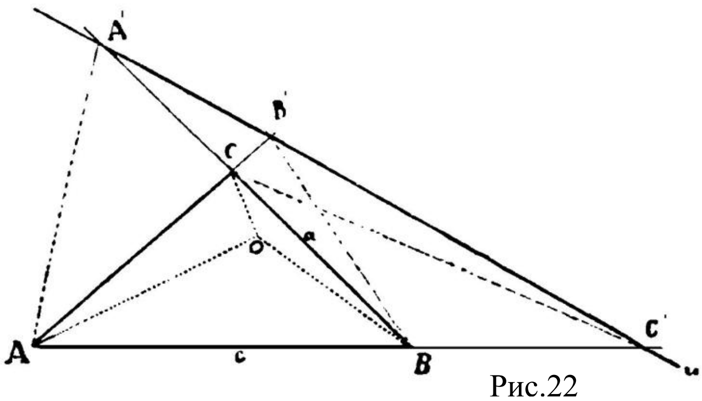


Рис.22

Если не использовать понятие «медианной точки», то теорема примет вид: ***Если из какой-нибудь точки O (не лежащей ни на одной стороне треугольника)провести к вершинам треугольника ABC лучи OA, OB, OC и к каждым из трех прямых OA, b, c; OB, a, c; OC, a, b построить четвертые гармонические лучи $AA^{/}$, $BB^{/}$, $CC^{/}$, то точки $A^{/}$, $B^{/}$, $C^{/}$ пересечения этих лучей со сторонами a, b, c лежат на одной прямой u.***

6. Теорема 4. ***Три серединных перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке*** (рис. 23).

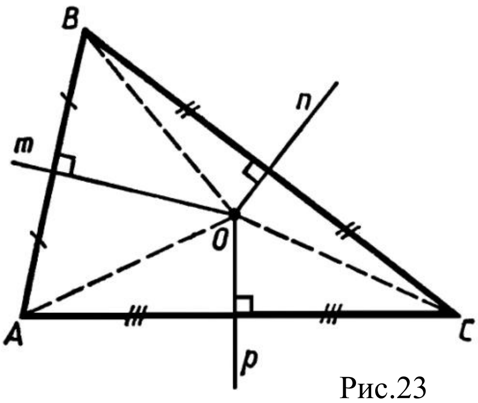


Рис.23

Эта теорема переходит при двойственном преобразовании в следующее предложение.

Взаимная теорема 4. ***Перпендикуляры из O к OA, OB, OC пересекаются с соответственными прямыми $AA^{/}$, $BB^{/}$, $CC^{/}$ в трех точках, лежащих на одной прямой.***

! Убедитесь в этом самостоятельно, используя приведенную выше технологию построения взаимных теорем.

Раздел V.

Занятие 7

Тема: *«Использование двойственных преобразований для решения геометрических задач»*

Цель: *Способствовать усвоению сущности метода двойственных преобразований в применении к решению геометрических задач, его особенностей и ограничения. Выработка умений использования двойственных преобразований при решении задач на доказательство, на использование двойственных элементов и меровых соотношений между ними.*

План.

1. Сущность метода решения геометрических задач с использованием двойственных преобразований.
2. Ограничения действия метода.
3. Классификация задач и характеристика способов их решения.
4. Решение задач на доказательство.
5. Использование двойственных элементов и меровых соотношений между ними.
6. Решение задач смешанного типа.

Литература.

Пырков В.Е. Возможности использования метода двойственности в школьном курсе геометрии // Тезисы докладов студенческой научной конференции. – Ростов-н/Д, 1999. С.135-136.

Яглом И.М. Геометрические преобразования II. М., 1956. С.103, 432.

Энциклопедия элементарной математики. Т.4, М., 1970. С.147-153

Индивидуальные задания учащимся

Разработать, подготовить и защитить исследовательские проекты по следующим темам:

- *Разработка банка задач решаемых с помощью двойственных преобразований.*

Проспект занятия

1. Сущность метода решения геометрических задач с использованием двойственных преобразований заключается в следующем: чертеж, выражающий условие задачи, подвергают двойственному преобразованию и решают полученную взаимную задачу. В силу действия принципа двойственности решение взаимной задачи влечет за собой и решение исходной.

2. Так как двойственное преобразование не сохраняет метрические свойства объектов, то данный метод можно использовать лишь для задач выражающих зрительные отношения объектов (отношение инцидентности).

3. Среди выделенного класса задач будем различать задачи на доказательство и задачи на использование двойственных элементов.

4. Рассмотрим пример решения задачи на доказательство методом двойственных преобразований.

Задача.

Пусть l – произвольная касательная к вписанной окружности S треугольника ABC; M, N, P – точки пересечения l со сторонами треугольника (см рис. 24). Восставим из центра O окружности S перпендикуляры к прямым OM, ON, OP; пусть M_1, N_1, и P_1 – точки пересечения этих перпендикуляров с соответствующими сторонами треугольника. Докажите, что точки M_1, N_1, и P_1 лежат на одной прямой l_1, также касающейся окружности S.

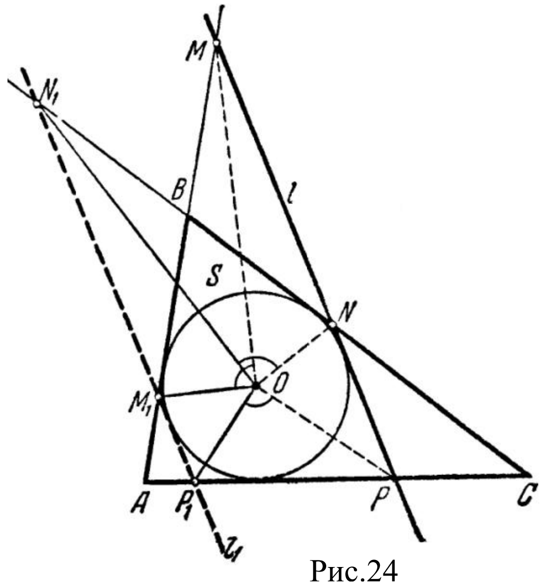


Рис.24

Решение.

Подвергнем чертеж выражающий условие задачи двойственному преобразованию относительно окружности S. Стороны BC, CA, AB треугольника ABC перейдут при этом в точки A', B', C' окружности S', так что описанный треугольник ABC перейдет во вписанный треугольник $A'B'C'$ (т.е. стороны ΔABC перейдут в вершины $\Delta A'B'C'$ и наоборот). Касательная l перейдет в точку L окружности S; точки M, N и P – в прямые LA', LB' и LC'; точки M_1, N_1, и P_1 – в прямые m_1, n_1 и p_1, проходящие соответственно через A', B' и C' и в силу свойства двойственного преобразования перпендикулярные к $A'L$, $B'L$ и $C'L$. Предложение, сформулированное в условии задачи, переходит при двойственном преобразовании в следующее: *прямые m_1, n_1 и p_1 пересекаются в одной точке окружности* S (рис. 25); таким образом доказать достаточно только одно из этих двух предложений. Но то, что прямые m_1, n_1 и p_1 сходятся в одной точке окружности S, совершенно ясно: так как $m_1 \perp LA'$, то m_1 пересекает S в точке L_1, диаметрально противоположной L; точно так же доказывается, что и прямые n_1 и p_1 проходят через L_1. (Заметим, кстати, что из того, что L и L_1 – диаметрально противоположные точки окружности S, следует, что на черт. в тексте $l_1 || l$).

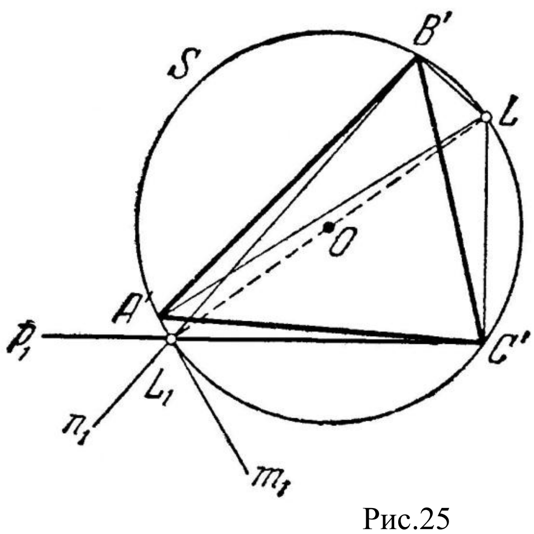


Рис.25

5. В дальнейшем нам потребуется следующее свойство полярного преобразования: *Если точка **A** лежит на поляре **b** точки **B**, то точка **B** лежит на поляре **a** точки **A*** (рис. 26, 27).

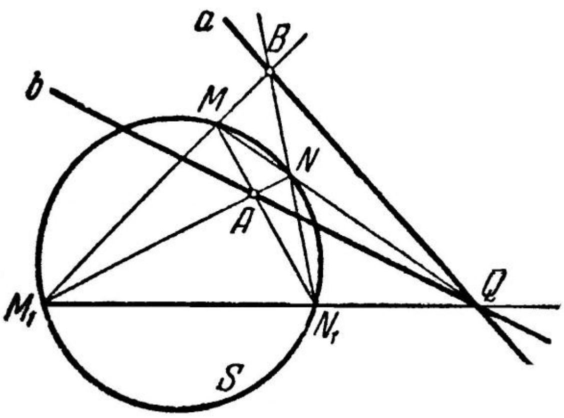


Рис.26

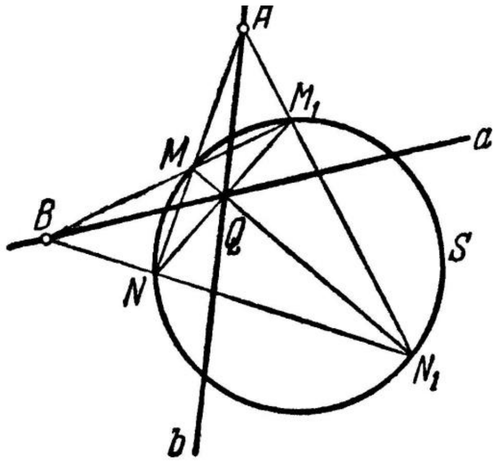


Рис.27

Докажите это самостоятельно.

Рассмотрим задачу в условии которой содержаться двойственные элементы между которыми требуется установить метрические отношения.

Задача.

Докажите, что если расстояние от центра O окружности S до точки A равно d, то расстояние от O до поляры a точки A относительно S равно $\frac{r^2}{d}$, где r – радиус S.

Решение.

Пусть точка A лежит вне S ($d>r$), AC и AD – касательные, проведённые из A к S, P – точка пересечения CD и OA (рис. 28, а). Очевидно, a совпадает с CD. Но из подобия треугольников OCA и OPC следует $\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OP}$ или $OP=\frac{OC^2}{OA}$, что и требовалось доказать.

