Проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской

на правах рукописи.

ЛЕКЦИИ

по специальному курсу элементарной математики, прочитанные в Ростовском пединституте в 1937-1938 уч. г.

часть I

ЭВКЛИД и ЛОБАЧЕВСКИЙ.

ПЕДИНСТИТУТ. РОСТОВ-ДОН. 1938 г.

Оглавление

ЭВКЛИД и ЛОБАЧЕВСКИЙ.

§1. Что такое „начала эвклида?“

В основе учебника геометрии лежит знаменитое античное сочинение по геометрии Начала Эвклида составление которого относится к III веку. Начала Эвклида не являются учебником, вместе с тем оно и не было сочинением, преследующим какие либо практические цели. Техника того времени была еще мало развита так что самая ничтожная часть Начал, вошедшая затем много позже, уже в VI веке н. э. в сочинения Боэция могла быть использована, например для землемерия. Если не сами Начала, то какие то другие математические сочинения из которых образовались Начала компиляцией, исправлениями, дополнениями являлись своего рода введением в математические учения, в которых первостепенную роль играли правильные Платоновы тела. Форму правильных тел придавали частицам основных четырех стихий: земли, воды, воздуха и огня. (тетраэдр, гексаэдр, октаэдр и икосаэдр) позже открытый додэкаэдр соответствовал пятой стихии — эфиру. Анализ Начал ясно показывает, что основной частью являлись теория правильных тел развитая в XIII книге, но следует оговориться. В Началах находится и чуждый этой цели элемент: арифметические книги 7, 8, 9-ая и большая часть стереометрии 12ой книги. Следует полагать, что многое внесено после Эвклида в его Начала и наконец и то, что в его время т. е в III веке, правильные тела уже стали утрачивать тот интерес, который имели в IV и V веках.

§2 Что содержат Начала?

Большая часть того, что излагается в современном геометрическом учебнике входит в Начала, хотя, правда, излагается в другом порядке. Больше всего для методиста имеют значение 1, 3, 4, 6 книги. В первой мы находим начальные теоремы нашего учебника, в том числе теоремы о равенстве треугольников, теорему о параллельных, но вместе с тем теорию площадей с теоремой Пифагора, что мы обычно излагаем много позже. Большая часть теорем второй книги для нас потеряла значение. Она содержит ряд геометрических теорем в алгебраической символике сводящихся к ряду тождеств вроде

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2},$$

которыми приходится пользоваться не владея алгебраическим аппаратом.
Это так называемая „алгебра греков", но в этой же книге находится обобщенная теорема Пифагора для остроугольного и тупоугольного треугольников. Третья и четвертая книги содержат все нам хорошо известные теоремы, относящиеся к кругу. Пятая книга для нас потеряла значение. Она содержит античное, чисто геометрическое учение о пропорциях. Переводя все на числа мы относим теорию пропорций к алгебре. Шестая книга содержит теорию подобия. Седьмая, восьмая, девятая не имеют отношения к геометрии. Это античная арифметика. Самая трудная книга аналогична второй. Это античное учение о соизмеримых и несоизмеримых величинах. Она дает ряд геометрических теорем, отвечающих тождествам в роде следующих:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-d}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{d}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{d}}{2}}$$

Алгебраический аппарат дает возможность совершенно обойти эти теоремы. Одиннадцатая книга содержит основы

Стереометрии", двенадцатая тоже стереометрическая и трактует о призмах и пирамидах, а также о цилиндрах и конусах, причем сюда же входит и теорема об отношении площадей, кругов, доказанная не теоремой пределов, а античным методом исчерпывания. О правильных телах говорят три книги: тринадцатая четырнадцатая и пятнадцатая, приписываемые математику позднейшей эпохи Гипсиклу Александрийскому. Главы измерение круга и круглые тел у Эвклида нет. Начало ей положил Архимед.

§3. Определения Эвклида.

В начале первой книги стоят определения. Эти определения не следует считать ни номинальными т.е чисто словесными ни генетическими (указывающими образование фигур) - это скорее чисто описательные определения. Среди них указываются безусловно логически не действующие определения, совершенно неиспользуемые в логических выводах. Таковы: „Точка есть то, что не имеет частей" или „Линия есть длина без ширины", или „Прямая

Линия есть та,[5] которая одинаково лежит относительно всех своих точек[6]. Следует отметить, что и для плоскости дается аналогичное определение, отличное от того, которым мы пользуемся. Угол определяется как взаимное наклонение двух линий, которые встречаются в плоскости и имеют различные направления, причем мыслится, как прямолинейный так и криволинейный угол. И для первого дается особое определение. Треугольник (и вообще многоугольник) мыслится как ограниченная часть плоскости, но не совокупность прямых (как проективной геометрии. Данные определения не оправдываются. Квадрат определяется как четырехсторонник, в котором все стороны равны и углы прямые, но при этом не доказывается что такая фигура существует.

§ 4. Постулаты Эвклида.

Между определениями и аксиомами у Эвклида стоят постулаты.

1. От одной точки до другой можно провести прямую линию

„Конечную прямую можно в ее направлении продолжить"
3. можно из всякого центра на всяком отрезке описать окружность.

Взгляды на постулаты различных историков расходятся. Представляется верным определение постулатов принадлежащее Гелмгцу

Постулат представляет требование найти и сделать то, что достигается просто, в чем ум не затрудняется ни в понимании ни в построении. Эвклид не задавался целью вывести все свои положения логически из немногих высказанных им определений, аксиом. Его целью было лишь убедить читателя в определенных истинах, и он вовсе не считал единственным способом убеждения формально логический вывод ~~из~~ положений из признанных читателем в начале изложения истин. Доказывающий какую-либо теорему, сам вызывал к существованию геометрическую фигуру с какового момента она и начинала существовать. Признание возможности существования прямой, круга и т. д. являлось равносильным признанию акта их производящего. Более того признание этого акта вынуждало и признание некоторых истин например: признание третьим постулатом возможности описания кругов, вызывало признание пересекаемости кругов, проходящих через центры друг друга.

§5. Арифметические аксиомы Эвклида.

Первые семь аксиом явились источником арифметической и алгебраической аксиоматики. Они относятся не к числам, а к величинам вообще. Первую в школьной практике резко подчеркивают:

„Две величины равные порознь третьей равны между собой".

$$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = c \end{array}\right\} \longrightarrow a = b$$

Другие шесть в алгебраической символике напишутся так:

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \longrightarrow a \pm c = b \pm d$$

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array}\right\} \longrightarrow a + c > b + d$$

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ c < d \end{array}\right\} \longrightarrow a - c > b - d$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2c \\ b = 2c \end{array}\right\} \longrightarrow a = b$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{1}{2}c \\ b = \frac{1}{2}c \end{array}\right\} \longrightarrow a = b.$$

Чтобы понять шестую и седьмую следует обратить внимание на то, что аксиомы эти по существу не арифметические, а геометрические и удвоение и деление пополам понимается здесь в чисто геометрическом смысле.

Арифметические законы коммутативный и ассоциативный

$a + b = b = a$

$ab = ba$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a(bc) = (ab)c$

не выражаются этими аксиомами.

Дистрибутивный:

$a(b + c) = ab + ac$

$(a + b)c = ac + bc$

является как положение, доказываемое во второй книге.

§ 6 Последние четыре аксиомы.

Восьмую теорему о том что „величины которые по наложению совмещаются равны между собой" следует правильно понимать. Равенство Эвклидом понимается всегда в смысле равновеликости.

Первый случай равенства треугольников он формулирует так: „Если две стороны AB и AC △ ABC равны двум сторонам DE и DF △ DEF каждая каждой и углы BAC и EDF, заключенные между равными сторонами равны, то треугольники будут иметь равные основания BC и EF будут сами равны и остальные углы ABC и DEF, ACB и DFE, противолежащие равным сторонам, будут равны каждый каждому"

Восьмая аксиома в общем виде не обращается. Треугольники могут быть равновелики (по Эвклиду равны) и без того чтобы они при наложении совмещались. Но Эвклид пользуется неявно аксиомами, являющимися обобщением этой аксиомы для отрезков и углов

Так он утверждает о совмещении AB и CD если AB = CD.

Девятая аксиома: „целое более своей части" имеет позднейшее происхождение. Эвклид нигде ее не формулирует в этой форме в своих доказательствах.

Десятая: „все прямые углы равны между собой" в настоящее время исключена из системы аксиом и доказывается. Следует особое внимание обратить на одиннадцатую аксиому (о параллельных)

„Если прямая, встречая две прямые образует внутренние углы, лежащие по одну сторону ее, составляющие меньше двух прямых, при неограниченном продолжении эти две прямые сходятся по ту сторону, где углы составляют меньше двух прямых."

§ 7. Эквиваленты аксиомы о параллельных

Еще в античное время делались попытки доказать эту аксиому, пользуясь большей частью скрытыми, более очевидными аксиомами. Можно привести ряд таких аксиом, использованных при этих доказательствах. Они всегда являются эквивалентами одиннадцатой аксиомы Эвклида, то что положение P из аксиомы о параллельных Q, пользуясь другими аксиомами и, обратно из Q выводится P. Эти аксиомы весьма различного рода.

В первую очередь следует выделить, выраженные в вполне математизированных понятиях и обладающие высокой степенью „очевидности" и даже более высокой, чем сама одиннадцатая аксиома Эвклида. Такова например аксиома Лоренца.

1. „Из данной точки внутри угла можно провести всегда прямую, пересекающую стороны этого угла."

2. Лежандр берет частный случай одиннадцатой аксиомы „Наклонная и перпендикуляр при своем продолжении пересекаются."

Обычно берется аксиома, эквивалентность которой с 11^ой аксиомой была отмечена еще Проклом (V век н.э.).

3. „Через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной."

Она является единственной аксиомой в Гильбертовой группе аксиом о параллельных. Следует отметить то, что положение о том, что из данной точки можно провести параллельную (не прибавляя „только одну" вытекает из других аксиом Эвклида. Больше того, можно постулировать что из какой-либо точки M_0 параллельно какой-либо прямой P_0Q_0 возможно проведение только одной прямой, параллельной данной и положение это доказывается для всякой точки M и для всякой прямой PQ.

