На правах рукописи.

Доктор Физико-Математических наук
Проф. Д.Д. Мордухай-Болтовской.

Высшая геометрия

Конспект курса, составленный студентом Калашниковым Н.К. по лекциям профессора.

Ростовский на Дону Педагогический Институт.

1940 г.

Основные понятия.

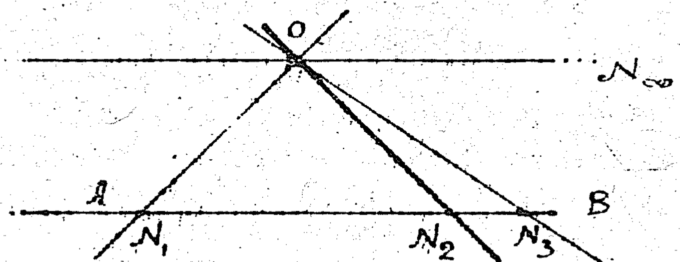
Высшая геометрия появляется там, где приходит понятие бесконечности. В противоположность элементарной геометрии, высшая геометрия оперирует с геометрическими образами, относимыми в бесконечность. Различаются потенциальная и актуальная бесконечности. Потенциальная бесконечность, - это бесконечность в возможности. Так величина, которая может быть сделана сколь угодно большой при своем дальнейшем увеличении стремится к бесконечности; понятие бесконечности, присущее этой переменной, как раз и есть понятие бесконечности в потенции. Это бесконечность лежит в основе теории пределов. Соответственно величинам бесконечно большим, существуют величины бесконечно малые, как величины переменные, изменяющиеся. Актуальная бесконечность - бесконечность завершения. Так можно говорить об актуальной бесконечности по отношению к мирам вселенной. Актуальное бесконечно малое выброшено из науки.

Об актуальной бесконечности можно говорить по отношению к точкам прямой, пространства, плоскости как о бесконечных множествах, мощности которых различны.

Если переменным величинам x, y, z, при всех их изменениях присуще некоторое свойство ω, то оно присуще и их пределам. Этот общий принцип теории пределов включает в себя частные теоремы пределов. Исходя из него, если

$$x \to A, \quad y \to B; \qquad и \quad \frac{x}{y} = \frac{m}{n}, \quad то \quad \frac{A}{B} = \frac{m}{n}.$$

Определения элементарной геометрии отличны от определений геометрии высшей. Так, по определению элем. геометрии, если прямая лежит вне круга и имеет с последним одну общую точку, то прямая есть касательная. В высшей геометрии касательная рассматривается как предельное положение секущей, проходящей через M и N, при бесконечном сближении этих точек.



Черт. № 1.

Таким образом в определение касательной вводится понятие потенциальной бесконечности.

Евклид определяет параллельные прямые как такие, которые при своем продолжении в плоскости не пересекаются. Подобно этому параллельные определяются как прямые в плоскости, находящиеся все время на одинаковом расстоянии. Высшая геометрия вводит понятие бесконечности: параллельными прямыми называются такие две предельно растоложенные пересекающиеся прямые в плоскости, в предположении, что точка пересечения уходит в бесконечность.

Ньютон считал, что на прямой существуют две бесконечно удаленные точки. С точки зрения современного суждения, прямая имеет только одну бесконечно удаленную точку. Признавая существование двух бесконечноудаленных точек на прямой: слева одной, и другой справа, мы приходим к необходимости считать, что параллельные прямые или две пересекающиеся в своем предельном положении прямые, имеют две общие точки. Но тогда теряется справедливость общего принципа пределов, что существующая зависимость между переменными в процессе их изменения остается справедливой и в пределе. Такое, на вид формальное, признание одной бесконечноудаленной точки на прямой, оказывает экономизирующее воздействие на аксиоматику геометрии.

Бесконечно удаленная точка относится к несобственным элементам. Бесконечно удаленная прямая есть геометрическое место бесконечно удаленных точек плоскости. С прямой такая б.уд. прямая имеет только одну общую точку. Надо сказать, что форма при бесконечном удалении ее составляющих точек теряется. О форме в бесконечности речи быть не может.

Используя существование одной несобственной точки на прямой, можно свести следующие две аксиомы к одной.

1). Через две точки можно провести прямую и притом только одну; или, двум точкам принадлежит одна и только одна прямая (обе точки предполагаются собственными):

2). Из заданной точки О, вне прямой АВ, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной. Действительно последняя (2) аксиома при условии существования несобственной точки N_∞ может свестись к первой, ибо провести параллельную-понятие, равносильное понятию проведения прямой через собственную точку О и бесконечно удаленную точку N_∞;

Прямая параллельная мыслится проходящей через собственный элемент - точку О и несобственный элемент - точку N_∞. Тоже и относительно плоскостей:

1). Трем точкам, не лежащим на одной прямой, соответствует плоскость и притом только одна.

2). Через точку А, лежащую вне данной плоскости α

можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Вводя несобственные элементы - две бесконечно удаленные точки, так, что A, B_∞, C_∞ не лежат на одной прямой, а B_∞ и C_∞ принадлежат данной плоскости, можно вторую аксиому свести к первой, а именно: параллельная плоскость мыслится проведенной через собств. элемент. - точку A и два несобственных элемента - точки B_∞ и C_∞ плоскости α, т.е. приходим к аксиоме:

$$\frac{ABC}{a} - \alpha$$ — три точки, не лежащие на одной прямой (а) лежат в одной плоск. (α):

можно иметь два собственных элемента и один несобственный.

Также три несобственных - б. удаленн. паралл. плоск.

Операции с несобственными элементами ведут к экономии мысли, терминологии в аксиоматике.

Говоря об актуальной бесконечности, мы встречаемся с понятиями счетной (1,2,3,...) и несчетной (совокупность всех точек на плоскости, в пространстве) бесконечностями. Одна бесконечность менее богатая чем вторая, одно множество менее богатое, чем второе. Основными геометрическими формами высшей геометрии и являются некоторые множества (континуумы).

Такими формами являются:

1). Пунктуал. - совокупность всех точек прямой. Нельзя говорить, что прямая, как и линия вообще, есть совокупность точек, т.к. при каком угодно долгом делении мы будем получать отрезки, хотя сколь угодно малые. Прямая несет на себе точки, что записывается:

$$\frac{A}{a},$$ A - элемент
a - носитель. Пунктуал - актуальная бесконечность.

2) Бесконечное множество прямых в плоскости, проходящее через точку, составляют пучок. Точка и плоскость являются носителями прямых: Множество всех прямых, принадлежит точке.

$$\frac{a}{A\alpha};$$ a - элемент,
$A\alpha$ - носитель

3) Пучок плоскостей - множество всех плоскостей, принадлежащих прямой.

$\frac{\alpha}{a}$ – a - носитель
α - элементы множества. - плоскости.

4) Плоскостная система - множество точек и прямых, принадлежащих данной плоскости, т.е.

$\frac{Aa}{\alpha}$; A и a - элементы
α - носитель.

5). Связка - совокупность всех прямых и плоскостей, принадлежащих точке, т.е.

$\frac{a\alpha}{A}$. Носителем множество прямых и плоскостей служит точка.

6) Полная система. - совокупность всех точек прямых и плоскостей принадлежащих пространству: $A a \alpha$;

Все формы можно разделить на три отдела по их мощности:

III - самая мощная форма - полная система:

$A a \alpha$

II - менее мощн. $\frac{a\alpha}{A}$ $\frac{aA}{\alpha}$

I $\frac{\alpha}{a}$ $\frac{a}{A\alpha}$ $\frac{a}{A\alpha}$ $\frac{A}{a}$

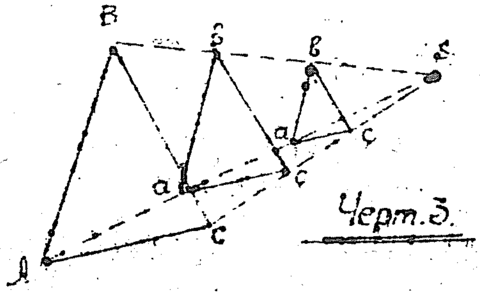
Черт. 2.

Отдел I.

Методы высшей геометрии.

Преобразования на прямой.

Основным методом высшей геометрии является метод преобразования. Иногда метод преобразования смешивают с методом соответствия, упуская тот факт, что понятие преобразования связано с динамичностью, тогда как метод соответствия статичен. Метод соответствия, например, применим в подобии, причем, рассматриваются определенные треугольники, между элементами которых устанавливается однозначное соответствие. Тогда как преобразование мыслится, как непрерывный процесс подобного преобразования, метод соответствия использует объектами отдельные моменты этого процесса. Так что каждому моменту преобразования отвечает соответствие.



Черт.3.

Всякое преобразование включает в себя понятие инвариантности. Инвариантными называются такие понятия величины и объекты, которые остаются без изменения в процессе преобразования.

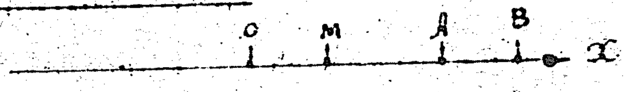
Инвариантами могут быть свойства, величины: так в подобии инвариантами являются углы и отношения сторон. Преобразования могут образовать группы. Внедрение понятия группы преобразования относится к 80-90 годам прошлого столетия и связывается с именами Клейна и Софуса-Ли.

Если мы имеем совокупность двух однородных преобразований, результат которых равносилен некоторому одному подобному преобразованию, то такие преобразования образуют группу. Понятие последовательного выполнения преобразований трактуется, как произведение, поэтому предыдущее определение следует записать так: если $P_m P_n \ldots = P_p$ то преобразования $P_m, P_n, \ldots, P_k$ образуют группу.

Два подобных преобразования дают опять подобное преобразование, следовательно подобные преобразования образуют группу. Два вращения дают то, что дало бы одно вращение, следовательно вращение образует группу. Преобразование симметрии группы не образует.

Рассмотрим некоторые преобразования на прямой.

1° Преобразование сдвига.



Черт. 4.

Координатой точки М является отрезок $OM = x$;
Расстояние $AB = |x_в - x_a|$;

Формулой преобразования сдвига является:

$$x' = x + a;$$

Инвариантом этого преобразования является расстояние. Действительно, положим, что в результате преобразования координаты точек A и B

превратились в $x'_a = x_a + a$ и $x'_в = x_в + a$;

тогда расстояние $AB = |x'_в - x'_a| = |x_в + a - x_a - a| = |x_в - x_a|$;

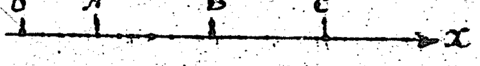
Преобразования сдвига образуют группу. На самом деле:

Первое преобразование - $x' = x + a$

второе - $x'' = x' + a' = x + a + a' = x + a''$

Таким образом $x'' = x + a''$, два преобразования дают результат некоторого одного преобразования сдвига.

2° Преобразование подобия. Преобразование подобия производится по формуле $x' = ax$.



Черт. 5.

Инвариантом преобразования подобия является простое отношение трех точек $(ABC) = \frac{AC}{BC}$;

Действительно:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{x_c - x_a}{x_c - x_b}\text{; после преобраз. } \frac{x_c - x_a}{x_c - x_b} = \frac{ax_c - x_a a}{ax_c' - ax_b} = \frac{x_c - x_a}{x_c - x_b},$$

Простое отношение трех точек остается неизменным.

Преобразования подобия образуют группу:

I $x' = ax$

II $x'' = a'x' = a'ax = a''x$; В результате двух преобразований получили тоже, что и получили бы в результате некоторого одного: $x'' = a''x$;

3° Афинное преобразование. Афинное преобразование производится по формуле:

$x' = ax + b$; - целая линейная функция.

Полагая $ax = x_1$, а затем $x' = x_1 + b$ замечаем, что преобразование афинное слагается из подобного преобразования и преобразов. сдвига. А раз это так, то афинное преобразование образует группу. Инвариантом является простое отношение трех точек.

В первом убеждаемся аналитически так:

$$x' = ax + b;\ x'' = a'x' + b' = a'(ax + b) + b' = a'ax + a'b + b' =$$
$$= a''x + b'', \text{ где } b'' = a'b + b';$$

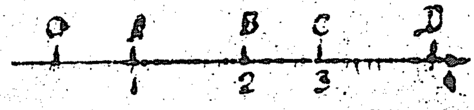
Легко убедится и во втором; т.е. что простое отношение 3х точек сохранится:

$$(ABC) = \frac{x_c - x_a}{x_c\ x_b} = \frac{x_c' - x_a'}{x_c' - x_b'} = \frac{ax_c + b - ax_a b}{ax_c + b - ax_b - b} = \frac{x_c - x_a}{x_c - x_b};$$

4°. <u>Проективное преобразование.</u> Проективное преобразование производится по формуле:

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d};\quad \text{отсюда}\quad x=\frac{dx'-b}{cx'+a};$$

Каждой точке M соответствует точка M' и наоборот. Инвариантом проективного преобразования является сложное или ангармоническое отношение четырех точек:



$$(ABCD)=\frac{AC}{BD}:\frac{AD}{BD}=\frac{x_c-x_a}{x_c-x_b}:\frac{x_d-x_a}{x_d-x_b};$$

покажем, что
$$(ABCD)=\frac{x'_c-x'_a}{x'_c-x'_b}:\frac{x'_d-x'_a}{x'_d-x'_b};$$

Действительно:

1) $$\frac{x'_c-x'_a}{x'_c-x'_b}=\frac{\dfrac{ax_c+b}{cx_c+d}-\dfrac{ax_a+b}{cx_a+d}}{\dfrac{ax_c+b}{cx_c+d}-\dfrac{ax_b+b}{cx_b+d}}=\frac{\dfrac{bcx_a+adx_c+bcx_c-adx_a}{(cx_c+d)(cx_a+d)}}{\dfrac{bcx_b+adx_c-adx_b-bcx_c}{(cx_c+d)(cx_b+d)}}=$$

$$\frac{bc(x_a-x_c)-ad(x_a-x_c)}{(\cancel{cx_c+d})(cx_a+d)}:\frac{bc(x_b-x_c)-da(x_b-x_c)}{(\cancel{cx_c+d})(cx_b+d)}=$$

$$=\frac{(x_a-x_c)(cx_b+d)}{(cx_a+d)(x_b-x_c)};$$

Также:

2) $$\frac{x'_d-x'_a}{x'_d-x'_b}=\frac{\dfrac{ax_d+b}{cx_d+d}-\dfrac{ax_a+b}{cx_a+d}}{\dfrac{ax_d+b}{cx_d+d}-\dfrac{ax_b+b}{cx_b+d}}=\frac{(bcx_a+dax_d-adx_a-bcx_d)(cx_b+d)}{(bcx_b+adx_d-bcx_d-adx_b)(cx_a+d)}$$

$$=\frac{(x_a-x_d)(cx_b+d)}{(x_b-x_d)(cx_a+d)};$$

Тогда:
$$(ABCD)=\frac{(x_a-x_c)(cx_b+d)}{(\cancel{cx_a+d})(x_b-x_c)}:\frac{(x_a-x_d)(\cancel{cx_b+d})}{(x_b-x_d)(\cancel{cx_a+d})}=$$

$$=\frac{x_c-x_a}{x_c-x_b}:\frac{x_d-x_a}{x_d-x_b},$$ что и требовалось доказать.

Легко убедится, что проективное преобразование образует группу:

$$\text{I}\ x' = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad \text{II}\ x'' = \frac{a'x'+b'}{c'x'+d'};$$

$$x'' = \frac{a'\frac{ax+b}{cx+d}+b'}{c'\frac{ax+b}{cx+d}+d'} = \frac{(aa'+b'c)x+a'b+b'd}{(c'a+d'c)x+c'b+d'd} = \frac{a''x+b''}{c''x+d''};$$

Два проективных преобразования I и II дают тот же результат, что и некоторое одно преобразование.

Несобственный элемент - бесконечноудаленная точка является инвариантом для преобразований:

сдвига, подобия и афинного. На самом деле, если объект x удаляется в бесконечность, то:

1) при сдвиге $x' = x+d \to \infty$

2) в случае подобия $x' = ax \to \infty$

3) при афинном преобразовании $x' = ax+b \to \infty$

Таким образом, бесконечноудаленная точка и после трех указанных видов преобразований обращается в бесконечноудаленную точку, - иначе бесконечно удаленный объект инвариантен. Этим вводится понятие двойного элемента. Двойной элемент тот, который в преобразовании сам в себя преобразуется, остается в том положении, в котором он находился. Следовательно вообще говоря, инвариантом рассматриваемого случая с несобственным элементом для трех преобразований есть положение.

Для проективного преобразования мы не имеем инвариантности положения в отношении к несобственному элементу; на самом деле:

когда $x \to \infty$ $\quad x' = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$, несобственный элемент преобразуется в собственный.

Для проективного преобразования можно найти двойные точки из формулы преобразования.

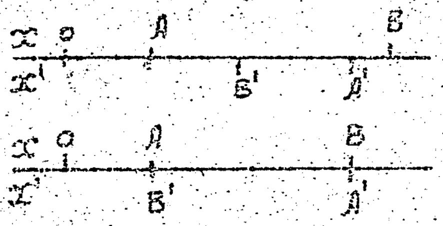
Считая, что при этом $x = x'$:

$$cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

В зависимости от дискриминанта этого уравнения, оно может и не иметь действительных корней, т.е. может не иметься двойных элементов, но может быть один двойной элемент и два.

5° Инволюционное преобразование. Инволюционное преобразование является частным случаем проективного преобразования. Два последовательные проективные преобразования дают в результате новое проективное преобразование, причем, если точки A, B, C, D.. преобразованы в точки A', B', C', D'.. то второе преобразование обращает их в точки: A'', B'', C', D'.. совершенно новые. Инволюционное преобразование характерно тем, что два одинаковых проективных преобразования возвращают точки самое в себя.

Так, если точке A приложено некоторое инволюционное преобразование Π, которое превращает ее в точку A', то преобразование Π^2 преобразует точку A в A, т.е. тоже преобразование Π обращается точку A' в A.



Черт. 7.

Пусть имеем два пунктуала (черт.) x и x' совмещены, наложены один на один. Точке A ряда x, соответствует точка A' ряда x'. Тоже можно сказать и относительно точек B и B'; (Преобразование точек A и B в точки A' и B' проводится проективное).

Инволюционное преобразование имеет место в том случае, когда существует такое соответствие между двумя парами точек пунктуалов x и x'; если точка A пунктуала x соответствует т. A' пунктуала x' и точке B ($\equiv A'$) пунктуала x, соответствует точка B' ($\equiv A$) пунктуала x'. Тогда обратное преобразование приведет к прежним точкам A и B, в переходе от пунктуала x' к x.

Рассмотрим аналитическое выражение условия инволюционного преобразования. Так как это частный случай преобразования проективного, то

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}; \rightarrow cxx'+dx'-ax-b=0 \rightarrow Axx'+Bx+Cx'+D=0$$

Так как в этом случае точки переходят самое в себя, то для этой функции перемена местами x и x' не должны на ней самой отражаться, т.е. она должна быть симметричной относительно x и x'; поменяя местами x и x' и из одного вычтем другое:

$$\begin{array}{r} cxx'+dx'-ax-b=0 \\ -\; cx'x+dx-ax'-b=0 \\ \hline -x(d+a)+x'(d+a)=0 \end{array}$$

$$(d+a)(x'-x)=0$$

т.к. $x \neq x'$, то $\underline{\underline{d=-a}}$.

Следовательно, для того чтобы проективное преобразование являлось инволюционным, необходимо:

$$d = -a$$

Тогда в формуле $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ заменим d на $(-a)$:

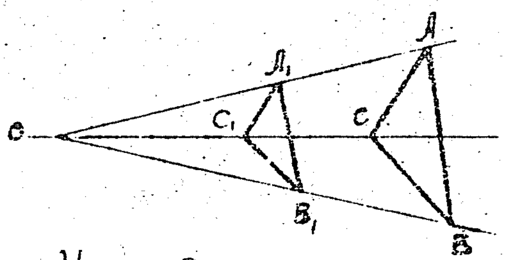
$$x' = \frac{ax+b}{cx-a};$$ это и есть формула инволюционного преобразования на прямой.

Отдел II.

Преобразование на плоскости.

А°. Подобные преобразования.

Подобные преобразования мы понимаем в узком и в широком смыслах. Понятие преобразования в узком смысле включает в себя и определяется переходом от одной фигуры к другой подобной и подобнорасположенной. В широком смысле подобное преобразование не включает в себя, как необходимое условие, подобности расположения. В случае подобного преобразования в узком смысле подобные стороны параллельны, а вершины лежат на прямых пересекающихся в одной точке (O), называемой центром подобия. Когда фигуры расположены так, что соответственные стороны параллельны, то всегда существует центр подобия.



Черт. 8.

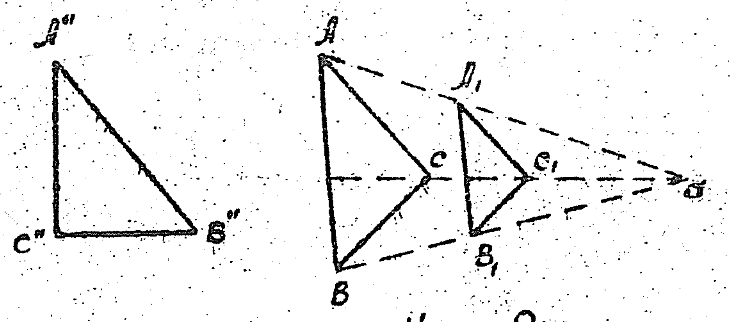
Подобнорасположенные фигуры подобны. В самом деле (см. черт. 8).

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AC}{A_1C} = \frac{OC}{OC_1}; \text{ также: } \frac{OB}{OB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OC}{OC_1};$$

$$\text{и} \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}; \text{ отсюда: } \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1};$$

Чем и доказывается подобие подобнорасположенных фигур. Две фигуры подобнорасположенные называются гомотетичными. Понятие гомотетичности вполне включает в себя понятие подобия, как это было доказано. Из гомотетии вытекает подобие.

Две подобные фигуры всегда можно расположить гомотетично. Чтобы показать справедливость этого утверждения, надо еще оговориться, что мы различаем гомотетию: прямую и обратную.



Черт. 9.

Пусть тр-к $ABC \sim \triangle A''B''C''$ (черт.9) соединим вершины тр-ка ABC с произвольно выбранным центром подобия O. Отложив на отрезках OA и OB точки A_1 и B_1, так, чтобы:

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A''B''};$$

соединим точку A_1 и B_1 и определим т. C_1 и C. Полученный треугольник $A_1B_1C_1 = \triangle A''B''C''$; В самом деле:

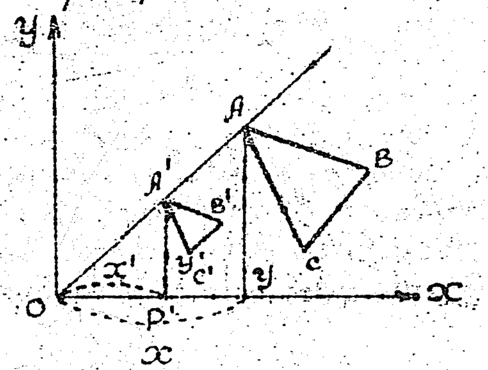
$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AB}{A''B''};$$ отсюда $A_1B_1 = A''B''$; Также можно показать равенство всех трех сторон соответственно.

Выразим аналитически подобные преобразования.
Из подобия треугольников OAP и $OA'P'$ (чер.10) следует:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = k;$$

отсюда формула подобного преобразования на плоскости:

(I) $y' = ky$; $x' = kx$, при условии, что понятие подобия употребляется в узком смысле.
Легко показать что подобные преобразования на плоскости в (узком смысле) образуют группу:



Черт.10

$$y' = ky; \; x' = kx;$$

$y'' = ky'$; $x'' = k'x'$ отсюда $y'' = k''y$; $x'' = k''x$; что доказывает утверждение.

Исследуем инвариантные объекты этого преобразования.

1). Простое отношение трех точек:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC} = \frac{x_c - x_a}{x_c - x_b} = \frac{y_c - y_a}{y_c - y_b}; \quad \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{x_c' - x_a'}{y_{1c}' - y_{1b}'} = \frac{y_c' - y_a'}{y_c' - y_b'} = (ABC).$$

2) Отношение соответствующих отрезков.

3) Углы. 4) Параллельность, что следует из сохранения углов.

Положим, что имеем объектом преобразования две прямые:

$$1)\ y = ax + b; \quad 2)\ y_1 = cx + d; \qquad a \neq c; \text{ или } a = c.$$

После преобразования получаем:

$$\frac{y'}{k} = a\frac{x'}{k} + b; \quad \frac{y_1'}{k} = c \cdot \frac{x'}{k} + d$$

отсюда: $$y_1' = ax' + kb; \qquad y_1' = cx' + kd.$$

Прямые преобразуются в себе параллельные. Последнее объясняется тем (параллельные преобразуются в параллельные), что несобственный элемент при подобных преобразованиях двойной, т.е. преобразуется сам в себя. Прямые же параллельные пересекаются в бесконечности. Факт пересечения в бесконечности при подобном преобразовании сохраняется. Если $a \neq c$ то угол между прямыми сохраняется.

Также инвариантной является бесконечно удаленная прямая.

В) Афинное преобразование. („дружественное").

Афинное преобразование также понимается в узком и широком смыслах. Афинное преобразование в узком смысле то, когда в одном направлении точки не испытывают действия - в направлении ему перпендикулярном афинное преобразование растягивает фигуру или сжимает. Такое афинное преобразование выразится формулами:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ly \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = l_1 x \\ y' = y \end{cases}$$

Два преобразования образуют группу $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = l''y \end{cases}$;

Инвариантами являются:

1) Простое отношение трех точек. Для $x^{ов}$ нечего доказывать. Для $y^{ков}$ в новых отношениях l сократится.

2). Инвариантом является x;

3). Параллельные пары прямых инвариантны т.е. остаются параллельными и после преобразования.

Это усматривается из того, что при афинном преобразовании несобственный элемент переходит в несобственный и, следовательно, факт пересечения прямых в бесконечности преобразуется сам в себя. Но прямая не преобразуется в прямую прежнего направления. Действительно, если прямая была задана $y = ax + b$; то после преобразования:

$$y' = a\ell x + b\ell. \quad a\ell \neq a;$$

Угол наклона изменился. Две взаимоперпендикулярные, не преобразуются во взаимноперпендикулярные.

4) В виду взаимнооднозначного соответствия точек прежней и новой фигур, касательная преобразуется в касательную. На этом же основании геометрическое место середин параллельных хорд эллипса преобразуется в это же геометрическое место для круга.
Серединное положение каждой точки преобразованной оправдывается сохранением соотношения:

до преобразов.: $\dfrac{M_1O}{M_2O} = 1$; после $\dfrac{M_1'O'}{M_2'O'} = 1$; отсюда вывод:

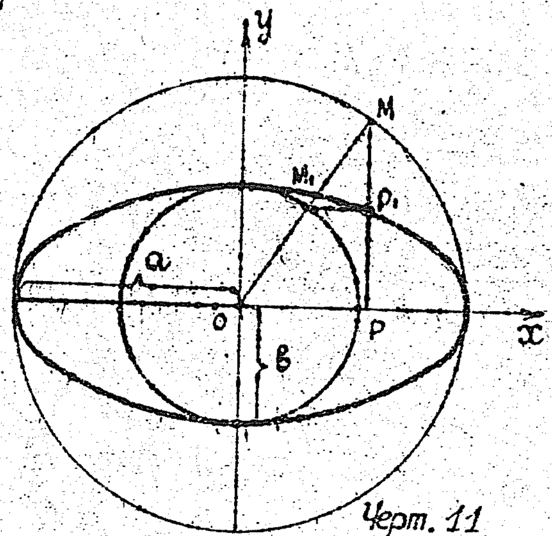
Свойство диаметральности сохраняется.

Афинное преобразование применимо при доказательстве теорем при решении задач.
Это использование производится исходя из такого принципа: нам нужно доказать какое-то свойство ω, присущее некоторому объекту $\mathcal{F}$. Объект $\mathcal{F}$ преобразуется в более простой $\mathcal{F}$. Доказав инвариантность свойства ω для данного преобразования, доказываем принадлежность свойства ω объекту $\mathcal{F}$. Зачастую последнее очевидно.
Пример: доказать, что площадь параллелограмма $S = a.h$;
Делая преобразование скашивания (инвариант - S), приходим к прямоугольнику с той же высотой и основанием что и параллелограмм. Очевидность формулы для прямоугольника бесспорна. Инвариантность S для преобразования тоже очевидна.

Примеры афинного преобразования.

Эллипс есть афинное преобразование круга и наоборот. Афинное преобразование в узком смысле можно рассматривать как ортогональное проектирование. В таком случае координаты меняются односторонне;

положим, что абсциссы не меняются, а меняются только ординаты:



Черт. 11

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{e}\cdot y' \end{cases}$$ окружность $x'^2+y'^2=a^2$

преобразуется:

$$x^2+e^2y^2=a^2 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{e^2}}=1;$$

или при $\frac{a^2}{e^2}=b^2$; имеем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

Итак, в результате аффинного преобразования круга с помощью коэффициента преобразования ℓ, получим эллипс. Коэфициент преобразования в таком случае:

$$\ell = \frac{a}{b};$$

Сделав преобразование полученного эллипса с коэффициентом, обратным ℓ, сохраняя положение абсцисс, очевидно получим прежний круг.

$$x' = x \qquad y' = \frac{a}{b}y \qquad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{\frac{b^2}{a^2}y'}{b^2}=1; \to x'^2+y'^2=a^2;$$

Таким образом, уменьшая каждую ординату точек окружности в $\frac{b}{a}$ раз, а x оставляя теже, приходим в результате преобразования к эллипсу. Увеличивая каждую ординату полученного эллипса в $\frac{a}{b}$ раз, а x оставляя теже, получаем прежний круг. Используя первое свойство ординат, легко по данному кругу и малой полуоси эллипса построить самый эллипс. Для этого из точки O описываем окружности радиусов равных a и b. Некоторую точку M окружности соединяем с O и опускаем перпендикуляр на ось X из M. Точку M_1 проектируем на MP, получаем точку P_1 - точку эллипса. В самом деле: (см.черт. 11).

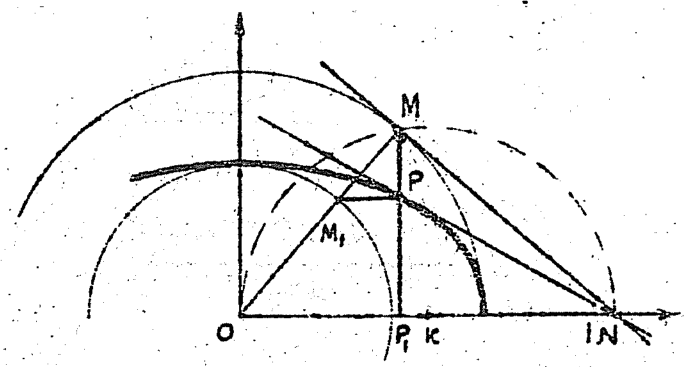
$$\frac{PP_1}{MP}=\frac{OM_1}{OM}=\frac{b}{a};$$ т.е. ордината эллипса так относится

к ординате круга, как $\frac{b}{a}$, что и надо.

Решение задач.

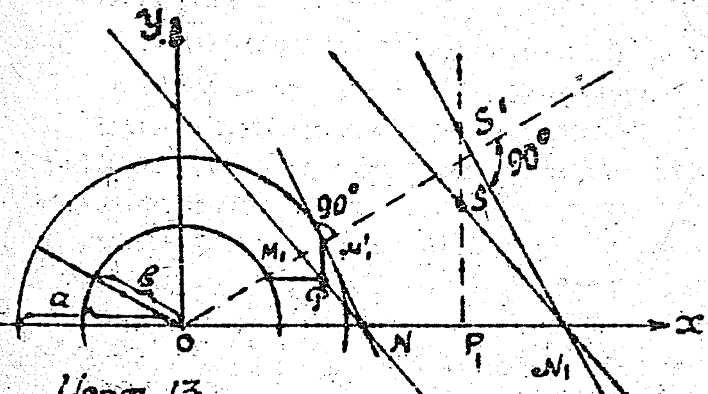
Задача 1°. Провести касательную к эллипсу из точки N на оси. Эллипс преобразуем в окружность с радиусом большой полуоси (черт. 12).

Проводим касательную к полученной окружности, отыскав точку M – точку касания. Находим соответствующую точке M точку P на эллипсе. Так как точка N переходит самое в себя, а касательная в касательную с соответствующей точкой, то NP и есть касательная к эллипсу.



Черт. 12.

Задача 2°. Провести касательную данного направления к эллипсу. (чер. 13). Пусть имеем направление SN. Эллипс преобразуем в круг и координату точки S соответственно S'_0.



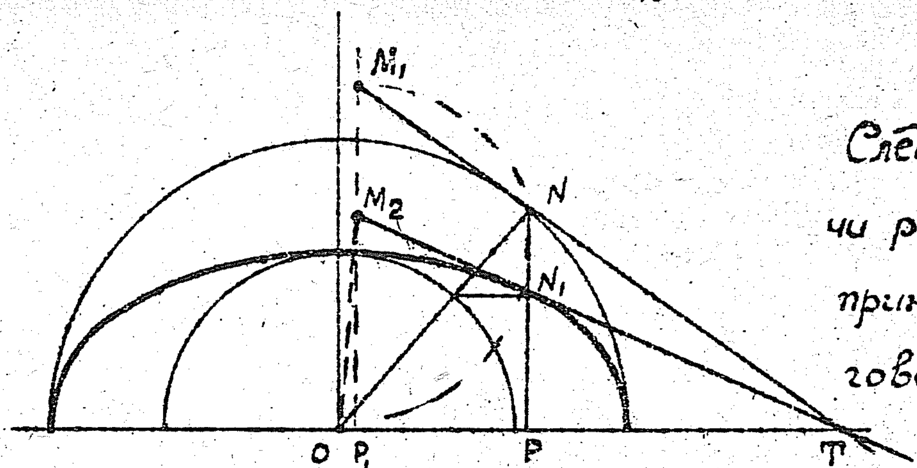
Черт. 13.

Для круга имеем направление касательной $S'N'$; Проводим касательную и ищем соответствующую точку касания эллипса. Затем афинно переходим к эллипсу. Преобразование координаты S происходит по формуле:

$$\frac{SP}{S_1P} = \frac{b}{a};$$

Задача 3°. Провести касательную к эллипсу из точки M (черт. 14.) не лежащей на оси афинитета.

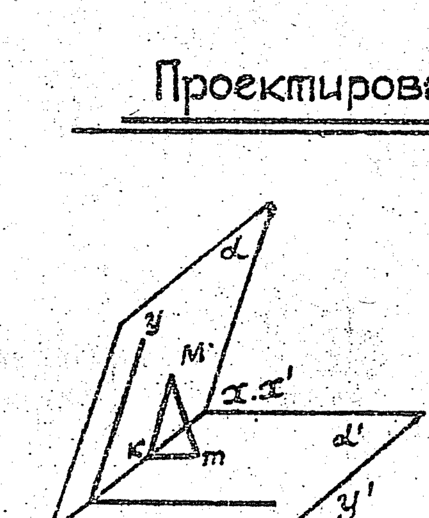
Пусть дан эллипс и точка M по условию. Строим M' так чтобы $\frac{PM}{PM'} = \frac{b}{a}$; Затем преобразуем эллипс в круг и из точки M' проводим касательную к окружности. Обратным преобразованием получаем требуемое.



Следовательно, задачи решаются на основе принципа, о котором говорилось прежде.

Черт. 14.

Проектирование и афинное преобразование.



Черт. 15.

Афинное преобразование получается с помощью проектирования.

Проекции различается: ортогональные, параллельные или косые и центральные. Так, проекцией точки ортогонального проектирования называется основание перпендикуляра опущенного из этой точки на проекционную плоскость.

В косой проекции - это основание прямой, проведенной в направлении проектирования, на проекционной плоскости. В центральной - это основание луча, соединяющего центр проекции с проектируемой точкой, на проекционной плоскости. Все эти виды проекционного преобразования преобразуют точку в точку, прямую в прямую, пучек в пучек. Прямая xx' (черт.15) называется осью проекции. Точки этой оси сами в себя преобразуются.

Отличие косой проекции от ортогональной в том, что помимо того, что проектирующие прямые параллельны, они для (косой проекции) направлены под каким угодно углом к плоскости проекции, тогда как в ортогональной проекции проектирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекций. Центральная проекция получается при проектировании объектов на некоторую плоскость из одного центра O; центральная проекция вырождается в косую, когда центр проекции O удаляется в бесконечность.

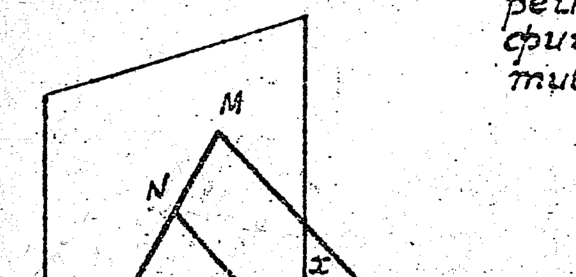
Если мы будем проектировать точки одной плоскости на другую, то будем иметь афинное преобразование проектируемых точек: Некоторой точке M (черт. 15) проектируемой плоскости соответствует точка m на проекционной плоскости. При ортогональной проекции $km - xx$. координата x преобразуется в x', причем

$$x' = x \quad \text{но} \quad y' = y_{\cos\alpha} \quad \text{или вообще} \quad y' = ky;$$

Так что афинное преобразование в узком смысле получается из проектирования. Очевидно, инвариантом будет для проекционного преобразования тоже, что и для афинного. Такая увязка пространственных суждений (проектирование) с плоскостными носит название фузионизма. Когда мы говорим, что с помощью афинного преобразования можно круг преобразовать в эллипс и наоборот, то это суждение, относящееся к плоскости, доказуемо с помощью проектирования; Задача выполняется при проектировании в нужном направлении. Взяв круговой или эллиптический цилиндр, мы можем всегда получить при сообразно выбранных сечениях, круг и эллипс.

__Афинитет.__ Под афинитетом понимают такую конфигурацию, при которой соответственные точки лежат на параллельных прямых, а соответственные прямые пересекаются в точках, лежащих на одной прямой - оси афинитета. Надо отметить, что под афинитетом понимается конфигурация всех элементов плоскости как бы при наложении элементов преобразуемой плоскости целиком на плоскость проекций.

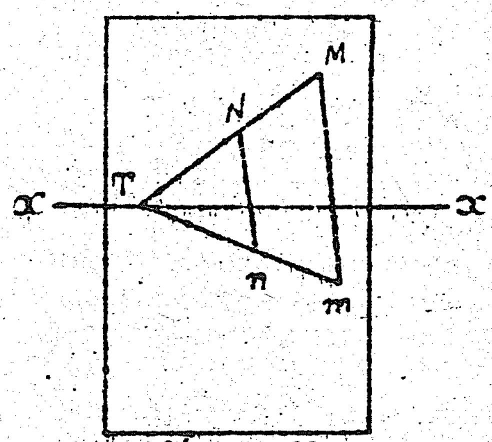
Прямые, соединяющие соответственные точки плоскости, а потому параллельные, носят название направления афинитета причем оно перпендикулярно оси афинитета при ортогональном проектировании, и направлено под некоторым произвольным углом при косом проектировании.



Черт.16.

Вопрос заключается в том, как перейти от пространственной конфигурации к плоскостной. В проективной геометрии поступают так: Элемент, находящийся в пространстве, проектируется на две плоскости (хотя бы ортогональная проекция), а затем плоскости разворачиваются. Последнее изображение проекций назыв. представлением в эпюре.

Так поступаем и здесь. В зависимости от того в какую сторону будем разворачивать плоскости до совпадения их, можем получить или элементы и их преобразования по одну сторону оси xx или по разные.



Черт. 17.

В этом случае точка T остается на месте; соответственные прямые сходятся в точке T на оси xx; кроме того отношение

$$\frac{TN}{TM} = \frac{Tn}{Tm}$$ остается, а потому $Mm \parallel Nn$.

т.е. в результате развертывания получаем афинитет.

1) Для афинного преобразования в узком смысле осью афинитета служит прямая, точки которой сами в себя преобразуются; точки ее сами себе соответствуют, т.е. эти точки инвариантны.

2) Прямые соединяющие соответствующие точки преобразуемых фигур, параллельны и носят название направления афинитета.

3) Все соответственные прямые пересекаются в точках на одной прямой - оси афинитета.

Гомотетия и афинитет связываются вместе, хотя между ними имеются отличия: а) для афинитета:

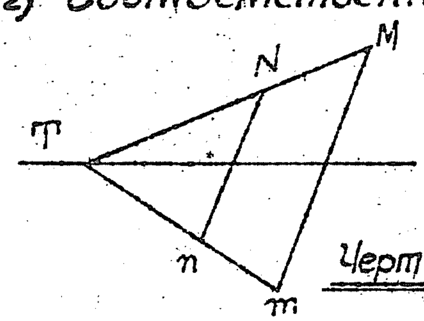
1) Соотв. точки соединяются параллельными прямыми.

2) Соотв. прямые сходятся в одной точке на оси афинитета.

в) для гомотетии:

1) Соотв. точки соединяются прямыми, сходящимися в одной точке - центре гомотетии.

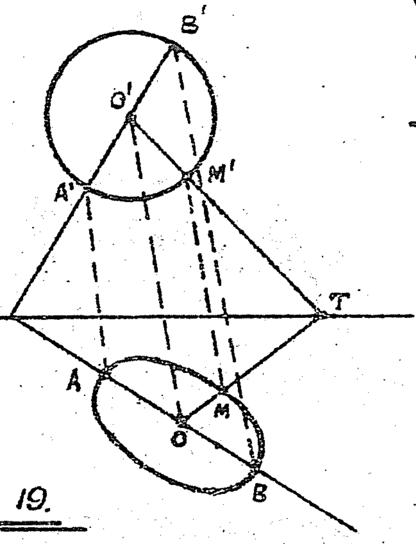
2) Соответственные прямые параллельны.



Черт. 18.

Задача 1. Построить афинитет, если даны две соответств. точки, ось и преобразуемая точка N (черт. 18).

Для этого продолжаем MN до пересечения с осью. Точку T



Черт. 19.

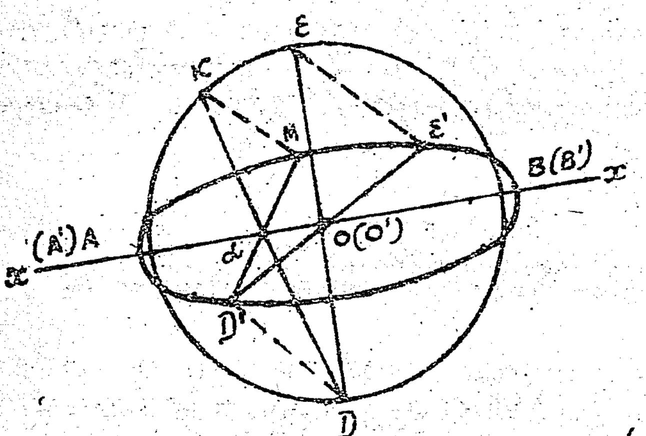
соединяем с точкой т. Проводим $Nn \parallel Mm$; Находим точку n.

Задача 2°. Дано: 1) Ось афинитета.

2) Направление афинитета

3) Круг. 4) Направление преобразованного диаметра.

Строим точки A, B, O; чтобы построить некоторую точку M, необходимо соединить точку O' с M' до пересечения с осью в точке T. Точку T соединить с O'. Из M провести параллельную OO'. Найдем точку m эллипса (см. черт. 19).



Черт. 20

Задача 3°. (черт. 20)

Дано: 1) Ось афинитета

2) Преобразование сопряженных диаметров.

3) Круг с диаметрами.

Направление афинитета задано EE'. Чтобы построить преобразованную точку K, необходимо из точки K провести прямую в D; получим точку пересечения α на оси афинитета. D' соединим с α; из K проводим прямую параллельную направлению афинитета до пересечения с продолжением D'α. Точка пересечения и есть ось эллипса.

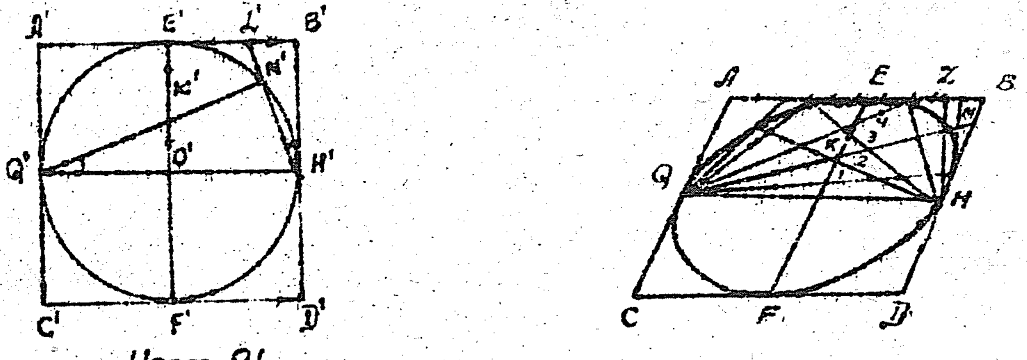
Задача 4°. (черт. 21). 1) Дан круг и около него описан квадрат.

2) Даны сопряженные диаметры эллипса.

Построить точки эллипса.

Выберем на окружности точку M' и соединим ее с Q' и H'

$\Delta\, Z'H'B' = \Delta\, Q'K'O'$; $Z'B' : B'H' = K'O' : QO = \underline{Z'B' : E'B'} = \underline{O'K' : O'E'}$.



Черт. 21.

Отношение $O'K' : O'E' = B'Z' : B'E$ сохранится при афинном преобразовании и заменится равным:

$$OK : OE = BZ : BE;$$

Разбивают OE и BE на одинаковое число частей соответственно равных. На пересечении QK и ZH определится точка M эллипса, соответствующая точке M' окружности.

Преобразование подобия в широком смысле.

Преобразование подобия в широком смысле слова надо понимать как совокупность подобного преобразования в узком смысле с преобразованием движения.

Преобразование движения включает в себя преобразование сдвига и поворота, а потому общие формулы преобразования движения суть:

$$\begin{cases} x' = x_0 + x\cos\alpha - y\sin\alpha. \\ y' = y_0 + x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Совершенно одинаково, фигура ли приводится в гомотетичное расположение или система координат соответствующе поворачивается и переносится. Всякое движение образует группу, ибо два движения всегда дают какое то новое движение, совокупное. Инвариантом является расстояние между точками объекта, подвергающегося преобразованию. Тогда общее преобразование подобия выразится формулами:

$$\begin{cases} x'' = kx' = k(x_0 + x\cos\alpha - y\sin\alpha) \\ y'' = ky' = k(y_0 + x\sin\alpha + y\cos\alpha). \end{cases}$$

Общее подобное преобразование имеет 4 переменных параметра: k, x_0, y_0, α; 1) Инвар.- бескон. удал. точка; 2) простое отношение трех точек; 3) Угол между прямыми.

Афинное преобразование в широком смысле.

Афинное преобразование в широком смысле гораздо шире общего подобного преобразования: формулы общего афинного преобразования суть:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f; \end{cases}$$

Здесь 6 переменных параметров: a, b, c, d, e и f;

Афинное преобразование в широком смысле складывается из: (черт. 22) 1) афинного преобразования в узком смысле, но при условии косого проектирования; 2). Из преобразования подобия в узком смысле и 3) преобразования движения.

В результате всех преобразований приходят ряд параметров: $x_0, y_0, \alpha, e, k, \theta$, причем θ и e появляются при афинном преобразовании в узком смысле, θ-угол между осью афинитета и направлением афинитета при косом проектировании; k – при подобном преобразовании и x_0, y_0 и α при преобразовании движения в широком смысле. Все эти параметры являются переменными, от которых зависят: a, b, c, d, e, f, хотя бы таким образом:

$$a = f_1(x_0, y_0, \alpha, e, \theta, k). \quad b = f_2(x_0, y_0, \alpha, e, \theta, k), \text{ и т.д.}$$

Зная зависимости f_1, f_2 можно из шести уравнений получить переменные параметры. Афинное преобразование в широком смысле образует группу, ибо оно складывается из преобразований, выполняющихся последовательно, из которых каждое образует группу.

Вполне естественно получится новое преобразование:

$$x'' = a''x + b''y + c''$$

$$y'' = d''x + e''y + f''$$

являющееся афинным.

Инвариантами при афинном преобразовании в широком смысле являются:

1) Бесконечно-удаленная прямая.