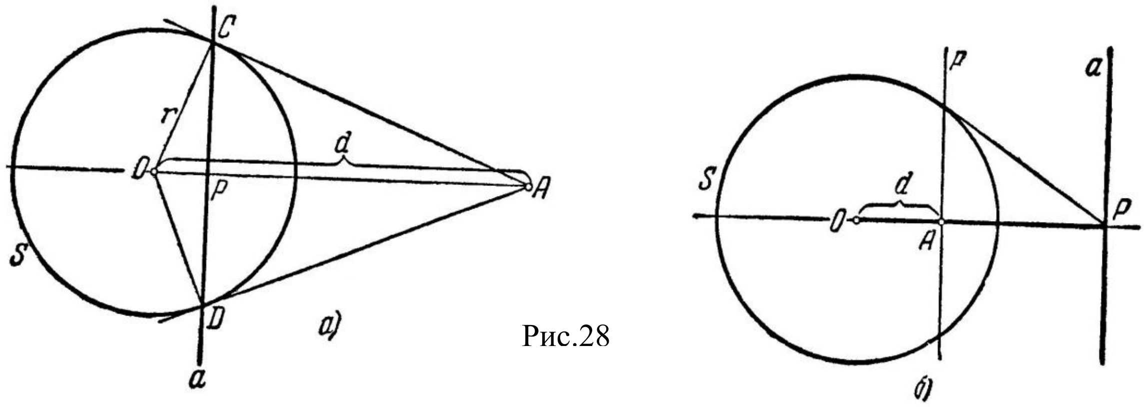


Рис.28

Если A лежит на окружности S ($d=r$), то утверждение задачи очевидно.

Пусть, наконец, A лежит внутри S ($d<r$); p – прямая, проходящая через A перпендикулярно к OA, P – полюс p (рис. 28, б). Очевидно, что P лежит вне S на

прямой OA; поэтому в силу уже доказанного $OA = \frac{r^2}{OP}$ или $OP = \frac{r^2}{OA}$. Но поляра a точки A есть перпендикуляр к OA, проведённый через точку P; поэтому OP есть расстояние от O до a и равенство $OP = \frac{r^2}{OA}$ есть как раз то, которое требуется доказать.

6. Рассмотрим еще одну задачу где в условии также фигурируют двойственные элементы, а при решении, наряду с использованием свойств элементарной геометрии, используются свойства полярного преобразования.

З а д а ч а.

Пусть A и B – две точки, a и b – их поляры относительно окружности S с центром O, AP и BQ – расстояния от A до b и от B до a. Докажите, что $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$.

Р е ш е н и е.

Пусть P_1 и Q_1 – точки пересечения OA с a и OB с b (рис. 29). Рассмотрим прямоугольные трапеции $OAPQ_1$ и $OBQP_1$. У них ·AOQ_1=·BOP_1 и стороны пропропорциональны: $\frac{OA}{OB} = \frac{OQ_1}{OP_1}$ (т.к. в силу результата предыдущей задачи $OA \cdot OP_1 = OB \cdot OQ_1 = r^2$). Отсюда вытекает, что эти две трапеции подобны между собой. Из подобия трапеций вытекает, что $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$, что и требовалось доказать.

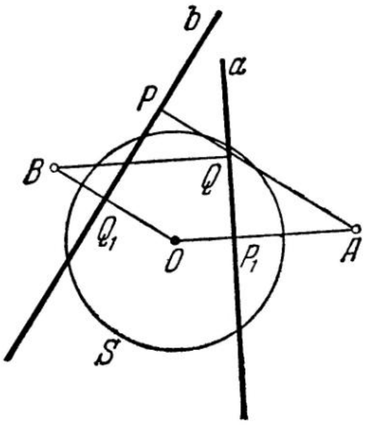


Рис.29

Раздел VI.

Занятие 8

Тема: *«Взаимные теоремы геометрии треугольника»*

Цель: *Ознакомление с образцами двойственных теорем геометрии треугольника. Способствовать уяснению понятия «автополярный треугольник». Ознакомить с доказательством двойственных теорем Чева и Менелая и их применением для получения других теорем и свойств геометрии треугольника. Ознакомление с теоремой Симпсона и ей взаимной теоремой.*

План.

1. Полярные и автополярные треугольники.
2. Свойства автополярного треугольника.
3. Методы построения автополярных треугольников.
4. Теорема Менелая.
5. Теорема Чевы.
6. Предложения доказываемые с помощью теорем Чева и Менелая.
7. Теорема Симпсона и ей взаимная.
8. Решение задач.

Литература.

Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. М., 1978.

Черняев М.П. Принцип двойственности при школьном преподавании геометрии// Математика и физика в средней школе, №2. 1935.

Атанасян Л.С. и др. Геометрия: Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса. М., 1996. С. 87-90, 151-152.

Яглом И.М. Геометрические преобразования II. М., 1956.

Энциклопедия элементарной математики. Т.4, М., 1970. С.151-153

Индивидуальные задания учащимся

Разработать, подготовить и защитить исследовательские проекты по следующим темам:

- *Исследование свойств автополярного треугольника.*
- *Выдающийся математик Джованни Чева и его теорема.*
- *Выдающийся математик Менелай Александрийский и его теорема.*
- *Приложения теорем Чева и Менелая.*
- *Выдающийся математик Симпсон и его теорема.*
- *Исследование двойственного преобразования относительно базисного треугольника.*

Проспект занятия

1. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ называются **полярными** относительно данной окружности, если стороны треугольника $A'B'C'$ являются полярами соответствующих вершин треугольника ABC.

! Докажите, что в этом случае стороны треугольника ABC будут являться полярами вершин треугольника $A'B'C'$.

Докажите следующее свойство полярных треугольников: Точки пересечения соответствующих сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ лежат на одной прямой.

Треугольник называется **автополярным** относительно данной окружности, если каждая сторона треугольника является полярой противоположной вершины.

2. Рассмотрим некоторые свойства автополярного треугольника. Докажем, что для каждого *тупоугольного* треугольника ABC существует единственная окружность, относительно которой он является автополярным; центром этой окружности является точка пересечения высот треугольника ABC; остроугольный или прямоугольный треугольник не является автополярным относительно никакой окружности.

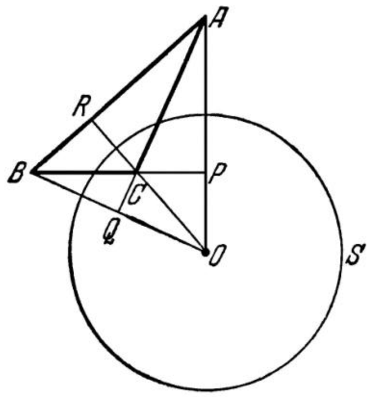


Рис.30

Рассмотрим треугольник ABC, автополярный относительно некоторой окружности S с центром O (рис. 30). Так как поляра BC точки A перпендикулярна к прямой OA, то точка O должна лежать на высоте AP треугольника ABC. Точно так же показывается, что точка O лежит на двух других высотах BQ и CR треугольника; таким образом, O совпадает с точкой пересечения высот треугольника ABC. Так как точки A и P, B и Q, C и R должны лежать по одну сторону от точки O пересечения высот, то треугольник ABC должен быть тупоугольным.

Определите радиус r окружности S, относительно которой заданный тупоугольный треугольник ABC с точками пересечения высот O является автополярным.

3. Рассмотрим предложения дающие методы построения автополярных треугольников: *Если в окружность* ***S*** *вписан четырехугольник, то треугольник, вершинами которого являются точка пересечения диагоналей четырехугольника и точки пересечения противоположных сторон, является автополярным относительно S (рис. 31, а).*

Точно так же, *если вокруг окружности S описан четырехугольник, то треугольник, образован-ный диагоналями четырех-угольника и прямой, соединяющей точки пересечения противоположных сторон, является автополярным относительно S (рис. 31, б).*

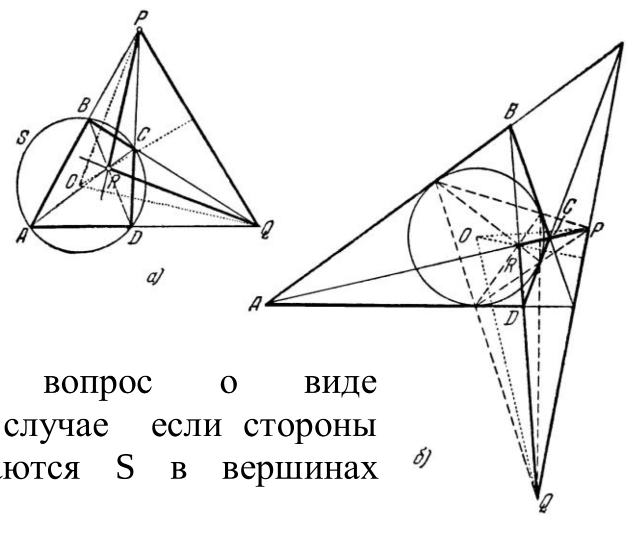


Рис.31

Исследуйте самостоятельно вопрос о виде автополярного треугольника в случае если стороны описанного четырехугольника касаются S в вершинах вписанного четырехугольника.

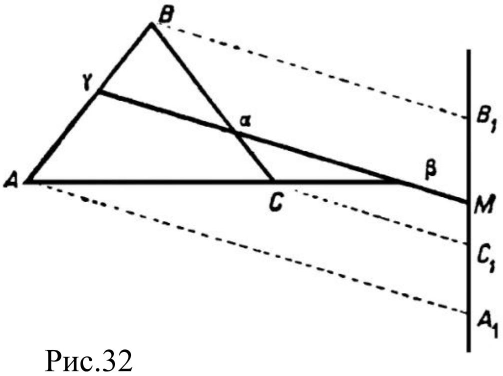


Рис.32

4. Теорема Менелая: ***Если пересечь стороны треугольника ABC секущею $\alpha\beta\gamma$, то между шестью полученными отрезками имеет место следующее соотношение $\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=1$.***

Проведем произвольную прямую, пересекающую прямую $\alpha\beta\gamma$ в точке M; затем, через все вершины треугольника ABC проводим прямые, параллельные секущей (рис.32); точки пересечения этих прямых с произвольно проведенной прямой обозначим соответственно через A_1, B_1 и C_1. Имеем: $\frac{\alpha B}{\alpha C}=\frac{MB_1}{MC_1}$, $\frac{\beta C}{\beta A}=\frac{MC_1}{MA_1}$, $\frac{\gamma A}{\lambda B}=\frac{MA_1}{MB_1}$. Перемножая эти три равенства почленно, получаем: $\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=\frac{MB_1}{MC_1}\cdot\frac{MC_1}{MA_1}\cdot\frac{MA_1}{MB_1}=1$, что и требовалось доказать.

Верно и обратное положение: ***Если на трех сторонах треугольника ABC или на их продолжениях взять такие три точки α, β, γ, что имеет место соотношение $\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=1$, то эти три точки лежат на одной и той же прямой.***

5. Теорема Чевы (взаимная теорема Менелая): ***Прямые, соединяющие произвольную точку O с тремя вершинами треугольника ABC, пересекают противоположные стороны или их продолжения в трех точках α, β, γ, которые удовлетворяют соотношению $\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=-1$.***

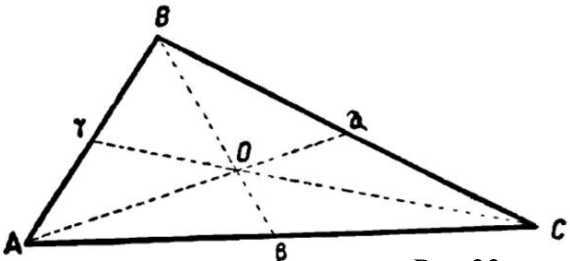


Рис.33

Рассмотрим треугольник $AB\beta$, пересеченный прямой $CO\gamma$ (рис. 33). По теореме Менелая имеем $\frac{C\beta}{CA}\cdot\frac{OB}{O\beta}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=1$. (*)

Применяя теорему Менелая к треугольнику βBC, пересеченному прямой $AO\alpha$, получим: $\frac{AC}{A\beta}\cdot\frac{O\beta}{OB}\cdot\frac{\alpha B}{\alpha C}=1$. (**)

Перемножая равенства (*) и (**) получим: $\frac{C\beta}{CA}\cdot\frac{AC}{A\beta}\cdot\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=1$, так как CA $=-AC$, $C\beta=-\beta C$ и $A\beta=-\beta A$, то данное равенство можно переписать как: $\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=-1$, что и требовалось доказать.