4. В качестве эквивалента Эвклидовой аксиомы можно брать, как это делает Остроградский транзитивность параллельности.
Если $l \parallel l''$ и $l' \parallel l''$ то и $l \parallel l'$.
Сюда, пожалуй, можно отнести и аксиому Вольфганга Больяи.
5. „Через всякие три точки, нележащих на одной прямой, можно провести окружность", хотя она обладает меньшей степенью очевидности, чем только что упомянутые.
Ко второй категории следует отнести те положения, которые кажутся убедительна в смысле использованных ими понятий, которые имеются в нем в смутной форме. Но при математизировании положения они изменяют свой смысл вследствие чего очевидность положения понижается.

такова аксиома:
„Параллельные прямые равноотстоят друг от друга.
Расстояние прямых понятие смешанное, но во всяком случае это понятие берется как взаимное т. е расстояние „l" от „l'" тоже что „l'" от „l" и математизация этого понятия должна дать общий перпендикуляр к „ll'"

т. е понятие должно оказаться зависящим от аксиомы о параллельных. Между тем в упомянутой аксиоме следует брать перпендикуляры из точек первой прямой на вторую и уже затем доказывать, что они будут также перпендикулярны к первой.

7. Такова и аксиома которой скрытно пользуется Прокл. „Расстояние между параллельными ограничено."

Под расстоянием следует здесь понимать между какими либо точками двух прямых, считаемое тоже по перпендикуляру к одной прямой (чего впрочем у Прокла нет). Понятие перпендикуляра у него остается не разъясненным.

К третьей категории следует отнести те аксиомы, которые пользуются понятиями не подвергающимися полной математизации т. е в меньшей или большей мере интуитивными или даже метафизическими понятиями. Сюда относятся все те, которые говорят о направлениях

8. Аксиома Валлиса (вторая половина XVII в.) постулирует возможность построения на данной прямой треугольника подобного

данному. Убедительность этого положения получается от признания гомогенности пространства: „Пространство в малом то же что в большом".

11. Совершенно такого же рода и аксиома Ламберта о невозможности абсолютной меры пространства. Следует резко отличать гомогенность пространства от изогенности: „пространство здесь такое же как там". Согласно определения Эвклида - прямая изогенная линия. Следует прибавить что плоскость, ею делится на две изогенные части.

38. Двенадцатая аксиома

Эта аксиома формулируется так: „Две прямые не заключают пространства". Эту аксиому Прокл в своих комментариях к первой книге Начал пытается доказать. В настоящее время мы заменяем ее следующим: „Две точки определяют одну и только одну прямую через них проходящую", которая выражает тоже, что первый постулат и затем вторым, выражающим бесконечность прямой.

У Эвклида в качестве скрытой аксиомы фигурирует аксиома: „Две прямые пересекаются только в одной точке". Из этой аксиомы можно вывести 12-ую аксиому Эвклида. Обратим внимание на то, что этим свойством не обладают большие круги на сфере, которые пересекаясь в полюсах определяют пространство - заключенный между ними двуугольник.

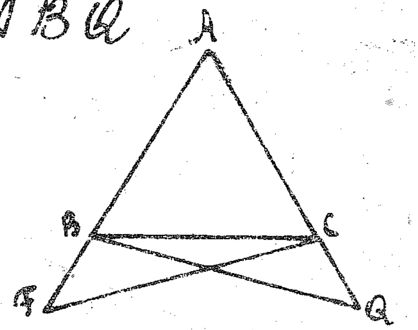
§ 9 Эвклид и Лежандр.

Какой метаморфозе подверглись взгляды не только на определения и на аксиомы, а и на самую цель математического доказательства от Эвклида до настоящего времени это можно видеть анализируя Эвклида и учебник Лежандра, Элементы геометрии (конец XVIII в. и начало XIX в), а также современные учебники.

То что Лежандр считает за доказательство не могло быть признано за доказательство Эвклидом и с другой стороны, Лежандр не мог начать свои элементы, как Эвклид с построения равностороннего треугольника, как это делает Эвклид. Не следует думать, что Лежандр в своих упрощенных доказательствах додумывается до тех более простых доказательств, которые ускользают от Эвклида.

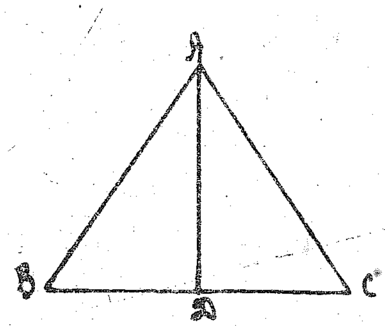
Эвклид, очень может быть, и не знал эти доказательства, но отверг их, как негодные, как находящиеся в решительном противоречии с его взглядами на доказательства. Почему он не поступал так как поступает Лежандр при доказательстве основного свойства равнобедренного треугольника, состоящего в том, что углы, противолежащие равным сторонам, равны. Доказательство Эвклида этой 5-ой теоремы первой книги очень сложно, почему в средние века оно и названо „elefuga" (бегство ослов)

Продолжая стороны (черт 1) AB и AC на равные отрезки $BF = CQ$ он сперва доказывает, что $\triangle AFC = \triangle ABQ$ затем что $\triangle BFC = \triangle BCQ$ откуда выводит что $\angle CBF = \angle BCQ$ и наконец что $\angle ABC = \angle ACB$.



черт 1.

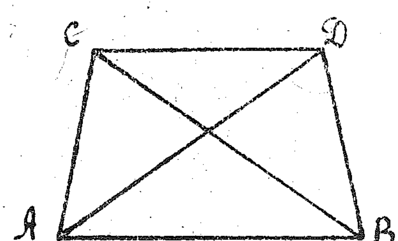
Но гораздо проще соединить (как это делает Лежандр) (черт. 2) середину стороны BC т.е точку $Д$ с вершиной A и доказать на основании третьего случая равенства треугольников равенство $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$.



черт. 2.

Но Эвклид признавал существование только тех объектов, которые могут быть даны построением, он потребовал бы от Лежандра указания построения точки Д середины BC. Но построение это (пред. 10 1-ая книга) основывается на 9-ом положении Эвклида о делении угла на две равные части, последнее же на третьем случае равенства треугольников, а третий случай равенства доказывается от противного на основании Седьмого предложения.

Если мы соединим (черт 3) концы основания AB с двумя точками C и Д, лежащими по одну сторону прямой AB то расстояние CA и CB точки C от концов основания AB не могут быть равны каждое каждому расстояниям ДA и ДB от тех же концов. Для доказательства невозможности единовременного



черт. 3.

Существования Равенств: AC = BD BC = AD Эвклид пользуется „Ле́fuga" доказывает, что ∠ADC = ∠ACD и вторично применяя „Ле́fuga", что ∠CDA = ∠DCB и обнаруживает несовместимость этих двух равенств углов, так как ∠ADB > ∠CDB, а угол BCD больше угла ACD

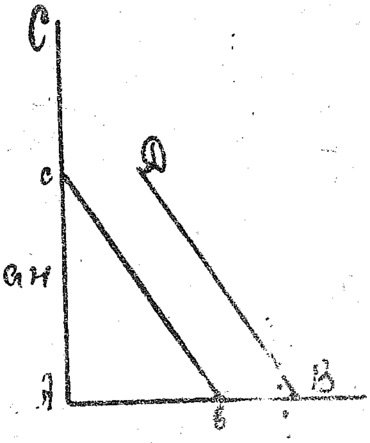
Мы берем только случай когда Д вне ABC.

И только изменению требований, предъявляемых к доказательству Лежандр получает возможность упростить геометрическую систему и перевернуть порядок теорем.

§ 10. Попытки доказательства аксиомы о параллельных.

Различные попытки доказательств одиннадцатой аксиомы Эвклида, или ей эквивалентных имеют в настоящее время различной степени интерес. Некоторые из них настолько сложны, что даже конспективное изложение было бы здесь затруднительно.
В настоящее время вполне строго доказано, что 11ая аксиома не выводится из других аксиом, что она требует введения, хотя бы в скрытом виде, других, являющихся эквивалентами 11-ой аксиомы.
Поэтому в настоящее время для нас наиболее интересными являются те, которые имеют историческое значение, которые содержат в себе некоторые идеи, получившие в дальнейшем развитие в геометрии и те, которые имеют методическое значение, то есть легли, или могут быть положены в основу различных школьных методических приемов изучения теории параллельных.
Не достаточно ясные доказательства

Прокла и Птоломея, отвечающие упадку античной геометрии для нас мало интересна. Особенно интересно доказательство Валлиса. Валлис постулирует возможность существования треугольника подобного данному. Он, можно сказать, постулирует гомогенность пространства, но, правда, в специальной форме.

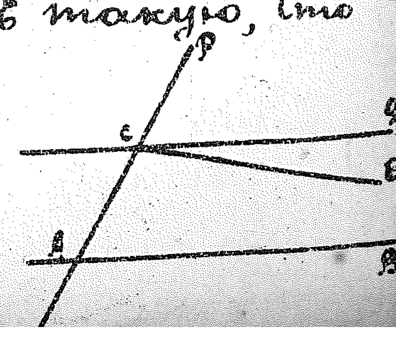


Для доказательства того, что BD (черт 4) пересекает AC он строит при „в" угол равный B. Сторона вс должна при достаточно малом Aв пересечь AC (т.к проходя через A, она пересекает и AC и AB) Затем берется на AB треугольник ABC, стороны его совпадают с AB, AC и BD

Третья его вершина будет представлять пересечение двух сторон BD и AC, так что AC должна пересечься с BD.

Не менее интересно доказательство Люи Бертрана, который оперирует с актуальной бесконечностью. В первой половине XVIII века математики оперировали с бесконечными величинами как с конечными и при этом жестоко запутались в тех противоречиях в которые погрузился Фонтенель, дошедший до скандалов, вызвавших изгнания

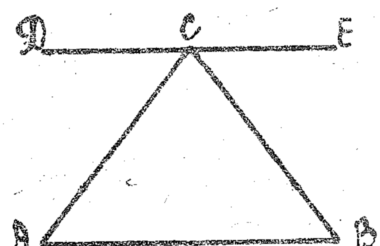
актуальной бесконечности и замену ее потенциальной пределом в смысле Д'Аламбера и нашем.
Мы теперь вполне ясно сознаем, что бесконечность может получить права гражданства только при условии, что мы откажемся от целого ряда свойств присущих конечному. Так она может стать равна своей части. Вследствие этого нельзя определять „меньше" как существование в какой-либо части. Геометрическое „меньше" это вовсе не то же, что заключение одной величины в другой.
Различные положения A и B относительно друг друга делают то $A > B$ то $B > A$.
Вот рассуждения Бертрана, которые для нас сейчас неприемлемы.
Прежде всего можно утверждать, что всякий угол больше полосы между двумя параллельными. В самом деле, для заполнения угла плоскости потребуется взять конечное число рав этих угол, а для заполнения параллельными полосами потребуется их бесконечное число. Если угол DCF равен углу BAF (черт 5) то по теореме 27ой Эвклида мы имеем $AB \parallel CD$. Если возьмем CE такую, что $\angle ECF$ больше $\angle ABF$ так что CE попадет в полосу ABCD, то в том случае, если пересечения



СЕ и АВ нет и СЕ находится целиком в полосе АВСД, то оказывается, что угол ДСЕ противно сделанному замечанию, целиком находясь в этой полосе меньше этой полосы.

