МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ РОСТОВСКОГО ОБЛАСТНОГО ИНСТИТУТА
ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ И ПЕРЕПОДГОТОВКИ
РАБОТНИКОВ ОБРАЗОВАНИЯ

Практические
СОВЕТЫ УЧИТЕЛЮ

УЧИТЕЛЬ ДОНА – 2003

Специальный выпуск

№ 8

Практические
СОВЕТЫ УЧИТЕЛЮ

Методический журнал

Издается с декабря 1998 года

№ 8(57)

Издательство Ростовского областного института повышения квалификации и переподготовки работников образования

2003

Сдано в набор 2.06.2003.
Подписано в печать 28.07.2003. Усл. печ. л. 7,0.
Уч.-изд. л. 6,4. Тираж 600 экз.
Заказ № 141. С 64.

Ростовский областной институт
повышения квалификации и
переподготовки работников образования
344011, Ростов-на-Дону,
пер. Гвардейский 2/51 пер. Доломановский.
Телефон 67-56-00.
Подписной индекс 53818.
E-mail: ipkpro@aaanet.ru
www.ipkpro.aaanet.ru

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-3558 от 31.05.2000 в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

ЧИТАЙТЕ В НОМЕРЕ

щихся школ и классов с углубленным изучением математики Л.С.Атанасян «Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса».

Помимо того, что использование принципа двойственности значительно упрощает запоминание учащимися нового материала, у них появляется возможность самостоятельно формулировать и открывать новые теоремы.

Введение в школьный курс геометрии принципа двойственности было апробировано мною при проведении факультативного курса в математических классах лицея №33 г.Ростова-на-Дону. Усвоение материала учениками проходило естественно и легко, предложенные идеи получили одобрение и положительную оценку со стороны учителей-математики. Ниже предлагается программа этого факультатива.

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС «ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ»

(для классов с углубленным изучением математики)[4]

Пояснительная записка

В связи с усиливающейся дифференциацией обучения необходимо предоставить дополнительные возможности тем учащимся, которые в школе проявляют повышенный интерес к математике. Обучение в школах и классах с углубленным изучением математики, участие в работе математических факультативов предполагают наличие уже проявившегося интереса учащихся к математике. Немалую роль в этом играет правильно организованная внеклассная работа по математике и, в частности, чтение определенных спецкурсов.

Целями изучения данного спецкурса в школе являются как основные цели изучения математики:

- интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых для полноценной жизни в обществе;
- формирование представления об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;
- формирование обобщенного умения преобразования математических моделей;
- формирование представления о математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для общественного прогресса;

так и цели частного характера:

- повышение интереса к математике;
- выявление и развитие математических способностей учащихся;
- формирование прикладных приёмов и навыков радикального преобразования математической модели через построение ей двойственной;
- знакомство учащихся с математической литературой, литературой по внеклассному чтению;
- приобщение учащихся к коллективным формам работы;
- развитие исследовательских навыков, и навыков проектной деятельности;
- углубление, расширение математических знаний;
- воспитание уважения к «классическим» математическим произведениям и отношения к математической литературе вообще;
- формирование чувства гордости за достижения соотечественников и земляков математиков.

[4] Может быть использован и в обычной школе для учащихся, интересующихся математикой.

Применение принципа двойственности в математике не является новацией, но вопрос использовании этого принципа в школьном математическом образовании в методической литературе практически нигде не рассматривался. Разработанный нами спецкурс опирается на принципиально новые позиции в преподавании элементарной геометрии как по содержанию материала, так и по методам её изучения. Данный подход методически во многом является выигрышным, так как предоставляет учащимся возможность не получать знания, а самим их выдумывать.

Наша разработка ориентирована на применение в 9-10-х классах. Опыт работы автора показывает, что идеи, положенные в основу разработки, могут успешно применяться и на более ранних ступенях изучения геометрии, например, уже даже с 7-го класса.