Обратное предложение также справедливо: ***Если через вершины треугольника ABC провести такие три прямые $A\alpha$, $B\beta$ и $C\gamma$, что имеет место равенство Чевы $\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=-1$, то эти три прямые сходятся в одной точке.***

Получите теорему Чевы подвергнув двойственному преобразованию теорему Менелая.

6. Используя теоремы Менелая и Чевы и им обратные, легко доказать следующие теоремы:

- Три медианы треугольника пересекаются в одной точке.
- Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- Три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.
- Основания перпендикуляров, опущенных из какой-нибудь точки окружности на стороны вписанного треугольника, находятся на одной прямой.
- Биссектриса двух внешних углов треугольника и третьего внутреннего сходятся в одной и той же точке.
- Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками прикосновения противоположных сторон и вписанного в треугольник круга, сходятся в одной точке.
- Точки пересечения биссектрис внешних углов треугольника с соответствующими сторонами лежат на одной и той же прямой.
- Точки пересечения биссектрис двух углов треугольника и биссектрисы угла, дополнительно к третьему углу, с противоположными сторонами лежат на одной прямой.
- Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками прикосновения вневписанного круга со сторонами треугольника, сходятся в одной точке.

Докажите перечисленные положения, и попробуйте сформулировать двойственные им предложения.

7. Теорема Симпсона: ***Основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки P окружности S на стороны вписанного в S треугольника ABC, лежат на одной прямой (прямой Симпсона)***.

① Построение чертежа соответствующего теореме (рис. 34).

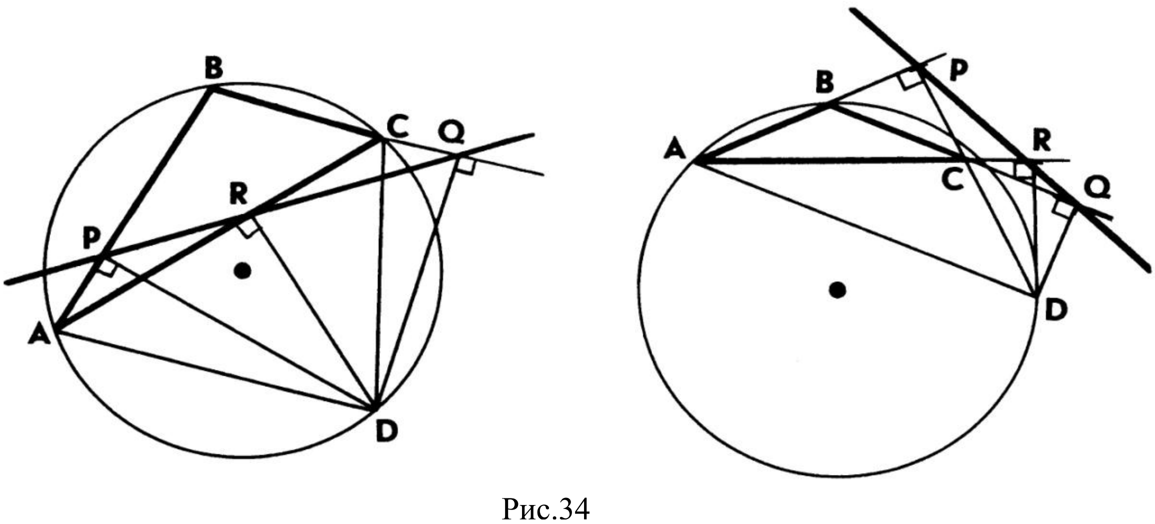


Рис.34

②Нахождение взаимных элементов.

Примем за центр двойственного преобразования центр O окружности S. При этом окружность S перейдет в другую окружность S_1 с тем же центром O (рис.); вписанному в S треугольнику ABC будет отвечать описанный около S_1 треугольник $A_1B_1C_1$, а точке P окружности S – касательная p окружности S_1; основание K перпендикуляра, опущенного из P на сторону AB, перейдет в прямую C_1D, где D – такая точка касательной p, что $\cdot C_1OD=90^o$, т.е. точка пересечения p с прямой OD, параллельной биссектриссе внешнего угла при вершине C_1 (ибо OC_1 – биссектриса внутреннего угла).

! Составьте словарик взаимных элементов, входящих в условие теоремы Симпсона

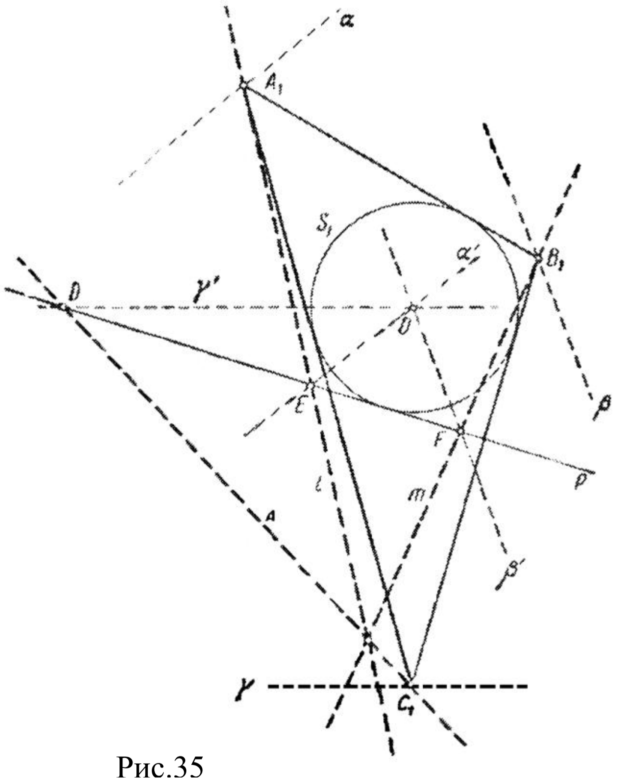


Рис.35

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы (рис. 35).

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

Взаимная теорема Симпсона. ***Прямые, соединяющие вершины треугольника $A_1B_1C_1$ с точками пересечения произвольной касательной p к вписанной в $A_1B_1C_1$ окружности S_1 с проведенными через центр O окружности S_1 прямыми, параллельными биссектрисам внешних углов при тех же вершинах треугольника пересекаются в одной точке.***

8. Рассмотрим некоторые задачи о треугольнике:
Сформулируйте задачи взаимные данным и докажите одно из полученных утверждений:

Задача 1. Прямая p пересекает стороны AB, BC и CA треугольника ABC (или их продолжения) в точках L, M и N. Обозначим точки пересечения прямых AM, BN и CL через R, S и T, как указано на рис. 36. Докажите, что прямые AS, BT и CR пересекаются в одной точке P.

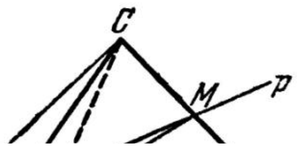


Рис.36

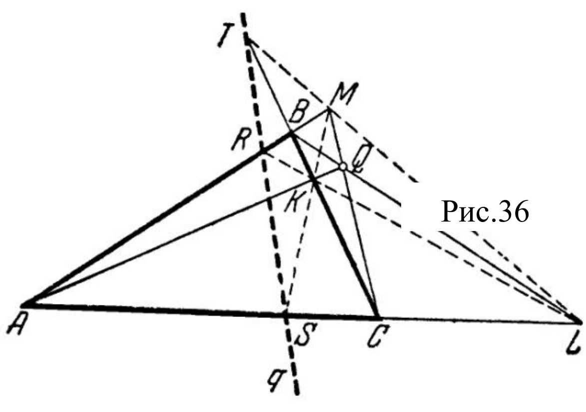


Рис.37

Задача 2. Даны треугольник

ABC и точка *Q*. Точки пересечения прямых *QA*, *QB* и *QC* с соответствующими сторонами треугольника *ABC* (или их продолжениями) обозначим через *K*, *L* и *M*; точки пересечения *KL* и *AB*, *KM* и *AC*, *LM* и *BC* – через *R*, *S* и *T* (рис. 37). Докажите, что точки *R*, *S* и *T* лежат на одной прямой *q*.

Заметим, что точку ***P*** называют иногда **полюсом прямой *p* относительно треугольника *ABC***, а прямую ***q*** называют **полярой точки *Q* относительно треугольника *ABC***. Таким образом мы конструктивно определили двойственное преобразование относительно некоторого треугольника.

Попробуйте относительно базисного треугольника получить результаты аналогичные тем, которые были получены двойственным преобразованием относительно базисной окружности.

З а д а ч а 3. Докажите, что ***прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной в треугольник окружностью, пересекаются в одной точке*** (рис.38).

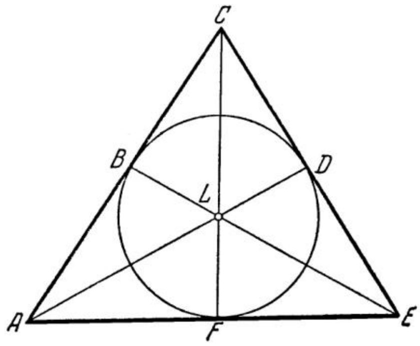


Рис.38

Р е ш е н и е. Условие данной задачи переходит при двойственном преобразовании в следующую теорему: ***точки пересечения сторон произвольного треугольника ABC с соответствующими сторонами треугольника, вершинами которого служат точки касания сторон ABC с вписанной в треугольник окружностью, лежат на одной прямой*** (рис. 39).

Убедитесь в этом самостоятельно используя приведенную выше технологию построения взаимных теорем.

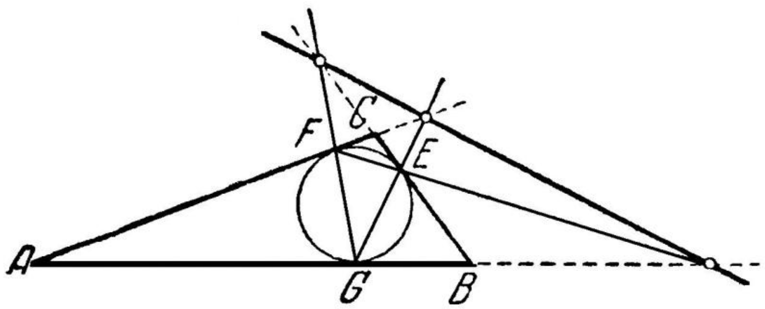


Рис.39

Занятие 9

Тема: *«Взаимные теоремы о четырехугольниках»*

Цель: *Ознакомление с образцами двойственных теорем о четырехугольниках. Способствовать самостоятельной творческой исследовательской деятельности.*

План.

1. Двойственные четырехугольники.
2. Пример двойственных теорем о четырехугольниках.
3. Решение задач о четырехугольниках.

Литература.

Черняев М.П. Принцип двойственности при школьном преподавании геометрии// Математика и физика в средней школе, №2. 1935. С.36-46.

Яглом И.М. Геометрические преобразования II. М., 1956.

Энциклопедия элементарной математики. Т.4, М., 1970.

Индивидуальные задания учащимся

Разработать, подготовить и защитить исследовательские проекты по следующим темам:

- *Исследование свойств двойственных четырехугольников.*
- *Взаимные теоремы о ромбе.*
- *Взаимные теоремы о прямоугольнике.*
- *Взаимные теоремы о трапеции.*
- *Взаимные теоремы о квадрате.*

Проспект занятия

1. Два **четырехугольник**а являются **двойственными** относительно данной окружности, если стороны одного из них являются полярами соответствующих вершин другого.