§ 11. Сумма углов в треугольнике

Эвклид доказывает, что сумма углов в треугольнике равна двум прямым. Можно из этой теоремы вывести 11-ую аксиому Эвклида. Доказательство ведется от противного. Пусть сумма углов в треугольнике равна $2d$ и постулат Эвклида несправедлив. Пусть АВ и ДЕ (черт. 6) не пересекаются. Проведем прямую АС и предположим что



черт. 6.

$\angle BAC + \angle ACE = 2d - \alpha$ (1) $\alpha \neq 0$.

Через точку С проводим СВ так, чтобы $\angle CBA < \alpha$ (2).

По условию имеем:

$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 2d$ (3)

Подставим эту сумму в (1) вместо $2d$ получаем:

$\angle BAC + \angle ACE = \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA - \alpha$ или

$\angle ACE = \angle ACB + \angle CBA - \alpha$

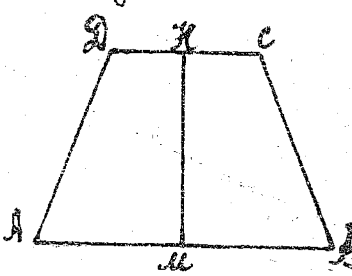
Откуда в силу неравенства (2), замечая что $\angle CBA - \alpha < 0$ получаем, что

$\angle ACE$ меньше $\angle ACB$ что невозможно, т. к. прямая CB лежит внутри угла ACE, следовательно наше допущение неверно и из того что сумма углов в треугольнике равна $2d$ вытекает аксиома о параллельных.

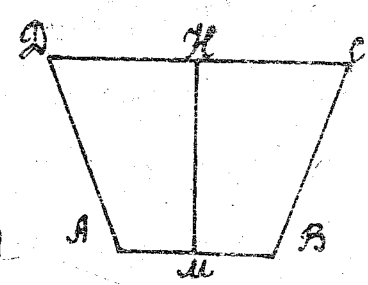
Вместо этого положения можно взять и другое ему эквивалентное „Во всяком четырехугольнике сумма внутренних углов равна $4d$."

Особенно важно отметить то, что из первых десяти аксиом Эвклида и двенадцатой вытекает то, что во всяком треугольнике сумма углов или меньше $2d$ или равна $2d$.

Если в точках A и B восстановить перпендикуляры $AD = BC$ к AB, то в четырехугольнике $ABDC$ в случае одиннадцатой аксиомы угол $D = \angle C = d$



черт 7



черт 8

Если же отвергнуть 11-ую аксиому, то углы D и C окажутся равными т. к. MH проходящая через середины AB и DC будет осью симметрии, при этом могут быть случаи:

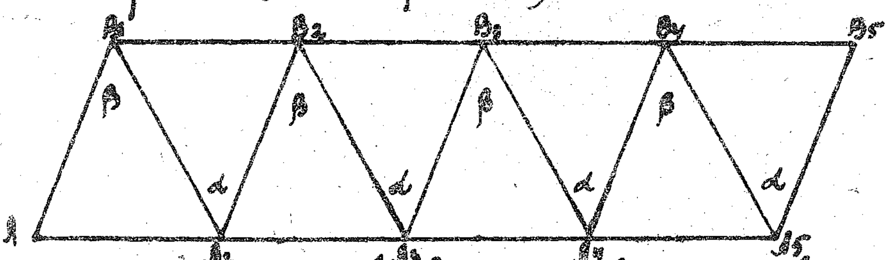
$D = C > d$ (гипотеза тупого угла) черт. 7.

$D = C < d$ (гипотеза острого угла) черт 8.

Первый случай отвечает сумме углов в четырехугольнике больше $4d$ и в треугольнике больше $2d$, второй в четырехугольнике

меньше $4d$ в треугольнике меньше $2d$.
Если признать 12-ую Аксиому, а отвергнуть 11-ую, то можем иметь S (сумма углов в Δ) меньше $2d$ и вместе с тем Гипотезу острого угла.

Теорема Лежандра доказывается следующим образом (черт. 9.)



На отрезках $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_nA_{n+1}$ равных основанию данного треугольника строятся в одну сторону треугольники $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$ ..... равные данному.
Отрезки B_1B_2, B_2B_3 ..... $B_{n-1}B_n$, соединяющие вершины этих треугольников друг другу равны и их можно рассматривать, как основание n равных треугольников: B_1, A_2B_2 $A_3B_2B_3$, ... $B_{n-1}A_nB_n$.
Пополним наш чертеж еще треугольником $B_nA_{n+1}B_{n+1}$ равным $B_1A_2B_2$.
Легко видеть, что если $\angle A_1B_1A_2 = \angle A_2B_2A_3 = \dots = \beta$, а $\angle B_1A_2B_2 = \angle B_2A_3B_3 = \dots = \alpha$, то $\beta \leq \alpha$.
В самом деле, если бы мы имели, что $\beta > \alpha$, то в треугольниках $A_1B_1A_2$, $B_1A_2B_2$ с двумя равными сторонами имели бы $A_1A_2 > B_1B_2$.
Замечая, что ломаная $A_1B_1B_2 \dots B_{n+1}A_{n+1} > A_1A_{n+1}$

мы имели бы $A_1B_1 + (B_1B_2)\cdot n + A_{n+1}B_{n+1} > (A_1A_2)\cdot n$ т.е. $2A_1B_1 > (A_1A_2 - B_1B_2)\cdot n$.

Это неравенство противоречит так называемому постулату (или вернее аксиоме) Архимеда. Как бы не был мал отрезок „а" и велик отрезок „в" повторение „а" достаточное число (n) раз слагаемым мы всегда получим сумму $na > в$. Таким образом предположение что $\beta > \alpha$ должно быть $\beta \leq \alpha$. и таким образом получается, что сумма углов в треугольнике $A_1B_1A_2 \leq 2d$.

Если отвергнуть не только 11-ую, но и 12-ую аксиому Эвклида, то сумма углов в треугольнике может оказаться и больше $2d$.

§12. Абсолютные теоремы.

Следует хорошо уяснить себе связь между предложениями Начал Эвклида. Следует хорошо осознать какие из них являются абсолютными т.е не зависят от аксиом о параллельных и остаются в силе независим от того признается ли аксиома о параллельных или нет. Абсолютными являются все теоремы до 29-ой.

То, что внешний угол больше внутреннего с ним не смежного, верно — будет ли признана аксиома о параллельных или нет.

То положение что внешний угол равен сумме внутренних с ним несмежных, предполагает эту аксиому.

Теоремы о трех случаях равенств треугольников носят абсолютный характер.

Таковы теоремы о перпендикулярах и наклонных.

Абсолютны положения о пересекаемости биссектрис и медиан треугольника в одной точке (хотя доказательство последней в общем виде, как зависящее от аксиом о параллельных уже не годится.

Теорема Фалеса о том что угол опирающийся на диаметр - прямой не имеет абсолютного характера.

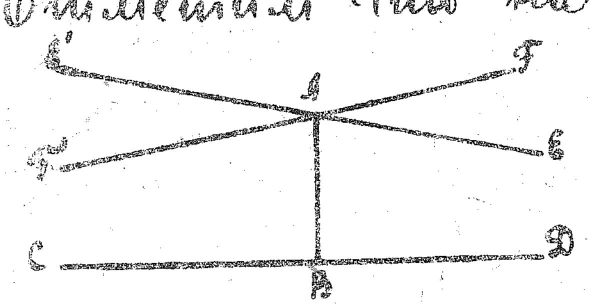
Тоже следует сказать о теореме Пифагора. Учение о подобии при устранении аксиомы о параллельных совершенно отпадает.

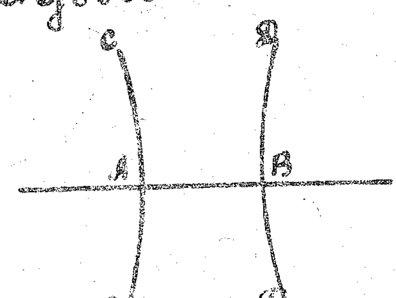
§ 13. Геометрия Лобачевского.

Лобачевский построил систему геометрии исходя из Эвклидовых аксиом всех кроме 11-ой и из аксиомы отвергающей 11ую аксиому и предполагающей что из данной точки А можно провести не одну прямую не пересекающую CD, а бесконечное множество.

Лобачевский граничные прямые АВ и АF (черт. 10) называет параллельными. Все прямые, между ними заключающиеся и не пересекающие

СД, называются **сверхпараллельными**. Эти граничащие прямые должны СД пересекать **на бесконечности**, должны к СД **ассимптотически** приближаться.
Можно сказать, что в Эвклидовой плоскости мы имеем **одну бесконечно удаленную точку**, в плоскости же Лобачевского мы имеем две, которые будут отвечать параллельная направо и параллельная налево ЕЕ' и FF'.
Как мы уже отметили основное свойство пространства (плоскости) Лобачевского то, что оно **изогенно**, но не **гомогенно**.
В геометрии Лобачевского нет теории подобия. Сумма углов в треугольнике меньше 2d и при этом чем меньше треугольник, тем она ближе к 2d. Геометрия млечных путей сильно отличается от геометрии электронов.
Отметим что на Эвклидовой плоскости

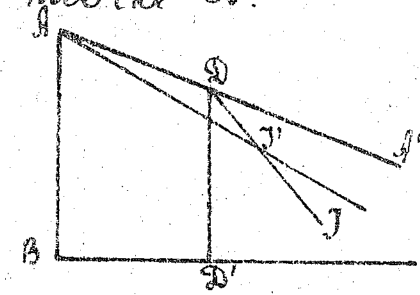




С и ВД ⊥ АВ (черт. 11) параллельны и поэтому всегда находятся в равном расстоянии. На плоскости Лобачевского эти прямые **сверхпараллельны**. Они будут расходиться и вверх и вниз. Кратчайшее их расстояние будет как раз АВ.