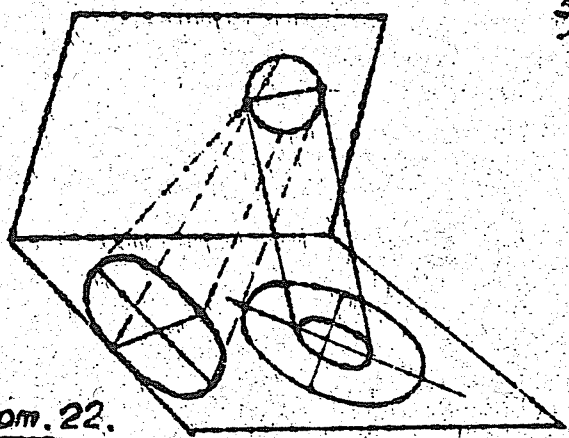
2) Прямые параллельные остаются параллельными, хотя поворачиваются в совокупности на некоторый угол.

3) Отношение 3х точек инвариантно.

Двойным элементом безусловно останется бесконечно удаленная точка: Двойные элементы можно найти из формул преобразования.

$$x = ax + by + c$$

$$y = dx + ey + f$$



Черт. 22.

Тогда собственные двойные точки найдутся из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$(a-1)x + by + c = 0$$

$$dx + (c-1)y + f = 0$$

При этом имеем три таких случая:

1) Если $\frac{a-1}{d} \neq \frac{b}{c-1}$, то имеем двойную точку собственную

2) Если $\frac{a-1}{d} = \frac{b}{c-1}$, то не имеем двойной точки собственной, она уходит в бесконечность.

3) Если $\frac{a-1}{d} = \frac{b}{c-1} = \frac{c}{f}$, то имеется бесчисленное множество двойных точек - ось афинитета, а следовательно и афинитет, ибо отношение трех точек сохраняется. Сохранение отношения 3х точек и пересечение сходств. прямых на оси уже определяет параллельность прямых, соедин. соотв. точки.

Проективное преобразование на плоскости.

Аналитическое проективное преобразование на плоскости определяется формулами:

$$x' = \frac{ax+by+c}{gx+hy+k}; \quad y' = \frac{dx+ey+f}{gx+hy+k};$$

Можно рассматривать преобразование или на одной и той же плоскости или на двух. Коэффициенты $a, b, c, d, e, f, g, h - k$ - параметры; число их показывает, что проективное преобразование более обще, нежели все предыдущие преобразования.

Легко убедится в том, что проективное преобразование образует группу. В самом деле:

$$x''=\frac{a'\,\dfrac{ax+by+c}{gx+hy+k}+b'\,\dfrac{dx+ey+f}{gx+hy+k}+c'}{g'\,\dfrac{ax+by+c}{gx+hy+k}+h'\,\dfrac{dx+ey+f}{gx+hy+k'}}=$$

$$=\frac{(aa'+b'd+c'g)x_{,}+(a'b+b'c+hc')y+c''}{(g'a+h'd+gk')x+(bg'+h'e+hk')y+k''};$$

$$y''=\frac{d'\,\dfrac{ax+by+c}{gx+hy+k}+e'\,\dfrac{dx+ey+f}{gx+hy+k}+f'}{g'\,\dfrac{ax+by+c}{gx+hy+k}+h'\,\dfrac{dx+ey+f}{gx+hy+k}+k'}=$$

$$=\frac{(ad'+e'd+gf')x+(d'b+e'e+hf')y+f''}{(g'a+h'd+k'g)x+(g'b+h'e+k'h)y+k''};$$

Но эти выражения суть одно и тоже, что и

$$x''=\frac{a''x+b''y+c''}{g''x+h''y+k''};\quad y''=\frac{d''x+e''y+f''}{g''x+h''y+k''};$$

а это и указывает на то, что проективные преобразования на плоскости образуют группу.

Между точками определяемыми координатами (x и y) и точками, определяемыми координатами (x' и y') существует взаимно однозначное соответствие; существует взаимно однозначное соответствие между плоскостями.

Бесконечно удаленная точка, а также бесконечно удаленная прямая не инвариантны. Стоит знаменателю обратится в нуль, как x' и y' уходят в ∞.

Инварианты проективного преобразования на плоскости.

1. Инвариантом при проективном преобразовании является понятие прямой; прямая в прямую и преобразуется.
Это можно усмотреть аналитически: пусть имеем какую либо прямую:

$$Ax + By + C = 0$$

Преобразуя получаем:

$$Ax' + By' + C = 0$$

или

$$A \cdot \frac{ax + by + c}{gx + hy + k} + B\,\frac{dx + ey + f}{gx + hy + k} + C = 0.$$

$$(Aa + Bd + Cg)x + (Ab + Bc + hC)y + Ac + Bf + Ck = 0,$$

что равносильно записи:

$$A'x + B'y + C' = 0$$

Следовательно, в результате преобразований имеем опять прямую, но иначе направленную, что говорит о несохранении углов при проективном преобразовании на плоскости.

2) При проективном преобразовании пунктуал преобразуется в пунктуал, а пучок с принадлежащей точкой преобразуется в пучек.

Отсюда не вытекает сохранение углов.

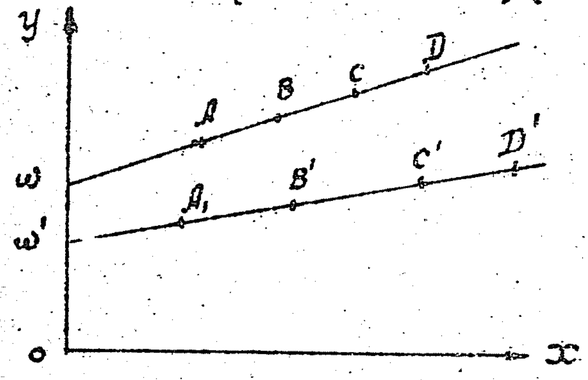
Существуют меровые и зрительные свойства явлений и объектов. Так теорема Пифагора относится к свойствам меровым.

Положение, что через две точки проходит только одна прямая, относится к зрительным. Зрительные свойства не зависят, а меровые зависят от измерений.

При проективном преобразовании зрительные свойства инвариантны. Меровые свойства несохраняются вообще.

3) Инвариантом является сложеное отношение четырех точек:

$$(ABCD)=(ABC)(ABD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD};\ (\text{черт } 23.)$$



Черт. 23.

Пусть имеем некоторую прямую ω, точки которой A,B,C,D преобразуются в точки A',B',C',D' на преобразованной прямой ω', причем уравнение первой суть:

$$y=\alpha x+\beta.$$

Тогда преобразование по оси ox выразится:

$$(I)\ \ldots\ldots\ x'=\frac{ax+by+c}{gx+hy+k}=\frac{ax+b\alpha x+b\beta+c}{gx+h\alpha x+h\beta+k}=\frac{Px+q}{rx+s};$$

Покажем, что, если точки A,B,C,D расположены на одной прямой, то их преобразование плоскостное сводится к преобразованию на прямой. Считая ω и ω' как линейные системы координат, а координаты прямой ω будут ℓ, а $\omega'-\ell'$, можно проективное преобразование на прямой выразить соотношением:

$$\ell'=\frac{a_1\ell+b_1}{c_1\ell+d_1};\ \ldots\ldots\ (II)$$

Нетрудно показать, что при замене x на ℓ, а x' на ℓ', получим тоже, что и при преобразовании на прямой. Очевидно:

$$x=\ell\cos\alpha;\ x'=\ell'\cos\alpha'.\quad \text{где } \alpha \text{ и } \alpha' \text{ углы с } ox.$$

Отсюда выражение I перепишется:

$$\ell'\cos\alpha'=\frac{P.\ell\cos\alpha+q}{r.\ell\cos\alpha+s};\ \longrightarrow \ell'=\frac{P\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}\cdot\ell+\frac{q}{\cos\alpha'}}{r\ell\cos\alpha+s};$$

последнее выражение вообще можно записать:

$$\ell'\ \frac{P'\ell+q'}{r'\ell+S'};\ \text{а это равносильно (II)}$$

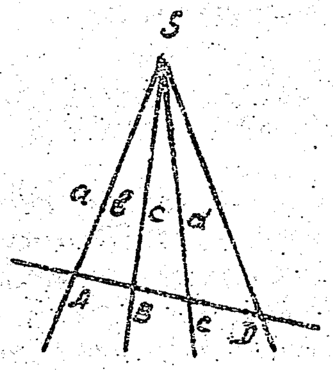
Следовательно, в случае нахождения точек на одной прямой, преобразование их плоскостное сводится к линейному, а следовательно сложное отношение сохраняется. Если в проективном преобразовании знаменатель обратится в постоянное число, то проективное преобразование вырождается в афинное преобразование в широком смысле.

4° Пусть прямые a, в, c, d принадлежат одному пучку с точкой S (черт. 24). Сложное отношение четырех лучей a, в, c, d, как и сложное отношение четырех точек A, B, C, D, сохраняется оно записывается так:

$$(aвcd)=\frac{\sin(\widehat{a,c})}{\sin(\widehat{в,c})}:\frac{\sin(\widehat{a,d})}{\sin(\widehat{в,d})};$$

простое отношение трех лучей суть:

$$\frac{\sin(\widehat{a,c})}{\sin(\widehat{в,c})}=(a,вc).$$



Черт. 24.

Следует отметить при этом, что углы считаются направленными. Прежде чем показывать, что сложное отношение четырех лучей сохраняется, введем краткие обозначения уравнений прямых и пучка.

Уравнение пьямой, вообще, можно записать так:

$U=0$, или $V=0$, где V и U выражения такого вида:

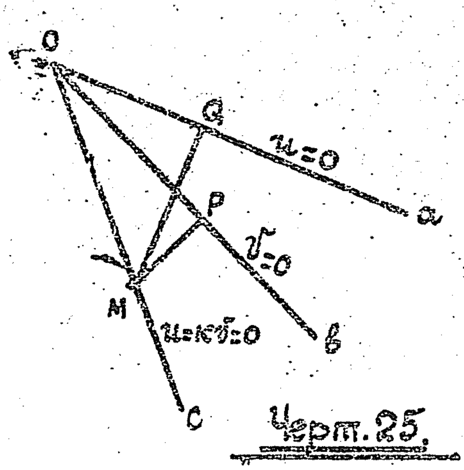
$$Ax+By+C-k(A_1x+B_1y+C_1)=0$$

Когда прямая задана в нормальном виде, то $A^2+B^2=1$;

Всякую прямую можно привести к нормальному виду, причем выражение:

$$\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

по абсолютному значению суть расстояние прямой $Ax+By+C=0$ от точки с координатами $(x_1;y_1)$.



Черт. 25.

Исходя из этих соображений, определим значение коэфициента к. Будем считать, что уравнения $V=0$, $U=0$, $U-kV=0$ заданы в нормальном виде, а потому представляют собой расстояния некоторых точек от прямых. То что $V=0$ и $U=0$ показывает, что они рассматривают точки на самой прямой.

С одной стороны $k=\frac{u}{v}$; Но U и V есть расстояния текущей точки M от прямых $U=0$ и $V=0$. Эти расстояния иначе выразятся как: (черт. 25)

$$MP = OM \sin(b,\hat{c})$$
$$MQ = OM \sin(a,\hat{c})$$

А потому k выразится после преобразований так:

$$k = \frac{\sin(a,\hat{c})}{\sin(b,\hat{c})};$$

Таким образом коэфициент пропорциональности k уравнения пучка есть простое отношение трех лучей a, b и c; Теперь перейдем к самому доказательству.

Пусть имеем четыре луча a, b, c, d, заданные соответственно уравнениями:

$$U=0; \quad V=0; \quad U-kV=0; \quad U-lV=0;$$

Сложное отношение четырех лучей записывается так:

$$\omega = \frac{\sin(a,\hat{c})}{\sin(b,\hat{c})} : \frac{\sin(a,\hat{d})}{\sin(b,\hat{d})}; \text{ на } \frac{\sin(a,\hat{c})}{\sin(b,\hat{c})} = k; \quad \frac{\sin(a,\hat{d})}{\sin(b,\hat{d})} = l$$

а потому $\omega = \frac{k}{l}$; Покажем, что это отношение сохранится при проективном преобразовании прямых пучка по формулам:

$$x' = \frac{ax+by+c}{gx+hy+k}; \quad y' = \frac{dx+ey+f}{gx+hy+k};$$

Очевидно получим уравнения в результате:

$$U'=0; \quad V'=0; \quad U'-k'V'=0; \quad U'-l'V'=0.$$

Надо показать, что $\omega = \omega' = \frac{k}{l} = \frac{k'}{l'}$;

При подстановке формул преобразований подробнее получим такие два выражения:

$$A'x + B'y + c' - k(A_1'x + B_1'y + C_1') = 0.$$
и
$$A'x + B'y + c' - l(A_1'x + B_1'y + C_1') = 0$$

Казалось бы коэфициенты k и l остаются теми же, что и прежде, но в результате преобразований уравнения могли стать заданными не в нормальном виде. Сделаем приведение к нормальному виду:

$$\frac{A'x+B'y+c}{\sqrt{A'^2+B'^2}} \cdot \sqrt{A'^2+B'^2} - k \frac{A_1'x+B_1'y+c}{\sqrt{A_1'^2+B_1'^2}} \cdot \sqrt{A_1'^2+B_1'^2} = 0.$$

$$\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2} - l\,\frac{A_1'x+B_1'y+C}{\sqrt{A_1'^2+B_1'^2}}\cdot\sqrt{A_1'^2+B_1'^2}=0$$

Или так запишем:

$$\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}} - k\cdot\frac{\sqrt{A_1'^2+B_1'^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2}}\cdot\frac{A_1'x+B_1'y+C_1'}{\sqrt{A_1'^2+B_1'^2}}=0$$

и

$$\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}} - l\,\frac{\sqrt{A'^2+B'^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2}}\cdot\frac{A_1'x+B_1'y+C_1'}{\sqrt{A_1'^2+B_1'^2}}=0.$$

Отсюда:

$$k'=k\cdot\frac{\sqrt{A_1'^2+B_1'^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2}};\quad l'=l\cdot\frac{\sqrt{A'^2+B'^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2}};$$

Легко видеть, что:

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}'=\frac{k}{l}=\frac{k'}{l};\ \text{т.е.}\ (a,bcd)=(a'b'c'd').$$

Задание проективного преобразования.

1°. Установим необходимое количество соответственных пар точек, требуемых для построения всех пар точек при проективном преобразовании на прямой.

Из формулы преобразования на прямой видно, после упрощений, что существует три неизвестных и переменных параметра: α, β γ;

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{\alpha x+\beta}{x+\gamma};$$

Чтобы определить α, β и γ, надо иметь три уравнения, а следовательно три точки, т.к. каждая точка дает одно уравнение.

$$x_1'=\frac{\alpha x_1+\beta}{x_1+\gamma};\quad x_2'=\frac{\alpha x_2+\beta}{x_2+\gamma};\quad x_3'=\frac{\alpha x_3+\beta}{x_3+\gamma};$$

Тремя парами соответственных точек определяется проективное соответствие на прямой.

Проективное преобразование на прямой имеет два двойных элемента, что вытекает из уравнения, полученного из формулы преобразования.

Если же существует 3 двойных точки, то их существует бесчисленное множество, т.е. $x^2+px+q=0$

обращается в тождество и следовательно пунктуалы совпадают всеми своими точками. Имеем конгруентность. Два неконгруентных пунктуала не имеют более двух двойных точек.

2°. Рассмотрим этот же вопрос относительно проективных преобразований на плоскости.

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + k}; \quad y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + k};$$

или

$$x' = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{x + \lambda y + \tau}; \quad y' = \frac{\delta x + \sigma y + \varphi}{x + \lambda y + \tau};$$

Чтобы определить $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \varphi, \lambda$ и τ необходимо иметь 8 уравнений, а т.к. каждая пара соответственных точек дает два уравнения, то чтобы определить параметры надо иметь четыре пары соответственных точек.

Если имеем три двойных точки, то точки остальные могут быть и не двойными, но стоит иметь больше трех двойных точек, как можно говорить о совпадении плоскостей всеми их элементами.

Положим в формулах преобразования

$$gx + hy + k = \rho;$$

тогда они запишутся так:

$$x'\rho = ax + by + c; \quad y'\rho = dx + ey + f$$

Для получения двойных точек полагаем $x' = x$ и $y' = y$. Тогда получаем три уравнения с двумя неизвестными x и y.

$$\begin{cases} (a - \rho)x + by + c = 0. \\ dx + (e - \rho)y + f = 0 \\ gx + hy + k - \rho = 0. \end{cases}$$

Но для этой цели достаточно двух уравнений, следовательно эти три формы являются зависимыми, одна из них есть следствие двух других, а потому определитель:

$$\begin{vmatrix} a - \rho & b & c \\ d & e - \rho & f \\ g & h & k - \rho \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв его получим функцию (уравнение) третьего порядка относительно ρ:

$$\alpha\rho^3 + \beta\rho^2 + \gamma\rho + \delta = 0 \ldots\ldots (A)$$

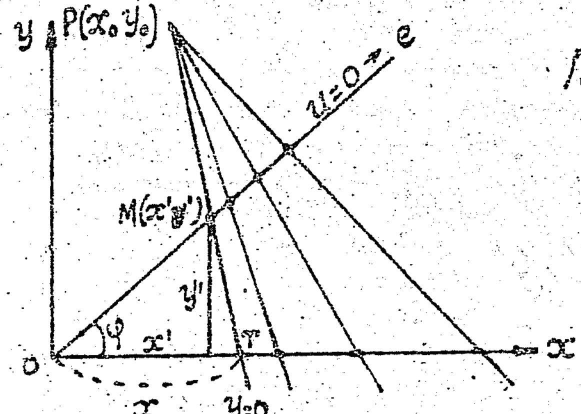
Следовательно, существует три различных ρ, удовлетворяющих этому уравнению (три корня), а т.к. различное ρ характеризует одну точку, то существует три различных двойных точки. Если их будет существовать более трех, то уравнение (А) будет иметь более трех, корней, т.е. обратится в тождество.

Связь проектирования с проективным преобразованием.

Оправдаем понятие проективного преобразования для формул преобразования. Проективный получается от слова „проекция". Покажем, что

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

получается с помощью проектирования (черт. 26).



Черт. 26.

Пусть $U=0$ есть пунктуал, точки которого относительно самого себя определяются координатами e. В него преобразуется пунктуал оси x $\underline{o}\underline{b}$, с собственными координатами x.

Тогда должно быть

$$e = \frac{ax+b}{cx+d};$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $P(x_0 y_0)$ запишется: $y - y_0 = \alpha(x - x_0)$. т.к. точка $M(x', y')$ лежит на этой прямой, то она ему удовлетворяет:

(В) . . . . $y' - y_0 = \alpha(x' - x_0)$ где x' и y' есть координаты точек пунктуала $U=0$ относительно xoy

Пунктуал $U=0$ выразится иначе: $y' = Ax'$, если его рассматривать относительно xoy тогда (в) перепишется:

$$Ax' - y_0 = \alpha x' - \alpha x_0 \;. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

Из условия, что T лежит на прямой PT, имеем:

$$-y_0 = \alpha(x - x_0), \text{ откуда}$$

$$\alpha = -\frac{y_0}{x - x_0}$$

Из выражения (с)... получаем: $x' = \dfrac{y_0 - \alpha x_0}{A - \alpha} =$

$$= \frac{y_0 \mp \frac{x_0 y_0}{x - x_0}}{A + \frac{y_0}{x - x_0}} = \frac{px + q}{rx + s}; \quad \to x' = \frac{px+q}{rx+s};$$

Но $x' = \ell \cos\varphi$. тогда $\ell = \frac{px+q}{r\cos\varphi . x + s\cos\varphi} = \frac{px+q}{r'x+s'}$;

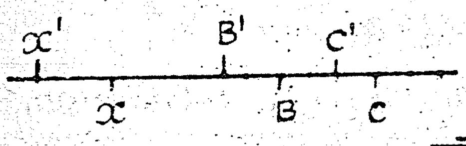
т.е. получим то выражение, которое было необходимо получить. Но преобразование пунктуала OX в пунктуал U произведена с помощью проектирования центрального из точки P. Следовательно верно, что проективное преобразование исходит из проектирования.

Инварианты и их отношение к определению преобразования.

1°. При афинном преобразовании сохраняется простое отношение трех точек. Но не только афинное преобразование дает сохранение отношения трех точек, а сохранение отношения трех точек характеризует афинное преобразование, определяет его, т.е. если простое отношение трех точек сохраняется, то имеем афинное преобразование:

$$x = ax' + b,$$

Пусть $(xBC) = (x'B'C')$ (черт. 27) положим, что точки B, C, B', C' находятся на постоянных местах, а точка x, x' меняют свои положения.



Черт. 27.

Простое отношение выразится:

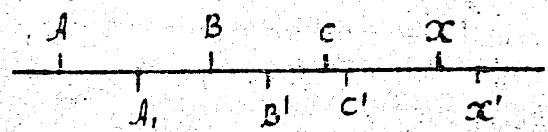
$$\frac{x - x_c}{x_b - x_c} = \frac{x' - x'_c}{x'_b - x'_c} \to$$ т.к. x_b'; x_c', x_b, x_c постоянные величины, то

$$x = \alpha x' + \beta.$$

Получили формулу афинного преобразования.

2°. При проективном преобразовании сохраняется сложное отношение четырех точек; но сохранение сложного отношения четырех точек обуславливает присутствие проективного преобразования.

В самом деле, пусть (черт. 28) $(ABCX) = (A'B'C'X')$, что значит



Черт. 28.

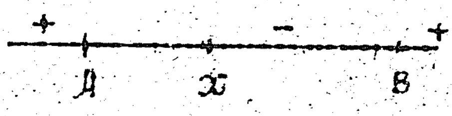
$$\frac{x_a - x_c}{x_b - x_c} : \frac{x_a - X}{x_b - X} = \frac{x_a' - x_c'}{x_b' - x_c'} : \frac{x_a' - x'}{x_b' - x'},$$

причем опять полагаем: A, B, C, A', B', C' закреплены а x и x' двигаются; разрешая это уравнение относительно x', получим очевидно выражение

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta};$$

Координирование.

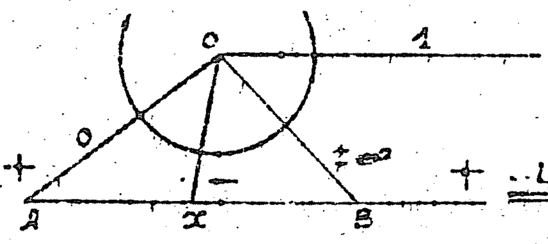
I°. Простое отношение трех точек $(A,BC) = \frac{AC}{BC}$ может служить характеристикой положения точек на прямой, подобно тому, как задание направленного отрезка определяет (координата) положение точки. Если $(ABC) = (ABC')$, то $C \equiv C'$, Знак $\equiv$ совпад.
Положение всякой третьей точки определяется однозначно, если задано простое отношение (ABC) и положение двух точек. При заданном положении двух точек всякому простому отношению соответствует только одна точка, причем по знаку.



Черт. 29.

Пусть точка x скользит относительно постоянных A и B на прямой (черт. 29). Когда x находится между A и B, тогда $(ABx) < 0$; когда x находится вне отрезка AB, тогда $(ABx) > 0$.

Если x совпадает с A, то $(ABx) = 0$; если x совпадает с B, то $(ABx) \to \infty$. Точки совпадения носят название критических точек, причем, смотря потому, с какой стороны будет подходить точка x к точке B, отношение превратится в $+\infty$ или в $-\infty$. Так, если x находится внутри и отсюда подходит к B, то отношение есть $-\infty$, если x подходит с внешней стороны, то отношение есть $+\infty$. Следовательно точка x имеет при совпадении с B две координаты $+\infty, -\infty$; Точка определяется двумя координатами также, как в декартовой системе координат бесконечно удаленной точке соответствует две координаты. В координировании с помощью простого отношения этим свойством обладает конечная точка.



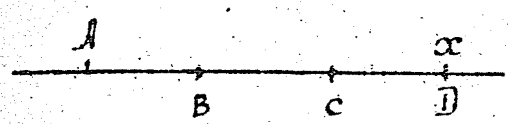
Черт. 30.

Когда точка x уходит на бесконечность, тогда простое отношение равно положительной единице. В самом деле,

$$\bar{AX} = \bar{AB} + \bar{BX} \rightarrow \ell = \frac{\bar{AX}}{\bar{BX}} = \frac{\bar{AB}}{\bar{BX}} + 1$$

когда $\bar{BX} \rightarrow \infty$, то $\ell = +1$ (черт. 30).

II° Сложное отношение четырех точек может быть использовано как определенного вида координаты, причем здесь необходимым является задание трех точек и самого отношения.



Черт. 31.

$$m = \frac{\bar{AC}}{\bar{BC}} : \frac{\bar{AD}}{\bar{BD}} = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\bar{AC}}{\bar{BC}} \cdot \frac{\bar{BD}}{\bar{AD}}$$

Пусть точка D меняется и служит координатой. (чер. 31) Ее положение определяется отношением при заданном положении точек ABC. Если $(ABCx) = (ABCx')$, то $x \equiv x'$.

Исследуем значение сложного отношения m в зависимости от того, в каком месте относительно заданных точек будет находится текущая точка D.

1) Если $D \equiv A$, то $\bar{AD} = 0$ и $m = \infty$

2) Если $D \equiv B$, то $DB = 0$ и $m = \infty$

3) Если $D \equiv C$, то простые отношения равны и $m = 1$. Когда одна пара точек (AC) разделяет другую пару (BD), тогда отношение отрицательно; если такого разделения не происходит, то $m > 0$. Изменяя в сложном отношении $(ABCD)$ порядок пар, не изменяя одновременно порядка элементов в паре, мы тем самым не изменяем величины $(ABCD)$.

$$(ABCD) = (CDAB)$$

Оставляя порядок пар, но меняя одновременно в них элементы, мы тем самым сохраняем величину сложного отношения: $(ABCD) = (BADC)$.

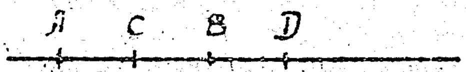
Если оставить порядок пар и изменить порядок элементов <u>только в одной паре</u>, то сложное отношение превратится в обратное:

$$ABCD = \frac{1}{(ABCD)}.$$

Гармонические точки и средний гармонический центр.

<u>Точки A, B, C, D называются гармоническими</u> если их сложное отношение $(ABCD) = -1$.

Очевидно, в этом случае все разобранные случаи перестановок (8) будут давать опять таки гармоническое расположение.



Черт. 32.

Пусть (чер. 32) $(ABCD)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}=\frac{c-a}{c-b}\cdot\frac{d-b}{d-a}$

Положим, что $d=0$ (нач. координ.) тогда $(ABCD)=\frac{c-a}{c-b}\cdot\frac{b}{a}$; Если эти точки гармонические, т.е. точки A и B делят гармонически CD то

$$\frac{c-a}{a-b}\cdot\frac{b}{a}=-1 \rightarrow cb-ba=ab-ac.$$

отсюда:

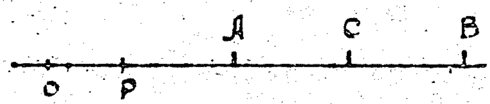
$$\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b};$$

C — есть средний гармонический центр AB относительно точки D. Отрезок AB разделен в среднем гармоническом отношении точкой C, по отношению к D.

Это можно записать так:

$$\frac{2}{\overline{OC}}=\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}.$$

Покажем, что если точка O уйдет на бесконечность то среднее гармоническое переходит в среднее арифметическое. (см. черт. 33).



Черт. 33.

$$+\begin{cases}\dfrac{2}{\overline{OC}}=\dfrac{1}{\overline{OA}}+\dfrac{1}{\overline{OB}}\\[2ex] \dfrac{2}{\overline{PO}}=\dfrac{1}{\overline{PO}}+\dfrac{1}{\overline{PO}}\end{cases} =$$

$$=\frac{2[\overline{PO}+\overline{OC}]}{\overline{PO}:\overline{OC}}=\frac{\overline{PO}+\overline{OA}}{\overline{PO}\cdot\overline{OA}}+\frac{\overline{PO}+\overline{OB}}{\overline{PO}\cdot\overline{OB}};$$

$$2\overline{PC}=\overline{PA}\cdot\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}+\overline{PB}\cdot\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}};\quad \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}=1$$

отсюда

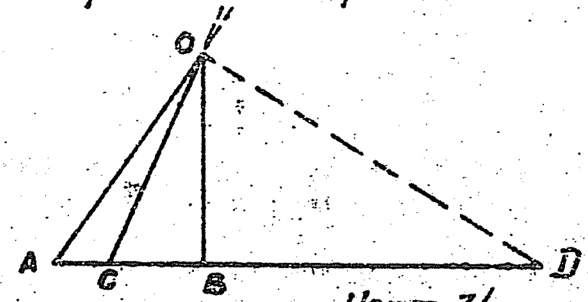
$$\overline{PC}=\frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2};$$ что надо было показать.

Построение гармонических точек.

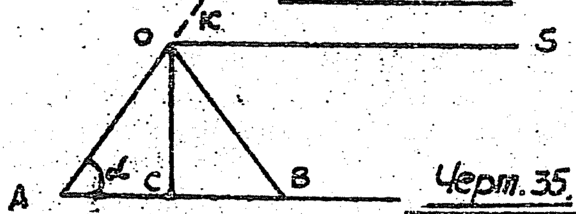
1°. Пара точек AB тр-ка AOB делится (черт. 34) точками C и D (пересечения биссектрис при угле O с продолжением AB) гармонически.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=-\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}};\quad \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}};\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=-1;$$

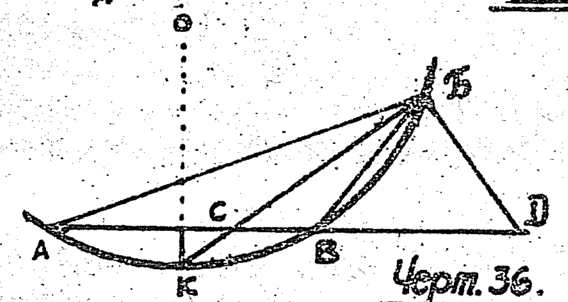
2°. Для равнобедренного треугольника точка C попадает между A и B, т.е. разделит AB в среднем арифметическом, следовательно четвертая точка уйдет на бесконечность. В самом деле, $\angle KOB = 2\alpha$; $\angle SOB = \alpha$. (черт. 35) следовательно OS и AB параллельны, т.е. пересекаются в бесконечности.



Черт. 34.



Черт. 35.

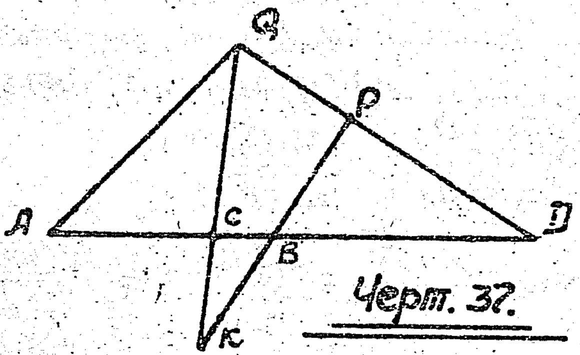


Черт. 36.

3°. Через точки A и B описывают окружность O', (черт. 36) некоторую точку окружности $Б$ соединяют с A и B и с точкой пересечения перпендикуляра из O к AB с окружностью K. Из точки $Б$ проводим $БD \perp CB$. Точки $ACBD$ — гармонические, $(ABCD) = -1$.

4°. Пусть дан треугольник AQD (черт. 37) из некоторой точки P проводим $PB \parallel QA$ и на продолжении PB откладываем $BK = PB$. тогда:

1) $\Delta AQD \sim \Delta PDB$



Черт. 37.

откуда: $\frac{AD}{BD} = \frac{AQ}{BP}$;

Также $\Delta AQC \sim \Delta CBK$, откуда имеем:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AQ}{BK} = \frac{AQ}{BP}.$$

И следовательно: $\frac{\bar{AC}}{\bar{BC}} : \frac{\bar{AD}}{\bar{BD}} = -1$

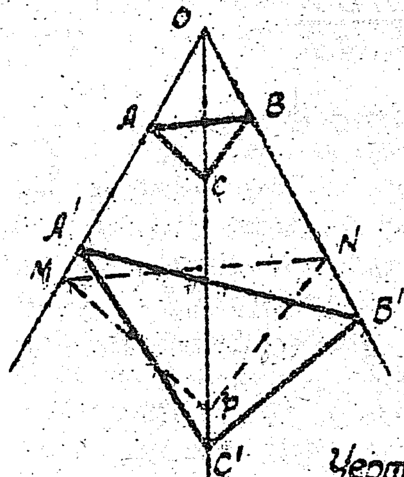
$\bar{AC}$ и $\bar{BC}$ противоположны.

Если D уходит на бесконечность, то $AQPB$ — параллелограмм, а потому $AQ = PB = BK$, и следовательно $AC = CB$, что следует из гармоничности.

Перспективность.

Две фигуры будут перспективными, если они расположены так, что прямые, соединяющие соответственные вершины пересекаются в одной точке.

Две гомотетичные фигуры являются в то же время перспективными, хотя две перспективные фигуры могут быть и негомотетично расположенными.

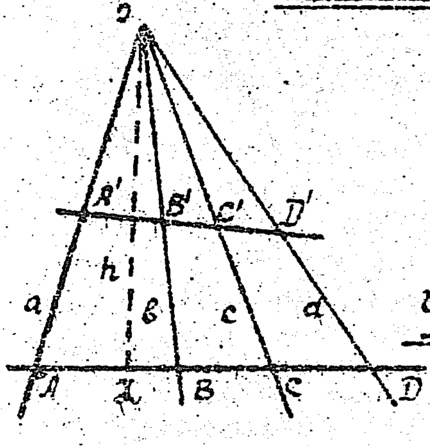


Черт. 38.

Тр-ки ABC, $A'B'C'$ и MNP (черт. 38) перспективны, а гомотетичными являются только тр-ки ABC и MNP.

Два перспективных пунктуала будут те, которые обладают тем свойством, что соответственные точки лежат на прямых, сходящихся в одной точке.

Два перспективных пунктуала получаются с помощью проектирования пунктуала из точки O.



Черт. 39.

Два перспективных пунктуала проективны, а т.к. для проективных пунктуалов присутствует $(ABCD)$, то оно присутствует и для перспективных пунктуалов.

В этом легко убедиться. Но одновременно покажем, что сложное отношение $(ABCD)$ зависит от лучей опирающихся на эти точки, но не от положения прямых, пересекающих лучи. т.е. докажем, что $(ABCD) = (abcd)$ (чер. 39).

$$\text{или} \quad \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(\widehat{ac})}{\sin(\widehat{bc})} : \frac{\sin(\widehat{ad})}{\sin(\widehat{bd})},$$

1. Площадь тр-ка AOC, с основанием AC, $S_{AC} = \frac{AC \cdot h}{2}$; или $S_{AC} = \frac{AO \cdot OC \sin \widehat{ac}}{2}$

2. Площ. тр-ка BOC, с основанием BC, $S_{BC} = \frac{BC \cdot h}{2}$; или $S_{BC} = \frac{OC \cdot OB \sin \widehat{bc}}{2}$.

3. Площ. тр-ка AOD, с основанием AD, $S_{AD} = \frac{AD \cdot h}{2}$; или $S_{AD} = \frac{OD \cdot OA \sin \widehat{ad}}{2}$

4. Площ. тр-ка BOD, с основанием BD, $S_{BD} = \frac{BD \cdot h}{2}$, или $S_{BD} = \frac{OB \cdot OD \sin \widehat{bd}}{2}$.

$$\text{Отсюда:} \quad \frac{S_{AC}}{S_{BC}} = \frac{AC}{BC} = \frac{AO \sin \widehat{ac}}{OB \sin \widehat{bc}}; \text{ и } \frac{S_{AD}}{S_{BD}} = \frac{AD}{BD} = \frac{OA \sin \widehat{ad}}{OB \sin \widehat{bd}},$$

Поделив первые равенства на вторые, получаем:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin a\bar{c}}{\sin b\bar{c}} : \frac{\sin a\bar{d}}{\sin b\bar{d}}$$

Или, считая отрезки направленными, это есть:

$$(ABCD) = (abcd);$$

Но пунктуал с точками $ABCD$ мы выбрали произвольно, следовательно полученное соотношение справедливо для всякого пунктуала, четыре точки которого определяются данным пучком лучей.

т.е. $(A'B'C'D') = (abcd)$, а отсюда:

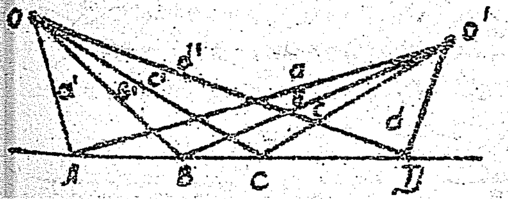
$(ABCD) = (A'B'C'D')$. Это же выражение и говорит одновременно о том, что для перспективных пунктуалов сложное отношение четырех точек сохраняется. Из того, что сложное отношение четырех точек равно сложному отношению четырех лучей, можно сделать ряд выводов.

Два пучка, опирающиеся на один и тот же пунктуал перспективны и проективны. Отношение $(abcd)$ четырех лучей одного и другого пучка $(a'b'c'd')$ будут равны, т.к. они опираются на одни и те же точки, находящиеся в определенном отношении. На два проективных пунктуала опираются два проективных пучка.

Гармоническими лучами называются те, сложное отношение которых равно -1. Гармонические лучи опираются на гармонические точки. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что

$$(ABCD) = (abcd) = -1;$$

Итак, проективность лучей связана с проективностью пунктуалов, на которые эти лучи опираются.

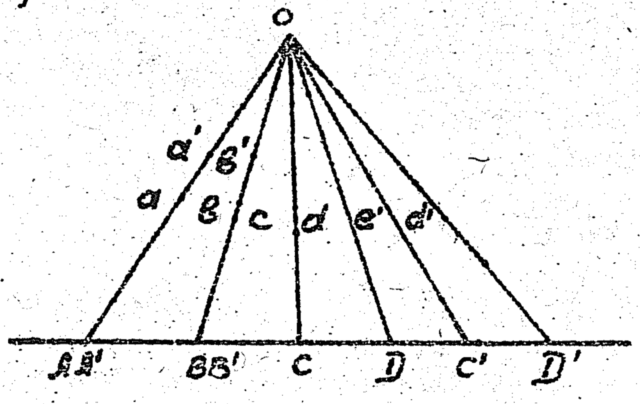


Черт. 40

Двойные точки, двойные лучи.

Два пунктуала не могут иметь больше двух двойных точек, если пунктуалы неконгруентны. Таково основное утверждение для проективного преобразования. Два наложенных пунктуала (проективных), не совпадающие всеми своими точками, не могут иметь более двух двойных точек. Но могут иметь одну, две и ни одной.

Два концентричных и неконгруентных пучка не могут иметь более двух совпадающих луча, ибо двойным лучам проективного пучка соответствуют двойные точки проективного пунктуала, а потому утверждение последнего обуславливается тем, что двойные точки находятся из квадратного уравнения.



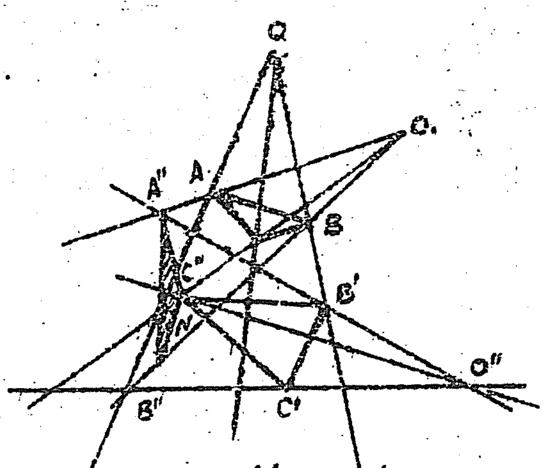
$$x = \frac{ax+b}{cx+d};$$

Черт. 41.

Перспективное преобразование группы не образует.

Это можно показать геометрически. В самом деле треугольник ABC и A'B'C' как видно из чертежа 42 неперспективны, ибо их вершины не лежат на прямых соединяющихся в одной точке.

Но преобразовав треугольники и ABC и A'B'C' из точек O' и O'', получим перспективный обоим треугольникам треугольник заштрихованный A''B''C''.



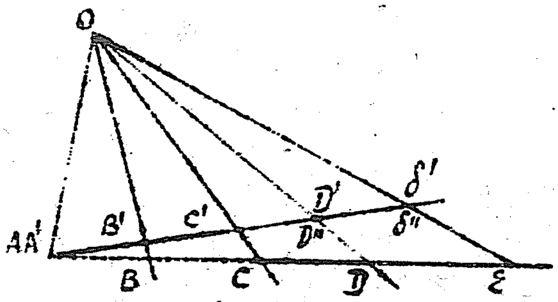
Черт. 42.

Идя обратно, можно сказать, что треугольник ABC преобразован в треугольник A''B''C'' перспективно; затем тр-к A''B''C'' преобразован в A'B'C' перспективно, но тр-ки A'B'C' и ABC, отделенные двумя преобразованиями, неперспективны. Следовательно перспективное преобразование группы не образует.

Основная теорема (рабочая) о перспективных пунктуалах.

Если в двух неналоженных проективных пунктуалах точка пересечения носителей сама себе отвечает,

Продолжение стр. 38.



Черт. №43.

то такие пунктуалы перспективны.

Даны пунктуалы $(ABCDE..)$ и $(A'B'C'D'E')$ проективные, т.е. $(ABCD)=(A'B'C'D')$. причем $A'\equiv A$ и пунктуалы неналоженные (чер. 43).

Соединим B с B', C с C' до пересечения в точке O; точку O соединим с $A\,A'$; покажем, что O-центр перспективности. Точки $D, E, F...$ соединим с O, получаем на пунктуале $(A'B'C'D'..)$ точки D'', E'' F''...etc. причем, на основе свойства перспективности:

$$(ABCDE...) \overline{\overline{\wedge}} (A'B'C'D''E''...),$$ а отсюда и

$(ABCDE..) \barwedge (A'B'C'D''E''..)$

Таким образом, с одной стороны по условию:

$(ABCDE..) \barwedge (A'B'C'D'E'..)$ с другой $(ABCDE..) \barwedge (A'B'C'D''E''..)$

Но два пунктуала, проективные порознь третьему, проективны между собой, т.е.

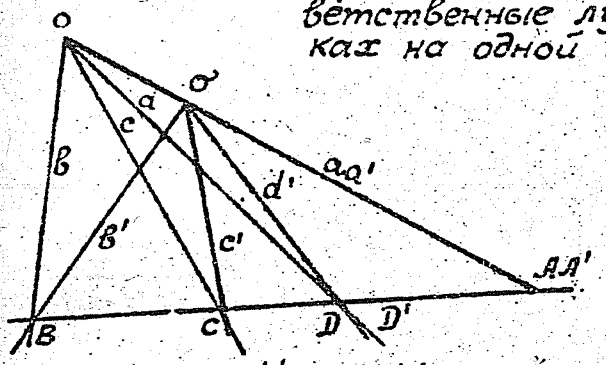
$(A'B'C'D'E'..) \barwedge (A'B'C'D''E''..)$

А отсюда следует, что точки $D' \equiv D''$; $E' \equiv E''$, $F' \equiv F''$,

но т.к. $(ABCDE..) \doublebarwedge (A'B'C'D''E''..)$, то на основе доказанного:

$(ABCDE..) \doublebarwedge (A'B'C'D'E'..)$, что и необходимо было доказать.

Перспективными пучками называются те, соответственные лучи которых пересекаются в точках на одной прямой.



Черт. 44.

Теорема. Если в двух неконцентричных проек. пучках, общий луч сам себе отвечает, то такие пучки перспективны.

Проводим через точки пересечения лучей b и b', c и c' суть: B и C прямую до пересечения с лучем a, в точке AA'. Прямая, очевидно пересечет луч d в точке D, луч d' в точке D' etc. т.к. пучек (abcd..) опирается на пунктуал (ABCD...), а пучек (a'b'c'd'..) опирается на пунктуал (A'B'C'D'...) то

$(abcd) \barwedge (ABCD)$, $(a'b'c'd') \barwedge (A'B'C'D')$.

Но по условию $(abcd) \barwedge (a'b'c'd'..)$, а потому

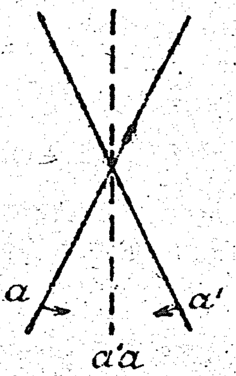
$(ABCD) \barwedge (A'B'C'D')$, а отсюда и из того, что

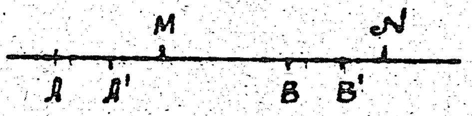
$A \equiv A'$, $B = B'$, $C \equiv C'$, следует $D \equiv D'$ etc.

т.е. точки пересечения лучей проективных пучков лежат на одной прямой, которая поэтому носит название оси перспективитета. Это и доказывает перспективность пучков (abcd) и (a'b'c'd');

Те проективные пунктуалы, которые имеют две двойные точки, носят название гиперболических; те которые имеют одну двойную точку - параболических; те которые не имеют ни одной двойной точки, носят название эллиптических. Если имеем концентричные пучки лучей (abcd..) и (a'b'c'd'...) с центром O, то при вращении их будем получать двойные лучи.

Очевидно, если a и a' будут расходится в разные стороны, то будем иметь один двойной или два луча, причем, двойной луч эти лучи разделяет. Наоборот, когда лучи пойдут в одну сторону, двойных лучей может и не быть, но в этом случае двойные лучи не будут разделять соответственные.





Черт. 45.

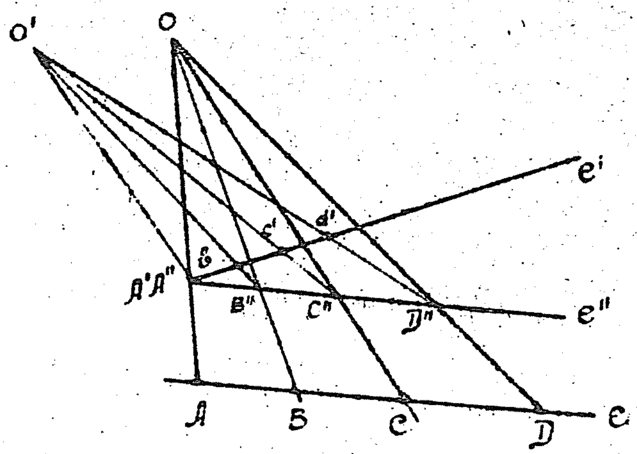
Докажем, что каждая пара соответственных элементов образует с двумя двойными элементами постоянное сложное отношение. Т.е., если наложенные пунктуалы $(ABMN\ldots)$ и $(A'B'MN..)$ проективны, то $(MNAA') = (MNBB')$ (черт.45).

На самом деле: т-к $(MNAB) = MNA'B')$, то

$$\frac{(MNA)}{(MNB)} = \frac{(MNA')}{(MNB')} \rightarrow \frac{(MNA)}{(MNA')} = \frac{(MNB)}{(MNB')};$$

$$\text{т.е. } (MNAA') = (MNBB').$$

Задача. Даны три пары соответственных элементов (AA_1'), (BB_1'), (CC_1'); построить проективные пунктуалы, т.е. найти, что отвечает точке D, E, на пунктуале e'. Пусть имеем пунктуалы e и e'. Введем вспомогательный пунктуал e'', возьмем точку O на AA' и соединим ее с точками $B, C, D..$ пунктуала e. На e'' получим точки B'', e'', D''...Полученные точки пунктуала e'' соединим соответственно с B' и C' пунктуала e', получим некоторый центр перспективности O'. Теперь точку O' соединим с точками A'', D'', E''; На пунктуале e' получим



Черт. 46.

точки D', e'.... проективно соответствующие точкам пунктуала e.

В самом деле: $(A'B'C'D'..) \;\overline{\wedge}\; (A''B''C''D''..)$ по построению;

не отсюда следует: $(A'B'C'D') \bar{\wedge} (A''B''C''D''..)$

Кроме того, по построению также:

$$(A''B''C''D''..) \bar{\wedge} (ABCD...), \text{ а значит и}$$

$$(A''B''C''D''...) \bar{\wedge} (ABCD..)$$

Два пунктуала $(ABCD)$ и $(A'B'C'D'..)$, проективные одному и тому же третьему $(A''B''C''D''..)$, проективны между собой, т.е.

$(ABCD..) \bar{\wedge} (A'B'C'D'..)$, что и полагалось. Отсюда, две перспективности дают проективность, или проективность разлагается на две перспективности.