2. Рассмотрим примеры двойственных теорем о четырехугольниках.

Теорема 1. ***Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то они являются биссектрисами его углов***.

① Построение чертежа соответствующего теореме (рис. 40).

② Нахождение взаимных элементов.

При двойственном преобразовании относительно окружности S параллелограмм $ABCD$ переходит в четырехугольник $A'B'C'D'$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с центром O окружности S. Диагоналям AC и BD параллелограм-

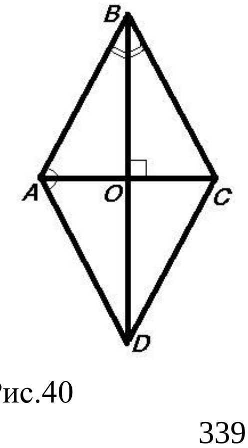


Рис.40

ма отвечают точки P и Q пересечения противоположных сторон четырехугольника $A'B'C'D'$; если диагонали параллелограмма взаимоперпендикулярны (т.е. параллелограмм является ромбом), то отрезок PQ виден из точки O под прямым углом.

Составьте словарик взаимных понятий входящих в условие теоремы.

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы (рис. 41).

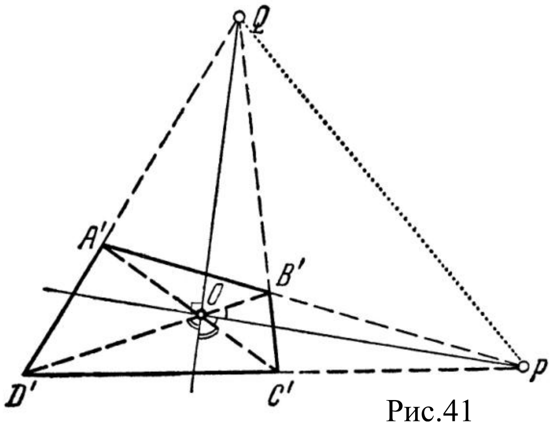


Рис.41

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

Взаимная теорема 1. ***Если отрезок, соединяющий точки P и Q, в которых пересекаются противоположные стороны четырехугольника $A'B'C'D'$, виден из точки пересечения диагоналей O под прямым углом, то OP и OQ – биссектрисы углов, образованных диагоналями четырехугольника.***

Рассмотрим еще один, более сложный, пример. Почти очевидным является следующее предложение

Теорема 2: ***Четырехугольник, вершинами которого служат середины сторон параллелограмма, сам является параллелограммом*** (рис. 42).

① Построим чертеж соответствующий теореме.

Выясним, в какое предложение переходит эта теорема при двойственном преобразовании.

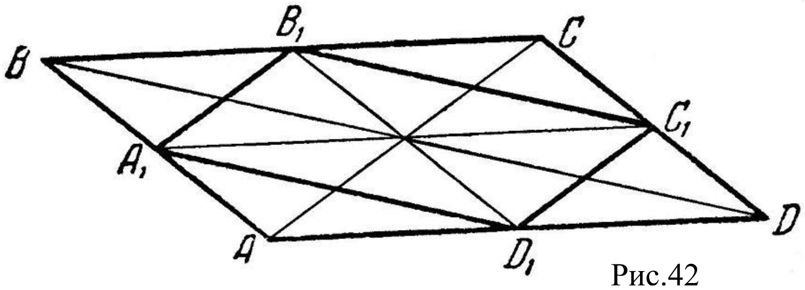


Рис.42

② Нахождение взаимных элементов.

Определим середины сторон параллелограмма как точки пересечения сторон со средними линиями – прямыми, проведёнными через точку пересечения диагоналей параллельно сторонам. В силу свойств полярного преобразования параллелограмм $ABCD$ переходит при полярном преобразовании в четырехугольник $A'B'C'D'$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с центром O окружности S. Противоположные вершины параллелограмма переходят в противоположные стороны четырехугольника $A'B'C'D'$, диагонали параллелограмма – в точки K и L пересечения противоположных сторон, точка пересечения диагоналей – в прямую KL. Средние линии параллелограмма (прямые, проведённые через точку пересечения диагоналей параллельно сторонам) при полярном преобразовании переходят в точки E и F пересечения прямой KL с диагоналями $A'C'$ и $B'D'$ четырехугольника $A'B'C'D'$. Следовательно, середины сторон параллелограмма переходят в прямые EB' и

ED', FA' и FC'.

Составьте словарик взаимных понятий входящих в условие теоремы.

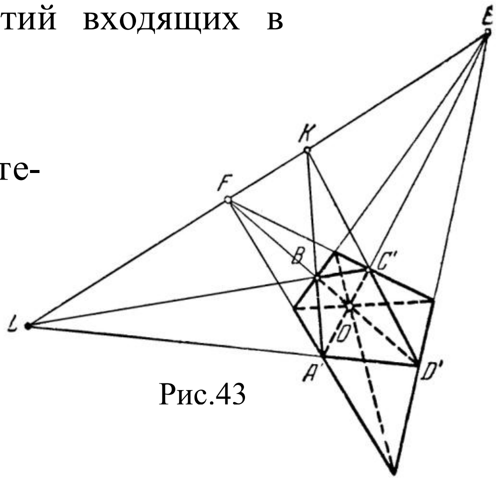


Рис.43

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы.

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

Взаимная теорема 2. ***Точка пересечения диагоналей четырехуголь-ника, сторонами которого служат прямые FA', EB', FC' и ED', совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника $A'B'C'D'$*** (рис. 43).

3. Рассмотрим несколько примеров решения задач о четырехугольниках с использованием двойственных преобразований.

Задание. *Докажите приведенные ниже предложения и выясните в какие теоремы они переходят при двойственном преобразовании относительно окружности, фигурирующей в условии.*

Пусть $ABCD$ – четырехугольник, описанный вокруг окружности S; A_1, B_1, C_1 и D_1 – точки касания его сторон с окружностью S (рис. 44). Докажите, что:

а) ***точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают***;

б) ***продолжения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проходят через точки пересечения противоположных сторон четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$***.

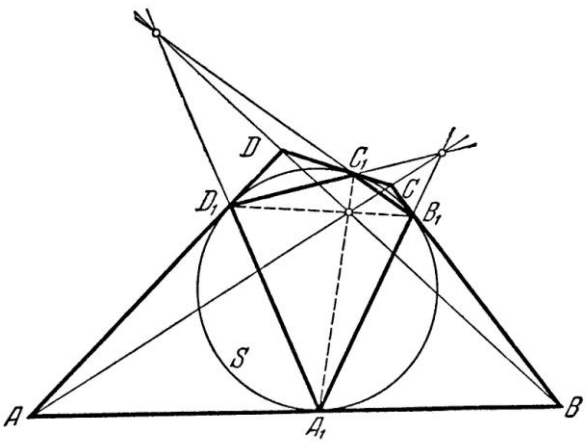


Рис.44

Решение.

Выясним, в какие предложения перейдут данные условия задачи.

Теорема задачи а) переходит в следующую. Пусть $A_1B_1C_1D_1$ – четырехугольник, описанный вокруг окружности S; A, B, C, D – точки касания его сторон с окружностью (рис. 45). В таком случае ***точки пересечения противополож-ных сторон четырех-***

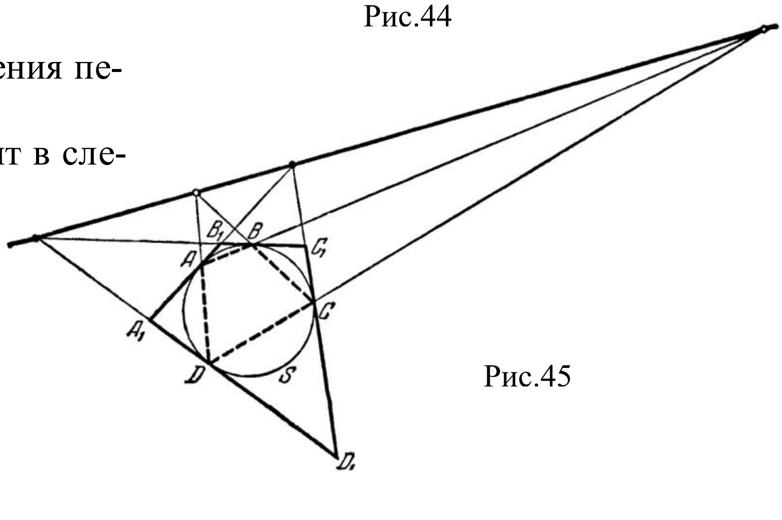


Рис.45

уголь-ника ABCD лежат на прямой, соединяющей точки пересечения противоположных сторон четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

Что же касается теоремы задачи б), то она при двойственном преобразовании переходит сама в себя (точке P пересечения противоположных сторон четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ соответствует в силу полярного преобразования диагональ AC четырехугольника $ABCD$, а диагонали AC соответствует точка P).

Занятие 10

Тема: *«Взаимные теоремы об окружностях»*

Цель: *Ознакомление с образцами двойственных теорем об окружностях. Способствовать самостоятельной творческой исследовательской деятельности.*

План.

1. Определение двойственных элементов.
2. Теорема об углах опирающихся на одну и ту же хорду и ей взаимная.
3. Теорема об угле опирающемся на диаметр и ей взаимная.
4. Теорема о произведении отрезков двух пересекающихся хорд и ей взаимная.
5. Теорема о произведении секущей и ей взаимная
6. Решение задач.

Литература.

Пистрак М.М. Этюды по геометрии // Журнал Московского математического кружка. №8. 1916.

Яглом И.М. Геометрические преобразования II. М., 1956.

Энциклопедия элементарной математики. Т.4, М., 1970.

Индивидуальные задания учащимся

Разработать, подготовить и защитить исследовательские проекты по следующим темам:

- *Взаимные теоремы геометрии окружностей.*
- *Разработка банка задач об окружности решаемых методом двойственных преобразований.*

Проспект занятия

1. Проведем из центра O окружности S другую окружность W(O, R). Окружности W будет взаимна окружность W′, радиуса $\frac{1}{R}$, концентрическая с W. Действительно, всякой точке окружности W будет отвечать прямая на расстоянии $\frac{1}{R}$ от O. Очевидно что огибающая таких прямых является окружностью W′.[1] Для того, чтобы найти свойства окружности, взаимные известным свойствам окружности же, за особенную точку двойственного преобразования мы будем принимать центр этой окружности.

2. Т е о р е м а 1. ***Вписанные углы опирающиеся на одну и ту же хорду, равны между собой и равны углу между этой хордой и касательной к окружности в конце хорды.***

[1] В случае выбора в качестве особенной точки, точки отличной от центра исходной окружности, в результате двойственного преобразования окружность будет переходить в одну из кривых второго порядка: эллипс, параболу или гиперболу.

① Построение чертежа соответствующего теореме (рис. 46).

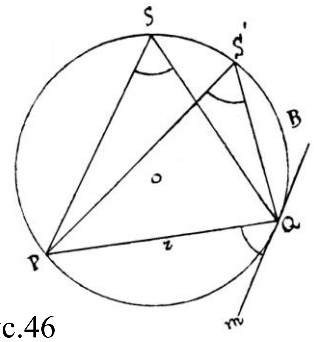


Рис.46

② Нахождение взаимных элементов.
Определим взаимные элементы:

Исходное понятие	***Двойственное понятие***
Окружность w	Окружность w'
Постоянная хорда r с концами P и Q	Постоянная точка R пересечения двух касательных p и q
Точки окружности S, S'	Касательные окружности s, s'
Хорды SP, SQ; $S'P$, $S'Q$	Точки пересечения прямых (s, p), (s, q); (s', p), (s', q)
Угол между SP и SQ; $S'P$ и $S'Q$	Угол, под которым из O видны отрезки касательных s, s' между p и q (угол между точками (s, p), (s, q) и т.д.)
Касательная m в P (или Q)	Точка M касания на p (или q)
Угол между r и m	Угол между R и M

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы (рис. 47).