§14. Коммутативность и транзитивность параллельности.

Доказательства геометрии Лобачевского оказываются значительно сложней доказательств Эвклидовой геометрии. Уже в самом начале встречаем мы серьезное затруднение. Прежде всего должны убедиться, что если прямая AA' в одной из своих точек $A \parallel BC$ (черт. 12), то она параллельна BC и в любой точке D.

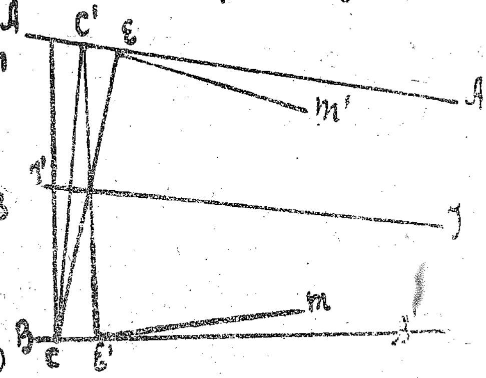


Черт. 12

Мы покажем как ведется доказательство только в том случае, если D следует за A. Мы должны доказать, что если в A' AA' - предельная прямая, отделяющая пересекающие BC от непересекающих прямых, то ту же роль играет в D - DA'. Так как DA' не пересекает BC, то нам остается доказать, что всякая прямая DJ в углу $A'DD'$ пересекает BC. Проведем прямую из A к точке J на DJ. Она, как лежащая в углу $A'AB$ (углу параллельности) пересекает BC и начиная с i идет выше DJ. А так как DJ по предположению не пересекает BC, то и AJ не пересекает BC и противно условию $A'AB$ не представляет уже угла параллельности.

На плоскости Эвклида свойство коммутативности, если $l \parallel l'$, то и $l' \parallel l$ просто вытекает из Эвклидова определения параллельных как прямых непересекающихся. Значительно сложнее обстоит дело на плоскости Лобачевского. Это свойство приходится выводить.

Следует доказать (Черт 13), что если перпендикуляры опущенные на BB' образуют с AA' углы параллельности, то и перпендикуляры, опущенные на AA' из точек BB' образуют тоже углы параллельности. В силу только



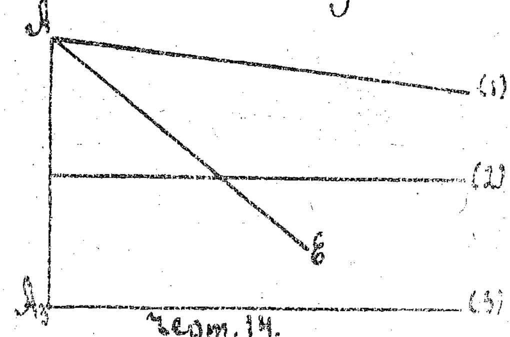
что доказанной теоремы достаточно доказать это для какой-нибудь точки прямой BB'. Из D опускаем на BB' перпендикуляр DC а из его основания C на AA' перпендикуляр CE. Затем вращаем CE около C, при таком вращении угол при E будет убывать, а при C возрастать. Берем то положение CC' при котором углы эти сравняются. Разделив CC' пополам проводим II' ⊥ CC' и CE ⊥ BB'. Повернув плоскость чертежа вокруг прямой II' на 180°, мы обменяем места I'C' и IC и углы C и C', а также AA' и BB'. Вместе с тем C'E' перейдет в CE и наклонная C'm' в Cm.

Так как C'm' пересечет BB' то и Cm должна пересечь AA', то есть угол ECB' представляет угол параллельности CE.

Транзитивностью параллельности называется свойство, если $l \parallel l'$ и $l' \parallel l''$, то $l \parallel l''$.

Две прямые параллельные третьей в одном и том же направлении параллельны между собою. Мы рассмотрим только случай расположения такого, что (2) между (1) и (3).

Из A_3 опускаем (черт 14) $AA_3 \perp (3)$. Угол между AA_3 и прямой (1) по условию угол параллельности и поэтому всякая прямая AE внутри этого угла пересекает прямую (3), но при этом AE обязательно пересекает и (2).



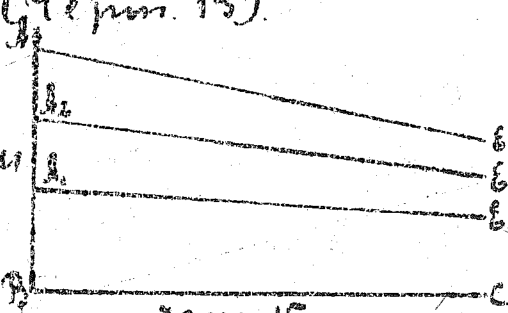
черт. 14.

В самом деле прямая A,E чтобы пересечь (3) должна на своем пути пересечь прямую (2), как лежащую между прямыми (1) и (3).

§ 15. Угол параллельности.

Из этих доказательств мы видим сколь важную роль в геометрии Лобачевского играет угол параллельности, образуемый параллельной с перпендикуляром, опущенным на данную прямую.

Следует заметить, что с увеличением перпендикуляра соответствующий ему угол параллельности уменьшается (черт. 15).



черт. 15.

Таким образом как это было отмечено выше с увеличением размеров мы будем иметь все большее отклонение от Эвклидовой геометрии. Если через П(ВА) обозначим угол параллельности, отвечающий перпендикуляру BA, то при $BA_1 < BA_2 < BA_3 < \dots$

$$\Pi(BA_1) > \Pi(BA_2) > \Pi(BA_3) > \dots$$

Если предположить противное т.е $A_2 \geq A_1$, то заменяя в равенстве $\angle A_1 + \angle A_2A_1E_1 = 2d$ $\angle A_1$ большим или равным $\angle A_2$ имели бы

$$\angle A_2 + \angle A_2A_1E_1 \geq 2d$$

Но в случае геометрии Лобачевского сумма углов в треугольнике $\leq 2d$ и то же относится и к случаю, когда одна из вершин уходит на бесконечность. Обозначая через $\Pi(x)$ угол параллельности, отвечающий перпендикуляру x, довольно сложными рассуждениями получаем:

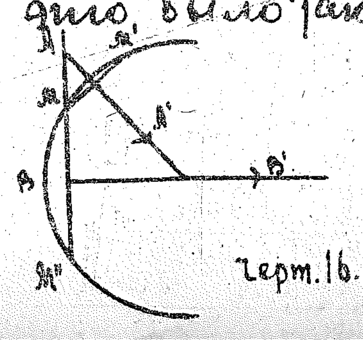
$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

Здесь „к" параметр пространства, абсолютная мера, которой в пространстве Эвклида не существует.

При „к" $= \infty$ получаем Эвклидово пространство в котором $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$.

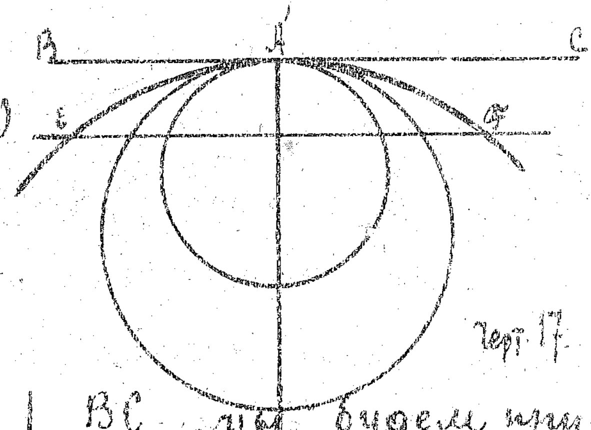
§16. Орицикл.

В пространстве Лобачевского не через всякие три точки можно провести окружность. Больяи доказал, что если бы это было так то верна была бы аксиома Эвклида или ее эквивалент о пересекаемости перпенди-



черт. 16.

куляра BB, с наклонной AA. (черт. 16.)
Для доказательства он на AB брал точку M и M' симметрично расположенные относительно AA' и BB' т.е. такие, что MM' и MM'' ⊥ к AA' и BB' и делятся ими пополам.
Через M M' M'' проводим окружность. Тогда AA' и BB' должны пересечься в центре этой окружности.



Черт 17.

Взяв окружность (черт 17) касающуюся прямой BC в точке A и неограниченно увеличивая радиус т.е. удаляя центр по AA' ⊥ BC мы будем приближать окружность к прямой BC, но неограниченно как в плоскости Эвклида. Ведь в плоскости Лобачевского не через всякие 3 точки EAF можно провести окружность. Можно найти точки E и F настолько близкие к BC, что окружность через них не пройдет как бы ее радиус не увеличивали. Должен существовать предельный круг, имеющий бесконечный радиус так что в геометрии Лобачевского окружность бесконечного радиуса вовсе не прямая, а предельная окружность ОРИЦИКЛ.
Свойства орицикла легко выводятся пользуясь одним принципом теории пределов:
„Если при изменении X, Y, Z сохраняется все время какое-либо свойство их Ω, то оно имеет

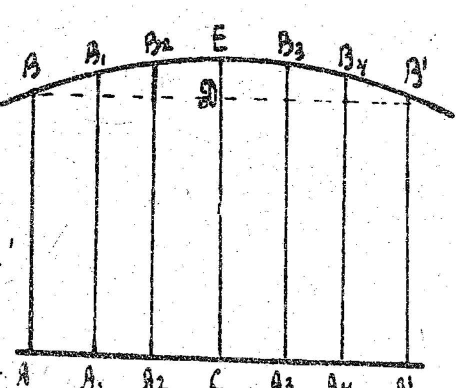
место и в пределе".

Мы легко усматриваем симметричность орицикла относительно АЯ', возможность скольжения орицикла по самому себе, параллельность радиусов, образование хордой равных углов с радиусами, параллельность радиусам перпендикуляров в середине хорды и т. д.

§17. Гиперцикл.

