МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. К.Д. УШИНСКОГО»
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

ТРУДЫ
X МЕЖДУНАРОДНЫХ КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

Ярославль
2012

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434
Т 782

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЯГПУ им. К. Д. Ушинского

Труды X международных Колмогоровских чтений : сборник статей. – Ярославль :
Т 782 Изд-во ЯГПУ, 2012. – 305 с.

ISBN 978-5-87555-427-6

Начиная с юбилея (100-летия со дня рождения академика А.Н. Колмогорова, 2003 г.), на родине выдающегося математика XX столетия в Ярославле проводятся традиционные Колмогоровские чтения.

Настоящий сборник статей X Международных Колмогоровских чтений (2012 г.) так или иначе отражает интересы А.Н. Колмогорова во многих областях математики, теории и методики обучения математике, истории математики и математического образования. Воспоминания учеников и коллег А.Н. Колмогорова содержат новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого.

Сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, студентам и всем, кто интересуется математикой, методикой ее преподавания и историей российского образования.

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434

Редакционная коллегия: В.В. Афанасьев (гл. редактор), В.М. Тихомиров, Н.Х. Розов, Е.И. Смирнов, А.В. Ястребов, Р.З. Гушель

ISBN 978-5-87555-427-6

© ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского», 2012
© Авторы статей, 2012

Оглавление

Глава 1

Пленарные доклады: А.Н. Колмогоров и математика XX столетия

В.И. Арнольд, ученик А.Н. Колмогорова, один из крупнейших математиков нашего времени[1]

В.М. Тихомиров

Владимир Игоревич Арнольд родился 12 июня 1937 года. Меньше чем через месяц наступит день его семидесятипятилетия. Вся жизнь его была восхождением. Детство его прошло в окружении выдающихся личностей. Он родился в Одессе, где в Новороссийском университете у выдающегося педагога С.О. Шатуновского учился его отец, ставший замечательным математиком и педагогом – первым доктором педагогических наук в СССР. Четыре поколения его родных были связаны с математикой. Среди близких родственников по отцу было также множество людей, служивших в Черноморском флоте (двоюродными братьями отца были четыре адмирала Житковы и их брат, знаменитый детский писатель Борис Житков).

Мама В.И. Арнольда была по профессии искусствоведом. Она была племянницей одного из самых замечательных физиков нашей страны – Леонида Исааковича Мандельштама, основоположника выдающейся школы, среди учеников которого были И.Е. Тамм, М.А. Леонтович, А.А. Андронов и другие. Общение с ними оказало очень большое влияние на мальчика. В семье, а потом и в дружеском кругу, мальчика звали Димой.

В.И. писал: "Наибольшее научное влияние оказали на меня из числа моих родственников двое моих дядьёв: Николай Борисович Житков (сын брата моей бабушки писателя Бориса Житкова, инженер-буровик) за полчаса объяснил двенадцатилетнему подростку математический анализ [...], а Михаил Александрович Исакович (брат моей матери, физик) пробовал на мне многочисленные задачи и главы учебника физики, который он писал в составе большого коллектива, руководимого Г.С. Ландсбергом (оба были учениками Л.И. Мандельштама)".

В Москве Арнольды жили в одном из арбатских переулков, в самом центре Москвы, которую мальчик знал, как никто. С самых ранних лет Арнольд стал проявлять необычайную любознательность, распространяющуюся на самые разнообразные области знания. Во время войны, например, когда ему было шесть лет, вооружившись компасом и взяв себе в помощники младшего брата, Дима провел "топографическую съемку" Садового кольца, измеряя расстояние шагами. Он обнаружил при этом многие несоответствия с тем, что изображалось на картах Москвы.

Дима стал учиться в знаменитой пятьдесят девятой школе, из которой вышло множество выдающихся людей, в частности, математиков, механиков и физиков. Владимир Игоревич с большой любовью вспоминал своих учителей, особенно учителя математики Ивана Васильевича Морозкина. Одну из задач, предложенных ему учителем, двенадцатилетний мальчик обдумывал весь день, "и решение, – писал он спустя многие годы, – снизошло на меня, как откровение. Испытанный мною тогда (1949) восторг был в точности тем же, который я испытывал при решении гораздо более серьезных проблем".

Большое влияние на юношу оказало и его участие в домашнем кружке А.А. Ляпунова, носившем название "ДНО" – добровольное (или детское) научное общество. Там обсуждались самые глубокие проблемы науки. Первые научные выступления мальчика с докладами на этом Обществе запомнились глубиной и совершенством изложения трудных научных проблем. "Мой доклад, – пишет Арнольд, – был об интерференции волн, с опытами в ванне, с описанием определения положения самолёта над Тихим океаном по пересечению двух гипербол (заданных разностями фаз сигналов от трёх радиостанций): заодно я разобрал и объяснил теорию конических сечений, сферы Данделена, переход от эллипсов к параболам и к гиперболам, с одной стороны, и принцип Гюйгенса теории распространения волн, с другой".

В школьные годы Арнольд стал принимать участие в московском математическом кружке и московских математических олимпиадах. Об этом он как-то написал, что там "обычно получал вторую премию (как в свое время Максвелл или Кельвин)".

В 1954 году Арнольд становится студентом механико-математического факультета Московского университета. Это была пора расцвета механико-математического факультета. "Плеяда великих математиков, собранных на одном факультете, представляла собой явление совершенно исключительное, и мне не приходилось встречать ничего подобного более нигде". При этом им были названы имена А.Н. Колмогорова, И.М. Гельфанда, И.Г. Петровского, Л.С. Понтрягина, П.С. Новикова, А.А. Маркова, А.О. Гельфонда, Л.А. Люстерника, А.Я. Хинчина и П.С. Александрова.

На первом курсе Арнольд принял участие в кружках для первокурсников А.Г. Витушкина и Е.Б. Дынкина, а когда он учился на втором курсе, А.Н. Колмогоров объявил семинар для младшекурсников. На первом заседании, рассказывая о планах семинара, Андрей Николаевич говорил о различных задачах номографии, в которых процессы, задаваемые сложными функциями приближенно представлялись более простыми. Говоря

[1]Лекция на десятой колмогоровской конференции в Ярославле 15 мая 2012 г.

о дальних перспективах, А.Н. сказал, что можно помечтать и о том, чтобы найти подходы к решению 13-й проблемы Гильберта о невозможности свести функции многих переменных к суперпозициям функций меньшего числа переменных.

В 1900 году на Парижском математическом конгрессе Давид Гильберт, один из крупнейших математиков всех времен, выступил с докладом, в котором поставил перед математическим миром задачи, исследование которых представляло, по его мнению, значение для будущего математической науки. Был и вопрос о том, существуют ли непрерывные функции многих переменных? Не сводимы ли они к функциям от двух переменных? Гильберт определенно полагал, что не сводимы.

Вскоре после объявления своего семинара Колмогоров уехал заграницу, и семинар некоторое время продолжался без него. В это время Арнольд решил одну из задач, предложенных Колмогоровым, что привело к его первой публикации.

А далее произошло непредвиденное: Андрей Николаевич неожиданно для самого себя с неслыханной энергией стал атаковать проблему Гильберта, и сделал решительный прорыв в ее опровержении. Он доказал, что непрерывные функции многих переменных можно свести к функциям трех переменных. Последний шаг в решении проблемы Гильберта он предоставил своим последователям. Этим последователем оказался третьекурсник Арнольд. И в апреле 1957 года на столе Колмогорова лежала мятенькая ученическая тетрадочка в клетку, на которой было написано, что это – курсовая работа студента третьего курса В. Арнольда. В этой курсовой работе была решена тринадцатая проблема Гильберта. Это была первая работа Арнольда, сделавшая его имя известным всему математическому миру. А затем началась череда открытий, само перечисление которых занимает несколько страниц.

В течение более чем года Арнольд входил в новую область – теорию динамических систем. В своей дипломной работе Арнольд далеко развил один колмогоровский метод в этой теории. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах выдающегося математика Юргена Мозера. Теория, построенная этими тремя математиками, получила название "КАМ-теории" – теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. Эта теория получила многочисленные приложения к математике, механике, космологии, физике и многих других направлениях естествознания.

Арнольдом были преобразованы целые математические области. Например, "теория особенностей". В философии с давних времен высказывалась идея о том, что "при переходе количества в качество" эволюционные процессы нередко совершают скачки. На этом во многом строилась "теория революций". Процессы со скачками стали интенсивно изучаться в первой трети двадцатого века. Один из основоположников нового направления – французский математик Рене Том – предложил название "теория катастроф". В работах Арнольда эта теория получила выдающееся развитие. Всегда избегающий неоправданной рекламы, В.И. Арнольд называет это направление "теорией особенностей".

Арнольд далеко развил особый раздел современной геометрии – так называемую "симплектическую геометрию" и заложил новое направление в топологии, получившее фундаментальное развитие – симплектическую топологию.

Очень значителен вклад Арнольда в одну из наиболее интенсивно развивавшихся в прошлом веке областей – алгебраическую геометрию. Им были установлены связи шестнадцатой проблемы Гильберта об овалах вещественных алгебраических кривых с четырехмерной топологией, связь алгебраической геометрии и теории кос. Владимир Игоревич был выдающимся геометром, он занимался алгеброй и теорией чисел, комбинаторикой, логикой и основаниями математики, словом, его творчество охватило почти все разделы современной математики.

Велики его достижения в естествознании – в гидродинамике, космологии, теории потенциала. Он имел плодотворные контакты с крупнейшими физиками своего времени – Н.Н. Боголюбовым, В.Л. Гинзбургом, Я.Б. Зельдовичем. С увлечением и убежденностью В.И. Арнольд развивал и пропагандировал идеи Пуанкаре о том, что математика – это часть естествознания.

Арнольд служил своей профессии и просвещению на всех возможных поприщах. Он основал выдающуюся математическую научную школу, написал множество замечательных учебников (его учебник по классической механике сравнивают с величайшим произведением научной литературы – "Началами философии природы" Ньютона), монографий и обзорных статей, посвященных проблемам математики. Начиная с руководства знаменитым школьным математическим кружком в пятидесятые годы, В.И. Арнольд очень много внимания уделял непосредственной работе со школьниками. В 1963 году он участвовал в работе первой летней математической школы, а последние десять лет ежегодно принимал активное участие в юношеских школах в Дубне. Прочитанный В.И. курс для первых выпускников ФМШ (ныне им. Колмогорова), стал педагогическим шедевром. По инициативе В.И. Арнольда были созданы Московский центр непрерывного математического образования и Независимый Московский университет.

Влияние В.И. Арнольда на весь математический мир было огромно. Арнольд был удостоен множества званий, докторских степеней и наград. Среди премий – премия Московского математического общества (1958 г., которой Владимир Игоревич особенно гордился), Ленинская премия (1965, вместе с А.Н. Колмогоровым), Крафоордская премия Шведской Академии наук (1982), Харвиевская премия Техниона (1994), премия Вольфа (2001), премия имени Жунь-Жуньшоу (2005) (ее называют Нобелевской премией Востока), Государственная премия Российской Федерации (2008).

Общая одаренность его личности проявлялась в самых разнообразных его реакциях и увлечениях. Он был необычайно ярким экскурсоводом по Парижу. Приученный с детства к велосипеду И.Е. Таммом, он совершал длительные (где-то около ста километров) велосипедные прогулки по Подмосковью и по окрестностям Парижа. При этом он и здесь совершал топографические съемки, фиксируя места, где находились поляны с грибами, щавелем или земляникой, или кустарники с малиной. И когда наступало время, он отправлялся километров за сорок от дома в избранные некогда места с рюкзаком, который заполнялся "дарами леса". Зимой Арнольд совершал дальние лыжные прогулки, достигавшие ста километров. Он также любил дальние плавания, ходил в походы, совершал восхождения в горах. Он необыкновенно много читал и массу из прочитанного помнил в деталях, что делало его необычайно интересным собеседником, а среди его собеседников были крупнейшие ученые нашего времени. По ходу дела им совершались и гуманитарные открытия (вызвало всеобщий восторг его открытие связи эпиграфа к пушкинскому "Евгению Онегину" с текстом из "Опасных связей" Ш. де Лакло). Арнольд оставил множество замечательных автобиографических заметок, которые, думается, составляли лишь малую долю того, что могло бы быть им сказано. Им написаны прекрасные воспоминания о Колмогорове, Зельдовиче, Боголюбове.

Замечательную, на все времена, характеристику Арнольда дал его учитель – Андрей Николаевич Колмогоров. Будучи смертельно больным (через четыре месяца его не стало), фактически лишенный возможности говорить (его речь сковывала болезнь Паркинсона), Колмогоров продиктовал приветствие своему ученику к его пятидесятилетию. В ту пору, когда Арнольд был невыездным, и не имел крупных академических званий, Колмогоров выразил "свое убеждение в том, что происходит чествование первого советского математика, не только по силе полученных результатов, но и по темпераменту личности, по способности воспринимать новое и смелости в преодолении препятствий".

Владимир Игоревич Арнольд начал свой путь в бессмертие. Все связанное с ним – необыкновенная одаренность личности, творчество, служение человечеству – делает его образ незабываемым для всех, кому посчастливилось соприкоснуться с ним на своем жизненном пути.

Проблема колебания струны в истории математического анализа

С.С. Демидов

1. Введение. Проблема колебания струны стала одной из важнейших задач в истории математики. Достаточно вспомнить, что размышления над феноменом звучащей струны положили начало математическому естествознанию: они дали пифагорейцам экспериментальные основания для их великого прозрения – "все есть число". Смысл этой формулы, лежащей в фундаменте ихучения, рассматриваемого в перспективе последующего развития мысли, заключался в следующем – за любыми проявлениями окружающей нас действительности следует искать математическую закономерность (число !!!), этими проявлениями управляющую.

Проблема колебания струны стала одной их самых знаменитых задач математического анализа XVIII – XX вв. Б. Тейлор стал первым, кто в 1713-1715 гг. приступил к математическому анализу проблемы малых поперечных колебаний закрепленной на концах струны. Он свел ее к исследованию системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{d^2y}{dx^2} = -b^2y$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -(ab)^2y$, интегрируя которую в предположении, что концы струны закреплены и в начальный момент она совпадает с осью x, получил решение в виде $y = A\sin bx \cdot \sin abt$ (см. [1]).

2. Проблема колебания струны как задача теории дифференциальных уравнений с частными производными. Но лишь в 1747 году эта задача была сведена Ж. Даламбером к форме, эквивалентной привычному нам уравнению с частными производными второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, решение которого он искал при начальных ($u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v_0(x)$) и граничных условиях ($u(0,t) = u(l,t) = 0$). Он записал решение этой задачи в виде $u(x,t) = \frac{u_0(x+at)+u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} v_0(\xi)d\xi$ – формулы, носящей ныне его имя. Мы в дальнейшем для простоты будем считать, что $a = 1$, а функция $v_0(x) = 0$. Не меняя сути дела, это сделает наши записи более компактными. Так уравнение колебания струны примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

а формула Даламбера –

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+t) + u_0(x-t)}{2}. \tag{2}$$

Результат Даламбера произвел чрезвычайно сильное впечатление на его современников и обратил их внимание на новую, открытую Даламбером, область исследований – теорию дифференциальных уравнений с частными производными, к разработке которой он приступил в работах, опубликованных в 1747-1749 гг. [2, 3, 4] в связи с задачами аэродинамики и теории колебаний (об этом см., например, [5, 6]).

Говоря о результатах Даламбера, мы отметили, что он свел задачу не к привычному нам уравнению (1), а эквивалентной ему форме – к выражениям в полных дифференциалах. Первое же уравнение с частными производными мы находим у Даламбера в форме близкой к современной. В опубликованном в 1743 г. "Трактате по динамике" [7] Даламбер рассмотрел задачу колебания весомой нити длины l, подвешенной за один из ее концов. Он свел ее к уравнению $ddy = \left[\frac{dy}{ds} - (l-s)\frac{ddy}{ds^2}\right] dt^2$ – по форме близкой к современной, хотя привычные нам обозначения для частных производных еще отсутствуют[1] Однако, в это время он еще не умел интегрировать это уравнение[2].

Метод, которым ему удалось проинтегрировать уравнение (1) и ряд других уравнений в [4], был приспособлен к другой форме записи уравнения – форме выражений в полных дифференциалах (об этом см. в [5]). Так, уравнение (1) он записал в следующем виде: вводятся обозначения $du = pdx + qdt$, $dp = rdx + sdt$, $dq = sdx + wdt$; тогда вместо привычной нам задачи нахождения решения u уравнения (1) Даламбер ставит задачу нахождения u из условия, что выражения

$$\begin{gathered} rdx + sdt; \\ sdx + rdt; \end{gathered} \tag{3}$$

будут полными дифференциалами.

Почему Даламбер избрал такую форму записи задачи? А потому, что изобретенные им в [4] методы интегрирования были приспособлены для такой формы записи – для выражений в полных дифференциалах. Мы продемонстрируем этот метод только для уравнения колебания струны, он же развил их для более обширного круга уравнений с частными производными (см. [5]).

В начале необходимо сложить два выражения (3). Получится $(r+s)d(x+t)$. Принимая во внимание, что это выражение будет также полным дифференциалом, можно заключить, что $r+s$ будет произвольной функцией $x+t$:

$$r + s = F(x+t). \tag{4}$$

Затем вычтем второе из выражений (3) из первого. Получим $(r-s)d(x-t)$, которое также будет полным дифференциалом. Таким образом $r-s$ будет произвольной функцией $x-t$:

$$r - s = \Phi(x-t). \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем:

$$\begin{gathered} r = F_1(x+t) + \Phi_1(x-t), \\ s = F_1(x+t) - \Phi_1(x-t), \end{gathered}$$

где F_1 и Φ_1 – произвольные функции своих аргументов. Интегрируя систему (3) получим p и q, и, интегрируя $du = pdx + qdt$, достигнем в итоге общего решения в виде

$$u = \varphi(x+at) + \psi(x-at),$$

где φ и ψ – произвольные функции своих аргументов, а также решения при учете начальных и краевых условий

$$y = \varphi(at+x) - \varphi(at-x),$$

где $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(x+2l) = \varphi(x)$, $\varphi(x) - \varphi(-x) = u_0(x)$, $a\varphi'(x) - a\varphi'(-x) = v_0(x)$.

Принимая во внимание нашу договоренность считать $v_0(x) = 0$ и $a = 1$, получим искомое решение в виде (2).

Методы, предложенные Даламбером для интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными, записанных в виде выражений в полных дифференциалах, открыли новую область исследований – теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Но особое впечатление на современников произвело элегантное решение проблемы колебания струны, а сама выведенная Даламбером формула получила название формулы Даламбера. Таким образом задача колебания струны стала одной из важнейших отправных точек развития теории дифференциальных уравнений с частными производными. На материале исследований этой задачи начала формироваться теория краевых задач для таких уравнений и сделала первые шаги геометрическая их теория: геометрическая картина трансформации ее начальной формы оказалась чрезвычайно наглядной.

В статье [10] 1753 года, опубликованной в 1755 году, Л. Эйлер ввел обозначения для частных производных$(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{ddy}{dx^2})$,... и сами уравнения и методы их интегрирования приняли почти привычный нам вид. Сам Эйлер писал так [10, с. 208]: "Вот, следовательно, к чему свелась проблема движения струны: речь идет о том, чтобы найти для y функцию двух переменных x и t, удовлетворяющую такому уравнению $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{Fa}{2M}(\frac{ddy}{dx^2})$ и, кроме того, свойствам, указанным выше [граничным и начальным условиям – С.Д.]. Но прежде чем обратить внимание на

[1] Привычные нам обозначения $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ и т.д. мы находим у Ж. Кузена [8] – на это обратил мое внимание проф. Л. Пепе – хотя нормой они становятся лишь в XIXвеке.

[2] Он сделал это во втором издании "Traitй dedynamique", опубликованном в 1758 году, применив метод разделения переменных, изобретателем которого он и был – об этом см. ниже. С этого издания был осуществлен русский перевод [9].

эти свойства, найдем вообще все возможные функции x и t, которые, будучи подставленными вместо у, удовлетворят уравнению $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{Fa}{2M}(\frac{ddy}{dx^2})$. Это проблема, общее решение которой первым дал господин Даламбер".

Первоначально эту теорию, конкурируя между собой, разрабатывали лишь два математика – Даламбер и Эйлер. В работах [3] и [11], опубликованных, соответственно, в 1749 и в 1752, Даламбер положил начало методу разделения переменных, развитие которому дал, как мы уже упоминали, во втором издании "Трактата по динамике", увидевшем свет в 1758 году. В работе Даламбера [4] 1747 года мы находим и истоки метода характеристических замен (см. [5, 6]), хотя полноценным образом провести характеристические замены можно провести лишь в уравнениях, записанных в привычной нам форме. ЭтоибылосделаноЛ. Эйлером в опубликованной в 1766 году работе [12]: произведя такую замену в уравнении (1), он свел его к уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial x_1} = 0$ – прием, ставший хрестоматийным.

Таким образом, задача колебания струны стала тем полигоном, на котором началась разработка важнейших методов интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными.

3. Спор о колебании струны. Как мы уже говорили, знаменитая статья Даламбера о колебании струны [2] была опубликована в 1749 году в трудах Берлинской академии наук за 1747 год. А уже в следующем, вышедшем в 1750 году, томе за 1748 год на нее статьей "Sur la vibration des cordes" откликнулся Л. Эйлер [13]. В ней он предложил свой (впрочем, мало отличавшийся от даламберовского) метод решения задачи. Что самое существенное – он заявил, что начальная функция, по его мнению, может быть произвольной механической кривой. Эта произвольность, как он заметил позднее [14], ограничивается лишь сплошностью кривой. При этом Эйлер исходил, с одной стороны, из физической сущности задачи – струне можно придать начальную форму, присущую произвольной механической кривой, с другой стороны, из формы решения, которая позволяет строить решение во всей плоскости x, t при произвольном задании начальных данных. Предлагаемое Эйлером решение не является классическим – оно может иметь разрывы не только вторых, но и первых производных. Таким образом, по существу, им были введены обобщенные решения уравнений, более того, им было расширено поле применения анализа от функций аналитических до функций кусочно-дифференцируемых.Однако обобщение решения было произведено им совершенно некорректно: он даже не дал определения такого решения. Говоря, в одних случаях, что оно удовлетворяет уравнению, он не поясняет смысла этих слов (как может функция, не обладающая вторыми производными, удовлетворять уравнению?), в других, обсуждая свойства решения, прибегает к чисто физическим соображениям. Некорректность рассуждений Эйлера (а сделать их корректными при тогдашнем уровне анализа было невозможно) вызвала резко отрицательную реакцию со стороны Даламбера.

Даламбер заявил, что начальная кривая (это его главное возражение!) должна задаваться "непрерывной" функцией. Непрерывность он понимал не в нашем смысле, но в смысле, какой вкладывался в этот термин в XVIII веке: функция должна задаваться единым аналитическим выражением. "Во всех других случаях проблема не может быть решена, во всяком случае моим методом. И я полагаю даже, что она превосходит возможности современного анализа", – писал он в статье 1750 года [11, с. 358], опубликованной в 1752 г. Конечно (и здесь он был глубоко прав!), построение теории обобщенных решений, которые по существу вводил Эйлер, было не по силам анализу XVIII века. Однако, тогдашняя концепция "непрерывной" функции была внутренне несостоятельна, и потому позиция Даламбера также выглядит дефектной.

Разъясняя суть своих возражений, Даламбер свел их к двум главным (см., например, [5, 6, 15]): 1) к необходимости выражения начальной функции единым аналитическим выражением (к ее "непрерывности" в тогдашней терминологии), 2) к необходимости того, чтобы начальная функция была дважды дифференцируема. При этом в понимании математиков того времени второе (дважды дифференцируемость) должно было следовать из первого (из "непрерывности").

Вскоре спор вовлек в свою орбиту большинство крупных математиков того времени – Д. Бернулли, Ж. Лагранжа, П. Лапласа, Г. Монжа и др. Интересно, что большинство из них приняли возражения Даламбера: они согласились с тем, что для произвольных функций (например, для функций, у которых первая производная терпит разрыв) предложенные методы интегрирования уравнения (1) некорректны. В то же самое время, стараясь обосновать возможность использования "формулы Даламбера" в случае, когда начальная функция обладает разрывами второй и даже первой производной, они занялись поиском обходных способов получения этой формулы. При этом они, по существу, действовали на путях, на которых в XX веке определялись обобщенные решения (см. [15]). Так Лагранж заменил уравнение (1) задачи колебания струны соответствующим интегральным уравнением, а Лаплас наметил такой выход: начальная кривая, имеющая разрывы производных первого порядка, аппроксимируется сходящейся к этой кривой последовательностью гладких кривых. Для каждой такой гладкой кривой конструкция Даламбера законна. Предел последовательности таких решений и даст искомое решение для негладкой начальной кривой.

Сам Даламбер, по существу, стоявший на позиции "классического решения", понемногу уточнял свою позицию и в конечном итоге отказался от "непрерывности" начальной функции, сведя свои требования [6, 15-17] к ее гладкости до ее дважды дифференцируемости. То есть Даламбер пришел к безупречной позиции классического решения. Эйлер же понимал под решением обобщенное решение, корректным образом его так и не определив. Почему, однако, он продолжал утверждать (см., например, [14]) правильность своей позиции в пику даламберовской – неужели он не видел ущербности свой конструкции, которую разглядели и Лагранж, и

Лаплас, и даже Ж.А.Н. Кондорсе? Не может этого быть! Мы полагаем, что просто он видел гораздо дальше других – он чувствовал правомерность обобщения понятия решения, хотя обосновать свои "предчувствия" не мог.

Это превосходило возможности математики XVIII века. В этом был прав Даламбер, который (здесь мы повторяем его слова, сказанные в 1750 году и уже приводившиеся нами выше) говорил: "И я полагаю даже, что она превосходит возможности современного анализа". Таким образом, на путях обсуждения проблемы колебания струны был намечен вектор одного из магистральных путей развития теории дифференциальных уравнений – введения понятия их обобщенного решения.

И может быть один из главных результатов рассказанной истории: в ходе спора о колебании струны происходило разрушение уже веками сложившегося убеждения, что математические структуры суть выражения свойств окружающего нас пространства, другими словами, математическая реализация явлений действительности. Самым известным и радикальным событием в разрушении такого убеждения стала история неевклидовой геометрии. С большим трудом математики отказывались от идеи, что евклидова геометрия трехмерного (извините за тавтологию!) евклидова пространства – геометрия окружающего нас физического мира. (Вспомним, что даже создатель неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевский пытался обосновать ее "истинность", проводя астрономические наблюдения !) Математический анализа в рамках этих представлений – описание механических процессов, происходящих **в этом** пространстве. Спор о колебании струны, точнее о природе функций, входящих в решение уравнения колебания струны, показал, что физическое явление следует отличать от его математической модели (или даже моделей), что нельзя в обсуждении математического вопроса некритически использовать физические аргументы, как это делали и Эйлер, и Даламбер. С большим трудом математики начали осознавать, что физическое явление и его математическая модель суть материи разного порядка!

4. Теоретико-функциональный аспект спора. Каждый знакомый с историей спора о колебании струны заметит, что мы совершенно забыли об одном из главных аспектов развернувшейся дискуссии о колебании струны – о теоретико-функциональном.

В 1753 году в спор вступил Д. Бернулли [18], который, исходя из физических соображений, предложил искать решение задачи в виде суперпозиции гармонических колебаний – в виде тригонометрического ряда

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin \frac{3\pi}{l} + ...,$$

где l – длина струны, $\alpha, \beta, \gamma, ...$ – функции времени.

Д. Бернулли исходил из физических соображений: звук, издаваемый струной, состоит из главного тона и бесконечного множества более слабых обертонов. Каждому тону соответствует форма струны в виде синусоиды, следовательно, фигура колеблющейся струны должна является сочетанием таких синусоид ("принцип наложения колебаний" Д. Бернулли). Бернулли считал, что любую связную кривую можно изобразить тригонометрическим рядом.

Такой подход вызвал дружную отрицательную реакцию всех без исключения участников спора, включая Даламбера, Эйлера и Лагранжа. Все они полагали, что функции, представленные тригонометрическим рядом, составляют хотя и важный, но все же частный класс рассматриваемых в анализе функций. Ситуация коренным образом изменилась после работ Ж. Фурье, открывшего миру гармонический анализ (об этом см., например, [19]). В его рождении, как мы видим, важную роль сыграла проблема колебания струны – с ее исследования родился и метод разделения переменных (Даламбер, Эйлер), и идея представления встречающихся в анализе функций тригонометрическими рядами (Д. Бернулли). Вопрос о представлении функций тригонометрическими рядами красной нитью проходит через всю историю теории функций XVIII-XX вв. Особое место этот вопрос и проблема колебания струны заняли и в истории Московской школы теории функций. Достаточно вспомнить знаменитую диссертацию Н.Н. Лузина "Интеграл и тригонометрический ряд" (1915) [20]. С рассказа о колебании струны он начинал свои курсы по теории функций действительного переменного. Автору этого доклада довелось в 1960 году прослушать на механико-математическом факультете Московского университета такой курс, прочитанный его знаменитой ученицей Н.К. Бари (1901-1961). Она также начинала его с рассказа об этой дискуссии. Так знаменитая проблема, ставшая источником прозрений Пифагора, обретшая новую жизнь в математическом анализе Нового времени (Тейлор, Даламбер, Эйлер, Д. Бернулли, Лагранж, Лаплас, Монж, Фурье и т.д.) продолжает жить в памяти и практике научного сообщества.

Библиографический список

1. *Truesdell C.* Therational mechanics of flexible or elastic bodies. 1638-1788. In: Euler L.Opera omnia. Series II. V. 11. Turici. 1960.
2. *d'Alembert J.* Recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration. Dans: Hist. Ac. Sc. Berlin. 1747. Vol. 3. Berlin. 1749. P. 214-219.
3. *d'Alembert J.* Suites des Recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration. Dans: Hist. Ac. Sc. Berlin. 1747. Vol. 3. Berlin. 1749. P. 220-229.
4. *d'Alembert J.* Réflexions sur la cause générale des vents. Paris. 1747.

5. *Demidov S.S.* Création et développement de la théorie des équations différentielles auxdérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert. Dans: Rev. Hist. Sci. 1982. V. 35. № 1. P. 3-42.
6. *Demidov S.S.* D'Alembert et la notion de solution des équations différentiellesaux dérives partielles. Dans: Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche. N. 2.2008. P. 155-166.
7. *d'Alembert J.* Traité de dynamique. Paris. 1743.
8. *Cousin J.A.* Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris. 1777.
9. *Даламбер, Ж.* Динамика [Текст] / Ж. Даламбер. Перевод и примечания В.П. Егоршина. – М.-Л., 1950.
10. *Euler L.* Remarques sur les mémoires précédents de M. Bernoulli. Dans: Hist. Ac. Sci.Berlin. 1753. Berlin. 1755. P. 196-222 (Operaomnia. Ser. 2. V. 10. P. 232-254).
11. *d'Alembert J.* Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration. Dans: Hist. Ac. Sc. Berlin. 1750. Berlin. 1752. P. 355-360.
12. *Euler L.* Recherches sur l'intégration de l'équation $(\frac{ddz}{dt^2}) = aa(\frac{ddz}{dx^2}) + \frac{b}{x}(\frac{dz}{dx}) + \frac{c}{xx}z$. Dans: Miscellanea Taurinensia. 1762-1765. T. 3. 1766. P. 60-91 (Opera omnia. Ser. 1. V. 23. Lipsiae. 1938. P. 42-73).
13. *Euler L.* Sur la vibration des cordes. Dans: Hist. Ac. Sc. Berlin. 1748. Vol. 4. Berlin. 1750. P. 69-85 (Operaomnia. Ser. 2. V. 10. P. 63-77).
14. *Euler L.* De chordisvibratibusdisquisitioulterior. In: Novi Comm. Ac. Sc. Petr. 1772. V. 17. 1773. P. 381-409 (Operaomnia. Ser. 2. V. 11. Sect. 1. P. 62-80).
15. *Демидов, С.С.* О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в XVIII веке [Текст] / С.С. Демидов // Историко-математические исследования. – 1976. – Вып. 21. – С. 158-182.
16. *d'Alembert J.* Sur les functions discontinues. Dans: d'Alembert J. Opusculesmathématiques. T. 8. Paris. 1780. P. 302-308.
17. *Юшкевич, А.П.* К истории спора о колеблющейся струне (Даламбер о применении "разрывных" функций) [Текст] / А.П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – 1975. – Вып. 20. – С. 218-231.
18. *Bernoulli D.* Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748; sur le mélange de plusieurs espèces devibrations simples isochrones qui peuvent coexister dans un même système de corps. Dans: Hist. Ac. Sc. Berlin. 1753. Berlin. 1755. P. 173-195.
19. *Паплаускас, А.Б.* Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега [Текст] / А.Б. Паплаускас. – М., 1966.
20. *Лузин, Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд [Текст] / Н.Н. Лузин. – М.-Л., 1951.

А.Н. Колмогоров и фрактальная геометрия

В.С. Секованов

Андрей Николаевич был уникальным ученым. Огромный вклад, внесенный им в теорию вероятностей, теорию функций, теорию тригонометрических рядов, теорию множеств, теорию топологических векторных пространств, топологию, теорию турбулентности, кибернетику нам известен. Трудно поверить, что один ученый смог охватить такое огромное пространство математической науки. Но это еще не все!

Работая в течение 15 лет на над книгой "Гений из Туношны" [3,5], автор убедился, что Андрей Николаевич Колмогоров стоял у истоков бурно развивающейся математической дисциплины – фрактальной геометрии, находящей в настоящее время многочисленные приложения.

Оказывается идеями самоподобия, которые легли позднее в теорию фракталов, разработанную Бенуа Мандельбротом, Колмогоров пользовался при исследовании турбулентных потоков.

В классической книге "Фрактальная геометрия природы" [2] основателя теории фракталов Бенуа Мандельброта, переведенной на многие языки и выдержавшей несколько изданий, говорится: "Кроме того, именно в контексте турбулентности теория каскадов и самоподобия достигла своих прогнозистских триумфов между 1941 и 1948 гг. Главными действующими лицами здесь были Колмогоров, Обухов, Онсагер и Фон Вайцзекер, однако традиция связывает достижения этого периода только с именем Колмогорова". Не принижая заслуг выше перечисленных Мандельбротом ученых (отметим, что Александр Михайлович Обухов, являлся учеником Андрея Николаевича Колмогорова), которые внесли значимый вклад в теорию турбулентности, автор не может удержаться от хорошо известного утверждения, что традиции не бывают случайными!

Но и это еще не все! В эпилоге "Путь к фракталам", написанном к книге "Фрактальная геометрия природы" Отец фрактальной геометрии Бенуа Мандельброт еще неоднократно упоминает Колмогорова. Проследим за ходом его суждений: "В том же 1961 г. я применил идею масштабной инвариантности к нескольким шумовым феноменам. Надо сказать, что все свои разношерстные исследования я проводил в практически полной изоляции как от физиков, так и математиков. Однако во время моего пребывания в Гарварде в качестве приглашенного профессора (1962-1964), Гаррет Биркгоф указал мне на некоторые аналогии между моим подходом и теорией турбулентности, созданной Ричардсоном и выдвинутой на новые рубежи Колмогоровым" [2].

Мандельброт признает, что к идее масштабной инвариантности вплотную подошел наш великий математик Андрей Николаевич Колмогоров. И самоподобие, пронизывающее идеи фрактальной геометрии, по словам Мандельброта, было знакомо Андрею Николаевичу.

Мандельброт без излишней скромности продолжает: “Далее благодаря лекциям Р.У. Стюарта по перемежовываемости турбулентности, я познакомился с другой работой Колмогорова (1962). Препринты этой и моей с Бергом статьи (1963) вышли буквально друг за другом с промежутком в несколько недель! Хотя Колмогоров ставил перед собой более интересную задачу, в моем распоряжении имелись более мощные инструменты, которые я, кстати, без особых усилий адаптировал к турбулентности…”.

Отметим еще важную деталь. По признанию основоположника фрактальной геометрии Бенуа Мандельброта, Колмогоров близко подошел к фракталам, но уже с другой стороны, когда исследовал броуновское движение. В 1968 году Бенуа Мандельброт и Ван Несс отмечали, что фрактальное броуновское движение в неявном виде рассматривалось Колмогоровым еще в 1940 году [1].

Исследования Колмогорова и его учеников в области нелинейной динамики и турбулентности по достоинству оценено математиками всего мира.

Уриэл Фриш, известный своими работами по фрактальным моделям однородной турбулентности, в книге “Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова” отмечает, что теория динамических систем не только оказалась полезной в ряде случаев при исследовании турбулентности, но и сама развивалась под влиянием этих исследований.

В книге “Порядок из хаоса” Нобелевский лауреат Илья Пригожин и И. Стенгерс пишут: “Новая формулировка динамики стала возможной благодаря работам советских физиков и математиков, и, прежде всего А.Н. Колмогорова, Я.Г. Синая, В.И. Арнольда. В частности, работам советской школы мы обязаны определением новых классов неустойчивых динамических систем, поведение которых можно охарактеризовать как случайное. Именно для таких систем А.Н. Колмогоров и Я.Г. Синай ввели новое понятие энтропии, и именно такие системы служат ныне моделями при введении необратимости на том же уровне динамического описания.

Мы считаем, что возрождение способа построения концептуальных основ динамических явлений вокруг понятия динамической неустойчивости имело весьма глубокие последствия. В частности оно существенно расширяет наше понимание “закона природы”.

Ученик А.Н. Колмогорова А.М. Яглом дает краткое описание турбулентности: “Турбулентность – явление, наблюдаемое в громадном большинстве течений жидкости и газов, встречающихся как в природе, так и в технических устройствах или лабораторных установках. Оно заключается в наличии беспорядочных пульсаций (т.е. хаотических изменений в пространстве и во времени) скорости U, давления P и других гидродинамических характеристик рассматриваемых течений, делающих соответствующие гидродинамические поля $U\,(x,t)\,,\ P(x,t)$ и др. резко изменчивыми и крайне нерегулярными”.

В статье “Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса”, опубликованной в 1941 году Колмогоров отмечает: “С энергетической точки зрения процесс турбулентного перемешивания естественно представлять себе так: пульсации первого порядка поглощают энергию осредненного движения и передают ее последовательно пульсации более высоких порядков; энергия же самых мелких пульсаций рассеивается в тепловую благодаря вязкости.

В силу хаотического механизма передачи движения от пульсаций низших порядков к пульсациям более высоких порядков естественно допустить, что в пределах малых по сравнению с $l^{(1)}$ областей пространства мелкие пульсации высших порядков подчинены приближенно пространственно изотропному статистическому режиму”.

Тесно связана с фрактальной геометрией теория хаоса, у истоков которой стоял также академик Колмогоров. Факты указывают нам, что часто на фрактальных множествах отображения хаотичны (комплексные полиномы на своих множествах Жюлиа, тентообразные функции на модификациях множества Кантора и другие).

Вызывают восхищение исследования Колмогорова. Он уже в те далекие сороковые годы соприкасался с хаосом, чувствуя “хаотический механизм передачи движения”. Чутье гения подсказывало ему путь исследований, которые актуальны и важны для развития науки. В настоящее время теория хаоса, у истоков которой стояли Пуанкаре, Колмогоров, Йорк, Ли, Фейгенбаум, Лоренц, Девани и другие ученые, сделала огромный скачок. В 1989 году появилось определение хаоса по Девани, включающее существенную зависимость от начальных условий, перемешивание и регулярность. Недавно стало известно, что в полных метрических пространствах существенная зависимость от начальных условий вытекает из перемешиваемости и регулярности. Понятие “перемешивание”, как мы видим, было знакомо Колмогорову еще в 1941 году.

Может показаться странным, что разработанная А.Н. Колмогоровым и его единомышленниками программа, предусматривающая изучение геометрических преобразований в средней школе, также имеет прямое отношение к фракталам. Андрей Николаевич неслучайно указывал, что использование геометрических преобразований способствует развитию пространственного воображения и дает возможность установления тесных связей математики с другими дисциплинами. В пору развития фрактальной геометрии и компьютерных технологий геометрические преобразования проявили себя неожиданно выпукло и весомо. Они позволили строить не что-нибудь второстепенное, а модель объекта природы: лист, дерево, кустарник, получившую название фрактал.

Рассмотрим примеры. С помощью геометрических преобразований оказалось возможным строить такие важные математические объекты, как Снежинку Коха, ковер Серпинского, пыль Серпинского и другие замечательные множества, которые интенсивно изучаются в курсах высшей математики.

Рассмотрим применение геометрических преобразований на примере построения с помощью компьютера пыли Серпинского (см. рис. 1).

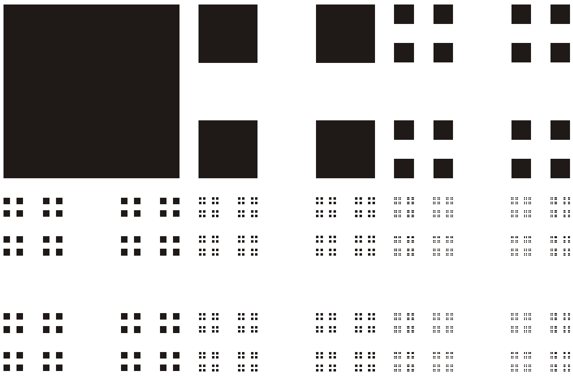


Рис. 1

Для построения пыли Серпинского можно использовать четыре сжимающих геометрических преобразования, каждое из которых переводит исходный квадрат в соответствующие квадраты (рис. 2).