Чтение спецкурса рассчитано на две учебные четверти (полугодие). Занятия проводятся каждую неделю. Таким образом, мы располагаем примерно семнадцатью часовыми занятиями.

Первое занятие является вводным. Здесь перед учениками раскрывается проблема, лежащая в основе названия спецкурса, и делается обзор планируемого содержания спецкурса. Намечаются основные направления в изучении вопроса и формы проведения занятий; сообщается форма отчетности; решаются организационные вопросы.

Затем следует основной цикл занятий, который условно поделен на 4 раздела (см. Структуру спецкурса). В последние 2 часа предполагается проведение занятий систематизации и обобщения полученных знаний и накопленного в самостоятельной работе учащихся материала. Организационной формой проведения такого занятия может послужить «Математический конгресс» или «Школьная математическая конференция», где учащиеся будут представлять оформленный материал по предлагаемой к каждому занятию тематике рефератов или по темам индивидуальных заданий для самостоятельной работы. Сюда входит подготовка доклада по выбранной теме, самостоятельно составленная к ней библиография и написание краткой аннотации использованных источников.

Так как формулировки большинства тем предполагают самостоятельную работу учащихся, в связи с отсутствием требуемого материала в литературе в таких темах большее внимание уделяется конструктивной иллюстрации рассматриваемых преобразований.

Для диагностики результативности спецкурса учащиеся тестируются в начале каждого занятия по материалу предыдущего урока, а выполнение заданий, предложенных для самостоятельной проработки, является контролем на выходе.

Структура спецкурса

Основной цикл занятий данного спецкурса разделен на 4 раздела:

I. Введение. Необходимые математические сведения (2ч).

II. Конструктивное определение двойственных элементов (4ч).

III. Использование принципа двойственности при решении геометрических задач (4ч).

IV. Использование принципа двойственности при доказательстве теорем (4ч).

В разделе "*Введение. Необходимые математические сведения*" рассматриваются простейшие из формулировок принципа двойственности на плоскости и в пространстве, иллюстрируется его наличие в математических предложениях, в геометрических фигурах, геометрических телах и их свойствах. Указываются некоторые ограничения действия принципа двойственности.

В разделе "*Конструктивное определение двойственных элементов*" относительно базисной окружности конструктивно вводятся двойственные геометрические фигуры и двойственные друг другу метрические понятия.

В разделе "*Использование принципа двойственности при решении геометрических задач*" намечен разбор следующих вопросов: сущность метода решения геометрических задач с использованием принципа двойственности; классификация задач, решаемых с использованием принципа двойственности и способы их решения.

В разделе "*Использование принципа двойственности при доказательстве теорем*" требует рассмотрения вопрос о понятии взаимной теоремы; об общей схеме получения теоремы, взаимной данной; о различных способах использования принципа двойственности при доказательстве теорем.

Содержание спецкурса

I. Введение. Необходимые математические сведения.

1-2. Принцип двойственности и его применение в геометрии.

Примерное содержание: Определение принципа двойственности. История открытия принципа двойственности. Введение несобственных элементов. Принцип двойственности на плоскости. Принцип двойственности в пространстве.

II. Конструктивное определение двойственных элементов.

3-4. Конструктивное определение двойственных элементов.

Примерное содержание: Построение поляры. Построение полюса. Двойственные фигуры несобственных элементов. Конструктивное определение «угла между двумя точками». Параллельные и ортогональные точки. Конструктивное определение «расстояния между двумя прямыми». Четверки гармонических элементов.

5-6. Взаимные метрические теоремы.

***Примерное содержание*:** Понятие взаимной метрической теоремы. Д.Д.Мордухай-Болтовской и его метрические теоремы. Словарь для перевода теорем. Теорема о высотах треугольника и ей взаимная. Теорема о биссектрисах треугольника и ей взаимная. Теорема о медианах треугольника и ей взаимная.

III. Использование принципа двойственности при решении геометрических задач.

7-8. Применение принципа двойственности при решении задач на построение.