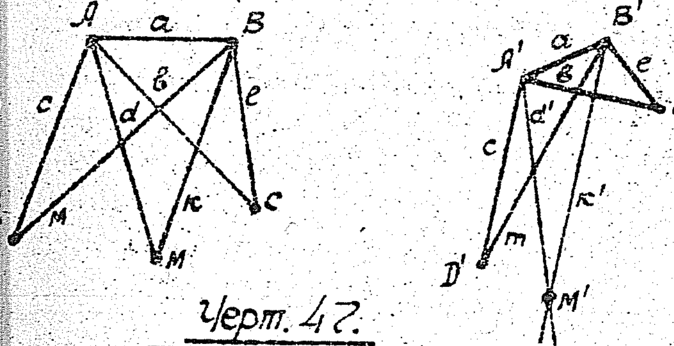
$$(ABCD..) \bar{\bar{\wedge}} (A''B''C''D''..)$$

$$(A'B'C'D'...) \bar{\bar{\wedge}} (A''B''C''D'') \text{ и тогда}$$

$$(ABCD..) \bar{\wedge} (A'B'C'D'..)$$

Два проективных пунктуала можно всегда привести в перспективное соответствие, для чего достаточно их передвинуть так, чтобы точкой пересечения была некоторая AA'. Тоже можно сказать и о проективных лучах. Для того, чтобы два проективных пучка привести в перспективное соответствие, достаточно пучки расположить так, чтобы один из лучей сам себе соответствовал, будучи общим.

Перспективное соответствие плоскостей.



Черт. 47.

При проективном преобразовании плоскостей: точка переходит в точку прямая - в прямую. Пунктуал - в пунктуал, пучек в пучок.

Сохраняется сложное отношение. Такое соответствие называется коллинеацией.

Пучек (пунктуал) преобразуется не только в пучек (пунктуал) но в проективный пучек (пунктуал).

Коллинеация не требует присутствия сохранения сложного отношения, но присутствие коллинеации уже обуславливает сохранение сложного отношения, что показано будет позже. Чтобы построить на одной плоскости точки соответственные точкам на другой плоскости, необходимо иметь четыре пары соответственных точек, как это было показано аналитически. Геометрически достаточность четырех точек доказывается так. (см. черт. 47). Соединим точку A с $B, C,$ и D на одной плоскости и A' с B', C' и D' на другой. Возьмем на первой плоскости точку M и луч AM, тогда на второй этому лучу какой нибудь будет соответствовать, ибо $(abcd)=(a'b'c'd')$.

Соединив также точку B со всеми точками на одной и точку B' со всеми точками на другой, получим, что лучу BM будет соответствовать некоторый луч k'. Лучи d и k на одной плоскости и лучи d' и k' на другой пересекутся в соответственных точках.

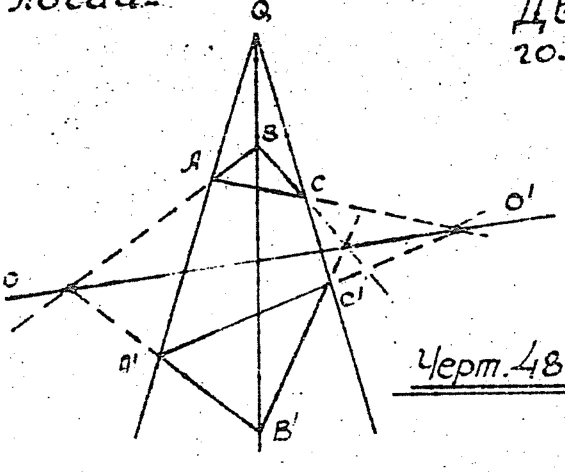
А т.к. лучи d и k пересекаются на одной плоскости в точке M, то на другой лучи d' и k' пересекутся в соответственной точке M'. Так можно построить любую точку N', соответствующую N;

Если пучку на плоскости соответствует проективный пучок на другой плоскости и имеет место коллинеация, то такие плоскости друг другу проективно соответствуют.

О гомологии.

Гомологией называется такая конфигурация или расположение обьектов или пространственных систем, при которой (для треугольников) соответственные вершины лежат на прямых, пересекающихся в одной точке Q', а соответственные стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой O, именуемой осью гомологии. Точка Q' носит название центра гомологии.

Два перспективных треугольника гомологичны. Гомология, как понятие, так соответствует проективному преобразованию, как афинитет для афинного преобразования и гомотетия для подобного преобразования.



Черт. 48.

Теорема Дезарга.

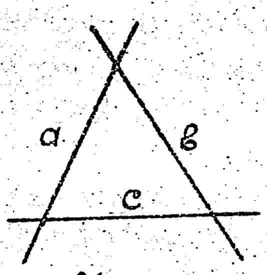
I. Если два треугольника ABC и $A'B'C'$ такие, что их соответственные вершины лежат на прямых, сходящихся в одной точке, то их стороны соответственные пересекаются в точках на одной прямой.

II. Если соответственные стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то соответственные вершины лежат на прямых, сходящихся в одной точке.

Прежде, чем доказать теорему Дезарга, докажем лемму.

Лемма. Прямые a, b и c, (черт. 49.) попарно пересекающиеся и при этом не лежащие на одной плоскости, проходят через одну точку. Доказат. Если они не проходят через одну точку, то они определяют некоторый треугольник, а следовательно и плоскость, в которой все три прямые вмещаются имея с нею по две общие точки, это противоречит условию; следовательно они пересекаются в одной точке.

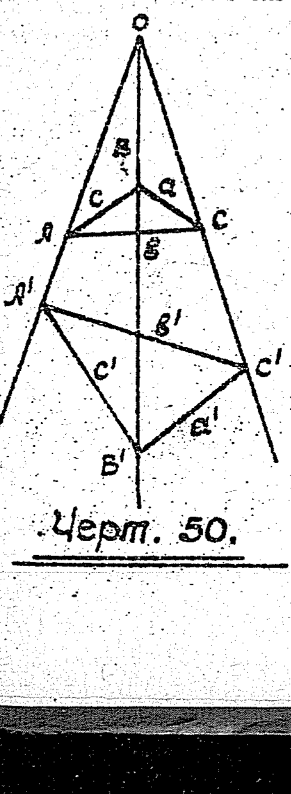
Докажем теорему Дезарга для пространственных треугольников, т.е. не лежащих в одной плоскости.



Черт. 49.

I. Если ABC и $A'B'C'$ (черт. 49) такие, что: AA', BB', CC' пересекаются в одной точке, то b и b', a и a', c и c' пересекаются в точках на одной прямой.

Доказательство: a и a', b и b', c и c' лежат соответственно в одной плоскости, в гранях, а потому, вообще говоря, пересекаются в точках соответственно: $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$; Покажем, что эти точки лежат на одной прямой, а именно, на линии пересечения плоскостей треугольников. В самом деле, с одной стороны a и a', b и b', c и c' попарно пересекаются, т.к. они находятся попарно в одной плоскости, с другой, - они не могут пересечься ближе или дальше линии пересечения плоскостей тр-ков, ибо a и a', c и c', b и b' принадлежат порознь этим плоскостям.



Черт. 50.

II. Если a и a', b и b', c и c' пересекаются в точках на одной прямой, то прямые AA', BB', CC' сходятся в одной точке.

Если a и a' пересекаются в одной точке, то они лежат в одной плоскости. Так как a и a' находятся в одной плоскости, то CC' и BB' находятся в одной плоскости, т.к. они с нею имеют по две точки общих, а потому CC' и BB' пересекаются. Также AA' и CC' лежат в одной плоскости и потому пересекаются и т.д. Так что AA', BB', CC' - три прямые, пересекающиеся попарно. Но все три прямые лежат не в одной плоскости, следовательно они пересекаются в одной точке, как это следовало из леммы. Условие пересечения a и a', b и b', c и c' в точках на одной прямой обуславливается тем, что они лежат соответственно в одних плоскостях.

Чтобы доказать, что эта теорема верна и на плоскости, следует к полученному доказательству приложить принцип непрерывности Понселе.-

Принцип непрерывности Понселе.

Если некоторые теоремы имеют место при ограничениях, когда некоторые параметры не равны нулю или бесконечности и не принимают мнимых значений, то эти теоремы верны и тогда, когда эти ограничения сняты.

Положение: Теоремы, верные при $a, b, c.. \neq 0$ или ∞ верны и при том, когда a, b и c принимают значения нуль и бесконечность, - есть общий принцип пределов. Этот принцип с дополнением о мнимых значениях и является принципом непрерывности Понселе. Он часто применяется в элементарной и высшей математике при переходах к предельным или общим положениям.

Мы доказали теорему Дезарга для треугольников, находящихся в плоскостях, наклоненных друг к другу под некоторым углом α; Угол α может меняться и принять наконец значение нуля. Но т.к. теорема верна при $\alpha \neq 0$, то по принципу Понселе эта теорема верна и при $\alpha = 0$, т.е. когда плоскости треугольников совпадают.-

Доказательство с таким переходом считается не строгим. Основная идея строгого доказательства состоит в следующем: доказывают, что плоская конфигурация является тенью или центральной проекцией пространственной конфигурации, а т.к. при проектировании зрительные свойства сохраняются, - а теорема Дезарга выражает зрительные свойства, - то она сохраняется при этом.

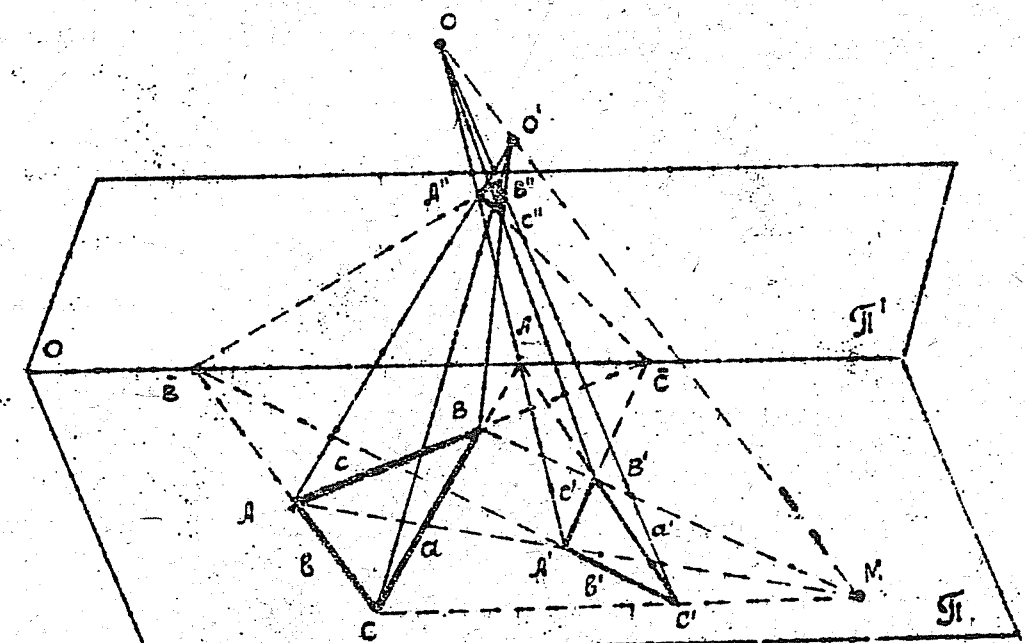
Доказательство теоремы Дезарга.

Докажем ее вторую половину, т.е. если

$$\left.\begin{array}{l} aa' - \bar{A} \\ вв' - \bar{B} \\ cc' - \bar{C} \end{array}\right\} \to O.$$ то ā, в̄ и c̄ пересекаются в одной точке M.

Через прямую O, на которой лежат $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ проведем плоскость П' под некоторым углом к плоскости П.

Из точки O будем проектировать треугольник A'B'C' на плоскость П'. Получим тр-к A"B"C", перспективный A'B'C' прямые a' и a", в' и в", c и c" пересекаются, т.к. они лежат соответственно в одной плоскости, а т.к. они принадлежат порознь плоскостям П и П', т.е. плоскостям треугольников, то и пересекутся на прямой O. Причем, $\bar{A}' \equiv \bar{A}$, $\bar{B}' \equiv \bar{B}$, $\bar{C}' \equiv \bar{C}$; В самом деле, точку $\bar{A}$, определяют плоскости П и П' и прямая a'; точку $\bar{A}'$ определяют плоскости П и П' и плоскость общая для a' и a", но это и указывает справедливость того, что $\bar{A} \equiv \bar{A}'$. Также и относительно других точек.



Черт. 51.

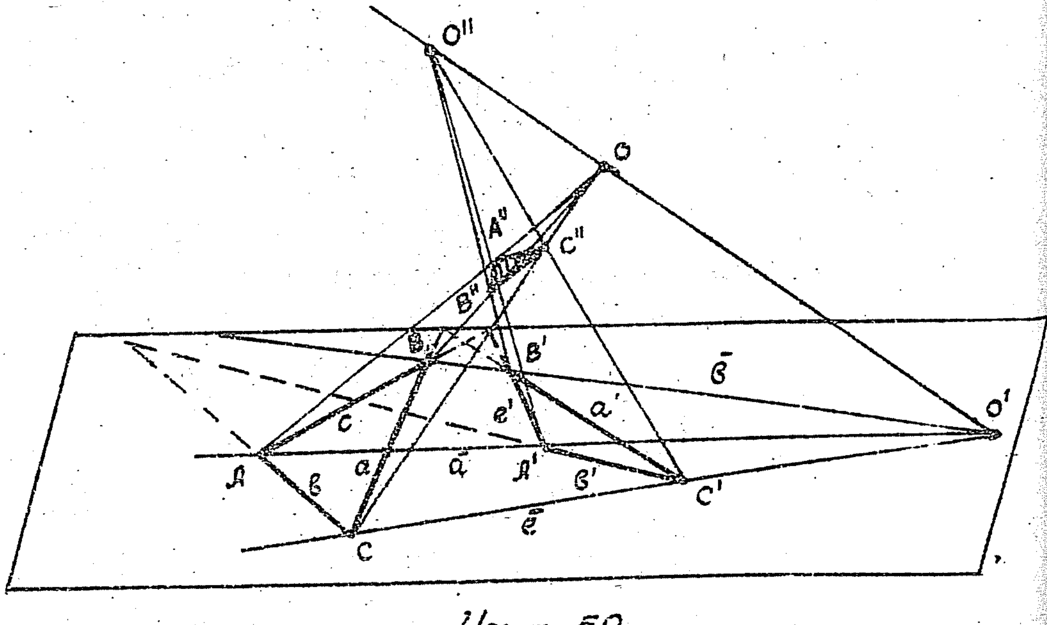
Теперь будем рассматривать треугольник ABC и $A''B''C''$, как перспективные с центром перспективитета O'.

Полученную конфигурацию спроектируем из точки O на плоскость Π. Тогда O' спроектируется в M, $\triangle A''B''C''$ в тр-к $A'B'C'$, а потому лучи $O'C''C$, $O'B''B$, $O'A''A$ спроектируются соответственно в лучи $MC'C$, $MB'B$, $MA'A$, т.е. AA', BB', CC' имеют общую точку M, что и требовалось доказать.-

II. Если прямые $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ сходятся в одной точке O', то a, a', b, b', cc' имеют точки пересечения: $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, лежащие на одной прямой (черт. 52). Из точки O' проведем некоторую прямую и из ее точки O'' проведем прямые: $A'O''$, $B'O''$, $C'O''$. Затем из точки O на той же прямой проведем прямые OA, OB, OC; Тогда прямые $O''A'$ и OA пересекутся в точке A'', т.к. AO и $O''A'$ лежат в одной плоскости. Также получим точки B'' и C''.

Рассмотрим два тр-ка: $\triangle ABC$ и $A''B''C''$. Они перспективны, а потому a и a'', b и b'', c и c'' пересекаются в точках $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ на одной прямой. Из тр-ков $A''B''C''$ и $A'B'C'$ следует, что (как перспективных) a' и a'', b' и b'', c' и c'' пересекаются в точках $\bar{A}'$, $\bar{B}'$, $\bar{C}'$, лежащих на одной прямой.

Легко показать, что $\bar{A} \equiv \bar{A}'$, $\bar{B} \equiv \bar{B}'$, $\bar{C} \equiv \bar{C}'$, три прямые: a, a' и a'' попарно пересекаются, но т.к. они не лежат все в одной плоскости, то точка пересечения для всех общая. Также и для остальных прямых.



Черт. 52.

Прямая, на которой располагаются точки пересечения соответственных сторон носит название Дезарговой прямой или оси гомологии.

Если прямые, соединяющие соответственные точки сходятся в одной точке, то соответственные стороны могут быть параллельными (подобие) или пересекаться на одной прямой. Если стороны или пересекаются в точках, лежащих на одной прямой или параллельны, то прямые, соединяющие вершины имеют одну общую точку или параллельны.

Гомотетия - частный случай гомологии, а именно гомотетия имеет место тогда, когда ось гомологии уходит на бесконечность. Если центр гомологии и ось гомологии уйдут на бесконечность, то фигуры обращаются в конгруентные. Как было в самом начале оговорено, высшая геометрия с одной стороны отличается от элементарной введением несобственных элементов.

Теорема Дезарга в элементарной математике читалась бы так:

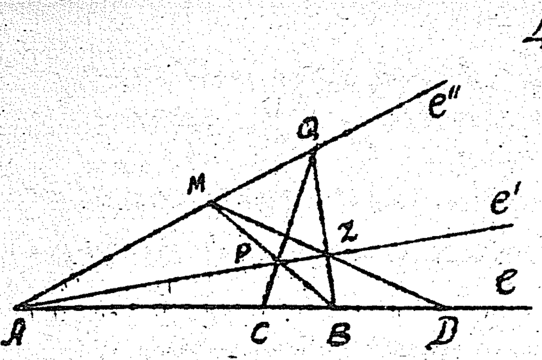
Если треугольники ABC и $A'B'C'$ такие, что их соответственные стороны пересекаются в точках лежащих на одной прямой или параллельны, то соответственные вершины лежат на прямых, сходящихся в одной точке или на параллельных прямых.

Соответствующе читалось бы в элем. математике взаимная теорема.

Так же, как и относительно треугольников, можно говорить о плоскостных системах, которые можно приводить (проективные) в перспективное расположение.

Четырехугольник Штаудта.-

Гармонические точки можно строить с помощью четырехугольника Штаудта: $PMQZ$. (черт. 53). Одна пара (A и B) является точками пересечения сторон этого четырехугольника с пунктуалом; Две другие, им гармонические, получаются от пересечения диагоналей четырехугольника с пунктуалом. К пунктуалу e в точке A под углом проводим e' и e''; C соединяем с Q; B соединяем через P с M; M, соединяем с Z дает точку D.



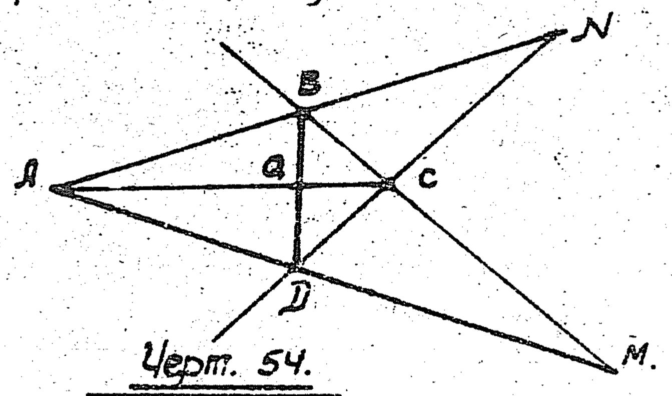
Черт. 53.

Некоторые понятия высшей геометрии.-

Треугольник в геометрии Евклида определяется, как часть плоскости, ограниченная тремя прямыми непересекающимися в одной точке и тремя точками.

Высшая геометрия рассматривает трехточник и трехсторонник, как геометрические фигуры, а не как часть плоскости. Полный треугольник состоит из трех сторон и трех точек.

Полный четырехугольник (лучше называть четырехточник) состоит из четырех точек и шести прямых. (черт. 54). Точки: A, B, C, D; Прямые: AB, BC, DC, AD, BD, AC. Прямые, пересекающиеся не в вершинах четырехточника, носят название противоположных.



Черт. 54.

Пересекаются они в диагональных точках M, N, Q.

Аналогично этому существует такое понятие четырехугольника.

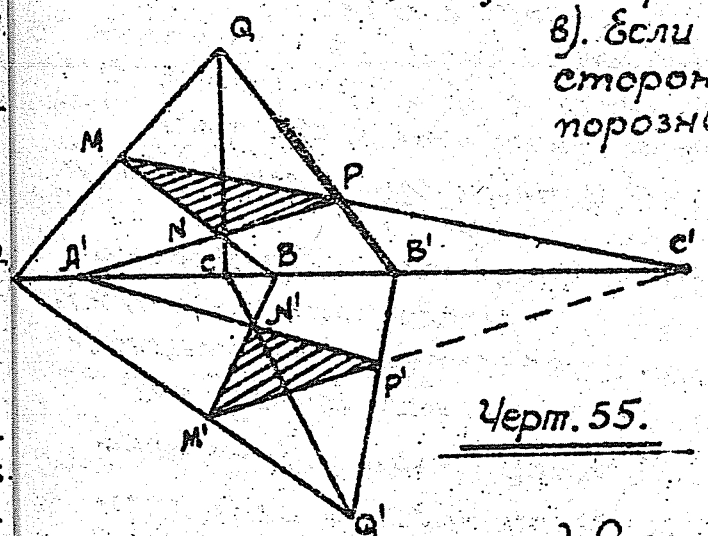
Полный четырехугольник может складываться из четырех прямых и шести точек. В этом случае прямые: AB, BC, CD и AD, а точки A, B, C, D, M и N. Здесь прямые, соединяющие не собственно вершины т.е. M и N, A и C, B и D - диагональные прямые. Итак, в первом случае мы имеем: 4 точки - вершины, 6 прямых - сторон, три диагон. точки и три диагон. прямые MN, MC, NC. Во втором случае 4 прямые стороны, 6 точек и три прямые диагонали.

Построение гармонических точек.

Проективная геометрия является частью высшей геометрии, которая занимается изучением свойств, сохраняющихся при отбрасывании тени, проектировании. Главная часть ее - зрительная геометрия или геометрия положения. В основе этой геометрии лежит теорема Дезарга. Пользуется она аксиомами, устанавливающими зрительные свойства. Все зрительные построения получаются с помощью одной только линейки, тогда как присутствие меровых свойств требует циркуля.

Гармонические точки строить можно с помощью четырехугольника Штаудта; следует только сказать, что при заданных трех точках АВС, четырехугольник дает единственную точку D, гармоническую. Доказательство это сводится к теореме:

Теорема: а) Если в двух полных четырехточниках пять сторон сходятся на одной прямой, то на этой же прямой сойдется и шестая пара сторон. (черт. 55).



Черт. 55.

в). Если 5 пар соответственных сторон двух четырехточников порознь параллельны, то параллельны и прямые шестой пары.

В таком случае, прямая, на которой сходятся попарно соответственные прямые, уходит в бесконечность.

1) Рассмотрим пару треугольников: Δ MNQ и Δ M'N'Q' стороны: MN и M'N', M'Q', QN и Q'N' по условию сходятся попарно в точках, лежащих на одной прямой. Основываясь на теорему Дезарга, можно сказать, что соответственные точки лежат на прямых, сходящихся в одной точке O. Треугольники перспективны.

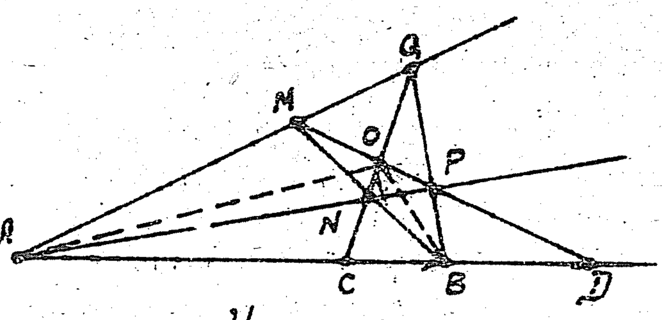
2) Рассмотрим другую пару треугольников: Δ NPQ и Δ N'P'Q' стороны: PQ и P'Q', QN и Q'N', PN и P'N' по условию попарно сходятся в точках, лежащих на одной прямой, той же, что и стороны первой пары. Так же по теореме Дезарга соответственные точки лежат на прямых, сходящихся в одной точке O'. Треугольники перспективны. Но точка O≡O'; на самом деле, точка O определяется как и O' одними и теми же двумя парами соответственных точек: Q и Q', N и N'.

Следовательно, четырехугольник $MNPQ$ перспективен четырехугольнику $M'N'P'Q'$, а потому и треугольник (заштрихованный) MNP перспективен треугольнику $M'N'P'$, а это значит, что его соответственные вершины лежат на прямых, сходящихся в одной точке Q; Но по теореме Дезарга в таком случае прямые, соответственные, пересекаются в точках, на одной прямой. Так что MP и $M'P'$ пересекаются в точке C' той прямой, которая определяется точками пересечения прямых MB и $M'B'$, PN и $P'N'$, а это и есть наша прямая.

Этим доказывается поставленная теорема.

Больше того, очевидно, если $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, то утверждение теоремы остается в силе. В этом случае точки A, B сольются соотв. с A' и B', а поэтому они определят некоторую точку D. Но на основании теоремы доказанной всякий четырехугольник, в котором таким образом используются точки A, B, C, дает одну и ту же точку D. Это и доказывает то, что при заданных трех точках, A, B, C, четырехугольник Штаудта дает всегда единственную точку D.

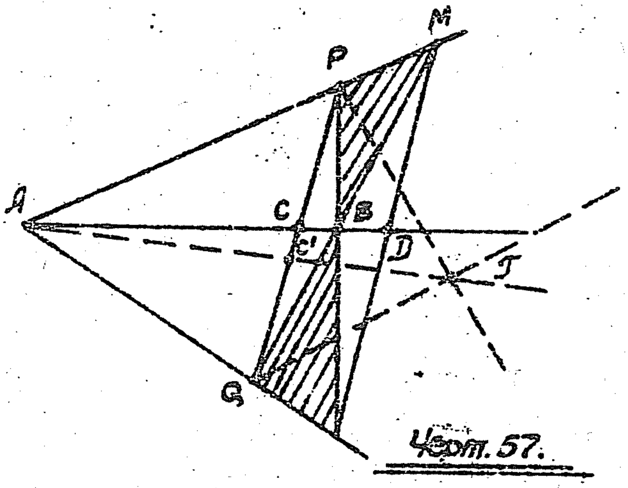
Чтобы построить четвертый гармонический луч по трем заданным, необходимо это построение свести к построению четвертой гармонической точки с помощью четырехугольника Штаудта.



Черт. 56.

Построив точку D, можно лучи проводить из O, или из Q (черт. 56). Точки A, C, B в случае пучка на пунктуале получаются, если пучок пересечь некоторой прямой.

Что дает четырехточник Штаудта, если одна из точек (D) уйдет на бесконечность?

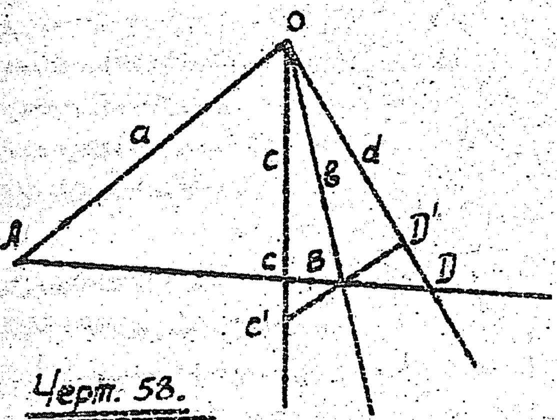


Черт. 57.

В полном четырехточнике Штаудта даются гармонические точки: пара, как пересечение сторонами, другую пару - диагоналями.

Так получим точки A и B, C и D (черт. 57). Когда же точка D уйдет в бесконечность, то, следовательно, в бесконечность уйдут и точки M и N, определяющие прямую MN и значит точку D. Т.е. $AM \parallel QM$, $AN \parallel PN$. Но тогда имеем параллелограм $APTQ$, и следовательно C', как точка пересечения диагоналей параллелограма, расположена так, что AC' и $C'T$ равны. Следовательно, если одна из точек уходит в бесконечность, то другая из этой пары становится посредине точек другой пары.

Но такое же свойство было отмечено для гармонических точек и при аналитическом исследовании. Теперь стоит только доказать, что $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$, т.е. показать, что A, B, C, D — гармонические точки (чер. 58).



Черт. 58.

Пусть имеем найденные по Штаудту лучи a, b, c, d, и точки $ABCD$; будем пунктуал $(ABCD)$ вращать вокруг точки B так, чтобы эта прямая была параллельна лучу a, т.е. заставим одну из точек (A) уйти на бесконечность. Но тогда $C'B = BD'$, как это следовало раньше.

Рассмотрим тр-ки: ΔAOC и $\Delta CBC'$ — они подобны, а потому:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AO}{BC'} \qquad \ldots\ldots\ldots (I)$$

Из подобия тр-ков AOD и BDD' имеем: $\frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BD'}$ или, при $C'B = D'B$, из последнего имеем

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BC'} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

Сравнивая (I) и (II), получаем:

$$\frac{AC}{BC} \quad \frac{AD}{BD} \longrightarrow \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = 1;$$

А т.к. AC, AD, BD положительны по направлению и только BC обратно направлен, то

$(ABCD) = -1$, что и требовалось доказать

Следовательно четырехугольник Штаудта дает именно гармонические точки.

О коллинеации.-

Проективное преобразование можно определять аналитически:

$$x' = \frac{ax+by+c}{gx+hy+k}; \quad y' = \frac{dx+ey+f}{gx+hy+k};$$

Можно говорить о проективном преобразовании если сохраняется сложное отношение четырех точек.
Иногда говорят, что если проективному пунктуалу соответствует проективный пунктуал, точке соответствует точка, а следовательно пучку соответствует проективный пучек, то такое преобразование является проективным.
Оказывается, существование проективного соответствия вполне определяется коллинеацией, т.е., что если прямой соответствует прямая, а пучку-пучок, точке-точка (коллинеация), то проективность существует.

Прежде, чем это оправдать, заметим, что т.к. четырехугольник Штаудта основан только на зрительных свойствах то его конфигурация при проектировании сохраняется. Одна конфигурация переходит в другую соответственную первой конфигурацию при коллинеации. Так как четырехточник Штаудта сохраняется, то гармоничность точек остается, а для того, чтобы существовало проективное соответствие, необходимо сохранение гармоничности. Если 4 гармоническим точкам одного пунктуала соответствуют 4 гармонические точки другого пункту-ла то соответствие будет проективным. Так что коллинеация влечет за собой сохранение гармоничности четырех точек, а последнее определяет сохранение сложного отношения. Достаточно 4 точкам находиться в проективном соответствии, как можно построить все точки. Таким образом, не входя в аналитическое доказательство того, что перспективность дает проективность, а лишь имея то, что при проектировании имеет место коллинеация, как уже док зывается наличие проективности.

Четвертым понятием, определяющим проективное соответствие является перспектива. Изображение некоторого объекта связанного с некоторой плоскостью полученное центральным проектированием на другую плоскость называется перспективой.

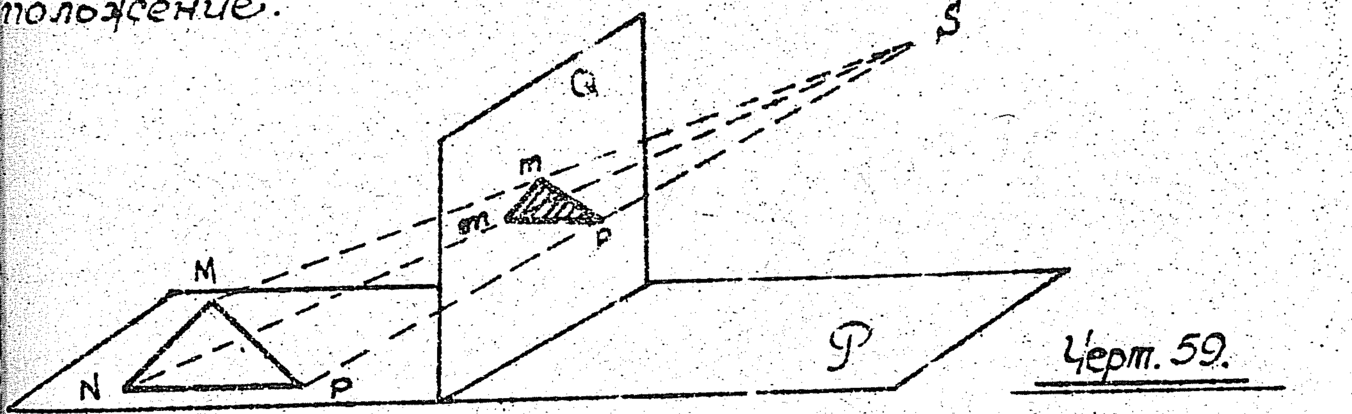
Мы будем рассматривать перспективу в узком смысле т.е. когда плоскость предметная и картинная взаимно перпендикулярны.

<u>Чтобы построить перспективную фигуру</u> на картинной плоскости, достаточно из центра перспективы S (чер. 59) провести прямые SM, SN, SP, получая всякий раз точки m, n, p, как точки пересечения наших прямых с картинной плоскостью, получаем фигуру $mnp \barwedge MNP$.

Так можно проектировать на картинную плоскость не только плоскую фигуру, но и какое-либо тело.

Очевидно, при перспективе коллинеация имеет место, так что коллинеация включается в перспективу.

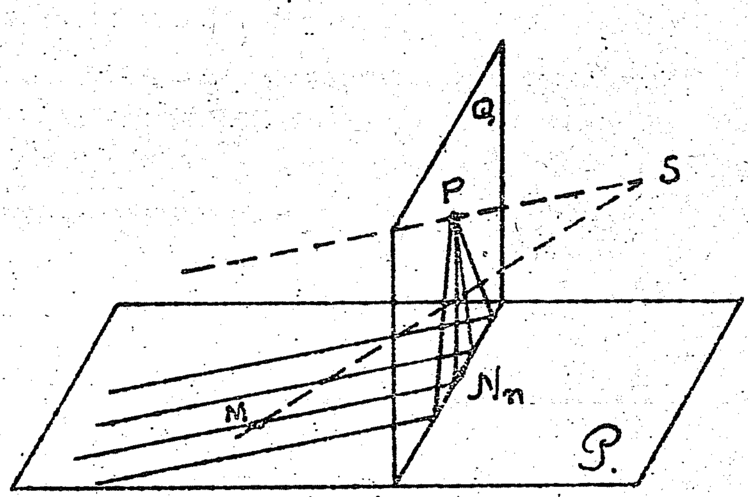
Когда точка S попадет на плоскость P и плоскость Q совпадет с P то фигуры придут в гомологичное положение.



Черт. 59.

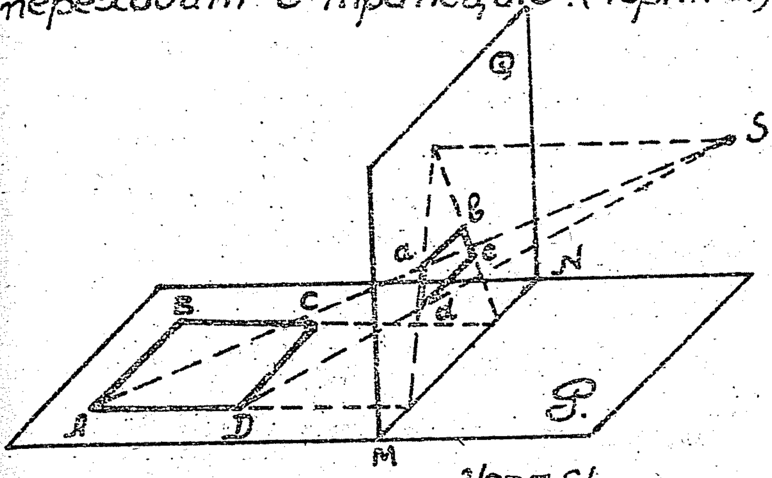
Так что, если мы хотим получить проективное соответствие, достаточно спроектировать рассматриваемую фигуру, а затем плоскости передвинуть. Нарушив перспективность, проективность сохраним. Если дано <u>прямая линия</u> на предметной плоскости, то для ее изображения на картинной плоскости, достаточно построить одну ее точку M (чер. 60). Другая точка N определится как точка пересечения данной прямой с прямой пересечения предметной и картинной плоскостей.

Следует отметить, что в перспективе несобственный элемент изобразится собственным элементом. Так, если мы хотим построить несобственный элемент прямой, в плоскости $\mathcal{P}$, то нам следует точку S соединить с этим элементом, т.е. провести прямую, параллельную данной прямой. След этой новой прямой на картинной плоскости и дает собою изображение бесконечно удаленной точки прямой. Т.к. все параллельные прямые пересекаются в бесконечности, то они все имеют один единственный несобственный элемент P_∞, который спроектируется в точку p. Параллельные прямые изобразятся, следовательно сходящимися прямыми в точке p. Эта точка носит название точки схода. Здесь опять подчеркивается существование одного несобственного элемента прямой, ибо в противном случае мы не имели бы взаимно однозначного соответствия между элементами прямой и ей перспективной. Если на плоскости $\mathcal{P}$ будут находится параллельные различных направлений, то для каждого направления получим свою точку схода, или геометрическое место точек схода, что будет представлять собой прямую, параллельную предметной плоскости и лежащую в плоскости, проходящей через точку S и параллельной плоскости $\mathcal{P}$. Вот это геометрическое место точек схода и носит название горизонта. Точка пересечения перпендикуляра, проведенного из точки S на горизонт с горизонтом называется главной точкой.



Черт. 60

Конфигурация при перспективном преобразовании остается, но параллельность, меровые соотношения нарушаются. Параллелограмм преобразуется в четырехугольник. Если $AB \parallel DC \parallel MN$, то параллелограмм переходит в трапецию. (черт. 61).



Черт. 61.

На практике (фотографирование) перспектива применяется в широком смысле: здесь картинная плоскость наклонена под различными углами к предметной плоскости.

Инволюционное преобразование.

Пусть имеем два наложенных соответственных пунктуала $(ABCD\ldots)$ и $(A'B'C'D'\ldots)$. Если повторное преобразование проективное дает прежний пунктуал, то такое преобразование называется инволюционным.

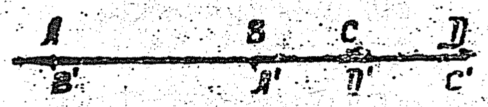
Тогда как проективное преобразование образовало группу: $P_m \cdot P_n = P_p$, два инволюционных преобразования в результате дают единицу: $P^2 = 1$;

Все это иначе можно выразить так: если т. A одного пунктуала соответствует точке A' другого (пунктуалы наложены), а т. B одного отвечает точке B' другого так, что $A \equiv B'$ и $A' \equiv B$, то мы имеем положение, когда рассматриваемые пунктуалы являют собой инволюционное преобразование.

Теорема: Если в двух соответственных наложенных пунктуалах одна пара одного пунктуала инволюционно соответствует паре точек другого пунктуала, то такие пунктуалы находятся в инволюционном соответствии, т.е. достаточно одной паре находиться в инволюционном соответствии, чтобы в инволюционном соответствии находились и остальные пары соответственных пунктуалов.

Пусть $A \sim A'$, $B \sim B'$ причем $A \equiv B'$, $A' \equiv B$.

Кроме этих заданных точек возьмем точки C и D и им соответствующие C' и D'. Покажем, что для соответственных пунктуалов $(ABCD)=(A'B'C'D')$, если одна пара инволюционна, а C–C' и D–D' так, что $C\equiv D'$, то и $D\equiv C'$, $E\equiv F'$, $F\equiv E'$ etc, т.е. пунктуалы инволюционно преобразованы. На самом деле: т.к. $(ABCD)=(A'B'C'D')$, а $A'\equiv B$, и $B'\equiv A$, и $D'\equiv C$, то



Черт. 62

$$(ABCD)=(A'B'C'D')=(BAC'C)=(ABCC').$$

откуда следует, что $C'\equiv D$.

Отсюда уже видно, что достаточно задать две пары точек A и A', C и C', чтобы все точки находились в инволюционном соответствии. Но это особенно видно, если вспомнить, что инволюционное преобразование есть частный случай проективного преобразования на прямой:

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d};$$

и что именно такой частный случай, что $d=-a$. т.е. в инволюционном преобразовании мы имеем только два параметра.

Формула Дезарга.-

При проективном преобразовании из $(ABCD)=(A'B'C'D')$ следует:

$$\frac{\overline{AC}}{BC}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}:\frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}}\to\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}=\frac{\overline{AC'}\cdot\overline{B'D'}}{\overline{B'C'}\cdot\overline{A'D'}},$$

отсюда:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{B'C'}\cdot\overline{A'D'}=\overline{A'C'}\cdot\overline{B'D'}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AD}.$$

Для инволюционного преобразования возьмем:

$$(ABA'C')=(A'B'AC)\to\frac{\overline{AA'}}{\overline{BA'}}:\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}=\frac{\overline{A'A}}{\overline{B'A}}:\frac{\overline{A'C}}{\overline{B'C}}$$

A~A', B~B', A'~A, C'~C.

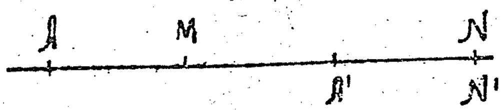
Но $\overline{AA'}=-\overline{A'A}$; Тогда имеем:

$$\frac{BC'}{\overline{BA'}\cdot\overline{AC'}}=\frac{-\overline{B'C}}{\overline{B'A}\cdot\overline{A'C}};$$

Отсюда $\overline{AB'}\cdot\overline{BC'}\cdot\overline{CA'}=-\overline{A'B}\cdot\overline{B'C}\cdot\overline{C'A}$.

Это определяет характерные свойства для инволюции.

Двойные точки при инволюции.



Черт. 62-а.

Рассмотрим два наложенных пунктуала. Здесь можно говорить об инволюционном соответствии, т.к. о преобразовании можно говорить в том случае, когда идет какой либо процесс; Процесс преобразования своим конечным результатом имеет соответствие. Очевидно, при инволюционном соответствии, как и при соответствии проективном, когда имеем две заданные точки, то $(AA'MN) = (BB'MN) = \cdots$

Действительно: $(MNAB) = (MNA'B')$ где M и N - двойные.

$$\frac{(MNA)}{(MNB)} = \frac{(MNA')}{(MNB')} \rightarrow \frac{(MNA)}{(MNA')} = \frac{(MNB)}{(MNB')};$$

отсюда и следует, что $(MNAA') = (MNBB') = \cdots$

<u>Теорема.</u> При инволюционном преобразовании двух наложенных пунктуалов двойные точки гармонически делят две другие соответственные точки.

Доказать, что $(AA'MN) = -1$, если M и N двойные точки.

С одной стороны: $(AA'MN) = (A'AMN)$

Но с другой стороны, т.к. мы переставим буквы только в одной паре сложного отношения, то

$$(A'AMN) = \frac{1}{(AA'MN)};$$

Отсюда следует, что

$$(AA'MN)^2 = 1;$$

Тогда имеем: $(AA'MN)_1 = +1$; $(AA'MN) = -1$

Первое же соотношение не имеет места; действительно: если это так, то

$$\frac{AM}{A'M} : \frac{AN}{A'N} = \frac{AM}{AN} : \frac{A'M}{A'N} = 1,$$ или что

все равно:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{A'M}{A'N}, \text{ т.е. } (AMN)=(A'MN).$$

Но раз простые отношения равны, то $A \equiv A'$, а это противоречит условию, ибо мы положили, что имеем только две двойные точки M и N.

Следовательно первое решение отпадает, а потому

$$(AA'MN)=-1;$$

Инволюционное преобразование называется гиперболическим, если оно имеет две двоиные точки, параболическим, если имеет одну двойную точку, наконец эллиптическим, если таковых не имеется. Для инволюционного преобразования достаточно задания одной пары точек. Когда нам заданы две двойные точки, то этого вполне достаточно, чтобы всякой точке A, найти A'.

Центр инволюции.

Точка, соответствующая при инволюционном преобразовании бесконечно удаленной точке, носит название центра инволюции.

Рассмотрим соотношение получающееся из того что в сложном отношении инволюционного преобразования одна из точек есть центр инволюции:

$(ABOO'_\infty)=(A'B'O'_\infty O)$ здесь $A\sim A'$, $B\sim B'$; $O\sim O'_\infty$, $O'_\infty\sim O$.

отсюда получаем $$\frac{(ABO)}{(ABO'_\infty)} = \frac{(A'B'O'_\infty)}{(A'B'O)}$$

Но следует отметить, что если одна из точек простого отношения уходит на ∞, то простое отношение равно единице. Следовательно:

$$(ABO'_\infty)=(A'B'O'_\infty)=1;$$

А тогда имеем: $(ABO)=\dfrac{1}{(A'B'O)}$ или $\dfrac{AO}{BO}=\dfrac{B'O}{A'O}$;

и наконец, $$OA\cdot OA' = OB\cdot OB'$$

Очевидно, когда имеются двойные точки , то определенно изменится и вид данного выражения.

Если имеется одна двойная точка, то следовательно $M\sim M$, и тогда по соотношению имеем:

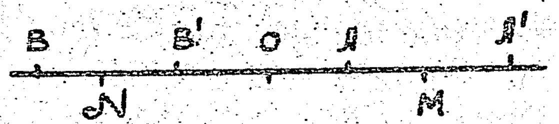
$$OA\cdot OA' = OB\,OB' = OM\cdot OM = OM^2.$$

Отсюда следовало бы получится два корня ОМ. А т.к. мы все-таки имеем только одну двойную точку, то очевидно они сливаются. В этом случае $A \equiv B \equiv O \equiv M = N$. Случай этот носит название пораболического.

Если имеем два корня: $OM = +\sqrt{OA \cdot OA'}$ и $ON = -\sqrt{OB \cdot OB'}$

причем $OM = ON$, то имеем две двойные точки, расположенные симметрично относительно центра инволюции O. Этот случай носит название гиперболического; двойные точки при этом находятся между соответственными точками, т.к. они гармонически делят соответственные точки.

Наконец третий случай, когда ОМ не имеет решения. Это будет в том случае, когда произведения $OA \cdot OA' < 0$ и $OB \cdot OB' < 0$, т.е. когда центр инволюции делит соответственные точки. Такой случай носит название эллиптического.



Черт. 62-б.

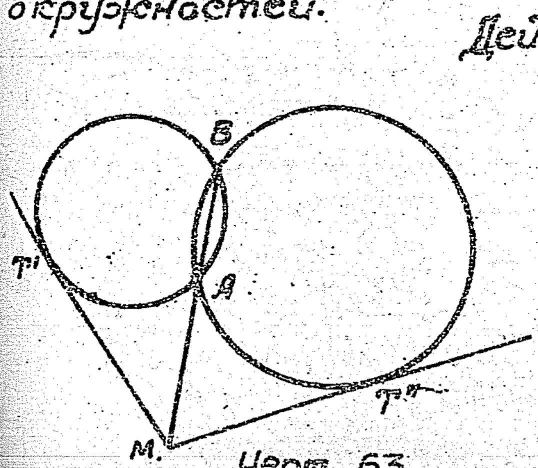
Понятие радикальной оси.-

Геометрическое место точек, из которых касательные к двум окружностям равны, называется радикальной осью. Если две окружности пересекаются, то радикальную ось легко указать, а именно это есть прямая, проведенная через точки пересечения окружностей.

Действительно, пусть на этой прямой имеем точку M; тогда на основании известной теоремы о касательной и секущих имеем: (черт. 63).

$MA \cdot MB = MT'^2 = MT''^2$; т.е. $MT' = MT''$

Если же $MT' = MT''$, то прямая MA пройдет и через B; Пусть она проходит через B'. Но $MT'^2 = MT''^2 = MA \cdot MB = AM \cdot MB'$.

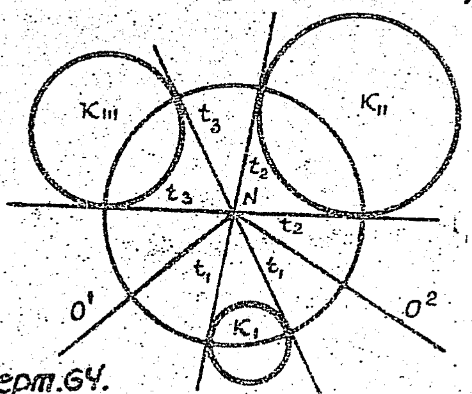


Черт. 63.

Отсюда следует, что $B \equiv B'$.