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\quad T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2/3\end{pmatrix}$$

$$T_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3\\2/3\end{pmatrix};\quad T_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3\\0\end{pmatrix}$$

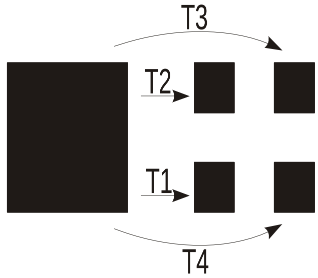


Рис. 2

Но не только указанные выше классические математические объекты можно построить с помощью сжимающих геометрических преобразований.

Как уже отмечалось, с помощью сжимающих геометрических преобразований удалось построить множество моделей объектов природы после открытия М. Барнсли, который впервые построил на компьютере с помощью четырех сжимающих аффинных преобразований математический объект, поразительно напоминающий по форме изображение листка папоротника. Причем сложнейшие объекты удавалось построить с помощью всего нескольких десятков числовых значений (коэффициенты матриц).

Следуя идеям М. Барнсли, построим “Ветвь куста” рис. 3, где указаны первые итерации шести аффинных преобразований (см. также [6]).

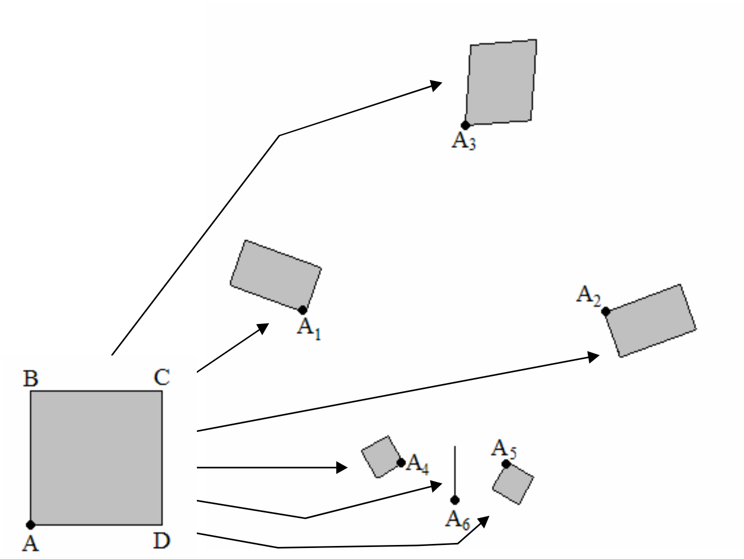


Рис. 3

В качестве начальной фигуры возьмем квадрат единичной длины и к каждой его точке применим совокупность аффинных преобразований:A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, записанных в матричной форме:

$$A_1 : \begin{pmatrix} 0.121 & -0.575 \\ 0.332 & 0.209 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.57 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.121 \cdot x - 0.575 \cdot y - 0.57 \\ 0.332 \cdot x + 0.209 \cdot y + 0.1 \end{pmatrix};$$

$$A_2 : \begin{pmatrix} 0.121 & 0.575 \\ -0.332 & 0.209 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.57 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.121 \cdot x + 0.566 \cdot y + 0.57 \\ -0.332 \cdot x + 0.209 \cdot y + 0.1 \end{pmatrix};$$

$$A_3 : \begin{pmatrix} 0.5 & 0.04 \\ 0.04 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot x + 0.04 \cdot y + 0.04 \\ 0.04 \cdot x + 0.6 \cdot y + 0.8 \end{pmatrix};$$

$$A_4 : \begin{pmatrix} -0.113 & -0.196 \\ 0.196 & -0.113 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.113 \cdot x - 0.196 \cdot y - 0.2 \\ 0.196 \cdot x - 0.113 \cdot y - 0.46 \end{pmatrix};$$

$$A_5 : \begin{pmatrix} -0.113 & 0.196 \\ -0.196 & -0.113 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.113 \cdot x + 0.196 \cdot y + 0.2 \\ -0.196 \cdot x - 0.113 \cdot y - 0.46 \end{pmatrix};$$

$$A_6 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \\ 0 \cdot x + 0.4 \cdot y - 0.6 \end{pmatrix};$$

На рис. 4 приведем первые 6 итераций множества “Ветвь куста”:

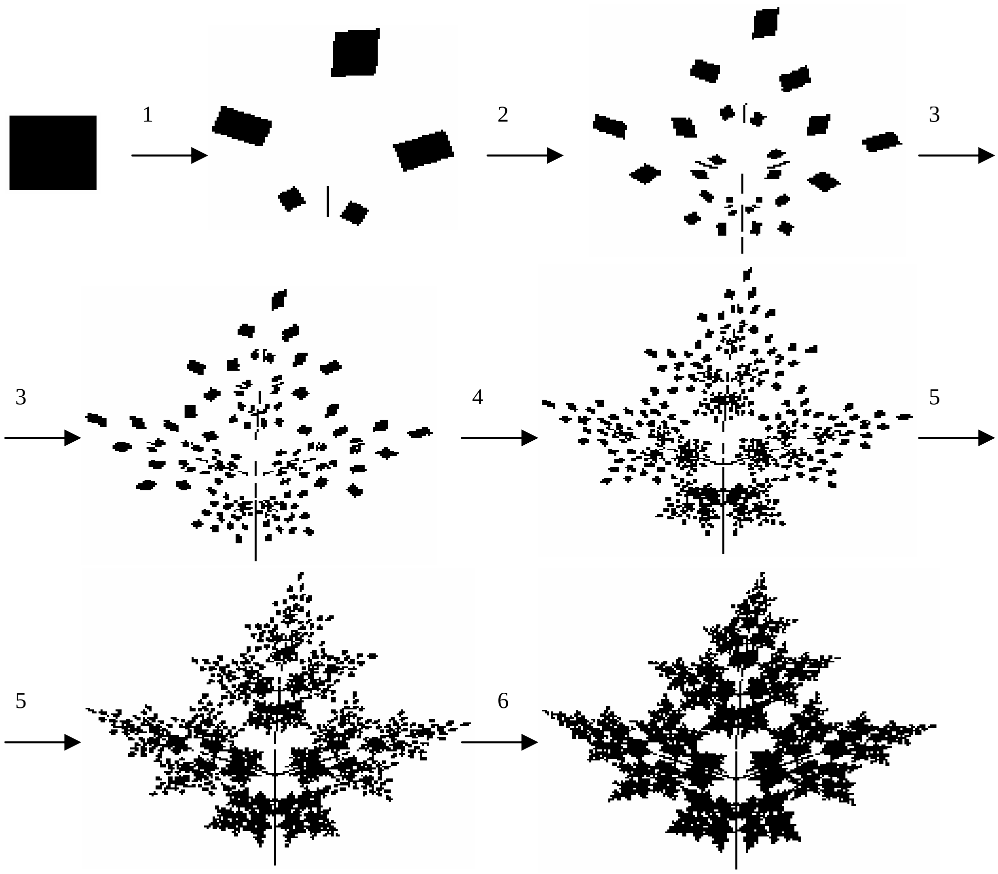


Рис. 4

Фрактал, обработанный с помощью графического редактора, превращается в изящную художественную композицию (рис. 5):

Рис. 5

В заключении отметим – напрашивается совершенно естественный вопрос: если геометрические преобразования помогают строить объекты окружающего нас мира, то почему бы не познакомить, хотя бы описательно с идеями таковых построений школьников старших классов!?

Во времена колмогоровской реформы алгоритмов построения этих объектов на компьютере еще не было. Они стали появляться только с конца восьмидесятых годов прошлого века. Но зачем гению знать, что будет после него. Достаточно дать правильное направление, которое разовьют потомки.

По опыту автор может судить, что современные студенты с трудом воспринимают данный материал в рамках спецкурсов. Как уже отмечалось, они с аффинными преобразованиями знакомятся достаточно поздно – в вузе.

Задумаемся еще раз, к чему нас привели геометрические преобразования? После размышления ответим – к моделям объектов природы. А раз так, то почему бы не начать изучение аффинных преобразований в средней школе хотя бы теми учениками, которые решили стать математиками, физиками, химиками, биологами и инженерами. Оказавшись в университете или техническом вузе, студенты сказали бы большое спасибо за такую программу. Стоило ли так безжалостно удалять из школьного курса математики геометрические преобразования?

И последнее по счету, но не по значению замечание. Геометрические преобразования дают возможность показать красоту математики не изнутри, то есть с помощью доказательств и вычислений, а с внешней стороны – показать красоту математического объекта (фракталы являются одними из самых красивых математических объектов), скажем, очень похожего на ветвь куста или снежинки. Всем известно, что не каждый школьник имеет возможность познать красоту математики с помощью доказательств. Не каждому школьнику дано решать сложные математические задачи. А вот воспринять ветвь куста, лист папоротника, снежинку как художественные композиции, несомненно, сможет каждый обучаемый! Причем от младшего школьника до студента.

Таким образом, как ни странно, геометрические преобразования оказались приложимы к таким практическим вещам, с которыми мы сталкиваемся повсюду и каждый день! Теперь труднее, наверно, сказать, что вектор имеет большее практическое применение, как направленный отрезок, а не как параллельный перенос (геометрическое преобразование). Не пора ли нам вспомнить идеи Колмогорова?!

И последнее: к рассмотренным впервые Колмогоровым правильным паркетам органически примыкает фрактальная мозаика, тематика которой уже начинает развиваться на страницах журнала “Квант”.

Библиографический список

1. *Кроновер, Р.* Фракталы и хаос в динамических системах [Текст] / Р. Кроновер. – Москва: “Постмаркет”, 2000. – 352 с.
2. *Мандельброт, Б.* Фрактальная геометрия природы [Текст] / Б. Мандельброт. – Москва -Ижевск: институт компьютерных исследований, 2002. – 654 с.
3. *Секованов, В.С.* Гений из Туношны [Текст]. В 2 т. Т. 1 / В.С. Секованов. – Косторома: Салон оперативной печати “GUT”, 2011. – 403 с.
4. *Секованов, В.С.* Элементы теории фрактальных множеств [Текст]. – 4-е изд., перераб. и доп. / В.С. Секованов. – Кострома: КГУ им. Н.А. Некрасова, 2012. – 208 с.
5. *Секованов, В.С.* Гений из Туношны [Текст]. В 2 т. Т. 2 / В.С. Секованов. – Косторома: Салон оперативной печати “GUT”, 2011. – 406 с.
6. *Секованов, В.С.* Использование информационных и коммуникационных технологий в процессе обучения фрактальной геометрии [Текст] / В.С. Секованов, В.С. Скрябин // Информатизация образования. – 2008. – С. 391-395.

Принципы вариативности и трансформации при решении задач

В.В. Афанасьев, В.Н. Алексеев

Одним из важнейших компонентов гуманитарной культуры является способность человека к творчеству, проявление им творческой интеллектуальной активности.

Весьма выразительно черты математического образования, влияющие на культуру человека в целом, были сформулированы в докладе В. Сервэ на XIX Международной конференции по народному просвещению: “Среди интеллектуальных свойств, развиваемых математикой, наиболее часто упоминаются те, которые относятся к логическому мышлению: дедуктивное рассуждение, способность к абстрагированию, обобщению, специализации, способность мыслить, анализировать, критиковать. Упражнение в математике содействует приобретению рациональных качеств мысли и ее выражения: порядок, точность, ясность, сжатость. Оно требует воображения и интуиции. Оно дает чутье объективности, интеллектуальную гибкость, вкус к исследованию и тем самым содействует образованию научного ума.Изучение математики требует постоянного напряжения, внимания, способности сосредоточиться; оно требует настойчивости и закрепляет хорошие навыки работы”

Поиску общего метода решения всевозможных задач много времени уделял знаменитый математик, философ, физик Рене Декарт (1596-1650). Джордж Пойа (1887-1985) посвятил этой проблеме прекрасную книгу [1], а также еще две книги (не упомянутые в библиографическом списке) и составившие широко известную российским читателям трилогию (Как решать задачу?; Математическое открытие; Математика и правдоподобные рассуждения). Некоторые принципы, связанные с решением задач, изложены в книге авторов данной статьи [2]. В этой книге читатель может найти примеры решения задач, иллюстрирующие и обозначенные в заголовке принципы.

Отметим также, что рассматриваемые принципы, как и другие, важны не только при решении задач, они (правда в несколько ином ключе) широко используются и при составлении задач. Принцип вариативности связан с использованием различных методов решения одной и той же задачи. Поиски различных способов решения – это не только интересное занятие, но еще и важный инструмент формирования математической культуры и математического кругозора. Привлечение идей из различных областей математического знания демонстрирует внутреннее единство математики и целесообразность применения методов одной отрасли для решения задач другой отрасли. Обратившись к источнику [1] во второй главе "Метод Декарта"читатель найдет немало примеров проявления обозначенных принципов.

Здесь мы приведем несколько простых примеров, накопление которых является важной составной частью методического багажа преподавателя математики. Использование различных методов решения способно пробудить интерес ученика к одному из методов, "туманное"решение задачи при использовании другого метода может сделать решение простым и понятным для ученика. А то, что понятно – осваивается намного легче.

Итак, рассмотрим первую задачу, выбрав ее из начального курса теории вероятностей.

Имеется n различных ключей, из которых к двери подходит только один. Какова вероятность того, что для открывания данной двери придется опробовать ровно k ключей $(1 \le k \le\ n)$*?*

Первое решение.

Рассмотрим интересующее нас событие $A_k = \{$дверь открылась с k-ой попытки$\}$. Также рассмотрим множество событий $K_i = \{i$-ый испытываемый ключ подошел к двери$\}$, где $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Тогда, используя определение операций над событиями, мы получаем следующую зависимость:

$$A_k = \overline{K_1} \cdot \overline{K_2} \cdot ... \cdot \overline{K_{k-1}} \cdot K_k.$$

Поскольку испытание очередного ключа изменяет соотношение между количеством ключей не подходящих к двери и количеством ключей (один) подходящих к двери, то события K_i, а, следовательно, и противоположные к ним, являются зависимыми. Поэтому мы должны применять в этой ситуации общую теорему о вероятности произведения событий. В соответствии с этой теоремой, получаем:

$$P(A_k) = P(\overline{K_1}) \cdot P(\overline{K_2}/\overline{K_1}) \cdot ... \cdot P(\overline{K_{k-1}}/(\overline{K_1} \cdot ... \cdot \overline{K_{k-2}})) \cdot P(K_k/(\overline{K_1} \cdot ... \cdot \overline{K_{k-1}})).$$

Произведем теперь соответствующие вычисления, опираясь на простейшие соображения классического способа вычисления вероятностей:

$$P(A_k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot ... \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Второе решение.

Вновь рассмотрим то же событие A_k, что и в первом решении. Но для вычисления искомой вероятности применим формулу классической вероятности. Будем проводить испытания следующим образом: выложим ключи в определенной последовательности на стол и начнем проводить проверку в порядке следования ключей. Тогда общее число равновозможных исходов испытания (непременное условие применимости формулы классической вероятности) будет равно n! Вычислим теперь число исходов испытания, благоприятствующих наступлению интересующего нас события A_k. Для этого подходящий ключ должен лежать на k-ом месте, а остальные $n-1$ ключей упорядочены произвольным образом. Тогда понятно, что таких исходов будет $(n-1)$! Следовательно,

$$P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Предлагаем читателю самому провести третье решение, путем составления специального графа – дерева возможных исходов данного испытания. Это решение в стиле примера 28 из книги [4, с. 45]. Там решена другая задача, являющаяся аналогом рассмотренной при $n = 4$.

Теперь обратимся к принципу трансформации и его применению к решению задач. На самом деле принцип трансформации – это один из способов получения другого варианта решения с привлечением идей другой ветви математики, чем та, в которой сформулирована исходная задача. То есть фактически принцип трансформации является одним из проявлений принципа вариативности, но в силу особой важности и его значимости для математики он, конечно же, должен быть выделен отдельно. Отметим, что Рене Декарту в свое время удалось создать очень мощный универсальный "трансформер", позволивший решать геометрические задачи алгебраическими методами, а алгебраические соотношения интерпретировать с привлечением геометрических образов. Позднее в алгебраической геометрии возникли еще более абстрактные образы алгебраических многообразий – схемы Гротендика, в которых фактически многообразие представлялось как комплекс всех своих подмногообразий, начиная с точек и заканчивая дивизорами и самим многообразием с помощью алгебраических объектов.

Рассмотрим в качестве примера для демонстрации этого принципа не слишком сложную задачу, выбрав ее из контрольно-измерительных материалов единого государственного экзамена по информатике для школьников 11-го класса (демонстрационный вариант 2012, задача B4).

Все пятибуквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААО
3. ААААУ
4. АААОА

......

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Первое решение (традиционное решение, предлагаемое школьникам).

Так как используется три различных буквы, образующих пятибуквенные слова, то по обобщенной формуле Хартли находим общее возможное количество таких слов:

$$N = 3^5 = 243.$$

Очевидно, что последнее, то есть 243-е, слово – УУУУУ. Тогда перед ним (242-ое слово) должно стоять УУУУО. Перед последним названным словом должно быть (241-ое) слово УУУУА. Этому слову должно предшествовать слово (искомое 240-ое) УУУОУ. Ответ получен.

Во всех тренировочных вариантах аналогичные задачи требуют получения слова, расположенного достаточно близко к концу списка. Понятно, что если потребовать найти, скажем, 150-ое по списку слово, то придется при таком решении изрядно потрудиться, даже если придумать какие-то (какие именно предложили бы вы?) "сокращающие процедуры".

Второе решение (трансформация в область систем счисления).

Так как имеем три различные буквы, то установим взаимно однозначное соответствие f между этим набором букв и цифрами троичной системы счисления таким образом, чтобы сохранялось отношение порядка (для школьников пояснения должны быть несколько иными). Зададим это соответствие с помощью таблицы:

x	А	О	У
$f(x)$	0	1	2

При такой замене начало списка выглядит так: 00000, 00001, 00002, 00010,..., то есть представляет собой последовательность неотрицательных целых чисел, записанных в троичной системе счисления. При этом понятно, что k-е по порядку число в этой последовательности есть число $k-1$. Таким образом, нам необходимо найти запись числа 239 в троичной системе счисления. Используя любое правило преобразования записей целых чисел в другую систему счисления находим:

$$239 = 22212_3.$$

Используя таблицу соответствия, находим нужный ответ – УУУОУ. Обратите внимание, насколько удачной оказалась "трансформация", при таком подходе мы легко можем восстановить любое слово по его номеру в списке и обратно, по заданному слову определить его порядковый номер в списке.

Предметом математических исследований являются абстрактные понятия и связи между ними, причем эти понятия все дальше отличаются от своих корней, кроющихся в действительности. Знаменитый французский математик Д. Дьедоне так определяет математику и ее понятия: "...изучение математических проблем... постепенно влечет нас к введению понятий намного абстрактнее, чем понятие числа и формы, которые не имеют уже никаких толкований в мире чувств. Из этих новых понятий вытекает естественным путем неисчислимое количество вопросов, для решения которых вводится множество других понятий, еще более абстрактных и живучих, которые, однако, удаляют нас все дальше и дальше от находившихся в истоках".

Развитие математической деятельности ученика А. Столяр считает основной целью обучения математике. Выделенные им аспекты математической деятельности являются одновременно этапами ее развития, путем диагностической теории познания как в научной обработке материала обучения, так и в практике обучения.

Проиллюстрируем данный подход на развитии математической деятельности школьника на примере задачи мальчика Андрея Колмогорова (в будущем гениальный математик А.Н. Колмогоров, детство которого прошло на Ярославской земле), который в шестилетнем возрасте предложил подсчитать, сколькими способами можно пришить оторвавшуюся пуговицу на рубашке.

Первым шагом в размышлениях может быть перевод конкретной ситуации о пришивании пуговицы с четырьмя дырками на математический язык. Заметим, что пуговица пришивается стежками, которые образуются соединением двух неупорядоченных дырок. Таких различных стежков будет ровно шесть (см. рис. 1).

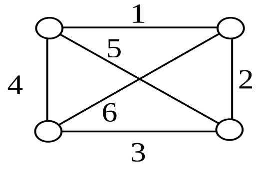


Рис. 1

Вторым шагом будет уже решение математической (комбинаторной) задачи о подсчете количества различных стежков из первоначальных шести или на эстетическом языке о надежности пришивания пуговицы. Число таких вариантов может находиться как число различных сочетаний из 6 элементов:

$$\mathrm{C}_6^1 + \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_6^3 + \mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_6^5 + \mathrm{C}_6^6 = 6 + 15 + 21 + 15 + 6 + 1 = 63.$$

Можно поискать и другой математический способ решения. Например, "закодировать" наличие или отсутствие каждого из шести стежков двумя цифрами 1 или 0 соответственно. Так, набор 011010 означает, что пуговица пришита вторым, третьим и пятым стежками. Тогда решение задачи сведется к поиску числа шестиместных наборов из нулей и единиц, которых по основному правилу комбинаторики будет $2^6 = 64$. Удалив набор из одних нулей, означающий отсутствие стежков, получаем искомый результат.

Второй способ решения показывает, с одной стороны, красоту математики ("а я могу еще и вот так"), а с другой, дает возможность выхода на новые результаты математики – на кодирование в данном случае. А оно связано с проблемой передачи сообщений по линиям связи, без которых (телеграфа, телефона, радио, телевидения и т.д.) немыслимо наше нынешнее существование.

Библиографический список

1. *Пойа, Д.* Математическое открытие [Текст] / Д. Пойа. – Изд. 2-е, стер. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
2. *Афанасьев, В.В.* Работа с одаренными детьми по математике [Текст]: монография / В.В. Афанасьев, В.Н. Алексеев, С.А. Тихомиров. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2011. – 132 с.
3. *Алексеева, А.К., Алексеев, В.Н.* Проблемы подготовки учебной и учебно-вспомогательной литературы [Текст] // Труды VII Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2009. – С. 229-234.
4. *Афанасьев, В.В.* Теория вероятностей [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / В.В. Афанасьев. – М.: ВЛАДОС, 2007. – 350 с.

Два первых съезда – одни и те же проблемы

В.П. Одинец

В этом году исполнилось 100 лет со дня проведения Первого Всероссийского съезда преподавателей математики (1912 г., Санкт-Петербург)[1] и 85 лет со дня начала I-го съезда математиков Польши (1927 г., Львов).

На первый взгляд, это совершенно разные и по своим задачам и по составу участников съезды. Более того, хотя их разделяет всего 15 лет, но окружающий мир за эти годы претерпел огромные изменения.

Большая часть Польши вместе со столицей – Варшавой – до 1917 г. была частью Российской империи[2], а к 1927 году пережила период становления новой государственности (после ноября 1918 г.), войну с Советской Россией (1919-1920 гг.), период демократического развития до мая 1926 г. (военный переворот во главе с маршалом Юзефом Пилсудским (1857-1936)).

Тем не менее, по крайней мере, в одной области – школьном образовании – проблемы и в России и в Польше были схожими: 1) нужно было ликвидировать неграмотность населения; 2) нужно было подготовить почву для широкой рекрутации будущей научно-технической интеллигенции. Первая задача была наиболее актуальной для России 1912 года, а вторая – для Польши 1927 года.

Поскольку о Первом Всероссийском съезде преподавателей есть доступная литература [1,2], а о I-ом съезде польских математиков известно в России мало, то вначале я дам краткую характеристику этого съезда.

I-ый съезд польских математиков проходил с 7 по 10 сентября 1927 г.[3] в помещениях Львовской Политехники [4]. Только торжественное открытие съезда прошло в актовом зале Львовского университета им. Яна Казимежа[4].

(Далее, мы будем писать кратко: ЛУ и ЛП, не оговаривая, что до 1918 г. город Львов назывался Лемберг, и университет, как и Политехника и Технологический институт (кратко ЛТИ) назывались иначе.)

Председателем Организационного Комитета съезда был профессор Максимилиан Хубер.[5] Его заместителем

[1] Подробнее об этом съезде см., например [1] или [2].

[2] В 1795 г. после третьего раздела Польши часть её территории вместе с Краковом и Львовом отошли к Австро-Венгрии, а часть вместе с Познанью – к Пруссии.

[3] 2-ой съезд польских математиков прошел в Вильне (Вильнюсе) в 1931 г., а 3-ий – в Варшаве в 1937 г. [3].

[4] В статье даны оригинальные польские имена, а не русифицированные.

[5] М. Хубер (Maksymilian Tytus Huber: 1872-1950) закончил институт гражданских инженеров ЛТИ, кроме того, изучал один год математику в Берлинском университете. В 1904 г. защитил там же докторскую диссертацию "Zur Theorie der Berьhrung fester elastischer Kцrper". В ней, в частности, было установлено, что мера твёрдости зависит не только от материала, но и формы тела. М. Хубер преподавал в Кракове, Львове, Гданьске [5, с. 74-76].

был профессор Хуго Штейнгауз.[6] Членом оргкомитета, отвечавшим за вопросы составления программных документов съезда был профессор Стефан Банах.[7]

По предложению оргкомитета был образован Президиум съезда. Его председателем был избран профессор Вацлав Серпиньский[1], заместителями – профессора Тадеуш Банахевич[2], Леон Лихтенштайн[3] и Стефан Мазуркевич[4]. Секретарем Президиума был избран профессор Казимеж Куратовский.

Рабочие заседания съезда проходили в восьми секциях:

I. Математической логики и основ математики;

II. Алгебры и теории чисел;

III. Теории множеств и вещественных функций;

IV. Анализа;

V. Геометрии;

VI. Прикладной математики;

VII. Механики, математической физики и астрономии;

VIII. Дидактики, истории и философии математики.

Больше всего докладов (37) было сделано по секции III. Дело в том, что на ней делались ещё доклады по топологии, теории рядов и функциональному анализу. Не случайно председательствовали на этой секции

---

[6] Х. Штейнгауз (Hugo Dyonizy Steinhaus: 1887-1972) учился в ЛУ и Геттингенском университете. Докторскую диссертацию защитил в Геттингене в 1911 г., хабилитация – в 1917 г. в ЛУ.(Поясним, что "хабилитация" – это диссертация на подтверждение мастерства (хабилис=умелый – лат.) являлась необходимым условием для получения в центральной Европе профессорского звания. После ратификации в 1982 г. СССР Парижской Конвенции о признании ученых степеней и званий региона Европы, соответствует (в России) степени доктора наук). Вместе со Стефаном Банахом был создателем Львовской Математической школы. В 1929 г.также со С. Банахом основал журнал "Studia Matematica", вскоре ставший одним из авторитетнейших международных математических журналов. В 1935 опубликовал (вместе с С. Качмажем) переведённую на многие языки монографию "Theorie der Orthogonalreihen". В 1939-1941 г.оставался во Львове, заведуя кафедрой анализа II. Во время немецкой оккупации Львова скрывался в его окрестностях. С 1945 г.создавал математическую школу во Вроцлаве, особое внимание уделяя приложениям математики к биологии, медицине, геологии, экономике, антропологии, дендрометрии, теории надежности. Всемирную известность имеет и его книга "Математический калейдоскоп" (1938), переведенная на десятки языков, в том числе и на русский [3, 6, s. 259-260].

[7] С. Банах (Stefan Banach: 1892-1945) родился в Кракове. Свою фамилию унаследовал по матери (как, впрочем, и А.Н. Колмогоров). Высшего образования из-за начавшейся I мировой войны не получил (после гимназии в Кракове окончил только два курса политехнической школы во Львове). Тем не менее, благодаря Х. Штейнгаузу и А. Ломницкому, в 1920 г.защитил в ЛУ докторскую диссертацию. Через два года (в 1922 г.) – хабилитация и заведывание специально для него образованной кафедрой "Математика IV". В 1933/34 учебном году С. Банах был деканом естественно-математического факультета ЛУ. В 1939-1941 гг. оставался во Львове и заведовал кафедрой анализа. В годы немецкой оккупации был объектом опытов на людях в так называемом " Институте Вайгла"(Weigl) – на нём выращивали вши. 31 августа 1945 г.у него остановилось сердце. С. Банах является одним из создателей функционального анализа. Его книга: "Teorja operacyj, Tom I. Operacje liniove (1931), переведенная год спустя на французский, а затем на многие другие языки, сыграла огромную роль в развитии не только функционального анализа, но и математики в целом [3, 6, s. 16].

[1] В. Серпиньский (Waclaw Sierpicski: 1882-1969) в 1904 г.окончил Императорский Варшавский университет (напомню, что обучение в нем проводилось на русском языке.) Руководителем его дипломной работы был профессор Георгий Феодосьевич Вороной (1868-1908) [7]. Докторскую диссертацию защитил в 1906 г.в Кракове в Ягеллонском Университете. После стажировки в 1907 г. в Геттингене и хабилитации (в 1908 г.) в ЛУ остался там преподавателем. После начала I мировой войны как австрийский подданный был в России интернирован, но с 1915 г.ему разрешено было жительство в Москве, где он плодотворно сотрудничал с Н.Н. Лузиным. После возвращения в Польшу в 1919 г.он получил звание ординарного профессора Варшавского университета. В 1920 г.он вместе с З. Янишевским (1888-1920) и С. Мазуркевичем основал журнал "Fundamenta Matematicae" и был долгие годы его главным редактором. В. Серпиньский был одним из создателей Варшавской математической школы. За свою долгую творческую жизнь опубликовал около 750 работ, главным образом, по теории множеств, в частности, он был предтечей современной фрактальной геометрии ("ковер Серпиньского") [6, s. 257-258].

[2] Т. Банахевич (Tadeusz Banachiewicz: 1882-1954) окончил в 1904 г.(вместе с В. Серпиньским) Императорский Варшавский университет. В 1910-15 гг.работал в обсерватории им. В.П. Энгельгардта под Казанью; в 1915-1918 гг. – в университетской обсерватории Юрьева (Тарту). После возвращения в Польшу в конце 1918 г.преподавал в Варшавской Политехнике, а с середины 1919 г. и до конца жизни был директором университетской обсерватории и зав. кафедрой астрономии Ягеллонского университета (Краков). С помощью введенных им матриц ("краковианы") нашел решение общей задачи сферической полигонометрии [8].

[3] Л. Лихтенштайн (Leon Lichtenstein: 1878-1933) был специалистом в области дифференциальных уравнений, конформных отображений и теории потенциала. Л. Лихтенштайн родился в еврейской семье в Варшаве, но образование получил в Берлине. Там же защитил диссертации и по инженерному делу, и по математике (математический анализ). В Германии он стал основателем журнала "Mathematische Zeitschrift"(1918). Заведовал кафедрами математики в Мюнстере и в Лейпциге. После прихода к власти Гитлера бежал в Польшу [9, p. 44].

[4] С. Мазуркевич (Stefan Mazurkiewicz: 1888-1945) учился в Кракове, Мюнхене, Готтингене и Львове. В 1913 г. под руководством В. Серпиньского защитил в ЛУ докторскую диссертацию, а в 1919 г. в Кракове в Ягеллонском университете состоялась его хабилитация. В 1920 г. он стал ординарным профессором Варшавского университета. Основная область его деятельности – топология [3, s. 394; 6, s. 149-150].

С. Банах, К. Куратовский,[5] Станислав Ружевич[6] и Станислав Сакс[7] [3, с. 167].

Среди представленных докладов на этой секции особо отметим выступления по теории множеств В. Серпиньского и Альфреда Тарского[1], по топологии – К. Куратовского, Бронислава Кнастера[2] и С. Сакса, по теории рядов – Х. Штейнгауза, Стефана Качмажа, Владыслава Орлича и Антони Зыгмунда (в СССР почему-то писали Зигмунд), по теории вещественных функций – С. Ружевича, по функциональному анализу – Станислава Мазура и С. Банаха.

На этой же секции выступили и большинство иностранных гостей, приглашенных на съезд. В их числе москвичи: Н.Н. Лузин (1883-1950), Н.К. Бари (1901-1961), а также приглашенный из Берлинского университета приват-доцент, называвшийся тогда ещё Иоганном фон Нейманом (1903-1954).

Достаточно представительной была и секция IV-Анализа: (11 докладов). Председательствовали на этой секции Франчишек Лея[3], Л. Лихтенштайн и Владыслав Никлиборц[4]. Среди выступавших были: москвич

[5]К. Куратовский (Kazimierz Kuratowski: 1896-1980) был сыном адвоката Марка Куратова (Куратовского) и Розы из дома Каржевских (Kaisersteinyw). Мечтой с детства была карьера инженера. В 1912 г. он по окончании варшавской (польской) гимназии едет на год под Орёл, чтобы получить аттестат русской гимназии – только такой аттестат принимался при поступлении в вузы Великобритании. В 1913 г. он поступает в Политехнический институт в Глазго. Отчислен он был после первого семестра за якобы непосещение занятий. Оказывается, он садился в аудитории на удобное для себя место, а нужно было сидеть на месте в соответствии со своим номером. После занятия Варшавы немцами была возобновлена (с 1915 г.) деятельность Варшавского университета, и Куратовский там за 4 года проходит полный курс математики. В январе 1921 г.он уже доктор, а к концу 1921 г. прошла его хабилитация. В 1927 г. он переезжает во Львов и получает должность экстраординарного профессора на общем факультете ЛУ. После ликвидации общего факультета (в 1933 г.) К. Куратовский возвращается в Варшаву и в 1934 г. получает в Варшавском университете кафедру и должность ординарного профессора. II мировую войну он пережил в Варшаве и её окрестностях, преподавая на тайных занятиях. После 1945 г. К. Куратовский не только возвращается к преподаванию в Варшавском университете, но и участвует в организации Полькой Академии наук и её Математического института. Основная область его научной деятельности – общая топология и теория множеств, в которых он был одним из первопроходцев и создателей [10; 3, с. 388-389; 6, с. 114-115].

[6]С. Ружевич (Stanislaw Leon Ruziewicz: 1889-1941) закончил учебу на философском факультете ЛУ и там же в 1913 г. получил степень доктора. Ещё в период учебы под руководством В. Серпиньского начинает интенсивно заниматься теорией множеств. В 1913-1914 гг. стажировался в Геттингенском университете. С 1915 г. по весну 1918 г. служил в австрийской армии (по мобилизации). Летом 1918 г. хабилитация в ЛУ. С 1921 г. там же он – экстраординарный профессор, а с 1924 г. – ординарный профессор по математике. Постепенно его больше начинают интересовать функциональные уравнения и теория функций вещественной переменной. Уйдя на пенсию в 1935 г. он начинает преподавать в Высшей школе Внешней торговли, где в 1939 г.после занятия Львова Красной Армией становится проректором. На следующий день после оккупации Львова немцами 12 июня 1941 г. С. Ружевич был расстрелян [3, s. 402].

[7]С. Сакс (Stanislaw Saks: 1897-1942) в 1915 г. по окончании гимназии записался на философский факультет Варшавского университета, чтобы изучать математику. Учеба с перерывами на участие в польско-советской войне 1919-1920 гг. и восстание в Силезии продолжалась до 1922 г. В том же году защитил докторскую диссертацию, а в 1926 г. – хабилитация в Варшавском университете. В период до 1939 г. С. Сакс несмотря на неоднократные попытки и всемирную известность после выхода в свет его книги “Theory of the integral”(Warszawa, 1937), {на польском языке она вышла за три года до этого}, так и не смог получить должность даже экстраординарного профессора. После занятия в сентябре 1939 г. Красной Армией Львова, куда С. Сакс попал вместе отступающими частями Польской армии, его приняли на должность профессора ЛУ (на кафедру С. Банаха). После занятия Львова немцами (в 1941 г.) С. Сакс вернулся в Варшаву, где был арестован гестапо и расстрелян 23.11.1942. Область его научных интересов – теория вещественной и комплексной переменной, теорией интеграла функциональный анализ [3, s. 402-403].

[1]А. Тарский (Alfred Tarski(Tajtelbaum) 1902-1983) выдающийся польско-американский логик. (Подробнее см. [11, с. 119-121].)

[2]Б. Кнастер (Bronislaw Knaster: 1893-1980) в 1911 г.по окончании варшавской гимназии едет в Париж и начинает там изучать медицину. I мировая война прерывает учебу. Б. Кнастер, уехав летом 1914 г. в Варшаву, в Париж уже не вернётся. В 1915-1920 гг. он учится в Варшавском университете на философском факультете. В 1923 г. он защищает там же докторскую диссертацию по математике, а в 1925 г. проходит его хабилитация. Уже после 1-го съезда польских математиков (в 1928 г.) выходит совместная с А. Тарским статья в Ann. Soc. Polon. Math. 6:133-134 о множестве неподвижных точек непрерывного отображения, сохраняющего порядок (Теорема Кнастера-Тарского), сразу сделавшего Кнастера знаменитым. Б. Кнастер до осени 1939 г. преподает в Варшавском университете. С началом войны оказывается в Львове. После занятия Львова Красной Армией Б. Кнастер становится профессором в ЛУ. После начала оккупации Львова немцами Б. Кнастера отправляют (как и С. Банаха) в “Институт Вайгла” для выращивания на нем вшей. После репатриации в 1945 г. во Вроцлав Б. Кнастеру дают должность экстраординарного профессора открывшихся в этом городе двух вузов: университета и Политехники. В 1947 г. он уже профессор ординарный. Занимался главным образом топологией. С 60-х годов устраивал конференции по истории математики, проходившие в непринужденной обстановке (“кнастерианы”) [3, s. 386-387].

[3]Ф. Лея (Franciszek Leja: 1885-1979) в 1904-1908 гг. учился в ЛУ на философском факультете. Дополнительно изучал математику в 1912/13 гг. в Париже. В 1916 г. защитил в Кракове докторскую диссертацию, и там же в Ягеллонском университете в 1924 г.прошла его хабилитация. После чего переехал в Варшаву и стал экстраординарным профессором Варшавской Политехники. В 1936 г. стал ординарным профессором Ягеллонского университета., где работал до своей кончины. Перерыв был лишь во время II мировой войны, когда немцы арестовали Ф. Лея и отправили в концлагерь в Заксенхауз. Основная область его научной работы – теория функций комплексной переменной и теория аналитических функций. Он же автор многократно переиздававшихся учебников по этим направлениям [3, s. 389-390].

[4]В. Никлиборц (Wladyslaw Michal Nikliborc: 1899-1948) учился с 1918 по 1922 г. на философском факультете Ягеллонского университета. В 1924 г. защитил докторскую диссертацию в Львовском университете. В конце 1927 г. там же

Д.Е. Меньшов (1892-1988), Ф. Лея, В. Никлиборц, Л. Лихтенштайн, Юлиуш Шаудер [5].

Третьей по численности была секция VIII. Руководили этой секцией Самуэль Дикштейн[1] и Антони Ломницкий[2].

О работе этой секции речь ещё пойдет дальше, а пока заметим, что немногочисленность выступлений на остальных секциях не свидетельствовала об их низком уровне. Например, на первой секции выступали выдающиеся польские логики: Ян Лукашевич[3] и уже упоминавшийся Альфред Тарски. Не случайно, в кулуарах именно этой секции обсуждался парадокс Банаха-Тарского (см. [11, с. 87]) и возможности применения многозначной логики (Лукашевича) для объяснения различных проблем физики.

Впрочем, в кулуарах съезда обсуждались и два общих внесекционных доклада – Л. Лихтенштайна "О законе Ньютона" и В. Серпиньского "Функции и множества". Несомненно, доклад В. Серпиньского перекликался с докладами на эту же тему С.Н. Бернштейна (1880-1968) на Первом и Втором Всероссийских съездах преподавателей, поскольку В. Серпиньский с 1915 г. по 1918 г. жил и работал в Москве, а там как раз в 1915 г.и были изданы материалы Второго съезда [12, 13]. Материалы Первогого съезда, изданные в 1913 г., тоже были в Москве доступны. Явные, а чаще неявные отзвуки этого доклада В. Серпиньского можно заметить в работах

прошла его хабилитация по математике. Два года: 1928/29 и 1930/31 стажировался в университетах Лейпцига, Геттингена и Парижа. Увлекся теоретической механикой, и, в итоге, в 1933 г. прошел вторую хабилитацию, но уже по теоретической механике во Львовской Политехнике. В 1937 г. получил должность экстраординарного профессора в Варшавской Политехнике. С 1939 г. был профессором ЛП. После освобождения Львова Красной Армией в 1944 г. стал заведующим двух кафедр: математики – в ЛП и теоретической механики – в ЛУ. После репатриации в Польшу (через Краков) в 1947 г. стал ординарным профессором в Варшавском университете. 1 марта 1948 г. покончил собой. Основная область научной деятельности: классический анализ и теоретическая механика [3, s. 395-396].