Примерное содержание: Общий способ использования принципа двойственности при решении задач на построение. Решение задач 1-го типа. Решение задач 2-го типа. Решение задач 3-го типа. Решение задач 4-го типа.

9-10. Решение геометрических задач с использованием принципа двойственности.

Примерное содержание: Сущность метода и его ограничения. Использование свойств полярного преобразования при решении задач на доказательство. Использование двойственных элементов и меровых соотношений между ними при решении геометрических задач. Решение задач смешанного типа.

IV. Использование принципа двойственности при доказательстве теорем.

11-12. Взаимные теоремы геометрии треугольника.

Примерное содержание: Двойственные треугольники. Автополярный треугольник и теорема об автополярном треугольнике. Теорема Менелая. Теорема Чева. Свойства и теоремы, доказываемые с помощью теоремы Менелая и теоремы Чева.

13-14. Взаимные теоремы геометрии окружностей.

Примерное содержание: Теорема о вписанных углах, опирающихся на одну и ту же хорду и ей взаимная. Теорема о вписанном угле, опирающемся на диаметр и ей взаимная. Теорема о произведении отрезков двух пересекающихся хорд и ей взаимная.

***15*-17. Итоговое занятие.**

Учебно-тематический план

№ п/п	Тема занятия	Цели и задачи	Форма работы	Количество учебных часов	Количество часов на самостоятельную работу
1	Принцип двойственности (ПД) и его применение в геометрии	Ознакомление учащихся с ПД, историей его открытия, его ролью и значением в математике; области применения ПД. Способствовать формированию понятия малого и большого ПД	Мастерская	2	3
2	Конструктивное определение двойственных элементов	Способствовать формированию понятия «двойственное преобразование», «поляра», «полюс»; выработке навыков по построению взаимных друг другу элементов. Ознакомить с понятиями: «угол между двумя точками», «расстояние между двумя прямыми», «параллельные и ортогональные точки», «гармоническая четверка элементов»	Мастерская	2	4
3	Взаимные метрические теоремы	Способствовать формированию понятий «взаимная метрическая теорема». Ознакомление с жизнью и деятельностью Д.Д.Мордухай-Болтовского. Выработка навыка получения новых теорем с использованием «словаря» и их доказательство	Мастерская	2	4
4	Применение ПД при решении задач на построение	Ознакомление с приемами использования ПД в решении задач на построение. Способствовать выработке умений и навыков использования ПД при решении задач на построение	Мастерская	2	2
5	Решение геометрических задач с использованием ПД	Способствовать усвоению сущности метода, его особенностей и ограничения. Выработка умений по использованию ПД для решения задач на доказательство, на использование двойственных элементов и меровых соотношений между ними	Мастерская	2	3

6	Взаимные теоремы геометрии треугольника	Способствовать формированию понятий: «двойственный треугольник», «автополярный треугольник»; ознакомить с доказательством теорем Чева и Менелая и их применением для получения других теорем и свойств геометрии треугольника	Мастерская	2	2
7	Взаимные теоремы геометрии окружностей	Ознакомление с теоремой о вписанных углах, опирающихся на одну и ту же хорду, и ей взаимной; теоремой о вписанном угле, опирающемся на диаметр, и ей взаимной; теоремой о произведении отрезков двух пересекающихся хорд и ей взаимной	Мастерская	2	2
8	Итоговое занятие	Проконтролировать степень усвоения изученного материала. Подвести итог творческой самостоятельной работы учеников. Защита исследовательских проектов	Научная конференция	3	
			Итого:	17	20

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ К НЕКОТОРЫМ ЗАНЯТИЯМ

Занятие № 1

Тема: «Принцип двойственности и его применение в геометрии»

Содержание занятия

1. Определение принципа двойственности.
2. История открытия принципа двойственности.
3. Введение несобственных элементов.
4. Принцип двойственности на плоскости.
5. Принцип двойственности в пространстве.