Применяя принцип Понселе, можно сказать, что это верно и в тех случаях, если мы имеем одну точку (слившиеся точки) пересечения окружностей и когда мы имеем мнимые точки пересечения их. Весь вопрос состоит в том, чтобы определить ее направление. Очевидно, когда имеем одну точку пересечения, то радикальной осью служит касательная к этим окружностям, проходящая через точку касания окружностей.

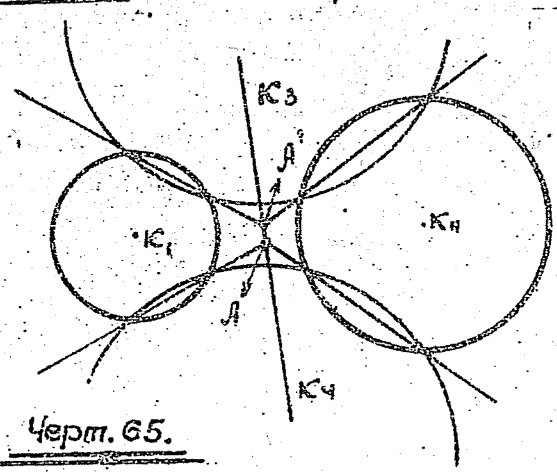
<u>Теорема.</u> В случае трех окружностей три радикальные оси пересекаются в одной точке, называемой радикальным центром.



Черт.64.

Положим, что две радикальные оси пересеклись (o' и o^2) в точке N. Очевидно, $t_1 = t_3$ и $t_1 = t_2$ (черт.64) потому, что это касательные, проведенные из точки радикальной оси одной и другой пары, хотя эти точки совпадают в N. Но отсюда же следует, что $t_2 = t_3$. Это и есть условие того, что точка N лежит на радикальной оси окружностей K_{II} и K_{III}. т.е. и третья радикальная ось проходит через точку N.

Это и требовалось доказать.



Черт. 65.

Теперь можно показать, как провести радикальную ось двух непересекающихся окружностей. Очевидно, с одной стороны радикальная ось K_I и K_{II} будет проходить через точку пересечения радикальных осей K_I и K_3, K_{II} и K_3, как было доказано. С другой, она проходит через точку пересечения радикальных осей окружностей: K_I и K_4 и K_4 и K_{II}.

Так ее и определим. Требуемые же радикальные оси пройдут через точки пересечения соответственных окружностей. Прямая, проходящая через A и A' и есть радикальная ось окружностей K_1 и K_{11}.

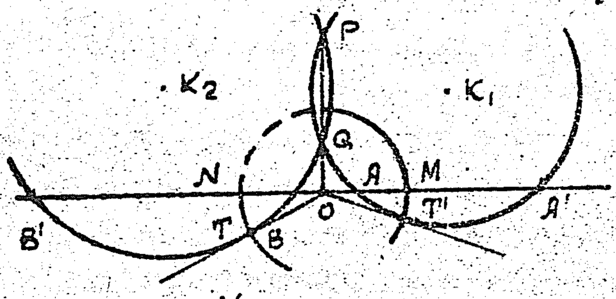
Построение центра инволюции.

Инволюционное соответствие задается двумя парами соответственных элементов. Пусть это: A, A' и B, B'. (черт. 66). Через точки A и A' и B, B' соответственно проведены окружности K_1 и K_2 так, что они пересекутся в точках Q и P.

Оказывается точка пересечения O продолжения прямой PQ с данной есть центр инволюции. Если бы это было так, то должно существовать такое соотношение: $OA.OA' = OB.OB'$; но это так и есть; действительно:

$$OB.OB' = OP.OQ = OA.OA,$$ на основе теоремы о секущих и касательной.

Следовательно O есть центр инволюции.



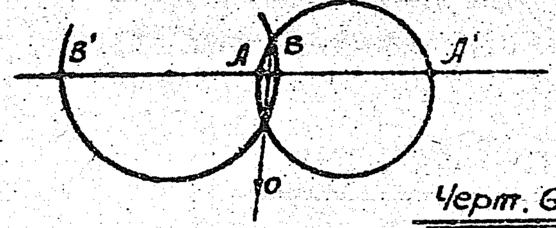
Черт. 66.

Чтобы получить точки, находящиеся в инволюционном соответствии, необходимо пучок окружностей (совокупность окружностей, проходящих через две точки P и Q) пересечь прямой. Точки пересечения прямой с одной и с другой окружностью являются соответственно инволюционными парами. Определим положение двойных точек.

1) Если центр инволюции не разделяет элементы пар, как у нас было на чертеже 66, то имеем гиперболические пунктуалы, т.е. получаем две двойные точки.

Надо, чтобы $OA.OA' = OB\,OB' = OQ.OP = OM^2 = ON^2$;
Замечаем, что OM и ON должны быть равны $OT = OT_1$

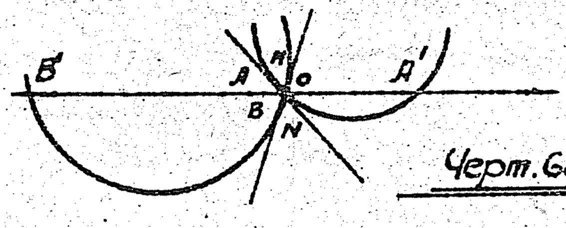
2) Если центр инволюции разделяет элементы пар (чер. 67) то получаем эллиптические пунктуалы.
Центр лежит между A и B. Следовательно:



Черт. 67.

$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ имеют отрицательный знак. Так что OM и ON не имеют смысла.

3). Центр инволюции совпадает с точками: M, N, A, B.



Черт. 68

$$A \equiv B \equiv M \equiv N \equiv O$$

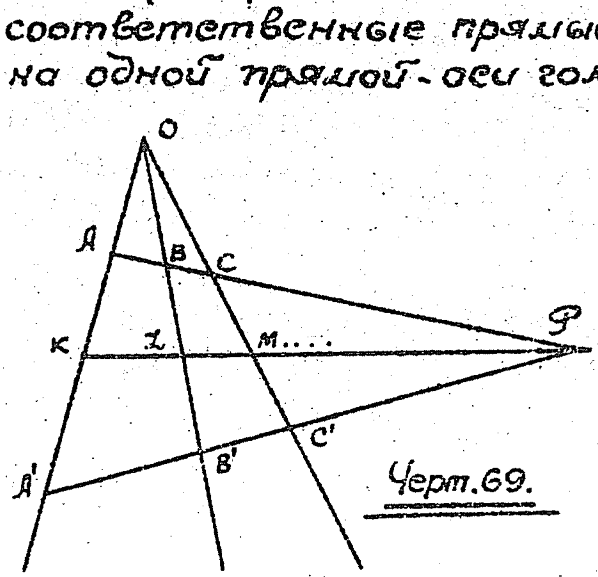
Это и есть одна двойная точка. Пунктуалы параболические. (черт. 68).

Инволюционная гомология.

При афинитете имеем центр несобственный, а ось собственную. При гомотетии, наоборот, центр собственный, а ось уходит на бесконечность. При конгруентности и центр и ось уходят на бесконечность.

Все это частные случаи гомологии. Гомология существует и в том случае и независимо от этого, когда ось и центр собственные.

Перспективность ведет за собой гомологию, что следует из теоремы Дезарга. Если пунктуалы гомологичны, то соответственные точки лежат на прямых, сходящихся в одной точке (O) - центре гомологии, а соответственные прямые пересекаются в точках на одной прямой - оси гомологии.



Черт. 69.

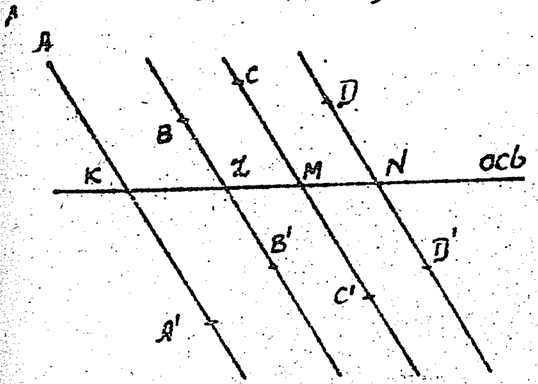
Инволюционной гомологией называется та, ось которой делит соответственные точки в паре с центром гомологии гармонически, т.е.

$$(AA'KO) = (BB'LO) = \ldots = -1.$$

(черт. 69).

Центр инволюции, как и ось могут быть несобственными. Тогда будем иметь вырождения.

Положим, что центр инволюционной гомологии O уходит на бесконечность; в этом случае прямые, соединяющие собственные точки, параллельны, а так как одна из точек гармонических одной пары уходит на бесконечность, то вторая точка этой пары становится посредине между точками другой пары: $AK=A'K$; $BL=B'L$; $CM=C'M$; (черт. 70).

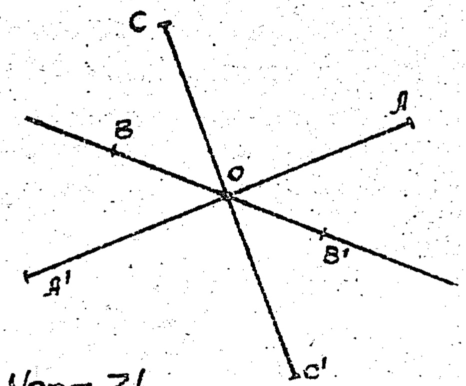


Черт. 70

Получаем косую симметрию вообще. Прямая симметрия есть частный случай инволюционной гомологии $\rightarrow O\ \infty$.

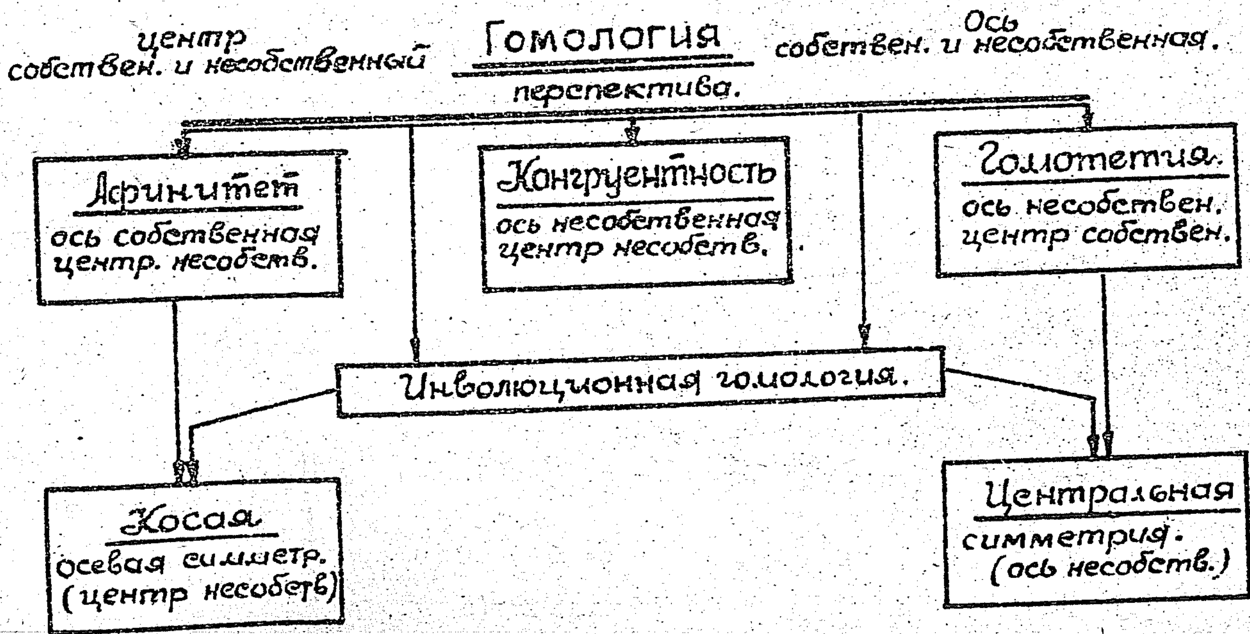
Если ось уходит на бесконечность, то центр O (на основании гармоничности) делит AA', BB'... пополам.

Получаем центральную симметрию. (черт. 71). Центральная симметрия есть частный случай инволюционной гомологии.



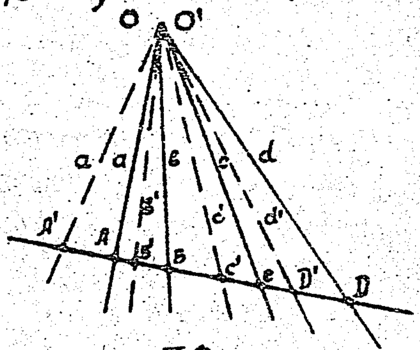
Черт. 71.

Таблица конфигураций.

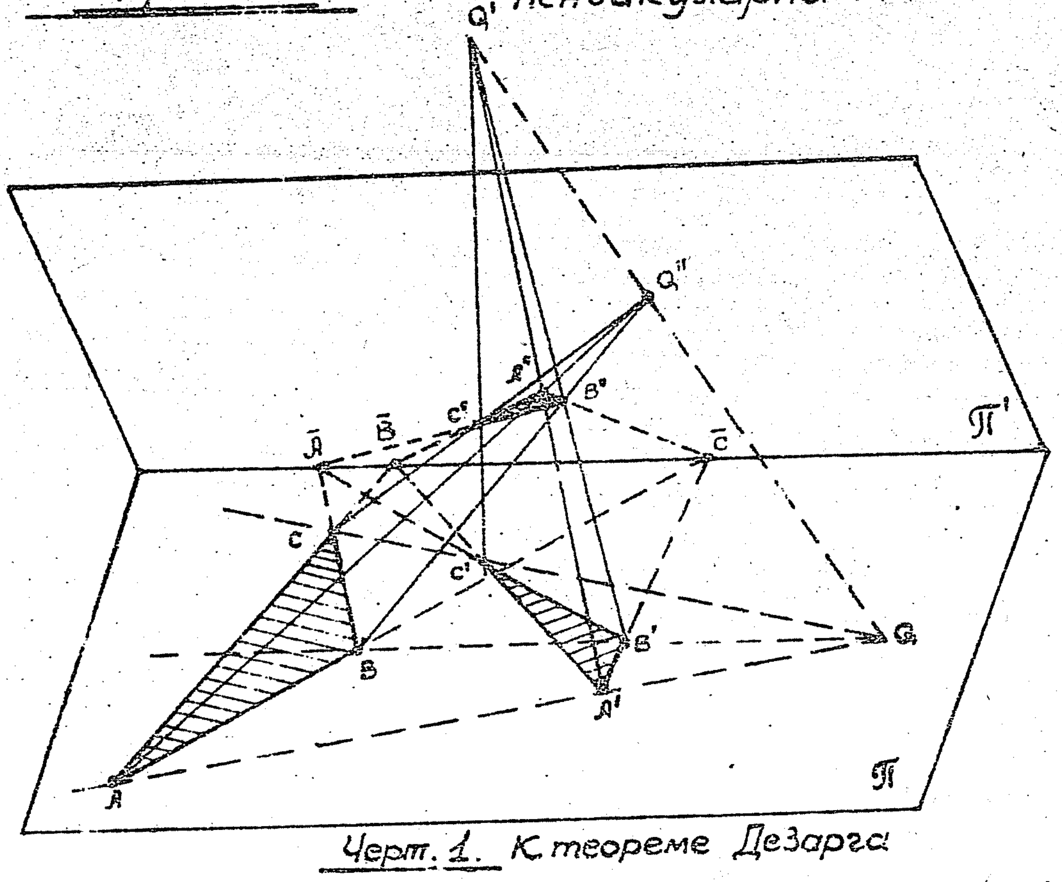


Решение задач.

Наиболее применительны понятия при решении задач следующие: 1) Четырехугольник Штаудта. 2) Гармонические лучи и точки. 3) Если одна из гармонических точек уходит на ∞, то другая из этой пары становится посредине второй пары. 4) Если в двух проективных пучках три соответственных луча образуют между собой одинаковые углы, то четвертая пара пересекается под тем же углом. Действительно, положим, что имеем два пучка $(abcd\ldots) \barwedge (a'b'c'd'\ldots)$. Совместим O и O'. Пучки стали концентричными, причем лучи OA, OB, OC с лучами $O'A', O'B', O'C'$ образуют соответственно равные углы. Покажем, что и $\angle$ между OD и $O'D'$ тот же. Повернем пучок O' так, чтобы лучи: OA и $O'A'$; OB и $O'B'$, OC и $O'C'$ совпали. Но тогда совпадут и OD с $O'D'$, т.к. достаточно иметь три двойных луча, чтобы пучки, если они проективны и концентричны, были конгруэнтны. Теорема очевидно верна, если лучи будут перпендикулярными.



Черт. 72.



Черт. 1. К теореме Дезарга

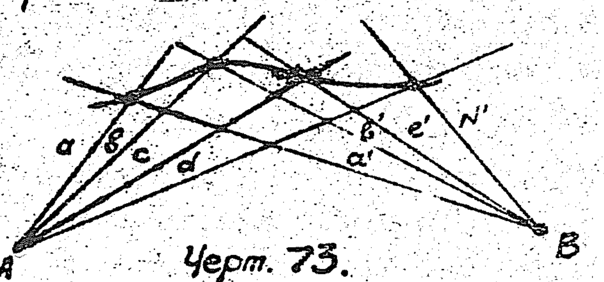
Отдел третий.

Кривые второго порядка.-

Определение.

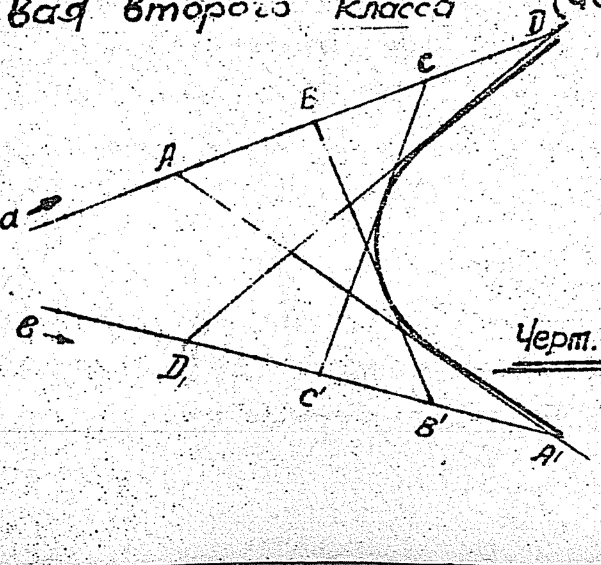
Кривая второго порядка есть геометрическое место точек пересечения лучей двух проективных, но не перспективных пучков. Если пучки будут перспективны, то из их определения следует, что их лучи пересекаются соответственно в точках на одной прямой.

Так что кривая в случае перспективности лучей вырождается в прямую (abcd...) ⊼ (a'b'c'd'...) (черт. 73.)



Черт. 73.

Точки в своей совокупности, получающиеся при пересечении лучей соответственных проективных пучков, образуют пунктуал второго порядка, а кривая с этой точки зрения является носителем второго порядка. Не следует смешивать кривые второго порядка с кривыми второго класса, хотя в о о б щ е это одно и тоже. Для получения кривой второго класса берут две прямые a и b и на них соответственно два проективных но не перспективных пунктуала. Огибающая прямых, соединяющих соответственные точки двух проективных, но не перспективных пунктуалов и есть кривая второго класса (черт. 74.)



Черт. 74.

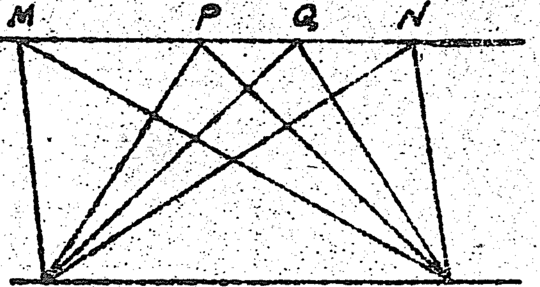
Если же пунктуалы будут перспективны, то кривая второго класса выродится в точку пересечения прямых, соединяющих соответственные точки пунктуалов, ибо они имеют центр перспективы.-

Совокупность всех прямых, соединяющих соответственные точки двух проективных, но не перспективных пунктуалов, носит название <u>пучка второго</u> порядка.

Кривая второго класса является носителем пучка второго порядка, с каждой прямой (лучем) которого кривая имеет одну общую точку - точку касания.

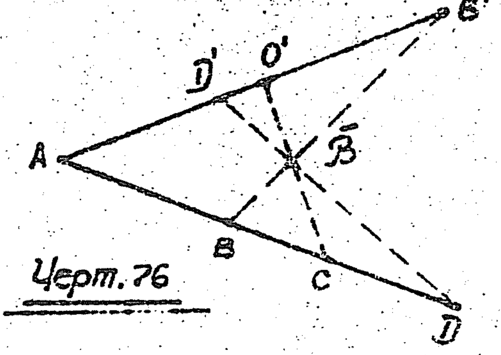
Мы все время рассматриваем кривые не учитывая их вырождений, т.е. рассматриваем понятие кривых второго порядка в узком смысле.

Если же к этому присоединить вырождения, то получим понятие кривой второго порядка в широком смысле. Кривой второго порядка в широком смысле называется геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух проективных или перспективных пунктуалов. Кривая второго класса есть огибающая совокупности прямых, соединяющих соответственные точки двух проективных (могущих стать перспективными) пунктуалов.



Черт. 75.

Кривая второго порядка вырождается в случае пересечения соответств. лучей перспективных пучков в две прямые. Одна есть MN - ось перспективности - (черт. 75) геометрическое место точек пересечения лучей, т.е. общих точек соответственных пар лучей AB - вторая прямая, содержит бесчисленное множество точек, относящихся одному и другому лучу, т.к. луч AB сам себе отвечает.



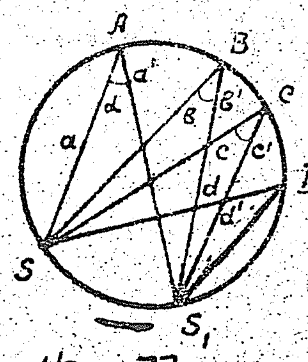
Черт. 76

Кривая второго класса вырождается в две точки: (черт. 76) B̃ - точка пересечения прямых, соединяющих соответственные точки. Точка A сама себе отвечает.

<u>Примеры</u>:

1° Окружность и есть один из простых примеров построения кривой второго порядка по определению.

Пучки S и S_1 (черт. 77.) конгруентны, ибо между лучами один и тот же угол α.



Черт. 77.

2°. Аналогично можно показать, что окружность есть кривая второго класса, т.е. ее можно строить с помощью двух проективных, но не перспективных пунктуалов. Пусть имеем две прямые (черт. 78) Q и Q_1 касательные к окружности в точках S и S'.

Проведем касательные к окружности в точках M, N, P, получая всякий раз точки пересечения их с прямыми Q и Q_1 соответственно в точках $A, B, C, \ldots$ и $A', B', C', \ldots$ Покажем, что пунктуалы таким образом полученные на носителях Q и Q_1, проективны. Из предыдущей задачи:

$$(SM, SN, SP, \ldots) \,\bar{\wedge}\, (S'M, S'N, S'P, \ldots)$$

С другой стороны: $SM \perp OA$, $SN \perp OB$, $SP \perp OC, \ldots$, а потому имеем: $(SM, SN, SP, \ldots) \,\bar{\Delta}\, (OA, OB, OC, \ldots)$

но также: $S'M \perp OA'$, $S'N, OB'$, $S'P \perp OC', \ldots$ и следовательно $(S'M, S'N, S'P, \ldots) \,\bar{\wedge}\, (OA', OB', OC', \ldots)$

Отсюда: $(OA, OB, OC, \ldots) \,\bar{\wedge}\, (OA', OB', OC', \ldots)$

А т.к. эти пучки проективны, то и пунктуалы, на которые они опираются, проективны, т.е.

$$(ABCD, \ldots) \,\bar{\wedge}\, (A'B'C'D', \ldots).$$

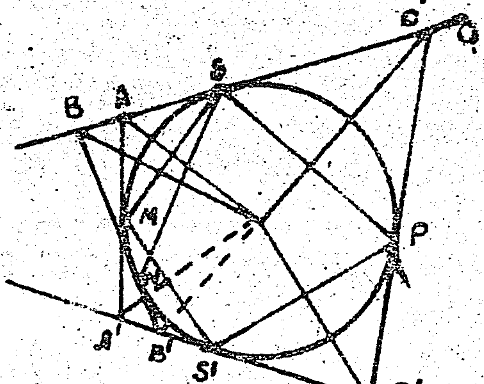
3°. Покажем, что кривая второго порядка определяемая высшей геометрией, имеет некоторые свойства кривой, определяемой в аналитической геометрии.

а) Кривая второго класса не может иметь более двух касательных, проведенных из одной и той же точки. Видно это из следующего: Пунктуалы $(ABCD\ldots)$ и $(A'B'C'D'\ldots)$ проективны по предыдущему: (черт. 79). Взяв точку S, заметим, что: пучек

$$(SA, SB, SC, SD, \ldots) \,\bar{\wedge}\, (SA', SB', SC', SD' \ldots).$$

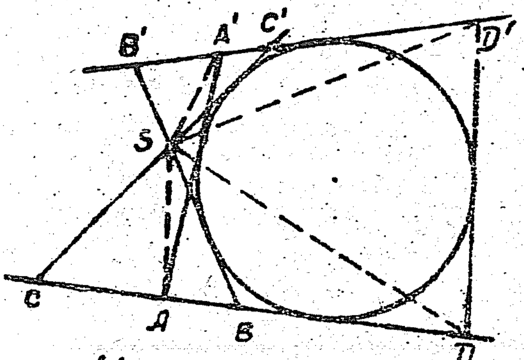
Но если пучки не конгруентны, то они имеют только два двойных элемента или меньше.

Двойными же лучами здесь являются касательные, проходящие через точку S. Следовательно и их не может быть >2; Когда точка S будет находиться на самой кривой, то пучки будут иметь только один двойной луч; наконец когда точка S переместится внутрь кривой — ни одного двойного луча иметь не будем, а следовательно ни одной касательной не сможем провести.



Черт. 78

в. Кривая второго порядка не может иметь более двух <u>общих</u> точек с данной прямой. Так как два проективных но не перспективных пучка не могут иметь с пунктуалом второго порядка более двух общих точек.



Черт. 79.

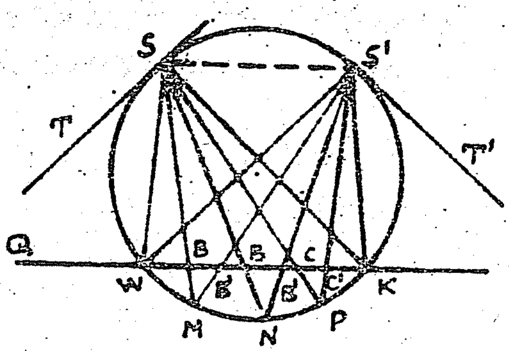
Пересечем кривую прямой Q, выберем две точки S и S' (чер. 80) Из определения кривой:

$$(SM, SN, SP, \ldots)\ \overline{\wedge}\ (S'M, S'N, S'P, \ldots)$$

а потому $(ABCD\ldots)\ \overline{\wedge}\ (A'B'C'D'\ldots)$

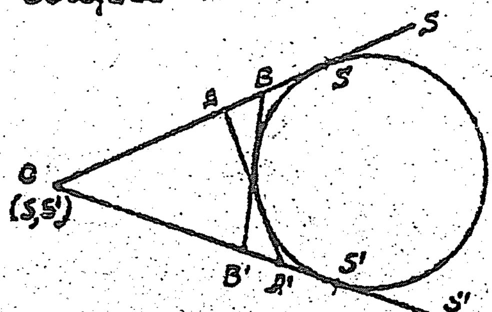
Но два наложенных проект. пунктуала, если они не конгруентны, могут иметь не более двух двойных точек.

Эти две точки лежат в W и K, где оба луча соответственные пересекают Q. Так что больше таких точек быть не может.



Черт. 80.

Если прямая Q-касательная, то будем иметь только одну двойную точку, одну общую точку кривой с прямой Q и, наконец, когда Q выйдет из круга, (из кривой вообще), тогда кривая не будет иметь действительных общих точек с данной прямой.



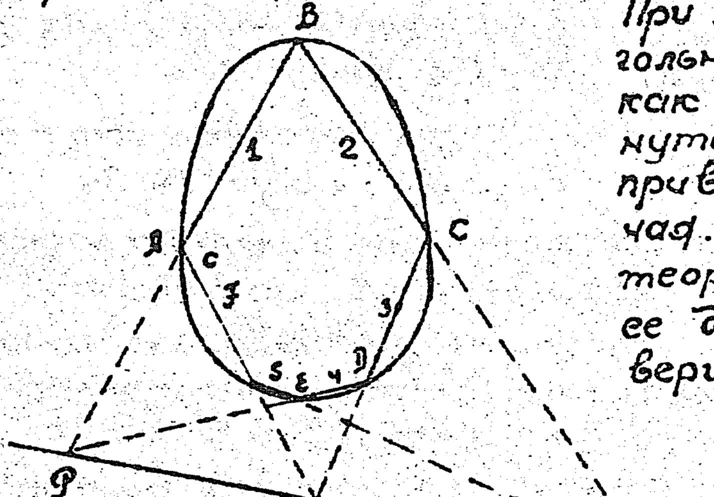
Черт. 81.

4° Касательная ST (черт. 80). первого пучка очевидно будет отвечать S'S во втором пучке и наоборот, касательной S'T' во втором пучке соответствует SS' - в первом.

5° Пусть точка S и точка S' - точки касания - и S и S' - касательные. (черт. 81). Точке S пунктуала (ABCD...) отвечает точка O(S, S') - точка пересечения носителей двух образующих пунктуалов. Точке S' отвечает также O(S, S') - точка пересечения двух образующих пунктуалов.

Теорема Паскаля.

Во всяком шестиугольнике ABCДEF, вписанном в кривую второго порядка точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой (черт. 82).



Черт. 82.

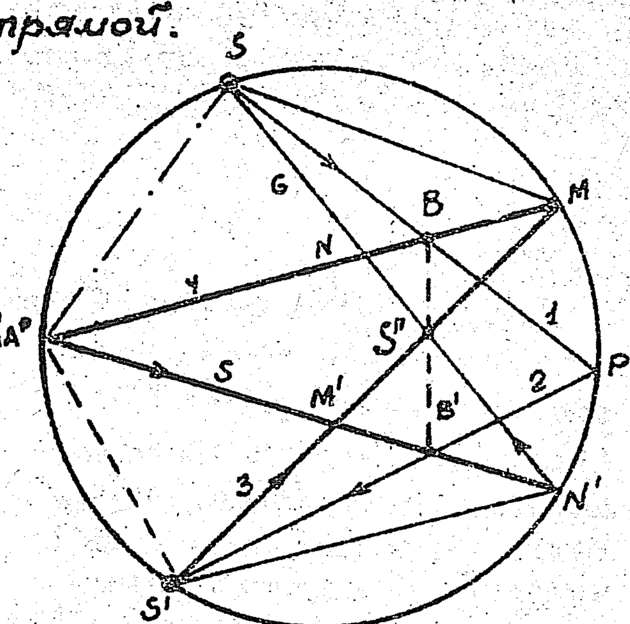
При этом можно шестиугольник рассматривать как выпуклый, так и вогнутый. Доказательство приведем для второго случая. Но прежде чем доказать теорему целиком, докажем ее для случая, когда две вершины вписанного шестиугольника имеют специальное значение, т.е. если дан шестиугольник и две из вершин его суть вершины образующих пучков, тогда точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой. Пусть имеем шестиугольник со сторонами: $\overset{1}{SP}$, $\overset{2}{PS'}$, $\overset{3}{S'M}$, $\overset{4}{MA}$, $\overset{5}{AN'}$, $\overset{6}{A'S}$, (черт. 83) покажем, что B, S'', B' лежат на одной прямой.

$(SA, SB, SN, \dots) \barwedge (S'A', S'B', S'N', \dots)$

по самому построению кривой. Отсюда следует, что:

$$(ABND,\ldots)\ \bar{\wedge}\ (A''B'N'D',\ldots)$$

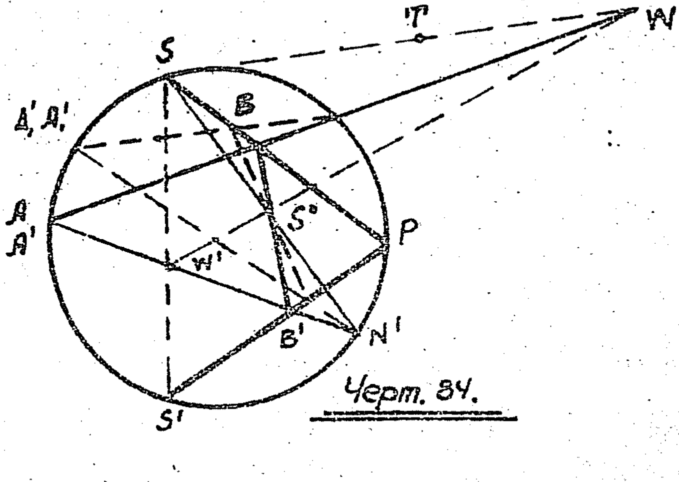
Но так как точка пересечения носителей пунктуалов сама себе отвечает, то пунктуалы перспективны. Следовательно, соответственные точки лежат на прямых, сходящихся в одной точке - центре перспективы. NN' и MN' - прямые, соединяющие соответственные точки, определят центр перспективы S''. Очевидно все прямые, соединяющие соответственные точки, пройдут через S'', т.е пройдет прямая, соединяющая B и B'. Итак, B, S'' и B' лежат на одной прямой.



Черт. 83.

Лучу, касательному к кривой в точке S соответствует луч $S'S$ (черт. 84). Точке W на пунктуале ASN отвечает W' на AN'. Если дана точка W' и надо найти W, то следует носитель AM провести и до пересечения с $W'S''$ в точке W.

Теперь покажем, что точки S и S' могут быть выбраны где угодно на нашей кривой, т.е. могут быть точками произвольными на кривой, являясь одновременно вершинами проективных образующих пучков. Зная, что S и S' есть вершины образующих кривую проективных пунктуалов, мы доказали, что пунктуалы $(ABC\ldots)\ \bar{\wedge}\ (A'B'C'\ldots)$.

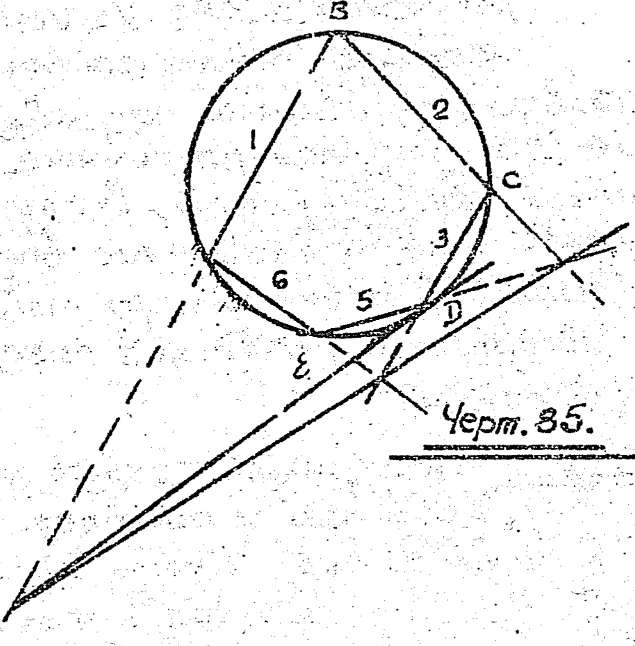


Черт. 84.

Докажем, что точки M и N' могут выполнять ту же роль, что S и S'. Оставим на местах точки S, S', M, N', P, а AA' будем перемещать по кривой в одну или в другую сторону.

Очевидно, от этого перемещения положение S''-центра перепективы, - не зависит т.к. он определяется неподвижеными точками. Прямая BB' будет вращаться около этого центра, образуя два перепективных пунктуала SP и S'P, а тогда и пучки, опирающиеся на эти пунктуалы будут проективны, т.е. пучок с вершиной N' и пучок с вершиной M проективны, а M и N - любые точки кривой могут быть, следовательно, избраны вместо S и S'.

Рассмотрим какой вид принимает теорема Паскаля, когда некоторые стороны шестиугольника вырождаются в точки. Очевидно, если две вершины шестиугольника совпадут, то сторона их соединяющая обратится в касательную. Теперь на паскалевой прямой имеем две точки пересечения противоположеных сторон и точку пересечения касательной и стороны (черт. 85). Когда попарно совпадают две пары вершин, шестиугольник вырождается в четырехугольник и тогда теорема читается так:

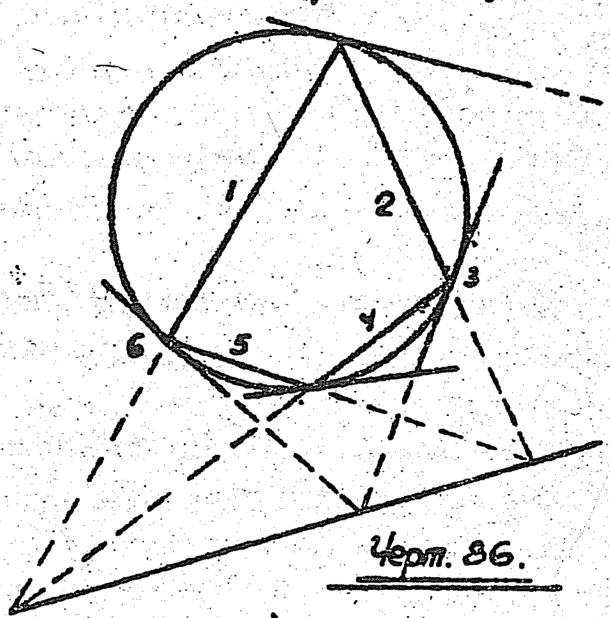


Черт. 85.

Во вписанном в кривую второго порядка четырехугольнике точки пересечения противоположеных сторон (черт 86) и точки пересечения касательных в противоположеных вершинах лежат на одной прямой. Это вполне понятно, т.к. касательная есть вырождение стороны. Противоположеные стороны вырождаются в две касательные в противоположных вершинах. Наконец, если попарно три пары вершин совпадут, тогда шестиугольник вырождается в треугольник, а теорема читается:

Во вписанном в кривую второго порядка треугольнике точки пересечения сторон и касательных в противоположеных вершинах лежат на одной прямой (черт. 87).

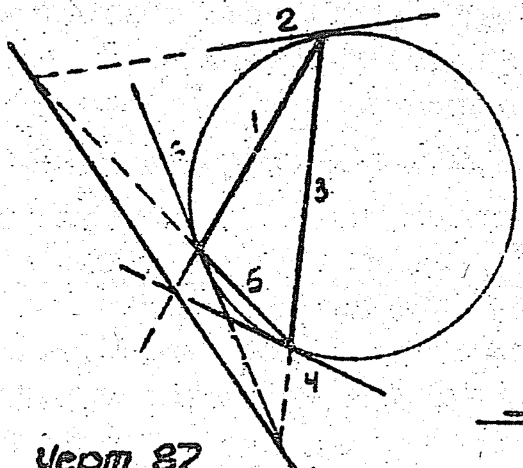
Задача. По пяти заданным точкам кривой построить остальные точки кривой. Пусть имеем 5 точек (черт. 88). Очевидно можно построить 4 прямые, соединяющие эти точки: 1.2.3.4.



Черт. 86.

Тогда 1 и 4 определят одну точку паскалевой прямой A'. Из A проведем прямую любого направления → I она, очевидно пересечет продолжение стороны 3 в точке B'. Итак Паскалева прямая найдена: $A'B'$.

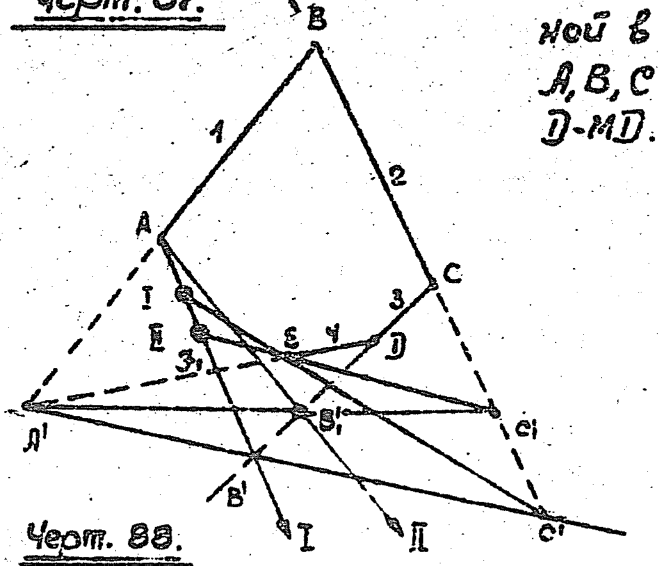
Проводя сторону 2 до пересечения с этой прямой получим точку C', которую соединим с E до пересечения с AB'. E и есть искомая точка кривой.



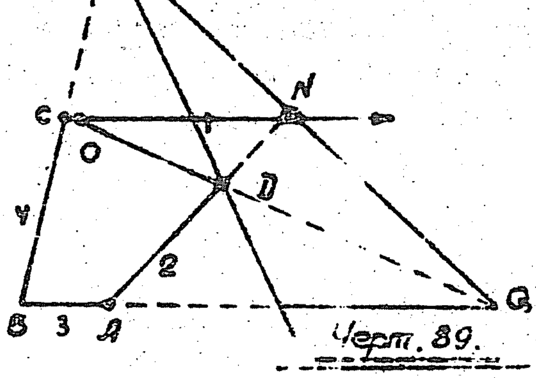
Черт. 87.

Задавая произвольно направление AB' получим различные точки нашей кривой. В случае, если это направление вырождится в касательную, тогда получим вырождение шестиугольника.

Задача. Построить кривую по 4 точкам и касательной в одной из них. Пусть даны: A, B, C и D и касательная в точке D-MD.



Черт. 88.



Черт. 89.

Проводим любого направления пятую сторону (стрелки), отыскиваем Паскалеву прямую MN. Затем отыскиваем Q, соединив C с D ; получаем точку Q - точку кривой; Так можно получить сколько угодно точек т.е. начертить кривую.

О законе двойственности или взаимности.-

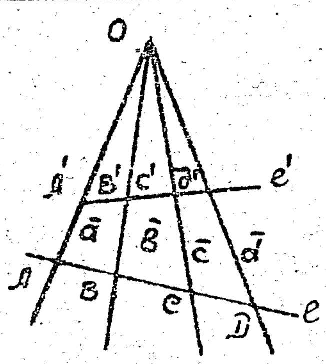
Закон взаимности имеет место для теорем геометрии, рассматривающих зрительные свойства объектов. Заключается он в следующем:

Для каждой зрительной теоремы существует другая, ей взаимная, получаемая заменой в формулировках точки на прямую и прямой точкой:

$$A \rightarrow a \text{ и } a \rightarrow A.$$

Справедливость этого закона мы можем усматривать из некоторых уже известных примеров, которые и разберем:

1° A° Перспективные пунктуалы.



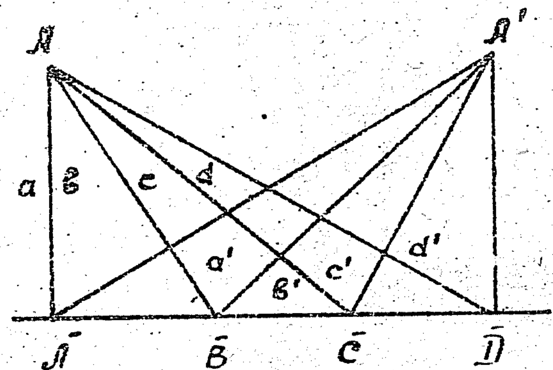
Черт. 90

Для A°. $(ABCD..) \bar{\bar{\wedge}} (A'B'C'D')$

$$\left.\begin{array}{l} AA' - \bar{a} \\ BB' - \bar{b} \\ CC' - \bar{c} \\ DD' - \bar{d} \end{array}\right\} \rightarrow O$$

Имеем совокупность точек (пунктуал) принадлежащих прямой: A, B, C, D... принадлежат e и A'B'C'D'... → e'.

B° Перспективные пучки.



Черт. 90-а.

Для B°. $(abcd...) \bar{\bar{\wedge}} (a'b'c'd'..)$

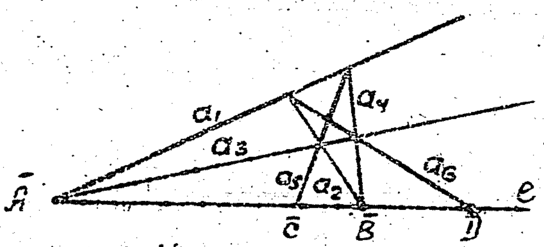
$$\left.\begin{array}{l} a \text{ и } a' \rightarrow \bar{A} \\ b \text{ и } b' \rightarrow \bar{B} \\ c \text{ и } c' \rightarrow \bar{C} \\ d \text{ и } d' \rightarrow \bar{D} \end{array}\right\} \rightarrow \bar{Q}$$

Здесь имеем совокупность лучей (пучок) принадлежащих одной точке: a, b, c, d → A, a', b', c', d' → A'.

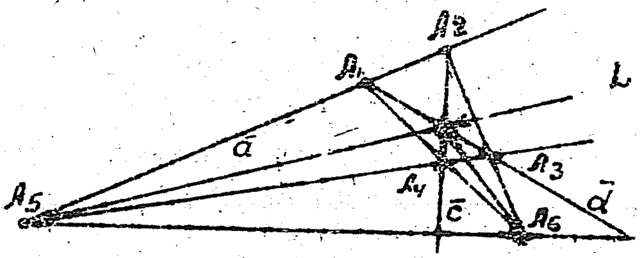
В первом случае каждая пара точек A и A', B и B', C и C', D и D', определяют соответственно прямые $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, .. принадлежащие одной точке O. Во втором случае каждая пара прямых: a и a', b и b', c и c', d и d', ... определяет соответственно точки $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$, ... принадлежащие одной прямой $\bar{e}$. Так что достаточно, в определении перспективных пунктуалов заменить всякий раз точку прямой и прямую точкой, как получим перспективность пучков. Если разрушить перспективность, получим в одном случае понятие проективности двух пунктуалов, в другом ему взаимное понятие двух проективных пучков.

2° Треточнику. соответствует взаимное понятие трехсторонника: каждая пара точек определяет прямую-сторону, - каждая пара сторон определяет точку-вершину.

3°. Гармонические точки и гармонические лучи, получаемые с помощью четырехточника и четырехсторонника.



Черт. 90 в.



Черт. 90 с.

Прямые a_1 и a_3 определяют $\bar{A}$ }-e
Прямые a_2 и a_4 определяют $\bar{B}$
Прямые a_6 и e определяют $\bar{D}$ }-e
Прямые a_5 и e определяют $\bar{C}$

Четыре гармонических точки $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ принадлежат одной прямой e-носителю.

Точки A_1 и A_3 определяют прямую $\bar{d}$ }L
Точки A_2 и A_4 определяют прямую $\bar{c}$
Точки A_6 и O определяют прямую $\bar{a}$ }L
Точки A_5 и O определяют прямую $\bar{b}$

Четыре гармонических луча $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ принадлежат одной точке O - центру пучка-носителю.

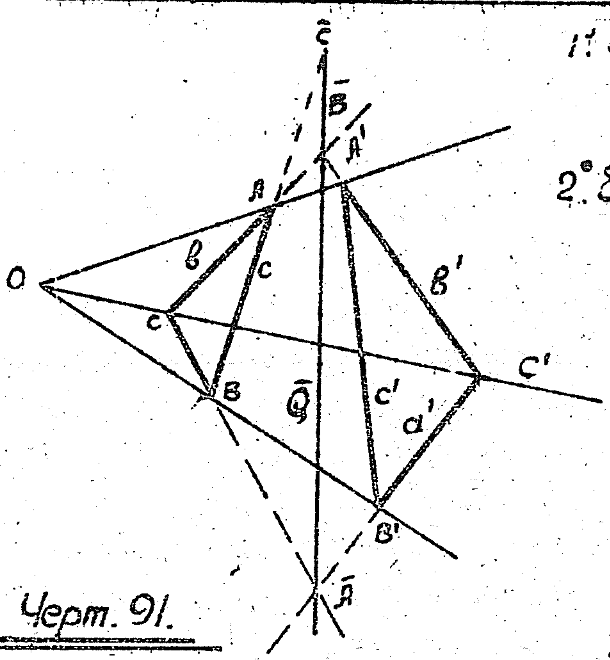
Таким образом опять имеем два взаимные понятия: заменив точки на прямые, а прямые на точки, получаем из четырех гармонических точек, построенных с помощью четырехточника, четыре гармонических луча, построенных по четырехсторроннику.