[5]Ю. Шаудер (Juliusz Pawel Schauder: 1899-1943) родился в еврейской семье Львова (тогда Лемберга). Учился на философском факультете ЛУ в 1919-1923 гг. В 1923 году представил в ЛУ докторскую диссертацию, а уже в 1927 г. там же прошла его хабилитация. В 1932-33 гг. выехал для научной стажировки вначале в Лейпциг, а затем в Париж. В Лейпциге он пишет работу по дифференциальным уравнениям, консультируясь с Л. Лихтенштайном, а в Париже пишет совместную работу с Ж. Лерэем (Jean Leray) по топологии и функциональным уравнениям, за которую они оба получают престижную премию в 1938 г. В 1939 г.после занятия Львова Красной Армией Ю. Шаудер становится профессором, заведующим кафедрой "Математика III" в университете. После захвата Львова немцами (июнь 1941 г.) скрывался, но в сентябре 1943 г., попав в гестапо, был расстрелян. В математике Шаудер известен прежде всего как автор теоремы о неподвижной точке и теорем о свойствах базиса (Шаудера) для банаховых пространств [3, s. 403-404; 6].

[1]С. Дикштейн (Samuel Dickstein: 1851-1939) родился в семье учителя школ, готовивших раввинов. Окончил варшавскую гимназию в 1866 г. и поступил в Варшавскую Главную школу (заменившую после 1831 г. Варшавский университет). В 1869 г. Императорский Варшавский университет вновь открылся и С. Дикштейн перешел в него, и окончил его год спустя, получив степень кандидата физико-математических наук (напомню, что в этот период это был российский университет). В 1878-1888 гг. руководил частной реальной гимназией. В 1881 г. начал издавать ежегодник "Rocznik Pedagogiczny", а с 1888 г. – журнал "Физико-математические труды" ("Prace Matematyczno-Fizyczne"). С 1897 г. С. Дикштейн издатель журнала "Wiadomości Matematyczne". С 1893 г. С. Дикштейн – член-корреспондент Краковской Академии Знаний (Akademia Umiejktności). С 1906 г. до 1915 г. читал лекции на организованных на его собственные деньги курсах Общества Научных Курсов (Towarzystwa Kursyw Naukowych). С 1915 г. ему было разрешено читать лекции по истории математики в Варшавском университете. В 1919 г. С. Дикштейн становится почетным профессором Варшавского университета (по истории математики). В сентябре 1936 г. в обстановке начавшей в Польше антисемитской вакханалии профессора С. Дикштейна стаскивают прямо на лекции с трибуны. С. Дикштейн погиб в сентябре 1939 г.в Варшаве от немецкой авиабомбы. Основные научные труды С. Дикштейна относятся к истории математики и дидактике математики. [3, s. 380-381; 14-18].

[2]А. Ломницки (Antoni Marian Lomnicki: 1881-1939) окончил философский факультет ЛУ в 1903 г. В том же году за диссертацию по математике получил степень доктора наук. В 1906/1907 гг. был на стажировке в Геттингене. В 1919 г. во Львовской Политехнической школе состоялась его хабилитация. Год спустя он становится там же экстраординарным профессором, а в 1921 г. – ординарным профессором. С 1938 г. А. Ломницки проректор ЛП, оставаясь заведующим кафедрой математики. Эту должность он сохранил и после занятия Львова частями Красной Армии в 1939-1941 гг. После начала оккупации Львова немцами в ночь с 3 на 4 июля 1941 г. А. Ломницки вместе с большой группой Львовских профессоров был расстрелян. Основные научные работы были посвящены теории вероятностей, математической статистике, математическим основам геодезии и картографии [3, s. 391; 14; 19].

[3]Я. Лукашевич (Jan Leopold Lukasiewicz: 1878-1956) в 1901 г. закончил философский факультет ЛУ. В 1902 г. защитил там же докторскую диссертацию (по логике), получив за неё кольцо с бриллиантами от Императора Австро-Венгрии Франца Иосифа I (1830-1916), а в 1906 г. после стажировки в Берлине прошла его хабилитация. С 1911 г. Я. Лукашевич – экстраординарный профессор ЛУ С января 1920 г. он – ординарный профессор Варшавского университета. В этом же году выходит работа Я. Лукашевича о трёхзначной логике, фактически написанная ещё в 1917 г. Во время второй мировой войны оставался в Варшаве, работая в архиве. В 1944 г. покинул Варшаву, намереваясь попасть в Цюрих. Конец войны застал его в зоне оккупации англичан, которые предложили ему свою помощь. В итоге Я. Лукашевич оказался в Дублине, где с 1946 г. он стал заведовать кафедрой логики в Королевской Ирландской Академии. Творчество Я. Лукашевича не сводилось только к логике и аналитической философии. Оно оказало большое влияние и на развитие Computer Science [3, 391-392; 14].

С. Качмажа[4], В. Орлича[5], А. Зыгмунда[6] и С. Мазура[7].

На секции VI и сделали доклады руководившие ею Х. Штейнгауз и Ежи Сплава-Нейман[1]. На секции V, одним из руководителей которой был Станислав Гарлицки[2], всеобщее внимание привлёк доклад Людомира Вольфке (Ludomir Wolfke: 1882-1937) об основах начертательной геометрии.

Уже после съезда вышли две книги Л. Вольфке: " Лекции по начертательной геометрии. Основы теории перспективы. Том 1" (Wyklady geometrii wykreślnej. Zasady teorii perspektywy. T.1. Warszawa. Wydawnictwo Trzaska, Ewert, Michalska. 1928. 166 s.) и "Рисунок перспективы и основы начертательной геометрии."(Rysunek perspektywiczny i podstawy geometrii wykreślnej. Warszawa, 1936).

Интересно другое: Л. Вольфке был делегатом 2-го Всероссийского съезда преподавателей математики, посланым на съезд группой учителей математики местечка Пабианицы (Pabianice) недалеко от Лодзи и зарегистрированным на съезде под номером 253 [12, с. 21]. Более того, на третий день съезда (в субботу 29 декабря 1913 г. по старому стилю) был принят к прочтению его доклад "О методе преподавания тригонометрии". Любопытно, что на том же заседании съезда был расширен список членов Организационного Комитета и в него, в частности, была введена Ольга Николаевна Цубербиллер (1885-1975) [12, с. 19].

Был ли ещё кто-нибудь, кто участвовал и во Всероссийских Первом и Втором съездах и в 1-ом польском съезде? Да, были.

Прежде всего, следует сказать о Сергее Аркадьевиче Неаполитанском.

На 1-ом Всероссийском съезде он был зарегистрирован под номером 696, как представитель варшавских учителей математики. Он выступал (27.12.1911 по ст.стилю) на 3-ей секции " Методики математики" этого съезда с докладом "Начала логики в преподавании геометрии" [1, т. II, с. 202-207].

[4]С. Качмаж (Stefan Marian Kaczmarz: 1895-1939) в 1913 г. поступил на философский факультет Ягеллонского университета. По окончании I мировой войны продолжил учебу и закончил её в в 1922 г. В 1924 г. защитил докторскую диссертацию в Львовском университете, а в 1929 г. там же прошел хабилитацию. В 1932 г.стажировался в Кембридже и Геттингене. Профессором так и не стал, хотя прославился книгой "Теория ортогональных рядов" (1935 г,) – русское издание 1958 г. – написанной вместе с Х. Штейнгаузом. Погиб в начале сентября 1939 г. [14; 3, s. 385-386].

[5]В. Орлич (Wladyslaw Orlicz: 1903-1990) окончил среднюю школу в Львове в 1920 г. и тогда же поступил в ЛУ. В 1926 г. закончил учебу, а в 1928 г. защитил там же докторскую диссертацию. Последующие два года (1928-1930) стажировался в Гёттингене. В 1934 г. в ЛУ прошел хабилитацию. В 1937 г. стал экстраординарным профессором в Познаньском университете. В сентябре 1939 г. оказался во Львове. После занятия Львова (1939) Красной Армией стал профессором университета. Во время немецкой оккупации преподавал в заводской школе. После освобождения Львова в 1944 г. вернулся в ЛУ, а в 1945 г., после репатриации, остался в Познани, где в 1948 г. стал ординарным профессором. Опубликовал около 170 работ, главным образом, в области функционального анализа (пространства Орлича) [3, s. 396-397].

[6]А. Зыгмунд (Antoni Szczepan Zygmund: 1901-1992) родился в Варшаве в семье полицейского, верноподданного царя Николая II, и поэтому записавшего дату рождения сына по юлианскому календарю 20.12.1900. А. Зыгмунд учился в Варшавском университете (1919-1922). В 1923 г. там же защитил докторскую диссертацию, а в 1926 г. прошел хабилитацию. В 1928/29 учебном году был на стажировке в Париже (в летнем семестре), Оксфорде и Кембридже. С 1930 г. жил в Вильне (Вильнюс), где стал экстраординарным профессором. В 1940 г. ему удалось уехать в Швецию, а оттуда в США. В 1947-1980 гг. был профессором университета в Чикаго. А. Зыгмунд был в США самым известным польским математиком. Его книга "Тригонометрические ряды" (1935) была переведена на английский, а уже в 1939 г. вышло и её русское издание. Всего им опубликовано около 180 работ, главным образом, в области теории функций и гармонического анализа Он же способствовал развитию таланта Юзефа Марцинкевича (1910-1940, расстрелян весной 1940 г. в Харькове по Катыньскому делу) [3, s. 416-417].

[7]С. Мазур (Stanislaw Mieczyslaw Mazur: 1905-1981) учился в 1923-25 гг. в ЛУ. Затем на два года прервал учебу по состоянию здоровья (при этом возникли и материальные проблемы – не было возможности заплатить за учебу). Поправившись, С. Мазур едет (в 1928/1929 уч. году) в Париж продолжить учебу. Мировой кризис заставляет его вернуться во Львов, где ему дают возможность работать младшим ассистентом. В 1932 г. С. Мазур защищает докторскую диссертацию, формально не окончив учебу. В 1936 г. хабилитация в ЛУ. В 1939 г. после занятия Львова Красной Армией С. Мазур становится профессором, заведующим кафедрой геометрии ЛУ. Во время немецкой оккупации Львова С. Мазур скрывался в городе. После освобождения города в 1944 г. вновь работал в ЛУ до репатриации. С 1946 г. С. Мазур – экстраординарный профессор в Университете Лодзи, а с 1947 г. там же – ординарный профессор. С 1948 г. он заведует кафедрой в Варшавском университете. Всего им опубликовано 40 работ (из них 31 в межвоенное двадцатилетие). С. Мазур был ближайшим другом и сподвижником С. Банаха. Он отредактировал на украинском языке (в 1948 г.) "Курс функціонального аналізу" С. Банаха, снабдив его примечаниями и нерешенными проблемами. Именно эти примечания оказали большое влияние на развитие функционального анализа в последующие 30 лет [3, s. 393-394; 14].

[1]Е. Сплава-Нейман (Jerzy Splawa-Neyman: 1894-1981) родился в Бендерах. Гимназию окончил в Харькове в 1912 г. и поступил в Харьковский университет. В 1916 г. закончил учебу, получив диплом I степени за работу по математике, и оставлен при университете на должности ассистента. В 1921 г. эмигрировал в Польшу. В 1924 г. защитил в Варшавском университете докторскую диссертацию. В 1925/26 и 1926/27 учебных годах был на стажировке в Лондоне и Париже. В 1928 г. прошла его хабилитация в Главной Сельскохозяйственной школе (SGGW). В 1934 г. уехал в Лондон, где стал преподавать в University College. В 1938 г. был приглашен в Беркли (США) на должность профессора Калифорнийского университета, где и остался. Опубликовал около 170 работ по математической статистике. Наряду с Марком Кацем (Marek Kac: 1914-1984) был самым известным в США польским математиком в этой области [3, s. 406-407].

[2]С. Гарлицки (Stanislaw Garlicki: 1875-1935), родился в Плоцке. Диплом инженера получил в 1898 г. в Шарлоттенбурге (теперь это часть Берлина). В 1906-1908 гг. дополнительно изучал математику в Берлине, Цюрихе и Париже. В 1921 г. после хабилитации стал заведовать кафедрой начертательной геометрии Варшавской Политехники, имея должность экстраординарного профессора [3, s. 382].

На 2-м Всероссийском съезде на заседании секции "Б" (на этом съезде были только две секции: "А" и "Б") 28.12.1913 по ст. стилю с 6 часов вечера С.А. Неаполитанский был выбран почетным председателем[3].

Что еще известно о С.А. Неаполитанском?

Знаем, что он, по окончании Императорского Варшавского университета, был преподавателем математики вначале в г. Ченстохове, а затем в Варшаве. В 1918 г. получил гражданство в Польше на основании мнения коллег-учителей. Именно он выступал на 1-м польском съезде на VIII секции. Заметим, что на этой секции свои доклады, кроме целой группы учителей гимназий, представили А. Ломницки, Оттон Никодым[1] и даже С. Банах. Через два года после этого съезда вышла работа С.А. Неаполитанского [23], о которой в книге Марии Пшенёсло [3, с. 280] сказано: "Одной из первых в мире книг, посвященных вообще дидактике математики, была книга, опубликованная Сергеем Неаполитанским (в 1929 г.)".

Второй, о котором следует сказать, был С. Дикштейн, один из председателей VIII секции 1-го польского съезда. Формально, он в работе 1-го Всероссийского съезда участия не принимал. Однако на этом съезде о деятельности математических кружков Варшавы было два выступления.

Первое сделал учитель математики из Варшавы Николай Алексеевич Пажитнов: "Варшавский кружок преподавателей математики и физики был основан в 1899 г. по инициативе профессора Варшавского Университета П.А. Зилова[2]. ... Можно надеяться, что, идущая сравнительно медленным темпом, деятельность кружка в будущем оживится... так как деятельностью кружка стали интересоваться и некоторые из профессоров местного университета, как Д.Д. Мордухай-Болтовской, принимающий живое участие в деятельности кружка."[3] [1, Т. 1, с. 296-297].

Второе, по поручению руководства польского математическо-физического кружка в Варшаве, зачитал представитель учителей математики Санкт-Петербурга Вацлав Ромуальдович Мрочек[4]: "Математическо-физический кружок основан в 1906 году; ведутся работы в особой лаборатории по физике и в особой астрономической лаборатории имени Енджеевича[5]. При кружке существует библиотека... получаются в достаточном количестве и на разных языках специальные математические и педагогические журналы.

Более подробные данные можно найти в "Отчетах", издаваемых ежегодно в виде особого приложения к журналу "Математические известия"[6]; редактором журнала состоит председатель кружка С. Дикштейн" [1, Т. 1, с. 298-299].

Очевидно, что взаимовлияние польских и российских математиков не ограничивалось названными выше фамилиями[7].

---

[3]В это же самое время на заседании секции "А" стараниями профессора Императорского Варшавского университета Д.Д. Мордухай-Болтовского была "похоронена" на 70 лет Программа, предложенная П.С. Флоровым, по теории вероятностей, приспособленная к уровню средней школы. Приведу только одну цитату из реплики Д.Д. Мордухай-Болтовского : "Комбинаторный анализ и теория вероятностей, богатые философскими идеями, бедны математическими... Кроме того, эти отделы мало дают и с точки зрения формально-воспитательного принципа, так как не дают материала для математического упражнения. Развитие же философских способностей дело преподавателя не математики, а гуманитарных наук". Следует отметить, что Д.Д. Мордухай-Болтовской был на обоих Всероссийских съездах весьма активен, категоричен в суждениях, был отличным полемистом. Именно он обрушился с критикой на М.Г. Попруженко (1854-1917), предлагавшего ввести начала анализа в старших классах средней школы (подробнее см. [20, 21]). И его аргументы использовали чиновники от образования в СССР, чтобы не вводить в курс средней школы ни теории вероятностей, ни начал анализа.

[1]О. Никодым (Otton Marcin Nikodym: 1887-1974) учебу в гимназии закончил в Львове и там же в ЛУ получил в 1911 г. право преподавать в средней школе математику и физику. В 1925 г. защитил докторскую диссертацию в Варшавском университете. В1926/27 учебном году был на стажировке в Париже, а в 1928 г. прошла его хабилитация в Ягеллонском университете. До 1939 г. преподавал в Варшавском университете не получив звания профессора. Во время немецкой оккупации давал частные уроки. После освобождения Польши, так и не получив должности профессора, покинул в 1946 г. Польшу и, через Бельгию и Францию, в 1948 г. приехал в США. До 1966 г. О. Никодым преподавал в старейшем частном колледже штата Огайо Keynion College. Прославился О. Никодым прежде всего своими работами по изучению и обобщению понятия интеграла (интеграл Лебега-Радона-Никодыма). Им же изучено метрическое пространство, названное пространством Фреше-Никодыма. Его книга "The Mathematical Apparatus for Quantum-Theories" переведена на многие языки [3, s. 396; 22].

[2]Петр Алексеевич Зилов (1850-1921) окончил в 1973 г. Московский университет, физик. В 1884-1905 гг.преподавал в Императорском Варшавском университете. В 1904 г. исполнял там обязанности ректора [24].

[3]Любопытна реплика учителя В.И. Ферстер на это сообщение: "Я служил два года в Варшавском учебном округе, в городе Кельцы,... но нам совершенно ничего не известно о деятельности Варшавского математического кружка" [1, Т. 1, с. 297].

[4]Известно, что в 1928 г. В.Р. Мрочек стал профессором в только что открытом университете в Минске.

[5]Ян Енджеевич (Jan Walery Jkdrzejewicz: 1835-1887), астроном и врач, родился в Варшаве. После окончания медицинского фак-та Московского университета поселился в 1862 г. в местечке Плоньск около 65 км от Варшавы,. занимаясь врачебной практикой. В 1872 г. заложил обсерваторию, которая была оснащена лучше университетских обсерваторий Варшавы и Кракова. Результаты его наблюдений публиковались в специализированных изданиях. В 1886 г. в Варшаве вышел его первый учебник по астрономии на польском языке под названием "Космография". Ян Енджеевич умер от тифа, заразившись от больного [25, с. 93-95]. За год до его смерти в этом же местечке родился первый премьер-министр Израиля Давид Бен-Гурион (1886-1973).

[6]"Wiadomości Matematyczne"

[7]Например, на 1-ом съезде польских математиков был образован Почетный Комитет, в который был избран Станислав

Библиографический список

1. Труды 1-го Всероссийского Съезда преподавателей математики [Текст]. – СПб.: Север, 1913. – Т. I. – 609 с.; Т. II. – 363 с.; Т. III. – 113 с.
2. *Одинец, В.П.* Зарисовки по истории математического образования России со второй половины XVIII века до 1917 года [Текст] / В.П. Одинец. – Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2011. – 51 с.
3. Przenioslo Malgorzata. Matematycy Polscy w dwudziestoleciu mikdzywojennym. Studium historiczne. Kielce: W-wo Uniw.Humanist. Przyrodn. Jana Kochanowskiego, 2011. 402 s.
4. Ksikga Pami№tkowa Pierwszego polskiego Zjazdu matematycznego. Lwów 7-10 IX 1927. – Kraków, 1929.
5. Polski Slownik biograficzny. Wroclaw-Warszawa-Kraków: PWN, 1962.
6. Encyklopedia Szkolna. Matematyka. Warszawa: W-wa Szk. i Pedag., 1988. 383 s.
7. Schinzel A. Georgij Woronoj – mistrz Waclawa Sierpicskiego / XII Szkola historii matematyki (Red.: S. Domoradzki, Z. Pawlikowska-Broïek, D. Wkglowska). Kraków: W-wo AGH, 1999. s. 155-161.
8. *Колчинский, И.Г.* Астрономы. Биографический справочник [Текст] / И.Г. Колчинский, А.А. Корсунь, М.Г. Родригес. – Киев: Наукова думка, 1986.
9. Sanford L. Segal. Mathematicians under the Nazis. Princeton: Princeton University Press, 2003.
10. Kuratowski K. Notatki do autobiografii. – Warszawa: PWN, 1981.
11. *Одинец, В.П.* Зарисовки по истории компьютерных наук [Текст] / В.П. Одинец. – Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2011. – 200 с.
12. Дневник Второго Всероссийского съезда преподавателей математики [Текст] / под ред. И.И. Чистякова. – Москва: Печатня А.И. Снегирёвой, 1913/1914. – 181 с.
13. Доклады, читанные на 2-ом Всероссийском Съезде преподавателей математики в Москве [Текст]. – Москва: Печатня А. Снегиревой, 1915. – 320 с.
14. Kuratowski K. Pól wieku matematyki polskiej 1920-1970. Wspomnienia i refleksje. Biblioteka Wiedzy Wspólczesnej, T. 247. – Warszawa: Omega, 1973.
15. Domoradzki S. Matematyka w Uniwersytecie Carskim w Warszawie w latach 1869-1915 / XII Szkola historii matematyki (pod red.: S. Domoradzki, Z. Pawlikowska-Broïek, D. Wkglowska). – Kraków: W-wo AGH, 1999. s. 139-161.
16. Duda R. Stulecie Wiadomości Matematycznych // Wiadom. Mat. 33(1997), 111-135.
17. Wikslaw Witold. Samuelowi Dicksteinowi w sto piećdziesiata rocznick urodzin / Matematyka czasów Weierstrassa (pod red. S. Fudalego), s.143-148. Szczecin: W-wo Uniw. Szczecicskiego, 2002. 212 s.
18. Gleichgewicht Boleslaw. Wspomnienie o Samuelu Dicksteinie / Matematyka czasów Weierstrassa (pod red. S. Fudalego), s. 149-152. Szczecin: W-wo Uniw. Szczecicskiego, 2002. 212 s.
19. Maligranda L. Antoni Lomnicki (1881-1941) // Wiadom. Mat. T. XLIV(2008). s. 62.
20. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* О Первом Всероссийском Съезде преподавателей математики [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской. – Варшава: Типогр. Варшавского уч. округа, 1912. – 42 с.
21. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* Второй Всероссийский Съезд преподавателей математики. Философские, методологические и дидактические очерки по поводу докладов Съезда [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской // Варшавские Университетские Известия. – 1915. – № 1. – С. 1-95.
22. Derkowska A. Otton Marcin Nikodym // Wiadom. Mat. 25(1983), 74-88; 27(1983), 45-46.
23. Neapolitacski Sergiusz. Zarys dydaktyki matematyki dla nauczycieli szkól *powszechnych i średnich.* Warszawa, 1929. 159 s.
24. Rektorzy UW. Mapa architektoniczna UW i slownik biograficzny. – Warszawa: W-wo UW, 2006.
25. *Гадомский, Я.* Шеренга великих астрономов [Текст] / Я. Гадомский / пер. с полск. Е.К. Шпак. – Наша ксенгарня, 1969. – 156 с.
26. Markisz Iwan. Korespondencja miedzy S. Zaremba i W. Steklowym w latach 1910-1925 / Matematyka czasów Weierstrassa (pod red. S. Fudalego), s. 199-206. Szczecin: W-wo Uniw. Szczecicskiego, 2002. 212 s.

Системно-деятельностный подход в проектировании и реализации Федеральных Государственных Образовательных Стандартов нового поколения

В.А. Далингер

Системный подход стал занимать одно из ведущих мест в научном познании в XX веке. Как направление методологии теоретических и практических познаний, системный подход ориентирует исследования на раскрытие

Заремба (Stanislaw Zaremba: 1863-1942), окончивший гимназию в Санкт-Петербурге в 1881 г., а позже закончивший там же Технологический Институт с получением диплома инженера-технолога (в 1886 г.). Позже – два года учебы в Сорбонне, и получение там же в 1889 г. докторской степени по математике. С 1900 г. С. Заремба – экстраординарный профессор Ягеллонского университета, а с 1905 г. там же – ординарный профессор. В архиве РАН (Собрание 162, опись 2 № 152, с. 1-77) сохранилась переписка за 1910-1925 гг. В.А. Стеклова (1864-1926) с С. Зарембой, посвященная обсуждению насущных проблем математической физики [26].

целостности объекта и обеспечивающих ее механизмов, на выявление многообразных типов связей сложного объекта с другими объектами [1, 9].

Системный подход способствует адекватной постановке проблем в конкретных науках, в том числе и в педагогике, и выработке эффективной стратегии их изучения.

Учитывая, что системный подход как методология теоретических и практических исследований и системный анализ как реализация данной методологии в конкретной области составляет мощный аппарат процесса познания мира, следует эти мощные резервы использовать и в процессе обучения, в частности математике (в статье мы акцентируем внимание на математическом образовании) [5, 7].

В содержание любого учебного предмета, в том числе и математики, включается как основные научные понятия, факты, законы, методы, теории, так и виды деятельности, с помощью которых осуществляется процесс познания [4].

Говоря о содержании обучения, традиционная дидактика ограничивается рассмотрением методов, средств, форм, сообщения учащимся "готовых" знаний, в то время как современная дидактика стоит на деятельностном подходе к обучению, который выступает его методологическим основанием [2, 4].

Развитие человека рассматривается современной педагогикой как расширение круга доступных ему видов и форм деятельности и потому сегодня стали активно разрабатываться деятельностные принципы педагогики [2, 3, 4].

Цель образования рассматривается как подготовка человека к будущей деятельности в обществе, а содержание образования – как освоение общих методов и форм человеческой деятельности.

В настоящее время системно-деятельностный подход положен в основу новых федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) [8], определил три группы требований к его проектированию и реализации: к формулированию целей образования как планируемых результатов деятельности школьников (предметных, метапредметных и личностных); к структуре основной образовательной программы; к условиям реализации стандартов.

В Законе РФ "Об образовании" в статье 7 сказано, что государственные образовательные стандарты являются основой объективной оценки уровня образования и квалификации выпускников школ независимо от форм получения образования.

Введение образовательных стандартов в школьную практику актуализировало решение вопросов, связанных с проектированием и реализацией образовательного процесса в соответствии с целями ФГОС.

Новые стандарты отвечают идеям компетентностного подхода, который определяет целевую ориентацию учебного процесса на формирование определенных компетенций, отражающие готовность человека действовать в конкретных ситуациях [6, 8].

Но заметим, что перечисленные в новых образовательных стандартах формируемые у обучающихся компетенции и компетентности, трактуются без обсуждения тех конкретных навыков деятельности и реальных умений, которые должны при этом формироваться у них.

Системно-деятельностный подход позволит обеспечить реализацию идеи непрерывного образования на уровне школы при условии сформированности у обучающихся универсальных учебных действий (УУД): регулятивных, познавательных, коммуникативных и личностных. Формирование УУД – это одна из важнейших задач учителя, эффективность решения которой зависит от его профессиональной компетентности и в области педагогического проектирования учебно-методической документации, технологии обучения и их реализации (под педагогическим проектированием мы понимаем поэтапную разработку образовательной системы, ее элементов и действий, сопровождающаяся изменением субъектов образовательного процесса и качества образования).

Универсальные учебные действия выполняет в учебном процессе следующие функции:

- обеспечение возможностей учащегося самостоятельно осуществлять деятельность учения, ставить учебные цели, искать и использовать необходимые средства и способы их достижения, контролировать и оценивать процесс и результаты деятельности;
- создание условий для гармоничного развития личности и ее самореализации на основе готовности к непрерывному образованию;
- обеспечение успешного усвоения знаний, умений и навыков и формирование компетентностей в любой предметной области.

В широком значении термин "универсальные учебные действия" означает умение учиться, они входят в группу метапредметных результатов.

В более узком (собственно психологическом значении) этот термин определяется как совокупность способов действия учащегося, обеспечивающих его способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса.

Основными принципами построения школьного курса математики на основе системно-деятельностного подхода должны стать [5, 7]:

- принцип системного построения курса математики;

- принцип описания курса математики в единстве общего, особенного и единичного;
- принцип оптимального существования фундаментальности и профессиональной направленности обучения курсу математика;
- принцип предметной деятельности при изучении курса математики;
- принцип развивающего обучения.

Традиционное обучение математике и обучение, построенное на системно-деятельностном подходе, разнятся по следующим позициям: по содержанию, методам и средствам обучения; по характеру процесса управления обучением; по характеру подготовки преподавателя к проведению учебного процесса; по отводимому на обучение количеству часов; по результатам обучения.

Практика показывает, что технологический подход к проектированию и реализации образовательного процесса, построенного на основе системно-деятельностного подхода, удовлетворяет требованиям ФГОС.

Технологический подход к образованию включает комплекс теоретических положений, концепций, идей, принципов, механизмов в познании и практики реализации технологий обучения и воспитания будущего поколения.

За время развития педагогической науки и практики существовали различные технологические парадигмы:

- эмпирическая технология обучения, воздействующая на объект изучения, то есть содержание обучения, чтобы обеспечить максимальную усвояемость содержания для среднего ученика;
- алгоритмическая педагогическая технология, воздействующая на объект научения, то есть ученика, чтобы обеспечить максимальное (даже гарантированное) усвоение содержания каждым учеником;
- стохастическая образовательная технология, воздействующая на обучающую среду, в которую погружены ученики, чтобы обеспечить максимальную вероятность развития каждого ученика в желаемом направлении за счет изменения свойств среды.

Условия перехода от традиционного к технологическому подходу в образовании, реализации ФГОС и основных положений системно-деятельностного подхода активно, развивается направление технологизации процесса обучения. Это относится и к технологизации целей образования, и к технологизации взаимодействия целей и содержания образования, и к технологизации представления учебной информации, и к технологизации взаимодействия участников образовательного процесса, и к технологизации получения обратной связи.

При системно-деятельностном подходе к пректированию и реализации ФГОС системообразующим элементом учебного процесса являются различные виды деятельности, субъект обучения занимает активную позицию, а деятельность является основой, средством и условием развития личности. Такое ключевое положение в корне меняет модель взаимодействия учителя и ученика.

При традиционном подходе, который реализовывал предметно знаниевую парадигму образования, целью являлось вооружение учащихся знаниями, умениями и навыками; способы общения сводились к наставлению, разъяснению, запрету, угрозам, наказаниям, нотациям; тактика строилась на диктате и опеке; позиция учителя сводилась к реализации учебной программы, удовлетворению требований руководства и контролирующих инстанций; основным положением к руководству был лозунг: "Делай, как я!" и т.д.

При системно-деятельностном подходе, который реализует компетентностную парадигму образования, целью является формирование личности, развитие индивидуальности, содействие развитию личности (знания, умения, навыки не цель, а средства развития); способы общения сводятся к пониманию, признанию и принятию личности, к учету точки зрения ученика, не игнорированию его чувств и эмоций; тактика строится на идеях сотрудничества; позиция учителя исходит из интересов ученика и перспектив его развития; положением к руководству становятся слова: "Не рядом и не над, а вместе!", ученик полноправный партнер и т.д.

В.В. Давыдов [4], который разрабатывал положения деятельностного подхода к обучению, отмечал, что:

- конечной целью обучения является формирование способа действий;
- способ действий может быть сформирован только в результате деятельности, которую, если она специально организуется, называют учебной деятельностью;
- механизмом обучения является не передача знаний, а управление учебной деятельностью по овладению знаниями, умениями и навыками.

Положения системно-деятельностного подхода в ФГОС общего образования нашли отражения в требованиях к его реализации: к образовательным результатам, к структуре основной образовательной программы, к организации учебного процесса.

Системно-деятельностный подход основных положений концепции ФГОС раскрывает, что необходимо сделать, чтобы получить новый образовательный результат:

- подробно описать новый результат, ответить на вопрос: Зачем учить? (Цель);
- подобрать средства получения нового результата, ответить на вопросы: Чему учить? (содержание, основная образовательная программа, рабочие учебные программы, учебно-методический комплекс);

- определить адекватные педагогические технологии, методики, ответить на вопрос: Как учить?

Управление обучением и достижения поставленных образовательных целей обеспечивает в ФГОС следующие требования к организации процесса обучения:

- организация учебной деятельности учащихся, включая развитие учебно-познавательных мотивов;
- выбор конкретных методов и приемов обучения, обеспечивающих полную и адекватную ориентировку ученика в задании;
- организация таких форм учебного сотрудничества, где была бы востребована активность и инициатива каждого ученика;
- выбор технологии обучения, предполагающих построение учебного процесса на деятельностной основе, на концептуальной основе, на крупноблочной основе, на опережающей основе, на проблемной основе, на личностно-смысловой основе, на диалоговой основе, на ситуативной основе и др.

Адекватный выбор технологий обучения обусловлен стратегиями образования – формирования или развитие, требованиями ФГОС. Стратегия развития, заложенная в ФГОС нового поколения, предполагает развитие личностного потенциала ребенка в процессе обучения, раскрытие заложенных в нем возможностей, сомоактуализация.

Заметим, что реализация системно-деятельностного подхода в образовании осуществляется в ходе решения следующих педагогических задач:

- определение и формирование основных результатов обучения и воспитания в терминах сформированности личностных качеств и универсальных учебных действий;
- определение функций, содержания и структуры универсальных учебных действий;
- определение круга учебных предметов, в рамках которых оптимально могут быть сформированы конкретные виды универсальных учебных действий и в какой форме;
- разработка системы типовых задач для диагностики сформированности универсальных учебных действий на каждой из ступеней образовательного процесса и др.

ФГОС нового поколения призвано стать "проводниками" перспективных отечественных, международных и европейских тенденций реформирования и развития системы образования, исходя из стратегических интересов и культурно-образовательных тенденций России.

В заключение приведем высказывание П.Я. Чаадаева: "На учебное дело в России может быть установлен совершенно особый взгляд, ему возможно дать национальную основу, в корне расходящейся с той, на которой оно зиждется в остальной Европе, ибо Россия развивалась во всех отношениях иначе, и ей выпало на долю особое предназначение в этом мире".

Библиографический список

1. *Блауберг, И.В.* Становление и сущность системного подхода [Текст] / И.В. Блауберг, Э.Г. Юдин. – М.: Наука, 1973. – 279 с.
2. *Боровских, А.В.* Деятельностные принципы в педагогике и педагогическая логика [Текст]: пособие для системы профессионального педагогического образования, подготовки и повышения квалификации научно-педагогических кадров / А.В. Боровских, Н.Х. Розов. – М.: МАКС Пресс, 2010. – 80 с.
3. *Воронцов, А.Б.* Практика развивающего обучения по системе Д.Б. Эльконина-В.В. Давыдова [Текст] / А.Б. Воронцов. – М.: ЦПРУ "Развитие личности", 1998. – 360 с.
4. *Давыдов, В.В.* Теория развивающего обучения [Текст] / В.В. Давыдов. – М.: Интор, 1996. – 544 с.
5. *Далингер, В.А.* Системно-деятельностный подход к обучению математике [Текст] / В.А. Далингер // Наука и эпоха: монография / Под ред. О.И. Кирикова. – Воронеж: Изд-во ВГПУ, 2011. – С. 230-243.
6. *Далингер, В.А.* Компетентностный подход и образовательные стандарты общего образования [Текст] / В.А. Далингер // Образовательно-инновационные технологии: теория и практика: монография / Под ред. О.И. Кирикова. – Книга 2. – Воронеж: Изд-во ВГПУ, 2009. – С. 7-18.
7. *Малыгина, О.А.* Обучение высшей математике на основе системно-деятельностного подхода [Текст]: учеб. пособие / О.А. Малыгина. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 256 с.
8. Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования [Текст]. – М., 2008. – 21 с.
9. *Юдин, Э.Г.* Системный подход и принцип деятельности [Текст] / Э.Г. Юдин. – М.: Наука, 1978. – 342 с.

Глава 2

Математика в ее многообразии

О задаче Дирихле для эллиптических систем второго порядка

В.Е. Балабаев

Хорошо известно, что задача Дирихле для эллиптической системы второго порядка в ограниченной области может быть ненётеровой. Впервые пример такой эллиптической системы для случая двух уравнений второго порядка на плоскости был построек А.В. Бицадзе [1]. Для размерностей $n = 4$ и $n = 8$ подобные примеры были построены соответственно Ш.Г. Антохиным [2] и Е.И. Кузьминым [3]. Во всех этих работах существенно использовался аппарат теории аналитических функций, поэтому и размерность пространства и число уравнений е системе были четными, а задача Дирихле рассматривалась в шаре. Следует отметить, что в полупространстве примеры эллиптических систем второго порядка с ненётеровыми задачами Дирихле были рассмотрены А.К. Янушаускасом [4].

В настоящей работе строятся два класса эллиптических систем второго порядка, имеющих ненётерову задачу Дирихле, в пространствах любой размерности больше трех. При этом один из этих классов состоит из системы с четным числом уравнений, а другой-с нечетным. Для построения данных систем используются канонические эллиптические системы первого порядка, введенные нами в [5].

Пусть $A_n(\xi)$ – характеристическая матрица канонической системы в R^n [5], а $A_n^1(\xi)$ – матрица, полученная из $A_n(\xi)$ вычеркиванием первой строки и первого столбца, т.е. имеет вид:

$$A_n(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots \\ \xi_2 & \cdots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \cdots & A_n^1(\xi) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через матрицу, получающуюся из $A_n(\xi)$ заменой первого столбца первой строкой и, наоборот, первой строки-первым столбцом, т.е.

$$A_n\tilde{}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots \\ -\xi_2 & \cdots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \cdots & A_n^1(\xi) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $B_n = A_n(\xi)\, A_n\tilde{}(\xi)$ и рассмотрим систему

$$B_n(\frac{\partial}{\partial x})??(x) = 0. \tag{1}$$

Система (1) эллиптична, так как $B_n(\xi)\, B_n^t(\xi) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_1^2\right)^2 E_m$, где m=$2^{r(n)}$, а $r(n)$ – число Радона-Гурвица [5]. Поэтому $\det(B_n(\xi)\, B_n^t(\xi))$=$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_1^2\right)^{2m}$ и, следовательно, $\det B_n(\xi) = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^m$. Нетрудно увидеть, что $B_n(\xi)$ имеет следующую структуру:

$$B_n(\xi) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 & 0 & \dots \\ 0 & \cdots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \cdots & \mathbf{B}_n^1(\xi) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Рассмотрим систему:

$$B_n^1(\frac{\partial}{\partial x})u(x) = 0. \tag{3}$$

Так как $B_n^1(\xi)(B_n^1(\xi))^t = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_1^2\right)^{2m-2} E_{m-1}$, то $\det B_n^1(\xi) = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{m-1}$. Отсюда следует, что система (3) является эллиптической системой второго порядка в пространстве R^n независимых вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Исследуем однородную задачу Дирихле для системы (3) в эллипсоиде:

$$D = \{x \in R^n : (n-3)x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < r^2,\ r > 0\},\ (n > 3):\ u(x)|_{\partial D} = 0. \tag{4}$$

Докажем, что задача (3), (4) имеет бесконечно много линейно независимых решений. Для этого установим, что любой вектор вида:

$$u(x) = (r^2 - (n-3)\,x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3}, \frac{\partial\phi}{\partial x_4}, 0, \ldots, 0\right\},$$

где ??(x_2, x_3, x_4) – гармоническая функция от x_2, x_3, x_4, т.е. $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_4^2} = 0$ не зависящая от x_1, x_5, x_n, удовлетворяет системе (3), а также краевому условию (4). Выполнение условия (4) очевидно.

Для доказательства того, что $B_n^1(\frac{\partial}{\partial x})u(x) = 0$, достаточно в силу (5) выписать три первых столбца матрицы $B_n^1(\frac{\partial}{\partial x})$. Обозначим для кратности $\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ через k^2, $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_1}$ через к*1. Например, $2(1^2+2^2)$ означает $2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$, а 2(2*3-1*4) означает $2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4}\right)$. В этих обозначениях три первых столбца $B_n^1(\frac{\partial}{\partial x})$ имеют вид:

$$\begin{array}{l}
2(1^2+2^2) - \sum\limits_{\text{к}=1}^{n} k^2 2(2*3+1*4)2(2*4-1*3) \\
2(2*3-1*4)2(1^2+3^2) - \sum\limits_{\text{к}=1}^{n} k^2 2(3*4+1*2) \\
2(2*4+1*3)2(3*4-1*2)2(1^2+4^2) - \sum\limits_{\text{к}=1}^{n} k^2 \\
2(5*2)2(5*3)2(5*4) \\
\ldots \\
2(9*2)2(9*3)2(9*4) \\
2(9*1)E_3 \\
\ldots \\
2(n*2)2(n*3)2(n*4) \\
2(n*1)E_3 \\
0
\end{array} \tag{6}$$

где 0 – нулевая матрица, а E_3 – единичная матрица третьего порядка.

Непосредственный подсчет показывает, что вектор (5) удовлетворяет (3), матрица, которой имеет три первых столбца вида (6). Система (3) имеет нечетное число уравнений, равное $2^{r(n)}$-1, и n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если рассмотреть систему (1) и однородную задачу Дирихле (4), то эта система второго порядка имеет четное число уравнений $2^{r(n)}$ и n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Она будет также эллиптична, так как $\det B_n(\xi) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_1^2\right)^m$. Из структуры $B_n(\xi)$ (2) видно, что вектор:

$$u(x) = (r^2 - (n-3)\,x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)\left\{0, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3}, \frac{\partial\phi}{\partial x_4}, 0, \ldots, 0\right\}\ (n > 3), \tag{7}$$

где ?? не зависит от x_1, x_5, x_n и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_4^2} = 0,$$

является решением задачи (1), (4). Ясно, что среди решений (5), (7) имеет бесконечно много линейно независимых.

Следовательно, задача Дирихле для системы (1) и (3) в эллипсоиде D не является нётеровой.