Литература

Боголюбов А.Н. Математики и механики. К., 1983. С. 385.

Бородин А.И., Бугай А.С. Биографический словарь деятелей в области математики. Киев, 1979. С. 403.

Волошинов А.В. Математика и искусство. М., 2000. С. 293.

Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М., 1979. С. 356.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. М., 1947.

Мантуров О.В. Толковый словарь математических терминов. М., 1970. С. 95.

Математическая энциклопедия. Т.2. М., С. 31-32.

Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия (§21, 22). М., 1969.

Энциклопедия элементарной математики. Т. 4 (геометрия). М., 1970. С. 407.

Темы рефератов

- Открытие принципа двойственности Ж.В.Понселе.
- Принцип двойственности в геометрии и в других науках.
- Малый принцип двойственности.
- Большой принцип двойственности.

Проспект занятия

1. Суть принципа двойственности заключается в том, что **из** одного **верного высказывания путем замены** входящих в него **понятий на** так называемые **двойственные** понятия **можно получить** другое, также **верное высказывание.**

2. Этот, скорее философский, принцип сформулировал известный французский ученый Жан Виктор Понселе. Примечательно то, что этот закон – «закон двойственности» – Понселе сформулировал в России. Во время войны 1812 г. Ж.В.Понселе был молодым французским офицером. После поражения армии Наполеона Понселе оказался в плену в Саратове. Именно здесь он написал свой математический трактат «Исследование проективных свойств фигур», где впервые был сформулирован принцип двойственности. В этой и дальнейших своих работах он находил новые способы применения принципа двойственности, и с его легкой руки этот «закон двойственности» получил широкое распространение и признание математиков.

Принцип двойственности находит своё применение во многих областях высшей математики (теория множеств, математическая логика, проективная геометрия и др.).

3. Для того, чтобы иметь возможность полностью использовать принцип двойственности, потребуется ввести несобственные элементы: бесконечно удаленную точку и бесконечно удаленную прямую.

Допустим, что параллельные прямые в бесконечности пересекаются, тогда: *бесконечно удаленная точка* – это точка пересечения параллельных прямых. Аналогично, предположив, ~~что~~ параллельные плоскости будут пересекаться по бесконечно удаленной прямой, т.е. *бесконечно удаленная прямая* – это прямая пересечения параллельных плоскостей.

Плоскость, дополненную бесконечно удаленной точкой, называют *проективной плоскостью*. Пространство, дополненное бесконечно удаленной прямой, называют *проективным пространством*. Геометрию, изучающую проективную плоскость и проективное пространство, называют *проективной геометрией*. **Все** сформулированные **предложения** в **евклидовой геометрии верны и в проективной геометрии**, но добавляются еще новые теоремы.

В геометрии сформулировано два принципа двойственности: один для проективной плоскости – *малый принцип двойственности*, а другой для проективного пространства – *большой принцип двойственности*.

4. *Малый принцип двойственности* гласит:

«Каждому предложению относительно элементов (точек и прямых) на плоскости соответствует второе, двойственное предложение, которое может быть получено из первого заменой в нем слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» словом «точка». Оба взаимодвойственных предложения справедливы, если доказано одно из них».

Или короче: «Если в одном предложении заменить слово «точка» на слово «прямая» и наоборот, то из верности одного из предложений будет следовать и верность другого предложения».

В качестве примера рассмотрим:

А. *Двойственные друг другу аксиомы*:

1. Две точки определяют одну прямую.

$1'$. Две прямые определяют одну точку.

Б. *Двойственные друг другу фигуры*:

1. Отрезок – это фигура, состоящая из двух точек, соединенных по прямой.

$1'$. Угол – это фигура, состоящая из двух прямых, соединенных в точке.

2. Треугольник как фигура, образованная тремя точками и тремя прямыми, является сам себе двойственным.

3. Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы равны.

$3'$. Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

И т.д.

! Найдите в учебнике геометрии двойственные друг другу определения фигур.