4° Для кривой второго порядка касательной отвечает общий луч SS', для кривой второго класса точке касания отвечает общая точка AA'. Отсюда уже можно заметить, что кривая второго порядка есть взаимное понятие понятию кривой второго класса и наоборот. Но это будет показано основательно в свое время.

5° Теорема Дезарга - ее две части 1° и 2°.

1°. Если $\left.\begin{matrix} AA'/\bar{a} \\ BB'/\bar{b} \\ CC'/\bar{c} \end{matrix}\right\} O$ то $\left.\begin{matrix} a,a'/\bar{A} \\ b,b'/\bar{B} \\ c,c'/\bar{C} \end{matrix}\right\} \to \bar{Q}$

2°. Если $\left.\begin{matrix} a,a'/\bar{A} \\ b,b'/\bar{B} \\ c,c'/\bar{C} \end{matrix}\right\} \bar{Q}$, то $\left.\begin{matrix} AA'/\bar{a} \\ BB'/\bar{b} \\ CC'/\bar{c} \end{matrix}\right\} O.$



Черт. 91.

Таковы формулировки первой и второй частей теоремы Дезарга. Замечаем, что вторая получается из первой заменой точек на прямые, а прямых на точки.

Но если плоскостным аксиомам, утверждающим зрительные свойства, присущ закон взаимности и присущ теореме Дезарга, то очевидно теоремы, являющиеся следствиями аксиом и теоремы Дезарга, подчинены закону взаимности. Что закон взаимности имеет место для зрительных аксиом, видно из таких примеров:

1) Две точки определяют прямую. Взаимное понятие: две прямые определяют точку.

2). Между всякими двумя точками A и A', если $A \neq A'$ существует точка C. Взаимное понятие:

Между всякими двумя прямыми a и a', если $a \neq a'$ существует прямая c $e \neq c$.

Можно было бы построить абстрактную геометрию, заменив конкретные понятия точки и прямой в наших суждениях общими понятиями: элемент и носитель. Элементом и носителем при этом может быть как точка, так и прямая. Положим, что мы имеем элементы: U, V, W и носители u, v, w и соответственную пару: U', V', W' и u', v', w'. Тогда теорема Дезарга записалась бы объединенно так:

$$\text{Если}\ \left.\begin{matrix} UU'/\bar{u} \\ VV'/\bar{v} \\ WW'/\bar{w}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{элем.}]{} \Omega\ \text{то}\quad \left.\begin{matrix} uu'/\bar{U} \\ vv'/\bar{V} \\ ww'/\bar{W}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{носитель}]{} \omega$$

Совершенно неважно, будут ли стоять на месте элементов точки, а на месте носителей прямые или наоборот; в том или обратном случае будем только иметь вторую или первую часть теоремы Дезарга.

Характерно заметить: такая общность, конечно, возможна только при учете, в суждениях, зрительных, но не меровых свойств объектов. В противном случае прямая и точка безусловно не имели бы общих свойств, а потому и была бы невозможна общность. Такая абстрактная геометрия, следовательно, может быть только зрительной, иначе геометрией положения.

В ней о точках говорится тоже самое, что и о прямых, т.е. выбираются свойства присущие одному и другому объекту. В этом заключается один из признаков значительно высокого мышления, логики человека.

Теорема Брианшона. (предварительная)

Если около кривой второго класса описать шестиугольник, то прямые, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке (черт. 92).

Опираясь на закон взаимности, следует сказать, что понятием взаимным понятию, утверждаемому в теореме, является теорема Паскаля, а потому если доказана теорема Паскаля, то в силу закона двойственности вытекает справедливость предварительной теоремы Брианшона.

Теорема Паскаля символически читается:

Если $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ - стороны вписанного шестиугольника, то:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 a_4 / A \\ a_2 a_5 / B_1 \\ a_3 a_6 / C_1 \end{array}\right\} \bar{a}$$

Здесь пары прямых $a_1 a_4$, $a_2 a_5$ $a_3 a_6$ определяют соответственно точки A_1, B_1 C_1, принадлежащие одной прямой, а именно прямой $\bar{a}$ - Паскаля.

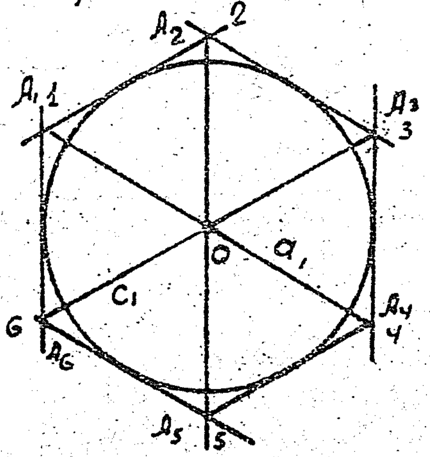
Теорема же (предварительная) Брианшона символически читается:

Если $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ - вершины описанного шестиугольника, то:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 A_4 / a_1 \\ A_2 A_5 / b_1 \\ A_3 A_6 / c_1 \end{array}\right\} \rightarrow O.$$

Здесь пары точек $A_1 A_4$, $A_2 A_5$, $A_3 A_6$ определяют соответственно прямые a_1, b_1, c_1, принадлежащие одной точке.

Так что действительно, Теорема Брианшона есть взаимная теорема теореме Паскаля, а потому утверждение теоремы Брианшона верно, т.к. верно утверждение взаимной теоремы - Паскаля по закону двойственности.



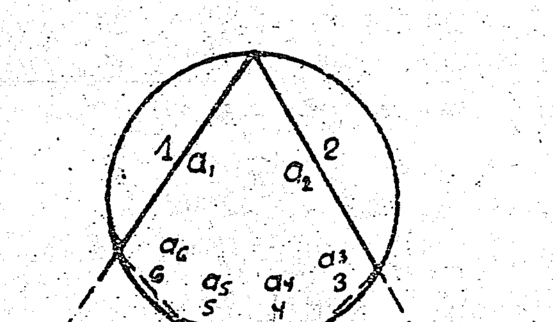
Черт. 92.

Совершенно также взаимностью обладают и вырождения шестиугольников в обеих теоремах.

Если в теореме Паскаля стороны обращались в касательные, то здесь очевидно вершины обратятся в точки касания.

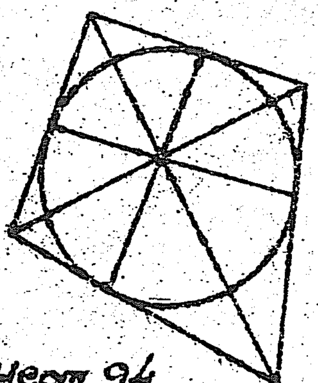
1). Если около кривой второго класса описать четырехугольник то 4 прямые, две диагонали и две прямые, соединяющие точки касания против сторон пересекутся в одной точке (черт. 94).

2). Если около кривой второго класса описать треугольник, то 3 прямые, соединяющие вершины с точками касания противоположных сторон

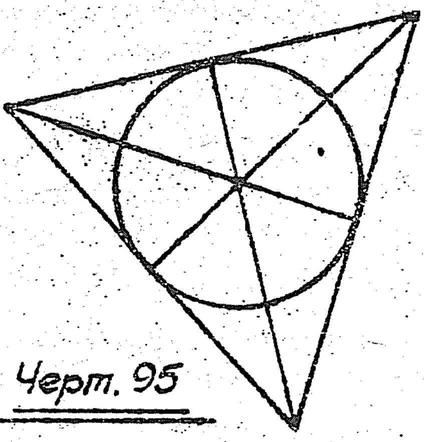


Черт. 93.

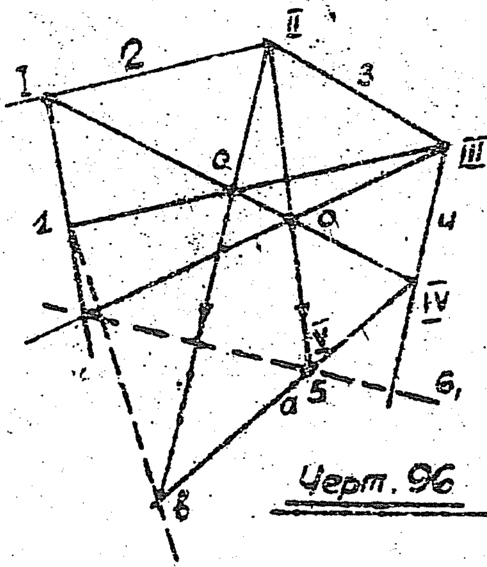
пересекаются в одной точке. (черт. 95)



Черт. 94.



Черт. 95



Черт. 96

<u>Задача</u>. Требуется по 5 данным касательным к неизвестной кривой построить сколько угодно касательных.

Пусть имеем касательные (чер. 96) 1, 2, 3, 4, 5. I и IV очевидно дадут прямую, на которой лежит точка пересечения всех прямых, соединяющих противоположные вершины. Тогда на продолжении 5<u>й</u> касательной возьмем любую точку в или а. Это будет 5-я вершина, а потому II и V дадут О. Соединяя О с III, получим на первой касательной шестую вершину. А тогда V и VI определяет искомую касательную. Но т.к. а или в можно на 5<u>й</u> или 1-й касательной выбирать произвольно, то получим любое число касательных.

<u>Следует отличать принцип двойственности от закона</u> двойственности. Тогда как второй наверное имеет место для теорем, утверждающих зрительные свойства объектов, — первый применяется и для теорем меровых свойств, хотя в некоторых случаях он обрывается. Так например, положения:

1) Два треугольника равны, если $A = A'$ и $в = в'$, $c = c'$.

2) Два треугольника равны, если $B = B'$, $c = c'$ и $a = a'$ взаимны. Здесь точки (углы) заменены сторонами и наоборот. Но уже равенство треугольников по трем сторонам не имеет себе взаимного - по трем углам - обрывается, принцип двойственности не имеет места.-

Связь понятий кривых второго порядка в аналитической и высшей геометриях.-

Надо установить связь между понятиями кривой второго порядка в высшей геометрии и в аналитической, т.е. установить есть ли понятие кривой высшей геометрии, как геометрическое место точек пересечения лучей двух проективных, но не соответственных перспективных пучков, все одно, что понятие кривой второго порядка в аналитической геометрии, как геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению:-

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Тождественность понятий этих мы и установим. Но если, все кривые второго порядка, определяемые в аналитической геометрии, получаются методами высшей геометрии, то вероятна и возможность существования таких кривых второго порядка, построенных на принципах высшей геометрии, которых нет в аналитической геометрии? Ответ на последний вопрос последует в дальнейшем.

Все собственные кривые второго порядка: круг, эллипс, гипербола и парабола являются в результате сечения конической поверхности плоскостью. Отсюда, все они могут быть получены центральным проектированием какой либо из них из точки, являющейся вершиной конуса, на плоскости, поставленные под различными углами к коническому пучку. За такую кривую можно взять хотя бы окружность. Но окружность, как кривая второго порядка и второго класса, является, по ранее доказанному, геометрическим местом точек пересечения соответственных пар лучей проективных но не перспективных пучков (огибающая прямых, соединяющих соответственные точки двух проективных, но не перспективных пунктуалов); а т.к. сложное отношение пучков, образующих окружность, при проектировании сохраняется (как и при отбрасывании тени) то проективность пучков будет иметь место и для эллипса, гиперболы и параболы. Но это и доказывает, что все кривые второго порядка имеющие место в аналитической геометрии как собственные, получаются методами высшей геометрии как кривые 2-го порядка и 2-го к л а с с а.

Покажем аналитически, что всякая кривая второго порядка получается из другой с помощью проективного преобразования:

$$x' = \frac{ax+by+c}{gx+hy+k}; \quad y' = \frac{dx+ey+\ell}{gx+hy+k};$$

Что эллипс получается проективным преобразованием из круга очевидно, т.к. аффинное преобразование круга дает эллипс, а оно является частным случаем проективного преобразования.

Отсюда же и следует, что эллипс, как и окружность строится с помощью двух проективных пучков или пунктуалов, - но не перспективных, т.к. при аффинном преобразовании проективность пучков сохраняется.

Но гипербола преобразуется в эллипс; действительно: пусть гипербола задана уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{а преобразование суть} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{y'} \\ y = \dfrac{x'}{y'} \end{cases}$$

Получаем при подстановке x и y в уравнение гиперболы:

$$\frac{1}{a^2y'^2} - \frac{x'^2}{b^2y'^2} = 1 \to 1 - \frac{x'^2a^2}{b^2} = a^2y'^2 \quad \text{или}$$

$$a^2y'^2 + \frac{a^2x'^2}{b^2} = 1 \quad \text{и наконец} \quad \frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} = 1, \text{ где } \alpha^2 = \frac{b^2}{a^2}, \; \beta = \frac{1}{a^2}$$

Следовательно, преобразованием проективным переходим от гиперболы к эллипсу, а от эллипса к кругу. Двумя проективными преобразованиями приходим к кругу; отсюда и следует, что гипербола получается проективными пучками. Легко показать, что парабола: $y^2 = 2px$ преобразуется в гиперболу, взяв $y = \frac{1}{y'}$, $x = \frac{x'}{y'}$ за формулы преобразования.

$$\frac{1}{y'^2} = 2p\,\frac{x'}{y'} \to 1 = 2px'y'; \quad x'y' = a, \text{ где } a = \frac{1}{2p}.$$

но это и есть гипербола, отнесенная к асимптотам. Так что из параболы после трехкратного проективного преобразования получим круг. А т.к. проективное преобразование образует группу, то всякие два преобразования дают тоже, что некоторое одно.

Следовательно, на основании предыдущего, все кривые второго порядка последовательно преобразуются в окружность, а это и доказывает, что все они получаются так же, как окружность, т.е. являются геометрическим местом точек пересечения соответственных лучей проективных но не перспективных.

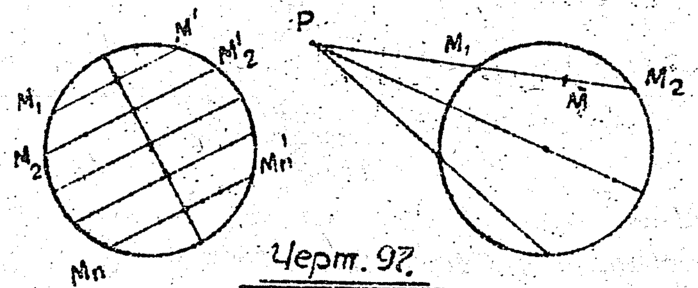
Полярные свойства кривых второго порядка.

Рассмотрим сначала определение диаметра и поляры в аналитической геометрии. Диаметром называется геометрическое место середин параллельных хорд. Все диаметры кривой проходят через одну точку, именуемую центром кривой.

Полярой точки P называется геометрическое место средних гармонических центров точек пересечения лучей пучка, с вершиной в точке P, кривой второго порядка относительно этой вершины.

$$\frac{2}{P\bar{M}} = \frac{1}{P\bar{M}} + \frac{1}{P\bar{M}};$$

Если точка $P \to \infty$ то пучек обратится в параллельные прямые, а поляра перейдет в диаметр. (черт. 97).

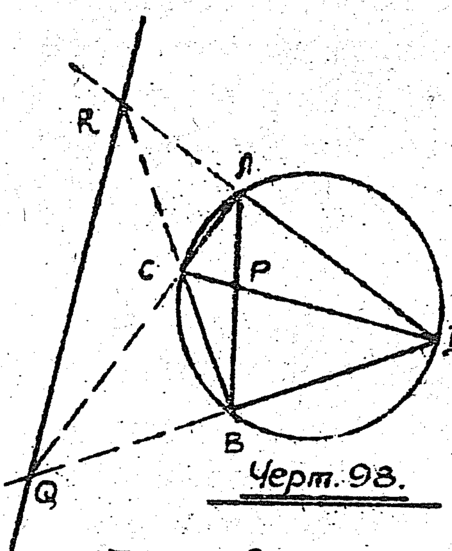


Черт. 97.

Диаметр кривой 2^го порядка есть поляра бесконечно удаленной точки.

В аналитической геометрии сначала дается понятие диаметра, а затем поляры. Высшая геометрия рассматривает сначала понятие поляры, а понятие диаметра вытекает из понятия поляры как частный случай.

Полара P (черт. 98) в высшей геометрии строится так: в кривую вписывается четырехугольник так, чтобы P была точкой пересечения диагоналей. Прямая, соединяющая точки пересечения противоположных сторон вписанного таким образом четырехугольника и есть полара точки P.

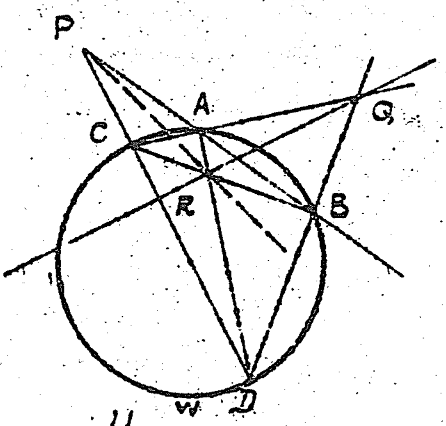


Черт. 98.

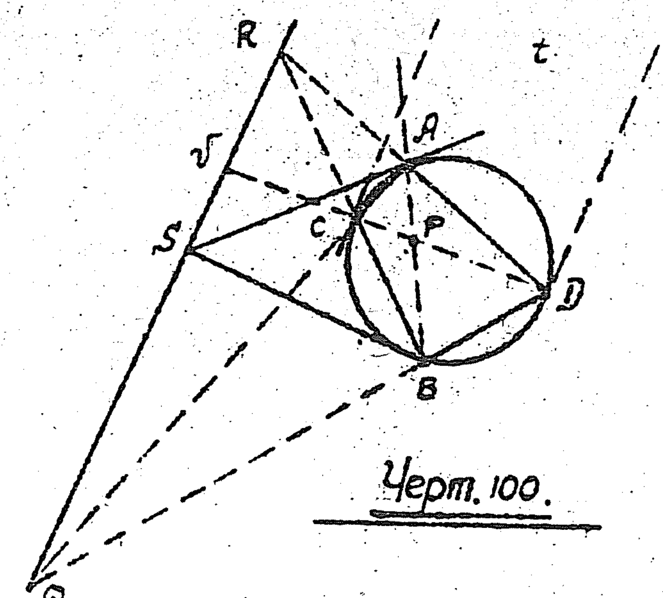
Если точка P лежит вне кривой (черт. 99) то из нее проводятся две секущие, которые пересекают нашу кривую в точках A и B, C и D. Получаем четырехугольник ABDC. Прямая RQ - полара P, (четырехугольник Штаудта.)

Возможно, что полара зависит от того, каким образом выберем точки A и B, C и D?

Покажем, что во всяком случае, при данной точке P (черт. 100) имеем одну определенную полару, независимо от выбора пар точек A,B и C,D.



Черт. 99.



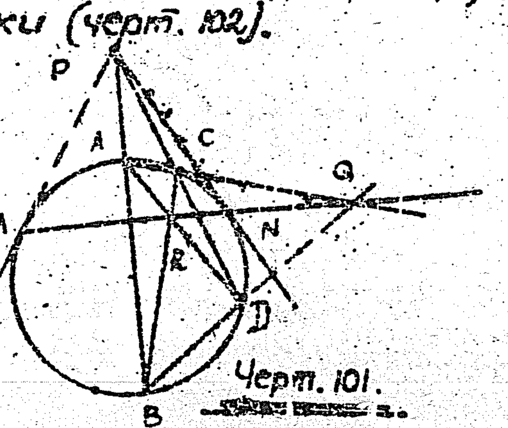
Черт. 100.

Заметим, что т.к. RQ есть прямая, на которой лежат точки пересечения противоположных сторон вписанного четырехугольника, то по теореме о вписанном четырехугольнике на этой же прямой лежат точки пересечения касательных к кривой в противоположных вершинах.

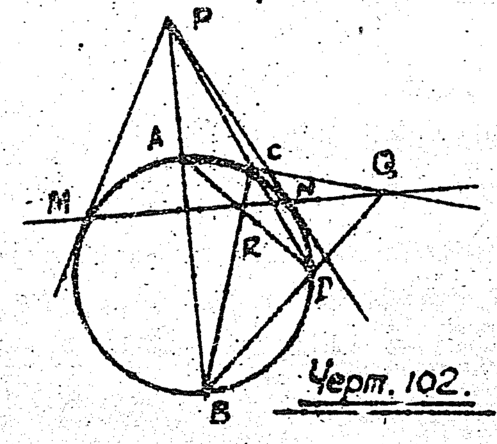
$ACQBCR$ - вогнутый четырехугольник Штаудта, а потому $(\vartheta PCD)=-1$, т.е. ϑ есть средний гармонический центр точек C и D относительно P, не зависит от положения A и B и в то же время принадлежит поляре. Точка t также независит от положения A и B, причем принадлежит поляре. Таким образом, имеем две точки поляры ϑ и t, положение которых зависит только от C, D и P, а они определяют поляру. Следовательно A и B можно выбрать произвольными. Но сделав такой выбор, легко показать, что положение поляры не зависит и от C и D. В самом деле: точка S определяется независимо от C и D; но $(BAPW)=-1$ W - принадлежит поляре и не зависит от положения C и D. Точки S и W полностью определяют положение поляры. Для связи следует заметить, что при заданных P, C и D и произвольных A и B мы имеем одну и ту же поляру. Выбрав из этих произвольных A и B какие либо, мы сохраняем положение поляры: и затем при изменении положения C и D положение поляры сохраняется. Оно зависит только от положения точки P.

Рассмотрим частные случаи:

1. Если A и B, C и D будут попарно сближаться, то прямые PAB и PCD (черт. 101) будут приближаться в положение касательных, PM и PN, проведенных из точки P к кривой. Точки касания, очевидно, определяются положением поляры (т.к. она сохраняет свое положение и в пределе) и наоборот, точки касания определят RQ. Основываясь на этом, легко построить касательные к данной окружности с помощью одной линейки (черт. 102).



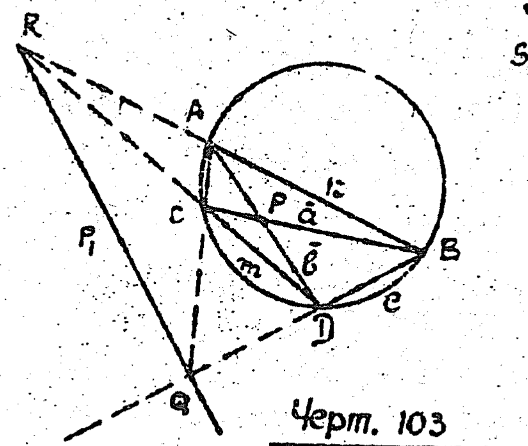
Черт. 101.



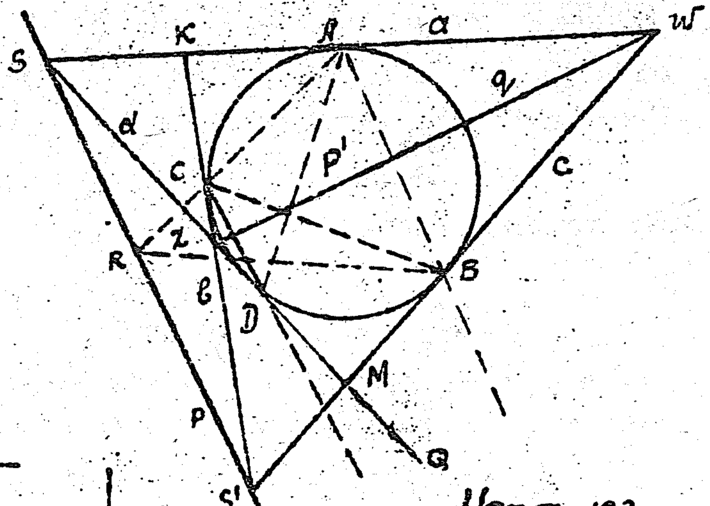
Черт. 102.

Для этого из P проводим две секущие, получив C, D, A, B, а затем Q и R; тогда M и N суть точки касания.

2°. Если точка P будет приближаться к кривой, то M и N будут сближаться, и <u>когда P будет находиться на кривой</u>, M и N сольются и определят поляру, как касательную в точке $M \equiv N \equiv P$. Так что полярой точки кривой является касательная к кривой в этой точке. Построим взаимную конфигурацию, отмечая этапы в первом построении, заменяя их взаимными.



Черт. 103



Черт. 103 а.

1). Взята точка P.

2) Через P проходят две прямые: $\bar{a}, \bar{b}$

3) $\bar{a}$ и $\bar{b}$ пересекают кривую в 4х точках: A, D, C, B.

4) A и B, C и D, B и D, A и C определяют k, m, l, w - четыре прямые попарно.

5) Прямые: k и m, w и l дают точки R и Q.

6) R и Q - определяют поляру P.

1) Взята прямая p.

2) На прямой p взяты две точки S и S'.

3) Из точек S и S' проведены касательные к кривой

4) Прямые: a и b, c и d, b и d, a и c определяют попарно точки: K, M, L, W

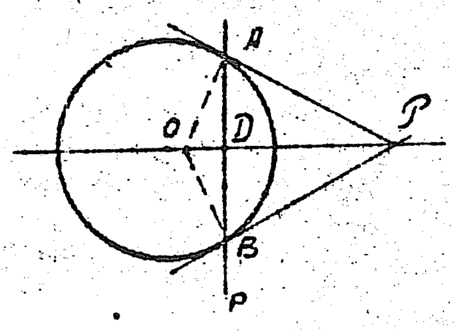
5) Точки K и M, L и W дают прямые r и q

6) r и q определяют точку P'.

Легко показать, что если p есть поляра точки P, то при взаимном построении P' есть полюс прямой p - поляры. Т.е. что P в первом построении одно и то же, что и во втором, если p - некоторая поляра. По теореме Брианшона об описанном четырехугольнике $KWMZ$, AD и CB проходят также через точку P, как прямые, соединяющие точки касания противоположеных сторон. Надо только показать, что прямые AC и BD, AB и CD пересекаются в точках R и Q, лежащих на прямой p. Если это будет так, то для p имеем единственную точку $\mathcal{P}$, полученную одним и другим способом. Но по теореме Паскаля о вписанном четырехугольнике противоположные стороны четырехугольника пересекаются на прямой, на которой пересекаются и касательные, проведенные в противоположеных вершинах. Из чертежа же это и видно: касательные определяют Паскалеву прямую.

<u>Теорема:</u> Прямая, соединяющая центр с полюсом перпендикулярна к поляре полюса относительно данного круга.

<u>Доказательства</u>. Рассмотрим два случая:



1). Полюс находится вне круга.

$\mathcal{P}$ - полюс вне круга

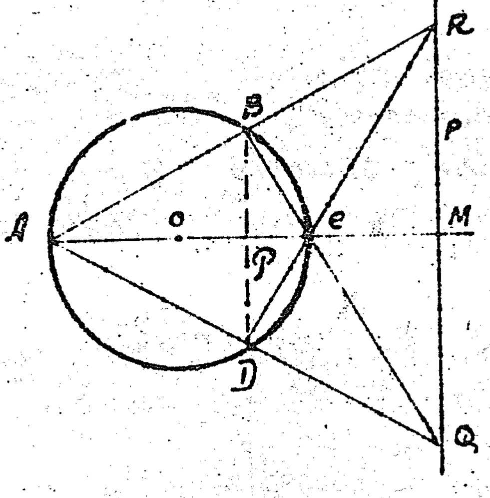
p - поляра.

$\triangle OAP = \triangle OBP$ по трем сторонам.

$\triangle APB$ - равнобедренный

из первого: $\angle APD = \angle DPB$, т.е. PD - биссектрисса, по второму свойству это есть и высота тр-ка APB.

2) Полюс находится внутри круга.



$\mathcal{P}$ - полюс

p - поляра

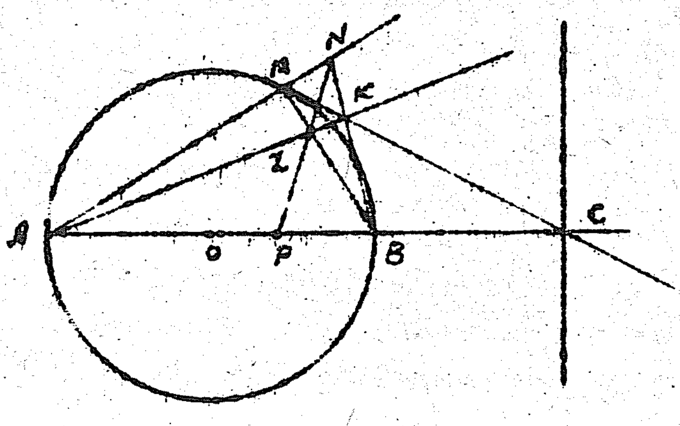
$AM \perp p$; действительно:

$\angle ADR = \angle ABQ = 90°$.

Следовательно, RD и QB высоты треугольника ARQ; из того, что высоты пересекаются в одной точке и следует теорема.

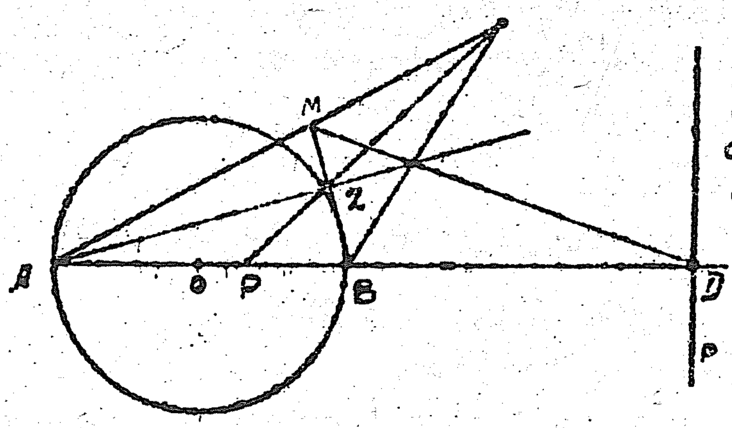
Основываясь на предыдущих теоремах, можно строить поляру по данному полюсу или полюс по данной поляре, руководствуясь определением полюса и поляры.

1) Пусть дан полюс, построить поляру (полюс внутри круга)



На точках A, B, P строим четырехугольник Штаудта и находим таким образом C – точку поляры. Перпендикуляр в этой точке к прямой, соединяющий центр с полюсом, и есть искомая поляра.

2) Дана поляра вне круга и круг. Построить полюс.



На трех точках AB и D строим четырехугольник Штаудта и получаем точку P – искомый полюс.

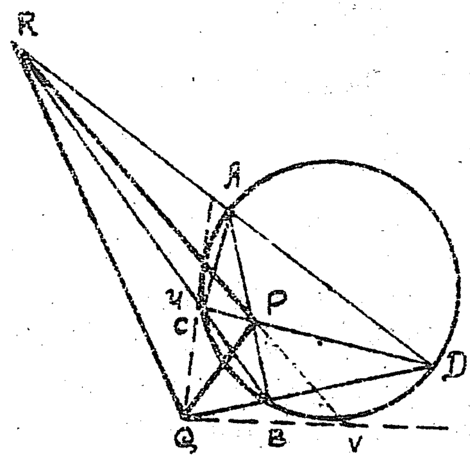
В случае, когда полюс дан вне круга или если поляра пересекает круг, построение тоже самое, но может быть выполнено и с помощью касательных.

Полярный треугольник.

Треугольник, у которого вершины являются полюсами противоположеных сторон, а стороны – являются полярами противоположеных вершин, называется полярным треугольником. PQR (черт. 104) и есть такой треугольник.

В самом деле, P есть полюс поляры PQ, Q есть полюс поляры RP, и R есть полюс поляры PQ по самому построению.

1°. Когда AB и DC вращаются вокруг P, в это время R и Q движутся по прямой-поляре точки P, если P остается на месте, как было доказано.



Черт. 104.

2° Пусть A, B и P закреплены, а точка D будет двигаться по кривой. Очевидно, пучки лучей с вершинами в A и B являются проективными ибо их точки пересечения D образуют кривую второго порядка. Одновременно будем получать на прямой RQ точки $R_1, R_2 R_3, \dots$ и Q_1, Q_2, Q_3, соответственно полученные пересечением этой прямой лучами из вершин в A и B. Но т.к. лучи AR_1, AR_2, AR_3 .. проективны лучам $BQ, , BQ_2, BQ_3 \dots$ то

$$(R_1 R_2 R_3 \dots) \barwedge (Q_1 Q_2 Q_3 \dots) \text{ и следовательно:}$$

$$(PR_1, PR_2, PR_3) . \barwedge (PQ_1 PQ_2 PQ_3 \dots)$$

A $R_1, R_2 \dots$ являются полюсами поляр PQ, $PQ_2 \dots$, кроме того располагаются на поляре точки P.

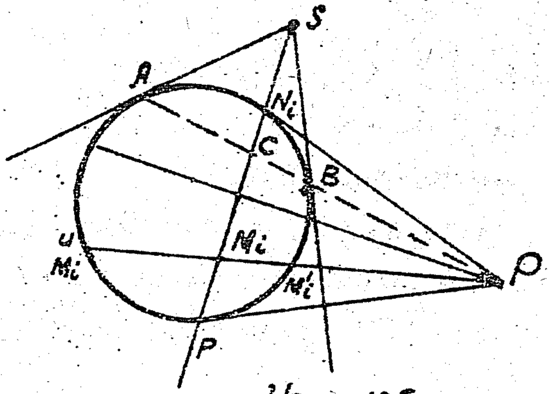
Отсюда следуют выводы: 1) Пучок поляр проективен пунктуалу полюсов, причем носителем пучка поляр является полюс носителя пунктуала полюсов.

2). Полюсы прямых, проходящих через одну точку P, лежат на одной прямой. Пучку поляр отвечает пунктуал полюсов. Кроме этих свойств следует еще отметить, что точки U и V точки касания касательн. из Q (черт. 104). гармонически делят P и R отсюда и лучи QU и QV гармонически делят QR и QP. Но QU и QV - касательные, потому последнее свойство можно высказать так: Две касательные из точки вне кривой, к кривой, гармонически делят лучи, проходящие через эту точку и являющиеся сторонами полярного тр-ка.

Аналогично разобранному можно построить взаимные понятия, заменив точку прямой, а прямую точкой.

1) Ряду точек, располагающихся на прямой, соответствуют поляры проходящие через точку P (чер. 105)

В справедливости этого можно убедиться имея ввиду принцип двойственности. Но это можно и показать. Действительно.



Черт. 105.

а) Для точек, лежащих на прямой внутри кривой это верно, и точкой, в которой пересекаются поляры точек прямой, является полюс этой прямой.

Верно потому, что M_i и любая точка ее поляры делят точки кривой гармонически, а т.к. $(M_i P M_i' M_i')=-1$, то поляра проходит чере P

в) Для точек N-точек на кривой и на прямой одновременно поляры тоже проходят через точку P. Ибо, с одной стороны, точки N суть точки касания прямых, проведенных из P-полюса, если p-поляра, а с другой она же (NP) суть поляра точки N.

с) Для точек S_i - вне кривой, но на прямой, поляра проходит через А и В, но АВ пройдет через P ибо $(ABCP)=-1$ по условию, а именно, P-суть полюс прямой p.

Сопряженные точки и сопряженные прямые.

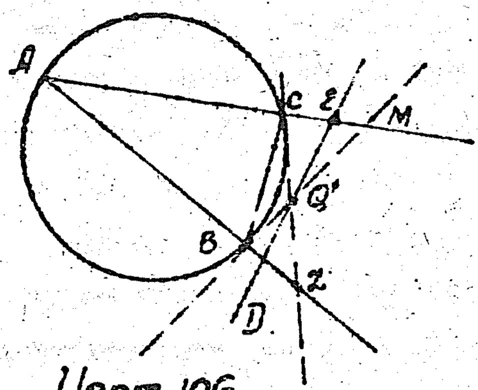
Точки А и В называются сопряженными, если поляра точки А проходит через В, а поляра точки В проходит через А. Достаточно поляре точки А пройти через точку В, как безусловно поляра точки В пройдет через А, ибо любая точка поляры а имеет поляру, проходящую через точку А.

Прямые А и В называются сопряженными, если одна из них (а) проходит через полюс В другой (в), а (в) проходит через полюс А прямой (а). Опять, достаточно того, чтобы (а) проходила через полюс В, чтобы (в) прошла через полюс А, ибо для любой точки прямой (а), как полюса, прямая пройдет через точку В - полюс этой прямой (а).

Введением понятия сопряженных прямых и точек, значительно сокращается терминология. Так свойства полярного треугольника выражаются след. образом.

1) Если на прямой имеем два пунктуала сопряженных точек, то они проективны между собой.
2) Если имеем два пучка сопряженных прямых с одной вершиной, то они проективны.
3) Если из некоторой точки провести две касательные к кривой второго порядка, то они гармонически делят две сопряженные прямые, проходящие через эту точку.

<u>Теорема</u>. Прямая, сопряженная с одной из сторон вписанного в кривую второго порядка тр-ка, пересекает две другие в точках сопряженных. Дан тр-к ABC (чер. 106) и прямая ED, сопряженная CB. Доказать, что т. E сопряжена с точкой D.

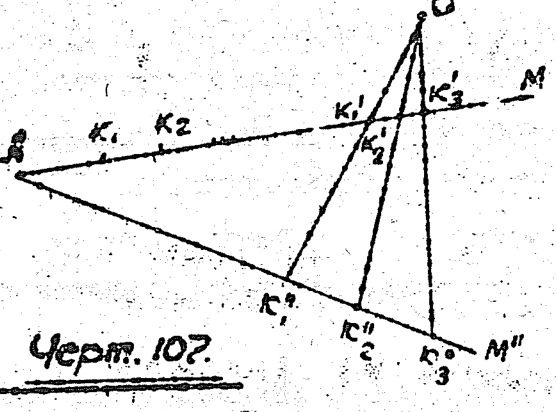


Черт. 106.

Очевидно, сопряженная прямая ED прямой CB проходит через полюс CB - точку Q'.

Построим угол CAB как MAM'' отдельно (черт. 107) для облегчения рассуждений.

Пусть на сторонах $AC \equiv AM$, $AB \equiv AM''$ находятся сопряженные точки (черт. 107) т.е. имеем два сопряженных пунктуала: $K_1, K_2, K_3 \dots$ и $K_1'', K_2'', K_3'', \dots$ так, что поляра точки K_i проходит через K_i'' и наоборот. Если O суть полюс прямой AM, то с одной стороны поляры точек K_1, K_2, $K_3, \dots$ проходят через этот полюс O; с другой стороны, т.к. точки K_1'', $K_2'', \dots$ прямой AM'' сопряжены с точками $K_1, K_2, \dots$ то поляры проходят и через первые. Но из свойств полярного треугольника следовало, что коль скоро K начнет



Черт. 107.

двигается по прямой АМ (поляре точки О), поляра точек K_i, проходя через О пересекает АМ в точках $K_1', K_2', \ldots$ таких, что

$(K_1 K_2 K_3 \ldots) \barwedge (K_1' K_2' K_3' \ldots)$, но, как было сказано поляры K_i проходят и через K_i'', а потому

$(K_1' K_2' K_3' \ldots) \doublebarwedge (K_1'' K_2'' K_3'' \ldots)$, а также

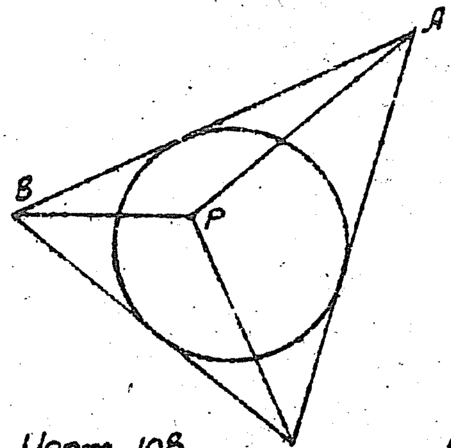
$(K_1' K_2' K_3' \ldots) \barwedge (K_1'' K_2'' K_3'' \ldots)$

Следовательно: $(K_1 K_2 K_3 K_4 \ldots) \barwedge (K_1'' K_2'' K_3'' K_4'' \ldots)$

Но точка пересечения носителей сама себе отвечает $A \equiv A'$ и значит $(K_1 K_2 K_3 K_4 \ldots) \doublebarwedge (K_1'' K_2'' K_3'' K_4'' \ldots)$, а потому прямые, их соединяющие (соответственные точки), пересекаются в точке - центре перспективы. Этой точкой служит О'- полюс прямой СВ. В самом деле. Сопряженная точка точке В с одной стороны лежит на прямой АС, а с другой - поляра точки В проходит через эту точку М. А т.к. точка В лежит на кривой, то ее поляра суть касательная к кривой в точке В, так что МВ, являясь полярой, одновременно соединяет две сопряженные точки на АС и АВ, а потому на ней располагается центр перспективы.

Тоже можно сказать о другой паре сопряженных точек С и L. Следовательно О' лежит на пересечении касательных в В и С к кривой. Но если ВС-поляра, а В и С лежит на кривой, то касательные в В и С к кривой определят полюс: Следовательно полюс ВС - О' совпадает с центром перспективы. Всякая прямая, проходящая через центр перспективы О' определит на АС и АВ сопряженные точки, как и всякая прямая, соединяющая сопряж. точки пройдет через О', как было доказано.

Понятием взаимным предыдущей теореме является следующее: взят описанный треугольник АВС (чер. 108) одна из вершин (В) сопряжена с некоторой точкой Р. Тогда эта точка с вершинами А и С определяет две соответственно РА и РС сопряженные прямые.



Черт. 108.

Ее справедливость вытекает из самого принципа двойственности.

Диаметральные свойства кривых.

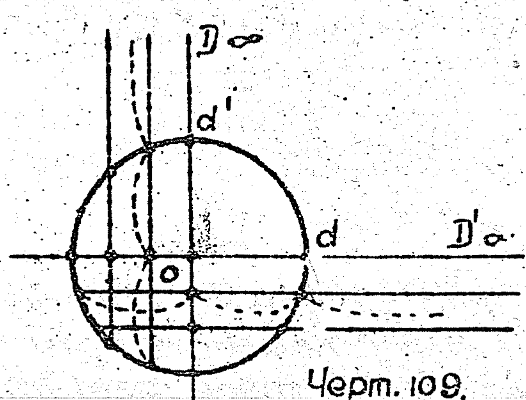
а) Диаметр есть поляра бесконечно-удаленной точки. Если поляра p уходит в бесконечность, т.е. является бесконечно удаленной прямой, то поляра каждой ее точки проходит через одну и ту же точку-полюс бесконечно удаленной прямой, - являясь диаметрами кривой. Точка же, через которую проходят все диаметры суть центр симметрии кривой. Центр - полюс ∞ уд. прямой.

в) Кривые делятся по числу бесконечно удаленных точек.

1) Гипербола имеет две бесконечно удаленные точки.
2) Парабола имеет одну такую точку;
3) Эллипс ни одной.

Парабола характерна тем, что она касается бесконечно удаленной прямой, а потому полярой бесконечно удаленной точки является касательная бесконечно удаленная и центр параболы потому лежит на ∞, наконец, все диаметры параболы параллельны ибо пересекаются в ∞, как в центре.

с) Сопряженными диаметрами являются те, которые суть сопряженные. Это определение полностью совпадает с определением в аналитической геометрии этого понятия. В самом деле. Если d сопряжен с d', то полюс D лежит на прямой d' в ∞, а полюс D'_∞ лежит на прямой d в ∞; но отсюда же следует, что точки диаметра d являются посредине между точками пересечения кривой параллельными, проведенными из D_∞, к диа-

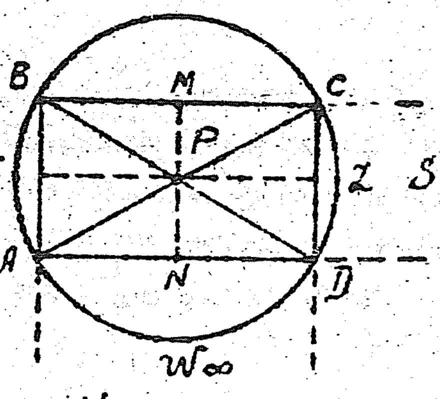


Черт. 109.

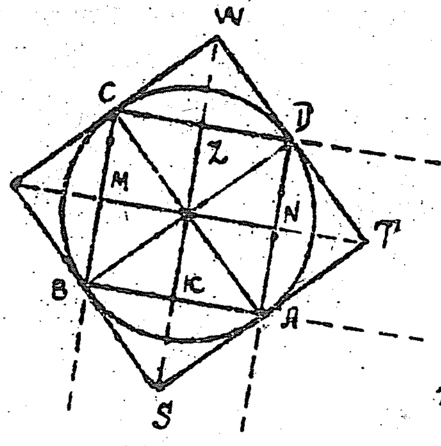
метру d', а т.к. D_∞ лежит на d', то параллельные прямые суть хорды параллельные d', что есть в аналитическом определении; к тому же точки d делят эти хорды пополам, ибо концы хорд, точки d и D_∞ суть гармонические.

d°. Если взять кривую второго порядка со вписанным параллелограммом, то диагонали последнего пересекаются в центре кривой. Действительно, если P-полюс, (черт. 110) то поляра определяется точками S_∞ и W_∞, т.е. поляра отнесена в бесконечность, как известно, полюс такой прямой суть центр кривой.

Прямые MN, KL, соединяющие середины противоположных сторон проходят через точку P ибо они являются сопряженными диаметрами: $BA \parallel CD \parallel MN$, как параллельные хорды, а KL их делит пополам; также $BC \parallel AD \parallel KL$, а MN их делит пополам. А отсюда следует, что KL и MN - диаметры.



Черт. 110.



Черт. 111.

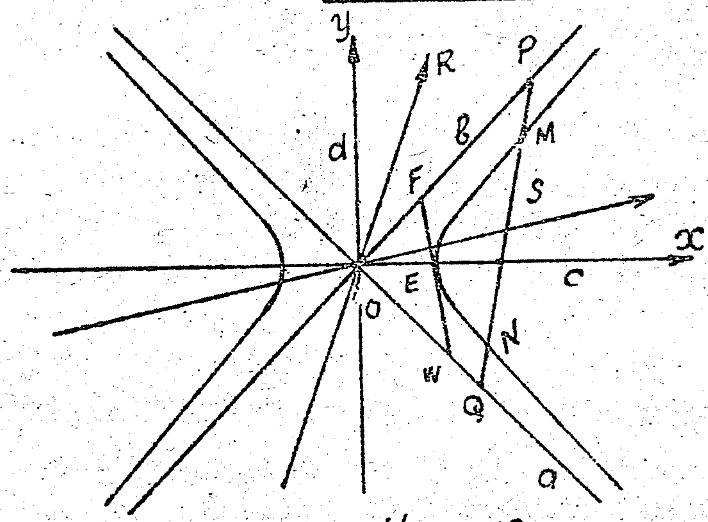
e°. Если в вершинах вписанного в кривую 2^го^ порядка параллелограмма провести касательные к кривой, то описанный четырехугольник суть параллелограмм. (чер. 111).

По теореме Паскаля стороны вписанного четырехугольника пересекаются на прямой, где пересекаются касательные в противоположных вершинах; но $CB \parallel DA$, как и $CD \parallel BA$, а потому Паскалева прямая отнесена в бесконечность. Отсюда непосредственно следует, что $UW \parallel ST$, $US \parallel WT$;

f°. Легко показать, что диагонали $UWTS$ пересекаются в центре кривой, т.е. что U

равно как и T лежит на продолжении прямой MN, а также W и S лежат на продолжении прямой ZK, проходящих через центр. В самом деле. Поляра точки U есть прямая BC, а полюс BC - U, т.к. UC и UB - касательные к кривой, а BC прямая, проходящая через B и C - точки касания. Но полюс прямой MN лежит на BC в ∞ ибо M лежит посредине между B и C, а BC, M, и ∞ гармонические. А если U - полюс BC, то поляры всех точек BC проходят через U, а потому и MN проходит через U, что и требовалось. Так же можно рассуждать относительно точек W, T, S. Тем теорема доказана.

Некоторые свойства гиперболы и параболы.



Черт. 112.

а) Гипербола.

1°. Асимптотой называется касательная к кривой в ее бесконечно удаленной точке.

Гипербола имеет две асимптоты ибо она имеет две бесконечно удаленные точки. Легко видеть, что асимптоты гиперболы проходят через ее центр O. В самом деле: асимптота является полярой бесконечно удаленной точки, как касательная к кривой в этой точке, а потому замечание верно: асимптота есть диаметр.

2°. Оси координат, являясь сопряженными диаметрами, а потому вообще сопряженными, разделяют касательные к кривой (в данном случае асимптоты) гармонически, как это было указано в свойствах полярного тр-ка.