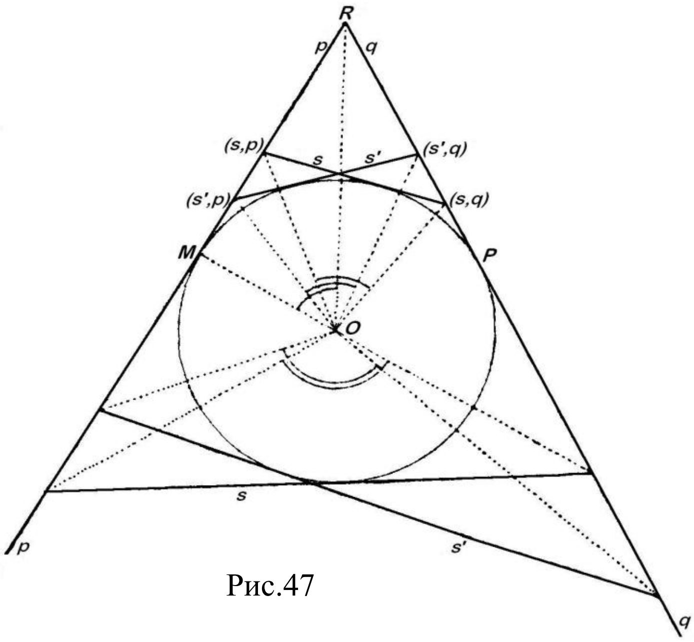


Рис.47

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

Взаимная теорема 1. ***Отрезок касательной к окружности (s, s′) между двумя постоянными касательными (p, q) виден из центра окружности под постоянным углом, равным углу, под которым из центра виден отрезок постоянной касательной (p или q) от точки касания (M) до пересечения (R) постоянных касательных (p и q).***

3. Т е о р е м а 2. ***Вписанный угол, опирающийся на диаметр – прямой.***

① Построение чертежа соответствующего теореме (рис. 48).

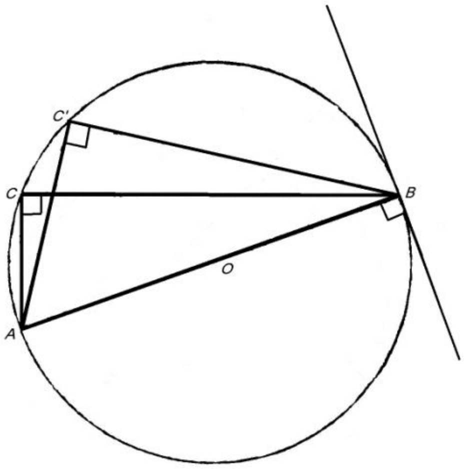


Рис.48

② Нахождение взаимных элементов.

Эта теорема является частным случаем предыдущей, когда хорда r проходит через центр O. Взаимная ей точка R будет тогда бесконечно-удаленной точкой, т.е. постоянные касательные будут параллельны.

! Составьте самостоятельно словарик для получения взаимной теоремы.

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы (рис. 49).

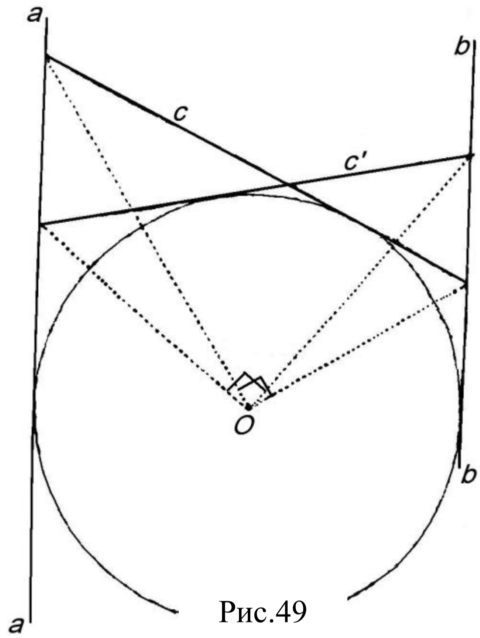


Рис.49

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

В з а и м н а я т е о р е м а 1. ***Отрезок касательной между двумя параллельными касательными к окружности виден из центра под прямым углом.***

4. Т е о р е м а 3. ***Произведение отрезков хорд, проходящих через данную точку внутри окружности, есть величина постоянная, равная квадрату полухорды, делящейся данной точкой пополам (рис. 50:*** $MS \cdot SN = FS \cdot SQ = Const = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$***).***

① Построение чертежа соответствующего теореме.

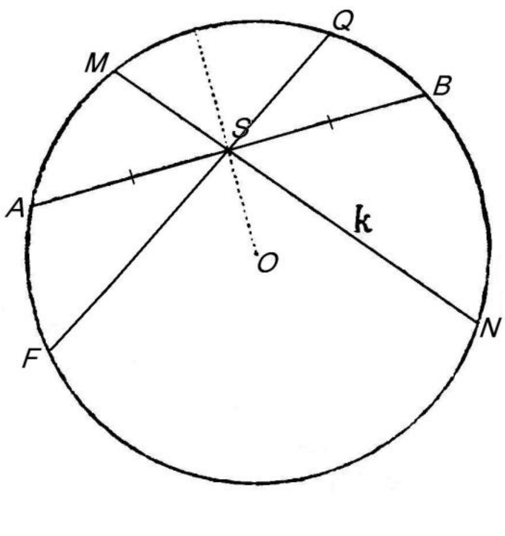


Рис.50

② Нахождение взаимных элементов.

Исходное понятие	***Двойственное понятие***
Окружность w	Окружность $w^{/}$
Точка S внутри окружности	Прямая s вне окружности
Прямая k через S	Точка K на s
Пересечение k с окружностью в точках M и N	Касательные m и n из K к окружности
Расстояния SM, SN	Выражения $\frac{S_1M_1}{OS_1 \cdot OM_1}$; $\frac{S_1N_1}{OS_1 \cdot ON_1}$; но $OM_1=ON_1=r$ – радиус окружности, следовательно $\overline{(s,m)} = \frac{S_1M_1}{r \cdot OS_1}$; $\overline{(s,n)} = \frac{S_1N_1}{r \cdot OS_1}$
Хорда AB через S, перпендикулярная OS; точки A и B	Точка S_1 на перпендикуляре к s в пересечении с s; касательные из S_1 – a и b
Расстояние SA (SB)	Расстояние $\overline{(s,a)} = \overline{(s,b)} = \frac{S_1A_1}{r \cdot OS_1} = \frac{S_1B_1}{r \cdot OS_1}$
Равенство $SM{\cdot}SN=AS^2=BS^2$	Равенство $\overline{(s,m)} \cdot \overline{(s,n)} = \overline{(s,a)}^2 = \overline{(s,b)}^2$ После сокращения: $S_1M_1{\cdot}S_1N_1=S_1A_1^{\,2}=S_1B_1^{\,2}$

Но мы знаем что, $S_1M_1{\cdot}S_1N^{/}_1=S_1A_1^{\,2}$, следовательно $S_1N_1= S_1N^{/}_1$. Нетрудно видеть отсюда, что точки N_1 и $N^{/}_1$ симметрично расположены относительно OS_1. Заметим также, что точки S и $S^{/}_1$ взаимно-обратны (по принципу инверсии).

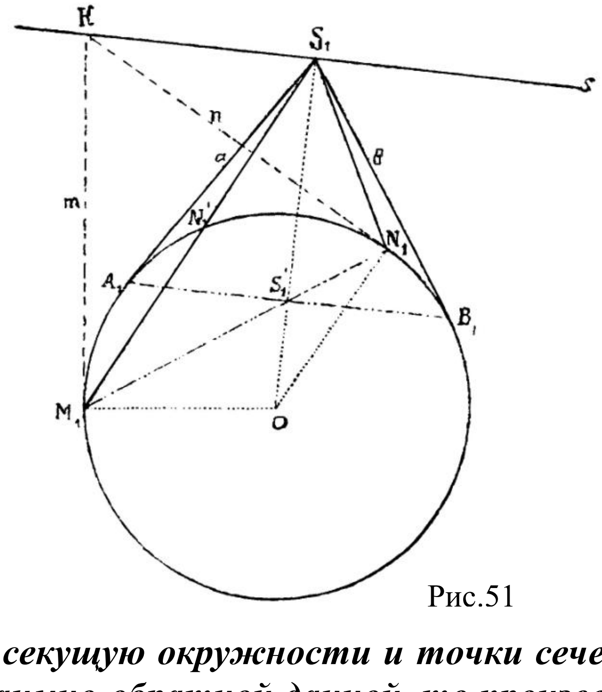


Рис.51

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы (рис. 51).

④ Конструирование теоремы взаимной данной.

В з а и м н а я т е о р е м а 3. ***Если через какую-нибудь точку $S^{/}_1$ провести секущую окружности и точки сечения (M_1, N_1) соединить с точкой (S_1) взаимно-обратной данной, то произведение полученных отрезков будет величиной постоянной, равной квадрату касательной (S_1A_1) из точки взаимно-обратной к данной.***

5. Т е о р е м а 4. ***Произведение секущей из данной точки на её внешнюю часть постоянно и равно квадрату касательной к окружности из этой точки*** (рис. 52: $PQ \cdot PR = Const = PT^2$)**.**

① Построение чертежа соответствующего теореме.

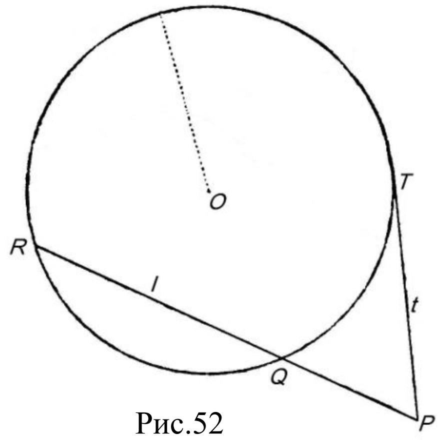


Рис.52

② Нахождение взаимных элементов.

<u>Исходное понятие</u>	***<u>Двойственное понятие</u>***
Окружность w	Окружность w'
Точка P вне окружности	Прямая p секущая окружность
Секущая l через P	Точка L на p
Пересечение l с окружностью в точках Q и R	Касательные q и r из L к окружности
Касательная t из P и точка касания T на ней	Точка T_1 пересечения p с окружностью и касательная t_1 через нее
Расстояния PQ, PR, PT	Расстояния (p, q), (p, r), (p, t_1) $\overline{(p,q)} = \dfrac{P_1Q_1}{OP_1 \cdot OQ_1}$; $\overline{(p,r)} = \dfrac{P_1R_1}{OP_1 \cdot OR_1}$; $\overline{(p,t_1)} = \dfrac{P_1T_1}{OP_1 \cdot OT_1}$.
Равенство $PQ \cdot PR = Const = PT^2$	Равенство $\overline{(p,q)} \cdot \overline{(p,r)} = \overline{(p,t_1)}^2$ После сокращения: $P_1Q_1 \cdot P_1R_1 = Const = P_1T_1^2$

Но мы знаем что, $P_1R_1 \cdot P_1Q'_1 = P_1T_1^2$, следовательно $P_1Q_1 = P_1Q'_1$. Отсюда легко понять, что точки Q_1 и Q'_1 симметрично расположены относительно OP_1. Заметим также, что точки P и P'_1 взаимно-обратны (по принципу инверсии).