5. ***Большой принцип двойственности*** гласит:

«Каждому предложению относительно элементов (точек, прямых и плоскостей) пространства соответствует второе (двойственное) предложение, которое получается из первого предложения заменой в нём слова «точка» словом «плоскость» и слова «плоскость» словом «точка». При этом слово «прямая» не подвергается замене. Оба взаимодвойственных предложения справедливы, если доказано одно из них.»

Или короче: «Если в одном предложении заменить слово «точка» на слово «плоскость» и наоборот, то из верности одного из предложений будет следовать и верность другого предложения».

В качестве примера рассмотрим:

А. *Двойственные друг другу аксиомы*:

- Две различные точки (A и B) всегда принадлежат одной, и только одной прямой (a).

- - Две различные плоскости (α и β) всегда принадлежат одной, и только одной прямой (a).

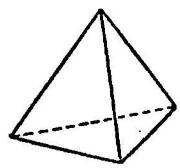
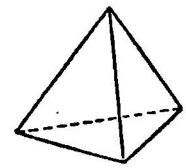
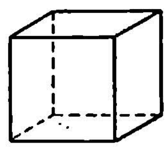
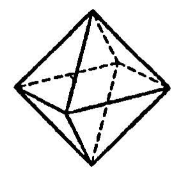
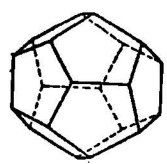
- Точка (A) и не принадлежащая ей прямая (b) всегда принадлежат одной, и только одной плоскости (α)

- - Плоскость (α) и не принадлежащая ей прямая (b) всегда принадлежит одной, и только одной точке (A).

- Три различные точки (A, B и C), не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной, и только одной плоскости (α).

- - Три различные плоскости (α, β и γ), не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной, и только одной точке (A).

Б. *Двойственные друг другу фигуры*:

Количество		Название	Рисунок	Количество		Название	Рисунок
вершин	граней			вершин	граней		
4	4	Тетраэдр 6 ребер		4	4	Тетраэдр 6 ребер	
8	6	Куб 12 ребер		6	8	Октаэдр 12 ребер	
?	?	Додекаэдр		?	?	?	?

! Определите, существует ли фигура, двойственная додекаэдру, если существует, то какая это фигура.

Занятие № 2

Тема: «Конструктивное определение двойственных элементов»

Содержание занятия

1. Построение поляры.
2. Построение полюса.
3. Двойственные фигуры несобственных элементов.
4. Конструктивное определение «угла между двумя точками».
5. Следствия из определения «угла между двумя точками»: параллельные и ортогональные (перпендикулярные точки).
6. Конструктивное определение «расстояния между двумя прямыми».

Литература

Волошинов А.В. Математика и искусство. М., 2000. С. 286-288, 292-294.

Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии – к неевклидовой (вокруг абсолюта). М., 1979. С. 15-20.

Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. М., 1978. С. 163-166.

Пистрак М.П. Этюды по геометрии // Журнал Московского математического кружка. № 8. 1916. С. 303-306.

Темы рефератов

- Взаимные фигуры на плоскости.
- Взаимные фигуры в пространстве.
- Построение фигур, двойственных отрезку в зависимости от его расположения.
- Различные построение взаимных треугольников.

Проспект занятия

Рассмотрим конструктивное определение двойственных друг другу на плоскости элементов: точек и прямых.

Используем для этого полярное преобразование относительно окружности. *Полярное преобразование* – это такое преобразование, которое переводит прямую в точку, а точку в прямую. В этом случае двойственная прямой точка называется *полюсом* прямой, а двойственная точке прямая называется *полярой* точки.