Но сопряженные прямые взаимно перпендикулярны, а потому <u>они суть биссектрисы углов, образованных асимптотами</u>. Действительно: (черт. 112).

$$(abcd)=\frac{\sin(\widehat{ac})}{\sin(\widehat{bc})}:\frac{\sin(\widehat{ad})}{\sin(\widehat{bd})}=-1 \quad \text{но } \sin(\widehat{ad})=\cos(\widehat{ac}) \text{ и } \sin(\widehat{bd})=\cos(\widehat{bc})$$

т.е. имеем: $tg(\widehat{ac}):tg(\widehat{bc})=-1$ отсюда $tg(\widehat{ac})=tg(\widehat{cb})$ или $(\widehat{ac})=(\widehat{cb})$. Это и надо.

Следовательно, если из четырех гармонических лучей одна пара представляет собой лучи взаимно перпендикулярные, то они суть биссектрисы углов, образуемых другой парой лучей.

3°. Отрезки между точками пересечения любой секущей с кривой и асимптотами равны между собой т.е. если PQ некоторая секущая, то надо доказать, что $PM = NQ$.

Возьмем два сопряженных диаметра OR и OS так что один из них параллелен нашей секущей: $OR \parallel PQ$. Но тогда диаметр, сопряженный OR, разделит хорду NM пополам, как хорду, параллельную своему сопряженному диаметру, т.е. $\overline{MS}=\overline{SN}$;

Но лучи OQ, OP, OS, OR гармонические, ибо OP и OQ есть касательные к кривой из точки O, а OS и OR сопряженные прямые; а т.к. одна точка ушла на ∞ ($OR \parallel PQ$), то S лежит посредине между P и Q, т.е.

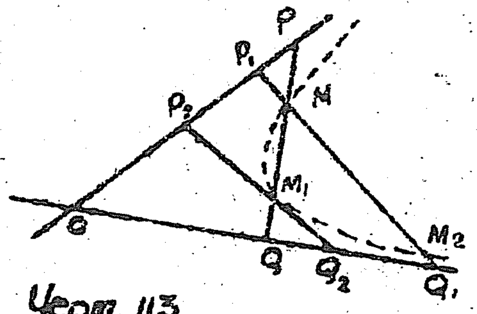
$$\overline{SP}=\overline{QS}.$$

Отсюда же следует, что: $\overline{SP}-\overline{SM}=\overline{QS}-\overline{NS}$,

или что $\overline{PM}=\overline{NQ}$, как и утверждалось.

Когда секущая обратится в касательную, то отрезки касательной между точкой касания и точками пересечения касательной с асимптотами равны между собой. Основываясь на последнем замечании можно по заданным асимптотам и точке M гиперболы, построить самую гиперболу. Через M проводим некоторую прямую PQ или $P'Q$, от Q

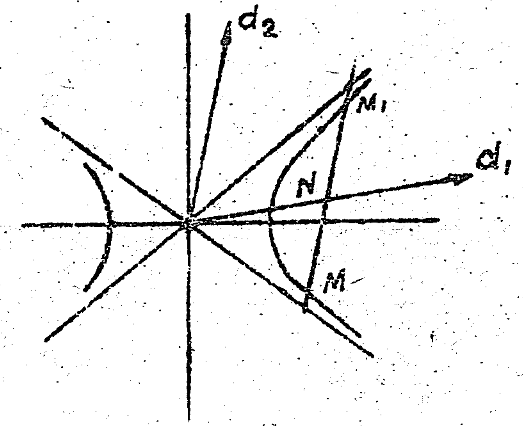
откладываем $QM_1 = PM$; $QM_1 = P_1M$ etc (черт. 113).



Черт. 113.

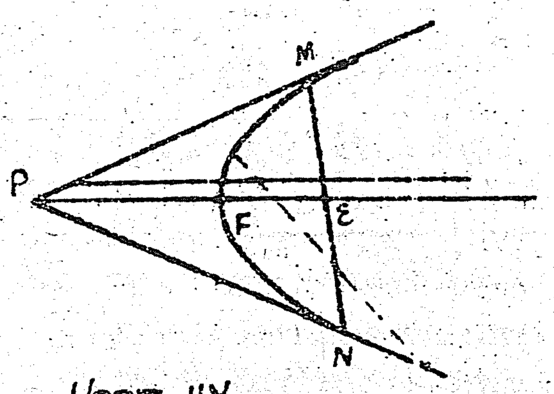
Асимптоты гиперболы сами себе сопряжены.

Асимптоты гиперболы сами себе сопряжены, т.е. прямой сопряженной для каждой из асимптот является также асимптота.



Действительно: пусть d_1 и d_2 - сопряженные диаметры. d_1 делит MM_1 - хорду, параллельную другому диаметру - пополам. Когда эта хорда начнет поворачиваться по часовой стрелке, то середина ее уйдет на ∞, а потому $d_1 \parallel MM_1$, но также и $d_1 \parallel d_2$. Кроме того, т.к. d_1 и d_2 имеют общую точку - центр кривой, то d_1 и d_2 совпадают. А т.к. они выродились в асимптоту, то и получаем, что асимптота сопряжена сама с собой.

1°. Пусть из некоторой точки P (черт. 114) вне кривой проведены две касательные: PM и PN. Через середину MN и P проведена прямая. Тогда: Точка параболы (F) делит отрезок между точкой P и серединой хорды (ε), проведенной через точки касания M и N касательных PM и PN пополам, т.е. $PF = F\varepsilon$.



Черт. 114.

P - полюс MN, поэтому поляра каждой точки ее проходит через P, в том случае и $P\varepsilon$ есть поляра одной из точек прямой MN, а т.к. $P\varepsilon$ делит хорду MN пополам, то полюс $P\varepsilon$ лежит на бесконечности т.е. $P\mathcal{E}$ - является диаметром кривой. Но диаметры пересекают кривую в конечной (F) и бесконечной точках, а тогда из $(P\mathcal{E}F\infty)=-1$ следует, что F лежит посредине между P и $\mathcal{E}$, т.е.

$$PF = F\mathcal{E}.$$

2°. Подобные пунктуалы.

Будем параболу получать как кривую 2го класса, с помощью двух проективных, но не перспективных пунктуалов. Чтобы найти точку A', соответствующую A, надо из A провести касательную к кривой до пересечения с носителем. Очевидно касательная в бесконечно удаленной точке параболы дает на носителях бесконечно удаленные соответственные точки D_∞ и D'_∞.

Теорема: Два пунктуала проективных подобны между собой, если бесконечно удаленная точка одного пунктуала имеет бесконечно удаленную точку себе соответствующую на другом пунктуале. Действительно:

$(ABCD) \barwedge (A'B'C'D')$ если D и $D' \to \infty$, то

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD_\infty}{BD_\infty} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'_\infty}{B'D'_\infty}; \to \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$ т.е.

простые отношения равны. А это и есть подобие. Верно и обратное: если пунктуалы подобны, то бесконечно удаленный элемент служит инвариантом.

Таким образом парабола образуется двумя подобными пунктуалами, но не перспективными.

Если пунктуалы будут перспективны, то прямые их соответственные точки соединяющие, будут параллельны, т.к. касательная в бесконечно удаленной точке отнесена в ∞, и не может иметься поэтому центра перспективы на конечном расстоянии.

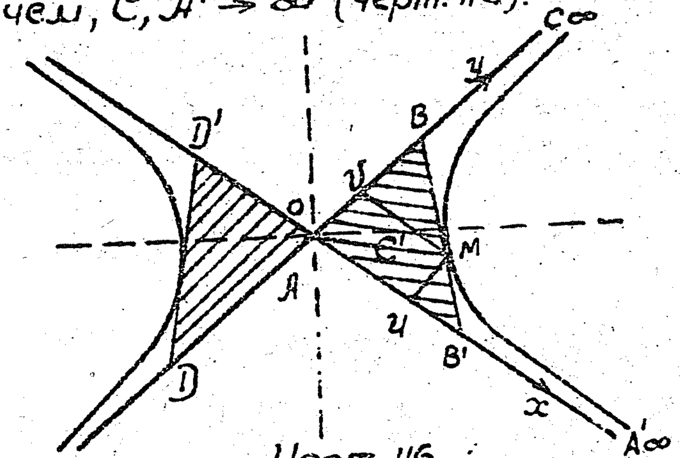
Вывод уравнений кривых 2-го порядка методами высшей геометрии.

Докажем, что кривые второго класса (а потому 2-го порядка), построенные методами высшей геометрии суть одно и тоже, что и кривые второго порядка в аналитической геометрии, т.е. что первые имеют такое же аналитическое выражение, как и вторые. Этим мы докажем, что кривые второго порядка высшей геометрии не содержат таких, которые бы отсутствовали в совокупности кривых второго порядка в аналитике.

Покажем, это для гиперболы.

Теорема. Площади треугольников, образованных асимптотами и касательными, проведенными в любой точке, гиперболы равны между собой.

Из определения кривой 2-го класса $(ABCD)=(A'B'C'D')$, причем, $C, A' \to \infty$ (черт. 116).



Черт. 116.

Отсюда

$$\frac{\bar{AC}}{\bar{BC}} : \frac{\bar{AD}}{\bar{BD}} = \frac{\bar{A'C'}}{\bar{B'C'}} : \frac{\bar{A'D'}}{\bar{B'D'}}$$

но $\dfrac{\bar{AC}}{\bar{BC}} = \dfrac{\bar{A'C'}}{\bar{A'D'}} = 1$, поэтому

$$\frac{\bar{B'D'}}{\bar{B'C'}} = \frac{\bar{BD}}{\bar{AD}};$$

Составляя производные пропорции, получаем:

$$\frac{\bar{B'D'} - \bar{B'C'}}{\bar{B'C'}} = \frac{\bar{BD} - \bar{AD}}{\bar{AD}}; \to \frac{\bar{C'D'}}{\bar{B'C'}} = \frac{-\bar{AB}}{\bar{AD}};$$

или $C'D' \cdot AD = B'C' AB \to AB \cdot AB' = AD \cdot AD' \ldots$ (I)

Если угол между асимптотами φ, то

$$\frac{1}{2} AB \cdot AB' \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} AD \cdot AD' \cdot \sin\varphi.$$

Но это равносильно тому, что: пл. $\Delta ABB'$ = пл. $\Delta ADD'$.

Пусть асимптоты являются осями координат ox и oy. BB' делится точкой M пополам, как было доказано в теореме об отрезках касательных.

$MV \parallel OX$, и потому MV есть средняя линия тр-ка ABB' и следовательно $OV = VB$. Тоже можно сказать о прямой MU, причем также $OU = UB'$. Но $OV = Y$, а $OU = x$. Так что $OB = AB = 2y$, $OB = AB' = 2x$.

Тогда из равенства (1) имеем: $2x \cdot 2y = a^2 = \text{const}$.

отсюда $$xy = c^2, \text{ где } c = \frac{a}{2}.$$

Но это и есть уравнение гиперболы в аналитической геометрии, отнесенной к асимптотам. Следовательно понятие гиперболы, как кривой 2$^{\text{го}}$ порядка в высшей геометрии совпадает с понятием соответствующим в аналитической геометрии.

Покажем, что это имеет место и в случае эллипса. Прежде, чем к этому перейти, докажем следующую лемму.

<u>Лемма.</u> Если имеем две параллельные касательные и две касательные пересекающие предыдущие две (к эллипсу), то произведения отрезков параллельных касательных, прилежащих к одной и к другой из секущих касательных равны.

Эллипс будем образовывать путем двух проективных пунктуалов.

$$(ABCD) = (A'B'C'D') \text{ (черт. 117)}.$$

Но D и $B' \to \infty$. тогда: $$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}}$$

и т.к. в этом случае: $$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'D'}} = 1,$$

то $$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'D'}} \to \frac{\overline{AC} - \overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'} - \overline{A'D'}}{\overline{A'D'}};$$

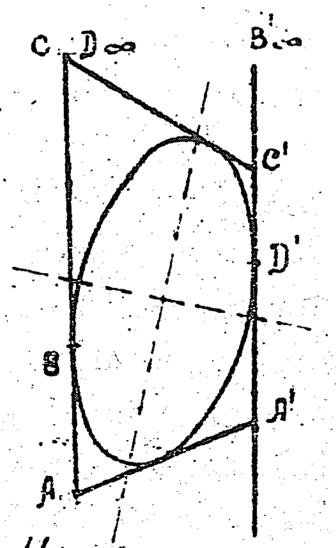
или $$\frac{AB}{BC} = \frac{D'C'}{A'D'}; \to \underline{AB \cdot A'D' = BC \cdot D'C'}$$

это и требовалось доказать.

Опишем около эллипса треугольник так, чтобы пара сторон пересекалась на бесконечности, т.е. пара сторон - суть параллельные касательные.

По теореме Брианшона прямые, соединяющие вершины описанного треугольника с точками касания противоположеных сторон, проходят через одну и туже точку К (черт. 118). Следовательно $MS \perp AB$, - где М - точка касания проходит через точку К. Но кроме того, точка К лежит посредине между М и S. Действительно, заштрихованный четырехугольник есть четырехугольник Штаудта, поэтому точки M, S, K и ∞ удаленная точка - гармонические, а отсюда и следует утверждение.

Заметим еще, что на основании предыдущей леммы имеем соотношение:

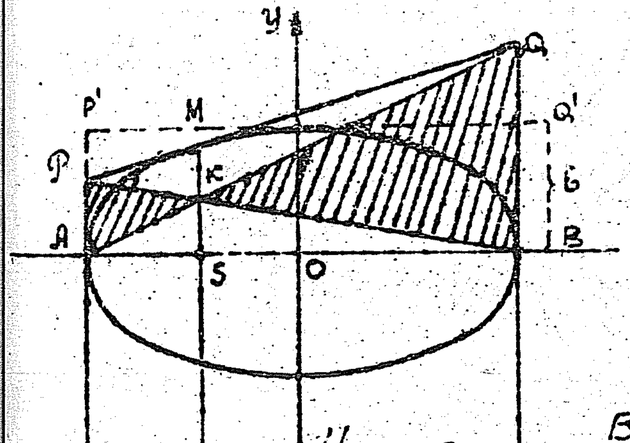


Черт. 117.

$$AP \cdot BQ = b^2 = const.$$

что $AP.BQ = b^2$ видно из того, что касат. PQ может быть в положении $P'Q'$ с сохранением результата, а тогда $AP' = BQ' = b$.

Треугольники: APB и SKB подобны, а потому имеем:



Черт. 118.

$$\frac{AP}{SK} = \frac{AB}{SB} \rightarrow$$

$$\frac{AP}{\frac{y}{2}} = \frac{2a}{a-x}; \rightarrow$$

$$\longrightarrow AP = \frac{ay}{a-x};$$

Треугольники: AQB и ASK подобны, а потому имеем:

$$\frac{BQ}{SK} = \frac{AB}{AS} \rightarrow \frac{BQ}{\frac{y}{2}} = \frac{2a}{a+x} \rightarrow$$

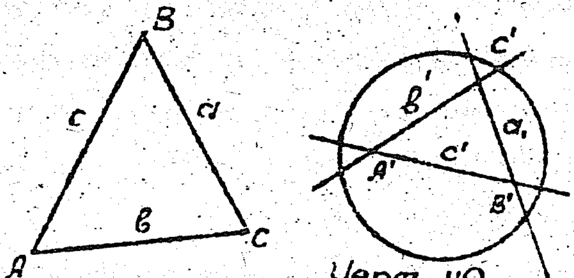
$$BQ = \frac{ay}{a+x}; \quad \left(\begin{matrix}\text{здесь} \\ [a-(-x)] = a+x\end{matrix}\right).$$

Отсюда $AP.BQ = \frac{a^2y^2}{a^2-x^2} = b^2$; или $\frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 - x^2$;

Так что получаем: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$;

Парабола же суть вырождение эллипса, когда один из фокусов уходит в ∞, поэтому утверждение об эквивалентности понятий кривых второго порядка в высшей геометрии и в аналитической геометрии оправдывается.

Преобразование взаимных поляр:



Черт. 119.

Пусть имеем окружность и какую либо прямолинейную фигуру, хотя-бы треугольник. Найдем полюса сторон тр-ка относительно данного круга.

Пусть это A', B', C' (черт. 119). Трехсторонник определяет собой трехточник $A'B'C'$. Поляры же вершин данного треугольника определят трехсторонник. Преобразованные элементы данного теугольника, как поляры и полюса относительно данной окружности дают треугольник, также полный, соответственно состоящий из взаимных образов. Что поляры вершин ABC - $a', в', c'$ пройдут через точки $A'B'C'$ верно; действительно: Т-к C' - полюс поляры c, то поляра любой точки C, пройдет через C', т.е. поляры точек A и B суть a' и $в'$ пройдут через точку C'. С другой стороны, т-к A' - полюс поляры a, то поляра любой точки a пройдет через A', т.е. поляры точек B и C суть $в'$ и c' пройдут через точку A'. Наконец на том же основании поляры A и C суть a' и c' пройдут через B'. Так что a' проходит через B' и C', $в'$ проходит через A' и C', c' - через A' и B'. Это и требовалось. Итак: Трехточник преобразуется в трехсторонник, трехсторонник - в трехточник; полный треугольник - в полный треугольник, стороны которых и вершины суть соответственно сопряженные.

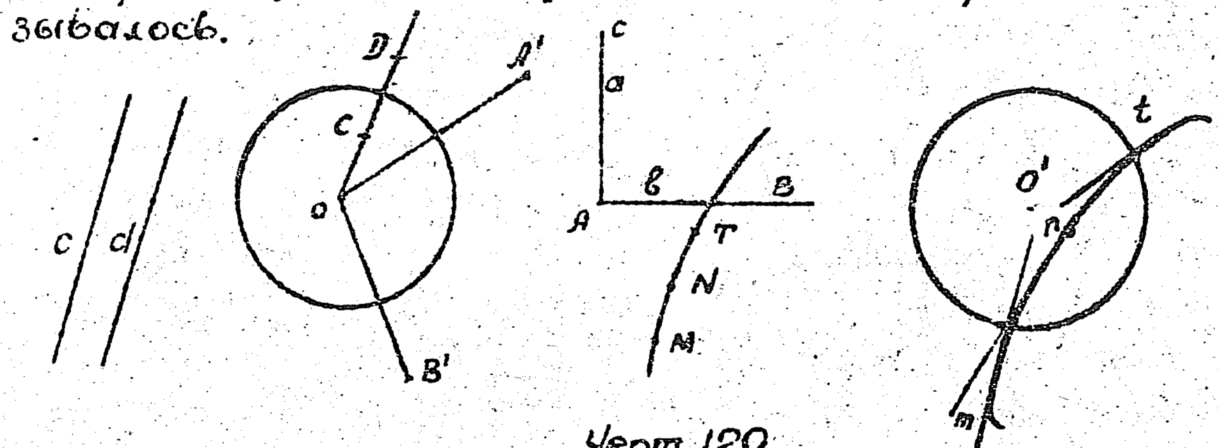
Три точки лежащие на одной прямой, преобразуются в три поляры, проходящие через одну точку.

Таким образом взаимное преобразование поляр дает взаимные образы.

Две параллельные прямые преобразуются относительно данного круга в две параллельные точки; последние те которые лежат на прямой, проходящей через центр основного (данного) круга.

Две взаимноперпендикулярные прямые преобразуются относительно данного круга в две „взаимноперпендикулярные" точки; последние те, которые с центром основного круга определяют взаимноперпендикулярные прямые.

Такое расположение точек при параллельных прямых объясняется так: раз прямые параллельны, то полярой их точки пересечения служит диаметр, а значит полюса всех прямых пучка с носителем в ∞ располагаются на поляре этого носителя, т.е. на диаметра. При перпендикулярных прямых точки так потому расположены, что поляра всегда перпендикулярна прямой, соединяющей полюс с центром, что доказывалось.



Черт. 120

Совокупность точек на кривой преобразуется в совокупность поляр, огибающая которых суть кривая.

Криволинейный 2^го порядка носитель точек, преобразуется в криволинейный 2^го класса носитель поляр.

Преобразование происходит по формулам:

$$x_1 = \frac{a\xi + b\eta + c}{g\xi + h\eta + k}; \quad y_1 = \frac{d\xi + e\eta + f}{g\xi + h\eta + k};$$

Отдел IV.

Проективные пунктуалы и пучки 2го порядка.

a°. Пусть имеем две различных кривых второго порядка, образованных некоторыми проективными порознь парами пучков с вершинами S и S', и $\bar{S}$ и $\bar{S}'$; Кривые второго порядка есть носители пунктуалов 2 го порядка. Два пунктуало 2 го порядка проективны, если пучки их образующие проективны, т.е. если:

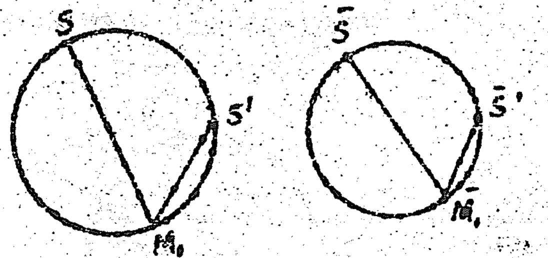
$$SM_1, SM_2, SM_3 \ldots \barwedge \bar{S}\bar{M}_1, \bar{S}\bar{M}_2, \bar{S}\bar{M}_3, \ldots$$

и очевидно: $$S'M_1, S'M_2, S'M_3 \ldots \barwedge \bar{S}'\bar{M}_1, \bar{S}'\bar{M}_2, \bar{S}'\bar{M}_3, \ldots$$

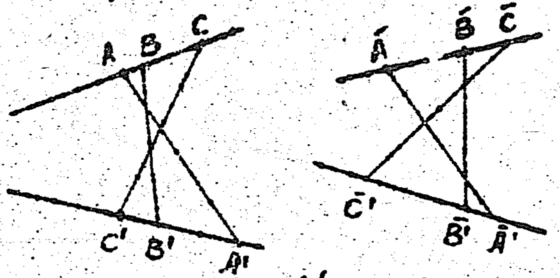
b°. Взаимным понятию двух проективных пунктуалов есть понятие двух проективных пучков. Носителем пучка второго порядка является кривая 2 го класса. Два пучка второго порядка проективны, если образующие ~~их~~ пунктуалы проективны, т.е.

если: $ABCD \ldots \barwedge \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \ldots$, а

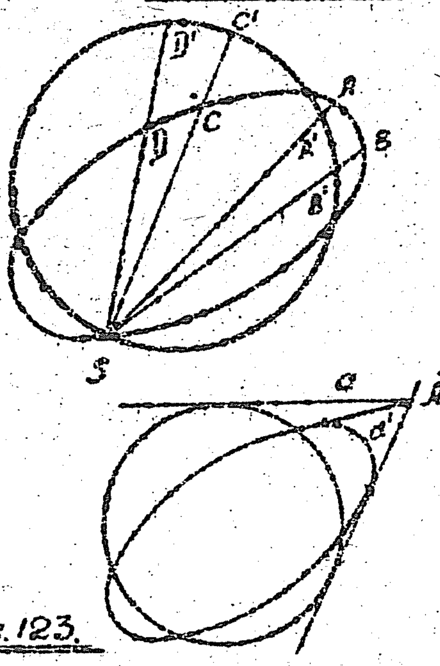
также $A'B'C'D' \barwedge \bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'\bar{D}' \ldots$



Черт. 121



Черт. 122.

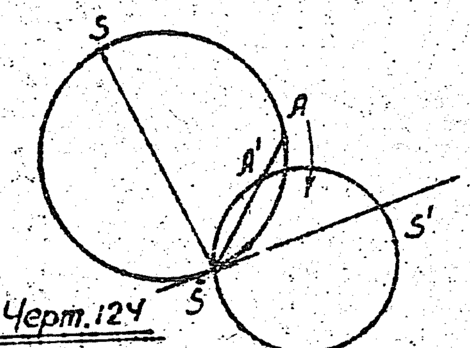


Черт. 123.

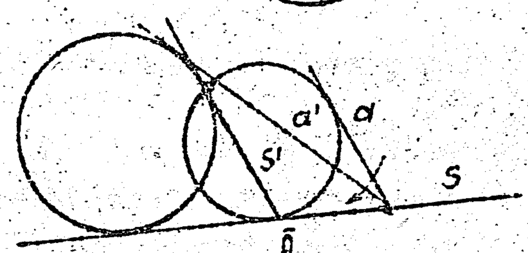
c°. Два пунктуала перспективны, если у них соответственные точки лежат на прямых, сходящихся в точке, лежащей на обоих кривых; иначе, два пунктуала перспективны, если же их соответственные точки лежат на лучах пучка, имеющего вершину в точке, общей для обоих кривых. Можно разрушить перспективность, оставляя проективность пунктуалов, как было и для пунктуалов первого порядка

d° Два перспективных пучка второго порядка те, у которых соответственные лучи пересекаются в точках, лежащих на общей касательной к обоим носителям.

Аналогично, как и при рассмотрении пучков и пунктуалов первого порядка, существуют и здесь гармонические лучи и точки. Положим, что мы имеем два перспективных пунктуала 2^го порядка. Тогда, чтобы определить положение соответствующей точки A' (или A) на одном пунктуале, по заданной точке A (или A') на другом, следует данную точку соединить с вершиной лучей, на которых лежат по опред. соотв. точки. Если A будет подвигаться к $\bar{S}$, и совместится с нею, (черт. 124) то соотв. точка на другом пунктуале определится точкой пересечения касательной в точке $\bar{S}$ с носителем. Касательная проводится к носителю, на котором лежит выбираемая точка.



Черт. 124



Черт. 125.

Итак, общей точке двух перспективных пунктуалов отвечает точка общая кривой и касательной. В случае двух перспективных пучков, общему лучу (т.е. общей касательной) отвечает касательная, проведенная из точки касания одной кривой к соответствующей (черт. 125).

Действительно, если луч a будет скользить, то точка A' будет уходить в точку $\bar{A}$-касания, и естественно S перейдет в S'.

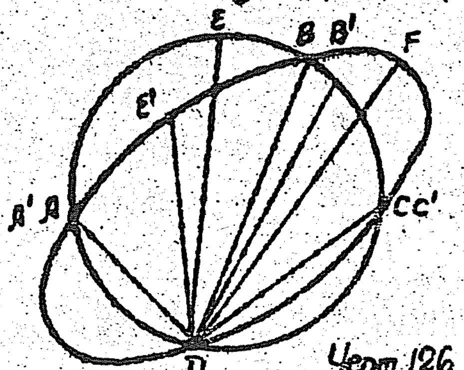
Двойные элементы.

Очевидно, точки, общие обеим пунктуалам могут быть двойными точками; отсюда не следует, правда, что каждая общая точка является точкой двойной.

Положим, что мы имеем 4 точки пересечения и что все они двойные (черт. 126). В одной, хотя бы в D, возьмем вершину пучков, опирающихся на соответственные точки. Они проективны:

$$DA, DE, DB, DC \ldots \barwedge DA' DB' DE' DC' \ldots$$

Но три луча друг с другом совпадают, а тогда эти пучки конгруентны, т.е. пунктуалы перспективны. Отсюда следует, что D отвечает точка лежащая на касательной в D и на взаимной кривой одновременно.



Черт. 126.

Но по условию D и D' совпадают, следовательно касательная в D должна быть касательной к обоим кривым сразу. Имеем таким образом 4 общих точки A, B, C, D и общую для кривых касательную, а в таком случае кривые совпадают.

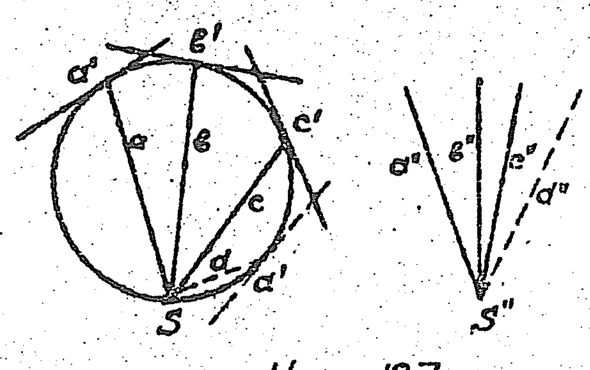
Если два пунктуала имеют 4 двойных точки, то они конгруентны, т.е. не может быть > 3 двойных точек.

Понятие о кривых третьего порядка.

В аналитической геометрии кривые третьего порядка определялись как геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют общему уравнению:

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 3Fy^2 + 6Gxy + 6Hx + 6Jy + K = 0$$

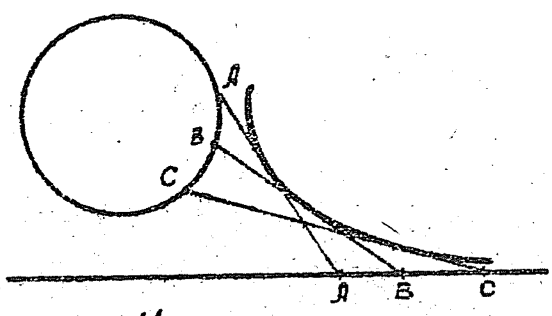
В высшей геометрии кривая третьего порядка получается следующим образом: берется пучок второго порядка и ему проективный пучок первого порядка. Поясним это соотношение: пучок $a', b', c', d', \ldots \barwedge a'', b'', c'', d''$, (черт. 127) если пучок с вершиной S, опирающийся на точки касания лучей $a', b', c', \ldots$ проективен пучку $a'', b'', c'', \ldots$



Черт. 127.

Кривая 3го порядка есть геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков: одного второго, другого первого порядков.

Кривая третьего класса есть огибающая прямых, соединяющих соответственные точки двух проективных пунктуалов: одного $2^{го}$ порядка и другого первого порядка (черт. 128). Если отбросить вырождения кривых $2^{го}$ класса и $2^{го}$ порядка, то эти понятия совпадают. Не то в высшей геометрии для кривых третьего класса и третьего порядка. Эти понятия не совпадают не только при вырождении но и в общем смысле.



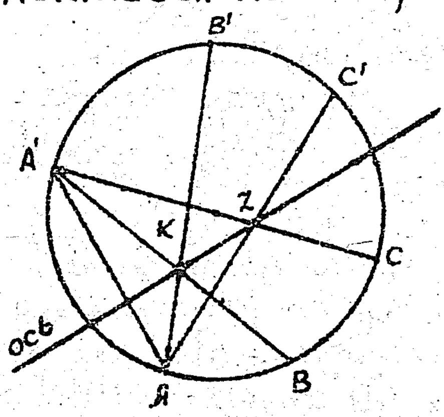
Черт. 128.

Наложенные пунктуалы второго порядка.

Пусть на кривой имеем два наложенных пунктуала проективных: $ABCD\ldots \barwedge A'B'C'D'\ldots$ (черт. 129). Возьмем точки A и A' за вершины пучков лучей, полученных соединением этих точек с $A', B', C', \ldots$ и A, B, C, D, соответственно. Очевидно пучки проективны:

$$AA', AB', AC', \ldots \barwedge A'A, A'B, A'C, \ldots$$

но один луч сам себе отвечает, следовательно рассматриваемые пучки перспективны, а потому точки пересечения соответствующих лучей пучков пересекаются в точках, лежащих на одной прямой - оси перспективы. Посмотрим, что это за прямая.

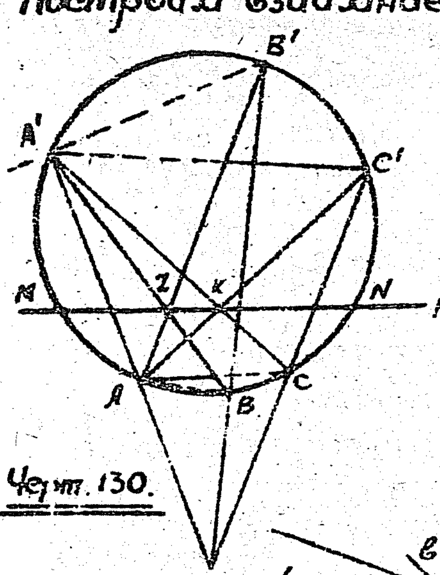


Черт. 129.

Так что $A'A$, и AA', $A'B$ и AB', $A'C$ и AC' пересекаются в точках на одной прямой p. Эту прямую можно рассматривать как поляру точки P; очевидно, что все лучи AA', BB', CC', … т.е. соответственные точки соединяющие, пройдут через точку P; что это полюс прямой p, видно из самого чертежа: каждая точка K, L, … именно принадлежит поляре точки P, при том единственной.

Двойные точки лежат на пересечении поляры (оси перспективы) с кривой,- носителем наложенных пунктуалов.

Построим взаимное понятие.

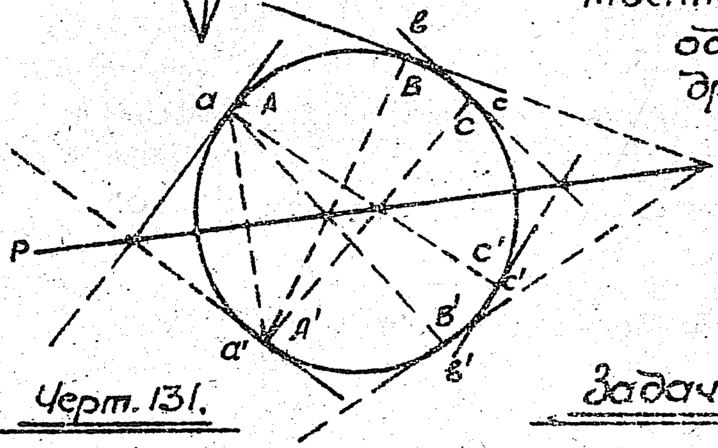


Черт. 130.

Имеем два наложенных пучка 2-го порядка проективных:

$a, b, c, d, \ldots \barwedge a', b', c', d', \ldots$

Очевидно они попарно пересекаются в полюсах прямых AA', BB'; ; Пересечения лучей a и a', b и b', c и c', следовательно лежат на одной прямой. Точки же пересечения лучей a и b', a' и b; и a', c, a и c', дают соответственно точки, лежащие на одной прямой в одном и другом случае. Эти прямые сходятся в полюсе P поляры p. Это выходит из самого принципа двойственности.

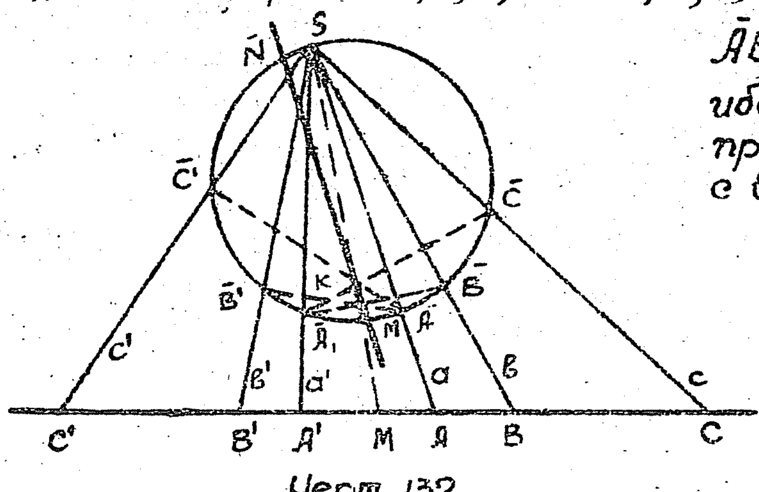


Черт. 131.

Задача. Найти двойные точки двух наложенных проективных пунктуалов первого порядка. Пусть имеем 2 наложенных пунктуала: $ABC\ldots \barwedge A'B'C'\ldots$ и возьмем вспомогательный круг, а на нем какую угодно точку S. Точку S соединяем с $A, B, C, \ldots$ и с $A', B', C' \ldots$ получая точки на круге: $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \ldots$ и $\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}', \ldots$ очевидно:

$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \barwedge \bar{A}'\bar{B}'\bar{C}' \ldots$

ибо они суть основания проективных пучков с вершиной S.

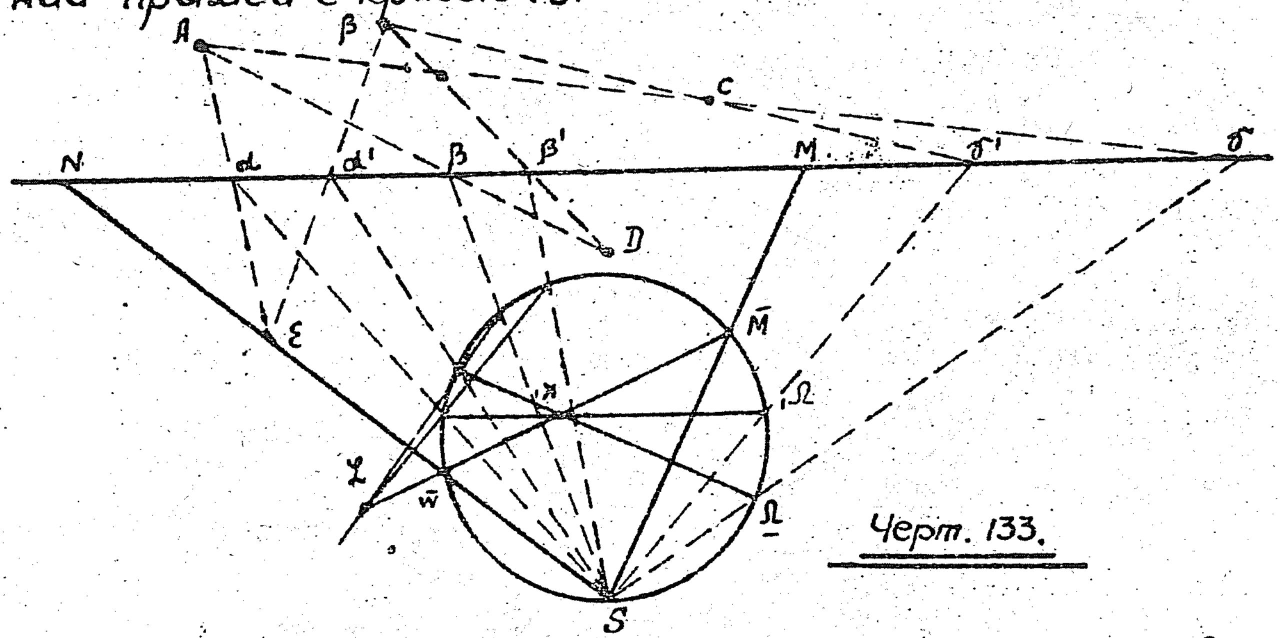


Черт. 132.

Если на прямой будет двойная точка, то на круге получим точку двойную. Так же наоборот, если будем иметь двойные точки на круге, то и на прямой их иметь будем. Найдем двойные точки на круге. Они суть точки пересечения оси перспективы с кривой, т.е. точки $\bar{M}$ и $\bar{N}$; Соединяя S соответственно с $\bar{M}$ и $\bar{N}$, получим на прямой двойные точки M и N; Рассмотренная задача является типичной задачей второго порядка - два решения.

<u>Задача 2.</u> Кривая задана пятью точками: $A, B, C, D, \mathcal{E}$. и дана прямая d. Определить точки пересечения данной прямой с заданной кривой 2го порядка. Сделаем точки A и B вершинами двух проективных пучков, образующих нашу кривую.

Соединим A с $\mathcal{E}$, D и C, получая на прямой d точки пересечения: α, β и γ..; затем также соединим B с $\mathcal{E}$, D и C, получая точки: α', β', γ',.. Очевидно $\alpha\beta\gamma...\bar{N}$ $\alpha'\beta'\gamma'...$ как точки, на которые опираются два проективных пучка. Тогда задача сводится к отысканию двойных точек пунктуалов наложенных. Действительно, двойные точки криволинейного пунктуала лежат на пересечении прямой с кривою. А это нам и необходимо.



Черт. 133.

Построение выполняется на основании предыдущей задачи. Следует отличать задачи второго порядка и первого порядка. Аналогичная задача тогда читалась: По пяти вершинам и некоторой прямой, проходящей через вершину найти одну 6ю вершину. То были задачи первого порядка. Это-второго порядка.

<u>Задача.</u> Построить такой треугольник вершины которого лежат на заданных прямых, а стороны проходят через заданные точки. Пусть на прямой ℓ (черт. 134) имеем пунктуал: $(A_1 A_2 A_3 ...)$

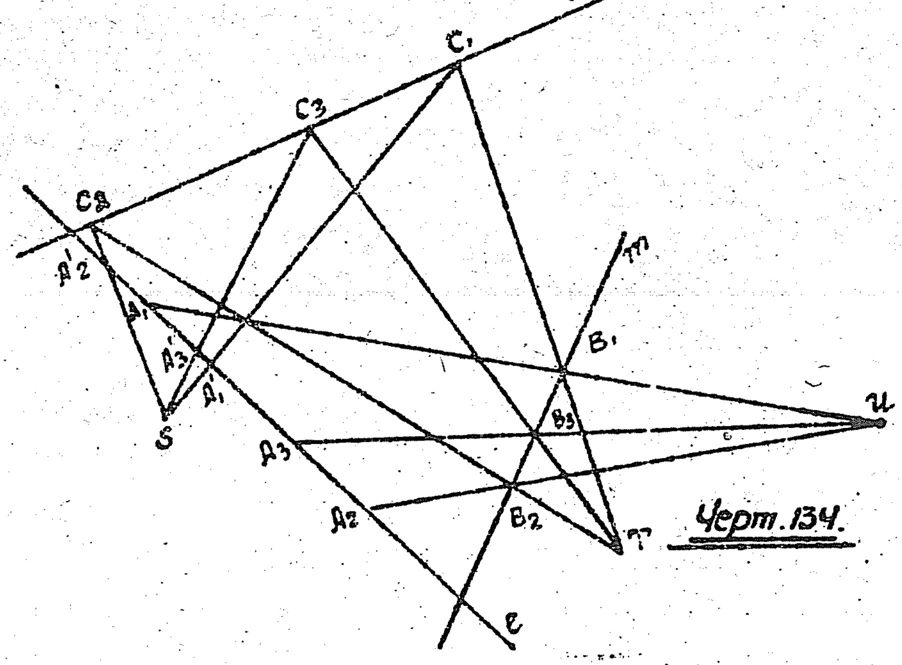
Спроектировав его на прямую m из точки U, получим на m пунктуал: $(B_1 B_2 B_3 \dots) \barwedge (A_1 A_2 A_3 \dots)$ т.к. они перспективны. Полученный пунктуал проектируем из точки T на прямую n, получая

$$(C_1 C_2 C_3 \dots) \barwedge (B_1 B_2 B_3) \barwedge (A_1 A_2 A_3 \dots)$$

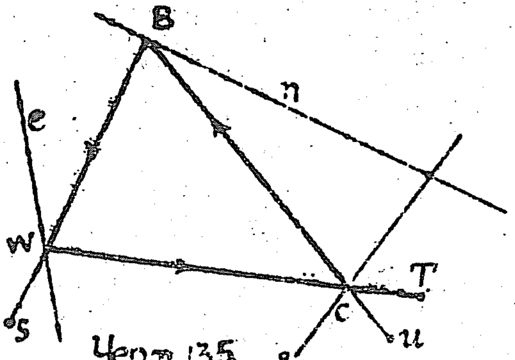
Затем пунктуал $(C_1 C_2 C_3 \dots)$ проектируем из точки S опять на прямую l. Таким образом на прямой l получаем два наложенных проективных пунктуала

$$(A_1 A_2 A_3 \dots) \barwedge (A_1' A_2' A_3').$$

Одна из проективных точек этого пунктуала является вершиной треугольника искомого. Необходимо, чтобы ей соответствующая была ею же, т.е. чтобы треугольник замыкался; следовательно необходимо присутствие двойных точек. Но по заданным трем парам соответственных точек можно с помощью заданного круга найти двойные точки. Получив одну из них, легко построить искомый треугольник.



Черт. 134.



Черт. 135.

Положим, (черт. 135) что имеем такую двойную точку W и точки STU, а также прямые m, n, e.

Соединив W с S до пересечения с n, получим точку B-вершину; соединив B с U, получим C-вершину. Конечно WC пройдет через T по построению.

Инволюционное соответствие.-

Понятие инволюционного соответствия имеет место только для наложенных пунктуалов, как первого, так и второго порядков. Характерно оно тем, что если (черт. 136) пары A и A', B и B', C и C',... находятся в инволюционном соответствии, то

$$\begin{cases}A\to A'\\ A'\to A\end{cases};\quad\begin{cases}B\to B'\\ B'\to B\end{cases};\quad\begin{cases}C\to C'\\ C'\to C\end{cases}.$$

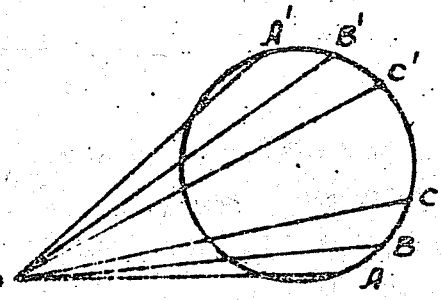
Лучи, соединяющие соответственные точки с O так-же инволюционны, но, как было раньше замечено, достаточно для проективных лучей чтобы пара из них находилась в инволюционном соответствии, чтобы все пары соответственных лучей также находились в инволюционном соответствии. Это же можно сказать и о наложенных пунктуалах 2го порядка, находящихся в инволюционном соответствии.

Построение двойных точек наложенных пунктуалов 2го порядка проективных требовало задания трех пар соответственных точек. Т.к. инволюционное соответствие задается двумя парами точек, то и для построения двойных точек их достаточно.

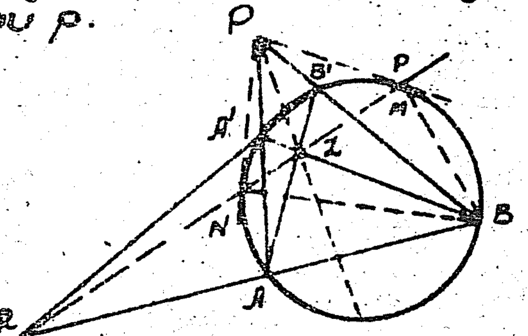
Пары A и A', B и B' находятся (черт. 137) в инволюционном соответствии. Причем, точки B и B' принадлежат одному и другому пунктуалам, как A и A', ибо

$$B\to B'$$
$$B'\to B.$$

поэтому: $(AA', B'A, AB, \dots) \barwedge (A'A, A'B, A'B')$; то они и перспективны т.к $AA'\equiv A'A$, а потому соответственные лучи пересекаются в точках на одной прямой, а прямые, соединяющие соответственные точки, сойдутся в точке P - полюсе прямой p.



Черт. 136

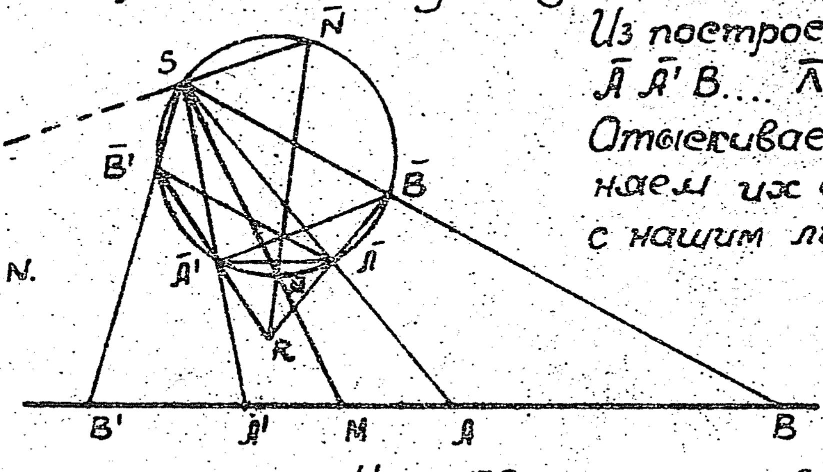


Черт. 137.

Двойными точками опять служат M и N, - точки пересечения кривой с поларой. M и N гармонически делят соответственные точки. Очевидно также, что MN гармонически делят точки R и L, ибо PL — поляра R. Отсюда же видно и первое, ибо BM, BN, BA', BA — лучи гармонические, а поэтому гармонические и точки M, N, A, A'.

Заметим кроме того, что M и N — точки касания прямых, проведенных из точки P к кривой. Если P будет внутри, безусловно касательных провести нельзя, а потому двойных точек не будет. Это получится тогда, когда соответственные элементы пар разделяются друг другом; в этом случае прямые, соединяющие соответственные точки также пройдут через одну точку — полюс, который будет лежать внутри кривой.

Нахождение двойных точек криволинейного пунктуала для инволюционного соответствия можно использовать при отыскании двойных точек двух наложенных, находящихся в инволюционном соответствии, линейных пунктуалов.



Черт. 138.