③ Построение чертежа двойственного чертежу исходной теоремы.

④ Конструирование теоремы взаимной данной (рис. 53).

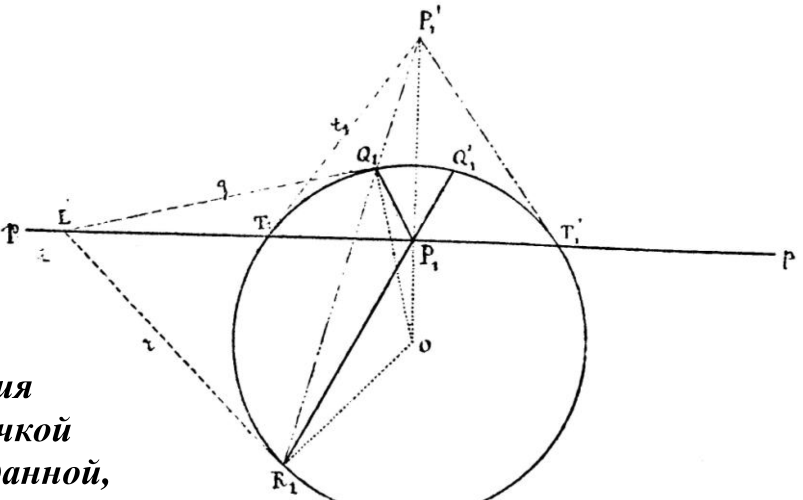


Рис.53

В з а и м н а я т е о р е м а 3. ***Если через какую-нибудь точку P'_1 провести секущую окружности и точки сечения (Q_1, R_1) соединить с точкой (P_1) взаимно-обратной данной, то произведение полученных отрезков будет величиной постоянной, равной квадрату полухорды (P_1T_1) делящейся взаимно-обратной точкой пополам.***

6. З а д а ч а.

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – три хорды окружности S, пересекающиеся в одной точке O, X – произвольная точка той же окружности. Докажите, что точки P, Q и R пересечения прямых XA_1, XB_1, XC_1 со сторонами BC, CA, AB треугольника ABC лежат на одной прямой, проходящей через O (рис. 54). Сформулируйте задачу двойственную данной и найдите решение обеих задач.

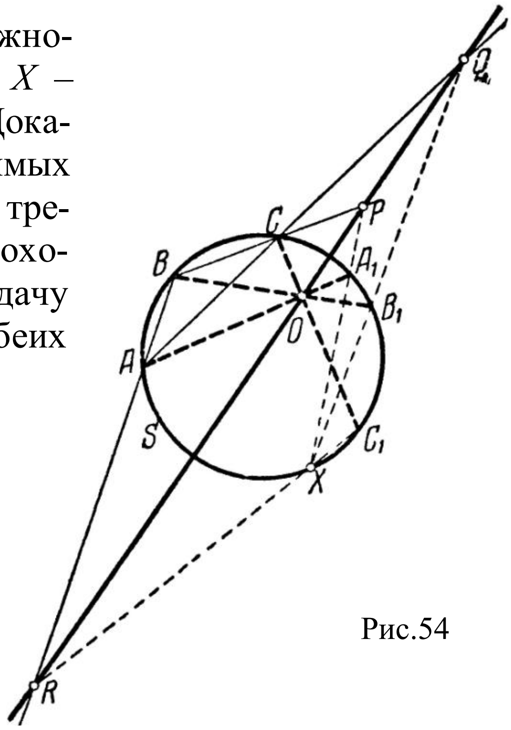


Рис.54

Р е ш е н и е.

Предложение, выражающее условие задачи переходит при двойственном преобразовании в следующее. Пусть a и a_1, b и b_1, c и c_1 – касательные к окружности S, проведённые из точек K, L и M, лежащих на одной прямой o, x – произвольная касательная к той же окружности. В таком случае прямые, соединяющие вершины образованного a, b и c треугольника с соответствующими точками пересечения x с прямыми a_1, b_1 и c_1, пересекаются в одной точке, лежащей на прямой o (рис.55).

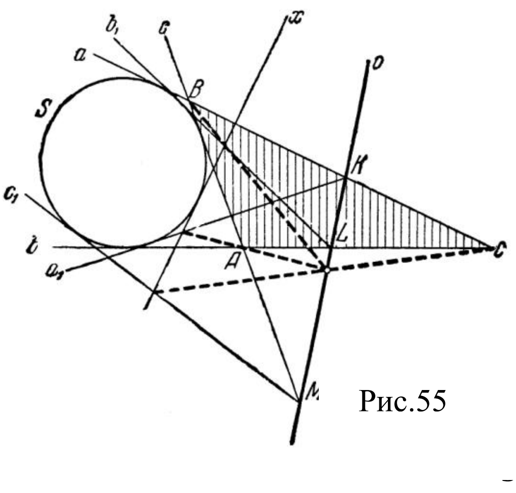


Рис.55

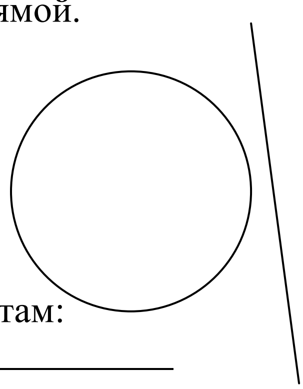
Найдите решение исходной и взаимной задачи самостоятельно.

Приложение 5. Инструментарий опытно-экспериментальной работы

ДИАГНОСТИРУЮЩАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА (ТЕСТ)

1. На плоскости принцип двойственности заключается в том, что ___
____
____

2. Постройте элементы двойственные заданной точке и прямой.
Опишите выполненные построения.



3. Назовите объекты двойственные несобственным элементам:
A_∞– _______________________________________
a_∞– _______________________________________

4. Какие понятия двойственны «расстоянию между двумя точками» и «углу между двумя прямыми»? ______________________________
____
____
____

5. Приведите примеры двойственных теорем о треугольниках: ___________
____
____
____

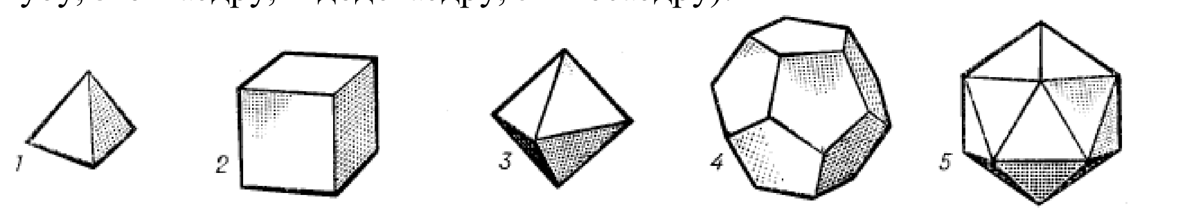
6. Приведите примеры двойственных теорем о четырехугольниках: _______
____
____
____

7. Приведите примеры двойственных теорем об окружности: _____________
____
____
____

8. Опишите технологию использования принципа двойственности для решения задач на построение.

9. Опишите технологию конструирования теоремы двойственной данной.

10. Определите объекты двойственные платоновым телам (1-тетраэдру, 2-кубу, 3-октаэдру, 4-додекаэдру, 5-икосаэдру):



МАССИВ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ДИАГНОСТИРУЮЩЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ работы	№ вопроса										n	$К_у = \frac{n}{m}$
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	**1,0**
2	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	0,5	**9**	**0,9**
3	1	1	0,5	0,5	1	1	1	0,5	0,5	0	**7**	**0,7**
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**9**	**0,9**
5	1	1	1	0	1	1	1	0,5	1	0,5	**8**	**0,8**
6	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	**8**	**0,8**
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	**1,0**
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	**1,0**
9	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	0,5	**9**	**0,9**
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**9**	**0,9**
11	1	1	0,5	0,5	1	1	1	0,5	0,5	0	**7**	**0,7**
12	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	**8**	**0,8**
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	**1,0**
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	**1,0**
15	1	1	0,5	1	1	1	1	0,5	1	0	**8**	**0,8**
16	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	0,5	**9**	**0,9**
17	1	1	1	0,5	1	1	1	0,5	1	0	**8**	**0,8**
18	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	0,5	**9**	**0,9**
19	1	1	1	1	1	1	1	0,5	1	0,5	**9**	**0,9**
Среднее	1,0	1,0	0,89	0,76	1,0	0,95	1,0	0,84	0,92	0,42	**8,78**	**0,878**

$$\overline{K_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_{y_n}}{n} = 0{,}878;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(K_{y_i} - \overline{K_y})^2} = \sqrt{\frac{1}{19}\left[5\cdot(0{,}878-1)^2 + 7\cdot(0{,}878-0{,}9)^2 + 5\cdot(0{,}878-0{,}8)^2 + 2\cdot(0{,}878-0{,}7)^2\right]} =$$

$$= 0{,}0950335;$$

$$\upsilon = \frac{\sigma}{\overline{K_y}} = \frac{0{,}095}{0{,}878} = 0{,}1082004;$$

$$\varepsilon = \frac{\upsilon}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}1082004}{\sqrt{19}} = 0{,}024802.$$

Методика диагностики готовности учителей математики к использованию принципа двойственности в обучении математике

1. Математика – является отражением реального мира.

а) согласен;
б) скорее да, чем нет;
в) скорее нет, чем да;
г) не согласен;
д) затрудняюсь ответить.

2. В реальной действительности для каждого понятия, всегда найдется двойственное, дополняющее первое.

а) согласен;
б) скорее да, чем нет;
в) скорее нет, чем да;
г) не согласен;
д) затрудняюсь ответить.

3. В математике отражается двойственность строения бытия.

а) согласен;
б) скорее да, чем нет;
в) скорее нет, чем да;
г) не согласен;
д) затрудняюсь ответить.

4. Я знаю о проявлении двойственности в таких областях математики, как: ____

____

5. В геометрии принцип двойственности заключается в том, что ____

____

____

____

6. В геометрии мне известны следующие

- двойственные аксиомы: ______________________________

____

____

____

- двойственные фигуры: ______________________________

____

____

- двойственные теоремы: ______________________________

____

____

____

- другое: ______________________________________

____

____

7. Я знаю, как используя принцип двойственности можно:
□ открывать новые теоремы;
□ решать задачи на построение;
□ решать метрические задачи;
□ решать задачи на доказательство;
□ другое :____.

8. Думаю, что принцип двойственности можно использовать в:
□ эвристиках;
□ обобщении;
□ систематизации;
□ мнемонических приемах;
□ другое: ____.

9. Принцип двойственности можно использовать при обучении математике.
а) согласен;
б) скорее да, чем нет;
в) скорее нет, чем да;
г) не согласен;
д) затрудняюсь ответить.

10. Мне известно о способах использования принципа двойственности при обучении математики.
а) согласен;
б) скорее да, чем нет;
в) скорее нет, чем да;
г) не согласен;
д) затрудняюсь ответить.

11. Мне знакомы методические разработки и литература, которые позволяют использовать принцип двойственности при обучении математики.
а) согласен;
б) скорее да, чем нет;
в) скорее нет, чем да;
г) не согласен;
д) затрудняюсь ответить.

12. Я хотел бы использовать принцип двойственности при обучении математики.
а) согласен;
б) скорее да, чем нет;
в) скорее нет, чем да;
г) не согласен;
д) затрудняюсь ответить.

Благодарим Вас за участие в исследовании!

Анкета ученика (констатирующий эксперимент)**.**

Дорогой друг!