1. Рассмотрим в плоскости окружность S, радиус которой равен единице. Всякой точке плоскости (полюсу) можно относительно окружности S поставить определённую прямую (поляру) и обратно. Построение прямой, двойственной данной точке, или, как мы будем говорить, *взаимной* данной точке, производится следующим образом:

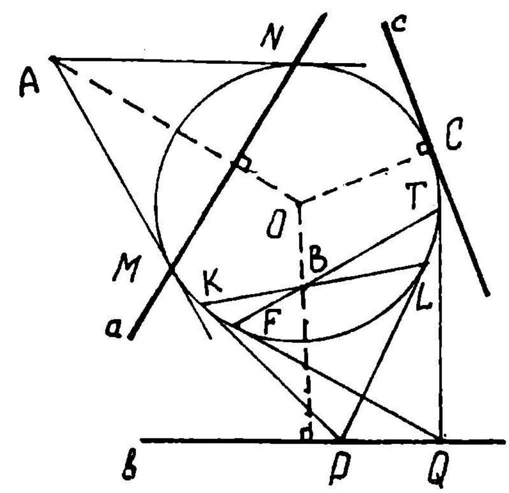


Рис. 1

а) Точка (A, рис. 1) лежит вне S.

Проводим из A касательные AM и AN к S, MN есть искомая прямая a.

б) Точка (B, рис. 1) лежит внутри S.

Проводим хорды KL, FT. Через K и L проводим касательные к S до встречи их в точке P; через F и T до встречи в Q. PQ – есть искомая прямая b.

в) Точка (C, рис. 1) лежит на S.

Искомая прямая есть касательная c к S в этой точке.

2. Отсюда легко видеть, как по данным прямым (полярам) найти взаимные им точки (полюсы).

3. В дальнейшем нам потребуются следующие два замечания:

1) Точке O – центру S взаимна бесконечно удаленная прямая и обратно; назовем поэтому O «*особенной точкой*».

Всякой прямой, проходящей через особенную точку (диаметру S) взаимна бесконечно удаленная точка.

2) Прямая (OA, OB, OC), соединяющая O с данной точкой (A, B, C), перпендикулярна взаимной ей прямой (a, b, c) и обратно.

Бесконечно удаленная точка, взаимная данному диаметру, лежит на луче, перпендикулярном этому диаметру.

4. Рассмотрим две прямые a и b и взаимные им точки A и B. Очевидно, что $OA \perp a$, $OB \perp b$. Следовательно, $\angle AOB$ или равен $\angle(a, b)$, или дополняет его до π.

Если O лежит вне $\angle(a, b)$, то $\angle(a, b) = \angle AOB$.

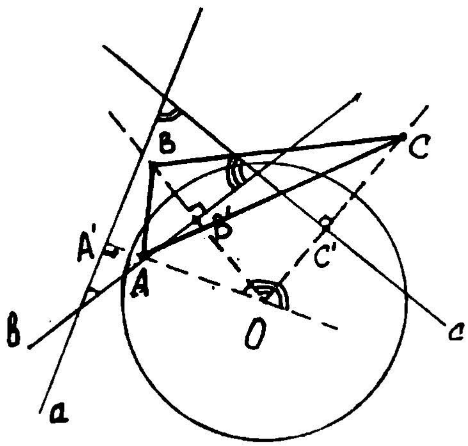


Рис. 2

Если O лежит внутри $\angle(a, b)$, то $\angle(a, b) = \pi - \angle AOB$.

Понятие «**угла между двумя точками**» определим следующим образом:

Углом между двумя точками A и B назовем угол, под которым расстояние AB видно из особенной точки (или угол с ним смежный).

Нетрудно в каждом случае определить, какой именно угол принять за угол между двумя точками (см. Рис. 2 – углы между A и B, B и C, C и A)

$\angle(A, B) = \angle AOB$

$\angle(B, C) = \angle BOC$

$\angle(A, C) = \pi - \angle AOC$

5. Из определения «угла между двумя точками» вытекают три важных следствия:

1. Две точки будут «параллельны», если они лежат на прямой, проходящей через особенную точку.

2. Угол между двумя точками будет прямой (т.е. две точки «ортогональны» друг другу), если расстояние между ними видно из особенной точки под прямым углом.