Из построения следует (чер. 137)

$\bar A \bar A' B \ldots \barwedge \bar A' \bar A \bar B' \ldots$

Отыскиваем $\bar M$ и $\bar N$ и соединяем их с S до пересечения с нашим линейным носителем.

Инволюционная шестерка.-

Если полный четырехугольник Штаудта пересечь прямой d (черт. 139) то противоположные стороны пересекут эту прямую в точках, образующих инволюционную шестерку.

Возьмем два пучка с вершинами в N и L, отмечая внизу через какие точки они идут:

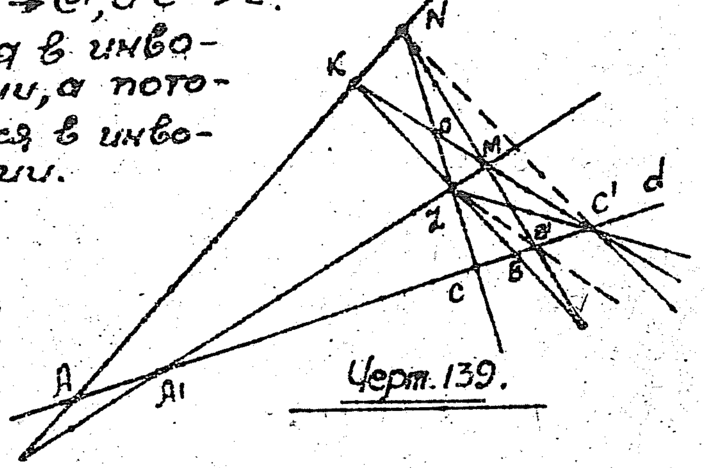
$$\text{с вершиной в } N \left\{ \begin{matrix} NA, & NC, & NB', & NC' \\ A & C & B' & C' \\ K & O & M & C \end{matrix} \right.$$

с вершиной в Z $\left\{ \begin{array}{cccc} ZB, & ZC, & ZA', & ZC' \\ B & C & A' & C' \\ K & O & M & C' \end{array} \right.$

Из этих двух записей замечаем, что тот и другой пучок опирается своими лучами в одни и те же точки, а потому они проективны, не тогда и вторые точки, на которые опираются эти же лучи, проективны, т.е. $ACB'C' \barwedge BCA'C'$

или $(ACB'C')=(BCA'C')$; $\to (ACB'C')=(A'C'BC)$.

Отсюда замечаем, что: $C\to C'$, а $C'\to C$. т.е. одна пара находится в инволюционном соответствии, а потому и все точки находятся в инволюционном соответствии.



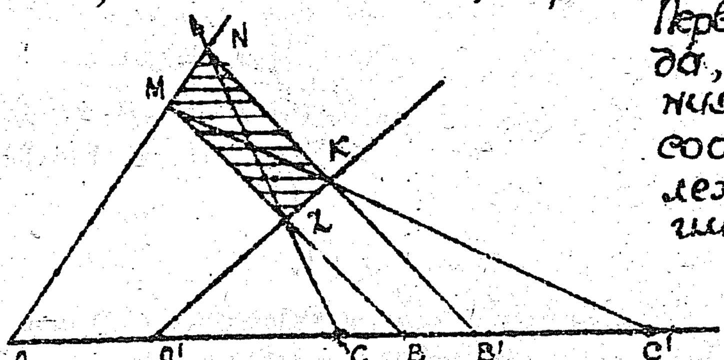
Черт. 139.

Задача. Даны две пары инволюционных точек: A и A'; B и B'.

Найти, что отвечает точке C. Из A и A' проводим любого направления прямые (черт. 140). Тоже самое проводим из C. B соединяем с Z до M; B' соединяем с N до K.

MK определит на данном носителе точку C'. Как только $A\equiv A'$ и $B\equiv B'$, т.е. когда A, B, C, C' с, ть точки гармонические, то инволюционная шестерка имеет двойные элементы, причем здесь еще раз подчеркивается, что при инволюционном соответствии двойные точки гармонически делят точки соответственные

Инволюционные пунктуалы второго порядка также по числу двоичных точек разделяются на гиперболические, эллиптические, параболические.



Черт. 140.

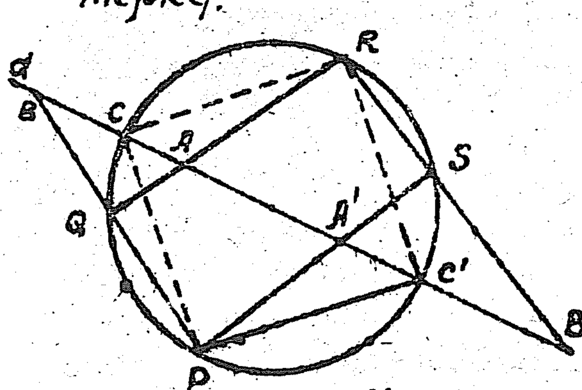
Первый случай имеем тогда, когда точка пересечения прямых, соединяющих соответственные точки лежит вне кривой (тогда имеем две касательные);

Второй случай имеет место тогда, когда точка пересечения прямых, соединяющих

соответственные точки, лежит внутри кривой, (тогда нет ни одной касательной, элементы соответственные друг друга разделяют).
Наконец, последнее тогда имеет место, если указанная точка лежит на кривой, является точкой касания, является двойной точкой и разделяет соответственные.

Вторая теорема Дезарга.

Если четырехугольник, вписанный в кривую второго порядка пересечь некоторой прямой d, (чер. 141) то точки пересечения ее с противоположными сторонами и с кривой образуют инволюционную шестерку.



Черт. N1.

Выберем P и R за вершины пучков, которые будут проективными ибо они суть образующие нашей кривой:

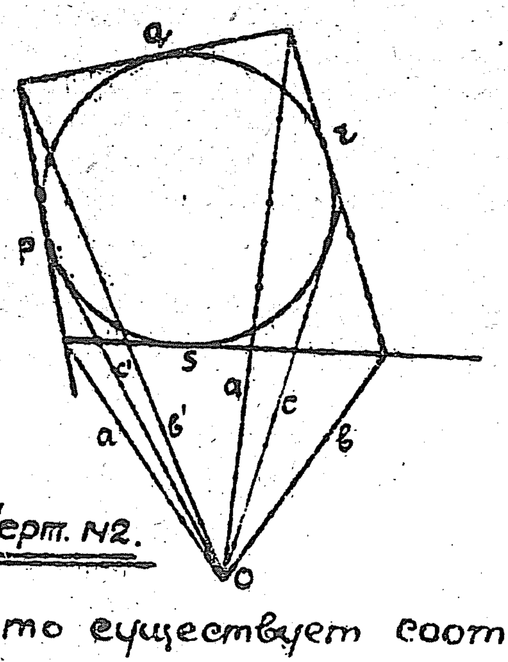
$PQ, PS, PC, PC' \barwedge RQ, RS, RC, RC'$ на прямой опираются на точки, которые поэтому будут проективными:

$BA'CC' \barwedge AB'CC' \rightarrow (BA'CC') = (AB'CC')$, отсюда получаем:

$$(A'BC'C) = (AB'CC').$$

Но из этого соотношения усматриваем, что;

$C' \rightarrow C$, а $C \rightarrow C'$, т.е. имеем одну пару соответственных элементов, находящихся в инволюционном соответствии, следовательно и все пары находятся в инволюционном соответствии.



Черт. N2.

Дезарг доказывал теорему не в таком виде; он доказал, что существует соотношение:

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = A'B \cdot B'C \cdot C'A.$$

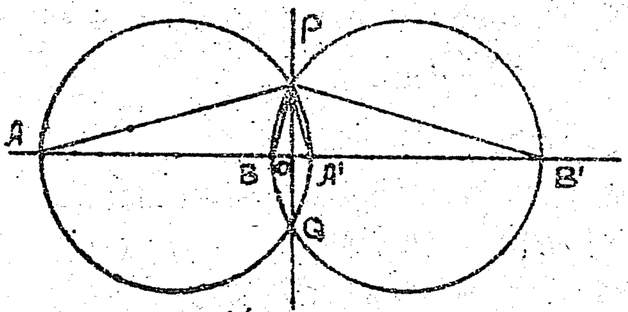
Теорема взаимная. Прямые соединяющие некоторую точку O (черт. 142) с противоположеными верши-

нами описанного около кривой второго порядка четырехугольника и касательные из той же точки O к этой кривой образуют шесть инволюционных лучей. R, Q и S с P заменяется касательными: r, q, s, p точки пунктуала - лучами пучка.
Нет нужды доказывать ибо ее очевидность исходит из принципа двойственности.

Общие точки двух пар наложенных инволюционных пунктуалов второго порядка.

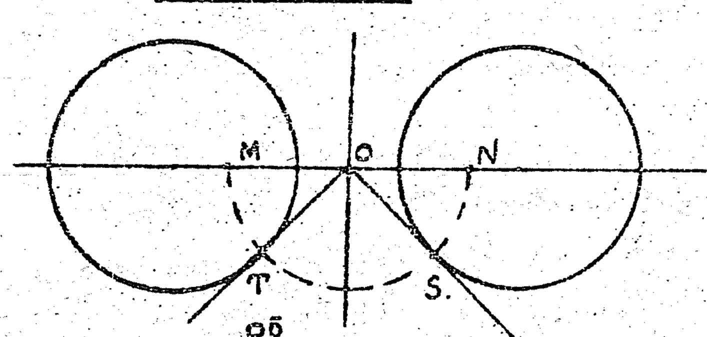
Известно, что центр инволюции лежит на пересечении радикальной оси двух взятых окружностей и той прямой, на которой рассматриваются инволюционные пунктуалы. Рассмотрим случай, когда прямая проходит через центры окружностей.

1°. Если окружности пересекаются, то центр инволюции O лежит между P и Q, а потому двойных точек инволюции нет, соответственные элементы пар разделяют элементы других пар.



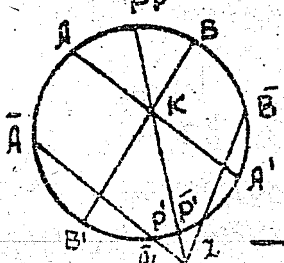
Черт. 143.

Пучки соответственных лучей с вершинами в точке P имеют лучи взаимно перпендикулярные. Таким образом в этом частном случае имеем, что при отсутствии двойных элементов соответственные лучи ортогональны, если они концентричны.



Черт. 144

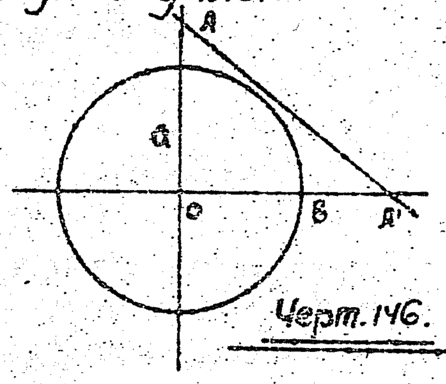
2°. Если окружности не пересекаются, то двойные элементы M и N существуют. Ортогональных лучей получить нельзя. Перейдем к криволинейным носителям. Пусть на кривой даны две пары инволюционных пунктуалов:



Черт. 145

1) A и A', B и B', ... (черт. 145) и 2) A и A', $\bar{B}$ и B'... Первые пары центром инволюции имеют точку K, внутри кривой, следовательно не имеют двойных элементов, разделяют друг друга. Вторые пары центром инволюции имеют точку L. Прямые, соединяющие соответственные точки, проходят через центр инволюции. Наоборот, прямая, проходящая через центр сечет кривую в соответственных точках. Если прямая, проходя через L проходит и через K, то тем самым мы получаем точки на кривой, соответственные для первых и вторых пар. Т.е. получаем точки, общие обеим парам. $P \equiv \bar{P}$, $P' \equiv \bar{P}'$, если $\bar{P} \to \bar{P}'$;

Таким образом, соединяя центры инволюции обеих пар, мы получаем P и P' соответственно совпадающие с $\bar{P}$ и $\bar{P}'$, которые являются общими точками, соответственными в обеих парах. Очевидно это возможно если имеем не гиперболические пунктуалы.



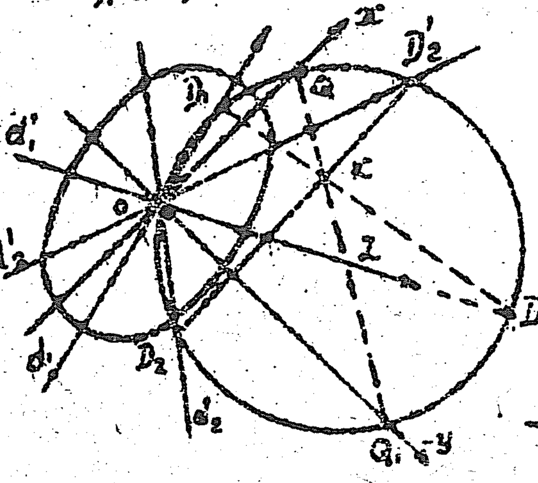
Черт. 146.

Если имеем два пучка сопряженных диаметров, то пунктуалы, как и они сами, будут инволюционными.

Действительно, если a (черт. 146) будет вращаться, образуя пучок: a, a_1, a_2... то b также будет при этом образовывать пучок b, b_1, b_2,.. проективный предыдущему, что следовало из полярного тр-ка. Но кроме того, если a отвечает b, то в силу сопряженности b отвечает a; Также будем иметь, что если $A \to A'$, то и $A' \to A$. Отсюда справедливость утверждения.

<u>Задача.</u> Даны две пары сопряженных диаметров и кривая второго порядка. Построить оси этой кривой. Пусть имеем кривую 2-го порядка и две пары (черт. 147) сопряженных диаметров: d, и d', d_2 и d_2'. Проведем окружность так, чтобы она проходила через центр данной кривой O. По предыдущему пары сопряженных диаметров инволюционны, а потому окружность пересечет их в точках, находящихся в инволюционном соответствии $D_1 \to D_1'$ и $D_1' \to D_1$; $D_2 \to D_2'$ и $D_2' \to D_2$. Соединяя соответственные точки получим точку K - центр инволюции.

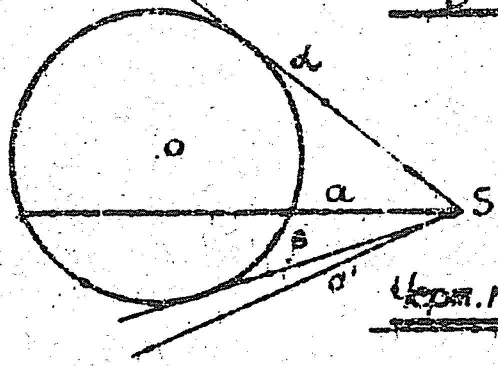
Кроме этих сопряженных диаметров возьмем еще инволюц. пучки, образованные взаимноперпендикулярными прямыми; в силу этого они дадут точки с кругом, в концах его диаметров, а потому центр инволюции таких точек лежит в центре описанного вспомогательного круга L. Соединив K и L, получим на круге точки Q_1 и Q.



Черт. №7.

Тогда Q и Q_1 с одной стороны ортогональны, с другой стороны лежат на сопряженных диаметрах. Следовательно OQ и OQ_1 суть оси нашей кривой.

О двойных элементах инволюционных пучков.



Черт. №8.

Возьмем некоторую точку S вне кривой и рассмотрим пучок сопряженных прямых, проходящих через эту точку. Сопряженные пучки образуют инволюционные пары, что показано прежде. Рассмотрим касательные лучи. Каждый из них сам себе отвечает, ибо прямая, сопряженная с касательной должна проходить через полюс касательной и через S. А полюсом касательной служит точка касания. Так что касательная сама себе отвечает.

Следовательно, α и β суть двойные элементы инволюционных пучков. Так как мы имеем 2 двойных элемента α и β, то они делят сопряженные лучи гармонически, как было замечено в самом введении понятия полярного треугольника.—

Фокальные свойства кривых.

В аналитической геометрии фокусы определяются как такие точки F_1, F_2, что сумма или разность расстояний от любой точки кривой до них есть величина постоянная.

В высшей геометрии определение фокуса таково: Фокусом называется такая точка, что сопряженные прямые, через нее проходящие, взаимно перпендикулярны. Из этого определения можно составить себе представление о расположении фокуса относительно кривой.

1) Фокус находится внутри кривой. Действительно т.к. сопряженные прямые (а они находятся и в инволюционном соответствии) взаимно перпендикулярны, то они не имеют двойных элементов, но тогда из F нельзя провести касательных к кривой, ибо двойными элементами являются касательные лучи.

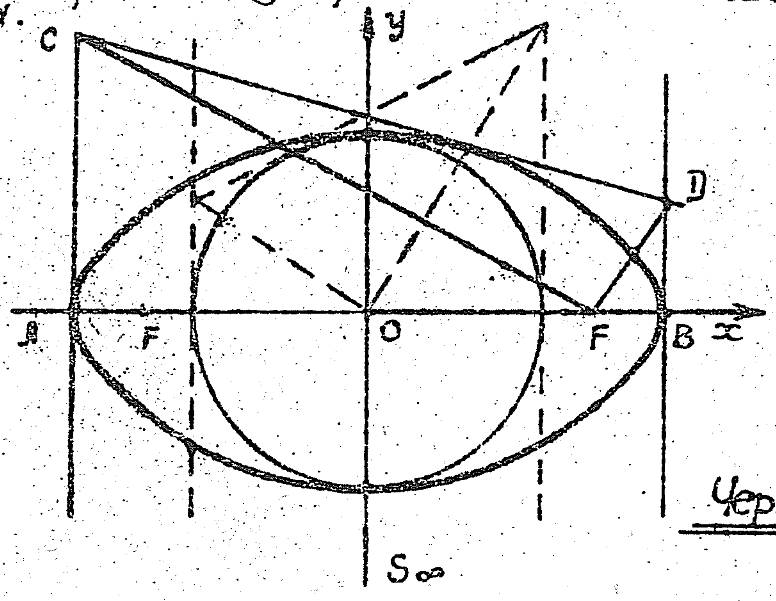
2) Фокус лежит на оси. Диаметр проведем через фокус. Полюс диаметра лежит на бесконечности, и следовательно поляра любой точки взятого диаметра параллельна сопряженному диаметру. Рассмотрим поляру, проходящую через фокус. Она есть прямая сопряженная с диаметром, но она проходит через фокус, а потому перпендикулярна диаметру. А т.к. она кроме того $\parallel$ диаметру сопряженному с нашим выбранным, то сопряженные диаметры взаимно перпендикулярны. Фокус лежит на оси.

Теорема. Отрезок касательной между двумя параллельными касательными, проведенными в концах осевого диаметра, виден из фокуса под прямым углом. Это было доказано для окружности, причем вершина прямого угла располагалась в центре круга. Доказав для общего случая, можем заметить, что когда фокусы сближаются и сливаются в конце концов, то получаем круг, а $F \equiv F_1 \equiv O$ — центр круга.

Итак, перейдем к доказательству.

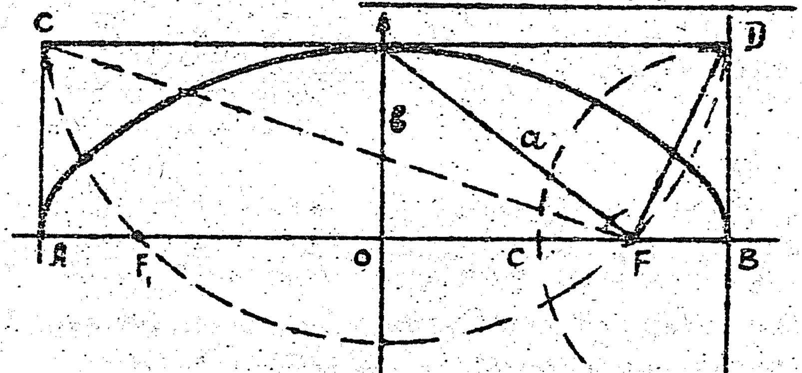
Будем рассматривать $CDS\infty$ (черт. №9) — треугольник, описанный около кривой второго порядка. Точка F, внутри этого треугольника, сопряжена с S_∞; действительно, поляра точки S_∞ (суть диаметр) проходит через F, и наоборот, поляра точки F проходит через S_∞. Последнее видно из того, что S_∞ есть полюс оси, а тогда поляра любой точки оси проходит через S_∞.

Но тогда относительно такого треугольника и точки F существует теорема, что если F сопряжена с S_∞, (или вообще с вершиной треугольника), то FC и FD сопряженные прямые. По определению же фокуса сопряженные прямые, проходящие через F, взаимно перпендикулярны этим и доказывается теорема.



Черт. 149.

Построение фокусов кривых 2-го порядка.



Черт. 150.

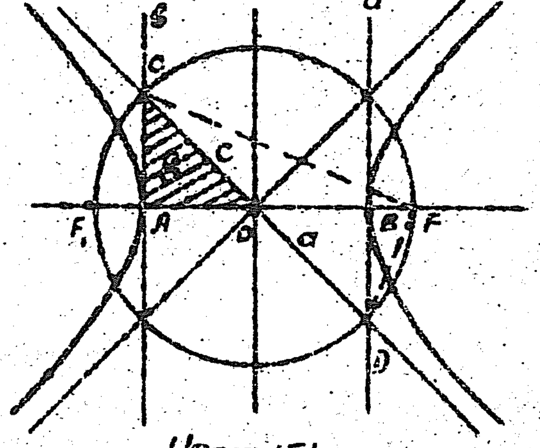
1. Эллипс. В конце малой оси проводим касательную CD. (черт. 150) она должна быть видной из фокусов под прямым углом.

Поэтому для получения F и F_1 стоит только описать окружность на диаметре $2a$.

$$C=\sqrt{a^2-в^2}.$$

Легко видеть, что на малой оси фокусов не будет, ибо если из B описать окружность радиуса $в$, то она не пересечет совсем малую ось. Фокусы мнимые.

Так же очевидно, что фокусы окружности слились в одну точку, ибо при построении получим касания.



Черт. 151.

2. Гипербола.

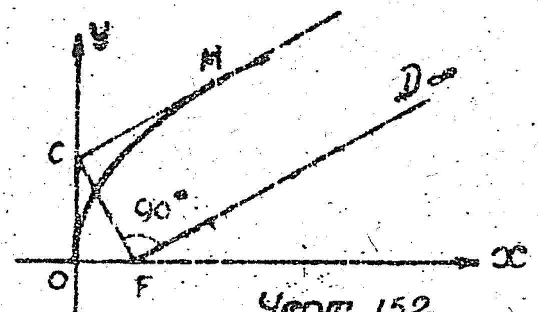
Здесь касательная CD (чер. 151) есть касательная между параллельными а и в касательными CD должен быть видным из F под прямым углом.

Из тр-ка CAO имеем:

$$c = \sqrt{a^2+b^2};$$

Такие соотношения были и в аналитической геометрии между полуосями и расстоянием до фокуса.

3. Парабола.



Черт. 152.

Параллельные касательные здесь характерны тем, что одна из них отнесена в бесконечность. А т.к. CM – касательная должна иметь общую точку с FD_∞, то они параллельны. Но угол CFD_∞ прямой. Следовательно для отыскания F необходимо из точки C провести прямую ⊥ касательной до пересечения с осью в точке F.

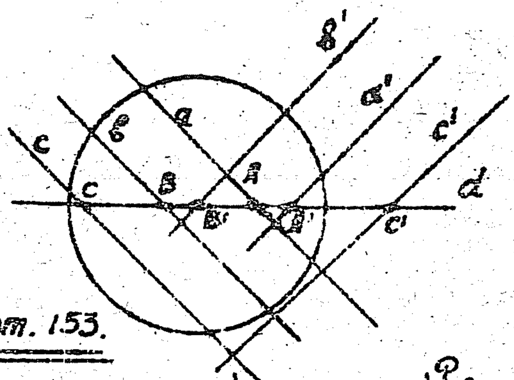
Понятие директрисы.

В аналитической геометрии директрису определяют как прямую, перпендикулярную оси и так расположенную, что отношение расстояний от точек кривой до фокуса и до нее есть величина постоянная, равная эксцентриситету кривой. В высшей геометрии определяют:

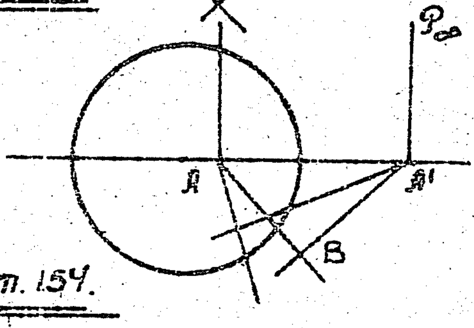
Директриса есть поляра фокуса. Отсюда видно, что теоремы, относящиеся к фокусу имеют мес-

то как взаимные к директрисам и наоборот, т.к. преобразованием поляр мы безусловно от фокуса перейдем к директрисе и от директрисы к фокусу.
Из того, что директриса есть поляра фокуса следует, и то, что она $\perp$ оси, ибо фокус лежит на оси.

Некоторые свойства фокусов.



Черт. 153.



Черт. 154.

Возьмем 2 пучка ортогональных, с вершинами в бесконечности, лучи которых соответственно сопряженные. Тогда они пересекут прямую d в точках, находящихся в инволюционном соответствии (чер. 153)
Направление не играет роли, что легко показать. Действительно, стоит одной паре находится в инволюционном соответствии, как все пары будут находиться в инволюционном соответствии; причем, если одна пара взаимно перпендикулярна, то и все остальные взаимно перпендикулярны. Это утверждение основано на следующем: Возьмем A и A' сопряженные, расположенные на осевом диаметре.
Одну пару лучей выберем произвольного направления: (черт. 154). $AB \to A'B$. Но и $A'P_\infty \to AX$, как и $AX \to AP_\infty$. При этом $AB \perp A'B$, $A'P_\infty \perp AX \perp AP_\infty$. Следовательно, имеем три пары лучей, находящихся в проективном соответствии и при этом взаимно перпендикулярных.
Так, что направление лучей может быть произвольным. Заставим A и A' сближаться, сохраняя вместе с ними лучи взаимно перпендикулярные, через них проходящие. Если $A \equiv A'$, то для рассматри-

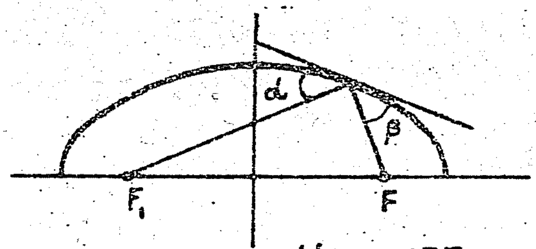
ваемых пучков это будет двойная точка. Причем такая, что через нее можно провести два сопряженных луча взаимно перпендикулярные. Это и будет фокусом кривой.

Таким образом, двойные элементы двух наложенных инволюционных пунктуалов, полученных пересечением сопряженных инволюц. ортогональных пучков с вершинами в бесконечности суть фокусы.

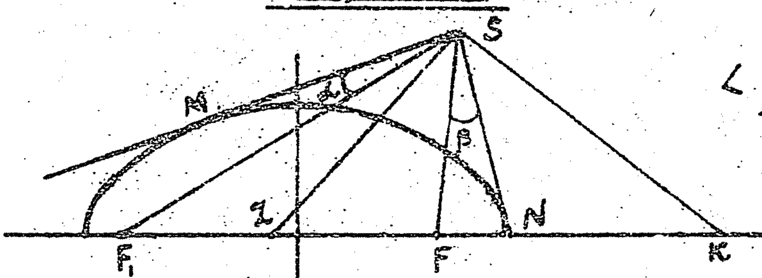
2.° Покажем, что центр кривой лежит посредине между фокусами. Действительно, если провести прямые параллельные в осевом направлении, то им сопряженные перпендикулярные пересекают ось кривой в точках, находящихся в инволюционном соответствии с точками полученными от пересечения первым пучком. При этом фокусы окажутся двойными точками. Прямая, проходящая через центр будет иметь сопряженной прямую, проходящую через ∞ удаленную точку — полюс диаметра. А т.к. $(FF_1\, OP_\infty)=-1$, то безусловно O лежит посредине между F и F_1

3°. Если к кривой 2-го порядка провести касательную в точке M, то она образует с прямыми MF_1 и MF (черт. 155) равные к ней прилежащие углы. Это можно выразить несколько более обще: пусть имеем точку S вне кривой; Проведем из нее две касательные SM и SN. Тогда

$\angle\alpha = \angle\beta$. (черт. 156).



Черт. 155

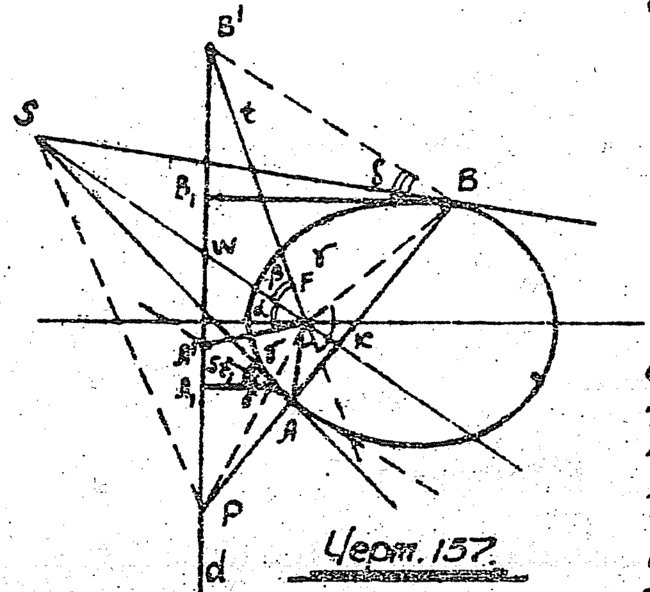


Черт. 156.

Выберем два луча SZ и SK сопряженными и взаимно перпендикулярными. Тогда лучи SM, SN, SZ, SK гармонические и т.к. $SZ \perp KS$, то

$\angle MSZ = \angle ZSN$, как было доказано при рассмотрении свойств гиперболы.

Но с другой стороны, т.к. F и F_1 суть двойные точки инволюционного соответствия, то они всякие соответственные точки делят гармонически, т.е. лучи SZ, SK, SF_1, SF гармонические, а т.к. еще и $SZ \perp KS$, то $\angle F_1SZ = \angle ZSF$;



Черт. 157.

Отсюда же следует $\angle\alpha = \angle\beta$.

4°. Если соединить фокус с точкой пересечения двух касательных в точках A и B к кривой, то $\angle KFB = \angle KFA$ (черт. 157).

Точка P является полюсом прямой FS. Действительно, т.к. d - поляра F, то поляра любой точки прямой d пройдет через F; Но т.к. PB - поляра точки S, то поляра любой точки прямой PB, в том числе и точки P, пройдет через S. Так что утверждение верно. Наверное тогда $(PKAB) = -1$ по свойству поляры. Т.к. A и B - точки касания, то с одной стороны SK сопряжена с SP; с другой стороны FK сопряжена с FP, ибо полюс FP лежит на прямой FK. Но если FK и FP сопряжены, то они взаимноперпендикулярны, т.к. они проходят через фокус. Отсюда же и следует, что FK, суть биссектриса угла AFB.

5°. Проведем из точек A и B (черт. 157) прямые, параллельные SF до пересечения с директрисой соответственно в точках A' и B', так что: $AA' \parallel BB' \parallel FS$.

Очевидно, что точки PW, A', B' гармонические, т.к. они получены параллельным проектированием точек: $PAKB$, которые были гармонические.

Кроме того, сопряженные лучи FW и FP проходят через фокус, а потому перпендикулярны. Отсюда следует, что FW суть биссектриса угла $A'FB'$, т.е. $\alpha = \beta$. Если же это так, то используя результаты предыдущего свойства, скажем, что $\angle BFB' = \angle AFA'$, $t = \beta = \alpha = t$. Так что треугольники BFB' и AFA' подобны, ибо их соответственные углы равны. Отсюда можно вывести некоторые свойства кривой.

$$\frac{FB}{BB'} = \frac{FA}{AA'} \rightarrow \frac{FB}{BB'\cos\alpha} = \frac{FA}{AA'\cos\alpha} \rightarrow \frac{FB}{BB_1} = \frac{FA}{AA_1} \Rightarrow$$

Т.е. отношение расстояния от любой точки кривой (А,В,...) до фокуса к расстоянию этой точки до директрисы есть величина постоянная. Это же и есть самое определение директрисы.

Так что: $$\frac{v}{d} = \frac{v_1}{d_1} = \frac{v \pm v_1}{d \pm d_1} = const.$$

Это одно из характерных свойств, которым обладают кривые: эллипс и гипербола.

Отдел V.

Проективная метрика.

Существуют свойства, меняющиеся по величине, иначе зависящие от измерения, так назыв. мeровые и свойства не зависящие от измерения - зрительные.

Так, Архимедова аксиома о том, что всякий раз n.a > в, где а и в - отрезки прямой конечной величины, а n-некоторое число, - есть аксиома меровая.

Но аксиомы о том, что две точки определяют прямую и две прямые определяют точку - зрительные.

Цель проективной метрики сводится к тому, чтобы меровые свойства (которые возможно), зависящие от некоторых объектов, свести к свойствам зрительным по отношению к объектам инвариантным в плоскости при преобразовании движения. Известно, что при преобразовании движения инвариантной оказывается бесконечно удаленная прямая, как и бесконечно удаленная точка.

Бесконечно удаленная прямая входит в состав понятия абсолюта. Как же проективная геометрия своим отделом, проективной метрикой сводит некоторые меровые свойства объектов к зрительным? Ответом и служит дальнейшее изложение.

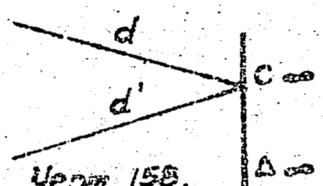
1. Параллельные прямые пересекаются в несобственном элементе. Теперь мы говорим: параллельные прямые суть те, которые с абсолютом, т.е. бесконечно удаленной прямой пересекаются в одной точке.

Геометрическая интерпретация этого вопроса требует искажения чертежа, т.е. псевдо-чертежа.

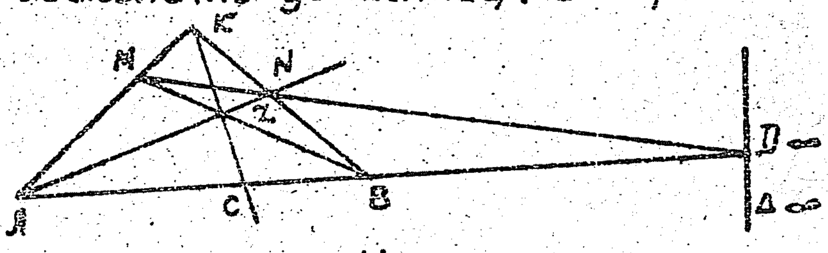
Достигается это с помощью проективного преобразования (здесь несобственные элементы не являются инвариантными ввиду дробности аналитической функции, выражающей это преобразование). Бесконечно удаленная прямая или абсолют преобразуется в конечную, а параллельные – в сходящиеся прямые на этой прямой. (черт. 158). Парабола преобразуется в эллипс, а ее касательная в бесконечно удаленной точке – в конечную прямую.

2. Середину отрезка по прежнему мы могли определить, как четвертую гармоническую двух собственных точек, определяющих длину рассматриваемого отрезка, и одной несобственной. Теперь мы будем считать серединой отрезка AB точку, которая с точкой пересечения продолжения AB с абсолютом, делит гармонические точки A и B.

Изображение этого возможно при использовании понятия псевдо-чертежа. В рассуждениях удобно пользоваться условным чертежом. Строим обычный четырехугольник Штаудта, считая мысленно, что $MN \parallel AB$, Δ – прямая бесконечно удаленная. C – середина AB (черт. 159).



Черт. 158.



Черт. 159.

Как трактовать с точки зрения проективной метрики две взаимноперпендикулярные прямые? Сопряженные диаметры кривой второго порядка образуют два инволюционных пучка. Для круга – это пучки взаимноперпендикулярных прямых – сопряженных диаметров (фокусы eliucs).

Пересекая два инволюционных пучка некоторой прямой, получим на ней два инволюционных пунктуала (AA'), (BB'), (CC') etc.

Теперь эти ортогональные, инволюционные пучки, сопряженных диаметров круга пересечем прямой бесконечно удаленной. Очевидно и на ней получим два наложенных инволюционных пунктуала.

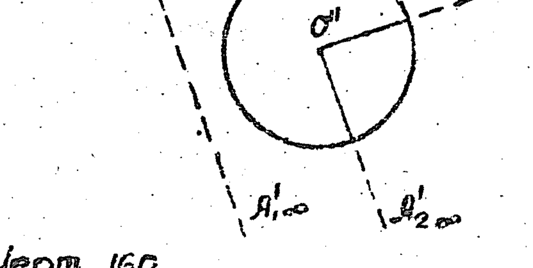
Мы получим абсолютную инволюцию.

Так, что <u>абсолютной инволюцией</u> называется инволюционное соответствие двух наложенных пунктуалов, полученных в результате пересечения сопряженных диаметров круга (а значит ортогональных пучков) абсолютом, т.е. бесконечно удаленной прямой.

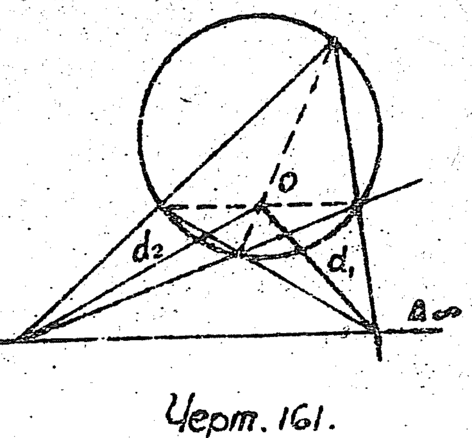
Очевидно, она останется инвариантной (абсолютная инволюция) при преобразовании движения. Действительно, пусть $A_{1\infty}$ и $A'_{1\infty}$ (черт. 160) суть соответственные точки абсолютной инволюции. Передвинем круг O' в положение O'' и возьмем один из диаметров $O''A_{2\infty} \parallel O'A_{1\infty}$. Тогда ему сопряженный будет $A'_{2\infty}$, параллельный $A'_{1\infty}$. Но отсюда же следует, что: $A_{1\infty} \equiv A_{2\infty}$ и $A'_{1\infty} \equiv A'_{2\infty}$. Следовательно, действительно <u>точки абсолютной инволюции постоянны.</u>

На псевдо-чертеже это изобразится так: центр обратится в какую-то точку O, (черт. 161) внутри кривой, но не в центре ее, ибо в противном случае мы ничего не выиграли бы, т.к. абсолют был бы удален в бесконечность, будучи полярой центра; сопряженные перпендикулярные прямые обратятся в прямые, пересекающиеся в O под некоторым углом, а вся конфигурация предстанет в виде полярного треугольника.

Так что: взаимно перпендикулярные прямые суть те, которые пересекают бесконечно удаленную прямую в двух соответственных точках абсолютной инволюции. Имеет ли абсолютная инволюция двойные точки?



Черт. 160



Черт. 161.

Двойные точки абсолютной инволюции.
Изотропные прямые.

Ответ должен быть отрицательным, ибо два ортогональных инволюционных пучка двойных элементов не имеют, если они исходят из одной точки, т.е. концентричны. Но мы можем считать их существующими в расширенном пространстве, т.е. рассматривать как точки, определяемые мнимыми координатами.

Так, что отныне мы будем говорить о мнимых двойных элементах абсолютной инволюции.

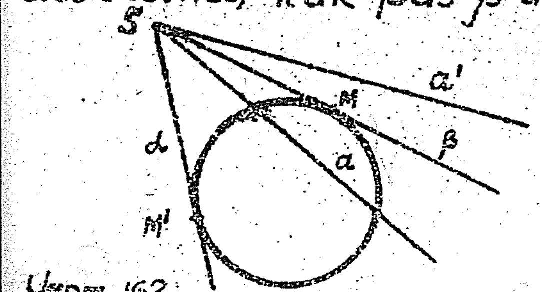
Теперь можно дать полное представление об абсолюте. Абсолют есть бесконечно удаленная прямая плюс абсолютная инволюция. Называя двойные элементы абсолютной инволюции циркулярными точками, можно сказать, что абсолют есть бесконечно удаленная прямая плюс циркулярные (или круговые) точки.

Они сохраняются при движении. Таким образом, преобразование движения сохраняет обе части абсолюта. Стоит задать циркулярные точки, как соответственные точки абсолютной инволюции будут в любом количестве определены. Абсолютная инволюция задается циркулярными точками.

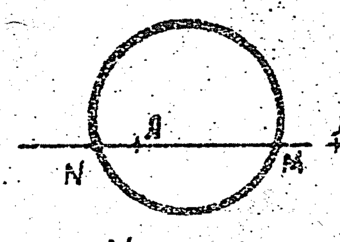
О перпендикулярных прямых можно сказать, что они суть те, которые из данной точки проведены к соответственным точкам абсолютной инволюции.

Каковы же уравнения двойных лучей инволюционных пучков нами рассматриваемых, ортогональных?

Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся далее указанными соображениями. Если a и a' сопряженные прямые и проходят через S (черт. 162) то они представляют собой инволюционную пару, ибо они проективны и когда $a \sim a'$, то $a' \sim a$. Тогда α и β являются двойными элементами двух инволюционных пучков с вершиной в S. Что они двойные, то это видно из того, что сопряженной прямой, для β или α, проходящей через S, являются как раз β или α.



Черт. 162



Черт. 163

Взаимным понятием предыдущему является то, когда вершина S, заменится прямой S, (черт. 163) лучи сопряженные точками, а касательные точками пересечения взятой прямой с окружностью.

Таким образом, если прямая S является носителем инволюционно соответствующих точек, которые являются, попарно сопряженными относительно некоторой окружности, то двойные точки этого инволюционного соответствия служат точками пересечения носителя с данной окружностью.

Распространим это и на случай, когда носитель ушел на бесконечность. Так что двойные точки или циркулярные абсолютной инволюции являются точками пересечения окружности с ∞ удаленной прямой. Но какова эта окружность?

Т.к. при любом положении любой окружности абсолютная инволюция инвариантна, то ее двойные точки, как было указано, инвариантны, а отсюда и следует, что все окружности пересекают бесконечно удаленную прямую в двух точках - циркулярных.

Следовательно, циркулярные точки обладают тем свойством, что через них проходят все окружности, т.е. пучок окружностей. Известно, что пучок кривых второго порядка вообще говоря, имеет 4 общие точки, как например пучок:

$$(x^2+y^2-r^2)-k(x^2-y^2-a^2)=0.$$

Это значит, что при взаимном решении уравнений

$$x^2+y^2-r^2=0 \quad и \quad x^2-y^2-a^2=0$$

получим такие 4 точки, через которые проходят одновременно они сами и пучок $U-kV=0$; Но кривая второго порядка пересекается двумя прямыми тоже в четырех точках. Очевидно или U или V можно представить в виде произведения двух линейных уравнений, что в нашем примере для V легко удается.

Таким образом пучок:

$$U-k(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

имеет 4 общие точки. Посмотрим, как приложимы эти рассуждения для пучка окружностей.

Общее уравнение окружности есть:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad или$$

$$(x^2+y^2)-(2ax+2by-a^2-b^2+r^2)=0.$$

иначе: $x^2+y^2-k(2Dx+2Ey+F)=0 \ldots\ldots\ldots (I)$

Последнее может быть получено из общего уравнения кривой второго порядка:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

при $A=C$ и $B=0$;

Замечаем, что вторая половина суть только одна прямая. Но мы всегда можем переписать равенство(I) в таком виде:

$$x^2+y^2-k(0x+0y+1)(2Dx+2Ey+F)=0.$$

С одной стороны, мы не меняем величины левой части, а с другой замечаем, что $0x+0y+1=0$ является уравнением ∞ удаленной прямой. Так что во второй половине имеем произведение линейных функций.

Такой пучок в противоположность тем, которые до этого рассматривались, имеет 4 общие точки не вещественными, а мнимыми. При этом:

$\{x^2+y^2=0$ и $0x+0y+1=0$ дают две бесконечно удаленные точки, а совокупность двух таких уравнений:

$$\{x^2+y^2=0 \text{ и } 2Dx+2Ey+F=0.$$

дает две безусловно мнимые точки, но на конечном расстоянии.

Очевидно, что они меняют свое положение в зависимости от выбора и положения окружности. Зато первые две точки постоянны при преобразовании движения, ибо они на бесконечности.

Из первой системы получаем:

$$y_1=ix,\quad y_2=-ix;$$

Таковы уравнения прямых, проходящих через две бесконечно удаленные мнимые точки. Как было прежде сказано, эти точки есть циркулярные точки, а эти прямые — изотропные прямые.

Итак, изотропные прямые те, которые пересекают бесконечно удаленную прямую в циркулярных точках. Изотропные прямые являются двойными элементами инволюционных пучков сопряженных диаметров окружности. В аналитеском пространстве мы $x^2+y^2=0$ мыслим как две мнимые прямые, пересекающиеся в вещественной точке; в геометрическом же это — уравнение точки.

Проективная метрика, таким образом, оперирует не только бесконечными элементами, но и мнимыми, причем совершенно так как и с элементами вещественными.

Аналогично, в аналитическом пространстве имеем параллельные мнимые прямые и взаимно перпендикулярные. Две параллельные прямые те, которые пересекаются на ∞; равносильно, если прямые

$$y = ax + b \quad \text{и} \quad y = a_1 x + b_1 \text{ параллельны,}$$

то $a = a_1$. Взаимно перпендикулярные мнимые прямые те, которые коэффициенты при x имеют такие, что $aa_1 = -1$;

Очевидно изотропные прямые сами себе параллельны и перпендикулярны: одна прямая себе же перпендикулярна и параллельна.

Так что, изотропные прямые те, которые сами себе перпендикулярны. Изотропные прямые направлены к циркулярным точкам и циркулярные точки лежат на изотропных прямых. Отсюда следует вывод:

Ортогональные пучки имеют своими двойными элементами изотропные прямые.

<u>Как можно еще найти циркулярные точки?</u>

Предпошлем нашему ответу следующее рассуждение.

Асимптота кривой второго порядка (существуют ли они, или они мнимы, как мы дальше увидим) являясь диаметрами этой кривой, служат двойными элементами инволюционных пучков, состоящих из сопряженных попарно диаметров.

По предыдущему же, изотропные прямые являлись для окружности как раз двойными элементами инволюционных пучков, состоящих из сопряженных диаметров, при этом ортогональных.

Следовательно, нахождение изотропных прямых сводится к нахождению асимптот для круга.

Асимптота определяется как прямая, имеющая одну общую точку с кривой в бесконечности.

Определим асимптоты сначала для гиперболы: возьмем прямую $y = \alpha x + \beta$, где α и β таковы, что прямая пересекает кривую $x^2 - y^2 = a^2$ в двух слившихся точках; Решая, находим:

$$x^2-(\alpha x+\beta)^2=a^2$$

$$(1-\alpha^2)x^2-2\alpha\beta x-\beta^2-a^2=0.$$

Последнее уравнение дает нам абциссы точек пересечения прямой с кривой. Но они (точки) должны быть отнесенными в бесконечность, а тогда коэфициенты при старших степенях x обратятся в нуль. Так как таких точек две, то:

$$1-\alpha^2=0;\ \alpha\beta=0.$$

отсюда $\alpha=\pm1$; $\beta=0$; и $y=x$; $y=-x$ суть уравнения асимптот гиперболы.

Отыщем асимптоты окружности:

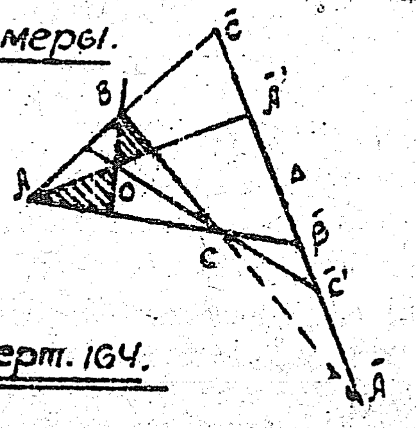
$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y=\alpha x+\beta \end{cases} \quad (1+\alpha^2)x^2+2\alpha\beta x+\beta^2-a^2=0.$$

находим что $\alpha=\pm i$; $\beta=0$; и $y=ix$; $y=-ix$

Таковы уравнения асимптот окружности. Оказывается, действительно, асимптоты окружности и изотропные прямые суть одно и тоже, а потому верно, что они определят на ∞ удаленной прямой циркулярные точки. Очевидно также, что уравнения асимптот одни и теже для всех кругов различных радиусов, ибо эти уравнения зависят только от старших членов, а они при изменении радиуса не меняются. Отсюда видно и то, что все круги имеют две бесконечно удаленные постоянные точки, так что прямая через них проходящая суть абсолюта, а самые точки - циркулярные точки.