Другое весьма важное понятие не-Эвклидовой геометрии это <u>гиперцикл</u>, представляющий геометрическое место точек равно отстоящих от данной прямой. В геометрии Эвклида это прямая параллельная данной, в геометрии Лобачевского это некоторая кривая. Из самого определения следует что эта кривая как прямая, окружность и как орицикл может <u>скользить сама по себе</u>. (Черт 18).

При уменьшении длины хорды BDB' она будет приближаться к касательной в точке E все время оставаясь при D перпендикулярно к CE так что <u>касательная к гиперциклу перпендикулярна к перпендикуляру, опущенному из точки касания на ось</u>. Мы видим таким образом, что окружность, орицикл и гиперцикл имеют много общего. Радиусам первых у гиперцикла отвечают прямые перпендикулярные

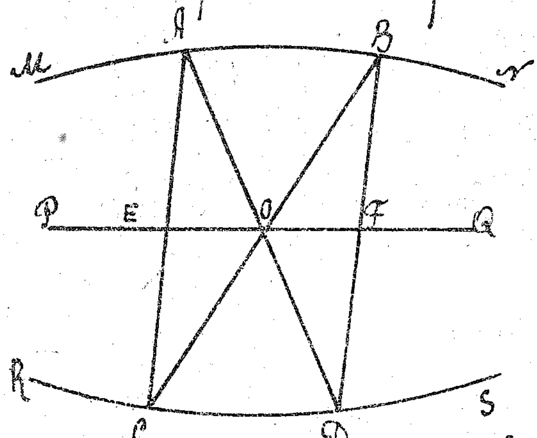


Черт. 18.

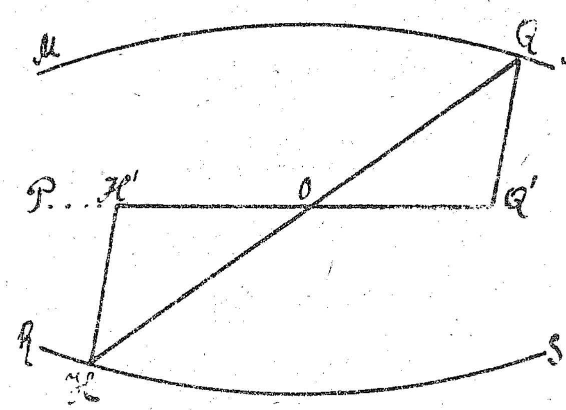
к оси, являющиеся <u>сверхпараллельными</u>. Поэтому в то время как орицикл можно рассматривать как окружность с центром, ушедшим на бесконечность, <u>Гиперцикл можно рассматривать как окружность с идеальным центром</u>.

§ 18. <u>Параллелограм</u>.

На плоскости Лобачевского в Эвклидовом смысле параллелограма, конечно, не существует. Но роль параллелограма играет фигура, образованная двумя ветвями Гиперцикла и прямыми AC и BD (черт. 19), соединяющими концы равных дуг Гиперциклов. Мы приводим без доказательства свойства этого аналогона параллелограма (черт. 20).



черт. 19.



черт 20.

1. Прямая QH, соединяющая две точки QH двух ветвей Гиперцикла делится осью PQ' пополам.
2. Стороны AC и BD и диагонали параллелограма делятся осью EQ пополам.
3. Две диагонали делят друг друга пополам.
4. Внутренние накрест лежащие углы образованные Гиперциклами с секущей равны

между собой.
5. Сумма углов параллелограма ABDC равна 2π.
Исследовение параллелограма дает замечательную формулу для площади треугольника

$$S = (\pi - A - B - C)\,k^2$$

Здесь „к" опять параметр пространства.
Из этой формулы опять видно, что с уменьшением размеров, с приближением S к нулю и сумма углов в треугольнике A+B+C приближается к π т. е к двум прямым.

§19. Логические эквиваленты.

Из того что как угодно далеко продолженная геометрия Лобачевского не встречает противоречия вовсе еще не следует что такого противоречия нет и что когда-нибудь она не упрется в абсурд, и не даст оплогического доказательства аксиомы о параллельных. Наука в настоящее время обладает средством доказать что геометрия Лобачевского не встретит противоречия или что сводится к тому что аксиома о параллельных не зависит от других аксиом.
Вот совершенно простая истина: при логических выводах понятие не используется целиком.
Это уже видно в банальной форме силлогизма A есть B, все B суть C, следовательно A есть C.
Ведь им утверждается, что A присущи некоторые свойства C, определяющие принадлежне-

ность А к роду С только потому, что ему присущи свойства В. Конечно при таком заключении мы пользуемся только одним свойством объекта А. Но ведь тому же А могут быть присущи и другие свойства E F Q ... отнюдь не связанные с В и эти последние в нашей логической операции остаются <u>логически не действующие</u>. Объект А мы можем заменить другим объектом Д тоже со свойством В, но уже с $\bar{E}, \bar{F}, \bar{Q}$ вместо E, F, Q.

Иван человек. Все люди смертны. Следовательно Иван смертен.

Иван человек, но Иван может быть стар, высок, худ. Тоже я могу сказать и о Петре. Петр человек. Все люди смертны. Следовательно Петр смертен, хотя Петр в противоположность Ивану может быть молод, низок и толст. Вместо одного звена можно взять несколько звеньев т.е некоторую логическую цепь, начинающуюся с аксиом.

Мы будем тогда доказывать что объекту

А присущи свойства a', a'', a'''

В " " b', b'', b'''

С " " c', c'', c'''

При этом мы можем использовать не все признаки А,В,С... , а только

А... $\alpha', \alpha'', \alpha'''$

В... $\beta', \beta'', \beta'''$

С... $\gamma', \gamma'', \gamma'''$

наличность которых утверждается системой использованных нами аксиом.
Таким образом нами будет доказываться, что
A присущи свойства $a', a'', a'''\dots$
B " " $b', b'', b'''\dots$
C " " $c', c'', c'''\dots$ <u>только потому</u>
что A присущи $\alpha', \alpha'', \alpha'''\dots$, B – $\beta', \beta'', \beta'''\dots$, C – $\gamma', \gamma'', \gamma'''\dots$
Если бы $A, B, C\dots$ были присущи еще другие, независимые от взятых свойства $\underline{\alpha}', \underline{\alpha}'', \underline{\alpha}'''\dots$ $\underline{\beta}', \underline{\beta}'', \underline{\beta}'''\dots$ $\underline{\gamma}', \underline{\gamma}'', \underline{\gamma}'''\dots$ то таковые следовало бы признать логически недействующими.
Заменяя их другими $\bar{\alpha}', \bar{\alpha}'', \bar{\alpha}'''\dots$ $\bar{\beta}', \bar{\beta}'', \bar{\beta}'''\dots$ $\bar{\gamma}', \bar{\gamma}'', \bar{\gamma}'''\dots$ мы получили бы вместо $A, B, C\dots$ новые объекты $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\dots$ относительно которых мы должны были бы утверждать тоже что об A, B, C.. т. е принадлежность $\bar{A}$ свойств $a', a'', a'''\dots$ $\bar{B}$ – $b', b'', b'''\dots$ $\bar{C}$ – $c', c'', c'''\dots$ и т. д.
Мы будем иметь таким образом одну и ту же логическую схему для различных групп объектов $A, B, C\dots$ и $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\dots$
Можно назвать $(\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}\dots)$ и $(A, B, C\dots)$ <u>логическими эквивалентами</u> относительно взятой группы аксиом.

§ 20. <u>Закон взаимности.</u>

Сущность логических эквивалентов хорошо разъясняет „<u>закон двойственности</u>“ или „<u>закон взаимности</u>“ Все геометрические свойства можно разделить на две довольно

обширных категорий. Теорема Пифагора устанавливает известную зависимость между длинами гипотенузы и катетов. Это конечно ничто иное, как соотношение между результатами некоторых измерений. Такие свойства, которые зависят от какого либо сравнения или лучше сказать измерения величин, называются меровыми. Такого рода свойствами занимается исключительно элементарная геометрия, но существуют совершенно другие свойства. Эти последние уже совершенно не зависят от измерения. Это так называемые зрительные свойства. Они определяют взаимное расположение геометрических объектов, но при этом предполагается что это расположение характеризуется не измерением, а зрительной интуицией весьма общего типа. На вопрос „где точка?" отвечают не на таком то расстоянии от прямой влево или вправо, а просто от прямой направо, от прямой налево. На вопрос „Где прямая?" отвечают „на плоскости" или в ту или другую сторону от нее и т. д.
Ясное представление о зрительных свойствах дают уже зрительные аксиомы относящиеся к основным элементам геометрии.
На плоскости: две точки определяют одну и только одну прямую через них проходящую.
Две прямые определяют одну и только одну

точку их пересечения. Эти аксиомы можно формулировать еще так: „Две точки определяют одну прямую или принадлежащую."
Две прямые определяют точку или принадлежащую.
В пространстве: „Три точки не принадлежащие одной прямой определяют плоскость"
„Три плоскости не принадлежащие одной прямой определяют точку"
„Две точки определяют прямую или принадлежащую."
Мы не будем перечислять все зрительные аксиомы, но отметим следующее их свойство, которое легко усмотреть и на четырех только что приведенных. Каждой зрительной аксиоме отвечает ей взаимная, получаемые заменой плоскости на точку, точки на плоскость (прямая остается на своем месте). Из системы зрительных аксиом выводятся зрительные, главная часть Проективной Геометрии. Можно сказать теперь что все зрительные свойства точки, прямой и плоскости присущи им только потому что точке согласно зрительным аксиомам присущи свойства $\alpha', \alpha'', \alpha'''$, а плоскости — $\beta', \beta'', \beta'''$. Таким образом для доказательства зрительных теорем имеет значение не

то, что плоскость представляется интуицией совершенно в ином виде чем точка, а только то, что три точки определяют плоскость, а три плоскости — точку, две прямые точку и т. д.

Так как согласно двойственности аксиом мы можем принимать плоскости свойства $\alpha', \alpha'', \alpha'''$.. а точке $\beta', \beta'', \beta'''$... то мы будем иметь логическую эквивалентность [А (точка), В (прямая), С (плоскость)] и [А (плоскость), В (прямая), С (точка)] и взаимное положение будет существовать не только для аксиом, но и для всякой зрительной теоремы. Мы таким образом получаем Закон взаимности.