3. Биссекториальной точкой угла между двумя точками A и B будет пересечение сектора $\angle$AOB с AB.

! Докажите утверждение: «угол между двумя точками» равен углу между их полярами.

! Докажите утверждение: Если полюс B лежит на поляре a, то поляра b проходит через полюс A.

6. Пусть (рис.3) дана точка A и взаимная ей прямая a. Соединим O с A и найдем A' - как пересечение OA с a. Из A проводим AP – касательную к окружности. Из ΔAOP находим: $OP^2 = OA \cdot OA'$. Но $OP = 1$, следовательно $OA = \dfrac{1}{OA'}$ (1).

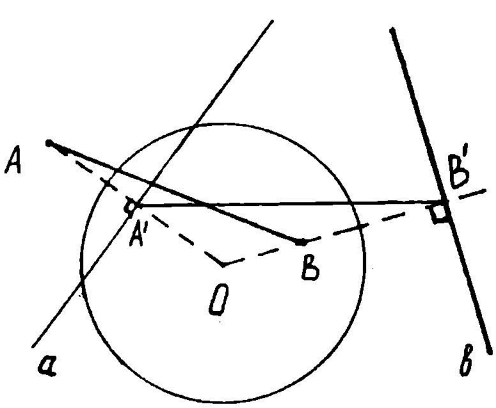


Рис. 3

Рассмотрим отрезок AB (рис. 3). Точкам A и B отвечают прямые a и b. Опустим перпендикуляры OA' и OB' на a и b и соединим A' и B' между собой. Рассмотрим ΔAOB. Имеем:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos(AOB)$ (2),

из $\Delta A'OB'$ имеем:

$A'B'^2 = OA'^2 + OB'^2 - 2OA' \cdot OB' \cdot \cos(AOB)$ (3),

но по (1) $OA' = \dfrac{1}{OA}$; $OB' = \dfrac{1}{OB}$, следовательно из (3):

$$A'B'^2 = \frac{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos(AOB)}{OA^2 \cdot OB^2}$$ или

по $A'B' = \dfrac{AB}{OA \cdot OB}$; $AB = \dfrac{A'B'}{OA' \cdot OB'}$ (4), Равенство (4) можем принять как определение нового понятия. Т.к. понятию «расстояние между двумя точками A и B» двойственным является понятие «**расстояние между двумя прямыми a и b**», то определим последнее, используя (4) следующим образом:

*Расстоянием между двумя прямыми **a** и **b** будем называть расстояние $A'B'$ между основаниями перпендикуляров(OA', OB') из особенной точки (O) на прямые a и b, делённое на произведение OA' OB' этих перпендикуляров.*

Далее расстояние между a и b будем обозначать через $\overline{(a,b)}$: $\overline{(a,b)} = \dfrac{A'B'}{OA' \cdot OB'}$

Занятие № 3

Тема: «Взаимные метрические теоремы»

Содержание занятия

1. Общие положения.
2. Словарь для перевода теорем.
3. Теорема о высотах треугольника и ей взаимная.
4. Теорема о биссектрисах треугольника и ей взаимная.
5. Теорема о медианах треугольника и ей взаимная.

Литература

Волошинов А.В. Математика и искусство. М., 2000. С. 286-288, 292-294.

Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. М., 1978. С.166-167.

Пистрак М.П. Этюды по геометрии // Журнал Московского математического кружка. 1916. № 8. С. 306-308.

Темы рефератов

- Взаимные фигуры на плоскости (конструктивное обоснование).
- Взаимные фигуры в пространстве (конструктивное обоснование).
- Общий способ получения двойственных фигур в пространстве.
- Полярная окружность треугольника.
- Словарь для получения взаимных теорем в пространстве.
- Общая схема построения взаимных теорем.
- Вклад великого ученого-математика Д.Д.Мордухай-Болтовского в создание взаимных метрических теорем.