Следует заметить, что всякое меровое свойство можно свести непосредственно или опосредственно к зрительным относительно неизменных обьектов плоскости - т.е. относительно абсолюта.

Примеры.



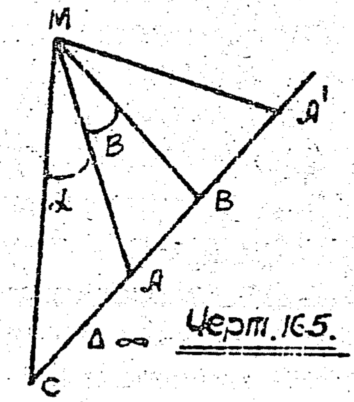
Черт. 164.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Понятие высоты есть понятие меровое, ибо содержит меру - $90°$. Сведем это меровое свойство к зрительному. Будем пользоваться псевдочертежом. Прямая Δ - символ ∞ удаленной прямой (черт. 164).

Пусть мы имеем точки пересечения сторон с Δ в точках $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$; Найдем точки $\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}'$, находящиеся в инволюционном соответствии с $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$. на прямой.
Сопряженные прямые сторонам, проходящие через вершины будут перпендикулярны между собой. Так что нашу теорему сведем к такой:
Пусть $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ точки пересечения сторон треугольника с абсолютом. Если $\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}'$ - точки, соответствующие $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ в абсолютной инволюции то прямые соединяющие A и $\bar{A}'$, B и $\bar{B}'$, C и $\bar{C}'$ пересекаются в одной точке.

Теорема 2. Медианы пересекаются в одной точке. Эта меровая теорема сводится к такой зрительной: Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, которые вместе с бесконечно удаленными точками или с точками абсолюта гармонически делят противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

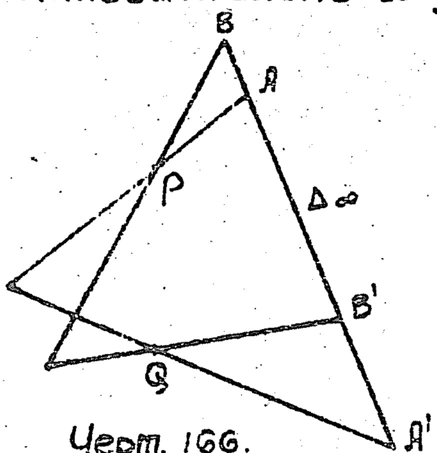
Установим, что значит два равных угла.



Черт. 165.

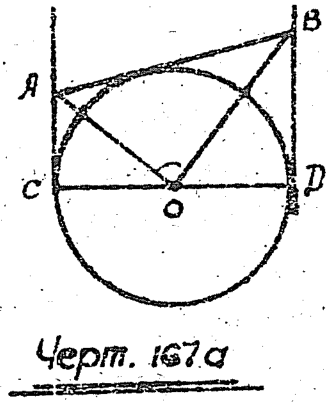
Если MA (черт. 165) является биссектрисой угла CMB, то в том случае, когда MA' соответствует MA, $MA \perp MA'$! Но перпендикулярные прямые те, которые соединяют две соответственные точки абсолютной инволюции (пользуемся псевдочертежом). Так что $\angle\alpha = \angle\beta$, если A взято таково, что вместе с точкой A' оно, делит C и B гармонически.

Определение. Окружность есть геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом. Это меровое определение ($90°$). Выразим его как зрительное относительно ∞ удаленной прямой. Возьмем Δ - ∞ удаленную прямую и точки P и Q (черт. 166). Прямые, соединяющие P и Q с соответственными точками абсолютной инволюции, пересекаются в точках на окружности. (AA'), (BB') - пары инволюции.

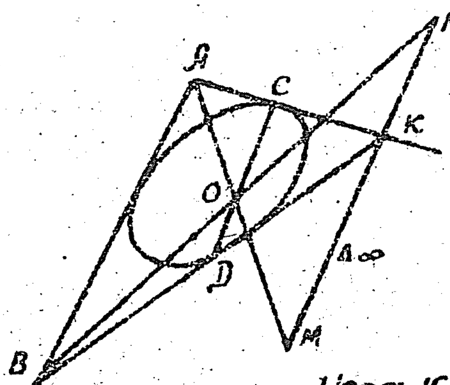


Черт. 166.

Так что окружность есть геометрическое место точек пересечения прямых, соединяющих точки пар абсолютной инволюции соответственно с P и Q, с двумя, произвольно выбранными точками плоскости. Построим псевдочертеж для теоремы, взаимной теореме Фалеса (черт. 167а, 167в).



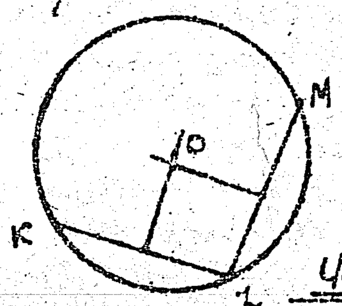
Черт. 167а



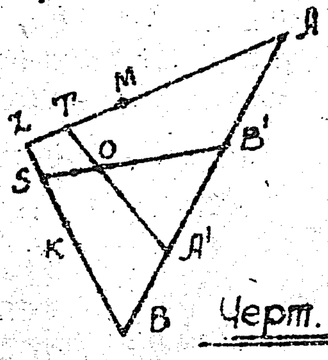
Черт. 167в.

Вместо круга берем эллипс, как проективное преобразование круга. Две «параллельные» пересекаются на Δ_∞ в точке K. CD играет роль диаметра. Соединяя A с „центром" O, получаем точку M, а соединяя B с „центром" получаем точку M', соответств. точке M в абсолютной инволюции. Теорема эта будет читаться: Если концы отрезка касательной между касательными, имеющими общую точку на абсолюте, соединить с точкой отрезка, определяемого точками касания касательных с общей точкой на абсолюте, то продолжение этих прямых определит в пересечении с абсолютом две точки – пару абсолютной инволюции.

Задача. Построить центр окружности по трем (не на одной прямой) заданным точкам. Центр лежит на перпендикулярах, проведенных к срединам отрезков, соединяющих заданные точки попарно. С точки зрения проективной метрики это выглядит так: (черт. 168а, 168в). Пусть LM и LK пересекают абсолюту в точках A и B. Центр кривой, заданной 3 точками K, L, M лежит на пересечении прямых, соединяющих точки T и S, гармонически делящие в парах с A и B, точки L и M и L и K, с точками A' и B', составляющими с точками A и B пары абсолютной инволюции.



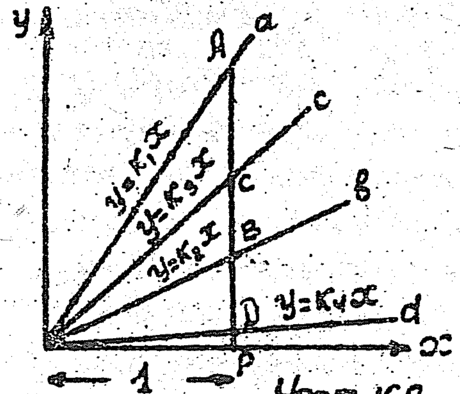
Черт. 168а



Черт. 168в.

Формула Лагерра.

Понятие величины угла, как понятие меровое, проективная метрика сводит к зрительному понятию относительно абсолюта, а именно к сложному отношению четырех лучей. Это достигается с помощью формулы Лагерра. Прежде чем перейти к самому изложению вывода формулы, мы выразим сложное отношение лучей, проходящих через точку O- начало координат через их же угловые коэфициенты.



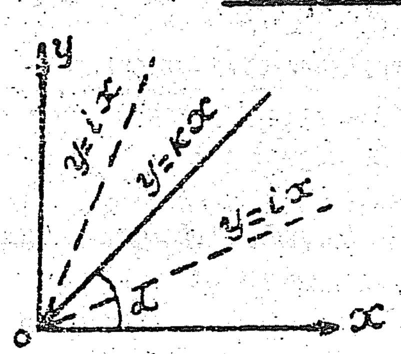
Черт. 169.

Возьмем 4 прямые:

$$y=k_1x;\quad y=k_2x;\quad y=k_3x;\quad y=k_4x.$$

Известно, что сложное отношение 4^х лучей, равно сложному отношению 4^х точек, на которые те лучи опираются. Пересечем наши прямые прямой $x=1$, $OP=1$; Получаем по выше сказанному:

$$(abcd)=(ABCD).$$



Черт. 170.

Выразим точечное сложное отношение в координатах точек:

$$(abcd)=(ABCD)=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}:\frac{y_1-y_4}{y_2-y_4};$$

Но в данном случае, при $x=1$,

$y_1=k_1$, $y_2=k_2$, $y_3=k_3$, $y_4=k_4$; а потому $(abcd)=\frac{k_1-k_3}{k_2-k_3}:\frac{k_1-k_4}{k_2-k_4}$;

Теперь перейдем к самому выводу формулы Легерра. Легерр взял сложное отношение таких 4^х прямых: две из них заключают определяемый угол α, а две другие являются изотропными прямыми. Очевидно уравнения таких прямых следующие:

$$y=kx,\quad y=0;\quad y=ix;\quad y=-ix$$

одну из прямых направляем по оси иксов. Тогда сложное отношение, выраженное через коэфициенты этих прямых, образуемое.

этими прямыми будет: $(abcd)=\frac{k_1-k_3}{k_2-k_3}:\frac{k_1-k_4}{k_2-k_4}$;

Пусть $k_1=k$; $k_2=0$; $k_3=i$; $k_4=-i$;

Получаем: $(abcd)=\frac{k-i}{0-i}\cdot\frac{0+i}{k+i}=\frac{i-k}{i+k}$; Но $k=tg\alpha$,

Следовательно: $(abcd)=\frac{i\cos\alpha-\sin\alpha}{i\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha-i\sin\alpha}{-\cos\alpha+i\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=$

$$=\frac{e^{\alpha i}}{e^{-\alpha i}}=e^{2\alpha i};$$ Так что $(abcd)=e^{2\alpha i}$

$2\alpha i=\ln(abcd)$: отсюда, положив $(abcd)=V$, окончательно найдем: $\alpha=\frac{1}{2i}\ln V$. Но V – зрительное свойство, следовательно меровое свойство – α выражается зрительным свойством. Отметим, что, как с первого взгляда не кажется, α выражено действительным числом, т.к. мы имеем в правой части произведение мнимых выражений. Исходя из этой формулы можно иначе, чем прежде, трактовать равенство двух углов.

Так $\alpha_1=\alpha_2$, если $(abcd)=(a'b'c'd)$, где a, b и $a'b'$ - лучи, заключающие равные углы, а c и d - изотропные прямые.

<u>Следовательно равными углами называют такие</u> углы, что лучи их заключающие, совместно с изотропными прямыми соответственно дают равные сложные отношения. Если точки пересечения двух пар прямых с бесконечно удаленной прямой суть A, B и C и D, а точки пересечения изотропных прямых с бесконечно удаленной прямой - U и V, то при $(ABUV)=(CDUV)$, углы, которые заключаются между A и B и C и D, равны между собой. Как следствие вытекающее из формулы Лагерра, является наконец то, что если $\angle AMB=\angle CND$, то

$$ABUV \,\overline{\wedge}\, CDUV.$$

это уже совершенно зрительное свойство, отнесенное к бесконечно удаленной прямой.

То, что инвариантно в более высоких формах преобразования, безусловно инвариантно в предшествующих, но противоположное неверно.

Отсюда, из сохранения сложного отношения при преобразовании сдвига, движения, следует инвариант угла по формуле Лагерра определенного:

$$\alpha = \frac{1}{2i} \ln v.$$

где $v = (ABWN)$ a $\begin{cases} W = (y = ix) \\ N = (y = -ix) \end{cases}$

Равенство двух отрезков.

В определении равенства двух отрезков с точки зрения проективной метрики должно фигурировать понятие абсолюта.

Пусть $AB = CD$. (черт. 171). Проведем из A прямую $AK \parallel CD$, угол BAK разделим пополам, к биссектрисе AL восстановим из B перпендикуляр. Тогда отрезок

$$AK = AB = CD.$$

Так можно с помощью использования меровых свойств построить равный отрезок. Нелегко видеть, что весь процесс действий, основанных на меровых свойствах в своих отдельных частях сводим к зрительным:

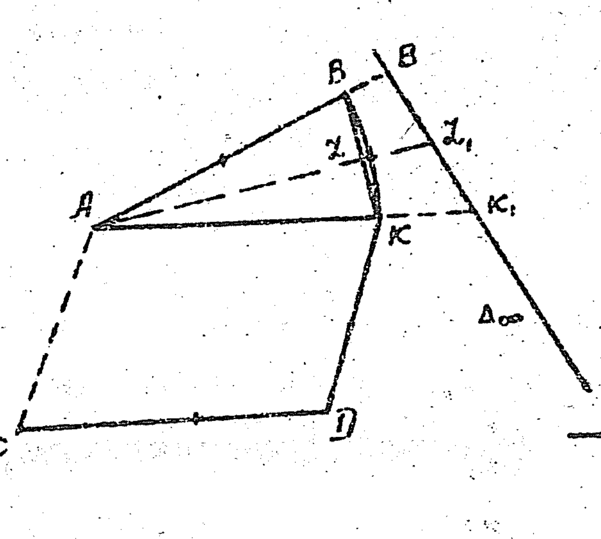
a) $AK \parallel CD$ стоит на ∞ удаленной прямой Δ_∞ выбрать O_∞ так, чтобы AK и CD сходились на Δ_∞ в этой точке.

в) AL - биссектрисса угла BAK - проводится на основе формулы и следствий Лагерра на основе зрительных свойств.

c) $BK \perp AL$ также сводимо к зрительным свойствам

d) $KD \parallel AC$ выполнимо.

Так что равенство отрезков можно через ряд зрительных операций представить как свойство зрительное.



Черт. 171.

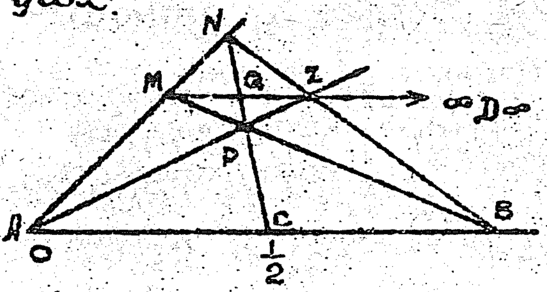
Проективное определение отрезка числом

Меровая геометрия каждому отрезку находит число, которое этот отрезок характеризует. Для этого выбирается определенная мера - единица, которую вкладывают целое, дробное или иррациональное число раз в данном отрезке. Если основная мера вкладывается несколько раз и еще половину, можно взять меру в два раза меньшую, и тогда она уже целое число раз вложится в данном отрезке. Тоже можно сказать о четвертых, пятых etc частях целого. Но всякий отрезок можно измерить в двоичной системе, т.е. отрезок можно измерить или целыми числами в двоичной системе или еще дробными двоичными числами. В проективной метрике и используется последнее замечание. Тогда как в меровой геометрии для измерения отрезка пользуются методом подобия, а самая числовая мера и есть коэффициент подобия, то в проективной геометрии измерение отрезка можно свести к делению единицы пополам. В меровой геометрии это выполнялось с помощью циркуля и линейки, в проективной метрике это достигается с помощью четырехугольника Штаудта.

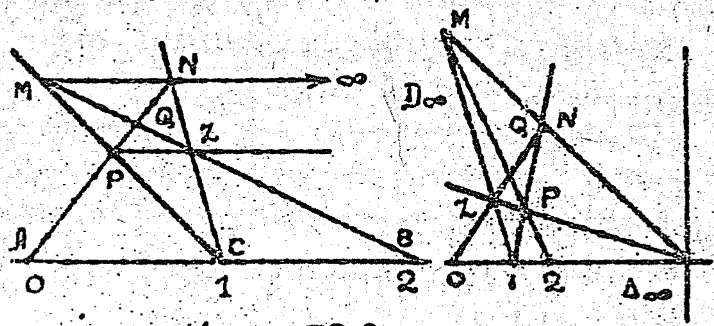
Так что четырехугольником Штаудта можно производить деление пополам и умножение отрезков, а т.к. если отрезок может быть выражен в дробях двоичных, т.е. таких, у которых знаменатель кратен 2 и представляет число 2^n то это выполнимо только на основании зрительных свойств, а именно проективности. Следовательно, можно проективно отрезок выразить числом. Затем это число, полученное проективно и выражающее собой величину отрезка в двоичной системе, можно перевести в десятичную. Идея проективного выражения отрезка числом принадлежит Ф. Клейну.

Отображения и симметрия.

Что в проективной метрике инвариант? Абсолютная инволюция является инвариантом при преобразовании подобия и движения, т.к. здесь сохраняется угол.



Черт. 172-а.

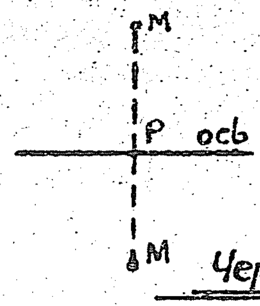


Черт. 172 в.

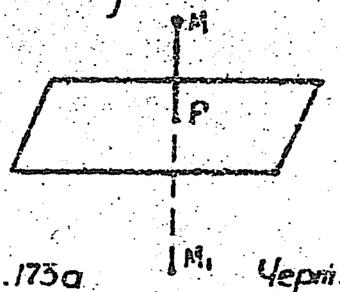
Прямой угол остается прямым, квадрат остается квадратом. Перпендикулярность сопряженных диаметров сохраняется, а потому сохраняется в своем положении и величине абсолютная инволюция. Афинное преобразование уже не сохраняет углов, а потому абсолютная инволюция не сохранится. Проективное преобразование не оставляет не только абсолютной инволюции, но и абсолюта вообще. Если два преобразования дают то, что дает подобное одно, то такие преобразования образуют группу. Но одно преобразование, из цикла образующих группу, можно расщепить на два преобразования, группу не образующих.

Так проективное преобразование, образующее группу расщепляется на два перспективных, не образующих группы. Теперь мы покажем, что преобразование движения расщепляется на два преобразования симметрии, не образующих группу. Ортогональное отображение или симметрия (частн. случай) является инволюционной гомологией, когда центр гомологии уходит на бесконечность.

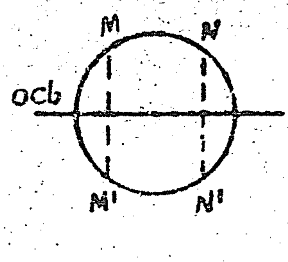
Прежде всего на примерах дадим понятие преобразования симметрии.



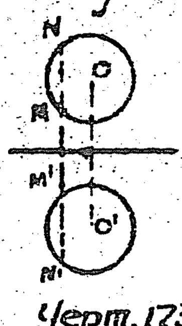
Черт. 173а



Черт. 173 в



Черт. 173 с.



Черт. 173 d.

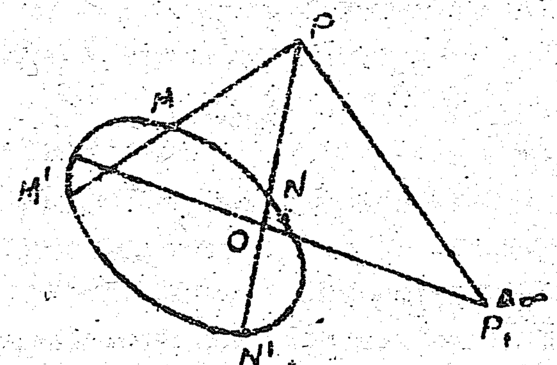
Мы можем иметь ось симметрии и плоскость симметрии. Чтобы преобразовать M относительно оси, надо опустить перпендикуляр на ось MP и продолжить его так, чтобы $MP = PM_1$. Тоже и относительно плоскости.

Сами объекты не меняются, но меняется расположение их элементов. На этом свойстве и строится метод расщепления. Отметим, что круг преобразованием симметрии или отображения переходит сам в себя:

M переходит в M', а M' переходит в M. Круг сам в себя отображается. Но при этом меняется направление точек окружности. Такой результат получаем в случае, если осью симметрии служит диаметр. Если же ось не диаметр, то круг преобразуется в другой, безусловно равный первому, круг, но также с точками противоположно расположенными в своем направлении.

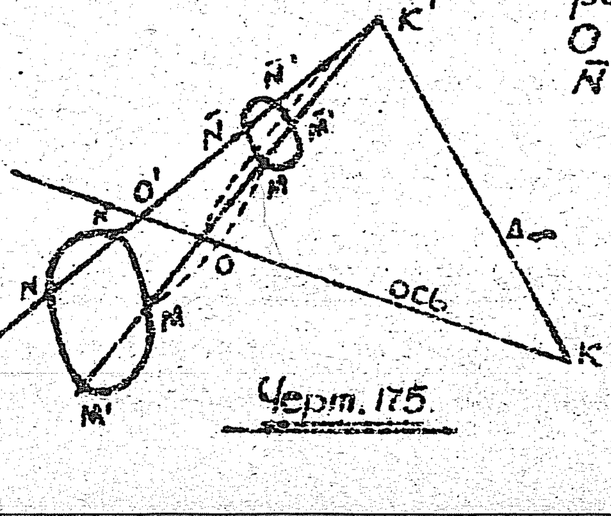
1° Посмотрим как это выглядит в проективной метрике. Круг предстанет на псевдочертеже эллипсом, центр - точкой O - полюсом Δ_∞ (черт. 174).

Проведем через O как либо ось OP, до пересечения с Δ_∞. Отыскиваем на Δ_∞ точку P, сопряженную с P_1 и точки M и N соединим с этой P. Тогда найдутся точки M' и N'.



Черт. 174.

2° Когда ось лежит вне круга, то псевдочертеж будет таким (черт. 175) круг обратится в эллипс; ось продолжим до пересечения с Δ в точке K и на Δ_∞ найдем K', сопряженную точке K. Из K' проводим две параллельные прямые: K'M и K'N, которые на оси дадут точки O и O'. Точку $\bar{M}$ и точку $\bar{N}$ строим так, чтобы $(O'K'N\bar{N}) = 1$. Так, проводя из K' пучок параллельных прямых, секущих кривую, и находя гармонические точки в паре с M, M', N', N etc делающие

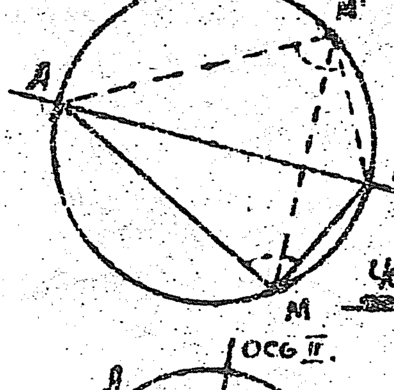


Черт. 175.

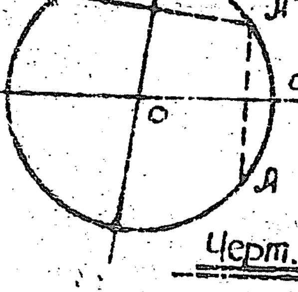
пары O', K' получаем отображение одной кривой в другую. Надо заметить, что мы не получим тот же эллипс. Прямой угол (как и любой угол) при преобразовании симметрии или отображения обращается в прямой. Действительно, пусть дан угол прямой AMB, опирающийся на отрезок AB (черт. 176). На отрезке AB как на диаметре строим круг и отображаем его в оси AB. Круг обратится сам в себя, а угол AMB в угол $AM'B$. Но последний также опирается на диаметр.

Расщепление движения на два отображения.

Итак, вращение расщепляется на два отображения. Пусть вращением точка A перешла в A'. (Черт. 177). Ось I проводим через центр произвольно. Находим отображение точки A относительно этой оси A''. A'' соединяем с A' и проводим перпендикуляр к середине $A'A''$ – он пройдет через центр круга – это вторая ось. Что действительно A переходит в A'' и A'' в A' очевидно из того, что в наших преобразованиях круг преобразуется в круг. Таким образом, преобразование вращения действительно свелось к двум отображениям.



Черт. 176.



Черт. 177.

Центральная симметрия может быть также получена двумя отображениями.

Посмотрим как это представляется в проективной метрике.

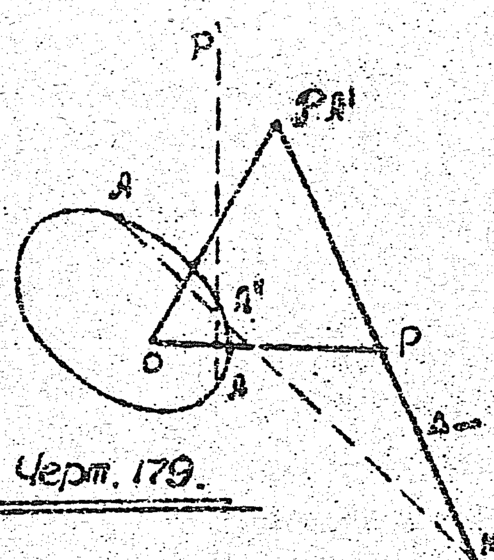
Пусть даны точки A и A' и Δ_∞ (черт. 179) OP проводим произвольную ось. Находим P', сопряженную с P и соединяем с A, получаем на кривой A''. A' и A'' соединяем до пересечения с Δ_∞ в M. Тогда или находим M'

сопряженную M и M' соединяем с O – это есть вторая ось, или находим середину $A'A''$ и соединяем с O до пересечения с Δ_∞.

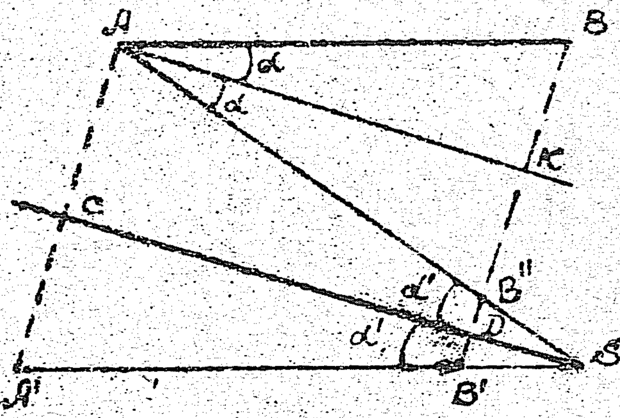
Но не всякое движение есть вращение. Так паралельный перенос не есть вращение вокруг бесконечно удаленного центра, также как вращательное движение можно рассматривать в своих бесконечно малых элементах как движение поступательное. Всякий паралельный перенос сводится к двум отображениям, AB переходит в $A'B'$; $AA' \parallel BB'$. Из A восстанавливаем перпендикуляр к BB' и откладываем $BK=KB''$. Из S опускаем перпендикуляр на AA'. $AC=A'C$ и $B''D=DB'$. Что в таком случае действительно $AB=A'B'$ и $AB \parallel A'B'$ видно из следующего: $\Delta\, ABK = \Delta\, AKB''$, а потому $AB=AB''$. $2\alpha=2\alpha'$, ибо $\alpha=\alpha'$, следовательно $AB'' \parallel A'B'$. (черт. 180)

Но тогда $\Delta\, AA'S$ равнобедренный (что очевидно даже из самого отображения), как и $B''B'S$, а отсюда и следует, что $AB''=AB=A'B'$.

Следовательно действительно всякое движение (поступательное или вращательное) сводится к двум отображениям.



Черт. 179.

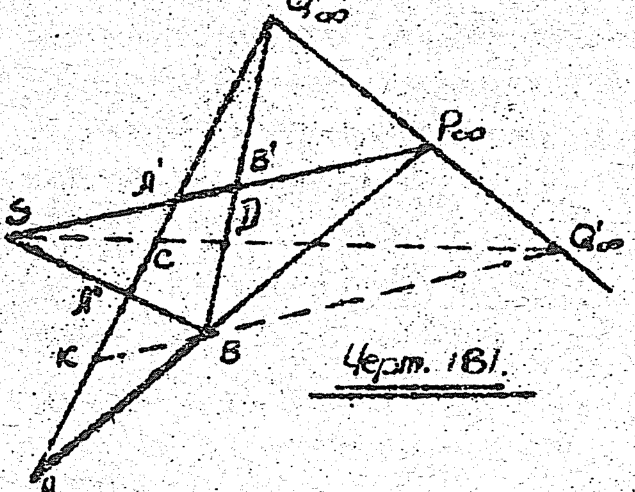


Черт. 180.

Посмотрим как это предстанет в проективной метрике на псевдочертеже. (черт. 181).

Из точки P_∞ проводим 2 парал. прямые и из Q_∞ – 2 параллельные прямые; получаем отрезки $A'B'$ и AB

равные и параллельные соответственные концы лежат на параллельных прямых т.е. имеем параллельный перенос.



Черт. 181.

Находим Q'_∞, сопряженную с Q_∞ и соединяем с B; получаем A'' так, чтобы $(AA''KQ_\infty)=-1$; A''B пересекает A'B' в точке S. Из S проводим прямую, параллельную KB, т.е. S соединяем с Q'_∞.

Очевидно $SQ'_\infty \perp AQ_\infty \parallel BQ_\infty$.

Здесь имеем: SQ'_∞ и KQ'_∞ - оси. Обозначая преобразование движения через S, а отображения через σ, символически, таким образом, можем писать:

$$S=\sigma'\sigma''$$

т.е. преобразование движения делится или сводится к двум преобразованиям отображения. Совершенно неважно в каком порядке будем вести отображения, получим тоже движение только обратного направления:

$$S^{-1}=\sigma''\sigma'. \quad \sigma'\sigma''=-\sigma''\sigma' \quad S^{-1}=-\sigma'\sigma'';$$

Можно показать, что движение образует группу:

$$S'=\sigma'\sigma''; \; S''=\sigma'\sigma''', \; \sigma'\sigma''\sigma'\sigma'''=S'S''$$

Но преобразование отображения группы не образует и $\sigma^2=1$, а потому

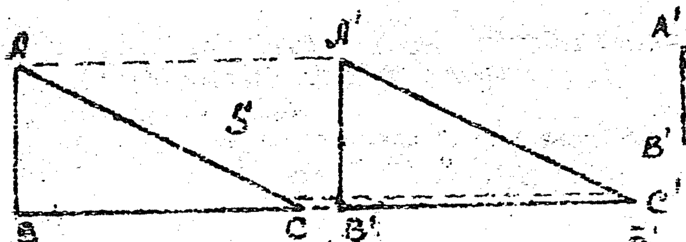
$S'S''=\sigma''\sigma'''$, т.е. $S'S''=S$, т.к. $\sigma''\sigma'''$ дает какое-то новое преобразование движения. Следовательно два движения дают то, что дает какое-то одно движение; Так что действительно, преобразование движения образует группу, как это и было указано еще раньше.

Естественен вопрос: какой смысл имеет сведение движения к отображениям?

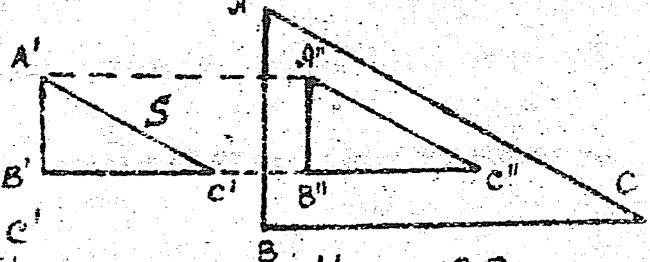
Почему бы не сводить, наоборот, к движению все преобразования? Дело в том, что некоторые преобразования, для сведения их к движению требуют выхода, перехода в пространство. Так, однонаправленная конгруентность или подобие сводимое к преобразовонию движения, не требуя выхода из плоскости. Другое совсем дело, если конгруентность, гомотетия или подобие разнонаправленного характера. Так, треугольник ABC переводим для совпадения с $A'B'C'$ движением в плоскости, $A'B'C'$ переводим в положение $A''B''C''$ движением в плоскости и следовательно то и другое есть

$$S = б'б''$$

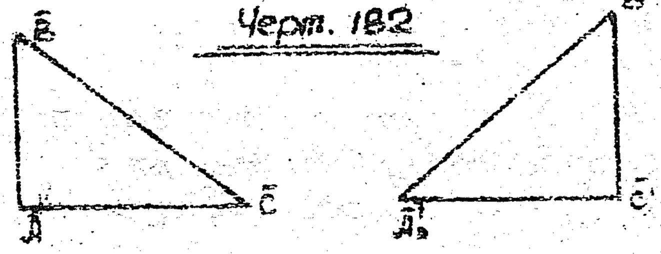
Чтобы $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ перевести в $\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$ надо выйти в пространство, если использовать только преобразование движения.



Черт. 182



Черт. 182 a.



Черт. 182 б

Но с помощью отображения эту операцию можно выполнить в плоскости. Можно рассматривать, следовательно, что конгруентность сводится к движению и отображению.

Проф. Д. М[illegible]

Стеклография РГУ тир. 46 — 10 июня 1940 г.
г. Ростов н/Д.

Вопросы.

I. Основные понятия.

1. Чем отличается высшая геометрия от элементарной?
2. Что такое потенциальная и актуальная бесконечность?
3. Сколько бесконечно удаленных точек на прямой?
4. Как формулировать аксиому о параллельных прямых с помощью несобственной точки?
5. Какие зрительные аксиомы существуют о точке, прямых и плоскостях?
6. Что такое бесконечно удаленная прямая и бесконечно удаленная плоскость?
7. Как перевести на язык элементарной геометрии зрительные аксиомы, относящиеся к несобственным элементам?
8. Что такое основные элементарные формы?
9. Укажи основные формы первой, второй и третьей ступени?
10. Что такое элемент и что такое носитель?
11. Что является в пучке прямых носителем и элементом?
12. Что является в пучке плоскостей носителем и элементом?
13. Что определяет $\frac{A}{a}$; $\frac{a}{M}$; $\frac{\alpha}{a}$?
14. Что такое инвариант преобразования?
15. Что такое группа?
16. Образует ли подобное преобразование группу?
17. ~"~ ~"~ симметрия группу?
18. Преобразования движения; образуют ли они группу?
19. Укажи инвариант преобразования движения?
20. Какой объект сохраняется при преобразовании движения?

II. Подобие и афинное преобразование.-

21. Что такое подобное преобразование в узком смысле?
22. Как оно определяется аналитически?
23. Что такое гомотетия?
24. Что такое подобное преобразование в широком смысле?
25. На какие две подобные группы подразделяется общее подобное преобразование?
26. Что является инвариантом подобного преобразования?
27. Как аналитически определить подобное преобразование?

28. От скольких параметров зависит преобразование движения?
29. От скольких параметров зависит общее подобное преобразование?
30. Во что преобразуется круг подобным преобразованием?
31. Во что преобразуется квадрат проективным преобразованием?
32. Что такое афинное преобразование в узком смысле?
33. Образует ли такое преобразование группу?
34. Указать инварианты такой группы?
35 Во что афинным преобразованием преобразуется круг, касательная и параллельные прямые?
36. Остаются ли перпендикулярные прямые ⊥-ми при подобном преобразовании?
37. При афинном
38. Что такое общее афинное преобразование?
39. Сколько параметров оно имеет?
40. Какое преобразование определяется формулами?
$$x'=ax+by+c;\quad y'=dx+by+f_1.$$
41. Что такое афинитет?
42. Какова ось и направление афинитета при афинном преобразовании, определенном формулами $x'=x,\ y'=by$ (в декартовых координатах).
43. Что делается с бесконечно удаленной прямой при афинном преобразовании?
44. Во что обращается афинитет, если ось удалить в бесконечность?
45. Во что обращается гомология, если центр гомологии удаляется в ∞.
46. Сколько двойных точек может существовать при афинном преобразовании на прямой? Тоже на плоскости?

III. Проективные пунктуалы и пучки 1-го порядка в изучении прямых.-

47. Что такое $\bar{\wedge}$ преобразованные пунктуалы ($\bar{\wedge}$ проективно)?
48 Что называется проективным соответствием?
49. Что такое $\bar{\wedge}$ наложенные пунктуалы?
50. Какая зависимость между координатами x и x' соответствующих точек?
51. Что такое простое отношение?
52. Что такое сложное отношение?
53. При какой перестановке букв (АВСД) сложное отношение сохраняет свое отношение?-

54. При каких преобразованиях сохраняется простое 83.
отношение? 84.

55. При каких преобразованиях сохраняется сложное
отношение? 85

56. Что такое инволюционное преобразование и соот-
ветствие? 86

57. В формуле $x'=\dfrac{a+bx}{c+dx}$ что можно сказать о пара- 87.
метрах a, b, c, d в случае инволюционного преобразо- 88.
вания? 89.

58. Что такое двойные точки $\barwedge$ наложенных пунктуо-
лов? 90.
91.

59. Как делается инволюционные пунктуалы в отношении
двойных точек? 92.
93.

60. Что такое сложное отношение четырех лучей $(abcd)$? 94.

61. Какие перестановки можно делать в $(abcd)$? 95

62. Как выражается $(abcd)$ через $(ABCD)$?

63. Что такое четыре гармонические точки? 96

64. —"— —"— —"— гармонических луча? 97.

65. Что такое полный 4-угольник Штаудта (4-точник)? 98

66. Как строится 4-ая гармоническая точка с помощью
одной линейки? 99

67. Если одна из точек D уходит на ∞, что можно ска-
зать об остальных точках A, B, C? 100

68. Отчего достаточно инволюционного соответствия 101
в одной паре (AA') $\barwedge$ пунктуалов, чтобы оно имело 102
место для всех пар?
103.

69. Какова зависимость между отрезками AB' BC' CA' в
случае инволюции? 104.
105.

70. Какие точки гармонически делят пары соответст-
венных точек двух инволюционных пунктуалов? 106.

71. Что такое центр инволюции O? 107.

72. Какая зависимость между $AO, A'O, BO, B'O$?

73. Как находят двойные точки инволюционных пунк-
туалов? 108

74. Что делается с простым отношением если одна 109
из точек уходит на бесконечность? Тоже со слож- 110
ным? 111

75. Почему наложенные пунктуалы не могут иметь
более двух двойных точек? 112.

76. Почему конгруентные пунктуалы $\barwedge$? 113.

77. Можно ли сказать, что они инволюционны? 114

78. Если нет, то когда это можно сказать? 115.

79. Отчего инволюционны два пучка со взаимно $\perp$ соот-
ветственными прямыми?

80. Существуют ли двойные элементы у таких пучков?

81. Что такое $\barwedge$ преобразование плоскости? 116

82. Как оно определяется аналитически? 117

83. Укажите инварианты проективн. преобразования ?
84. Можно ли сказать, что при $\overline{\wedge}$-м преобразовании б.у. прямая остается инвариантом ?
85 Во что преобразуется три точки одной прямой ?
86 -"- -"- -"- -"- прямые, проходящие через одну точку?
87. Во что преобразуется 4х точник Штаудта ?
88. Что такое колинеация ?
89. Почему оба понятия коллинеация и проективность совпадают ?
90. Что такое перспективность пунктуалов ?
91. Когда проективные не наложенные пунктуалы $\overset{=}{\wedge}$?
92. Что такое проектирование на прямую ?
93. Что сохраняется при проектировании пунктуалов ?
94. Что такое проектирование на плоскости ?
95 Отчего проектированием получается $\overline{\wedge}$-ое преобразование ?
96 Всякие ли две проективные системы получаются одним проектированием ?
97. Можно ли сказать, что $\overline{\wedge}$-сть образует группу ?
98 Как проективность разлагается на две перспективности ?
99. Как по трем парам соответственных точек (AA') (BB') (CC') двух проективных пунктуалов строится четвертая пара (DD'). ?
100 Что такое два $\overline{\wedge}$-х Δ-ка ABC и A'B'C' ?
101 В чем состоит теорема Дезарга ?
102 Можно ли ее доказать геометрически исходя только из зрительных аксиом ?
103. Что называется физионизмом ?
104. Как он применяется к теореме Дезарга ?
105. В чем заключается принцип непрерывности Понселе ?
106. Как он применяется при доказательстве теоремы Дезарга ?
107. Как можно формулировать теорему Дезарга не вводя несобственных элементов ?
108 Во что она обратится, если центр или ось или центр и ось перспективности уходит на ∞-сть ?
109 Что называется гомологией ?
110 Что такое инволюционная гомология ?
111 Когда она становится осевой симметрией и когда центральной ?
112. Что такое перспектива ?
113. Как изобразится бесконечно удаленная точка ?
114 Что такое главная точка и точка схода ?
115. Параллелограмм в перспективе изображается ли параллелограммом ?

IV. Проективные пунктуалы и пучки 1-го порядка при изучении кривых 2-го порядка.

116 Как определяются пунктуалы и пучки 2-го порядка ?
117 Как определяется кривая 2го порядка ? 2го класса ?

118. Во что вырождаются кривые 2го порядка? 2го класса?
119. Какой луч отвечает общему лучу двух π-х пучков, 152
образующих кривую 2-го порядка?
120. Какая точка отвечает общей точке 2 π-х пунктуа- 153
лов, образующих кривую 2го класса? 154
121. В чем состоит теорема Паскаля и теорема Брианшона? 155
122. Указать случаи вырождения теоремы Паскаля? 156
123. Указать основные свойства вписанного в кривую 2-го 157
порядка четырехугольника. Тоже треугольника? 158
124. Во что обращается теорема Паскаля, если кривая 159
2го порядка вырождается в две прямые? 160
125 Как построить кривую второго порядка по пяти за-
данным точкам? По 4-м точкам и касательной в од- 161
ной точке? По 3-м точкам и касательной в двух 162
точках?
126 Как найти точку пересечения кривой второго порядка 163
заданной 5-ю точками ABCDE с прямой BG проходящей 164
через точку B? 165
127. Что такое меровые и что такое зрительные свойства? 166
127. Что такое взаимное положение? 167
128. Указать взаимные зрительные аксиомы? 168
129. -"- взаимное положение первой части теоремы Дезар-
га? 169
130 Указать ей взаимное положение?
131 В чем состоит закон двойственности?
132 Необходимо ли доказывать взаимно зрительные теоремы? 170
133 Понятие взаимное пунктуалу? Пучку?
134 Теорема взаимная теореме Паскаля? 171
135 После чего эту теорему можно свести к теореме 172
Брианшона?
136 Указать случаи вырождения теоремы взаимной тео- 173
реме Паскаля?
137 Указать основное свойство описанного около кривой
второго класса четырехугольника. Тоже треугольника? 174
138. Как определяется поляра в аналитической геомет- 175
рии? Как в проективной? 176
139 Как определяется конфигурация ее определяющая?
140 Во что обращается поляра, если точка взята на
кривой? 177
141 Указать понятие взаимное с понятием поляры? 178
142. Как по поляре строится полюс? 179
143 Где полюс, если поляра касательная? 180
144 Как построить поляру, если полюс вне кривой? Внут-
ри кривой? 181
145 Что такое полярный треугольник? 182
146 Полюс движется по прямой, что делается с полярой?
147 Указать взаимное свойство? 183
148. Что называется сопряженными точками? Прямыми?
149 На двух прямых мы имеем пунктуалы образован- 184
ные сопряженными точками, что это за пунктуа- 185
лы?
150 Проективны ли они? Инволюционны ли они? 186
151 Указать взаимное положение? 187

152. Что можно сказать о прямой сопряженной стороне вписанного в кривую второго порядка треугольника?

153 В чем состоит взаимная теорема?

154 Отчего касательные делят гармонически две сопряженные прямые?

155 Указать взаимное положение?

156 Что называется диаметром в аналитической геометрии?

157 -"- -"- -"- в проективной геометрии?

158 -"- -"- центром?

159 Отчего все диаметры проходят через центр?

160 Как различаются кривые второго порядка в отношении бесконечно удаленных точек?

161 Как определяются сопряженные диаметры?

162 Указать основные свойства описанного и вписанного в кривую 2-го порядка параллелограмма?

163 Что такое асимптоты гиперболы?

164 Почему они проходят через центр?

165 Почему оси есть биссектрисы гиперболы?

166 Какими проективными пучками образуется круг?

167 Каков его порядок? Каков его класс?

168. Какие кривые получаются проективным преобразованием круга?

169 Почему в понятие кривой 2-го порядка, устанавливаемое проективной геометрией, входят эллипс, гипербола и парабола.

170 Указать проективное преобразование преобразующее $x^2+y^2=a^2$ в $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$?

171 Как круг преобразуется в гиперболу? В параболу?

172 Каково уравнение гиперболы относительно асимптот и из какого свойства гиперболы оно выводится?

173 Каково основное свойство эллипса и гиперболы, откуда выводятся их уравнения $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$?

174. Что такое преобразование взаимных поляр?

175. Во что преобразуются две $\parallel$ прямые? А две $\perp$ прямые?

176 Что называется взаимной меровой теоремой?

V. Проективные пунктуалы и пучки 2-го порядка.

177 Что назыв. проективным пунктуалом 1-го и 2-го порядка?

178 -"- -"- пучком 1-го и 2-го порядка?

179 Что такое проективные пунктуалы и пучки 2-го порядка?

180 -"- -"- $\barwedge$ пунктуалы 2-го порядка?

181 В каком случае центр перспективы сам себе отвечает?

182 Каково наибольшее число точек, общих двум проективным пунктуалам 2-го порядка?

183 Каково наибольшее число лучей общих двум проективным пучкам 2-го порядка?

184 Что такое ось и что такое центр проективности?

185 Как определяются двойные элементы в двух наложенных проективных пунктуалов 2-го порядка?

186 Тоже в 2-х наложенных проективных пучках 2-го пор.?

187 Каким образом с помощью круга определяются двойные точки двух налож. пунктуалов 1-го порядка?

188. Что такое задача 1-го порядка? 2-го порядка?
189. 1-го или 2-го порядка задача о пересечении кривой 2-го порядка, проходящей через 5 заданных точек ABCDE, прямой EQ? 217.
190 А прямой PF? 218.
191 Как решается последняя задача? 219
192 В чем состоит взаимная задача? 220
193 Что такое центр и ось инволюции? 221
194 Как по двум парам соответственных точек инволю- 222
ционных пунктуалов AA' BB' найти другие пары? 223
195 Как с помощью круга строятся двойные точки инволю- 224
ционных пунктуалов 1-го порядка?
196 Как построить кривую второго порядка, проходящую 225
через 4 заданные точки и касательной к данной кри- 226
вой?
197. Что такое инволюционная шестерка (AA') (BB') (CC')? 227
198 Как она строится с помощью полного 4-ка? 228
199 Во что обращается инволюционная 6-ка, если A сов- 229
падает с A', а B – с B'?
200 В чем состоит вторая теорема Дезарга? 230.
201 Построить взаимную теорему?
202 Как определяется пара точек M и N' общая двум па- 231
рам инволюционных пунктуалов 2^го^ порядка? 232
203 Как определить оси по двум парам сопряженных 233
диаметров? 234
204 Что называется фокусом кривой 2^го^ порядка?
205 Отчего фокусы расположены на оси? 235
206 Где второй фокус параболы? 236
207 Отчего отрезок касательной между касательны- 237
ми в конце оси виден из фокуса под прямым углом, 238
гиперболы, параболы?
208 Как построить фокус эллипса?
209 Двойными точками каких инволюционных пункту-
лов являются фокусы?
210. Откуда следует, что углы образуемые касательной
с радиусами-векторами равны?

VI. Проективная метрика.

211 Что такое зрительная геометрия и что такое меро-
вая?
212. Какие меровые свойства сводятся к зрительным
в отношении к неизменным при преобразованиях
движения объектам?
213 Указать такой объект?
214 Как проективная метрика определяет параллель-
ность? А как середину?
215 Что такое псевдочертеж и как он получается?
216 Отчего пары сопряженных диаметров образуют
инволюционные пучки?

217. Могут ли такие пучки иметь двойные элементы ?
218. Отчего взаимно $\perp$-ые прямые образуют инволюционные пучки ?
219 Имеют ли они двойные элементы ?
220 Что такое циркулярные точки ?
221 Как проективная метрика определяет $\perp$-сть ?
222 Что такое изотропные прямые ?
223 Каковы их уравнения ?
224 Как можно определить фокус с помощью изотропных прямых ?
225 Чему равно сложное отношение $4^{х}$ прямых ?
226 В чем состоит формула Лагерра для угла ?
227 Каково проективное определение окружности ?
228 Проективное истолкование: высоты Δ-ка пересекаются в одной точке ?
229 Осевая метрика с точки зрения проективной метрики ?
230. Проективное определение центра окружности, заданной тремя точками ?
231 Отчего осевая симметрия преобразует круг в круг ?
232 Что называется отображением ?
233 Как сводится вращение к двум отображениям ?
234 —"— —"— —"— к двум отображениям ‖-е перенесение ?
235 Образуют ли отображения группу ?
236 Что является инвариантом отображения ?
237 Дать проективное истолкование отображений ?
238 Проективное истолкование сводимости вращения к двум отображениям ?

Оглавление.-