Библиографический список

1. *Бицадзе, А.Б.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка [Текст] / А.Б. Бицадзе. – М., 1988.
2. *Антохин, Ю.Г.* Дифференц. уравнения [Текст]. – 1966. – Т. 2. – № 4. – С. 525-532.
3. *Кузъмин, Е.Й.* Дифференц. уравнения [Текст]. – 1967. – Т. 3. – № 1. – С. 155-157.
4. *Янушаускас, А.М.* Задача о наклонной производной теории потенциала [Текст] / А.М. Янушаускас. – Новосибирск, 1985.
5. *Балабаев, Б.Е.* Дифференц. уравнения [Текст]. – 1991. – Т. 27. – № 12. – С. 2082-2094.

Об одном конусе в $\mathbb{R}^{n\times n}$, точки которого допускают H–полярное разложение

Ю.И. Большаков

Постановка задачи. Рассматривается множество $\mathbb{R}^{n\times n}$ всех $n\times n$–матриц над $\mathbb{R}$. Ищется критерий представления произвольной матрицы $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ в виде:

$$X = US, \tag{1}$$

где $U^HU = I,\ S^H = S$. Операция H-сопряженности матрицы $Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$ определяется из равенства:

$$Y^H := H^{-1}Y^tH; \tag{2}$$

здесь заданная матрица $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$ обладает двумя свойствами: $H^t = H,\ det\ H\neq 0$. Представление (1) носит название H-полярного разложения. В частности, оно совпадает с классическим полярным, если $H = I$, а S – неотрицательно определенная матрица. В общем же случае (если H необязательно положительно определенная матрица), представление матрицы X в форме (1) существует не всегда, что иллюстрирует следующий тривиальный пример.

Пример 1. $X = \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Очевидно, не существует матрицы S такой, что $S^2 = X^HX = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

Конус M_0, о котором идёт речь в названии статьи, состоит из точек $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$, каждый элемент которого допускает H-полярное разложение, обладает следующим определяющим свойством: если $X\in M_0$, то вектор $\lambda X\in M_0$, для $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

Существует несколько работ, в которых сформулирован (и доказан) критерий существования разложения (1) в терминах канонической формы пары матриц $({X'}^{H'}X',\ H')$. Здесь ${X'}^{H'}X' = T^{-1}X^HXT,\ H' = T^tHT$, T – матрица перехода от стандартного базиса к каноническому. Приведём один из таких критериев.

Теорема 1. *Матрица $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ допускает H-полярное разложение (1) тогда и только тогда, когда в каноническом виде пары $({X'}^{H'}X',\ H')$ наряду с каждой парой*

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \dots & 0\\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \dots & \varepsilon\\ & \ddots & \\ \varepsilon & \dots & 0\end{bmatrix}\right)\in\mathbb{R}^{k\times k}\times\mathbb{R}^{k\times k}, \lambda<0, \varepsilon = 1 \text{ или } \varepsilon = -1,$$

присутствует и пара

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \dots & & 0\\ \dots & \dots & \dots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \dots & & \lambda\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \dots & -\varepsilon\\ & \ddots & \\ -\varepsilon & \dots & 0\end{bmatrix}\right)\in\mathbb{R}^{k\times k}\times\mathbb{R}^{k\times k}.$$

Та же часть прямой суммы $({X'}^{H'}X"$, $H')$, первая компонента пары которой нильпотентна, допускает разбиение в прямую сумму пар вида:

$$\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & 1\\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}\right)\oplus\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & -1\\ & \ddots & \\ -1 & & \end{bmatrix}\right)$$

$$\in(\mathbb{R}^{k\times k}\times\mathbb{R}^{k\times k})\times(\mathbb{R}^{k\times k}\times\mathbb{R}^{k\times k})$$

и $Ker\tilde{X}' = span[1,0,\dots,0,1,0,\dots,0]^t$ (вторая единица находится на $k+1$-ом месте), или пар матриц вида:

$$\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & \varepsilon\\ & \ddots & \\ \varepsilon & & \end{bmatrix}\right)\oplus\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & \varepsilon\\ & \ddots & \\ \varepsilon & & \end{bmatrix}\right)$$

$$\in(\mathbb{R}^{k\times k}\times\mathbb{R}^{k\times k})\times(\mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}\times\mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)})$$

и $Ker\tilde{X}' = span[1,0,\dots,0]^t$. Здесь $Ker\tilde{X}'$ — пересечение $KerX'$ с соответствующим подпространством, отвечающим данному прямому слагаемому.

Теорема 1, в несколько иной терминологии, содержится в работе [1]; существуют такие работы, уточняющие результат теоремы 1 в той её части, которая гарантирует существование подобного разложения $({X'}^{H'}X',\ H')$.

Заметим, что в Теореме 1 дан критерий существования H-полярного разложения (1) матрицы X в терминах канонического вида матрицы $X^H X$. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы дать достаточное условие существования (1) в терминах матриц X и H. Критерий представления X в виде (1) мы сможем дать лишь для случая $n = 2$.

Пусть n произвольно. Покажем, что существует множество $M \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, содержащее открытое подмножество M_0, каждая точка которого допускает разложение (1). Имеет место следующая

Лемма. *Многочлен n-ой степени с действительными коэффициентами вида*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{3}$$

с $a_0 \cdot a_n \neq 0$ не имеет отрицательных корней, если

$$a_k = (-1)^k |a_k|, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

В самом деле, если x_0 — отрицательный корень многочлена (3) то $x_0 = -|x_0|$, и поэтому $f(x_0) = (-1)^n|a_0||x_0|^n + (-1)^n|a_1||x_0|^{n-1} + \ldots + (-1)^n|a_{n-1}||x_0| + (-1)^n|a_n| = 0$ тогда и только тогда, когда $|a_0||x_0|^n = |a_1||x_0|^{n-1} = \ldots = |a_{n-1}||x_0| = |a_n| = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ и $a_n = 0$ или $a_0 = a_1 = \ldots a_{n-1} = a_n = 0$, что противоречит условию леммы.

Заметим, что лемма даёт только лишь достаточное условие отсутствия отрицательных корней многочлена (3). Отметим также, что любая совокупность из коэффициентов $a_1, \ldots, a_{n-1}$, удовлетворяющих соотношению (4) может обращаться в нуль.

Пусть, далее, матрица $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det X \neq 0$. Обозначим $A := X^H X$, где $H = I_p \oplus I_m$, $p + m = n$. Очевидно, что $\det A = (\det X)^2 \neq 0$.

Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n - s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}s_{n-1}\lambda + (-1)^n s_n), \tag{5}$$

где s_k – сумма всех главных миноров k-го порядка матрицы 2 [2, с. 78]:

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \ s_2 = \sum_{1\le i_1 \le i_2 \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix}, \ldots, s_n = \sum_{1\le i_1 < \ldots < i_n \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix} = \det A.$$

По лемме, если последовательность чисел $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ состоит из неотрицательных элементов, а элемент $s_n > 0$, то характеристический многочлен матрицы A не имеет отрицательных корней. Заметим, что его коэффициент s_k есть однородный многочлен степени k относительно n^2 переменных a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots n$.

Если $X = I$, то и $A = X^H X = I$. Поэтому $\det(A - \lambda I) = \det((1-\lambda)I) = (-1)^n(\lambda - 1)^n = (-1)^n(\lambda^n - C_n^1\lambda^{n-1} + C_n^2\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}\lambda + (-1)^n)$.

В обозначениях формулы (5) $s_k = C_n^k$. В рассматриваемом случае характеристический многочлен не имеет отрицательных корней (все его корни равны 1). Легко понять, что это обстоятельство распространяется на целую окрестность точки I в $\mathbb{R}^{n\times n}$. В самом деле, обозначим $M_k := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} | s_k(X^H X) \ge 0, \ s_n(X^H X) > 0\}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Поскольку для всех k многочлен $s_k(X^H X)$ – непрерывная функция n^2 переменных x_{ij} степени $2k$ и её значение в точке $x_{ij} = \delta_{ij}$ равно $C_n^k > 0$, то существует окрестность U_k^0, в которой эта функция сохраняет знак: $s_k(X^H X) > 0$; $\forall X \in U_k^0$ ([3, с. 475]). Множество $M_0 := \cap_{k=1}^n U_k^0$ – открыто в $\mathbb{R}^{n\times n}$, а $M := \cap_{k=1}^n M_k \supset M_0$. Заметим, что $M_0 \neq \oslash$, ибо $I \in M_0$. Поскольку для каждого $X \in M$ многочлен $\det(X^H X - \lambda I)$ не имеет отрицательных и нулевых корней, то, согласно теореме 1, матрица X допускает H-полярное разложение. И мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Если коэффициенты $(-1)^k s_k$ характеристического многочлена $\det(X^H X - \lambda I)$ из формулы (5) образуют знакочередующуюся последовательность (т.е. $s_k \ge 0$, $k = 1, \ldots, n-1$; $s_n > 0$), то матрица X допускает H–полярное разложение. Множество $M \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, состоящее из таких X, содержит открытое в $\mathbb{R}^{n\times n}$ подмножество M_0.*

Вернёмся к разложению (1) в случае $n = 2$ и пусть

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

В работе [4], фактически, показано, что матрица X допускает H–полярное разложение тогда и только тогда, когда её элементы удовлетворяют следующей дизъюнктивной системе условий $1^0 - 7^0$:

$1^0.0 < 2|d| < w \Leftrightarrow X^H X \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2$.

$2^0.\begin{cases} 0 < 2|d| = w \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X^H X = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda > 0.$

$3^0.\begin{cases} 0 < 2|d| = w \\ \Delta \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow X^H X \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda > 0.$

$4^0. \begin{cases} 0 < 2|d| = -w \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X^H X = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda < 0.$

$5^0. \begin{cases} 0 < w \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X^H X \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, или $X^H X \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda > 0.$

$6^0. \begin{cases} y = \varepsilon x \\ z = \eta x \\ t = \varepsilon\eta x,\ \varepsilon = \pm 1,\ \eta = \pm 1 \end{cases}, \ KerX = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -\varepsilon \end{bmatrix}\right\}.$

$7^0. |w| < 2|d| \Leftrightarrow X^H X \sim \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\beta \neq 0$. Здесь $d = xt - yz = \det X,\ \Delta = xy - zt,\ w = x^2 - z^2 + t^2 - y^2 = trX^H X$.

Проиллюстрируем теорему 2 на следующем примере.

Пример 2. Пусть $n =, 2$ тогда матрицы X и $X^H X$ имеют соответственно, виды: $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, $X^H X = \begin{bmatrix} x^2 - z^2 & xy - zt \\ -(xy - zt) & t^2 - y^2 \end{bmatrix}$, поэтому $s_1 = x^2 - z^2 + t^2 - y^2 \geq 0,\ s_2 = (xt - yz)^2 > 0$. В обозначениях условий $1^0 - 7^0$, имеем $s_1 = trX^H X = w$, $s_2 = (\det X)^2 = |d^2|$. Итак,

$$\begin{cases} w \geq 0; \\ |d| > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Если $0 < 2|d| < w$, то имеет место 1^0, если же $0 < 2|d| = w$, то выполняется условие 2^0, либо условие 3^0, в зависимости от того имеет место равенство $\Delta = 0$; либо неравенство $\Delta \neq 0$. Если же $w < 2|d|$, то имеет место 7^0.

Таким образом, теорема 2, дающая лишь достаточное условие H–полярного разложения, при $n = 2$, дающая лишь достаточное условие H–полярного разложения, при $n = 2$, "упускает" случаи 4^0, 5^0 и 6^0. Далее,

Теорема 3. *Множество $M \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, каждая точка которого допускает H–полярное разложение, линейно связано в топологии $\mathbb{R}^{n\times n}$.*

В самом деле, если $X_0 \in M$, то, как было отмечено выше/, для всех $X \in [0,\ X_0]$ имеет место равенство $X = U(\lambda S)$, где $0 \leq \lambda \leq 1$ и $X_0 = US$ – H-полярное разложение матрицы X_0. Поэтому двухзвенная ломаная $\widehat{XOY}$ соединяющая две точки $X, Y \in M$ целиком лежит в M.

Библиографический список

1. *Bolshakov Y.* Unitary equivalence in an indefinite scalar product: an analogue of singular – value decomposition // Linear alg. appl. / Y. Bolshakov, B. Reichstein. – 222; P. 155-226, 1995.
2. *Гатмахер, Ф.Р.* Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гатмахер. – М.: Наука, 1988. – 550 с.
3. *Ильин, В.А.* Основы математического анализа [Текст]: Ч. I / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М.: Наука, 1982. – 616 с.
4. *Большаков, Ю.И.* Геометрическое описание некоторого множества $n \times n$-вещественных матриц, допускающих H-полярное разложение [Текст] / Ю.И. Большаков // Математика и математическое образование. Теория и практика. – ЯГТУ, 2012. – Вып. 8. – С. 39-48.

Особенности проявления некорректности в некоторых задачах математической физики

Е.П. Борматова

Проанализированы источники некорректности коэффициентной обратной задачи водородопроницаемости. Отмечены установленные численно особенности поведения решения для наиболее сложных краевых условий.

Постановка задачи. Для решения уравнений в конкретной прикладной задаче необходимо знать коэффициенты (параметры), входящие в уравнение. Единственный способ получения этих параметров – проведение экспериментов для последующего решения коэффициентной обратной задачи.

Расхождение в результатах обработки экспериментов по водородопроницаемости указывает на то, что мы имеем дело с некорректной задачей. С другой стороны, задача определения постоянных коэффициентов непрерывного дифференциального оператора является корректной. Цель данной работы — выяснить возможные причины этого противоречия

Остановимся на классическом эксперименте по методу проницаемости [1], который состоит в следующем. Пластина (мембрана) из исследуемого материала служит перегородкой вакуумной камеры. С входной стороны мгновенно создаётся и затем поддерживается постоянное давление p молекулярного водорода. Для улучшения проникновения перед входом может стоять диссоциатор, тогда на пластину попадают атомы водорода. На выходной стороне в условиях вакуума посредством масс-спектрометра измеряется давление p_ℓ десорбировашегося молекулярного водорода. По нему затем вычисляется плотность выходного десорбционного потока $J(t)$ атомов водорода:

$$p_\ell(t) = \theta_1 \int\limits_0^t \exp\left\{(\tau - t)\,\theta_0^{-1}\right\} J(\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Мы не останавливаемся на решении задачи (1), т.к. некорректные задачи такого вида достаточно хорошо изучены [2] Поэтому сразу считаем, что нам известен (с точностью до экспериментальной погрешности δ) поток $J(t)$, $t \in [0; t_*]$, t_* – длительность эксперимента.

Математическая модель. Процесс диффузии внутри пластины описываем классическим уравнением диффузии для малых концентраций, наличие "ловушек" не учитывается:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (t,x) \in (0,t_*) \times (0,\ell), \quad c(0,x) = 0, \quad x \in [0,\ell], \tag{2}$$

$c = c(t,x)$ –концентрация растворённого водорода, D – коэффициент диффузии. Особенность описанного эксперимента состоит в том, что у нас отсутствует информация о процессах на входной стороне пластины, известно только подаваемое давление. Поэтому при формулировке краевых условий на входе уравнения формально учитывают несколько известных процессов. Какие из них доминируют в конкретной ситуации можно судить только по результатам измерений на выходе. Как наиболее общие, будем рассматривать нелинейные динамические краевые условия, учитывающие ограниченную емкость поверхности пластины [3, 4]:

$$\dot q_0(t) = P - bq_0^2(t) + D\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad \dot q_\ell(t) = -bq_\ell^2(t) - D\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=\ell}, \quad t \in [0,t_*]. \tag{3}$$

Здесь $q_0(t) \equiv q(t,0)$, $q_\ell(t) \equiv q(t,\ell)$ – поверхностные концентрации , P – падающий на входную поверхность поток атомов водорода b – коэффициент десорбции. Объёмные концентрации в приповерхностном объёме связаны с поверхностными концентрациями коэффициентом быстрой растворимости g:

$$c_0(t) \equiv c(t,0) = gq_0(t), \quad c_\ell(t) \equiv c(t,\ell) = gq_\ell(t). \tag{4}$$

Выражение для падающего потока в общем случае имеет вид:

$$P = P(t) = \mu p s_0\left(1 - q_0(t)/q_{\max}\right)^2 \equiv P_0\left(1 - q_0(t)/q_{\max}\right)^2. \tag{5}$$

Здесь s_0 – начальный коэффициент прилипания (показывает, какая часть ударяющихся о поверхность атомов задерживается на пластине, когда поверхность не заполнена), μ – кинетический коэффициент (устанавливает связь между потоком атомов и давлением при данной температуре), $q_{\max}$ – максимальная поверхностная плотность атомов водорода Модель, заданную уравнениями (2)-(5) будем называть модель I.

В конкретной ситуации не все действующие на границе факторы могут быть одинаково существенны. Поэтому наряду с моделью I рассмотрим ещё три модели.

При относительно небольшом заполнении поверхности падающий поток можно считать постоянным:

$$P = \mu p s_0 \equiv P_0. \tag{6}$$

Модель, в которой вместо выражения (5) используется (6), будем называть модель II. Свойства этой модели изучены в [5], там же предложен алгоритм идентификации параметров, опирающийся на эксперимент с двумя давлениями.

Если десорбция не оказывает заметного влияния на процесс переноса (например, при высоких температурах, поскольку химические процессы активируются с ростом температуры быстрее, чем диффузия), то краевые условия (3)-(5) можно заменить стационарными линейными:

$$c(t,0) = \tilde c_0 = const > 0, \quad c(t,\ell) = 0, \tag{7}$$

$\tilde c_0$ – равновесная с давлением (при данной температуре) концентрация в приповерхностном объёме. Полученную модель называем моделью III.

И, наконец, если можно пренебречь процессом заполнения поверхности, то

$$P = bq_0^2(t) - D\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad bq_\ell^2(t) = -D\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=\ell}. \tag{8}$$

Алгоритм идентификации параметров для этой модели (модель с объёмной десорбцией, или модель IV), также опирающийся на эксперимент с двумя давлениями, предложен в [6].

Для моделей I, II и IV известной величиной является $J(t) = bq_\ell^2(t)$, для модели III – $J(t) = -Dc_x(t,\ell)$.

Очевидно, что при определенных значениях параметров (когда влияние каких-либо факторов на процесс переноса несущественно), решения уравнений с разными краевыми условиями будут отличаться слабо, и могут быть неразличимы в пределах экспериментальной погрешности Этот явление подтверждается численным анализом [5, 7], и мы называем его перекрытием моделей (или вырождением сложной модели в более простую).

Особенности коэффициентной обратной задачи водородопроницаемости. При решении задачи с неточными начальными данными (что всегда имеет место в обратных задачах), необходимо сначала ответить на следующие два вопроса: является ли решение задачи с точными данными единственным и устойчиво ли решение с неточными данными по отношению к их вариациям. Конечно, ответ на второй вопрос может зависеть от нормы, в которой измеряется погрешность начальных данных. Имея ввиду указанный эксперимент, будем использовать норму $C([0,t_*])$, а именно, считаем, что

$$||J_\delta(t) - J(t)||_C \le \delta \cdot ||J(t)||_C \,,$$

δ – погрешность эксперимента, нижним индексом δ обозначаем соответствующие приближённые величины. Утвердительные ответы на оба поставленных вопроса определяют классическую корректную задачу.

Рассмотрим сначала простейшую линейную модель III, для которой имеется известное аналитическое решение

$$J(t) = \frac{\tilde{c}_0 D}{\ell}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{D\pi^2k^2}{\ell^2}t}\right).$$

Обратная задача по определению коэффициента диффузии нелинейна, но при $t \to \infty$ получаем $D = \bar{J}\ell\tilde{c}_0^{-1}$, $\bar{J}$ – стационарное значение выходного потока. Поскольку концентрация в приповерхностном слое $\tilde{c}_0$ неизвестна (для её определения через p требуется ещё одна константа), знания только стационарного значения недостаточно для вычисления D. В данном случае проблема легко решается путём введения так называемого времени запаздывания t_0:

$$t_0 = t_* - \bar{J}^{-1}\int_0^{t_*} J(t)dt. \tag{9}$$

Значения $\tilde{c}_0$ сокращаются и в пределе

$$t_0 = \ell^2(6D)^{-1}.$$

Единственный недостаток в том, что в связи с неточностью $J(t)$ ошибка при вычислении интеграла накапливается, и, например при погрешности эксперимента $\delta = 20\%$ имеем:

$$\left|t^0 - t^0_\delta\right| \le \delta(1-\delta)^{-1}t_* = 0,25t_*.$$

Этот факт необходимо иметь ввиду при определении длительности эксперимента. Тем не менее, данная задача корректна.

Конечно, в процедуре идентификации параметров можно использовать другие интегральные величины, аналогичные (9), например, интеграл от корня, и т.д. Но уравнения, в которые их можно ввести (например, с помощью техники сопряжённых уравнений [7]), малопригодны с точки зрения вычислений и далее не рассматриваются.

Таким образом, можно сформулировать следующие особенности коэффициентной обратной задачи водородопроницаемости:

1. Решение прямой задачи (входные данные для обратной задачи) известно только в одной, и при том граничной точке, при $x = \ell$.

2. Только две величины, $\bar{J}$ и t_0 используются в процедуре идентификации.

3. Входные данные неточные.

Последний факт характерен для обратных задач [2].

Перейдём к более сложным моделям. В модели II численно обнаружена немонотонная зависимость времени запаздывания от параметра g. С ростом g значения t_0 сначала падают, а затем увеличиваются. При этом модель II вырождается в модель IV [7].То есть в модели II можно получить одно и то же время запаздывания для двух разных пар (b, g) стационарные потоки при этом также совпадают. Таким образом, отображение пары $(\bar{J}, t_0)$ на множество параметров не единственно.

Рассмотрим процедуру восстановления параметров при неточных данных. В качестве примера мы численно решили задачу ((2)-(4), (6)) со следующими исходными данными: D=10^{-10}m^{2}s^{-1}, $b = 10^{-22}$at^{-1}m^{2}s^{-1}, g=100m^{-1}, P_0=1,46*10^{19} at*m^{-2}s^{-1}, l=10^4m. Затем из полученной кривой проницаемости определили входные данные для обратной задачи: $\bar{J} = 3,625 * 10^{16} at * m^{-2}s^{-1}$, $t_0 = 543s$. Если затем восстановить коэффициент диффузии согласно модели III (процессы на входе неизвестны), то получим $D = \ell^2/6t_0 = 3,07 \cdot 10^{-12}$, $\tilde{c}_0 = \bar{J}\ell/D = 1,8 \cdot 10^{21}$, т.е. ошибка в коэффициенте диффузии – два порядка. При этом кривая проницаемости, построенная для модели III отличается от исходной на величину $\delta < 1\%$ – гораздо меньшую, чем погрешность эксперимента. Таким образом, источником ошибки в оценке параметров является ошибка в идентификации модели.

Поэтому для идентификации параметров ранее был предложен эксперимент с двумя давлениями [5, 6]. Однако численно установлено, что модель I имеет особенности, делающие этот вариант эксперимента в данном случае непригодным. Когда свойства модели I существенны (при заполнении поверхности более, чем на 30%), выходной поток практически нечувствителен к изменению входного давления. Более того, коэффициент десорбции b также практически не влияет на величину установившегося потока. Так, изменение b на два порядка привело в наших вычислениях к изменению $\bar{J}$ на несколько процентов. Отметим также, что модель I, в отличие от моделей II и IV, не вырождается в линейную при повышении входного давления.

Заключение. Источником некорректности в обратной задаче водородопроницаемости является ошибка в модели. Поэтому процедура идентификации параметров должна выполняться одновременно с идентификацией модели. Необходимо выяснить заранее, посредством численных экспериментов, особенности поведения моделей при изменении параметров диффузии-десорбции и изменении параметров эксперимента. Изменение входного давления слабо влияет на выходной поток в модели I, поэтому в данном случае необходимо варьировать толщину мембраны.

Библиографический список

1. *Кунин, Л.Л.* Проблемы дегазации металлов [Текст] / Л.Л. Кунин, А.И. Головин, Ю.И. Суровой, В.М. Хохрин. – М.: Наука, 1972. – 324 с.
2. *Тихонов, А.Н.* Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
3. *Габис, И.Е.* Поверхностные процессы и проникновение водорода сквозь металлы [Текст] / И.Е. Габис, Т.Н. Компаниец, А.А. Курдюмов // В сб.: Взаимодействие водорода с металлами. – М.: Наука, 1987. – С. 177-206.
4. *Бекман, И.Н.* Исследование водородопроницаемости в технологии производства изделий электронной техники [Текст] / И.Н. Бекман, И.Е. Габис, Т.Н. Компаниец, А.А. Курдюмов, В.Н. Лясников // Обзоры по электронной технике. – 1984. – Сер. 7. – Вып. 1.
5. *Zaika Yu.V., Bormatova E.P.* // International Journal of Hydrogen Energy. Elsevier. V. 36. 2011. Pp. 1295-1305
6. *Zaika Yu.V., Bormatova E.P.* Algorithms of parameters estimation of hydrogen permeability model // *NATO Science for Peace and Security Series (C), Carbon Nanomaterials in Clean Energy Hydrogen Systems.* Springer, pp. 403-414, 2008.
7. *Заика, Ю.В., Борматова, Е.П.* // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80. – Вып. 3. – С. 31-39.

Признаки абсолютной сходимости интегралов Радемахера и интегралов Фурье-Радемахера

С.В. Зотиков

§1. Определение и некоторые свойства систем типа Радемахера

Пусть $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность натуральных чисел, где $p_n \geq 2$, $n \geq 0$. Наряду с ней рассмотрим последовательность $(m_n)_{n=0}^{\infty}$, определенную следующим образом: $m_0 = 1$; $m_{n+1} = p_n m_n$, $n = 0, 1, ...$ Для заданной последовательности $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ система функций типа Радемахера $\boldsymbol{R(p_n)=(\ R_n(t))_{n=0}^{\infty}}$ определяется на отрезке [0, 1] следующим соотношением

$$\boldsymbol{R_n(t)} = \left[\frac{(p_n-1)^{0,5}, t\in \bigcup\limits_{r=0}^{m_n-1}\left(\frac{r}{m_n};\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\right);}{-(p_n-1)^{-0,5}, t\in \bigcup\limits_{r=0}^{m_n-1}\left(\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}};\frac{r+1}{m_n}\right).} \right. , \quad n=0,1,2,\dots$$

Во внутренних точках разрыва функция $\boldsymbol{R_n(t)}$ полагается равной полусумме её односторонних пределов, а на концах отрезка [0;1] – её предельным значениям изнутри отрезка.

Класс всех систем $\boldsymbol{R(p_n)}$ обозначается через $\boldsymbol{R}$. Это множество содержит в себе классическую систему Радемахера $\boldsymbol{(r_n(t))}$, которая представляет систему $\boldsymbol{R(2)}$. Системы типа Радемахера впервые были определены автором в заметке [1] и изучались в статье [2]. Оказалось, что каждая система класса $\boldsymbol{R}$ является системой независимых функций, ортонормированной и неполной системой. Всякая система типа Радемахера является системой сходимости.

§2. Континуальные аналоги систем типа Радемахера. Преобразование Фурье-Радемахера. Интегралы Радемахера и Фурье-Радемахера

Пусть $\Phi = (\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ и $\Psi = (\psi_k)_{k=0}^{\infty}$ – две ортонормированные на [0;1[системы (о.н.с.), все функции которых с периодом 1 продолжены на правую полуось $\mathbb{R}_0$. Скрещенным произведением о.н.с. $\Phi = (\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ на о.н.с. $\Psi = (\psi_k)_{k=0}^{\infty}$ называется функция $K_{\Phi\Psi}$, определяемая на $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$ соотношением: $K_{\Phi\Psi}(x,\ y) = \varphi_{[y]}(x) \cdot \psi_{[x]}(y)$, где $[a]$ – целая часть числа $a \in \mathbb{R}_0$ (см. [3]). Эта функция является континуальным аналогом каждой из о.н.с. Φ и Ψ.

Взяв в качестве одной из компонент скрещенного произведения $K_{\Phi\Psi}$ о.н.с. типа Радемахера $\boldsymbol{R(p_n)} = \boldsymbol{(R_n(t))_{n=0}^{\infty}}$, мы получаем континуальные аналоги систем типа Радемахера видов $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ и $\boldsymbol{K}_{\Phi R}$, где в качестве Φ и Ψ могут выступать любые о.н.с. Далее будут рассматриваться лишь функции вида $\boldsymbol{K}_{R\Psi}\boldsymbol{(x,y)}=\boldsymbol{R}_{[y]}\boldsymbol{(x)}\psi_{[x]}\boldsymbol{(y)}$, где x – переменная, y – параметр.

Нетрудно показать, что скрещенное произведение $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$, образованное произвольной системой типа Радемахера $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R(p_n)}$ и ограниченной о.н.с. Ψ, для всякой функции $f \in L(0;\infty)$ порождает интегральное преобразование $\hat{f}(\mathrm{y})=\int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{R\Psi}(x,y)}dx$, $y \in \mathbb{R}_0$, которое является аналогом классического преобразования Фурье и которое мы называем преобразованием Фурье функции f по отношению к скрещенному произведению $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$, или преобразованием Фурье-Радемахера функции f в пространстве $L(0;\infty)$. Интеграл $\int\limits_0^\infty F(y)K_{R\Psi}(x,y)dy$ будем называть интегралом Радемахера функции F по отношению к $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$, а интеграл $\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)K_{R\Psi}(x,y)dy$ – интегралом Фурье-Радемахера функции $f \in L(0;\infty)$.

Ниже рассматривается ряд утверждений об абсолютной сходимости почти всюду и абсолютной и равномерной сходимости всюду интегралов Радемахера и интегралов Фурье-Радемахера функций из пространства $L(0;\infty)$.

§3. Об абсолютной сходимости почти всюду интегралов Радемахера

Пусть $\boldsymbol{R(p_n)}$ – произвольная система типа Радемахера, Ψ – произвольная ограниченная о.н.с. $C_\psi = \sup|\psi_m(t)| < +\infty)$, а $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ – их скрещенное произведение. Выясним, какие требования надо предъявить к функции F и к числовой последовательности (p_n), определяющей систему типа Радемахера, чтобы абсолютно сходился почти всюду интеграл Радемахера функции F $\int\limits_0^\infty F(y)K_{R\Psi}(x,y)dy$. Для этого рассмотрим соответствующий проинтегрированный интеграл по промежутку $[k;k+1[$, где k – произвольное число из множества $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$:

$$\int\limits_{[k;k+1[} dx \int\limits_0^\infty |F(y)K_{R\Psi}(x,y)|dy = \int\limits_{[k;k+1[} dx \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{[n;n+1[} |F(y)||R_{[y]}(x)||\psi_{[x]}(y)|dy \leq C_\psi \int\limits_{[k;k+1[} dx \sum_{n=0}^{\infty} |R_n(x)| \int\limits_{[n;n+1[} |F(y)|dy.$$

Далее, используя почленное интегрирование положительных рядов, определение системы типа Радемахера, определение $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ и теорему Фубини, убеждаемся, что справедлива

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{R(p_n)}$ – система типа Радемахера, Ψ – произвольная ограниченная о.н.с., а $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ – их скрещенное произведение. Если числовая последовательность (p_n), определяющая систему $\boldsymbol{R(p_n)}$, и функция F таковы, что сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p_n}} \int\limits_{[n;n+1[} |F|$, то почти всюду на $\mathbb{R}_0$ абсолютно сходится интеграл Радемахера функции F, т.е. интеграл $\int\limits_0^\infty F(y)K_{R\Psi}(x,y)dy$.*

Следствие. *Если функция $F\in L(0;\infty)$, то для любой системы типа Радемахера $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R(p_n)}$ и произвольной ограниченной о.н.с. Ψ интеграл Радемахера функции F по отношению к $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ абсолютно сходится почти всюду на $\mathbb{R}_0$.*

Оказывается, что установленное выше достаточное условие абсолютной сходимости почти всюду интеграла Радемахера функции F в некоторых случаях является и необходимым условием такой сходимости, ибо справедлива

Теорема 2. *Если абсолютно сходится почти всюду интеграл Радемахера функции F по отношению к $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$, где $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R(p_n)}$, а о.н.с. Ψ такова, что для $\forall n \forall$п.в.$x : |\psi_n(x)| = 1$, то сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p_n}} \int\limits_{[n;n+1[} |F|$.*

§4. Условия абсолютной сходимости почти всюду интегралов Фурье-Радемахера

Для получения условий абсолютной сходимости интегралов Фурье-Радемахера дадим сначала оценку преобразований Фурье-Радемахера интегрируемых функций. Имеет место

Теорема 3. *Пусть $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R(p_n)}$ – система типа Радемахера, Ψ – произвольная ограниченная о.н.с., а $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ – их скрещенное произведение. Тогда для преобразования Фурье-Радемахера функции $f \in L(0;\infty)$ по отношению к $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ справедлива следующая оценка: $|\hat{f}(y)| \leq C_\Psi\sqrt{p_{[y]}}\omega_1\left(\frac{1}{m_{[y]}};f\right)$, $y \in \mathrm{R}_0$, где $C_\Psi = \sup\limits_{m,t}|\Psi_m(t)| < \infty$, а $\omega_1(\delta,f)$ – интегральный модуль непрерывности функции f в пространстве $L(0;\infty)$.*

Доказательство. Пусть функция f, система $\boldsymbol{R(p_n)}$ и о.н.с. Ψ удовлетворяют условию теоремы. Используя определение преобразования Фурье-Радемахера функции f, свойство σ-аддитивности интеграла Лебега и способ рассуждений при получении оценки коэффициентов Фурье интегрируемой функции по системе типа

Радемахера из статьи [2], имеем:

$$|\hat{f}(y)| = |\int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{R\Psi}(x,y)}dx| = |\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{[n;n+1[} f(x)R_{[y]}(x)\overline{\Psi_{[x]}(y)}dx| \le \sum_{n=j}^{\infty}|\overline{\Psi_n(y)}||\int\limits_{[n;n+1[} f(x)R_{[y]}(x)dx| \le$$

$$C_\Psi\frac{1}{\sqrt{p_{[y]}-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{p_{[y]}-1}\int\limits_{n}^{n+1-\frac{p_{[y]}-1}{m_{[y]+1}}}|f(x)-f(x+\frac{i}{m_{[y]+1}})|dx \le C_\Psi\frac{1}{\sqrt{p_{[y]}-1}}\sum_{i=1}^{p_{[y]}-1}\int\limits_0^\infty|f(x)-f(x+\frac{i}{m_{[y]+1}})|dx \le$$

$$C_\Psi\sqrt{p_{[y[}-1}\sup_{0\le h\le\frac{p_{[y]}-1}{m_{[y]+1}}}\int\limits_0^\infty|f(x)-f(x+h)|dx \le C_\Psi\sqrt{p_{[y]}}\omega_1\left(\frac{1}{m_{[y]}};f\right).$$

Теперь в ***теореме 1*** положим $F=\hat{f}$, где $\hat{f}$ – преобразование Фурье-Радемахера функции $f\in L(0;\infty)$ и используем полученную в ***теореме 3*** оценку для $\hat{f}$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p_n}}\int\limits_{[n;n+1[}|\hat{f}(y)|dy \le C_\Psi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p_n}}\int\limits_{[n;n+1}\sqrt{p_{[y]}}\omega_1\left(\frac{1}{m_{[y]}};f\right)dy = C_\Psi\sum_{n=0}^{\infty}\omega_1\left(\frac{1}{m_n};f\right).$$

Итак, справедлива

Теорема 4. *Если функция* $f\in L(0;\infty)$ *такова, что для её интегрального модуля непрерывности сходится ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\omega_1\left(\frac{1}{m_n};f\right)$, *то для любой системы типа Радемахера* $\boldsymbol{R(p_n)}$ *и любой ограниченной о.н.с.* Ψ *интеграл Фурье функции* f *по отношению к скрещенному произведению* $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$, *т.е. интеграл Фурье-Радемахера* $\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)K_{R\Psi}(x,y)dy$ *абсолютно сходится почти всюду на* $\mathbb{R}_0$.

Из этой теоремы, применяя известную оценку Голубова для интегрального модуля непрерывности функции ограниченной вариации (см. [4]), выводим

Следствие. *Для любой функции* $f\in LV(0;\infty)$ *её интеграл Фурье-Радемахера по отношению к* $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$, *где* $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R(p_n)}$ *– произвольная система типа Радемахера, а* Ψ *– произвольная ограниченная о.н.с., т.е. интеграл* $\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)K_{R\Psi}(x,y)dy$ *сходится абсолютно почти всюду на* $\mathbb{R}_0$.

§5. Об абсолютной и равномерной сходимости интегралов Радемахера

Теорема 5. *Пусть* $\boldsymbol{R(p_n)}$ *– система типа Радемахера,* Ψ *– произвольная ограниченная о.н.с., а* $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ *– их скрещенное произведение. Если числовая последовательность* (p_n), *определяющая систему* $\boldsymbol{R(p_n)}$, *и функция* F *таковы, что сходится ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{p_n}\int\limits_{[n;n+1[}|F|$, *то всюду на* $\mathbb{R}_0$ *абсолютно и равномерно сходится интеграл Радемахера функции* F $\int\limits_0^\infty F(y)K_{R\Psi}(x,y)dy$.

Действительно, для $\forall x\in \mathrm{R}_0$ имеем: $\int\limits_0^\infty|F(y)K_{R\Psi}(x,y)|dy = \sum\limits_{n=0}^{\infty}|R_n(x)|\int\limits_{[n;n+1[}|F(y)||\psi_{[x]}(y)|dy < C_\psi\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{p_n}\int\limits_{[n;n+1[|}|F|$. Поскольку последний ряд по условию сходится, то заключение ***теоремы 5*** вытекает из известной теоремы Вейерштрасса.

Следствие. *Если числовая последовательность* (p_n), *определяющая систему* $\boldsymbol{R(p_n)}$, *ограничена,* Ψ *– произвольная ограниченная о.н.с., а* $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ *– их скрещенное произведение, то для любой функции* $F\in L(0;\infty)$ *её интеграл Радемахера по отношению к* $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ *всюду на* $\mathbb{R}_0$ *сходится абсолютно и равномерно.*

§6. Условия абсолютной и равномерной сходимости всюду интегралов Фурье-Радемахера

Из конъюнкции ***теоремы 3*** и ***теоремы 5*** вытекает

Теорема 6. *Пусть* $\boldsymbol{R(p_n)}$ *– система типа Радемахера,* Ψ *– произвольная ограниченная о.н.с., а* $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ *– их скрещенное произведение. Если числовая последовательность* (p_n), *определяющая систему* $\boldsymbol{R(p_n)}$, *и функция* f *таковы, что сходится ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_n\omega_1\left(\frac{1}{m_n};f\right)$, *где* $\omega_1(\delta,f)$ *– интегральный модуль непрерывности функции* f *в пространстве* $L(0;\infty)$, *то всюду на* $\mathbb{R}_0$ *абсолютно и равномерно сходится интеграл Фурье-Радемахера функции* f $\int\limits_0^\infty\hat{f}(y)K_{R\Psi}(x,y)dy$.

Следствие 1. *Если функция $f \in LV(0;\infty)$, а числовая последовательность (p_n), определяющая систему $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}_n)$, такова, что сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p_n}{m_n}$, то для любой ограниченной о.н.с. Ψ интеграл Фурье функции f по отношению к $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$, т.е. интеграл $\int\limits_0^{\infty}\hat{f}(y)K_{R\Psi}(x,y)dy$ всюду сходится абсолютно и равномерно.*

Следствие 2. *Если функция $f \in LV(0;\infty)$, а числовая последовательность (p_n), определяющая систему $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}_n)$, ограничена, то для любой ограниченной о.н.с. Ψ интеграл Фурье функции f по отношению к $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$, т.е. интеграл $\int\limits_0^{\infty}\hat{f}(y)K_{R\Psi}(x,y)dy$ всюду сходится абсолютно и равномерно.*

В заключение заметим, что часть изложенных выше результатов анонсирована в кратком сообщении [5].

Библиографический список

1. *Зотиков, С.В.* Об одном обобщении системы Радемахера [Текст] / С.В. Зотиков // Применение функционального анализа в теории приближений. – Калининский государственный университет. – Калинин, 1974. – Вып. 2. – С. 156.
2. *Зотиков, С.В.* О классе систем типа Радемахера [Текст] / С.В. Зотиков // Известия ВУЗов. – Математика. – 1976. – № 7. – С. 30-43.
3. *Виленкин, Н.Я.* О скрещенных произведениях ортонормированных систем функций [Текст] / Н.Я. Виленкин, С.В. Зотиков // Матем. заметки. – 1973. – Т. 13. – № 3. – С. 469-480.
4. *Голубов, Б.И.* Интеграл Фурье и непрерывность функций [Текст] / Б.И. Голубов // Известия ВУЗов. – Математика. – 1968. – № 11. – С. 83-92.
5. *Зотиков, С.В.* Об абсолютной сходимости интегралов Радемахера и интегралов Фурье-Радемахера [Текст] / С.В. Зотиков // Материалы 12-ой Международной междисциплинарной научно-практической школы-конференции “Современные проблемы науки и образования”. – Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина. – Харьков, 2012. – С. 114-116.

Графы и магические квадраты из домино

В.Е. Фирстов

1. Классический набор домино как комбинаторный объект

1.1 Интерпретации классического набора домино.

Классический набор домино содержит 28 фишек в виде прямоугольных пластинок, каждая из которых с одной стороны разбита на два квадрата. На каждом таком квадрате с помощью точек (или без них) отмечены цифры от 0 до 6, например, так, как показано на рис. 1.