Кафедра геометрии и методики преподавания математики Ростовского госпедуниверситета исследует отношение школьников к изучению геометрии. Убедительно просим тебя ответить на поставленные в анкете вопросы.

1. Вы учитесь в ____ классе, который по профилю является:
□ общеобразовательным;
□ математическим;
□ физико-математическим;
□ социально-экономическим;
□ другое ____________________________.

2. Нравится ли Вам математика?
□ да, очень нравится;
□ нравится;
□ иногда нравится;
□ не нравится;
□ затрудняюсь ответить.

3. Насколько, по Вашему мнению, интересна геометрия?
□ очень интересна;
□ интересна;
□ не интересна;
□ скучна;
□ затрудняюсь ответить.

4. Нужно ли изучать геометрию в школе?
□ конечно нужно;
□ вероятно нужно;
□ не нужно;
□ абсолютно бесполезный предмет;
□ затрудняюсь ответить.

5. Как вы оцениваете уровень своих знаний по геометрии в рамках школьной программы?
□ высокий;
□ достаточный;
□ средний;
□ низкий;
□ затрудняюсь ответить.

6. Интересны ли для Вас школьные уроки геометрии?
□ всегда интересны;
□ иногда интересны;
□ не интересны;
□ скучны;
□ затрудняюсь ответить.

7. Легко ли Вы можете самостоятельно отыскать решение предлагаемых Вам учителем геометрических задач, либо найти способ доказательства?

□ достаточно легко;
□ иногда легко;
□ достаточно трудно;
□ не могу;
□ затрудняюсь ответить.

8. Замечали ли Вы сами какие-либо геометрические закономерности, либо интересные геометрические факты?

□ да, и достаточно часто;
□ иногда замечаю;
□ никогда не замечал, но хотел бы;
□ нет;
□ затрудняюсь ответить.

9. Знакомы ли Вы с литературой для дополнительного чтения по геометрии?

□ да, и достаточно часто к ней обращаюсь;
□ да, но редко её использую;
□ нет, но хотел бы познакомиться;
□ нет, мне это не нужно;
□ затрудняюсь ответить.

10. Можете ли Вы провести самостоятельную исследовательскую работу по геометрии?

□ да, и уже достаточно успешно проводил её;
□ думаю, что могу, но сам не пробовал;
□ не могу, но хотел бы научиться;
□ не могу и не хочу;
□ затрудняюсь ответить.

11. Хотели бы Вы расширить область своих знаний по геометрии и познакомиться с новыми занимательными фактами, которые, возможно, приятно удивят Вас и изменят Ваши представления о математике как школьном предмете и о математике как науке?

□ да, очень хочу;
□ думаю, стоит попробовать;
□ не могу сказать, что хочу;
□ уверен, что не хочу;
□ затрудняюсь ответить.

12. Перечислите несколько прилагательных, с которыми у Вас ассоциируются:

математика ____
____

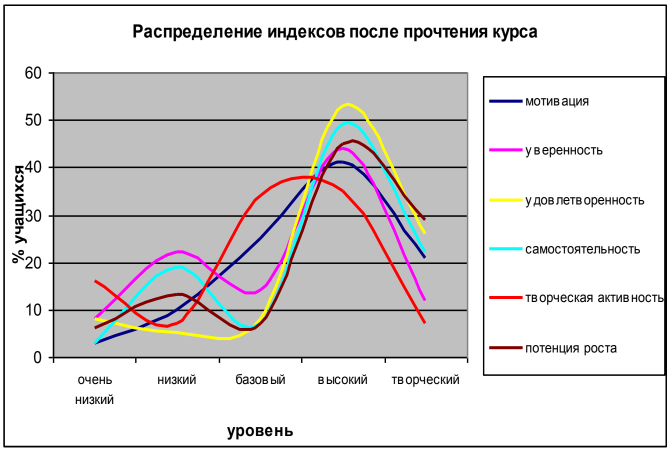
геометрия ____
____

БЛАГОДАРИМ ВАС ЗА УЧАСТИЕ В ИССЛЕДОВАНИИ!

МАССИВ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ АНКЕТЫ УЧЕНИКА

№ п/п	№ рес-пон-дента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	моти-вация	уве-рен	удов летв	самост	твор-чест-во	пот. рост	Σ
1	33М8_01	в	в	а	а	б	г	в	а	в	б	а	0,5	0,5	-1	-0,5	0,33	1	0,83
2	33М8_02	б	а	а	а	б	а	б	б	б	в	а	1	0,5	1	0,5	0,17	1	4,17
3	33М8_03	б	б	б	а	а	б	б	б	б	б	а	0,66	1	0,5	0,5	0,5	1	4,16
4	33М8_04	б	б	б	а	в	а	б	б	а	б	а	0,66	-0,5	1	0,5	0,66	1	3,32
5	33М8_05	б	б	б	а	а	а	б	б	а	б	а	0,66	1	1	0,5	0,66	1	4,82
6	33М8_06	б	б	б	а	б	а	а	б	а	б	а	0,66	0,5	1	1	0,66	1	4,82
7	33М8_07	б	а	а	а	б	а	а	б	б	б	а	1	0,5	1	1	0,5	1	5
8	33М8_08	б	в	б	б	б	б	б	б	б	б	б	0,17	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	2,67
9	33М8_09	б	б	а	а	а	а	а	б	б	б	а	0,83	1	1	1	0,5	1	5,33
10	33М8_10	б	б	б	а	б	б	б	б	б	б	б	0,66	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	3,16
11	33М8_11	б	б	б	а	б	б	а	б	б	б	б	0,66	0,5	0,5	1	0,5	0,5	3,66
12	33М8_12	б	а	а	а	б	а	б	б	б	б	а	1	0,5	1	0,5	0,5	1	4,5
13	33М8_13	б	в	б	б	б	б	б	б	в	б	б	0,17	0,5	0,5	0,5	0,17	0,5	2,34
14	33М8_14	б	в	б	а	б	б	б	б	б	б	б	0,33	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	2,83
15	33М8_15	б	б	а	а	б	а	б	а	а	б	б	0,83	0,5	1	0,5	0,83	0,5	4,16
16	33М8_16	б	б	б	б	в	а	б	б	б	б	б	0,5	-0,5	1	0,5	0,5	0,5	2,5
17	33М8_17	б	в	б	а	б	б	а	а	б	б	а	0,33	0,5	0,5	1	0,66	1	3,99
18	33М8_18	б	б	а	а	б	б	б	а	б	б	б	0,83	0,5	0,5	0,5	0,66	0,5	3,49
19	33М8_19	б	б	б	а	б	б	а	б	б	б	б	0,66	0,5	0,5	1	0,5	0,5	3,66
20	33М8_20	б	б	б	а	в	б	в	б	в	б	а	0,66	-0,5	0,5	-0,5	0,17	1	1,33
21	33М8_21	б	б	б	а	в	б	в	в	б	б	б	0,66	-0,5	0,5	-0,5	0,17	0,5	0,83
22	33М8_22	б	в	б	б	в	б	в	б	б	в	б	0,17	-0,5	0,5	-0,5	0,17	0,5	0,34
23	33М8_23	б	д	д	а	в	б	б	в	в	б	а	0,33	-0,5	0,5	0,5	-0,17	1	1,66
24	33М8_24	б	д	б	б	б	а	а	а	б	б	а	0,33	0,5	1	1	0,66	1	4,49
25	33М8_25	б	а	а	а	б	а	а	б	в	б	а	1	0,5	1	1	0,17	1	4,67
26	33М8_26	б	г	г	а	в	б	б	г	а	д	б	-0,33	-0,5	0,5	0,5	0	0,5	0,67
27	33М8_27	б	а	а	а	в	а	б	а	б	б	б	1	-0,5	1	0,5	0,66	0,5	3,16
28	33М8_28	б	в	б	а	в	б	а	б	д	б	б	0,33	-0,5	0,5	1	0,33	0,5	2,16
29	33М8_29	б	б	б	а	а	а	а	б	б	б	б	0,66	1	1	1	0,5	0,5	4,66
30	33М8_30	б	б	б	б	д	б	б	в	в	б	б	0,5	0	0,5	0,5	-0,17	0,5	1,83
31	33М8_31	б	б	а	а	б	б	а	а	б	а	а	0,83	0,5	0,5	1	0,83	1	4,66
32	33М8_32	б	б	а	а	д	а	а	а	б	а	а	0,83	0	1	1	0,83	1	4,66
33	33М8_33	б	в	д	д	в	д	б	б	д	д	б	-0,17	-0,5	0	0,5	0,17	0,5	0,5
34	33М8_34	б	в	б	а	в	б	б	б	в	б	б	0,33	-0,5	0,5	0,5	0,17	0,5	1,5
35	33М8_35	б	а	б	а	в	б	а	в	б	в	б	0,83	-0,5	0,5	1	-0,17	0,5	2,16
36	33М8_36	б	б	б	а	д	а	г	б	б	а	б	0,66	0	1	-1	0,66	0,5	1,82
37	33М8_37	б	в	д	а	д	б	б	б	б	в	б	0,17	0	0,5	0,5	0,17	0,5	1,84
38	33М8_38	б	в	б	а	в	б	б	б	б	б	д	0,33	-0,5	0,5	0,5	0,5	0	1,33
39	33М8_39	б	г	в	г	г	в	в	г	г	г	б	-0,83	-1	-0,5	-0,5	-1	0,5	-3,33
40	33М8_40	б	в	б	б	б	б	б	г	в	д	в	0,17	0,5	0,5	0,5	-0,5	-0,5	0,67
41	33М8_41	б	в	г	б	в	б	б	в	в	г	б	-0,33	-0,5	0,5	0,5	-0,66	0,5	0,01
42	33М8_42	б	в	г	б	в	б	в	в	в	г	в	-0,33	-0,5	0,5	-0,5	-0,66	-0,5	-1,99
43	33М8_43	б	д	д	д	д	б	б	б	в	в	в	0	0	0,5	0,5	-0,17	-0,5	0,33
44	33М8_44	б	в	б	б	г	б	в	г	в	г	а	0,17	-1	0,5	-0,5	-0,83	1	-0,66
45	33М8_45	б	в	б	б	б	б	б	а	в	б	б	0,17	0,5	0,5	0,5	0,33	0,5	2,5
46	33М10_01	в	б	в	д	б	в	а	б	г	д	б	0	0,5	-0,5	1	0	0,5	1,5
47	33М10_02	в	д	б	а	б	б	б	б	б	в	б	0,5	0,5	0,5	0,5	0,17	0,5	2,67
48	33М10_03	в	д	б	б	а	г	а	б	б	д	д	0,33	1	-1	1	0,33	0	1,66
49	33М10_04	в	б	а	а	а	б	а	б	б	д	б	0,83	1	0,5	1	0,33	0,5	4,16
50	33М10_05	в	в	в	б	б	д	б	б	г	д	б	-0,17	0,5	0	0,5	-0,17	0,5	1,16
51	33М10_06	в	в	б	б	д	б	д	б	б	д	д	0,17	0	0,5	0	0,33	0	1
52	33М10_07	в	б	д	а	б	б	б	д	б	д	д	0,5	0,5	0,5	0,5	0,17	0	2,17
53	33М10_08	в	б	д	а	д	б	б	д	д	в	д	0,5	0	0,5	0,5	-0,17	0	1,33
54	33М10_09	в	б	г	б	в	г	в	б	г	б	б	0	-0,5	-1	-0,5	0	0,5	-1,5
55	33М10_10	в	б	г	а	б	г	д	б	в	д	б	0,17	0,5	-1	0	0	0,5	0,17
56	33М10_11	в	б	б	а	д	б	б	б	б	д	а	0,66	0	0,5	0,5	0,33	1	2,99
57	33М10_12	в	д	д	а	б	б	б	д	б	г	в	0,33	0,5	0,5	0,5	-0,17	-0,5	1,16