„Каждому зрительному положению в пространстве отвечает взаимное, полученное заменой точки на плоскость и плоскости на точку.

Приведем примеры двух взаимных теорем. Можно сказать, что три прямые между собой пересекающиеся т. е. имеющие попарно общие точки и не лежащие на одной плоскости проходят через одну точку.

Взаимная теорема: Прямые между собой пересекающиеся т. е., лежащие попарно в одной плоскости и не проходящие через одну точку лежат в одной плоскости.

Существует теорема плоской зрительной геометрии, которую доказывают стереометрическими соображениями. Это знаменитая теорема Дезарга: „В двух треугольниках ABC, $A_1B_1C_1$, соответственные вершины которых лежат на прямых, проходящих через одну точку соответственные стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой и теорема обратная.

Эта теорема вместе с плоскостными зрительными аксиомами представляет основание зрительной геометрии. Легко усмотреть в этих основных положениях тоже двойственность хотя и другого рода – существование взаимных положений, получаемых обменом точки и прямой и обратно. В плоской зрительной геометрии имеет место закон взаимности. Каждому зрительному положению отвечает взаимное, получаемое взаимным обменом точки и прямой. Теорема Паскаля: „Во вписанном в кривую второго порядка шестиугольнике противоположные стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой" отвечает как взаимная теорема Брианшона: „В описанном около кривой второго порядка шестиугольнике прямые, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

§ 21. Основные принципы аксиоматических исследований.

Логический эквивалент является орудием

иследования логической сети. Предположим что мы имеем ряд независимых аксиом, т.е. таких что ни одна из них не может быть выведена из остальных. Положение Q выводится из аксиом A, B, C, D... Как убедится в том что это положение не может быть выведено из меньшего числа аксиом например A, B, C.

Для решения этого вопроса следует только подыскать к иследуемым объектам P, Q, R... их эквиваленты относительно аксиом A, B, C. $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$. Если теперь для $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ не имеет место теорема Q то следует безусловно заключить, что Q не может быть выведена из A, B, C. Можно доказать таким образом что теорема Дезарга не может быть выведена из (других) одних плоскостных зрительных аксиом. Так что открывается альтернатива или приходится доказывать эту теорему меровым способом, например методом аналитической геометрии, или же пользоватся зрительными пространственными аксиомами, отказываясь от самостоятельного независящего от пространственного геометрического обоснования плоской зрительной геометрии.

§22 Псевдосфера.

Как же убедиться в непротиворечивости геометрии Лобачевского, или что к тому же сводится к независимости аксиомы о параллельных от других Эвклидовых аксиом. В качестве логических эквивалентов берутся так называемые <u>геодезические</u> кривые, т.е. кратчайшие кривые на некоторой поверхности в Эвклидовом пространстве. Отличаясь по виду т.е обладая рядом совершенно иных <u>логически недействующих</u> свойств они удовлетворяют и всем основным аксиомам и всем из них выводимым теоремам геометрии Лобачевского. За такую поверхность можно принять поверхность следующим образом образованную. Берется <u>трактриса</u>, это такая кривая, для которой отрезок касательной между точкой касания и некоторой прямой PQ (черт. 21) (являются асимптотой этой кривой) имеет постоянную длину.

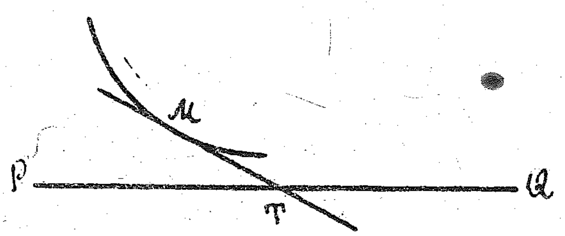
Уравнение этой кривой $X = k\log\frac{k+\sqrt{k^2-y^2}}{y} - \sqrt{k^2-y^2}$

Затем эта кривая вращается около асимптоты PQ

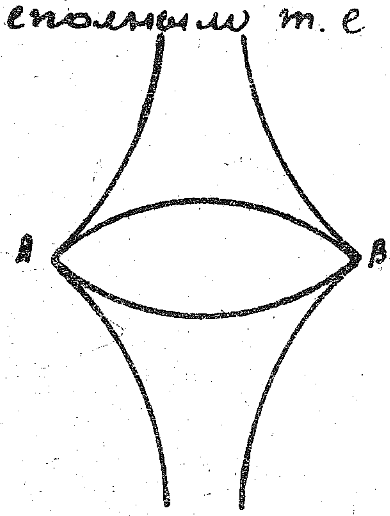
Геодезические кривые этой поверхности обладают как раз тем свойством, которым обладают прямые и плоскости Лобачевского.

Таким образом оправдывается <u>плоская геометрия Лобачевского</u>. К сожалению это относится не ко всей поверхности, а только к частям, расположенным вверх и вниз от острие —

видной кривой AB (которая исключается) так что определение является неполным т.е не во всей плоскости (черт. 22).



Черт. 21.



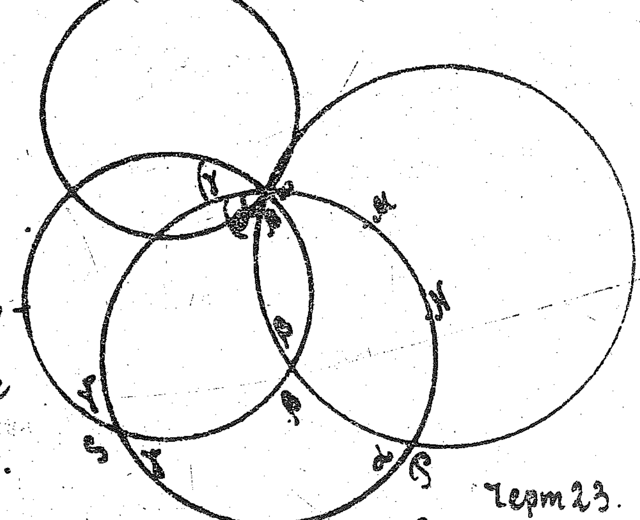
Черт. 22

Полное определение достигается с помощью других логических эквивалентов.

§ 23. Эвклидовы псевдопрямые.

Логические эквиваленты прямых отличные от последних будем называть псевдопрямыми. За псевдопрямые Эвклидовой плоскости можем принять окружности пучка т.е окружности, проходящие через точку „O" (черт. 23).

За псевдоточки примем все точки плоскости кроме точки „O". Все эти псевдопрямые и псевдоточки обладают свойством прямых и точек Эвклидовой плоскости.



Черт 23.

Через две псевдоточки можно провести только одну псевдопрямую. В самом деле через

MN и O (которая не считается) можно провести только одну окружность, далее две псевдопрямые пересекаются только в одной точке P. так как две окружности пересекаются в двух точках O и P из которых первая <u>не считается</u>. Под <u>псевдоуглом</u> будем разуметь угол между касательными двух пересекающихся окружностей. Тогда легко усматривается что такое <u>перпендикулярность</u>. Мы ниже увидим, что через две точки O, R можно провести только одну окружность ORS ортогональную к OPQ что можно выразить так из точки R к данной псевдопрямой можно провести только один перпендикуляр.

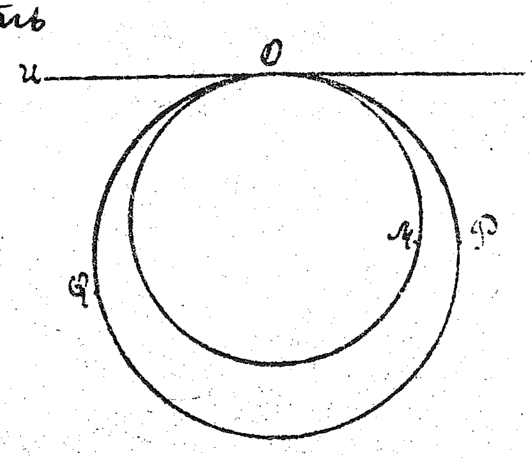
Псевдопрямые должны назваться <u>псевдопараллельными</u>, если они имеют только „O" общей точкой, т.е касаются в точке „O" (черт. 24.). Так как через M можно провести только одну окружность касающуюся окружности OPQ в данной точке, то из данной /точки/ псевдоточки можно провести только одну псевдопрямую псевдопараллельную данной. Не трудно видеть что в такой псевдогеометрии сумма углов в треугольнике как раз равна двум прямым. В самом деле взяв Δ PSO мы мы на том основании, что углы у сферического двуугольника равны, легко видим, что при касательной их сосредотачиваются все углы нашего двуугольника α, β, γ.

§ 24. Псевдопрямые Лобачевского.

Рассмотренный нами пучек окружностей называется <u>пучком первого рода</u>. Пучком второго рода называется совокупность окружностей ортогональных к некоторой <u>основной окружности</u>. Если ГUS - основная окружность (черт. 25), а ГNSM ей ортогональная, то так как радиус ОТ перпендикулярен в Т к касательной основной окружности, то ОГ должно быть направлено по касательной к ГNSM и мы должны иметь

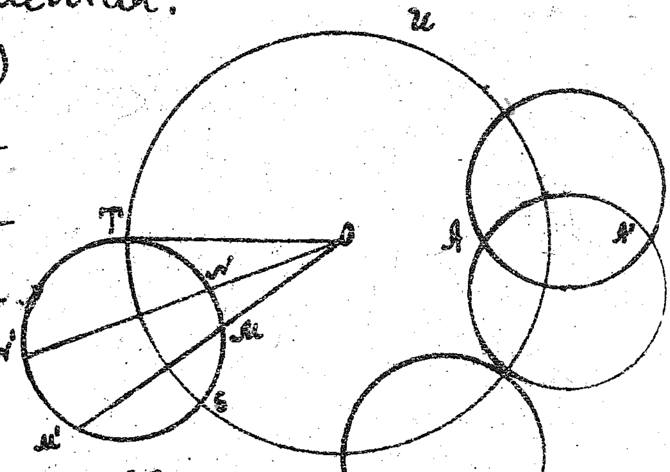
$$OM \cdot OM' = ON \cdot ON' = OT^2 = R^2 \quad (1)$$

т. е. точки M', N' получаются из M, N инверсией с модулем равным радиусу основной окружности. Мы всегда сможем зная M, N построить и $M'N'$. Отсюда следует что через две точки MN можно провести окружность ортогональную к основной.