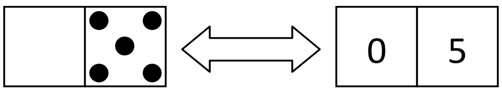


Рис. 1

Такой набор фишек можно рассматривать как неупорядоченные пары (димеры), выбранные из множества D = {0;1;2;3;4;5;6} и, следовательно, классический набор домино представляется в виде:

$$D^{(2)} = \{\{i;j\} \mid i,j \in D\}, \tag{1}$$

где неупорядоченная пара {i;j} при i=j представляет “дубль”. Если D определить как множество вершин, а $D^{(2)}$ – как множество ребер, то, тем самым, задается некоторый граф $G_D = (D;D^{(2)})$, представленный на рис. 2 в виде правильного семиугольника со всевозможными диагоналями. Этот граф имеет 7 вершин: 0;1;…; 6 и 28 ребер, из которых 7 петель (при каждой вершине); остальные ребра неориентированные.

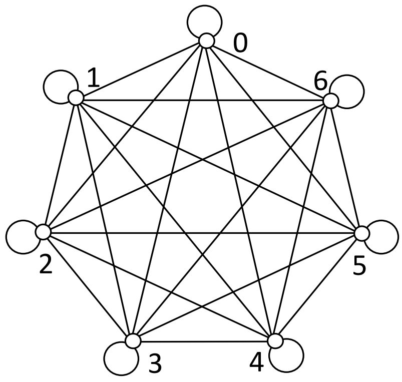


Рис. 2

Таблица 1

Матрица смежности графа G_D

D	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1

Граф G_D является полным, так как любые две его вершины соединены ребром и, таким образом, матрица смежности данного графа имеет вид, представленный в таблице 1. Граф G_D, очевидно, является гамильтоновым, Более тонкие наблюдения показывают (рис. 2), что граф G_D обладает еще одним замечательным свойством – в каждой его вершине сходится по 6 неориентированных ребер, т.е. граф G_D – эйлеров и, следовательно, его можно нарисовать, одним росчерком карандаша. Кстати, с наличием циклов на графе G_D связано положение "рыба" в хорошо известной популярной игре в домино.

Помимо графа классический набор домино можно отобразить на декартовой плоскости. Для этого пусть $\{i;j\} \in D^{(2)}$. Рассмотрим отображение

$$f : \{i; j\} \to (d; r), \tag{2}$$

где d=i+j, r=max(i;j). Легко видеть, что отображение (2) является биекцией, по которой всякому элементу $D^{(2)}$ взаимно однозначно соответствует упорядоченная пара (d;r). С парой (d;r) также взаимно однозначно связывается некоторая точка декартовой плоскости и, таким образом, устанавливается соответствие f: $D^{(2)} \to R^2$, с помощью которого классический набор домино изображается некоторым множеством точек на декартовой плоскости (рис. 3).

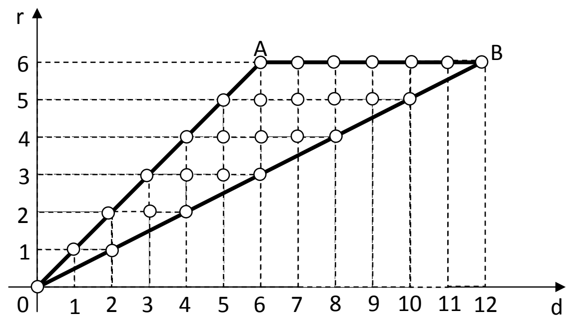


Рис. 3

Как видно из рис. 3, данное множество – это все целые точки, ограниченные ΔOAB: точкам на стороне OA соответствуют "пустышки", т.е. фишки $\{0;j\}$, $j = \overline{0;6}$, точкам на стороне AB – "шестерки", т.е. фишки $\{6;j\}$, $j = \overline{0;6}$, а точкам на стороне OB соответствуют "дубли" $\{i;i\}$, $i = \overline{0;6}$.

1.2. Некоторые отношения на классическом наборе домино и их интерпретации.

На множестве $D^{(2)}$ определим отношение эквивалентности $T \subset D^{(2)} \times D^{(2)}$ по следующему правилу:

$$\forall(\{i_1; j_1\}; \{i_2; j_2\} \in D^{(2)}) : ((\{i_1; j_1\}; \{i_2; j_2\}) \in T \Leftrightarrow i_1 + j_1 = i_2 + j_2). \tag{3}$$

Таким образом, порождается фактор-множество $D^{(2)}/T = \{[0];[1];\ldots;[12]\}$ классы [d] которого определяются условием $i + j = d$; $0 \le d \le 12$ и, например, $[4] = \{\{0;4\};\{1;3\};\{2;2\}\}$. Отношение < естественным образом линейно упорядочивает $D^{(2)}/T$ в цепь вида: $[0] < [1] < \ldots < [12]$. Если из каждого класса цепи брать по одному элементу, то, тем самым, из $D^{(2)}$ выделяются линейно упорядоченные семейства подмножеств, которые при объединении образуют сеть, представленную на рис. 4.

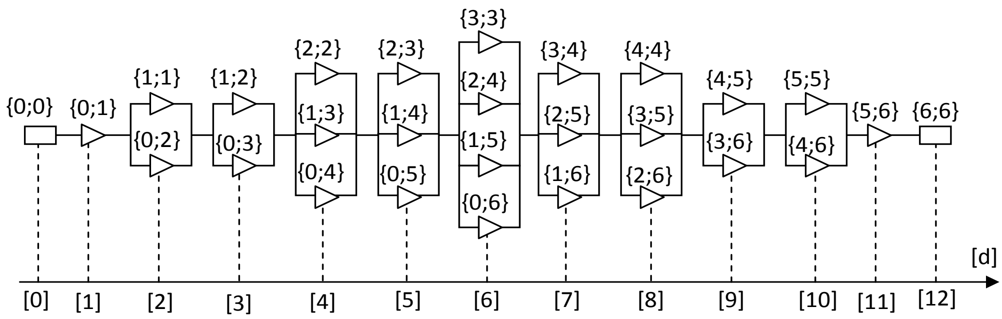


Рис. 4

В этой сети, класс [0] определяет вход, а класс [12] – ее выход; в ней *1·1·2·2·3·3·4·3·3·2·2·1·1 = 5184* различных маршрута, в каждом из которых фишки располагаются по возрастанию очков от 0 до 12. В целом, в рамках этой сети определяются правила некоторой игры в домино.

Если на $D^{(2)}$ определить эквивалентность $V \subset D^{(2)} \times D^{(2)}$ по правилу:

$$\forall(\{i_1;j_1\};\{i_2;j_2\} \in D^{(2)}) : ((\{i_1;j_1\};\{i_2;j_2\}) \in V \Leftrightarrow max(i_1;j_1) = max(i_2;j_2)), \tag{4}$$

то отношение V реализует факторизацию множества $D^{(2)}$ на классы, которые определяются условием max(i;j) = r = const. Поскольку $0 \le r \le 6$ (рис. 3), то классов эквивалентности будет 7 и соответствующее фактор-множество имеет вид $D^{(2)}/V = \{\bar{0};\bar{1};\ldots;\bar{6}\}$. Например, $\bar{4} = \{\{0;4\};\{1;4\};\{2;4\};\{3;4\};\{4;4\}\}$.

Фактор-множество $D^{(2)}/V$ отношением $<$ естественным образом упорядочивается в цепь вида: $\bar{0} < \bar{1} < \ldots < \bar{5} < \bar{6}$. Если из каждого класса этой цепи брать по одному элементу, то, тем самым, из $D^{(2)}$ будут выделены линейно упорядоченные семейства подмножеств, которые при объединении образуют сеть, показанную на рис. 5. Класс $\bar{0}$ определяет вход этой сети, а класс представители класса 6– - ее выходы. Фактически, треугольная сеть на рис. 5 определяет $1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7 = 7! = 5040$ различных маршрута, в каждом из которых фишки располагаются по возрастанию max(i;j) от 0 до 6. Таким образом, данное отношение эквивалентности также приводит к сети, на основе которой определяются правила некоторой игры в домино.

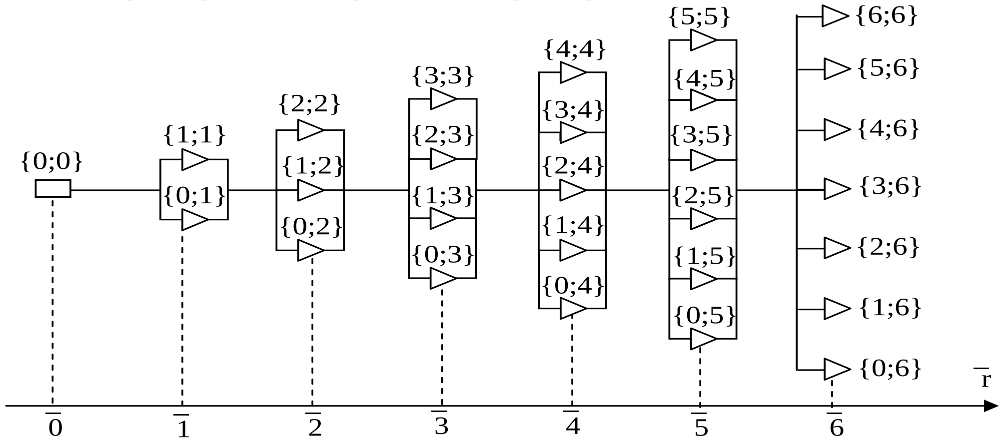


Рис. 5

Вообще говоря, слово "домино" происходит от латинского слова "dominus" – господин, что отражает тот факт, что всевозможные игры в домино обычно в качестве правил предусматривают некоторое отношение доминирования, по которому расставляются фишки в процессе игры.

Однако в рамках классического набора домино строится конечная арифметика, а, тем самым, и конечная геометрия. Именно, справедливо

Предложение 1. *Алгебра* $(D^{(2)}/T;\ +\ ;\ \cdot) \cong GF(13)$; *алгебра* $(D^{(2)}/V\ ;\ +;\ \cdot) \cong GF(7)$.

Доказательство данного утверждения очевидно.

Данные алгебраические структуры из домино имеют ряд интересных приложений, имея в виду [3], однако, в целом, прикладные аспекты домино только начинают изучаться [4].

2. Теория магических квадратов из домино (МКД)

2.1 Магическая сумма и укладки. Из фишек классического набора домино $D^{(2)}$ можно выкладывать квадраты и размеры $n \times n$ таких квадратов будем определять количеством "полуфишек", укладывающихся на стороне квадрата. Тогда количество фишек, необходимое для выкладывания квадрата n × n, очевидно, будет равно $n^2/2$. Отсюда видно, что число n должно быть четным, т.е. на стороне квадрата должно выкладываться целое число фишек, а сам квадрат выкладывается только из четного количества фишек, так, чтобы при этом выполнялось неравенство $n^2/2 \leq 28$, откуда $n \in \{2;4;6\}$.

Магический квадрат назовем **магическим квадратом из домино (МКД),** если выполняются следующие требования:

1) условия магичности:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{kl} = \sum_{l=1}^{n} x_{kl} = \sum_{k=1}^{n} x_{kk} = \sum_{k=1}^{n} x_{k,n+1-k} = S_n, \tag{5}$$

где $x_{kl} \in D = \{0;\ 1;\ ...;6\}$;

2) существует укладка фишек домино, для которой реализуются условия (5).

Если в данном определении выполняется только первое требование, то такой квадрат будем называть **псевдомагическим квадратом из домино**. Элементарный анализ показывает, что МКД размера 2×2 не существуют, т.к. в этом случае в наборе домино должны существовать две одинаковые фишки. При остальных значениях n для магической суммы S_n справедливо

Предложение 2. *Справедливы неравенства:*

$$5 \leq S_4 \leq 19; 13 \leq S_6 \leq 23. \tag{6}$$

Для доказательства оценим магическую сумму S_4 для магического квадрата из домино размера 4 × 4. Поскольку для построения квадратов 4 × 4 используется 8 из 28 фишек классического набора домино, то сумма S_4 будет ограничена сверху и снизу. Минимальное количество очков на 8 фишках равно: 1·0 + 1·1 + 2·2 + 2·3 + 2·4 = 19; аналогично максимальное количество очков на 8 фишках равно: 1·12 + 1·11 + 2·10 + 2·9 + 2·8 = 77. Поделив найденные количества очков на 4, и, взяв ближайшее большее целое число, получим первое неравенство в (6); второе получается аналогично.

Отметим разницу с классическими магическими квадратами, у которых значение $S_n = n(n^2+1)/2$ является фиксированным у всех квадратов n×n [5], в отличие от МКД, где эта величина переменная, и связано это с различием множеств, на которых строятся эти квадраты.

При рассмотрении укладок МКД традиционно этот аспект рассматривается с точностью до группы автоморфизмов квадрата. В соответствии с этим, все укладки квадратов 4 × 4 разбиваются на 9 классов эквивалентности, представители которых (по одному из каждого класса) представлены на рис. 6. Следуя теореме перечисления Пойа [6], общее количество укладок квадратов 4 × 4 составит 36 и в случае укладок из димеров (фишек домино) это обстоятельство играет определенную роль.

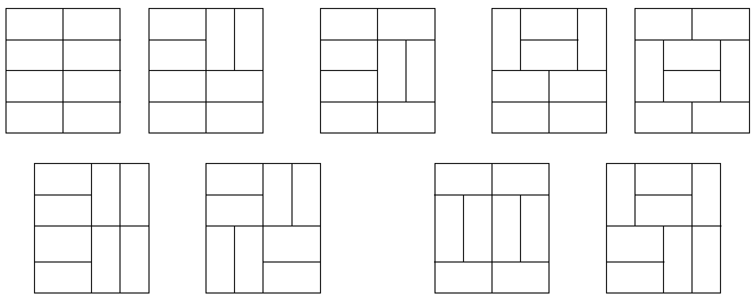


Рис. 6

Перечисление укладок квадратов 6 × 6 является довольно сложной комбинаторной задачей и решается с помощью специального алгоритма, который позволил перечислить все 930 укладок квадратов 6 × 6.

Следует также иметь в виду, что в случае МКД появляется эффект изомерии, когда один и тот же набор фишек складывается в магический квадрат разной структуры. Например, квадрат, изображенный на рисунке 7а, реализуется в виде трех изомеров (рис. 7 б,в,г).

а)

0	4	1	0
1	1	2	1
1	0	2	2
3	0	0	2

б)

0	4	1	0
1	1	2	1
1	0	2	2
3	0	0	2

в)

0	4	1	0
1	1	2	1
1	0	2	2
3	0	0	2

г)

0	4	1	0
1	1	2	1
1	0	2	2
3	0	0	2

Рис. 7

2.2. Основное свойство МКД.

Основное свойство магических квадратов из домино определяет следующее

Предложение 3. *Если числа $x_{kl} \in D$, $k;l = \overline{1;n}$ определяют МКД с магической суммой S_n, то числа $y_{kl} = 6 - x_{kl}$ определяют МКД с магической суммой $6n - S_n$, где $n \in \{4;6\}$ – размер магического квадрата из домино.*

Доказательство. Числа $x_{kl} = 6 - y_{kl}$ должны удовлетворять условию магичности (5). Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n}(6-y_{kl}) = \sum_{l=1}^{n}(6-y_{kl}) = \sum_{k=1}^{n}(6-y_{kk}) = \sum_{k=1}^{n}(6-y_{k,n+1-k}) = S_n,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} y_{kl} = \sum_{l=1}^{n} y_{kl} = \sum_{k=1}^{n} y_{kk} = \sum_{k=1}^{n} y_{k,n+1-k} = 6n - S_n,$$

т.е. числа y_{kl} удовлетворяют условию магичности, а поскольку соответствие между y_{kl} и x_{kl} взаимно однозначное, то числа y_{kl} также определяют некоторый МКД с магической суммой $6n - S_n$, той же укладки, что и заданный магический квадрат из домино. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если определены все МКД заданного размера с магической суммой S, то, тем самым определены все магические квадраты из домино того же размера, но с магической суммой $6n - S_n$, где n – размер МКД.*

Доказанные свойства фактически наполовину уменьшают объем вычислительной работы при перечислении МКД. Действительно, для определения всех МКД размера 4×4 достаточно определить все МКД с магической суммой $5 \le S_4 \le 12$, а для определения всех МКД размера 6×6 достаточно определить все такие МКД с суммой $13 \le S_6 \le 18$.

Указанные свойства иллюстрируются примерами на рис. 8, где показано, как из МКД с суммой $S_4 = 5$ получается магический квадрат из домино с $S_4 = 19$ (рис. 8а), а из МКД с суммой $S_6 = 13$ получается магический квадрат из домино с $S_6 = 23$ (рис. 8б).

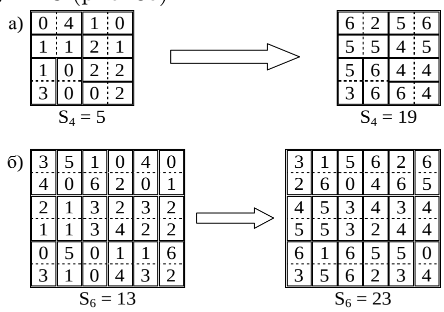


Рис. 8

2.3. Многомерные интерпретации и основная теорема о МКД.

Числа в каждой строке, столбце и диагонали магического квадрата из домино определяются решениями уравнения

$$U_1 + U_2 + ... + U_n = m, \tag{7}$$

где $U_i = \overline{0;6}$, $i = \overline{1;n}$, а значения m берутся из неравенств (6) в зависимости от $n \in \{4;6\}$. Согласно [7], количество решений $|N(m)|$ (7) определяется выражением:

$$|N(m)| = C_{m+n-1}^{m} - C_n^1 C_{m+n-8}^{m-7} + C_n^2 C_{m+n-15}^{m-14} - C_n^3 C_{m+n-22}^{m-21} + \dots \tag{8}$$

Количества решений уравнения (7), подсчитанные по формуле (8), даны в таблице 2, откуда видно, что функция $|N(m)|$ имеет максимум при $m = m^* = 3n$, относительно которого значения этой функции симметричны, в согласии с предложением 3. Наличие максимума $|N(m)|$ указывает на то, что больше всего МКД реализуется для магической суммы $S_n = 3n$.

Таблица 2

Количество решений уравнения (7)

n = 4															
m=S_4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
|N(m)|	56	84	116	149	180	206	224	231	224	206	180	149	116	84	56

n = 6											
m=S_4	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
|N(m)|	5796	6891	7872	8652	9156	9331	9156	8652	7872	6891	5796

Данные результаты имеют четкую геометрическую интерпретацию. В самом деле, множество точек:

$$Q_n = \{(U_1; ...; U_n) | U_i = \overline{0;6}, i = \overline{1;n}\} \tag{9}$$

определяет целочисленную решетку точек n-мерного куба Q_n, у которого одна из вершин располагается в начале координат, а ребра направлены по координатным осям и имеют длину, равную 6. Уравнение (7) – это некоторая гиперплоскость в R^n, отсекающая на координатных осях отрезки длины $m = S_n$ от начала координат в положительном направлении. Множество точек этой гиперплоскости обозначим через P(m). Тогда $N(m) = Q_n \cap P(m)$ – это подмножество точек целочисленной решетки Q_n, координаты которых удовлетворяют уравнению (7), а их количество $|N(m)|$ определяется выражением (8). Таким образом, целые решения уравнения (7) трактуются как точки, находящиеся в сечении целочисленной решетки гиперкуба (9) гиперплоскостью (7). При m = 3n в этом сечении содержится наибольшее количество точек.

Для фиксированного n, придавая значения магической сумме $m = S_n$ согласно (6), получим семейство гиперплоскостей $\{P(m) \mid m_{min} \leq m \leq m_{max}\}$, связанных параллельными переносами (сдвигами) вида:

$$P(m) \to P(m+1), \quad m_{min} \leq m < m+1 \leq m_{max}; \tag{10}$$

$$P(m) \to P(m-1), \quad m_{min} \leq m-1 < m \leq m_{max} \tag{11}$$

где m_{min}; m_{max} – соответствующие минимальное и максимальное значения m в (6). Всякий МКД в R^n определяет некоторую фигуру MQ(m) из n точек, которые располагаются в сечении $MQ(m) \supset N(m)$. Свойства этой фигуры определяются ее точками, координаты которых, должны удовлетворять условиям магичности (5).

Предложение 4. *При $m \neq m_{max}$ существуют сдвиги $MQ(m) \to MQ(m+1)$, а при $m \neq m_{min}$ существуют сдвиги $MQ(m) \to MQ(m\text{-}1)$.*

Доказательство. Достаточно построить хотя бы один пример. Такой пример для n=4 построен на рис. 9.

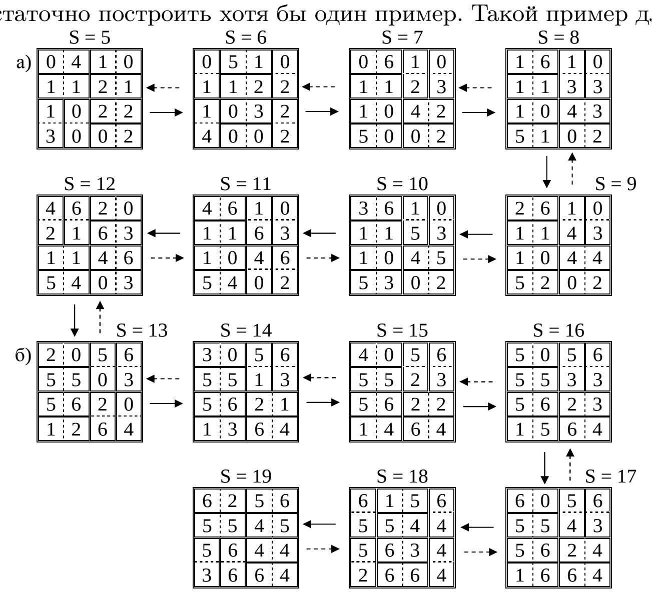


Рис. 9

Аналогичный пример для n=6 представлен на рис. 10.

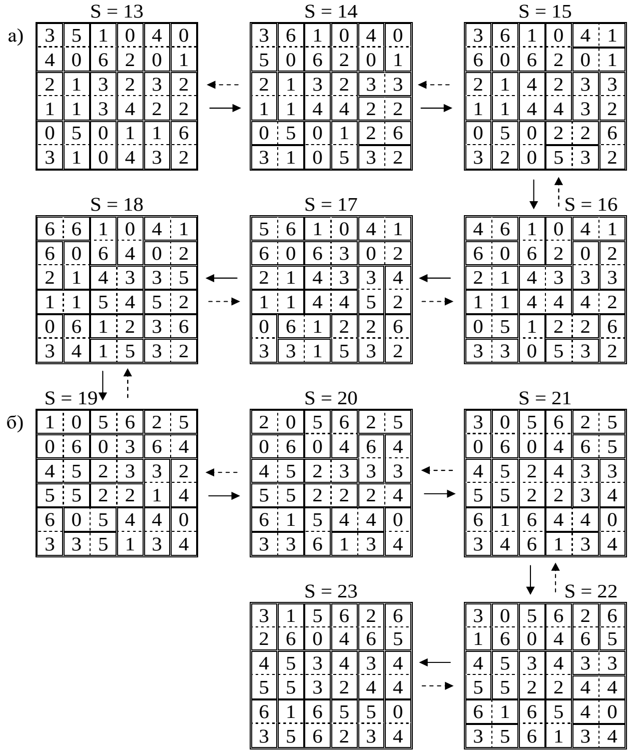


Рис. 10

Замечание. В общем случае процедура параллельного переноса не сохраняет укладку МКД (рис. 9,10).

Пусть [MQ(m)] класс МКД с магической суммой S_n= m. Согласно предложению 3, оператор S^{6n-m}: MQ(m) → MQ(6n – m) сохраняет укладку и определяет симметрию фигур MQ(m) ∈[MQ(m)] и MQ(6n–m)∈[MQ(6n–m)] относительно гиперплоскости P(3n) так, что при m=3n имеет место: $S^{3n}(MQ_1(3n)) = MQ_2(3n)$, где $MQ_1(3n)$; $MQ_2(3n)$ ∈[MQ(3n)]. Рассмотрим теперь действие оператора сдвига S^1: MQ(m) → MQ(m+1), где m < m_{max}. Это действие иллюстрируется на примере перехода S^1: MQ(5) → MQ(6) на рис. 9, которое условно описывается выражением:

$$\begin{array}{|cccc|} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 5 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad (12)$$

Из соотношения (12) видно, что интересующее действие S^1 реализуется посредством магической матрицы с магической суммой 1. Обратный оператор S^{-1}: MQ(m+1) → MQ(m) действует путем вычитания из МКД соответствующей единичной магической матрицы. Количество единичных магических матриц | S^1| = 8 при n = 4 и | S^1| = 96 при n = 6 [8].

Всякая единичная магическая матрица n×n действует на вполне определенный комплекс элементов соответствующего МКД, который будем называть n-комплексом. Всякий n-комплекс назовем сдвиговым C^--комплексом для оператора S^{-1}, если в его клетках отсутствуют нулевые; C^+-комплексом, если в его клетках отсутствуют "шестерки"и просто С-комплексом, если в его клетках отсутствуют нули и шестерки, т.е., когда соответствующие комплексы C^-=C^+.

Предложение 5. *У всякого квадрата MQ(m)* ∈ *[MQ(m)],* $m_{min} \le m < 3n$, *n* ∈ *{4;6} существуют сдвиговые комплексы* C^+.

Доказательство. Предположим противное – пусть имеются квадраты MQ(m) ∈ [MQ(m)], $m_{min} \le m < 3n$, n ∈ {4;6}, не содержащие комплексы C^+.

Тогда при n = 4 каждый 4-комплекс должен иметь, по крайней мере, одну клетку с “шестеркой”. Очевидно, для этой цели клеток с “шестеркой” потребуется, как минимум, 4 и комбинаторно эти клетки могут располагаться только на пересечениях двух любых горизонталей и двух любых вертикалей данного МКД. У такого квадрата действительно отсутствуют комплексы C^+, однако сумма по двум его горизонталям и по двум его вертикалям ≥ 12, что противоречит условию леммы, т.к. как при n = 4 рассматриваются МКД с магической суммой m < 12. Следовательно, при n = 4 лемма доказана. В случае n = 6 доказательство аналогично.

Предложения 2-5 реализуют основную теорему теории МКД для классического набора домино:

Теорема. *Для того чтобы перечислить все МКД заданного размера $n \times n$, $n \in \{4;6\}$ необходимо и достаточно построить класс МКД с магической суммой $S_n = 3n$, из которого остальные МКД получаются последовательным применением преобразования сдвига.*

Объем вычислений при определении множества всех магических квадратов из домино позволяет уменьшить:

Предложение 6. *Построим отображение класса [MQ(m)] в себя следующим образом. Пусть MQ(m)∈* [MQ(m)] – некоторый квадрат, для которого по комплексу C_1^- существует сдвиг $S^{-1}C_1^-$: MQ(m) → MQ(m – 1) ∈ [MQ(m – 1)]. Пусть для квадрата MQ(m – 1) по комплексу $C_2^+ \neq C_1^-$ существует сдвиг $S^{-1}C_2^+$: MQ(m – 1) → MQ_1(m). Тогда композиция

$$S^{-1}C_2^+ \circ S^{-1}C_1^- : MQ(m) \to MQ_1(m) \tag{13}$$

по квадрату MQ(m) строит новый квадрат MQ_1(m) из того же класса [MQ(m)] и, таким образом, семейство композиций вида (13) определяет некоторое отображение класса [MQ(m)] в себя, при котором прообразами служат только те квадраты, у которых существуют C^--комплексы.

Доказательство этой теоремы очевидно и иллюстрируется на рис. 11.

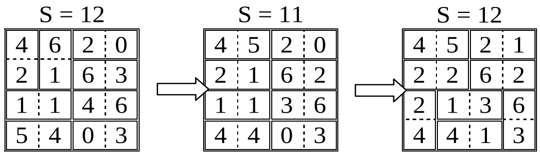


Рис. 11

Если для класса квадратов [MQ(m)] перечислены все представители, имеющие C^--комплексы, то для полного построения класса [MQ(m)] следует еще перечислить те его представители, которые не имеют C^--комплексов, количество которых устанавливает

Предложение 7. *Для каждого класса квадратов [MQ(m)], $m_{min} \leq m \leq 3n$, $n \in \{4;6\}$, количество $|?C^-|$ МКД, не имеющих C^--комплексов, удовлетворяет неравенствам:*

$$0 \leq |\neg C^-| \leq (C_4^2)^2 \cdot K(m), \quad n = 4; \tag{14}$$

$$0 \leq |\neg C^-| \leq (C_6^2 \cdot C_6^3) \cdot K(m), n = 6, \tag{15}$$

где K(m) зависит от n.

Доказательство. При m = m_{min}, в силу неравенств (6), реализуется нижний предел в неравенствах (14); (15).

При $m_{min} < m \leq 3n$, если у квадрата нет C^--комплексов, то все его n-комплексы имеют, по крайней мере, одну клетку с 0. Рассуждая здесь, как и в предложении 5, при n = 4 для этой цели потребуется, как минимум, 4 клетки с нулями и эти клетки должны располагаться только в пересечениях двух любых горизонталей и двух любых вертикалей данного квадрата. Очевидно, что различных конфигураций такого рода будет $C_4^2 \cdot C_4^2 = (C_4^2)^2$.

Пусть зафиксирована одна из таких 4-клеточных конфигураций с нулями и пусть при этом K(m) – количество решений системы (5), при которых получаются укладки МКД. Заметим, что в силу (8) и основной теоремы о перечислении МКД следует цепочка неравенств:

$$|N(m_{min})| < |N(m_{min}+1)| < ... < |N(3n-1)| < |N(3n)|, \tag{16}$$

и величина K(m) ≠ 0, при $m_{min} < m \leq 3n$. Любая другая такая 4-клеточная конфигурация из нулей, из-за симметрии в расположении нулей, также дает K(m) решений системы (5). Поэтому всего для класса [MQ(m)] получается не более $(C_4^2)^2 \cdot$K(m) 4-клеточных конфигураций с нулями, при которых соответствующие МКД не имеют C^--комплексов и, таким образом, неравенство (14) доказано. Аналогичными рассуждениями устанавливается неравенство (15). Предложение 7 полностью доказано.

Установленные факты создают необходимую базу для реализации экономного компьютерного алгоритма перечисления множества всех МКД.

3. Алгоритмы укладки и перечисления МКД

3.1. Алгоритм укладки МКД.

Для МКД 4x4 укладки определены прямым перебором и представлены на рис. 6. Далее покажем, каким образом последовательность из 0 и 1 в виде алгоритма однозначно отображает укладку квадрата из домино.

Пусть у нас имеется последовательность 01101100, где 0 означает, что фишка домино располагается горизонтально, а 1 – вертикально. Начинаем последовательно заполнять квадрат слева направо и в результате получится следующая укладка (рис. 12).

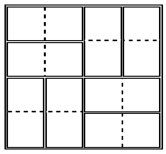


Рис. 12

Для МКД 4x4 такая последовательность содержит 8 цифр, а для МКД 6x6 последовательность составит 18 цифр, что совпадает с количеством фишек в МКД. В первом случае алгоритм перечисления дает 36 укладок, которые разбиваются на 9 классов (рис. 6). Во втором случае укладок оказывается 930 и все они представлены в Приложении к настоящей работе, однако провести их классификацию в рамках теоремы Пойа затруднительно.

3.2. Алгоритм перечисления МКД.

Алгоритм перечисления МКД на первом этапе реализует выделение псевдомагических квадратов (п. 2.1) путем прямой прогонки уравнений (5). На втором этапе происходит распознавание МКД из псевдомагических квадратов в рамках описанного алгоритма укладки. На рис. 13 показано распределение количества МКД 4x4 в зависимости от их магической суммы.

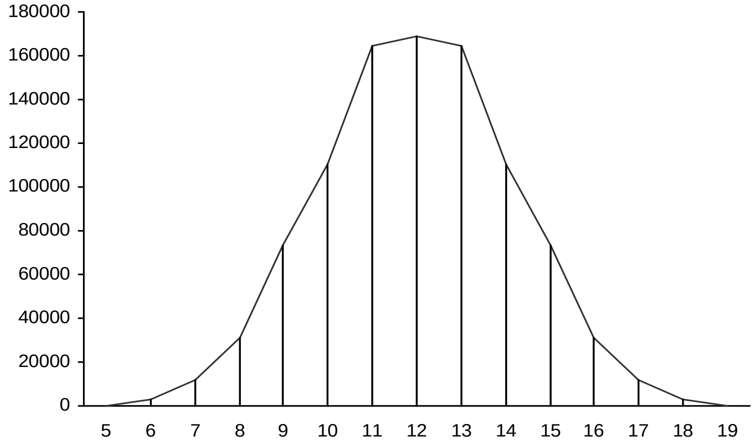


Рис. 13

Как видно из рис. 13, максимум этого распределения приходится на значение магической суммы S_4=12 и составляет $\sim$ 170000 МКД. При этом наблюдается полная симметрия относительно максимума, как это следует из предложения 3 и основной теоремы о МКД (п. 2.4). Интересно отметить, что измеренные функции распределения по каждой укладке 4x4-МКД для некоторых укладок (00000000, 00111100, 00101000) имеют два максимума (рис. 14). Проделанные компьютерные измерения позволили определить общее количество МКД 4x4, которое составило 957078. Провести подобное прямое компьютерное моделирование для 6x6-МКД в реальное время пока не удается и в настоящее время решается задача по оптимизации сложности данного алгоритма.

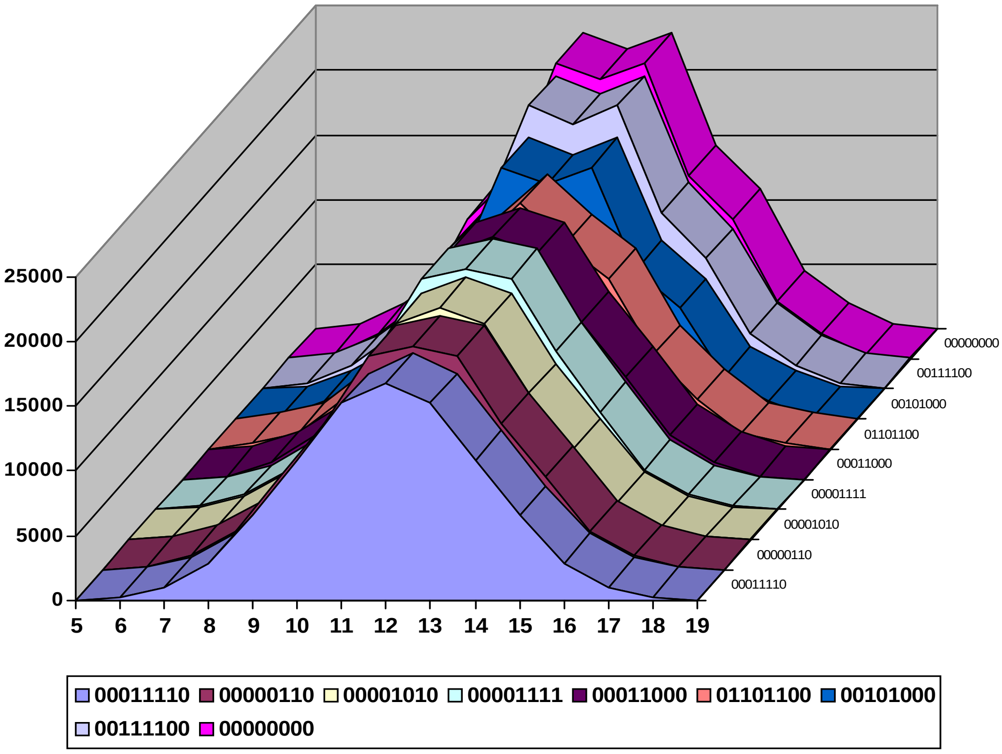


Рис. 14

Заключение

В работе, фактически, построена комбинаторная теория МКД, которая устанавливает принципы построения и перечисления таких объектов. Имеются, конечно, некоторые моменты не доведенные до конца, скажем, в части перечисления МКД 6x6, однако алгоритм сложности этой задачи не является экспоненциальным, а потому его оптимизация до приемлемых норм дело ближайшего времени. Что касается приложений данной работы, то, как уже отмечалось, речь может идти о димерах на планарных графах в рамках двумерной модели Изинга жидких пленок наноразмеров [3]. С другой стороны, по существу, перечислены все ранее неизвестные 930 укладок квадрата фишками домино, что представляется важным в теории орнаментов и групп замощения [9].

Библиографический список

1. *Болл, У.* Математические эссе и развлечения [Текст] / У. Болл, Г. Коксетер. – М.: Мир, 1986.
2. *Голомб, С.В.* Полимино [Текст] / С.В. Голомб. – М.: Мир, 1975.
3. *Chelkak D., Smirnov S.* Discrete complex analysis on isoradial graphs // Advances in Mathematics. 2011. V. 228. No. 3. P. 1590-1830.
4. *Фирстов, В.Е.* Алгебраические интерпретации домино и их приложения [Текст] / В.Е. Фирстов // Труды 4-й международной научно-технической конференции “Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов.” – Ульяновск: УлГУ, 2001. – С. 149-151.
5. *Постников, М.М.* Магические квадраты [Текст] / М.М. Постников. – М.: Наука, 1964.
6. *Риордан, Дж.* Введение в комбинаторный анализ [Текст] / Дж. Риордан. – М.: ИЛ, 1963.
7. *Виленкин, Н.Я.* Комбинаторика [Текст] / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1969.
8. *Фирстов, В.Е.* Алгебраические структуры на множестве магических матриц [Текст] / В.Е. Фирстов // Математика. Механика. Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. – Вып. 4. – С. 147-149.
9. *Кокстер, Г.С.* Введение в геометрию [Текст] / Г.С. Кокстер. – М., Наука, 1966.

Об элементарных преобразованиях проективных расслоений над кривыми

Н.П. Гушель

Для одномерных проективных расслоений над кривыми (линейчатых поверхностей) известно, что любая (неразложимая) линейчататая поверхность может быть получена из тривиальной с помощью не более n=2g+1 элементарных преобразований (см. [1]). В данной работе получена оценка этого числа для r-мерных проективных расслоений над кривыми при $r \geq 1$.

§1. Регулярные векторные расслоения

Далее будем употреблять следующие обозначения. V – неособое проективное многообразие размерности ≥1. Y – неприводимая подсхема $\mathrm{P}^N\times$V, удовлетворяющая условию E_{N-1} : регулярная подсхема чистой размерности dim V+N–2 и $\pi^{-1}(t)\subset\pi^{-1}(t)$ – $(N-1)$-мерное линейное подпространство, t∈T=π(Y), T – неособый дивизор на V с приведенной структурой, π: $\mathrm{P}^N\times\mathrm{V}\to\mathrm{V}$ – проекция, $\mathrm{H}_0=\mathrm{P}^{N-1}\times\mathrm{V}$ – подмногообразие $\mathrm{P}^N\times$V, $\mathrm{P}^{N-1}\subset\mathrm{P}^N$ – гиперплоскость, $\mathrm{H}_Y=\mathrm{H}_0+\mathrm{P}^N\times\mathrm{T}$ – дивизор на $\mathrm{P}^N\times$V, J_Y идеал, определяющий Y в $\mathrm{P}^N\times$V.

(1.1) **Определение**. Локально свободный O_V-модуль, который изоморфен $M(\mathrm{Y})=\pi(\mathrm{J}_Y\otimes O_{P^N\times V}(H_Y)$ называется регулярным векторным расслоением, определенным Y [2, с. 109].

Регулярное векторное расслоение включается в следующую коммутативную диаграмму когерентных пучков

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & L^*(H) & \to & W^*\otimes O_T(H) & \to & J^*(H) & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & || & & \\
0 & \to & M & \to & W^*\otimes O_V(H) & \to & J^*(H) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & W^*\otimes O_V & = & W^*\otimes O_V & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array} \tag{1.2}$$

При dim V ≥ 2 множество неизоморфных регулярных векторных расслоений, определенных дивизорами T⊂V и D⊂T обозначается через R^{N+1}(V,T,D).

На грассманиане G(r,n) r-мерных подпространств n-мерного проективного пространства P^n имеет место каноническая точная последовательность

$$0\to E(r,n)\to W\otimes O_G\to Q(r,n)\to 0. \tag{1.3}$$

(1.4) **Лемма.** *Пусть V⊂ G(r,n) – подмногообразие π:X→V – соответствующее P^r-расслоение. Если $H_0,\dots,H_r$ – общие гиперплоскости в P^n и если* $\dim V\le 3$, *то для любой точки x∈V,* dim $\bigcap\limits_{i=0}^{r}H_i\bigcap p\circ\pi^{-1}(v)\le 0$, *где p – проекция G×$P^n$ на P^n.*

(1.5) **Следствия.** *(i) Если V⊂G(r,n) – неособое и 1≤* $\dim V$ *≤3, то $E^*(r,n)|_V$ и $Q(r,n)|_V$ – регулярные векторные расслоения. В частности, при 2≤* $\dim V$ *≤3 имеем $E^*(r,n)|_V\in R^{r+1}(V,T,D)$, где $T=V\sigma_1(A)$, $D=T\sigma_2(B)$ для циклов Шуберта $\sigma_2(B)\subset\sigma_1(A)$,* dim$A=r$, dim$B$*=r + 1 и по двойственности в P^n получим $Q(r,n)|_V\in R^{n-r}(V,T,D')$, где $T=V\sigma_1(A)$, $D'=T\sigma_2(B')$ для циклов Шуберта $\sigma_2(B')\subset\sigma_1(A)$,* dim $A=r$, dim B'*=r+1.*

(ii) Если векторное расслоение E на неособом V при 1≤dim V ≤3 порождается глобальными сечениями и многообразие f_E(V)⊂G(r,n) неособо, то E – регулярное векторное расслоение.