58	33M10_13	в	б	а	а	б	д	б	а	б	б	б	0,83	0,5	0	0,5	0,66	0,5	2,99
59	33M10_14	в	б	г	б	б	б	б	а	г	г	б	0	0,5	0,5	0,5	-0,33	0,5	1,67
60	33M10_15	в	б	б	а	в	б	б	в	г	г	б	0,66	-0,5	0,5	0,5	-0,83	0,5	0,83
61	33M10_16	в	д	г	а	б	б	а	д	в	б	а	0	0,5	0,5	1	0	1	3
62	R33M901	б	г	г	г	д	в	в	б	г	д	г	-1	0	-0,5	-0,5	0	-1	-3
63	R33M902	б	г	г	г	г	в	в	д	г	г	г	-1	-1	-0,5	-0,5	-0,66	-1	-4,66
64	R33M903	б	в	г	б	в	д	в	б	б	г	в	-0,33	-0,5	0	-0,5	0	-0,5	-1,83
65	R33M904	б	б	а	а	а	а	д	а	а	а	б	0,83	1	1	0	1	0,5	4,33
66	R33M905	б	б	а	а	а	а	а	а	б	б	а	0,83	1	1	1	0,66	1	5,49
67	R33M906	б	д	д	б	б	б	б	г	г	г	в	0,17	0,5	0,5	0,5	-1	-0,5	0,17
68	R33M907	б	д	в	б	б	в	б	в	г	г	в	0	0,5	-0,5	0,5	-0,83	-0,5	-0,83
69	R33M908	б	б	д	а	б	б	б	б	д	б	а	0,5	0,5	0,5	0,5	0,33	1	3,33
70	R33M909	б	б	б	а	а	а	б	а	а	б	б	0,66	1	1	0,5	0,83	0,5	4,49
71	R33M910	б	а	а	а	а	а	а	б	б	в	а	1	1	1	1	0,17	1	5,17
72	R33M911	б	в	б	б	б	б	б	б	г	г	в	0,17	0,5	0,5	0,5	-0,5	-0,5	0,67
73	R33M912	б	б	б	б	б	а	б	д	в	д	б	0,5	0,5	1	0,5	-0,17	0,5	2,83
74	R33M913	б	б	а	а	б	б	б	б	д	д	б	0,83	0,5	0,5	0,5	0,17	0,5	3
75	R33M914	б	б	б	б	б	а	б	б	а	а	б	0,5	0,5	1	0,5	0,83	0,5	3,83
76	R33M915	б	в	д	а	б	д	б	г	г	г	в	0,17	0,5	0	0,5	-1	-0,5	-0,33
77	R33M916	б	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	1	1	1	1	1	1	6
78	R33M917	б	б	б	а	б	б	б	б	б	б	б	0,66	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	3,16
79	R33M918	б	б	б	а	б	б	а	д	г	г	д	0,66	0,5	0,5	1	-0,66	0	2
80	R33M919	б	в	в	б	г	б	в	б	г	г	б	0,17	-1	0,5	-0,5	-0,5	0,5	-0,83
81	R33M920	б	б	б	а	б	а	а	б	а	б	б	0,66	0,5	1	1	0,66	0,5	4,32
82	R33M921	б	д	б	б	б	б	д	в	в	д	б	0,33	0,5	0,5	0	-0,33	0,5	1,5
83	R33M922	б	а	а	а	б	а	д	б	а	б	а	1	0,5	1	0	0,66	1	4,16
84	R33M923	б	б	в	а	г	г	в	д	в	г	а	0,33	-1	-1	-0,5	-0,5	1	-1,67
85	R33M924	б	в	г	б	б	г	в	в	г	в	в	-0,33	0,5	-1	-0,5	-0,66	-0,5	-2,49
86	R33M925	б	в	г	б	в	г	в	в	г	в	б	-0,33	-0,5	-1	-0,5	-0,66	0,5	-2,49
87	R33M926	б	а	б	а	а	б	а	б	а	б	а	0,83	1	0,5	1	0,66	1	4,99
88	R33Э927	в	б	б	а	д	б	б	б	г	г	г	0,66	0	0,5	0,5	-0,5	-1	0,16
89	R33Э928	в	г	д	а	д	б	в	в	г	г	в	0	0	0,5	-0,5	-0,83	-0,5	-1,33
90	R33Э929	в	в	в	д	г	д	в	б	в	в	в	-0,33	-1	0	-0,5	-0,17	-0,5	-2,5
91	R33Э930	в	г	г	б	в	б	г	б	б	г	г	-0,5	-0,5	0,5	-1	0	-1	-2,5
92	R33Э931	в	д	д	б	д	д	в	б	д	б	б	0,17	0	0	-0,5	0,33	0,5	0,5
93	R33Э932	в	г	г	б	в	г	д	г	г	г	г	-0,5	-0,5	-1	0	-1	-1	-4
94	R33Э933	в	б	г	б	б	б	б	в	б	б	б	0	0,5	0,5	0,5	0,17	0,5	2,17
95	R33Э934	в	г	г	б	г	д	в	г	г	г	г	-0,5	-1	0	-0,5	-1	-1	-4
96	R33Э935	в	б	б	а	д	а	б	а	б	б	а	0,66	0	1	0,5	0,66	1	3,82
97	R33Э936	в	б	д	а	в	б	б	б	б	в	а	0,5	-0,5	0,5	0,5	0,17	1	2,17
98	R33Э937	в	б	а	б	г	б	г	в	б	в	д	0,66	-1	0,5	-1	-0,17	0	-1,01
99	R33Э938	в	а	б	а	д	а	б	д	в	д	а	0,83	0	1	0,5	-0,17	1	3,16
100	R33Э939	в	д	б	в	б	б	б	в	г	г	в	0	0,5	0,5	0,5	-0,83	-0,5	0,17
Среднее значение индексов до прочтения курса													0,36	0,15	0,42	0,35	0,093	0,39	0,294
Среднее значение индексов после прочтения курса													0,658	0,972	0,974	0,605	0,944		0,831



Дорогой друг!

Кафедра геометрии и методики преподавания математики Ростовского госпедуниверситета исследует отношение школьников к изучению элективного курса «Двойственные преобразования». Убедительно просим тебя ответить на поставленные в анкете вопросы.

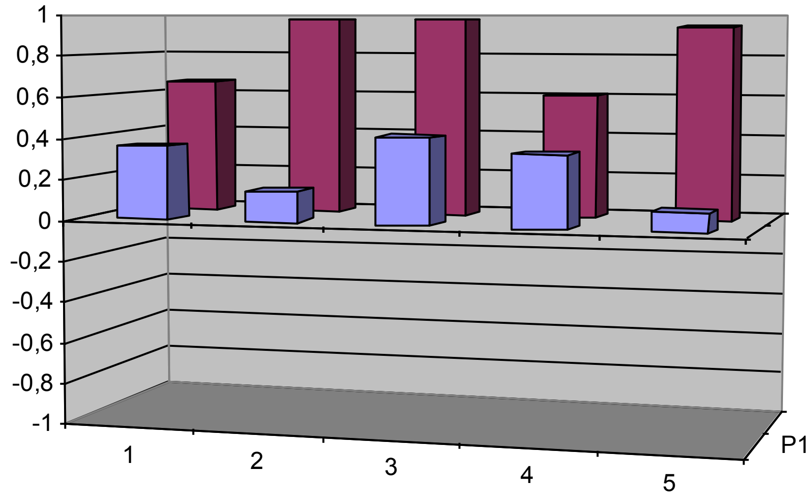
13. **Имеется ли у Вас потребность в дальнейшем изучении проявлений принципа двойственности в математике?**
    □ да;
    □ скорее да, чем нет;
    □ скорее нет, чем да;
    □ нет;
    □ затрудняюсь ответить.
14. **Хотели бы Вы узнать о новых способах применения принципа двойственности в геометрии?**
    □ да;
    □ скорее да, чем нет;
    □ скорее нет, чем да;
    □ нет;
    □ затрудняюсь ответить.
15. **Принимали ли Вы участие в работе научных конференций по математике до изучения курса «Двойственные преобразования»?**
    □ да; □ нет.
16. **Принимали ли Вы участие в работе научных конференций по математике после изучения курса «Двойственные преобразования»?**
    □ да; □ нет.
17. **Удалось ли Вам самостоятельно открыть новые знания по геометрии с использованием идеи двойственности?**
    □ да;
    □ скорее да, чем нет;
    □ скорее нет, чем да;
    □ нет;
    □ затрудняюсь ответить.
18. **Будите ли Вы использовать идею двойственности при дальнейшем проведении исследовательской работы по геометрии?**
    □ да;
    □ скорее да, чем нет;
    □ скорее нет, чем да;
    □ нет;
    □ затрудняюсь ответить.
19. **Изменило ли знакомство с принципом двойственности ваши представления о математике? Каким образом?**
    □ да;____
    □ скорее да, чем нет;____
    □ скорее нет, чем да; ____
    □ нет;
    □ затрудняюсь ответить.
20. **Интересны ли были для Вас занятия элективного курса «Двойственные преобразования»?**
    □ да;
    □ скорее да, чем нет;
    □ скорее нет, чем да;
    □ нет;
    □ затрудняюсь ответить.

Благодарим Вас за участие в исследовании.

МАССИВ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕТОДИКИ ДИАГНОСТИКИ МОТИВАЦИОННОЙ И ТВОРЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ

№ респондента	1	2	3	4	5	6	7	8
1	*б*	*а*	*г*	*а*	*а*	*в*	*а*	*а*
2	*а*	*а*	*а*	*а*	*а*	*а*	*в*	*а*
3	*д*	*б*	*г*	*а*	*б*	*а*	*а*	*а*
4	*д*	*б*	*г*	*а*	*б*	*в*	*а*	*а*
5	*б*	*а*	*г*	*а*	*б*	*б*	*а*	*а*
6	*б*	*б*	*г*	*а*	*а*	*а*	*а*	*а*
7	*а*	*а*	*а*	*а*	*а*	*а*	*б*	*а*
8	*б*	*д*	*г*	*а*	*б*	*а*	*а*	*а*
9	*б*	*б*	*г*	*а*	*б*	*б*	*а*	*а*
10	*а*	*а*	*г*	*а*	*а*	*б*	*а*	*а*
11	*а*	*а*	*г*	*а*	*б*	*а*	*б*	*а*
12	*а*	*б*	*г*	*а*	*а*	*а*	*д*	*а*
13	*б*	*б*	*г*	*а*	*б*	*в*	*а*	*а*
14	*б*	*б*	*г*	*а*	*а*	*б*	*а*	*а*
15	*д*	*д*	*г*	*а*	*в*	*а*	*а*	*а*
16	*а*	*а*	*г*	*а*	*а*	*б*	*а*	*а*
17	*а*	*б*	*г*	*г*	*в*	*в*	*б*	*б*
18	*а*	*а*	*г*	*а*	*а*	*б*	*а*	*а*
19	*а*	*б*	*а*	*а*	*а*	*а*	*а*	*а*
$I_{сред}$	*0,66*	*0,66*	*-0,68*	*0,95*	*0,66*	*0,53*	*0,79*	*0,97*

Сравнение индексов
до и после прочтения курса "Двойственные преобразования"



1 - индекс мотивации; **2** - индекс уверенности; **3** - индекс удовлетворенности;
4 - индекс самостоятельности; **5** - индекс творческой активности.