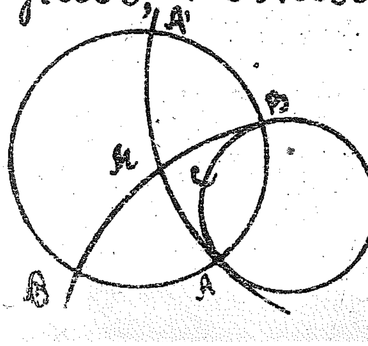
черт. 24.

Будем принимать <u>за псевдопрямые</u> окружности нашего пучка, <u>за псевточки</u> все точки внутри основного круга. Тогда не трудно видеть что все эти псевдоточки и псевдо прямые обладают свойством точек и прямых на плоскости Лобачевского. Как мы только что видели через две псевдоточки можно провести только одну псевдопрямую. Две псевдопрямые пересекаются только в одной псевдоточке А так как другая не считается.

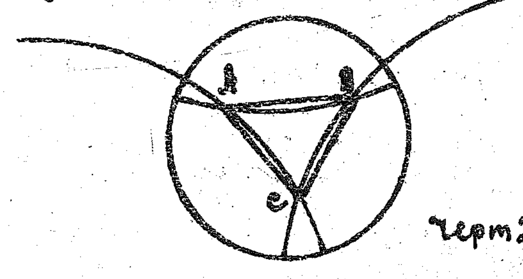


черт. 25.

Через точку М (черт. 26) можно провести две окружности ортогональные к основной и проходящие через точки пересечения А, В заданной основным кругом. Это конечно и будут псевдопараллельные, проведенные из точки М к данной псевдопрямой АСВ. Они будут разделять псевдопрямые, имеющие с АСВ общую псевдоточку и не имеющие (псевдосверхпараллельные). Не трудно видеть что сумма углов в треугольнике в такой псевдогеометрии меньше двух прямых. Треугольник криволинейный, образуемый дугами ортогональных кругов помещается (черт 27). весь внутри прямолинейного АВС и получается из него уменьшением каждого из углов, поэтому и сумма углов меньше 2d.



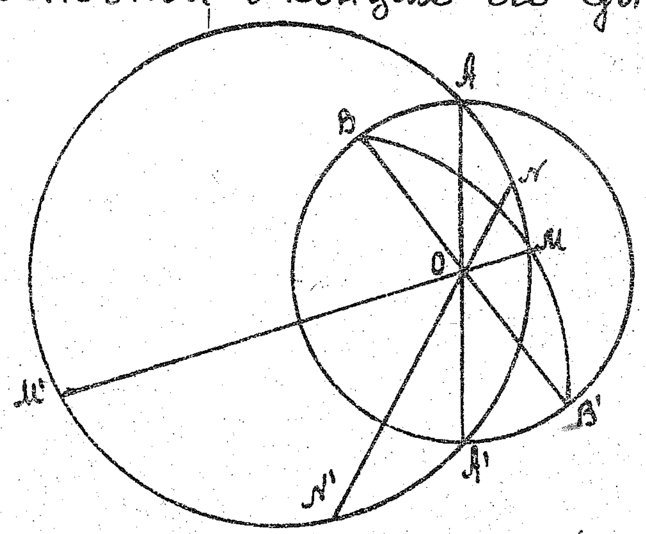
черт. 26



черт. 27.

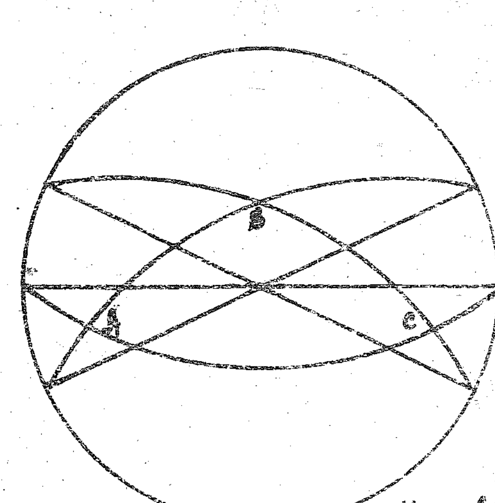
§25. Пучек окружностей третьего рода.

Существует еще другой пучек окружностей третьего рода. Взяв основной окружность $ABA'B'$ мы берем все окружности (черт. 28). пересекающиеся с основной в концах его диаметров.



Черт. 28.

В этом случае на прямой OM будет лежать точка M' такая, что $\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = -\overline{OA}^2 = -R^2$ (2). т.е M будет получаться из M' тоже инверсией, но обратной. К MN всегда найдем $M'N'$ и увидим что через две точки можно всегда провести только одну окружность пучка. Если принимать за псевдоточки все точки внутри окружности, за псевдопрямые окружности пучка то сейчас увидим, что многие свойства Эвклидовых точек и прямых, а также точек и прямых Лобачевского будут присущи этим псевдоточкам и псевдопрямым. Так две псевдоточки определяют только одну псевдопрямую и две псевдопрямые пересекаются только в одной псевдоточке. Но две псевдопрямые теперь всегда пересекаются. Поэтому нет псевдопараллельности т.е понятия, отвечающего параллельности. Сумма углов в треугольнике АВС уже не меньше, а больше двух прямых. (черт. 29).



черт 29.

§ 26. Третья Геометрия.

Таким образом оказывается, что отвергая аксиому о параллельных мы имеем возможность построить или Геометрию Лобачевского или другую геометрию, в которой сумма углов в треугольнике уже не меньше, а больше двух прямых. Но согласно сказанному в § 11 при построении этой геометрии мы должны выбросить еще одну из Эвклидовых аксиом, это двенадцатую по которой две прямые не заключают пространства. В этой третьей Геометрии они должны заключать пространство и прямая должна быть всегда конечной длины. На прямой Эвклида только одна бесконечно-удаленная точка, на прямой Лобачевского их две, наконец на прямой этой третьей Геометрии бесконечно-удаленной точки и прямой совсем нет. По аналогии с коническими сечениями встречаемым бесконечно-удаленной прямой в одной, двух и ни в одной точке. Три намеченные нами геометрии называются: параболической, гиперболической, и эллиптической.

§27. Риманова геометрия.

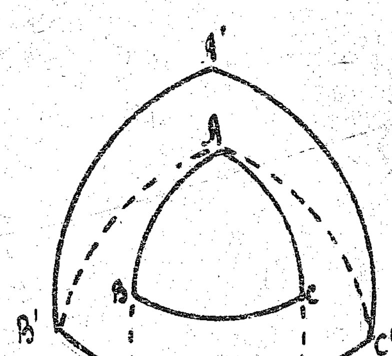
Две прямые в эллиптической геометрии всегда (черт. 30). конечны, в конечном расстоянии встречаются. Так как две прямые пересекаются только в одной точке то точка (АА') совпадает с (ВВ') Если же мы будем мыслить, что АА' не совпадает с ВВ' то будет нарушена аксиома что две прямые пересекаются только в одной точке. В этом случае мы будем иметь Римановскую Геометрию. Логическими эквивалентами Римановские прямых являются большие круги на сфере. Они не только заключают пространство, образуя двуугольник, они пересекаются в двух точках полюсах. При изучении Римановской геометрии сфера играет такую же роль что псевдосфера при изучении геометрии Лобачевского.

§30. Сферическая геометрия.

Большое аксиоматическое значение имеет изучение сферической геометрии. Теоремы сферической геометрии обращаются в теоремы Римановской геометрии по замене больших кругов Римановскими прямыми. Тот факт что большие круги пересекаются в двух точках значительно осложняет дело. Даже такую простую теорему, что из данной точки можно опустить на большой круг только один перпендикуляр приходится высказывать осторожно, с ограничением. Ведь на экватор из полюса можно опустить бесконечное множество перпендикуляров. Следует в этой теореме прибавить ограничение что перпендикуляр не больше четверти окружности. Такого рода ограничения следует вводить в теоремы утверждающие что сумма двух сторон больше третьей, что против большего угла лежит большая сторона и т. д. Все три случая равенства треугольников остаются в силе но к ним прибавляется еще четвертый: „Сферические треугольники равны если соответственно равны их углы.

§ 31. Полярные треугольники.

Взяв сферический треугольник (черт. 31) ABC образуем треугольник A'B'C' так что A' полюс BC, B' полюс CA и C' полюс AB. Такой треугольник называется полярным ABC. Можно сказать, что и наоборот ABC является полярным в отношении A'B'C'. В самом деле так как AB AC имеют полюсами



$C'B'$ то дуги AB', AC' равны четверти большой окружности так что A является полюсом большого круга $B'C'$, тоже относится к B и C. Большое значение имеет соотношение между углами и сторонами двух полярных треугольников. Если радиус сферы брать равным единице, то получим:

$$a' = \pi - A \qquad b' = \pi - B \qquad c' = \pi - C$$

$$A' = \pi - a \qquad B' = \pi - b \qquad C' = \pi - c$$ (черт. 32)

В самом деле угол A измеряется дугой EF

Но $A = EF = B'F - C'B' + C'E = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - a' = \pi - a'$ и т.д.

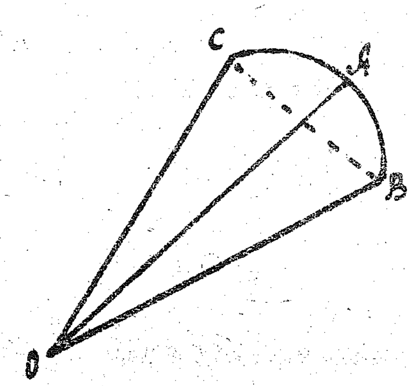
Построив трехгранный угол, опирающийся на сферический треугольник ABC

мы имеем ввиду что его стороны a, b, c измеряют линейные углы BOC, COA, AOB будем иметь

$$a + b + c < 4d$$

и таким же образом

$$a' + b' + c' < 4d = 2\pi$$



Черт 32

и поэтому

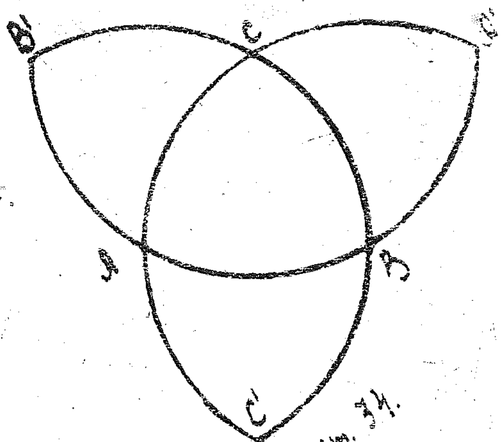
$$\pi - A + \pi - B + \pi - C < 2\pi$$

$$A + B + C > \pi = 2d \quad (3).$$

т.е. сумма углов в сферическом треугольнике больше двух прямых.