(iii) При 1≤dim V ≤3 всякое проективное расслоение является проективизацией регулярного векторного расслоения (с точностью до умножения на одномерное).

§2. Элементарные преобразования векторных расслоений над кривыми

(2.1) Если E – векторное расслоение ранга r над неособой кривой C, y∈ C и Y_y – n-мерное векторное подпространство в слое Y_y над точкой y, то однозначно определен эпиморфизм α и имеет место точная последовательность пучков:

$$0\to E'\to E\xrightarrow{\alpha}O_y^{r-n}\to 0. \tag{2.2}$$

где ker α=elm_V(E) = E′ – локально свободный пучок ранга r и

$$\det(E')=\det(E)-n\cdot y.$$

Последовательность (2.2) продолжается до коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & \mathrm{O}_y^{r-n} & \to & \mathrm{E}_y & \xrightarrow{\alpha_y} & \mathrm{O}_y^n & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & || & & \\
0 & \to & \mathrm{E}' & \to & \mathrm{E} & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{O}_y^n & \to & 0 \\
 & & \alpha'\uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & \mathrm{E}(-y) & = & \mathrm{E}(-y) & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array} \tag{2.3}$$

При этом ker α′ = E(–y) = $\mathrm{elm}_{V'}$(E′), где E(–y) = E⊗O_C(–y), Y′ = P(O_y).

В частности, если E =⊕ O_C – тривиальное расслоение и n = r–1, то E′(y) является *регулярным* [2, с. 109].

§3. Об оценке числа элементарных преобразований проективных расслоений над кривыми

Учитывая (1.5) (iii), можно получить оценку для минимального числа элементарных преобразований проективных расслоений, используя оценки минимальных степеней при вложениях кривых в грассманианы.

Пусть C – гладкая проективная кривая рода g и E – векторное расслоение над C ранга r = rk(E) и степени d = deg E = c_1(E).

(3.1) Векторное расслоение E на неособой кривой C рода g называется нормализованным, если $h^0(E)\neq 0$ и $h^0(E \otimes L)=0$, $\forall L \in \mathrm{Pic}\, C$, $\deg L<0$.

(3.2) Векторное расслоение E над неособой кривой C называется стабильным (полустабильным), если для всякого его собственного подрасслоения F имеем

$$\mu(F) < \mu(E) \qquad (\mu(F) \leq \mu(E)),$$

где $\mu(E) = \frac{d}{r}$ – наклон.

(3.3) Фильтрация Хардера-Нарасимхана – это единственная фильтрация

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{s-1} \subset E_s = E$$

такая, что E_i/E_{i-1} полустабильны для всех i и

$$\mu_i(E) = \mu(E_i/E_{i-1})$$

– строго убывающая функция от i.

$$\mu^-(E) = \mu_s(E) = \mu(E_s/E_{s-1}),$$
$$\mu^+(E) = \mu_1(E) = \mu(E_1).$$

(3.4) Пусть π: P(E)→C – проективное расслоение, где E – векторное расслоение над неособой неприводимой кривой C рода g над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль. Обозначим через M= $O_{P(E)}(1)$ тавтологический пучок Гротендика (по определению $\pi_*M=E$) и $L_P = \pi^* O_C(P)$, P∈C. Теми же буквами будем обозначать классы дивизоров, соответствующих этим пучкам.

(3.5) Дивизор D на неособом алгебраическом многообразии X называется нормально порожденным, если $H^0(iD)\otimes H^0(D)\to H^0((i+1)D)$ – сюръекция для всех $i\geq 1$. Если дивизор D обилен и нормально порожден, то линейная система |D| определяет вложение X в проективное пространство, т.е. D очень обилен (см. [3]).

(3.6) В работе Бутлера [4] содержится достаточное условие нормальной порожденности дивизора D≡aM+bL на X = P(E), где E – векторное расслоение на неособой кривой C рода g. Из условия нормальной порожденности Бутлера вместе с критерием обильности Мияока (см. [5]) следуют *достаточные* условия очень обильности дивизора D (о.о.д.) на X

$$b + a\mu^-(E) > 2g. \qquad (*)$$

(3.7) **Теорема.** *Всякое проективное расслоение со слоем размерности r-1 над неособой кривой C рода g может быть получено из тривиального последовательностью из не более чем*

$$\deg E + r(2g - \mu^-(E))$$

элементарных преобразований.

Доказательство. Пусть D≡M+bL на X =P(E), где E – векторное расслоение ранга r≥2 над неособой кривой C рода g. Если D о.о.д., то линейное расслоение O_X(D)) определеяет вложение проективного расслоения X в P^n, n=$h^0(O_X(D))$–1. Кривая C по Плюккеру вкладывается в G(r–1,n) b и имеет степень

$$d = D^r = (M + bL)^r = \deg E + rb. \qquad (**)$$

Из (*) и (**) следует, что

$$d > \deg E + r(2g - \mu^-(bE)). \qquad (***)$$

(3.8) **Замечание.** Полученная оценка в случае неразложимой линейчатой поверхности далека от оптимальной n = 2g+1 (см. [1]). Однако для разложимых расслоений эта оценка лучше, чем оценка $3/2r^2g$ (см. [6]).

Библиографический список

1. *Nagata M., Maruyama M.* Note on the structure of a ruled surface // J. reine angew. Math. 239/240, 1970, 68-73.
2. *Maruyama M.* On a family of algebraic vector bundles // Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973. C.95-149.
3. *Mumford D.* Varieties defined by quadratic equations. CIME. Varenna. 1969. P. 31-100.
4. *Butler D.C.* Normal generation of vector bundles over a curve. Journal of Differential Geometry, 39(1): 1-34, 1994.
5. *Miyaoka Y.* The Chern class and Kodaira dimension of a minimal variety. In Algebraic Geometry, Sendai 1985, number 10 in Advance Studies in Pure Mathematics, pages 449-476. AMS, 1987.
6. *Ballico E.* Splitting of vector bundles on algebraic curves and elementary transformations //Communications in Algebra, 24, № 13, 1996, 4113-4122.

Влияние собственных резонансов на возможность жесткого возбуждения колебаний в одной из задач теории упругой устойчивости

А.Н. Куликов

Введение. В работе в нелинейной постановке рассматривается известная задача теории упругой устойчивости – флаттер пластины в сверхзвуковом потоке газа. Из результатов анализа этой задачи вытекает, что линеаризованная задача не позволяет во многих случаях дать ответы на основные вопросы, связанные с поведением пластины в сверхзвуковом потоке газа. В частности, оказалось, что уже при скоростях существенно меньших скорости флаттера, определяемой из линеаризованной задачи, могут возникнуть жесткие колебания, которые и влекут разрешение конструкций. Частично, на уровне физических представлений эта гипотеза была сформулирована в известной монографии В.В. Болотина [1]. В данной работе предложен конкретный с математической точки зрения механизм, частично объясняющий эту гипотезу. Он основан на том, что учет такого фактора как резонансы собственных частот 1:1, 1:2, 1:3 могут приводить к появлению неустойчивых колебаний при скоростях меньших скорости флаттера в традиционном понимании [1]. Напомним, что скоростью флаттера принято называть такую скорость, превышение которой влечет потерю устойчивости состояния равновесия.

Исследование нелинейной задачи основано на применении аппарата теории нормальных форм Пуанкаре-Дюлака, адаптированного к краевым задачам, которые моделируют явление нелинейного панельного флаттера. Уместно отметить, что предварительно, разумеется, необходим достаточно полный анализ и в линейной постановке. В данном случае он был проделан без традиционного применения метода Галеркина. Численные методы были использованы на последнем этапе этого анализа для исследования системы двух нелинейных уравнений.

Перейдем к более детальной постановке задачи, которая заимствована из ранее упомянутой монографии В.В. Болотина и предполагает, что будет рассмотрен случай цилиндрического изгиба. Аналогичная краевая задача рассматривалась и в работах Ф. Холмса и Дж. Марсдена (см. [2,3]).

Приведем соответствующую краевую задачу сразу в перенормированном виде

$$w_{tt} + gw_t + w_{xxxx} + cw_x + m_1(w_x)^2 + m_2(w_x)^3 - \beta w_{xx} \int_0^1 (w_x)^2 dx = 0, \tag{1}$$

$$w(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0, \tag{2}$$

где $w = w(t,x)$ – нормированный прогиб пластинки. Уравнение (1), которое описывает колебание пластины в сверхзвуковом потоке газа, рассматривается вместе с условиями шарнирного опирания (2). Такой вариант их выбора не является принципиальным и они могут быть заменены на другие краевые условия, например, жесткого закрепления

$$w(t,0) = w(t,1) = w_x(t,0) = w_x(t,1) = 0.$$

Явный вид положительных коэффициентов g, c, m_1, m_2, β после перенормировок можно найти в монографии [1-3]. Так например, c – приведенная скорость набегающего потока. При стандартных перенормировках $c = p_\infty k l^3 U/(c_\infty D)$, где U – скорость набегающего потока, l – длина пластины, k – показатель политропы, D – цилиндрическая жесткость, p_∞ – давление невозмущенного газа, c_∞ – скорость звука в нем. Учет аэродинамических сил произведен на основе закона плоских сечений [4] (поршневой теории).

Рассмотрим линеаризованную в нуле краевую задачу (1),(2)

$$w_{tt} + gw_t + w_{xxxx} + cw_x = 0, \tag{3}$$

$$w(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0. \tag{4}$$

Как принято, число $\lambda \in C(R)$ назовем точкой спектра устойчивости, если линейная краевая задача (3),(4) имеет нетривиальное решение $w(t,x) = \exp(\lambda t)v(x)$, где достатоно гладкую функцию $v(x)$ находим как решение спектральной краевой задачи

$$v^{IV} + cv' + (\lambda^2 + g\lambda)v = 0, \tag{5}$$

$$v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0. \tag{6}$$

В уравнениях (1), (2) g – нормированный коэффициент демпфирования. Возможны два варианта

$$1)\ g \sim 1;\ 2)\ 0 < g << 1.$$

Отметим, что при $c = 0$ точки спектра устойчивости определяются как корни характеристического уравнения

$$\lambda_n^2 + g\lambda_n + (\pi n)^4 = 0$$

и, следовательно, $Re\ \lambda_n \leq -\gamma_0 < 0$.

Обратимся к первому варианту. В этом случае было показано, что при $c \in [0, c_0)$ все точки спектра устойчивости остаются в левой полуплоскости комплексной плоскости, при $c = c_0$ на мнимой оси появляется пара простых собственных значений $\pm i\sigma_0$ $(\sigma_0 > 0)$, а при $c > c_0$ пара собственных значений переходит в правую полуплоскость. Последнее означает, что состояние равновесия теряет устойчивость.

Нелинейный анализ предполагает распространение бифуркационной теоремы Анронова-Хопфа на соответствующий класс краевых задач. На этом пути (см. работы [2,3,5,6,7]) было показано, что возможно и мягкое и жесткое возбуждение автоколебаний.

Иная задача возникает, если обобщенный коэффициент демпфирования g достаточно мал. В этом случае для первоначального анализа спектра устойчивости краевой задачи (3), (4) можно положить $g = 0$. В такой предельной ситуации при $c = 0$ все точки спектра устойчивости лежат на мнимой оси. Это остается верным и при малых c. В такой предельной ситуации было введено понятие нижней критической скорости флаттера [1]. Это такое минимальное положительное $c = c_1$, при превышении которого впервые точки спектра устойчивости покидают действительную ось. При $c = c_1$ спектру устойчивости краевой задачи принадлежит однократная пара чисто мнимых собственных значений. Эта задача была рассмотрена в работах [8,9] как в линейной, так и нелинейной постановках. Анализ задачи в нелинейной постановке показал, что в этом случае имеет место жесткий режим возбуждения колебаний при скоростях $c \approx c_1$, где $c_1 < c_0$.

Ниже будет показано, что аналогичная картина имеет место, если $c \approx c_2$, где при $c = c_2$ у спектра устойчивости впервые появляются собственные числа $\pm i\sigma, \pm 2i\sigma$. Анализ нелинейной задачи показывает, что и в этом случае может реализоваться жесткий режим автоколебаний. При этом $c_2 < c_1 < c_0$. Полезно отметить, что предположение о малости обобщенного коэффициента демпфирования достаточно естественно. Так может быть, если не только мало конструктивное демпфирование и мал коэффициент аэродинамического демпфирования, но и когда велика величина цилиндрической жесткости. Напомним, что коэффициент цилиндрической жесткости пропорционален модулю упругости E, а уже для алюминия $E \approx 7 \times 10^7 H/\text{м}^2$, а у стали $E \approx 2 \times 10^{11} H/\text{м}^2$.

Линейный анализ. Рассмотрим краевую задачу (3), (4) при $g = 0$:

$$w_{tt} + w_{xxxx} + cw_x = 0, \tag{7}$$

$$w(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0. \tag{8}$$

Пусть $A(c)w = w_{xxxx} + cw_x$. Точки спектра устойчивости λ краевой задачи (7), (8) связаны с собственными значениями дифференциального оператора $A(c)$ посредством равенства $\lambda = \pm i\sqrt{\mu}$. Поэтому резонанс собственных частот 1:2 имеет место, если среди собственных значений оператора $A(c)$ есть собственные числа μ_1, μ_2 такие, что $\mu_1 : \mu_2 = 1 : 4$. При этом будем априори рассматривать лишь те c, для которых справедливо включение $c \in (0; c_1)$. Следовательно, в этом диапазоне величин c у оператора $A(c)$ все собственные значения действительны. Минимальное возможное для реализации такого резонанса значение c обозначим через c_2. Для нахождения c_2 следует рассмотреть краевую задачу

$$A(c) = v^{IV} + cv' = \mu v, \tag{9}$$

где $v(x)$ удовлетворяет краевым условиям шарнирного опирания (6).

Как и в работах [8,9] выпишем общее решение уравнения (9)

$$v(x) = a_1 \exp(\gamma_1 x) + a_2 \exp(\gamma_2 x) + a_3 \exp(\gamma_3 x) + a_4 \exp(\gamma_4 x), \tag{10}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ – корни характеристического уравнения

$$\gamma^4 + c\gamma - \mu = 0. \tag{11}$$

В работе [9] отмечалось, что корни уравнения (11) имеют вид

$$\gamma_{1,2} = \alpha \mp i\beta,\ \gamma_{3,4} = -\alpha \mp \Delta,$$

где $\Delta = \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2}, \alpha, \beta \in R, \beta > 0$. Кроме того, справедливы равенства

$$c = 4\alpha(\beta^2 - \alpha^2),\ \lambda = (\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 - 3\alpha^2). \tag{12}$$

Подставим решение (10) в краевые условия (8). Для определения $a_j (j = 1, 2, 3, 4)$ получим систему линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^{4} a_j = 0,\ \sum_{j=1}^{4} a_j q_j = 0,\ \sum_{j=1}^{4} a_j \gamma_j^2 = 0,\ \sum_{j=1}^{4} a_j \gamma_j^2 q_j = 0\ (q_j = \exp(\gamma_j)).$$

Условие существования у данной системы линейных алгебраических уравнений нетривиальных решений приводит к характеристическому уравнению

$$P(\alpha, \beta) = 0, \tag{13}$$

где $P(\alpha,\beta) = (3\alpha^2+\beta^2\Delta^2)\sin\beta\,\mathrm{sh}\,\Delta + 2\alpha^2\beta\Delta\,\mathrm{ch}(2\alpha - \cos\beta\,\mathrm{ch}\,\Delta)$. Используя формулы Кардано, предположение о том, что $\mu \in R$ и $\beta > 0$, можно из уравнений (12) выразить α и β

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha(\mu,c) = \sqrt{\Theta(\mu,c)^{1/3} - (\mu/12)\Theta(\mu,c)^{-1/3}}, \\ \beta = \beta(\mu,c) = \sqrt{\alpha(\mu,c) + \sqrt{4\alpha(\mu,c)+\mu}}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\Theta(\mu,c) = c^2/128 + \sqrt{(\mu/12)^3 + (c^2/128)^2}$. После подстановки α,β, выраженных через μ и c с помощью равенств (14) при $\mu = \sigma^2$ и $\mu = 4\sigma^2$ соответственно, в характеристическое уравнение (13) получаем систему уравнений для определения c и σ

$$\begin{aligned} P_1(\sigma^2,c) = P(\alpha(\sigma^2,c),c) = 0, \\ P_2(4\sigma^2,c) = P(\alpha(4\sigma^2,c),c) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Анализ системы (15) показывает, что она имеет счетный набор решений (σ_n, c_{2n}), где $n \in N, c_{2n} > 0$. Требуемое значение $c_2 = \min\limits_{n\in N}(c_{2n}) > 0$. Одновременно, определяется соответствующая пара σ, c_2, а также соответствующие собственные функции линейного оператора $A(c_2)$. Этот оператор имеет счетное семейство простых собственных значений $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \ldots$, которым соответствуют собственные функции $e_1(x), e_2(x), e_3(x), e_4(x), \ldots$. В нашем случае $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 2\sigma$. Обращаясь к формуле (10), можно выписать собственные функции, соответствующие $\sigma^2, 4\sigma^2$:

$$e_1(x) = \sum_{j=1}^{4} a_{j1}\exp(\gamma_{j1}x),\ \ e_2(x) = \sum_{j=1}^{4} a_{j2}\exp(\gamma_{j2}x).$$

В нашем случае оказалось, что

$$\begin{gathered} \gamma_{11} = 2.47 - 5.37i,\ \gamma_{21} = \overline{\gamma}_{11}, \gamma_{31} = -6.55,\ \gamma_{41} = 1.61, \\ \gamma_{12} = 1.45 - 6.39i,\ \gamma_{22} = \overline{\gamma}_{12}, \gamma_{32} = -7.50,\ \gamma_{42} = 4.59, \\ a_{11} = 0.29 + 0.04i,\ a_{21} = \overline{a}_{11},\ a_{31} = -0.42,\ a_{41} = 1, \\ a_{12} = -7.63 - 38.02,\ a_{22} = \overline{a}_{12},\ a_{32} = 14.25,\ a_{42} = 1. \end{gathered}$$

Отметим, что аналогичные вопросы были рассмотрены в работе [10] с использованием метода Галеркина.

Сопряженный оператор $A^*(c_2)$ в данном случае определяется равенством

$$A^*(c_2)v = v^{IV} - c_2 v',$$

где его область определения состоит из тех гладких функций, для которых выполнены условия шарнирного опирания: $v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0$. Этот линейный дифференциальный оператор имеет те же собственные значения $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \ldots$. Элементарная проверка показывает, что соответствующие собственные функции $h_j(x) = q_j e_j(1-x),\ q_j \in R$. Из результатов, изложенных в монографии [1] вытекает, что система $\{e_j(x)\}$ формирует базис Рисса, а $\{h_j(x)\}$ ей биортогональна, т.е. $\int\limits_0^1 h_j(x)e_k(x)dx = \delta_{kj}$, где δ_{kj} – символ Кронекера $(\delta_{kj} = 0, k \neq j,\ \delta_{jj} = 1)$. При этом оказалось, что для собственных значений σ_k выполнены следующие условия

$$\sigma_k \neq \pm\sigma \pm \sigma_m,\ \ \sigma_k \neq \pm 2\sigma \pm \sigma_m,\ \ \frac{\sigma_k}{\sigma_m} \neq 2, \frac{\sigma_k}{\sigma_m} \neq \frac{1}{2},$$

которые можно рассматривать как условия "частичной нерезонансности". Отметим также, что в нашем случае $\dfrac{\sigma_k}{\sigma} \neq 3,\ \dfrac{\sigma_k}{\sigma} \neq \dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sigma_k}{2\sigma} \neq 3, \dfrac{\sigma_k}{2\sigma} \neq \dfrac{1}{3}$. Здесь $k, m = 3, 4, 5, \ldots$.

Бифуркации периодических решений. Рассмотрим нелинейную краевую задачу (1), (2) в которой положим

$$c = c_2 + a_0\varepsilon,\ \ g = 2g_0\varepsilon,\ \ a_0, g_0 \in R,\ \ g_0 > 0,$$

где ε – малый неотрицательный параметр.

Если краевую задачу (1), (2) дополнить начальными условиями

$$w(0,x) = f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^4[0,1],\ \ w_t(0,x) = g(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2[0,1], \tag{16}$$

где $\overset{\circ}{W}{}_2^4[0,1]$ подпространство классического пространства Соболева $W_2^4[0,1]$ [12], содержащее те $f(x)$, для которых выполнены условия $f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0$. Аналогично $g(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2[0,1]$ и дополнительно $g(0) = g(1) = 0$. Отметим, что смешанная задачу (1), (2), (16) локально корректно разрешима [13] и поэтому в качестве фазового пространства данной смешанной задачи можно выбрать прямое произведение подпространств $\overset{\circ}{W}{}_2^4[0,1] \times \overset{\circ}{W}{}_2^2[0,1]$.

На первом этапе построим приближенные периодические решения краевой задачи (1), (2), если, конечно, $c = c_2 + a_0\varepsilon, g = 2g_0\varepsilon$, которые удовлетворяет (1), (2) с точностью до $o(\varepsilon^3)$. Соответствующие решения будем искать в следующем виде

$$w(t,x,\varepsilon) = \varepsilon w_1(t,x) + \varepsilon^2 w_2(t,x) + \varepsilon^3 w_3(t,x), \tag{17}$$

где

$$w_1 = w_1(t,x) = (y_1(t) + \overline{y}_1(t))e_1(x) + (y_2(t) + \overline{y}_2(t))e_2(x),\ y_j(t) = z_j(t)\exp(i\sigma_j x),\ j = 1,2,$$
$$\sigma_1 = \sigma,\ \sigma_2 = 2\sigma,\ w_k = w_k(t,x) = w_k(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, x),\ k = 2,3.$$

Функции w_2, w_3 по переменной t имеют период $\dfrac{2\pi}{\sigma}$, а как функции x принадлежат фазовому пространству. При этом считаем, что комплекснозначные функции $z_1(s), z_2(s)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot z_1 = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\psi_1,\ \dot z_2 = \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^2\psi_2, \tag{18}$$

где $\varphi_j = \varphi_j(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2), \psi_j = \psi_j(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2), j = 1,2$. Они будут определены ниже. Систему уравнений (18) принято называть квазинормальной формой.

Подстановка суммы (17) с учетом уравнений (18). Позволяет выписать неоднородные краевые задачи для w_2, w_3. Так приравнивая коэффициенты при ε^2, получим краевую задачу для w_2

$$w_{2tt} + A(c_2)w_2 = \Phi_2(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, x), \tag{19}$$

$$w_2(t,0) = w_2(t,1) = w_{2xx}(t,0) = w_{2xx}(t,1) = 0. \tag{20}$$

Выделяя члены при ε^3, получим краевую задачу для w_3 :

$$w_{3tt} + A(c_2)w_3 = \Phi_3(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, x), \tag{21}$$

$$w_3(t,0) = w_3(t,1) = w_{3xx}(t,0) = w_{3xx}(t,1) = 0. \tag{22}$$

Здесь

$$\Phi_2 = \Phi_2(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, x) = -m_1(w_{1x})^2 - a_0 w_{1x} + \Phi_{20},$$
$$\Phi_{20} = -2i\sigma\varphi_1 E_1 - 4i\sigma\varphi_2 E_2 - g_0 i\sigma E_1 - 4g_0 iE_2 + \text{к.с.},$$
$$\Phi_3 = \Phi_3(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, x) = -a_0 w_{2x} - 2m_1(w_{1x}w_{2x}) - m_2(w_{1x})^2 + \beta w_{1xx}\int_0^1 (w_{1x})^2 dx + \Phi_{30},$$
$$\Phi_{30} = -\chi_1 E_1 - \chi_2 E_2 - 2i\sigma\psi_1 E_1 - 4i\sigma\psi_2 E_2 - 2g_0\varphi_1 E_1 - 2g_0\varphi_2 E_2 + \text{к.с.}$$

В последних двух равенствах знак к.с. обозначает сумму комплексно-сопряженных слагаемых по отношению к выписанным. Наконец,

$$E_1 = \exp(i\sigma t)e_1(x),\ E_2 = \exp(2i\sigma t)e_2(x),$$
$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = i\sigma E_1,\ \frac{\partial E_2}{\partial t} = 2i\sigma E_2,\ \chi_1 = \frac{\partial\varphi_j}{\partial z_1}\varphi_1 + \frac{\partial\varphi_j}{\partial\overline{z}_1}\overline{\varphi}_1 + \frac{\partial\varphi_j}{\partial z_2}\varphi_2 + \frac{\partial\varphi_j}{\partial\overline{z}_2}\overline{\varphi}_2,\ j = 1,2.$$

Из условий разрешимости данных краевых задач (19), (20) и (21),(22) находим явный вид функций $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$.

Хорошо известно, что условиями их разрешимости служат равенства [11]

$$\int_0^{2\pi/\sigma}\int_0^1 \Phi_p H_1 dxdt = \int_0^{2\pi/\sigma}\int_0^1 \Phi_p H_2 dxdt = 0,$$

которые следует дополнить им сопряженными . Здесь $p = 2,3$, а

$$H_1 = \exp(-i\sigma t)h_1(x),\ H_2 = \exp(-2i\sigma t)h_2(x).$$

Нетрудные, но громоздкие вычисления позволили найти, что

$$\dot z_1 = -(g_0 + i\beta_1)z_1 + ib_1\overline{z}_1 z_2,\ \dot z_2 = -(g_0 + i\beta_2)z_2 + ib_2 z_1^2,$$

где

$$\beta_1 = -0.070a_0,\ \beta_2 = 0.013a_0,\ b_1 = 93.739m_1, b_2 = -0.001m_1.$$

Аналогичные вычисления позволяют, конечно, найти ψ_1, ψ_2, но выписывать их не будем так как явный их вид далее не потребуется. Рассмотрим главную часть нормальной формы для новых переменных, если $z_1 = iz_3, z_2 = iz_4$

$$\begin{aligned}\dot z_3 &= \varepsilon[-(g_0 + i\beta_1)z_3 + b_3\overline{z}_3 z_4],\\ \dot z_4 &= \varepsilon[-(g_0 + i\beta_2)z_4 + b_4 z_3^2],\end{aligned} \tag{23}$$

где $b_3 = 93.739m_1 > 0,\ b_4 = 0.001m_2 > 0$.

Перейдем к обобщенным полярным координатам

$$z_3 = d_1\rho_1 \exp(i\Delta_1),\ z_4 = d_2\rho_2 \exp(i\Delta_2),$$
$$\rho_j = \rho_j(t),\ \Delta_j = \Delta_j(t),\ d_1^2 = \frac{1}{b_3b_4},\ d_2 = \frac{1}{b_3}.$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений для ρ_1, ρ_2, $\Delta = -2\Delta_1 + \Delta_2$:

$$\begin{gathered}\dot\rho_1 = \varepsilon(-g_0\rho_1 + \rho_1\rho_2\cos\Delta),\\ \dot\rho_2 = \varepsilon(-g_0\rho_2 + \rho_1^2\cos\Delta),\\ \dot\Delta = \varepsilon[\beta - \frac{\rho_1^2}{\rho_2}\sin\Delta - 2\rho_1\sin\Delta],\ \beta_0 = 2\beta_1 - \beta_2,\end{gathered} \tag{24}$$

которую следует дополнить уравнением для Δ_1 :

$$\dot\Delta_1 = -\beta_1 + \rho_2\sin\Delta.$$

Каждому положению равновесия системы (24) соответствует автомодельный цикл l_a системы дифференциальных уравнений (23).

Пусть (ξ_1, ξ_2, Δ_0) состояния равновесия замкнутой системы (24). Тогда

$$z_1(t) = d_1\xi_1\exp(i\Delta_3 t + \Delta_{30}),\ z_2(t) = d_2\xi_2\exp(2i\Delta_3 t + \Delta_{40}),$$

где $\Delta_3 = \beta_0\dfrac{\xi_1^2}{\xi_2}\sin\Delta_0 - 2\xi_2\sin\Delta_0,\ \Delta_{40} = \Delta_0 + 2\Delta_{30},\ \Delta_{30}, \Delta_{40} \in R$. Устойчивость этого цикла определяется устойчивостью соответствующего состояния равновесия. Стандартно проверяется справедливость утверждения.

Лемма. *Система дифференциальных уравнений (24) имеет неустойчивое состояние равновесия*

$$\rho_1 = \xi_1, \rho_2 = \xi_2, \xi_1 = \xi_2 = \xi, \xi = \frac{g_0}{\cos\Delta_0},$$

где Δ_0 *корень тригонометрического уравнения*

$$\operatorname{tg}\Delta_0 = \frac{\beta_0}{3g_0},$$

для которого справедливо утверждение $\cos\Delta_0 > 0$.

При линеаризации системы (24) на найденном состоянии равновесия одно собственное число полученной матрицы обязательно равно $g_0 > 0$, а два остальных – $-2g_0, -3g_0$. Последнее означает, что состояние равновесия седловое.

Теорема. *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *каждому циклу* l_a *системы дифференциальных уравнений (23) (нормальной формы) соответствует цикл* l *краевой задачи (1), (2). Этот цикл также седловой и для соответствующего периодического решения справедлива асимптотическая формула*

$$w(t,x) = \varepsilon[2\xi d_1\cos(\sigma t + \gamma_0)e_1(x) + 2\xi d_2\cos(2\sigma t + 2\gamma_0)e_2(x)] + o(\varepsilon),$$

где γ_0 *– произвольная действительная постоянная, а постоянные* d_1, d_2, ξ *были указаны ранее.*

Последняя формула может быть уточнена, если выписать решение $w_2(t,x)$ из суммы (17). Доказательство теоремы основано на применимости результатов работ [14-16] к исследованию вопроса о бифуркациях циклов и торов краевой задачи (1), (2).

Для этого положим

$$w(t,x) = [\varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2] + \varepsilon^2 u, \tag{25}$$

где $w_1 = w_1(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, x), w_2 = w_2(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, x)$ были указаны ранее. Наконец,

$$y_j(t) = z_j(t)\exp(i\sigma_j t),\ j = 1, 2,\ \sigma_1 = \sigma,\ \sigma_2 = 2\sigma.$$

Положим,

$$u = u(t,x) = \sum_{k=3}^{\infty}(y_k(t) + \overline{y}_k(t))e_k(x), \tag{26}$$

где $y_k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot y_k = i\sigma_k y_k + \varepsilon\varphi_k(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, y, \overline{y}) + o(\varepsilon),\ y = (y_3, y_4, \ldots),\ \overline{y} = (\overline{y}_3, \overline{y}_4, \ldots). \tag{27}$$

Подчеркнем, что для y_1, y_2 уравнения фактически были выписаны ранее

$$\dot y_1 = i\sigma y_1 + \varepsilon\varphi_1 + o(\varepsilon), \dot y_1 = 2i\sigma y_2 + \varepsilon\varphi_2 + o(\varepsilon). \tag{28}$$

Учет того обстоятельства, что первые да слагаемых суммы (25) удовлетворяют краевой задаче (1), (2) с точностью до $o(\varepsilon^2)$ для $u(t,x)$ получаем краевую задачу (после сокращений и преобразований)

$$u_{tt} + A(c_2)u + 2\varepsilon g_0 \dot{u}_t + \varepsilon a_0 u_x + 2m_1 \varepsilon u_x w_{1x} + o(\varepsilon) = 0,$$

$$u(t,0) = u(t,1) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,1) = 0.$$

После замены $u(t,x)$ на соответствующий ряд (26) с учетом системы дифференциальных уравнений (27), (28) находим, что

$$\varphi_k = -g_0 y_k - \sum_{j=3}^{\infty} \alpha_{kj} y_j - \sum_{j=3}^{\infty} \alpha_{kj} \overline{y}_j -$$
$$-m_1[y_1 \sum_{j=3}^{\infty} b_{kj} y_j + \overline{y}_1 \sum_{j=3}^{\infty} b_{kj} y_j + y_2 \sum_{j=3}^{\infty} c_{kj} y_j + \overline{y}_2 \sum_{j=3}^{\infty} c_{kj} y_j + \text{к.с.}],$$

где

$$\alpha_{kj} = \int_0^1 e_j(x) h_k(x) dx,\ b_{kj} = \int_0^1 e_1(x) e_j(x) h_k(x) dx,\ c_{kj} = \int_0^1 e_2(x) e_j(x) h_k(x) dx.$$

Замены

$$y_1 = \eta_1,\ y_2 = \eta_2,\ y_k = \eta_k + \varepsilon[\sum_{j=3}^{\infty} \beta_{kj} \eta_j + \sum_{j=3}^{\infty} \beta_{kj} \overline{\eta}_j] +$$
$$+\varepsilon[y_1 \sum_{j=3}^{\infty} \gamma_{kj} y_j + \overline{y}_1 \sum_{j=3}^{\infty} \gamma_{kj} y_j + y_2 \sum_{j=3}^{\infty} \delta_{kj} y_j + \overline{y}_2 \sum_{j=3}^{\infty} \delta_{kj} y_j + \text{к.с.}]$$

позволяют изменить φ_k. Итак

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= i\sigma\eta_1 + \varepsilon[(-g_0 - i\beta_1)\eta_1 + d_1\eta_1|\eta_1|^2] + o(\varepsilon), \\ \dot{\eta}_2 &= 2i\sigma\eta_2 + \varepsilon[(-g_0 - i\beta_2)\eta_2 + d_2\eta_2|\eta_2|^2] + o(\varepsilon), \\ \dot{\eta}_k &= i\sigma_k\eta_k + \varepsilon[(-g_0 - i\beta_k)\eta_k] + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{29}$$

Если рассмотреть систему дифференциальных уравнений (29) без членов, имеющих порядок $o(\varepsilon)$, то она имеет цикл l_a :

$$y_j(t) = z_{ja}(t)\exp(i\sigma_j t),\ j = 1,2, \sigma_1 = \sigma,\ \sigma_2 = 2\sigma,\ y_k(t) = 0,\ k = 3,4,5\ldots.$$

У полной системы (29) наличие (сохранение) этого цикла вытекает из теоремы из работ [14-16] о сохранении цикла при возмущениях.

Библиографический список

1. *Болотин, В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости [Текст] / В.В. Болотин. – М.: Физматлит, 1961. – 339 с.
2. *Holmes P.J.* Bifurcation to divergence and flutter in flow induced oscillations a finite-dimensional analysis // J. Sound Vib. 1977. V. 53. № 4. P. 471-503.
3. *Holmes P.J., Marsden J.E.* // Bifurcation to divergence and flutter in flow-induced oscillations: an infinite dimensional analysis // Automatica. 1978. V. 14. № 4. P. 367-384.
4. *Ильюшин, А.А.* Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях [Текст] / А.А. Ильюшин // Прикладная математика и механика.– 1956. – Т. 20. – № 6. – С. 733-735.
5. *Куликов, А.Н.* О новом подходе к исследованию задач нелинейного панельного флаттера [Текст] / А.Н. Куликов, Б.Д. Либерман // Вестник ЯрГУ. – 1975. – Вып. 13. – С. 118-139.
6. *Куликов, А.Н.* Математические вопросы теории нелинейного панельного флаттера [Текст] / А.Н. Куликов // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений и методике преподавания дифференциальных уравнений в педагогических институтах. – Рязань. – С. 185.
7. *Колесов, В.С.* Об одной математической задаче теории упругой устойчивости [Текст] / В.С. Колесов, Ю.С. Колесов, А.Н. Куликов, И.И. Федик // Прикладная математика и механика. – 1978. – Т. 42. – Вып. 3. – С. 459-465.
8. *Куликов, А.Н.* Жесткое возбуждение колебаний характерно для флаттера при малом коэффициенте демпфирования [Текст] / А.Н. Куликов // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2006. – № 11. – С. 131-135.
9. *Куликов, А.Н.* Бифуркация автоколебаний пластинки при малом демпфировании в сверхзвуковом потоке газа [Текст] / А.Н. Куликов // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73. – Вып. 2. – С. 271-281.
10. *Бекбулатова, А.О.* Резонанс 1:2 как источник жесткого возбуждения колебаний [Текст] / А.О. Бекбулатова, А.Н. Куликов // Современные проблемы математики и информатики: сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. – Ярославль. – 2002. – Вып. 5. – С. 22-27.

11. *Наймарк, М.А.* Линейные дифференциальные операторы [Текст] / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
12. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека [Текст]. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
13. *Якубов, С.Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных гиперболических уравнений второго порядка и их приложений [Текст] / С.Я. Якубов // Труды ММО. – 1970. – Т. 23. – С. 37-60.
14. *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений [Текст] / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2003. – 107 с.
15. *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца [Текст] / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов, Н.Х. Розов // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 5. – С. 584-601.
16. *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях [Текст] / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов, Н.Х. Розов // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 6. – С. 738-753.

Нелокальная модель эрозии. Формирование волнообразного нанорельефа под воздействием ионной бомбардировки

Д.А. Куликов

Введение. В настоящее время известны две математические модели формирования неоднородных рельефов под воздействием потока ионов на поверхности плоской мишени [1-5]. Обе модели базируются на теории П. Зигмунда [6]. Следует признать, что более известна модель предложенная в работе [4] (см. также работу [5]). В работах [1-3] была предложена иная модель, которая призвана учесть более точные нелокальные эффекты на субмикронном уровне. Данная работа представляет расширенный вариант доклада на X Колмогоровских чтениях (Ярославль, 2012).

В рамках субмикронной модели предполагается рассматривать нелинейную эволюционную краевую задачу

$$u_t = au_{xx} - cw_x + (u - w) + b(u - w)w_x + dc(w_x)^2 - bd(u - w)(w_x)^2, \tag{1}$$

$$u(t, x + l) = u(t, x). \tag{2}$$

Здесь $u = u(t, x), w = w(t, x) = u(t, x - 1), a, b, c, d$–некоторые постоянные. Особую роль играет положительная постоянная a, которая обратнопропорциональна интенсивности (плотности) потока ионов, с помощью которого моделируют динамику такого технологического процесса. Краевые условия (2) отражают тот факт, что рассматриваются периодические возмущения поверхности [4,5]. Такой подход достаточно традиционен и рассматривается в других работах (см. списки цитируемой литературы [1-5]). Будем считать, что

$$l = \frac{2}{m},$$

где m – натуральное число.

Особенностью краевой задачи (1), (2) является наличие решения

$$u(t, x) = h \ (h = const),$$

а постоянная h зависит от варианта введения системы координат, уравнением $z = u(t, x)$ задается форма поверхности в момент времени t в точке с координатой x. Здесь рассматривается вариант цилиндрического изгиба поверхности. Далее без нарушения общности будем считать, что система координат выбрана таким образом, чтобы было выполнено равенство $h = 0$, т.е. невозмущенная поверхность (идеально ровная) задается уравнением $u = 0$.

Пусть

$$u(0, x) = f(x), \tag{3}$$

т.е. при $t = 0$ задаем неоднородный рельеф, который может возникнуть еще до начала бомбардировки как следствие не абсолютно идеально точной обработки поверхности при изготовлении мишени. Естественно $f(x)$ мала в смысле нормы которую укажем далее и, конечно, имеет период l. Последнее, конечно, является некоторым допущением, но достаточно разумным, как ранее указывалось, с точки зрения результатов экспериментов.

Пространство начальных условий принято называть качественной теории дифференциальных уравнений фазовым пространством. Последний термин используется и в теоретической физике. В данном случае в качестве фазового пространства уже с математической точки зрения целесообразно выбрать $H_2^2(l)$, состоящее из тех l периодических функции $f(x) \in W_2^2[0, l]$ – пространству Соболева функций заданных на $[0, l]$ [7]. Норма в этом пространстве может быть задана равенством

$$||f(x)||_{H_2^2} = ||f(x)||_{L_2(0,2)} + ||f'(x)||_{L_2(0,2)} + ||f''(x)||_{L_2(0,2)}, ||g(x)||_{L_2(0,2)} = \sqrt{\int\limits_0^2 g^2(x)dx}.$$

Малость функций будем понимать в смысле нормы в данном пространстве.

Линеаризованная краевая задача. В этом разделе рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$u_t = A(a)u. \tag{4}$$

Линейный дифференциальный оператор $A(a)$ определен равенством

$$A(a)u = au_{xx} - cw_x + (u - w),$$

где $u(t,x)$ удовлетворяет краевым условиям (2). Обозначение $A(a)$ мотивированно тем, что a далее будет играть роль основного бифуркационного параметра.