Проспект занятия

1. Установленные ранее взаимные понятия дают возможность рассматривать каждую теорему плоской геометрии двояко, т.е. к каждой метрической теореме можно найти ей взаимную, в доказательстве уже не нуждающуюся. Достаточно только найти элементы, взаимные входящим, в составе данной теоремы. Особенностью всех взаимных теорем будет то, что они будут определённым образом связаны с некоторой «особенной» точкой плоскости, от выбора которой иногда будет зависеть и формулировка двойственной теоремы. Таким образом, данной теореме будет отвечать иногда не одна, а несколько взаимных теорем.

Заметим также, что нет необходимости строить в каждом случае окружность S. Достаточно только выбрать «особенную» точку.

2. Теорему, двойственную данной теореме, как и построение, двойственное данному построению, можно очень просто получить при помощи замены слов в соответствии со следующим «словарем». (Если нам встречается слово, принадлежащее одной из колонок, то мы должны его заменить на соответствующее слово из другой колонки.)

ТОЧКА	ПРЯМАЯ
ЛЕЖИТ НА	ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ
ПРЯМАЯ, ПРОХОДЯЩАЯ ЧЕРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ	ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПРЯМЫХ
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК	ЧЕТЫРЕХСТОРОННИК
ПОЛЮС	ПОЛЯРА
КАСАТЕЛЬНАЯ	ТОЧКА КАСАНИЯ
...	...

3. Найдем несколько теорем, взаимных теоремам о треугольнике. Как вы помните, треугольнику всегда взаимен треугольник (кроме того случая, когда «особенная» точка не лежит на стороне треугольника или её продолжении, ибо в этом случае одна из вершин треугольника будет в бесконечности. [Самостоятельно убедитесь в этом]).

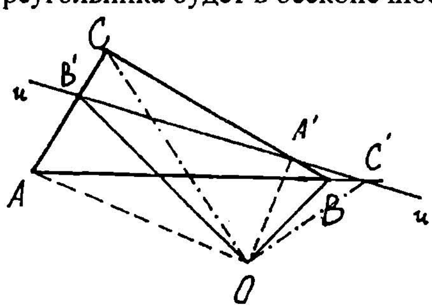


Рис. 4

Теорема 1. ***Высоты треугольника пересекаются в одной точке.***

Для получения взаимной теоремы возьмем ΔABC (рис. 4) и выберем где-нибудь не на стороне особенную точку O.

Под высотой треугольника к стороне a мы понимаем прямую, проходящую через A и перпендикулярную к a. Взаимным понятием будет точка, ортогональная к A и лежащая на a. Для ее получения соединим O с A и проведём $OA' \perp OA$ до пересечения в A' с a. A' есть искомая ортогональная точка. Таким же образом находим точки B' и C'.

Отсюда

Взаимная теорема 1. ***Три ортогональные точки треугольника лежат на одной прямой.***

4. Теорема 2. ***Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.***

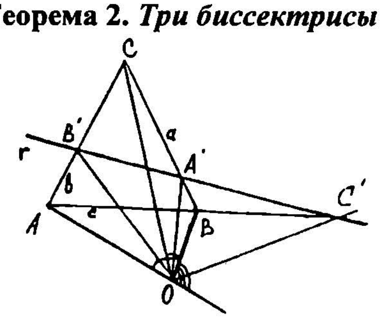


Рис. 5

Взаимная теорема 2. ***Три биссекториальные точки треугольника лежат на одной прямой.*** Смысл этой теоремы ясен из рис. 5. Проводим из O лучи OA, OB, OC и биссектриссы образовавшихся углов OA', OB', OC' до их пересечения с a, b, c в A', B', C'. Тогда A', B', C' – биссекториальные точки треугольника – лежат на одной прямой r.

5. Теорема 3. ***Три медианы треугольника пересекаются в одной точке.***

! Найдите взаимные элементы понятий, входящих в формулировку теоремы. Составьте теорему, взаимную данной. Выполните чертеж, иллюстрирующий теорему, взаимную данной.