§32. Площадь сферического треугольника.

Следует особое внимание обратить на площадь S сферического треугольника. Для определения S заметим что площадь двуугольника выражается так (черт 33).



Черт. 34.

$$\sigma = AE.A'E' = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\Sigma$$

где Σ поверхность всей сферы.

В самом деле $\sigma : \Sigma = \alpha : 2\pi$

Но $$\Sigma = 4\pi R^2$$

и поэтому $$\sigma = 2\alpha R^2$$

Площадь всей сферы заполняется двуугольником AA' и другим ему симметричным, начинающимся в A и кончающимся в A', затем $2BB'$ и $2CC'$, но при этом приходится так как ABC входит в каждый из двуугольников вычитать два лишних и кроме того отметив, что такой же треугольник $A'B'C'$ образуется в диаметрально-противоположной точке, вычесть еще $2S$. Таким образом

$$4\pi R^2 = 4(A+B+C)R^2 - 4S$$

и получаем

$$S = (A+B+C-\pi)R^2 \quad (4)$$

Эта формула аналогична формуле для площади треугольника на плоскости Лобачевского. Последняя получается из (4) заменой R на Ri.

Следует отметить что и другая формула геометрии Лобачевского получается таким же образом из формулы сферической геометрии и тригонометрии. Можно сказать, что геометрия Лобачевского представляет геометрию на мнимой сфере.

Вопросы для повторения.

1. Представляют ли Начала Эвклида учебник?
2. Что является основной наиболее сущной частью Начал?
3. В каких отделах современного учебника излагается теорема Пифагора? В какой книге Начал Эвклида мы ее находим?
4. Пользовался ли Эвклид алгеброй?
5. Отчего мы не нуждаемся в пятой книге Начал Эвклида?
6. Все ли 15 книг Начал принадлежат Эвклиду?
7. В чем различие номинальные и генетические определения?
8. К какой категории должны быть отнесены Эвклидовы определения?
9. Как мы определяем точку и линию и как их определял Эвклид?
10. Как Эвклид определяет угол?
11. Что такое фигура по Эвклиду?
12. Что значит оправдать определение?
13. Как мы оправдываем определение интеграла?
14. Оправдывает ли Эвклид свои определения?
15. Каковы 3 постулата Эвклида?
16. Какие операции линейки и циркуля эти постулаты объявляют дозволенными?
17. Отчего Эвклид не довольствуется только аксиомой „две величины равные порознь

третьей равны между собой" а еще объявляет что „половины одной и той же величины равны между собой?

18. Что наз. законами коммутативным и ассоциативным? Говорит ли о них Эвклид?

19. В каком смысле Эвклид понимает слово „равный"?

20. В чем состоит восьмая аксиома Эвклида? и подвергается ли она обращению?

21. Верна ли 9-ая Эвклидова аксиома в случае бесконечных величин (множество)?

22. Как сейчас доказывается 10ая Эвклидова аксиома?

23. В чем состоит Эвклидова аксиома о параллельных?

24. Что называется двумя эквивалентными аксиомами?

25. Указать аксиомы Лоренца и Лежандра эквивалентные 11ой аксиоме?

26. С помощью каких аксиом доказывается что из данной точки можно провести прямую параллельную данной? (не утверждая, что только одну)

27. В чем состоит коммутативность и транзитивность параллельности.

28. Каково геометрическое место точек равно отстоящих от прямой?

29. Что значит: пространство гомогенно?

30. Можно ли сказать что вселенная гомогенна?
31. Что значит: пространство изогенно?
32. В каком смысле можно сказать, что вселенная изогенна?
33. Существует ли абсолютная мера углов и абсолютная мера отрезков?
34. В чем состоит 12-ая аксиома Эвклида и чем ее можно заменить?
35. Можно ли 12-ую аксиому утверждать об окружностях?
36. Каково первое предложение Начал Эвклида?
37. Как Эвклид доказывает то, что углы при основании равнобедренном треугольнике равны?
38. Как мы это доказываем?
39. Как это доказывал Лежандр?
40. Почему два последних доказательства не удовлетворили бы Эвклида
41. Можно ли найти две точки, находящиеся от двух данных точек А и В в равных расстояниях?
42. Каким образом аксиому о существовании подобных фигур Валлис применяет к доказательству аксиоми о параллельных?
43. Что такое актуальная и потенциальная бесконечности?
44. Как понимает Бертран угол?
45. Какие Эвклидовы аксиомы используются при выводе из теоремы о сумме углов в треугольнике - аксиоми о параллельных?

46. Как Бертран доказывал, что внешний угол больше внутреннего с ним не смежного?
47. Что наз. гипотезами тупого и острого углов?
48. Может ли при признании всех Эвклидовых аксиом, кроме 11ой, сумма углов в треугольнике оказаться больше 2d?
49. В чем состоит аксиома Архимеда и как она используется для доказательства теоремы о том, что сумма углов в треугольнике не больше 2d?
49. Абсолютна ли теорема что сумма смежных углов равна 2d?

50. .... что вертикальные углы равны?
51. ... что против большей стороны лежит больший угол?
52. ... что перпендикуляр короче наклонной?
53. Абсолютна ли теорема, что если стороны одного угла соответственно перпендикулярны к сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют два d?
54. Абсолютна ли теорема что прямая и окружность не могут иметь больше двух общих точек?
54. ...что радиус проведенный к точке касания перпендикулярен к касательной?
55. .... что угол вписанный равен половине соответствующего центрального?

56. Абсолютна ли теорема Пифагора?
57. Можно ли сохранить обычное деление пополам отрезка и угла в плоскости Лобачевского?
58. Можно ли сохранить обычное построение касательной к окружности из данной точки в плоскости Лобачевского?
59. Сколько можно провести на плоскости Лобачевского из данной точки прямые, параллельных данной?
60. Могут ли быть перпендикуляр и наклонная сверхпараллельны?
61. Если реальное пространство не Эвклидово, а Лобачевского, то где оно больше отклоняется от пространства Эвклида в мире инфузорий или в планетной системе?
62. Что называется углом параллельности?
63. Меняется ли этот угол когда мы движемся по прямой?
64. Меняется ли он когда мы придвигаем к PQ точку M из которой проводим прямую параллельную PQ?
65. Обладает ли свойством коммутативности отношения равенства?
66. Обладает ли этим свойством отношение „меньше"?
67. Обладает ли последнее отношение транзитивностью?

68. Обладает ли транзитивностью отношение перпендикулярности?
69. Что называется пространственным параметром?
70. Чему он равен в Эвклидовом пространстве?
71. Сколько бесконечно-удаленных точек на Эвклидовой прямой?
72. Сколько бесконечно-удаленных точек на прямой Лобачевского?
73. Что такое на плоскости Эвклида круг с бесконечным радиусом?
74. А на плоскости Лобачевского?
75. В чем состоит основной общий принцип теории пределов. Как с его помощью устанавливаются свойства орицикла?
76. Каково геометрическое место точек, равно отстоящих от прямой на плоскости Лобачевского?
77. Почему гиперцикл можно считать окружностью с мнимым радиусом?
78. Указать аналоги параллелограма на плоскости Лобачевского.
79. Можно ли вывести 11-ую аксиому Эвклида из других аксиом?
80. Что называется логическими эквивалентами относительно аксиом А,В,С.?
81. Указать среди аксиом Эвклида логически не действующие.

82. Какие аксиомы являются логически не действующие при доказательстве случая равенства треугольников?

83. Что такое зрительные и меровые положения?

84. К каким следует отнести теорему Пифагора?

85. А теорему Дезарга?

86. А аксиому Архимеда?

87. Почему метод аналитической геометрии следует назвать меровым?

88. Убедится что вторая часть теоремы Дезарга является обратной и вместе с тем взаимной в отношении первой?

89. Построить взаимную теорему следующей: „Даны две прямые Δ, Δ', три точки A, B, C на Δ, три точки на Δ'. Прямые BC' и CB' пересекаются в точке α, CA' и $C'A$ в β, AB' и $A'B$ в γ. Точки α, β, γ лежат на одной прямой.

90. В чем состоит теорема Паскаля и какая теорема ей взаимна?

91. Каким образом устанавливается независимость аксиом?

92. Можно ли теорему Дезарга доказать, исходя только из планиметрических зрительных аксиом?

94. Что называется геодезическими кривыми?

94. Для каких целей употребляется поверхность вращения трактрисы?
95. Что вообще называется псевдоточкой и псевдо-прямой?
96. Что такое пучек окружностей первого рода?
97. " " " " " второго рода?
98. Сколько можно провести через две точки окружностей ортогональных к данной?
99. Как убедиться в том, что из данной псевдо-точки М можно опустить только один перпендикуляр на данную псевдопрямую?
100. В псевдогеометрии § 24 где будут псевдо-бесконечно-удаленные точки?
101. В псевдогеометрии § 25 можно ли считать точки основного круга за псевдобесконечно удаленные точки?
102. Что такое параболическое, гиперболическое и эллиптическое пространство?
103. Точка двигается по Римановской прямой можно ли определить время когда она вернется в первоначальное положение?
104. Можно ли это сделать для прямой Лобачевского?
105. В какой геометрии отвергается 12ая аксиома Эвклида?
106. Какое различие между эллиптической и Римановской геометрией?

Какие ограничения вводятся в абсолютные теоремы так чтобы они имели место на сфере?
Указать четыре случая равенства треугольников на сфере.
. В сферической геометрии существует ли теория параллельных?
. Существует ли в этой геометрии теория подобия?
Что наз. полярным треугольником?
. Как с помощью его выводятся взаимно-меровые теоремы на сфере?
. Почему сумма углов сферического треугольника больше 2d?
Можно ли провести на сфере вывод „Евклида"?
Как выражается площадь треугольника на сфере с помощью его углов?
. Во что обращается полученная формула при замене „R" на „Ri"?

Проф. [illegible]

Тираж 45 экз.