В этом случае линейная краевая задача (1), (2) может быть проинтегрирована методом Фурье. Действительно, положим

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)\exp(i\pi nmx),\ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(i\pi nmx).$$

Следовательно,

$$w(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)(-1)^n \exp(i\pi nmx).$$

Элементарно проверяется, что для решений краевой задачи (4), (2), (3) справедливы равенства

$$\begin{gathered} u_n(t) = f_n \exp(\lambda_n t),\ \lambda_n = -(\pi nm)^2 a - c\pi nmi(-1)^n + (1 - (-1)^n), \\ Re\lambda_n = -(\pi nm)^2 a + (1 - (-1)^n),\ Im\lambda_n = -c\pi nm(-1)^n. \end{gathered} \tag{5}$$

Комплексные числа λ_n– собственные числа линейного оператора $A(a)$. Их расположение на комплексной плоскости (см., например, с. 92-96 из [8]), что оператор $A(a)$ является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов. Линейная краевая задача (4), (2), (3) по своим свойствам может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений. Этот факт, а также работы [9-11] дают основание считать, что и нелинейная краевая задача (смешанная задача) (1), (2), (3) локально корректно разрешима (см., например, теорему 7 из работы [11]).

Далее будем разделять два случая при выборе m :

1) m – нечетно $(m = 2m_0 - 1, m_0 \in N)$,

2) m – четно $(m = 2m_0, m_0 \in N)$.

В первом случае стандартный анализ формул (5) показывает, что если

$$a > a_{\text{кр}} = \frac{2}{(\pi m)^2}\ (m = 2m_0 - 1),$$

то выполнено неравенство $Re\lambda_n < 0$, если $n = \pm1, \pm2m, \dots$, а $\lambda_0 = 0$ всегда.

Во втором случае $(m = 2m_0)$ при всех $n \neq 0$ справедливо неравенство $Re\lambda_n < 0$. Эти замечания позволяют заключить о справедливости утверждения.

Лемма 1. *Пусть $m = 2m_0 - 1$. Решение краевой задачи (4), (2), (3) устойчиво, если $a > a_{\text{кр}} = \dfrac{2}{(\pi m)^2}$ и неустойчиво, если $a < a_{\text{кр}}$.*

При четном m нулевое решение краевой задачи (4), (2), (3) устойчиво при любом выборе параметров задачи.

Положим $m = 2m_0 - 1,\ (m_0 \in N)$ и $a = a_{\text{кр}}$. Тогда для данной краевой задачи реализуется критический случай в задаче об устойчивости: спектру устойчивости принадлежат собственные числа

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = i\sigma,\ \lambda_{-1} = -i\sigma,\ \sigma = \pi mc. \tag{6}$$

Обозначим через $A_0 = A(a_{\text{кр}})$. Тогда собственным числам (6) соответствуют собственные элементы

$$e_0(x) = 1,\ e_1(x) = \exp(i\pi mx),\ e_{-1}(x) = \exp(-i\pi mx)$$

линейного дифференциального оператора A_0. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$A(\varepsilon)v = (A_0 - \varepsilon A_1)v,\ A_1 v = a_{\text{кр}} v''.$$

При $\varepsilon > 0$ у $A(\varepsilon)$ появляются собственные числа в правой плоскости $\lambda_1(\varepsilon), \overline{\lambda}_1(\varepsilon)$, которые соответствуют тем же собственным элементам. Остальные собственные числа $\lambda_2(\varepsilon), \lambda_3(\varepsilon), \dots$ лежат в левой полуплоскости, выделяемой неравенством

$$Re\lambda_n(\varepsilon) \leq -\gamma_0 < 0.$$

В следующем разделе возвратимся к рассмотрению уже нелинейной краевой задачи (1), (2), (3) при

$$a = a_{\text{кр}}(1 + a_0\varepsilon),\ a_0 = \pm 1$$

и m– нечетном. Здесь ε– малый неотрицательный параметр. Наконец, такой выбор a_0 продиктован необходимостью рассмотрения как докритических, так и послекритических бифуркаций.

Нормальная форма нелинейной краевой задачи. Пусть

$$a = a_{\text{кр}}(1 + a_0\varepsilon),\ a_0 = \pm 1,\ m = 2m_0 - 1,\ m_0 \in N.$$

При таком выборе параметров задачи (1), (2), (3) она имеет гладкое трехмерное инвариантное многообразие (центральное инвариантное многообразие в современной терминологии, см., например, [12-13]).

Последнее, в частности, означает следующее. Положим

$$u(t,x) = v(t,x) + y(t,x),$$

где

$$\begin{aligned} y(t,x) &= \sum_{k=2}^{\infty} y_k(t)\exp(i\pi kmx) + \sum_{k=2}^{\infty} \overline{y}_k \exp(-i\pi kmx), \\ v(t,x) &= v_0(t) + v_1(t)\exp(i\pi mx) + \overline{v}_1(t)\exp(-i\pi mx). \end{aligned}$$

Тогда изучению динамики всех решений, принадлежащих трехмерному инвариантному многообразию достаточно малой окрестности сводится к изучению аналогичных вопросов, но для системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_0 = g_0(v_0, v_1, \overline{v}_1, \varepsilon),\ \dot{v}_1 = g_1(v_0, v_1, \overline{v}_1, \varepsilon),\ \dot{\overline{v}}_1 = \overline{g}_1(v_0, v_1, \overline{v}_1, \varepsilon), \tag{7}$$

где g_j– достаточно гладкие функции в окрестности начала координат. Отметим одну особенность краевой задачи (1), (2). Для нее функции $g_j (j = 0, 1)$ не зависят от v_0 т.е. $g_j = g_j(v_1, \overline{v}_1, \varepsilon)$, а g_0 не зависит и от ε. Первое утверждение вытекает из следующего простого замечания.

Пусть $u(t,x) = u_0(t) + p(t,x)$, где $\int_0^2 p(t,x)dx = 0$. Тогда элементарно проверяется равенство

$$A(a)(u_0(t) + p(t,x)) + F(u_0(t) + p(t,x)) = Ap(t,x) + F(p(t,x)),$$

где через $F(u)$ обозначена сумма всех нелинейных слагаемых правой части нелинейного дифференциального уравнения (1). Добавим также, что линейный дифференциальный оператор $A(a)$ имеет нулевое собственное значение при любом выборе коэффициентов этого дифференциального оператора и, в частности, поэтому не зависит от ε, когда $a = a_{\text{кр}}(1 + a_0\varepsilon)$.

Правые части части нормальной формы будем искать на основании специального алгоритма (см., например, [14]), который ведет свое начало от метода Крылова-Боголюбова.

Динамику решений на трехмерном инвариантном многообразии определяет, как уже отмечалось, система из трех дифференциальных уравнений, которую будем искать в специальной форме, эквивалентной (7). Пусть

$$\begin{gathered} \psi' = d_0|z|^2, \\ z' = (\alpha + i\beta)z + (d_1 + id_2)z|z|^2,\ \overline{z'} = (\alpha - i\beta)\overline{z} + (d_1 - id_2)\overline{z}|z|^2. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь выписаны ее главная часть (укороченный вариант), но оставлены те ее члены, которые отвечают за принципиальные моменты при ее исследовании. Наконец,d_0, d_1, d_2, α,
$\beta \in R, \psi = \psi(s), z = z(s)$, где $s = \varepsilon t$ – "медленное время".

Решения задачи (1), (2) будем искать в следующем виде

$$u(t,x,\varepsilon) = \psi(s) + v(t,s,x,\varepsilon), \tag{9}$$

где, в свою очередь,

$$\begin{gathered} v(t,s,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(t,s,x) + \varepsilon u_2(t,s,x) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,s,x) + \dots, \\ u_1(t,s,x) = z(s)\exp(i\sigma t)\exp(i\pi mx) + \overline{z}(s)\exp(-i\sigma t)\exp(-i\pi mx), \end{gathered} \tag{10}$$

а точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по ε т.е. $o(\varepsilon^{3/2})$. Функции u_2, u_3 по t имеют период $\dfrac{2\pi}{\sigma}$ $(\sigma = \pi mc)$, а как функции переменной x они входят в класс функций, принадлежащих $H_2^2(l)$. Ниже будут использованы обозначения $w_j = w_j(t,s,x) = u_j(t,s,x-1)$.

Подстановка суммы (9) с учетом детализации структуры $v(t,s,x,\varepsilon)$ приводит к неоднородным краевым задачам для определения u_2, u_3 :

$$u_{2t} + \psi'(s) = A_0u_2 + b(u_1 - w_1)w_{1x} + dc(w_{1x})^2, \tag{11}$$

$$u_2(t,s,x+l) = u_2(t,s,x), \tag{12}$$

а также

$$u_{3t} + u_{1s} = A_0 u_3 + a_{\text{кр}} u_{1xx} + b(u_1 - w_1)w_{2x} + \\ + b(u_2 - w_2)w_{1x} + 2dcw_{1x}w_{2x} - bd(u_1 - w_1)(w_{1x})^2, \tag{13}$$

$$u_3(t, s, x + l) = u_3(t, s, x). \tag{14}$$

Здесь, как и ранее, $l = 2/m$, $A_0 u_j = a_{\text{кр}} u_{jxx} - cw_{jx} + u_j - w_j, w_j = u_j(t, s, x - 1), j = 2, 3$. Наконец,

$$u_{1s}(t, s, x) = z'(s)\exp(i\sigma t)\exp(i\pi mx) + \text{к.с.},$$

а штрихом в последних формулах и ниже обозначаем производную по s.

При определении правых частей нормальной формы (8) будут использованы условия разрешимости неоднородных краевых задач в классе $\dfrac{2\pi}{\sigma}$ периодических функций. Напомним эти условия.

Рассмотрим неоднородную краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A_0 v = G(t, x), \tag{15}$$

$$v(t, x + l) = v(t, x), \tag{16}$$

где $G(t, x)$ достаточно гладкая функция, имеющая по переменной x период l, а по переменной t период $\dfrac{2\pi}{\sigma}$.

Лемма 2. *Неоднородная краевая задача (15), (16) имеет периодическое по t решение периода $\dfrac{2\pi}{\sigma}$, если выполнены равенства*

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^{l} G(t, x)dxdt = \int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^{l} G(t, x)\exp(i\sigma t + i\pi mx)dxdt = \\ = \int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^{l} G(t, x)\exp(-i\sigma t - i\pi mx)dxdt = 0,$$

Равенства

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^{l} v(t, x)dxdt = \int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^{l} v(t, x)\exp(i\sigma t + i\pi mx)dxdt = \\ = \int\limits_0^{2\pi/\sigma}\int\limits_0^{l} v(t, x)\exp(-i\sigma t - i\pi mx)dxdt = 0$$

выделяют одно подходящее решение неоднородной краевой задачи (15), (16).

Последовательно применяя условия разрешимости к неоднородным краевым задачам (11), (12), (13), (14) находим, что

$$d_0 = (m\pi)^2 dc.$$

При таком выборе d_0 находим, что

$$u_2(t, s, x) = \eta z^2 \exp(2i\sigma t)\exp(2i\pi mx) + \overline{\eta}\overline{z}^2\exp(-2i\sigma t)\exp(-2i\pi mx), \\ \eta = \eta_1 + i\eta_2,\ \eta_1 = -\frac{(\pi m)^2 c(b + d)}{2(4 + (\pi m)^2 c^2)},\ \eta_2 = \frac{dc^2(m\pi)^3 - 4m\pi b}{4(4 + (m\pi)^2 c^2)}.$$

Анализ краевой задачи (13), (14) приводит к равенствам

$$d_1 = \frac{(m\pi)^2}{4 + (m\pi)^2 c^2}[(b - 2d)(4b - (m\pi)^2 c^2 d)],\ \alpha = -2a_0, \\ d_2 = \frac{c(m\pi)^3}{4 + (m\pi)^2 c^2}[2bd + d^2 c^2 (m\pi)^2 - 2b^2],\ \beta = 0.$$

Отметим, что при вычислениях было использовано равенство

$$w_2(t, s, x) = u_2(t, s, x - 1) = u_2(t, s, x),$$

которые в нашем случае элементарно проверяются и следуют из выбора $u_2(t, s, x)$.

Анализ нормальной формы. Перейдем к изучению системы дифференциальных уравнений (8) – нормальной форме. Положим

$$z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s)), \tag{17}$$

где $\rho(s) \geq 0, \varphi(s) \in R$. В новых переменных нормальная форма перепишется в следующем виде

$$\begin{array}{c} \varphi' = d_2\rho^2, \ \psi' = d_0\rho^2, \\ \rho' = -2a_0\rho + d_1\rho^3. \end{array} \tag{18}$$

Пусть сначала $a_0 = -1$. Тогда $a = a_{\text{кр}}(1 + a_0\varepsilon) < a_{\text{кр}}$. Нулевое состояние равновесия краевой задачи (4), (2), а также последнего из уравнений системы (18) теряет устойчивость. Если вместе с тем $d_1 < 0$, то система (18) имеет устойчивые решения

$$\rho(s) = \rho_0, \ \psi(s) = d_0\rho_0^2 s + \psi_0, \ \varphi(s) = d_2\rho_0^2 s + \varphi_0, \tag{19}$$

где $\rho_0 = \sqrt{-\dfrac{2}{d_1}}, \ \psi_0, \varphi_0 \in R$.

Если $a_0 = 1$, то существует решение аналогичное (19), если напротив $d_1 > 0$. В этом $\rho_0^2 = \dfrac{2}{d_1}$ $(\rho_0 = \sqrt{\dfrac{2}{d_1}})$.

Используя результаты работ [14-17], можно убедиться в справедливости утверждения. В работе [17] была рассмотрена аналогичная задача для уравнения Брэдли-Харпера.

Теорема. *Пусть $a = a_{кр}(1 - \varepsilon), d_1 < 0$. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решению (19) нормальной формы (8) соответствует устойчивое решение краевой задачи (1), (2)*

$$\begin{array}{c} u(t, x, \varepsilon) = -\big(\dfrac{2d_0\varepsilon}{d_1} + o(\varepsilon)\big)t + v(t, x, \varepsilon), \\ v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\rho_0(\exp(im\pi x + i\sigma_m t) + \exp(-im\pi x - i\sigma_\varepsilon t)) + \\ +\varepsilon\rho_0^2(\eta \exp(2im\pi x + 2i\sigma_\varepsilon t) + \overline{\eta} \exp(-2im\pi x - 2i\sigma_\varepsilon t)) + o(\varepsilon), \end{array} \tag{20}$$

где постоянные ρ_0, η, σ_m были определены ранее. Так $\sigma_\varepsilon = \sigma - 2\varepsilon\dfrac{d_2}{d_1}, \ \sigma = \pi mc$, $\rho_0 = \sqrt{-\dfrac{2}{d_1}}$.

Если $a = a_{кр}(1 + \varepsilon), d_1 > 0$, то краевая задача имеет решение аналогичное (20), где уже $\rho_0^2 = \dfrac{2}{d_1}$, но оно неустойчиво в отличии от первого случая формулировки теоремы.

Формула (20) задает пространственно неоднородный рельеф, имеющий волновой характер (волновой нанорельеф). Соответствующая формула (20) на самом деле задает семейство такого сорта решений, так как наряду с этим решением краевая задача (1), (2) имеет и решения вида $u(t, x + \gamma_1, \varepsilon) + \gamma_2$, где γ_1, γ_2 – произвольные действительные постоянные.

В формулировке теоремы важную роль играет знак d_1. Пусть $\xi = \dfrac{b}{d}$. Тогда знак d_1 совпадает со знаком величины

$$p_2(\xi) = (\xi - 2)(\xi - \frac{(m\pi)^2c^2}{4}),$$

анализ знака которой элементарен. Особый интерес для приложений имеет тот случай, когда $d_1 < 0$, так как в таком случае возникают устойчивые и, следовательно, физически реализуемые наноструктуры.

Пусть $\dfrac{(m\pi)^2c^2}{4} > 2$, тогда $d_1 < 0$ при $\xi \in (2, \dfrac{(m\pi)^2c^2}{4})$. Если же оказалось, что $\dfrac{(m\pi)^2c^2}{4} < 2$, то $d_1 < 0$ при $\xi \in (\dfrac{(m\pi)^2c^2}{4}, 2)$. Понятно, что при достаточно больших m реализуется вариант неравенства $\dfrac{c^2(m\pi)^2}{4} > 2$.

Отметим также, что в краевых условиях (2) $l = \dfrac{2}{m}$, где $m = 1, 2, \ldots$ Следовательно, можно считать, что краевая задача (1), (2) зависит от m, как от параметра. Подчеркнем, что если построено решение краевой задачи (1), (2) при некотором $m = 2m_0 - 1$, то эта функция будет удовлетворять краевой задаче (1),(2), в которой $m = 1$, но такое решение для краевой задачи при $(l = 2)$ будет уже неустойчивым.

Библиографический список

1. *Рудый, А.С.* Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой [Текст] / А.С. Рудый, В.И. Бачурин // Изв. РАН. Серия физическая. – 2008. – Т. 72. – № 5. – С. 624-629.
2. *Birkgan S.E., Buchurin A.S., A.S. Rudy, Smirnov V.K.* Nanoscale model of surface erosion by ion bombardment // Eff. and Def. in Sol. 2004. V. 159. № 6. C. 319-329.
3. *Рудый, А.С.* Моделирование процессов формирования наносруктур при распылении поверхности ионной бомбардировкой [Текст] / А.С. Рудый, А.Н. Куликов, А.В. Метлицкая // Микроэлектроника. – 2011. – Т. 40. – № 2. – С. 109-118.
4. *Bradley R.M., Harper J.M.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J.Mater. Sci. 1973. V. 8. P. 1545-1553.

5. *Кудряшов, Н.А.* Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке [Текст] / Н.А. Кудряшов, П.Н. Рябов, М.Н. Стриханов // Ядерная физика и инжиринг. – 2010. – Т. 1. – № 2. – С. 151-158.
6. *Sigmund P.* A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment // J. Mater. Sci. 1973. V. 8. P. 1545-1553.
7. *Соболев, С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С.Л. Соболев // Изд. ЛГУ, 1950. – 256 с.
8. *Крейн, С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве [Текст] / С.Г. Крейн // М.: Наука, 1967. – 464 с.
9. *Якубов, С.Я.* Разрешимость задачи абстрактных квазилинейных уравнений второго порядка и их приложений [Текст] / С.Я. Якубов // Труды Московского общ-ва. – 1970. – Т. 23. – С. 37-60.
10. *Segal I.* Nonlinear Semigroups // Ann. of Math. 1963. V. 78. P. 339-364.
11. *Соболевский, П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве [Текст] / П.Е. Соболевский // Труды Москвского математического общества. – 1961. – Т. 10. С. 297-350.
12. *Куликов, А.Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве [Текст] / А.Н. Куликов // Исследования по устойчивости и теории колебаний. – 1976. – С. 114-129.
13. *Марсден, Дж.* Бифуркации рождения цикла и ее приложения [Текст] / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен // М.: Наука, 1980. – 368 с.
14. *Мищенко, Е.Ф.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией [Текст] / Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // М.: Физматлит, 2005. – 430 с.
15. *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений [Текст] / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов // Изд-во ЯрГУ, 2003. – 107 с.
16. *Куликов, А.Н.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обощенного кубического уравнения Шредингера [Текст] / А.Н. Куликов, Д.А. Куликов // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 40. – № 9. – С. 1290-1299.
17. *Куликов, А.Н.* Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки [Текст] / А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, А.С. Рудый // Вестник Удмуртского ун-та. – 2011. – Вып. 4. – С. 86-99.

g

Обоснование вещественных чисел в рамках слабой арифметики и элементарные функции в рамках арифметики А. Тарского

Ю.Н. Ловягин

Традиционно числовые системы вводятся на основе натуральных чисел. Фраза, приписываемая Кронекеру гласит, что «натуральые числа дал нам Бог, а всё остальное мы придумали сами». Однако, само понятие натурального числа является проблематичным, в частности из-за теоремы Гёделя. С точки зрения возможности реально осуществить построения функций и конструктивного доказательства основных теорем формализованная теория чисел (см., например, [1]) помимо неполноты является ещё и неразрешимой. Поэтому теория вещественных чисел, “базирующаяся” на формализованной теории чисел, не является разрешимой. Для частичного решения этих проблем возможны два пути: 1) моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматической теории гипервещественных чисел в духе [2, 3, 4]; 2) использовать разрешимую теорию вещественных чисел – арифметику Тарского [5], лежащую в основе геометрического алгорифма. Последняя идея принадлежит Н.К.Косовскому и конспективно изложена в [6]. В настоящей заметке автор систематически излагает построение основных числовых систем, опираясь на предложенной в [6] слабой арифметике.

1. Слабая арифметика

В языке формализованной теории чисел [1] рассмотрим теорию, которая помимо аксиом равенства и аксиом согласования с равенством содержит специальные аксиомы арифметки, восходящие к Пеано:

1. $\forall x \forall y\, (x' = y' \supset x = y)$,
2. $\forall x \neg\, (x' = 0)$,
3. $\forall x\, (x + 0 = x)$,
4. $\forall x \forall y\, \big(x + y' = (x + y)'\big)$,
5. $\forall x\, (x \cdot 0 = 0)$,
6. $\forall x \forall y\, (x \cdot y' = x \cdot y + x)$.

Определение 1.1. Введённую теорию будем называть **слабой арифметикой** и обозначать $\mathfrak{Ar}$.

Отметим, что слабая арифметика отличается от формализованной теории чисел отсутствием схемы аксиом индукции.

Исходя из константы 0 строятся натуральные числа: $1 = 0', 2 = 1', \ldots$. Аксиомы слабой арифметики позволяют ввести по рекурсии алгебраические операции сложения и умножения, обладающие обычными свойствами – множество всех натуральных чисел является коммутативным моноидом. Множество всех натуральных чисел будем обозначать $\mathbb{N}$.

Определение 1.2. Введём предикатный символ порядка $x \leq y := \exists z\,(x + z = y)$, $x < y := x \leq y \& \neg\,(x = y)$.

Нетрудно доказать, что множество всех натуральных чисел является цепью.

Определение 1.3. Слабой гиперарифметикой будем называть теорию $\mathfrak{HAr}$, получающуюся добавлением к $\mathfrak{Ar}$ констатного символа $\boldsymbol{\Upsilon}$ и класса аксиом:

$$0 < \boldsymbol{\Upsilon}, 1 < \boldsymbol{\Upsilon}, \ldots$$

Теорема 1.1. $\mathfrak{HAr}$ *является косервативным расширением* $\mathfrak{Ar}$.

Доказательство. Пусть φ – теорема $\mathfrak{Ar}$, доказанная в теории $\mathfrak{HAr}$. Так как в доказательство входит только конечное количество новых (отличных от аксиом слабой арифметики) аксиом, имеется наибольшее число N такое. что в доказательстве φ используется формула $N < \boldsymbol{\Upsilon}$. Заменяя теперь все вхождение константы $\boldsymbol{\Upsilon}$ на вхождения терма $N + 1$, получаем доказательство φ в теории $\mathfrak{Ar}$.

Определение 1.4. Постоянные термы слабой гиперарифметики, содержащие константу $\boldsymbol{\Upsilon}$ будем называть **бесконечными** натуральными числами. Постоянные термы, не содержащие $\boldsymbol{\Upsilon}$, будем называть просто натуральными числами. Числа всей совокупности (как натуральных, так и бесконечных натуральных) будем называть **гипернатуральными**. Класс всех гипернатуральных чисел обозначим $\mathfrak{N}$.

Теорема 1.2. *Гипернатуральные числа образуют упорядоченный коммутативный моноид, в котором натуральные числа образуют подмоноид.*

Доказательство. Результат сразу следует из того, что теория гипернатуральных чисел является консервативным расширением слабой арифметики.

2. Гиперрациональные числа

Определение 2.1. Обозначим класс всевозможных упорядоченны троек гипернатуральных чисел через $\mathfrak{Q}$. Назовём его классом **гиперрациональных** чисел. Подкласс троек натуральных чисел будем называть классом **рациональных** чисел и обозначать $\mathbb{Q}$.

В [4] рациональнрые и гиперрациональные числа строятся на основе формализованной теории чисел. В [2] гиперрациональные (и рациональные) числа строятся в рамках теории множеств как модели соответствующих теорий. При обоих подходах каждая тройка $\langle m, n, p\rangle$ представляет собой число $\frac{m-n}{p+1}$. Исходя из этого в соответствующем языке определяются предикатные символы равенства и порядка и функциональные символы сложения и умножения.

Рассмотрим язык исчисления предикатов, константами которого являются гиперрациональные числа. Специальные предикатные и функциональные символы для равенства, порядка, сложения и умножения определены как в [2, 4].

Определение 2.2. Введём в рассмотрение теорию $\mathfrak{OF}$ **упорядоченных полей**:

1. Аксиомы равенства;
2. Аксиомы порядка;
3. Аксиомы согласования с равенством;
4. Алгебраические аксиомы поля:
   - $\forall x \forall y\,(x + y = y + x)$,
   - $\forall x \forall y \forall z\,(x + (y + z) = (x + y) + z)$,
   - $\forall x\,(x + 0 = x)$,
   - $\forall x \exists y\,(x + y) = 0$,
   - $\forall x \forall y\,(x \cdot y = y \cdot x)$,
   - $\forall x \forall y \forall z\,(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$,
   - $\forall x\,(x \cdot 1 = x)$,
   - $\forall x\,(\neg\,(x = 0) \supset \exists y\,(x \cdot y = 1))$,
   - $\forall x \forall y \forall z\,(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$;
5. Аксиомы согласования порядка и алгебраических операций:

- $\forall x \forall y\,(x > 0 \& y > 0 \supset x + y > 0)$,
- $\forall x \forall y\,(x > 0 \& y > 0 \supset x \cdot y > 0)$,
- $\forall x \forall y\,(x > 0 \& y < 0 \supset x \cdot y < 0)$,
- $0 < 1$;

Определение 2.3. Гиперрациональное число $x = \langle m, n, p\rangle$ назовём **положительным** – пишем $x \geq 0$ –, если $m \geq n$ и **строго положительным**– $x > 0$ –, если $m > n$. Считаем $x \geq y$, если $x - y \geq 0$ и $x > y$, если $x - y > 0$.

Теорема 2.1. *Гиперрацонральные числа образуют упорядоченное поле, в котором рациональные числа являются подполем.*

Доказательство. В точности следует [4].

Определение 2.4. Модулем числа x называется число $|x| = \max(x, -x)$.

3. Бесконечно малые числа

Теорема 3.1. *Всякое гипернатуральное число является гиперрациональным.*

Доказательство. Очевидно.

В связи с приведённой теоремой опишем некоторые качественные характеристики гиперрациональных чисел.

Определение 3.1. Гиперрациональное число x называется

- **гипернатуральным**, если $x = \langle n, 0, 0\rangle$ для некоторого натурального n (мы в дальнейшем отождествляем $\langle n, 0, 0\rangle$ с n);
- **гиперцелым**, если $x = \langle n, m, 0\rangle$ для некоторых натуральных n и m (если n и m – натуральные, то говорим о **целых** числах);
- **рациональым**, если $x = \langle n, m, p\rangle$ для натуральных m, n и p;
- **бесконечно большим**, если для всех натуральных n $|x| > n$;
- **конечным**, если оно не является бесконечно большим;
- **бесконечно малым**, если для любого натурального числа n $|x| < \frac{1}{n+1}$.

Теорема 3.2. *Конечные числа образуют кольцо, в котором класс всех бесконечно малых чисел является идеалом.*

Доказательство. Получается простой проверкой.

Наличие бесконечно малых чисел позволяет применять гиперрациональные числа для моделирования осноных понятий математического анализа, таких как непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисление. Это достаточно подробно изложено в работах И.Ф. Сегаль, автора и Е.В. Праздниковой.

Определение 3.2. Два гиперрациональных числа x и y называются **бесконечно близкими**, если разность $x - y$ бесконечно мала.

Легко проверяется, что справедлива

Теорема 3.3. *Отношение бесконечной близости является отношением эквивалентности. Причём на классе конечных чисел это отношения – конгруэнция.*

Ключевой теоремой для применения теории гиперрациональных чисел в геометрии является следующая теорема, которую можно назвать теоремой о фундаментальности монотонной ограниченной последовательности. Важность этой теоремы подчёркивалась автором в [2, 7]. Сама теорема впервые доказана в [7] применительно к полю гиперрациональных чисел в классическом нестандартном анализе А. Робинсона [8].

Теорема 3.4. *Пусть для каждого гипернатурального числа n определено гиперрациональное число x_n так, что*

$$\textit{при всех } n \quad x_n \geq x_{n+1}$$

$$\textit{существует такое натуральное число } N, \quad \textit{что при всех } n \quad x_n \leq N.$$

Тогда при любых бесконечных гипернатуральных u и v $x_u \approx x_v$.

Доказательство. Непосредственно повторяет рассуждения из [7].

4. Вещественные числа

Вещественные числа строятся на основе гиперрациональных чисел. В основе построения лежит идея, аналогичная дедекиндовым сечениям. Настоящая идея заимствована из [9], но адаптирована на случай гиперрациональных чисел, базирующихся на слабой арифметики.

Определение 4.1. Рассмотрим класс всех конечных чисел и конгруэнцию бесконечной близости. **Монадой** будем называть класс всех конечных чисел, конгруэнтных некоторому конечному числу. Монады будем обозначать буквами $\mu, \nu, \ldots$. Если x – число из монады μ, то будем писать $\mu(x)$ и говорить о **монаде числа** x.

Определение 4.2. Обозначим через $\mathbf{R}$ класс всех монад. Этот класс назовём классом **вещественных** чисел.

Теорема 4.1. *Класс* $\mathbf{R}$ *является условно полным упорядоченным полем.*

Доказательство. Введём над вещественными числами алгебраические операции:

- $\mu + \nu := \mu(p+q)$, где $\mu = \mu(p)$, $\nu = \mu(q)$;
- $\mu \cdot \nu := \mu(p \cdot q)$, где $\mu = \mu(p)$, $\nu = \mu(q)$;

Проверим, что определение алгебраических операций корректно. Ограничимся случаем сложения. Пусть $p_1 \approx p$, $q_1 \approx q$. Тогда $(p_1 + q_1) - (p + q) = (p_1 - p) + (q_1 - q) \approx 0$, что,очевидно, и даёт корректность определения суммы.

Несложно доказывается, что $\mathbf{R}$ является коммутативным ассоциативным кольцом с единицей.

Докажем, что $\mathbf{R}$ является полем. Пусть p – гиперрациональное число и $p \neq 0$. Предположим, что p бесконечно большое. Тогда, как легко видеть, $\frac{1}{p} \approx \infty$ и $p \cdot \frac{1}{p} = 1$. Тогда ясно, что $\mu(p) \cdot \mu\left(\frac{1}{p}\right) = \mu(1)$. Если же $p \approx 0$, то $\mu(p) = \mu(0)$ и, как легко убедиться, является нулём для $\mathbf{R}$. Для числа p конечного, но не бесконечно малого $\frac{1}{p}$ является конечным. Действительно, очевидно, что $\frac{1}{p}$ не может быть бесконечно малым, ибо в противном случае $p \approx \infty$. Если же $\frac{1}{p}$ бесконечно велико, то $p \approx 0$.

Определим теперь $\mu < \nu$, если $p < q$ $(\mu = \mu(p),\ \nu = \mu(q))$. Корректность определения следует из утверждения: если $p > 0$, p не бесконечно мало и $\varepsilon \approx 0$, то $p + \varepsilon > 0$. (Верно и обратное: если $p + \varepsilon > 0$ и p не бесконечно мало, то $p > 0$). Для доказательства предположим, что $p + \varepsilon \leq 0$. Тогда $p \leq \varepsilon$ и, в силу строгой положительности p, отсюда следует, что $p \approx 0$. (Доказательство в другую сторону аналогично).

Таким образом, вещественные числа образуют упорядоченное поле. Для завершения доказательства проверим, что всяконе непустое ограниченное сверху множество E вещественных чисел имеет точную верхнюю границу. Последнее понятие требует формализации термина "множество вещественных чисел". Это можно сделать в рамках формализованного языка исчисления предикатов, константами которого являются вещественные числа. Кроме того в сигнатуру языка входят предикатный символ порядка, функциональные символы для сложения и умножения. Тогда под **множеством вещественных чисел** понимается некоторая формула $\Phi(x)$ этого языка. Точнее, множество E определяется формулой Φ. Мы понимаем $x \in E$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi(x)$ доказуема в теории упорядоченных полей.

Итак, пусть E – некоторое множество вещественных чисел и существует натуральное число n такое, что для всех $e \in E$ $e \leq n$.

Если n не является точной верхней границей, то существует гиперрациональное число $p < n$ такое, что при $e \in E$ $e \leq p$. Будем строить рекурсивную последовательность $n = p_0 > p = p_1 > p_2 > \ldots$ так, что если число p_m построено, то либо $\mu(p_n)$ является супремумом множества E, либо существует $p_{m+1} < p_m$ такое, что при $e \in E$ $e \leq p_{m+1}$. Ясно, что либо на каком-то шаге мы получим супремум, либо построим последовательность, удовлетворяющую теореме о фундаментальности монотонной последовательностти. Применяя эту теорему, точнее её "убывающий" вариант, получаем, что если ни на каком шаге мы не "уткнёмся" в супремум множества E, то при бесконечных номерах $p_u \approx p_v$. Теперь несложно показать, что $\sup E = \mu(p_u)$ при любом $u \approx \infty$.

Таким образом, в силу единственности полного упорядоченного поля, мы построили поле вещественных чисел, в котором можно развивать анализ.

Сформулируем легко доказываемые факты.

Теорема 4.2. *Для каждого вещественного числа* x *существует гиперрациональное число* $p \approx x$.

Доказательство. Сразу получается из определения вещественного числа.

Теорема 4.3. *Множество рациональных чисел образует, с точностью до изоморфизма, плотное упорядоченное подполе поля* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Почти очевидно.

Теперь ясно, что гиперрациональные числа действительно позволяют моделировать понятия вещественного анализа. В следующем параграфе мы изложим идеи, позволяющие излагать анализ на основе понятия актуального бесконечно малого числа в духе идей [7].

5. Арифметика А. Тарского

Рассмотрим теорию упорядоченных полей,$\mathfrak{OF}$. Согласно теореме 4.1 $\mathbf{R}$ являтеся моделью этой теории. Рассмотрим язык исчисления предикатов $\mathcal{L}$, сигнатура которого содержит константные символы для каждого вещественного числа и каждого гиперрационального числа, предикатные символы для равенства и порядка и функциональные символы для сложения и умножения.

Определение 5.1. Под **арифметикой А. Тарского** [5] мы будем понимать теорию $\mathfrak{TAr}$ в языке $\mathcal{L}$, к специальным аксиомам которой мы отнесём все утверждения теории $\mathfrak{OF}$ истинные в $\mathbf{R}$.

Отметим, что арифметика А. Тарского является разрешимой теорией и была предложена для построения конструктивных доказательств в геометрии.

В рамках теории $\mathfrak{TAr}$ построим модель $\mathbf{N}$ слабой арифметики, в которой константа ноль интерпретируется нулём поля вещественных чисел, сложение и умножение заимствуются из $\mathbf{R}$, а функциональный символ следования представляется прибавлением единицы. Легко понять, что имеет место

Теорема 5.1. $\mathbf{N}$ *является подмоделью* $\mathbf{R}$.

Доказательство. По построению.

Основываясь на модели слабой арифметики в рамках теории $\mathfrak{TAr}$, строим её консервативное расширение – гиперарифметику и её модель $\mathfrak{N}$. Эту модель возьмём за основу для построения рациональных $\mathbf{Q}$ и гиперрациональных $\mathfrak{Q}$ чисел.

Суммируя теперь все отмеченные результаты, приходим к методологическому основанию теории актуальных бесконечно малых:

- В кольце конечных гиперрациональных чисел имеется идеал бесконечно малых чисел.
- Для каждого вещественного x числа существует конечное гиперрациональное число p такое, что $p \approx x$.
- Каждое вещественное число имеет *монаду* $\mu(x)$, состоящую из конечных гиперрациональных чисел, бесконечно близких к x.

Определение 5.2. Пусть $\Theta(x, y)$ – формула языка $\mathfrak{TAr}$ такая, что

$$\mathbf{R} \models \forall x \forall y_1 \forall y_2 \left(\Theta(x, y_1) \& \Theta(x, y_2) \supset y_1 = y_2\right).$$

Будем говорить, что формула Θ определяет **функцию** f. При этом

$$\mathfrak{TAr} \vdash y = f(x) \equiv \Theta(x, y).$$

При доказательстве теоремы 4.1 мы ввели понятие *множества вещественных чисел.*

Определение 5.3. Для функции f определим её **область определения** как множество E такое, что

$$\mathfrak{TAr} \vdash x \in E \equiv \exists y\,(y = f(x)).$$

Определение 5.4. Пусть вещественная функция f определяется формулой Θ. Рассмотрим гиперрациональную функцию $f_{\mathfrak{Q}}$, определённую той же формулой. Назовём эту функцию **функцией, моделирующей** функцию f.

Отметим, что моделирующая функция обладает всеми свойствами, что и функция f. Это позволяет не различать функцию и её моделирующую. Точнее, допуская некоторую вольность, мы вместо $f_{\mathfrak{Q}}(p)$ будем писать $f(p)$. Для гиперрационального p.

6. Методические замечания

В этом параграфе мы приведём и прокомментируем теперь основные определения элементарного анализа для рассматриваемого нами класса функций. Во-первых, отметим, что введённый нами в рассмотрение класс функций можно назвать классом *алгебраических* функций, ибо при их определении применяются алгебраические операции. Во-вторых, для исследования алгебраических функций можно применить методы моделирования вещественного анализа в духе [2, 3, 4]. Мы, однако, предлагаем иную идею, представляющую собой модернизацию классического нестандартного анализа [7].

Определение 6.1. Функция f называется **непрерывной** в точке x если для всех $p \approx x$ $f(p) \approx f(x)$.

Определение непрерывности в точке может быть продолжено на определение непрерывности на множестве. Далее можно обсудить понятие односторонней непрерывности и точек разрыва. Для уточнения поведения функции "в точках разрыва" можно ввести понятие предела, как одностороннего , так и двустороннего, и связать это понятие с понятием непрерывности.

Определение 6.2. Пределом функции f в точке x называется вещественное число a такое, что $f(p)) \approx a$ при $p \approx x$.

Отметим. что легко сформулировать и понятие бесконечного предела, и предела "на бесконечности". После введения соответствующих понятий можно класифицировать точки разрыва, вводить понятия ассимптот.

Приведём в качестве примера доказательство теоремы о промежуточных значения непрерывной функции.

Теорема 6.1. *Пусть функция f непрерывна на некотором множестве E и для $a, b \in E$ $f(a) \cdot f(b) < 0$ тогда для некоторого числа c такого, что $a < c < b$ $f(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть $p \approx a$ – гиперрациональное число. Используя непрерывность легко показать, что $\mathrm{sign} f(p) = \mathrm{sign} f(a)$. Таким образом, для некоторых конечных гиперрациональных p и q, лежащих на сегменте $[a, b]$, $f(p) \cdot f(q) < 0$.

Так как $|p - q|$ конечное число, то, считая $p < q$, выберем бесконечно большое натуральное N и числа $\xi_k = p + k \cdot \frac{q-p}{N}$. Рассмотрим числа $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots N$. Из консервативности гиперарифметики следует, что для какого-то j $f(\xi_j) \leq 0$ (если $f(a) < 0$), а $f(\xi_{j+1}) \geq 0$. Теперь легко понять, что $f(\xi_j) \approx 0$. С другой стороны, по построению $\xi_j \approx c$ для некоторого c между a и b. В силу непрерывности $f(\xi_j) \approx f(c)$, а в силу вещественности c $f(c) = 0$.

Определение 6.3. Функцию f назовём **дифференцируемой** в точке c, если при $dx \approx 0$ $fd(dx) = f(x+dx) - f(x) \approx A \cdot dx + \alpha((x) \cdot dx$ для некоторого конечного гиперрационального числа A и $\alpha(x) \approx 0$. $\mu(A)$ называется **производной** функции f в точке x и обозначается $f'(x)$.

Далее исследуются свойства дифференцируемых функций и приложения дифференциального исчисления.

Определение 6.4. Пусть сегмент $[a, b]$ целиком лежит в области определения функции f. Рассмотрим точки $\xi_k = a + k \cdot \frac{b-a}{N}$, где N – бесконечно большое натуральное число. Пусть p_k – гиперрациональное число такое, что $\xi_k \le p_k < \xi_{k+1}$. Положим

$$S(f, [a, b], N) = \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(p_k).$$

Назовём число $S(f, [a, b], N)$ **интегральной суммой** функции f на сегменте $[a, b]$.

Отметим, что в силу конечности $b - a$ как разности двух вещественных чисел интегральная сумма, отвечающая любому сегменту, на котором определена функция, существует для любого N. Ничто, однако, не мешает её быть бесконечно большой.

Определение 6.5. Функцию f назовём **интегрируемой** на сегменте $[a, b]$, если при всех бесконечно больших натуральных N и M $S(f, [a, b], N) \approx S(f, [a, b], M)$. Вещественное число, определённое монадой $\mu(S(f, [a, b], N))$ будем называть **интегралом** от функции f по сегменту $[a, b]$ и обозначать $\int\limits_a^b f$.

Далее исследуются свойства интеграла и приложения интегрального исчисления. В этом плане, в частности, имеет смысл, описанное в [6] решение проблемы измерения длин, углов и площадей.

В настоящее время открыт вопрос об описании класса интегрируемых функций.

Библиографический список

1. *Ловягин, Ю.Н.* Элементарная математическая логика [Текст]: учебноге пособие / Ю.Н. Ловягин. – СПб: Издательство РГПУ им. А.И. Герцена, 2007. – 132 с.
2. *Ловягин, Ю.Н.* Гиперрациональные числа и функции гиперрационального аргумента и их применение для измерения длин отрезков и площадей плоских фигур [Текст] / Ю.Н. Ловягин // Труды VIII Международных Колмогоровских чтений: Сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ. – 2010. – С. 128-134.
3. *Ловягин, Ю.Н.* Элементарные функции в аксиоматическом нестандартном анализе [Текст] / Ю.Н. Ловягин, Е.В. Праздникова // Математика. Информатика. Технический подход к обучению в ВУЗе и школе: Материалы всероссийской научно-практической конференции. – Курган. – 2009. – С. 17-20.
4. *Праздникова, Е.В.* Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел [Текст] / Е.В. Праздникова // Вестник сыктывкарского университета. – 2007. – Сер. 1. – Вып. 7. – С. 41-66.
5. *Tarski A.* Decision Method for Elementary Algebra und Geometry. Los Angeles: Berkeley. 1951. 301 p.
6. *Ловягин, Ю.Н.* Консервативное расширение арифметики А. Тарского в преподавании интегрального исчисления и его приложений [Текст] / Ю.Н. Ловягин // Обучение фрактальной геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей А.Н. Колмогорова: Материалы международной научно-практической конференции. – Кострома. – 2011. – С. 376-384.
7. *Ловягин, Ю.Н.* Исчисление бесконечно малых Г.В. Лейбница в современном изложении, или Введение в нестандартный анализ А. Робинсона [Текст] / Ю.Н. Ловягин. – Сыктывкар: Сыктывкарский лесной институт. – 2001. – 167 с.
8. *Robinson A.* Non-Standard-Analysis. Amsterdam: Nord-Hjlland publ. comp. 1966. 293 p.
9. *Девис, М.* Прикладной нестандартный анализ [Текст] / М. Девис. – М.: Мир, 1980. – 236 с.

Вопрос обоснования числа π и определения тригонометрических функций

К.Н. Лунгу

1^0. **Постановка задачи.** В математике имеются два важных числа, с которыми связаны целые математические направления. Речь идет о числах π и е. С числом π связаны: измерение длины окружности, площади круга, объёма шара и многих других геометрических, физических и пр. величин; определения тригонометрических функций числового аргумента, рядов Фурье, описания колебательных процессов и многое другое. С числом е связаны: описания реальных процессов и явлений, в основе которых лежат показательные и логарифмические закономерности; необходимость и возможность моделирования, решения и исследования задач, составляющих огромное практическое поле – решение физических, биологических, технических задач, использующих как монотонные (теория надежности, теория развития популяций, теория распада и др.), так и колебательные процессы (электротехника, электроника, элементарные частицы и пр.); число е – средство выражения теоретических объектов – целые функции и существенные особенности, разложения по экспонентам, теория вероятностей и т.д.

Оба эти числа имеют сложную цифровую (трансцендентную) структуру. Если обоснованность числа e (сумма ряда или предел последовательности) не вызывает сомнений, то про π это можно сказать с большой натяжкой. В самом деле, число π определяется в восьмом классе: во-первых, в геометрии, например, так: половина длины окружности единичного радиуса обозначается греческой буквой π.

Основанием для этого служат следующие теоремы.

Т 1. *Периметр P_n правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, выражается формулой* $P_n = n \cdot 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$.

Т 2. *Отношение длин двух окружностей равно отношению их радиусов.*

Таким образом π – элемент геометрической линии и остаётся таким навсегда (для всех число π – отношение длины окружности к его диаметру). Правда, позже все те, которые в вузе к концу курса математики проходят ряды Фурье и разлагают функцию $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}$ узнают, что отсюда можно получить известный ряд Лейбница $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$, из которого можно определить число π с любой точностью.

Есть более быстро сходящийся ряд $\frac{\pi^2}{12} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, но после него нужно ещё извлекать корень. Можно ли это считать научным обоснованием числа π. Да, в науке не важно, когда и где обоснование происходит (в эквивалентных утверждениях порядок их расположения не важен). А методическим? Нет, поскольку в методике нельзя сказать Б, пока не сказал А. Нельзя определить π при помощи длины окружности, не зная, существует ли эта длина или нет.

Государственным образовательным стандартом определены 5 содержательных линий школьного курса математики: числовая, функциональная, геометрическая, тождественных преобразований, уравнений и неравенств. Парадоксально, что числовая, важная теоретическая линия, использует почти геометрическую аксиому: число π – это отношение длины окружности к её диаметру.

В геометрии принято ещё одно определение: величину развернутого угла принимаем в качестве π (π рад$=180^\circ$), не интересуясь его числовым значением, отмечая лишь, что $\pi \approx 3{,}14$.

Между тем основа для определения π заложена Т1, только нужно доказать, что числовая последовательность $P_n = n \cdot 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ при R=1, монотонно возрастает и сверху ограничена, не используя интерпретацию, связанную с периметрами многоугольников. За почти 2300 лет определение Архимеда сохраняется, а тогда и определения тригонометрических функций, рядов Фурье и пр. остаются не обоснованными.

2^0. История вопроса изложена в учебниках геометрии для средней школы, в справочниках по математике (см. также [1]), поэтому на ней останавливаться не будем. Похоже, что "древние" использовали идею числовой линии, а не геометрической – они не измеряли длины сторон полигонов, а вычисляли синусы и косинусы делением угла пополам: $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, а затем P_n.

Об этом свидетельствуют конкретные результаты. Например, в 1593 Виета нашёл точное равенство, которое в современных обозначениях выражается бесконечным произведением: $\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdot \cos\frac{\pi}{32} \cdot ...$

Позже Дж. Валлис в 1655 получил тоже впечатлительное разложение

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8...}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9...}$$

Ясно, что эти формулы не могут быть положены в основе определения числа π.

3^0. В данном сообщении автор делится опытом устранения пробела обоснования числа π в курсе математики, читаемом студентам факультета "Прикладная математика", а также в семинаре по математике для студентов радиотехнических, энергетических и механических специальностей МГОУ. Делается это в укрупнённой теме "Числовые последовательности и ряды", которая включена в модуль "Введение в анализ", имеющий нетрадиционную структуру, основанную на коллективной идеи укрупнения дидактических единиц (группа авторов МИЭМ – М.С. Агранович, К.Н. Лунгу, М.И. Нараленков, А.М. Олевский, Э.А. Применко 1972 г.), интегрирующий характер (В.М. Монахов [2]), фундирующую направленность (В.В. Афанасьев, Е.И. Смирнов, В.Д. Шадриков [3]), наглядную методологию (Е.И. Смирнов [4]) и концепцию систематизации знаний и приёмов учебной деятельности (К.Н. Лунгу [5]).

Краткое содержание модуля "Введение в анализ". Лекции

Тема 1. Понятие множества. Числовая прямая.. Переменные величины. Функция, график, способы задания и их свойства. Основные элементарные функции и их графики.

Тема 2. Монотонные функции. Ограниченные функции. Выпуклые функции. Разделённая разность и её геометрическая интерпретация. Связь между выпуклостью функции и монотонностью разделённой разности.

Тема 3. Числовые последовательности и способы их задания. Рекуррентные последовательности. Преобразование последовательностей. Проблема суммирования. Разностные уравнения.

Тема 4. Монотонные и ограниченные последовательности. Предел числовой последовательности. Вычисление пределов. Доказательство пределов. Основная теорема существования предела последовательности.

Тема 5. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Бесконечно большие и бесконечно малые. Непрерывность. Непрерывность выпуклой функции. Точки разрыва и их классификация. Признаки существования предела функции. Предел монотонной и ограниченной функции.

Тема 6. Сходимость числовых рядов. Признаки сравнения. Признаки сходимости (Даламбера, Коши). Гармонический ряд. Ряд Дирихле. Число е $= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Предел последовательности $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Показательная функция $e^{\mathrm{x}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Натуральные логарифмы.

Тема 7. Тригонометрические функции углового аргумента и их свойства: монотонность, чётность, периодичность, ограниченность. Связи тригонометрических функций одного аргумента. Формулы двойного, тройного и половинного угла. Тригонометрические преобразования.

Тема 8. Сответствие между точками единичной окружности и точками числовой прямой (вращение единичной окружности вдоль прямой). Тригонометрические функции углового аргумента и их графики. Выпуклость тангенса и вогнутость синуса в промежутке $[0^\circ;\ 90^\circ)$. Монотонность разделённой разности синуса и тангенса. Последовательности $\pi_n = n\cdot\sin\frac{180^0}{n}$ и $t_n = n\cdot tg\frac{180^0}{n}$. Монотонность и ограниченность последовательностей π_n и t_n. Число π.

Тема 9. Тригонометрические функции числового аргумента. Периодичность и ограниченность синуса и косинуса. Вертикальные асимптоты тангенса и котангенса. Обратные тригонометрические функции. Горизонтальные асимптоты арктангенса и арккотангенса.

Тема 10. Первый замечательный предел. Показательная и логарифмическая функции. Второй замечательный предел. Следствия замечательных пределов. Основные элементарные функции. Класс элементарных функций (многочлены, рациональные функции, иррациональные и трансцендентные функции, тригонометрические полиномы). Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Примечание. Распределение времени для изучения тем зависит от программы и возможностей преподавателя.

Практическая часть

Большинство задач, относящихся к теме “Числовые последовательности и ряды” представлены в работах [5] и [6]. По данному вопросу нужны специальные задачи, часть которых приведена в [1], а о других пойдёт речь ниже.

4^0. В основу обучения мы ставим принцип понимания, который обеспечивается принципами наглядности (доступности), фундирования и системности, а учебная деятельность должна происходить в двухполушарном режиме и сопровождаться речью. Выделим основные элементы, связанные с разбираемым вопросом.

1. **Определение 1** (геометрическое, рис. 1 и 2). Функция у $= f(x)$ называется строго выпуклой (вогнутой) на отрезке $[a,\ b]$, если для любых точек M_1 и M_2 её графика Γ хорда M_1M_2 расположена над (под) соответствующей дугой $\cup M_1M_2$ (за исключением точек M_1 и M_2).

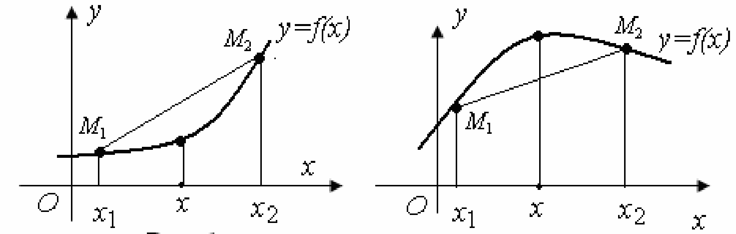


Рис. 1 Рис. 2

Примечание. Здесь будем говорить только о строго выпуклых (вогнутых) функциях, а слово “строго” опускается.

Определение 2 (аналитическое). Функция у $= f(\mathrm{x})$ называется выпуклой, если для любых значений x_1 и x_2 из $[a,\ b]$ имеет место неравенство

$$f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1) > f(x), \quad (\mathrm{x}_1 < x < \mathrm{x}_2), \tag{1}$$

и вогнутой, если имеет место противоположное неравенство

$$f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1) < f(x) \quad (\mathrm{x}_1 < x < \mathrm{x}_2). \tag{2}$$

($\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ – угловой коэффициент хорды M_1M_2 – достаточно наглядный объект). Очевидно, что неравенства (1) и (2) позволяют ограничиться здесь рассмотрением только выпуклых функций.

Теорема 1. *Для того, чтобы монотонная функция выла выпуклой на отрезке $[a,\ b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любых значений* x_1 *и* x_2 *из $[a,\ b]$ выполнялось неравенство* $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

2. Свойства выпуклых функций. Эти свойства составляют часть практических задач, которые разбираются на практических занятиях или составляют задачи для самостоятельной работы студентов.

1) Если у $= f(x)$ является выпуклой возрастающей функцией, то у $= -f(x)$ вогнутая убывающая функция, и наоборот.

2) Если у $= f(x)$ выпуклая возрастающая на отрезке $[a,\, b]$ функция, то у $=f(a+b-x)$ (отражение графика в срединный перпендикуляр к данному отрезку) является выпуклой убывающей функцией на том же отрезке.

3) Произведение выпуклой функции на положительную постоянную есть выпуклая функция.

4) Сумма двух и более выпуклых функций является выпуклой.

5) Если у $= f(x)$ выпуклая, то у $= f(x) \pm f(x_0)$ также выпуклая.

6) Если $g(u)$ выпуклая возрастающая функция, а $u = f(x)$ выпуклая, то суперпозиция $g(f(x))$ также выпуклая функция.

7) Выпуклая в интервале $(a,\, b)$ (конечном или бесконечном) функция не может достигать своего наибольшего значения внутри этого интервала.

Определение выпуклости функции равносильно следующим условиям:

8) неравенство $f(px_1 + qx_2) < p \cdot f(x_1) + q \cdot f(x_2)$ имеет место, каковы бы ни были положительные числа p и q, такие, что $p + q$=1;

9) имеет место неравенство $f(x) < \frac{x_2-x}{x_2-x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot f(x_2)$.

10) Для выпуклой функции имеет место неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) < \frac{1}{n} \cdot (f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)) \,.$$

11) Если $f(x)$ ограниченная выпуклая функция, то она непрерывна.

Перечисленные свойства сопровождаются конкретными примерами, а основные функции (трёхчлен, дробно-линейная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические) исследуются на выпуклость-

3. Далее предполагается, что если a, x_1, x , x_2 и b пять точек прямой, то они расположены в таком порядке: $a < x_1 < x < x_2 < b$, если иное не оговорено. Крайние точки могут быть концами отрезка $[a,\, b]$, на котором определена рассматриваемая функция у $= f(x)$.

Неравенство (1) равносильно неравенству:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}(x_1 < x < x_2).$$

4. Для функции у $= f(x)$, x $\in[a,\, b]$ строим ассоциированную с ней разделённую разность $F(x, t) = \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$, где t – фиксированная точка отрезка $[a,\, b]$. $F(x, t)$ выражает угловой коэффициент к отрезка TM, где $T(t,\, f(t))$ и $M(x,\, f(x))$ – точки графика Г (ср. с M_1M_2, рис. 1 и 2). Понимание изменения величины $F(x, t)$ в зависимости от того, как изменяются величины t и x, обеспечено её наглядностью и процедурой фундирования.

Теорема 2. *Функция* у $= f(x)$ *является выпуклой (вогнутой) на отрезке* $[a,\, b]$ *в том и только том случае, если* $F(x, t)$ *является возрастающей (убывающей) функцией переменной* x *при* x $\neq t$.

Теорема доказывается на лекции и сопровождается примерами, а при доказательстве используются некоторые свойства из 1)-11).

5. Исходим из школьных определений синуса, косинуса, тангенса, котангенса угла треугольника, измеряемого в градусах, а также центрального угла при помощи единичной окружности. Например, согласно одному из определений, функция синус – это соответствие между точками Pα окружности с угловой координатой (в градусах) α и их ординатами v (систему координат Ouv не следует смешивать с системой Oxy, где x и y играют совершенно другие роли; на это автором указано, например, в [7]). Синус осуществляет очень специфическую проекцию дуги (конца дуги) APα в число единичного отрезка OB (рис. 3). Подчеркнём, что синус преобразует угловую меру (!) дуги Pα в число v (эта сторона менее наглядна, но понимаема: синус сильно сжимает дугу (градусы) в отрезок (число), что на рисунке не воспринимается адекватно, поскольку глаза видят длину, а не градусную меру (!). Это, по-видимому, понимал Архимед и говорил о несоизмеримости длин окружности и диаметра, но у него не было аппарата для объяснения себе и другим механизма этого преобразования.

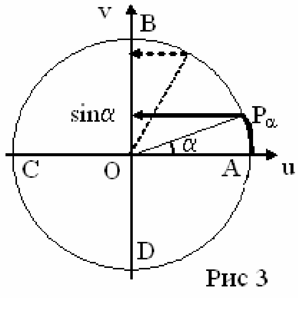


Рис 3

6. Используем основные свойства тригонометрических функций и связи между ними. Применение теорем 1 и 2.

1) Пусть α_1 и α_2 – градусные меры двух углов, и $0^\circ \le \alpha_1 < \alpha_2 \le 60^\circ$. Известно:
$\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$ и $\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 = 2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} < 2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$.

Положим $\alpha_1 = 180^\circ\cdot t_1$, $\alpha_2 = 180^\circ\cdot t_2$, где t_1, t_2 – действительные числа, причём $0 \le t_1 < t_2 \le \frac{1}{3}$. Тогда: $\sin 180^\circ\cdot t_1 + \sin 180^\circ\cdot t_2 < 2\sin\frac{180^\circ\cdot(t_1+t_2)}{2}$.

2) Таким образом, функция $\sin 180^\circ t$ является возрастающей вогнутой функцией переменной t на отрезке $[0,1/3]$. Согласно теореме 2, функция $S(t,0) = \frac{\sin 180^\circ t}{t}$ является убывающей на полуинтервале $(0,1/3]$. Положим $t = t_n = \frac{1}{n}$, $n = 3,4,5,...$ Получаем возрастающую последовательность чисел $\pi_n = n\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$.

3) Для тех же значений α_1 и α_2 имеем

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2} = \frac{2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{\frac{1}{2}(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos(\alpha_1-\alpha_2))} =$$

$$= 2\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\frac{1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos(\alpha_1-\alpha_2)} > 2\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}.$$

Положим $\alpha_1 = 180^\circ\cdot t_1$, $\alpha_2 = 180^\circ\cdot t_2$. Из теоремы 2 следует, что функция $T(t,0) = \frac{tg180^\circ t}{t}$ является вогнутой возрастающей функцией в полуинтервале $(0,1/3]$, а последовательность чисел $T_n = n\cdot tg\frac{180^\circ}{n}$ убывает.

Имеем: $\pi_n = n\cdot\sin\frac{180^\circ}{n} < n\cdot tg\frac{180^\circ}{n} < 3\operatorname{tg}60^\circ = 3\sqrt{3}$. Следовательно, возрастающая и сверху ограниченная последовательность $\pi_n = n\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$ имеет предел, который обозначим через π: $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$. Если $n \ge 3$, то $n\cdot\sin\frac{180^0}{n} < \pi < 3\sqrt{3}$. Так как $P_n = 2Rn\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 2\pi\text{R}$.

Одновременно с определением π обосновано существование длины окружности и формула её вычисления.

7. Для определения тригонометрических функций числового аргумента следует установить соответствие между точками единичной окружности и точками числовой прямой Ox.

Это можно делать вращением этой окружности вдоль оси Ox, а след на прямой точки окружности и есть требуемое соответствие. Требуемую однозначность можно обеспечить, учитывая количество оборотов окружности и фиксируя их номер.

5^0. Подведём методологический итог. Функция $\sin\alpha$ угла α=$180^\circ t$, измеряемого в градусах, т.е. функция $\sin 180^\circ t$ числового аргумента t отображает градусную меру дуги α единичной окружности в прямолинейный отрезок длины πt. Поскольку изменение центрального угла указывает на вращательное движение, а синус превращает это движение в прямолинейное вдоль Ov, то в этом соответствии и проявляется явление трансцендентности, обнаруживаемое выпуклыми функции, которым в математике уделяется неоправданно мало внимания. Более того выпуклость является самым противоречивым определением математики. Но именно выпуклые функции выражают единство целого, рационального, иррационального и трансцендентного, а также вращательного и поступательного в природе, а математика моделирует и осуществляет это при помощи абстракций в знаково-символической форме, но достаточно наглядно. Синус – это то, что переводит 180° в π, а окружность – средство для этого.

Очевидным образом, из доказанного следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ =1. Из выпуклости (вогнутости) $a^{kx}-1, \log_a(1+kx)$ (в зависимости от a), из теорем 1 и 2 очевидным образом следует существование известных замечательных пределов и их следствий.

Библиографический список

1. *Лунгу, К.Н.* Число π. Длина окружности. Тригонометрические функции. Первый замечательный предел [Текст] / К.Н. Лунгу // Новые технологии. – 2007. – № 5. – С. 47-54.
2. *Монахов, В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса [Текст] / В.М. Монахов. – Волгоград: Перемена, 1995.
3. *Афанасьев, В.В.* Подготовка учителя математики: Инновационные подходы [Текст]: учеб. пособие / В.В. Афанасьев, Ю.П. Поваренков, Е.И. Смирнов, В.Д. Шадриков / под ред. В.Д. Шадрикова. – М.: Гардарики, 2002.
4. *Смирнов, Е.И.* Технология наглядно-модельного обучения математике [Текст] / Е.И. Смирнов. – Ярославль, 1998.
5. *Лунгу, К.Н.* Систематизация приемов учебной деятельности студентов при обучении математике [Текст]: монография / К.Н. Лунгу. – М., URSS, 2006. – 420 с.
6. *Лунгу, К.Н.* Числовые последовательности [Текст] / К.Н. Лунгу // Математика в школе. – 10. – 2006. – С. 36-42.
7. *Лунгу, К.Н.* Задачи по математике [Текст] / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – М.: Физматлит, 2008.

К вопросу об аддитивной структуре кольца Чжоу многообразия модулей стабильных пучков ранга два с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ на поверхности Хирцебруха F_1практикум

М.Е. Сорокина

§0. Введение

Пусть $S := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ – поверхность Хирцебруха F_1, получаемая раздутием $\phi:\ S \to \mathbb{P}^2$ проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в точке x_0, H – обильный класс дивизоров на ней. Всякая такая поляризация H имеет вид $H = a\tau + bh$, $a, b \in \mathbb{N}$, где $\mathcal{O}_S(1,0) := \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, $\mathcal{O}_S(0,1) := p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, $p:\ S \to \mathbb{P}^1$ – стандартная проекция, $c_1(\mathcal{O}_S(1,0)) =: \tau$, $c_1(\mathcal{O}_S(0,1)) =: h$. Пучок E на S будем называть H-стабильным, если он стабилен по Гизекеру относительно H. В настоящей работе рассматриваются когерентные пучки без кручения ранга 2 с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = 3$. Стабильность почти всех таких пучков на S не зависит от выбора поляризации, кроме пучков E, включающихся в точные тройки $0 \to \mathcal{O}_S(-1,2) \to E \to \mathcal{O}_S(1,-2) \to 0$, которые стабильны относительно поляризаций $H = a\tau + bh$, где $a < b$, и не стабильны относительно поляризаций H, где $a > b$, и пучков E, включающихся в точные тройки $0 \to \mathcal{O}_S(1,-2) \to E \to \mathcal{O}_S(-1,2) \to 0$, которые, наоборот, стабильны относительно поляризаций, где $a > b$, и не стабильны относительно второго типа поляризаций [1].

Зафиксируем поляризации $H_- := \tau + 2h$ и $H_+ := 2\tau + h$. Обозначим $M_- := M_S^{H_-}(2;0,3)$ (соответственно, $M_+ := M_S^{H_+}(2;0,3)$) многообразие модулей когерентных пучков без кручения ранга 2 на S с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, стабильных относительно поляризации H_- (соответственно, H_+). В работе [4] построено многообразие X, бирационально изоморфное M_-; при этом морфизм $X \dashrightarrow M_-$ не регулярен в точках объединения гладкого дивизора и гладкой семимерной схемы на X. В работе [5] получено семейство $\mathbf{E}$ пучков на S, такое, что пучки семейства $\mathbf{E}$ H_--стабильны для точек X, не содержащихся в объединении двух гладких семимерных подсхем Φ и Υ на X. Там же сформулирована гипотеза о точном виде бирациональной перестройки многообразия X в многообразие M_-. В настоящей работе мы, пользуясь конструкциями работ [4] и [5], вычисляем ранги групп Чжоу многообразия X и схем Φ и Υ, что в дальнейшем позволит вычислить ранги групп Чжоу многообразий M_- и M_+.

§1. Основные конструкции

В этом параграфе мы приводим необходимые определения и построения работ [4] и [5]. Идея конструкции многообразия X, бирационально изоморфного M_-, подсказана тем фактом, что почти все H_--стабильные пучки E ранга 2 на S с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ включаются в точные тройки вида

$$0 \to \mathcal{O}_S(0,-1) \to E \to \mathcal{I}_{Z_3}(0,1) \to 0,$$

где $\mathcal{I}_{Z_3}$ – пучок идеалов нульмерной схемы Z_3 длины 3 на S, не содержащейся в одном слое f проекции $p:\ S \to \mathbb{P}^1$. При этом $h^0(E(0,1)) = 1$ в общей точке $[E] \in M_-$ [4, Предложение 1].

Итак, пусть $H_0 := Hilb^3 S$ – схема Гильберта нульмерных подсхем длины 3 на поверхности S, Γ – универсальный цикл в $S \times H_0$. Относительный пучок $Ext^1_{p_0}(\mathcal{I}_{\Gamma, S\times H_0} \otimes \mathcal{O}_S(0,1) \boxtimes \mathcal{O}_{H_0}, \mathcal{O}_S(0,-1) \boxtimes \mathcal{O}_{H_0})$, где $p_0:\ S \times H_0 \to H_0$ – проекция на второй сомножитель, локально свободен ранга 4. Многообразие X_0 определим как проективный спектр данного пучка, т.е.

$$X_0 := \mathbb{P}(Ext^1_{p_0}(\mathcal{I}_{\Gamma, S\times H_0} \otimes \mathcal{O}_S(0,1) \boxtimes \mathcal{O}_{H_0}, \mathcal{O}_S(0,-1) \boxtimes \mathcal{O}_{H_0})).$$

Над $S \times X_0$ существует универсальное расширение

$$0 \to \mathcal{O}_S(0,-1) \boxtimes \mathcal{O}_{X_0} \to \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \to \mathcal{I}_{(\mathrm{id}_S \times g_0)^{-1}\Gamma, S\times X_0} \otimes \mathcal{O}_S(0,1) \boxtimes L_0^{-1} \to 0, \tag{1}$$

в котором $g_0:\ X_0 \to H_0$ – проекция, L_0 – антитавтологическое линейное подрасслоение в $g_0^* Ext^1_{p_0}(\mathcal{I}_{\Gamma, S\times H_0} \otimes \mathcal{O}_S(0,1) \boxtimes \mathcal{O}_{H_0}, \mathcal{O}_S(0,-1) \boxtimes \mathcal{O}_{H_0})$.

Морфизм $X_0 \dashrightarrow M_-$ не является регулярным согласно [4, §1, Замечание], а именно, он нерегулярен вдоль объединения двух семимерных приведенных подсхем Φ_0 и $\mathbf{Y}$ в X_0, где Φ_0 как множество есть

$$\Phi_0 := \{[E] \in X_0 \mid SingE \ni x \in Z_3 \text{ и } Z_3 \setminus x \subset f, \text{ где } f \text{ – слой проекции } p:\ S \to \mathbb{P}^1\}$$

(здесь $[E] = [\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 | S \times \{y\}]$, $y \in X_0$), а $\mathbf{Y}$ определяется следующим образом. Пусть Y – приведенная подсхема в H_0, точки которой соответствуют подсхемам Z_3 на S, содержащимся в одном слое проекции $p:\ S \to \mathbb{P}^1$. Схема Y гладкая и имеет коразмерность 2 в H_0. Тогда $\mathbf{Y} = g_0^{-1} Y$. Заметим, что схема Φ_0 особа вдоль $\Phi_0 \cap \mathbf{Y}$ и коразмерность этого пересечения в X_0 равна 3. Также рассмотрим приведенный дивизор

$$\Psi_0 := \{[E] \in X_0 \mid h^0(E(0,1)) \geq 2\}$$

в X_0, содержащий подсхему $\mathbf{Y}$. Имеет место изоморфизм

$$X_0 \setminus \Psi_0 \simeq M_- \setminus \{[E] \mid h^0(E(0,1) = 2)\}.$$

Выполним раздутие $\sigma_Y : H \to H_0$ многообразия Гильберта H_0 вдоль Y, и пусть $X := X_0 \times_{H_0} H$. Соответствующий морфизм $\sigma : X \to X_0$ разрешает особенности схемы Φ_0, а также дивизора Ψ_0. Обозначим $\Phi := \sigma^{-1}(\Phi_0)_{prop}$ и $\Psi := \sigma^{-1}(\Psi_0)_{prop}$. В [4, Предложение 2] доказано, что

– дивизор Ψ на X изоморфен расслоенному произведению $V \times_H X$, где V – гладкий дивизор в H, точки которого соответствуют схемам $Z_3 \subset S$, содержащимся в объединении двух слоев проекции $p : S \to \mathbb{P}^1$;

– схема Φ изоморфна расслоению со слоем $\mathbb{P}^2$ над V.

Рассмотрим на $S \times X$ пучок $\boldsymbol{\mathcal{E}} := (\mathrm{id}_S \times \sigma)^* \boldsymbol{\mathcal{E}}_0$, где $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0$ – универсальное расширение (1). Согласно [4, Теорема], пучок $\boldsymbol{\mathcal{E}}|S \times \{y\}$ является H_--стабильным для всех $y \in X \setminus (D \cup \Phi)$, где D – исключительный дивизор раздутия $\sigma : X \to X_0$. В [5] с помощью элементарной перестройки пучка $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ вдоль дивизора получено семейство $\mathbf{E}$ пучков на S, H_--стабильных в точках $X \setminus ((D \cap \Psi) \cup \Phi)$. Пересечение $D \cap \Psi$ обозначим Υ. Это гладкий дивизор на D. Точки схемы Υ соответствуют классам изоморфных расширений вида $0 \to \mathcal{I}_x \to E \to \mathcal{I}_{Z_2} \to 0$, где $x \cup Z_2$ содержится в одном слое f проекции $p : S \to \mathbb{P}^1$. В [5] мы формулируем гипотезу о том, что многообразие M_- получается из X с помощью двух раздутий – сначала вдоль Υ, а затем вдоль собственного прообраза Φ – и трех стягиваний вдоль гладких дивизоров.

§2. Ранги групп кольца Чжоу многообразия X и его подсхем

Пусть $A(M)$ – кольцо Чжоу многообразия M. Ранги групп кольца Чжоу многообразия H_0 вычисляются по формуле [3, (1b)]. Для нахождения рангов групп $A^i(X_0)$ классов циклов многообразия X_0 используется формула [2, Example 8.3.4]. Ранги $A^i(Y)$ получаются из определения Y как $\mathbb{P}(S^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)))$. Схемы $\mathbf{Y}$ и D рассматриваем как $P(Ext^1_{p_0}(\mathcal{I}_{\Gamma, S\times H_0} \otimes \mathcal{O}_S(0,1) \boxtimes \mathcal{O}_{H_0}, \mathcal{O}_S(0,-1) \boxtimes \mathcal{O}_{H_0}|Y))$ и $P(N^\vee_{\mathbf{Y}/X_0})$. Ранги $A^i(X)$ вычисляются по формуле [2, Proposition 6.7(e)].

Для нахождения $A^i(\Phi)$ и $A^i(\Psi)$ в соответствии с описанием схем Φ и Ψ нам потребуются ранги групп кольца Чжоу схемы V. В [4] доказано, что данная схема есть раздутие прямого произведения $R \times S$ вдоль подсхемы T, где $R := \{Z_2 \in Hilb^2 S \mid Z_2$ содержится как схема в некотором слое проекции $p : S \to \mathbb{P}^1\}$ – приведенная подсхема в $Hilb^2 S$, $T := \{(Z_2, x) \in \Sigma \mid x \in Z_2\}$. Схема T изоморфна $S \times_{\mathbb{P}^1} S$, а R есть $\mathbb{P}(S^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)))$. Это описание позволяет вычислить ранги групп $A^i(V)$ по формулам [2, Proposition 6.7(e)], [2, Example 8.3.4] и [2, Example 8.3.7]. Естественная проекция $\Psi \to V$ есть расслоение со слоем $\mathbb{P}^3$, что дает нам ранги $A^i(\Psi)$. Ранги $A^i(\Phi)$ получаются из описания схемы Φ как расслоения над V со слоем $\mathbb{P}^2$.

Для вычисления рангов $A^i(\Upsilon)$ рассмотрим в $R \times S$ приведенную подсхему $\Sigma := \{(Z_2, x) \in R \times S \mid x \in f, Z_2 \subset f$ для некоторого слоя f проекции $p : S \to \mathbb{P}^1\}$. Нетрудно видеть, что Σ изоморфна $R \times_{\mathbb{P}^1} S$, что позволяет вычислить ранги групп ее классов циклов. Схема Υ по построению есть расслоение со слоем $\mathbb{P}^3$ над Σ.

Результаты вычислений приведены в следующей таблице.

	A^0	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	A^8	A^9
H_0	1	3	9	14	9	3	1			
X_0	1	4	13	27	35	35	27	13	4	1
Y	1	2	2	2	1					
$\mathbf{Y}$	1	3	5	7	7	5	3	1		
D	1	4	8	12	14	12	8	4	1	
X	1	5	16	32	42	42	32	16	5	1
V	1	5	10	10	5	1				
Ψ	1	6	16	26	30	26	16	6	1	
Φ	1	6	16	25	25	16	6	1		
Υ	1	4	8	11	11	8	4	1		

Библиографический список

1. *Ellingsrud, G., Göttsche, L.* Variation of moduli spaces and Donaldson invariants under change of polarization. J. Reine Angew. Math., 1995. V. 467. P. 1-49.
2. *Fulton, W.* Intersection Theory / W. Fulton. Berlin: Springer, 1998. 470 p.
3. *Göttsche, L.* The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smoothe projective surface. Math. Ann., 1990. V. 286. P. 193-207.
4. *Тихомиров, А.С.* О конструкции многообразия модулей стабильных пучков ранга два с классами Чженя на поверхности Хирцебруха (Часть I) [Текст] / А.С. Тихомиров, М.Е. Сорокина // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – Т. 3. – № 4. – С. 7-14.
5. *Тихомиров, А.С.* О конструкции многообразия модулей стабильных пучков ранга два с классами Чженя на поверхности Хирцебруха (Часть II) [Текст] / А.С. Тихомиров, М.Е. Сорокина // Ярославский педагогический вестник. – 2012. – Т.3. – № 1. – С. 42-48.

Бариоперационный метод решения нелинейных эволюционных уравнений

А.В. Бородин

Следуя работам [1, 2], рассмотрим бесконечномерную гиперболическую бариалгебру (ГБА) $\langle A\rangle_1^\infty$ (A – спектральная B^+-алгебра над полем комплексных чисел C), элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности вида

$$\langle x\rangle = \langle \ldots, x_{-2}, x_{-1}; x_0; x_1, x_2, \ldots\rangle = \left\langle \ldots, x^{-2}/x^{-1}, x^{-1}/x^0; x^0; x^1/x^0, x^2/x^1, \ldots\right\rangle, \tag{1}$$

при условии, что

$$\|\langle x\rangle\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\| x^k \right\| < +\infty, \tag{2}$$

где $x_k \in A$ – компонента k-го порядка,

$$x^k = \mu^k(\langle x\rangle) = \prod_{j=0}^{k} x_j$$

– барикомпонента (или момент) k-го порядка бариэлемента (БЭЛ) $\langle x\rangle$. При этом

$$\langle y\rangle = \langle x\rangle \quad \Leftrightarrow \quad y^k = x^k \quad (\forall\, k \in Z).$$

Подробное описание ГБА $\langle A\rangle_1^\infty$ дано в [2]. Приведём лишь определения основных четырёх алгебраических операций над элементами (1) этой алгебры:

$$\begin{gathered}
1)\ \mu^k(\lambda\langle x\rangle) = \lambda\,\mu^k(\langle x\rangle)\ \ (\textit{умножение на скаляр } \lambda \in A);\\
2)\ \mu^k(\langle x\rangle + \langle y\rangle) = \mu^k(\langle x\rangle)\ + \mu^k(\langle y\rangle)\ (\textit{сложение} \quad \langle x\rangle + \langle y\rangle);\\
3)\ \mu^k(\langle x\rangle\ \langle y\rangle)\ \ = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \mu^\alpha(\langle x\rangle)\ \mu^{k-\alpha}(\langle y\rangle)\ (\textit{умножение } \langle x\rangle\ \langle y\rangle);\\
4)\ \mu^k(\langle x\rangle^*) = \left(\mu^{-k}(\langle x\rangle)\right)^*\ (\textit{инволюция } \langle x\rangle^*);
\end{gathered}$$

а также определения спектральной алгебры и B^+-алгебры.

Алгебра A над полем C называется *спектральной*, если в ней существует *спектральный базис*

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_m, \tag{3}$$

т.е. базис, элементы которого обладают *спектральными свойствами*:

$$e_k e_{k'} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq k',\\ e_k, & \text{если} \quad k = k', \end{cases}$$

$$\sum\nolimits_{k=1}^{m} e_k = e,$$

где $e \in A$ – единичный элемент. Если $a \in A$ и

$$a = \sum\nolimits_{k=1}^{m} a^k e_k \quad (a^k \in C),$$

то

$$a\ e_k = a^k e_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

т.е. элементы спектрального базиса (3) являются собственными для всех $a \in A$, а спектральные координаты a^k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ – собственными значениями для элемента $a \in A$. Поэтому, если комплекснозначная функция f определена на спектре $\sigma(a) = \{a^k\}_{k=1}^m$ элемента $a \in A$, то

$$f(a) = \sum\nolimits_{k=1}^{m} f(a^k)\ e_k.$$

К числу спектральных алгебр относятся конечномерные гиперболические $\langle A\rangle_h^{n\pm}$ и эллиптические $\langle A\rangle_e^{n\pm}$ алгебры, построенные и исследованные в работах [3, 2].

Банахова алгебра A называется B^+-*алгеброй*, если для каждого элемента $a \in A$

$$a\ a^* = \|a\|^2\, e.$$

Заметим, что B^+-алгебра является B^*-алгеброй [4], но обратное, вообще говоря, неверно. Примерами B^+-алгебр являются множества комплексных чисел $C \cong \langle R\rangle_e^{1+}$, кватернионов $H \cong \langle C\rangle_e^{1+}$, октав $Ca \cong \langle H\rangle_e^{1+}$ (последние две являются некоммутативными B^+-алгебрами [5, 3]).

Относительно бесконечномерной гиперболической бариалгебры $\langle A\rangle_1^\infty$ справедливы следующие утверждения [2].

Теорема 1. *Если A – конечномерная спектральная алгебра над полем C, то для каждого БЭЛ $\langle x\rangle \in \langle A\rangle_1^\infty$ имеет место равенство*

$$\langle x\rangle\ \langle\xi\rangle = \lambda\left(\langle x\rangle\right)\ \langle\xi\rangle\,, \tag{4}$$

где

$$\langle\xi\rangle = \langle\xi\rangle_\theta = \left\langle \ldots, e^{-i\theta}, \ldots, e^{-i\theta}; e\,; e^{i\theta}, \ldots, e^{i\theta}, \ldots \right\rangle, \tag{5}$$

$$\lambda_\theta\left(\langle x\rangle\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,\theta} x^k \tag{6}$$

$$\left(\theta = \sum\nolimits_{k=1}^{m} \theta^k e_k \in Re(A) = \{a \in A:\ \ a = \sum\nolimits_{k=1}^{m} a^k e_k,\ \ a^k \in R\}\right)$$

и, следовательно, (5) – *собственные обобщённые бариэлементы, а* (6) – *соответствующие обобщённые собственные значения БЭЛ $\langle x\rangle \in \langle A\rangle_1^\infty$.*

БЭЛ (4) имеет приставку "*обобщённый*", поскольку он не содержится в $\langle A\rangle_1^\infty$ и его следует понимать как линейный непрерывный функционал на $\langle A\rangle_1^\infty$, т.е. как элемент банахова пространства $\langle A\rangle_\infty^\infty$ ограниченных последовательностей с нормой [2, 6]

$$\|\langle x\rangle\|_\infty = \sup_{k\in Z} \left\| x^k \right\| < +\infty.$$

При этом и равенство (4) надо понимать в обобщённом смысле (в смысле теории распределений [4, 6]), а именно,

$$\langle x\rangle\ \langle\xi\rangle = \lambda\left(\langle x\rangle\right)\ \langle\xi\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle\langle a\rangle\,,\ \langle x\rangle\ \langle\xi\rangle\rangle = \langle\langle a\rangle\,,\ \lambda\left(\langle x\rangle\right)\ \langle\xi\rangle\rangle \quad (\forall\ \langle a\rangle \in \langle A\rangle_1^\infty)\,,$$

где внешние треугольные скобки "$\langle \ldots\,,\ \ldots\rangle$" обозначают обобщённое барискалярное произведение с присущими ему стандартными свойствами [2] (или, что то же самое, действие функционала справа от запятой на элемент слева от неё [4]).

Дальше, выражение (6) как функция переменной $\theta \in A$ со значениями в A $(\lambda_\theta(\langle x\rangle) \in A)$ называется *спектральной барифункцией* (СБФ) бариэлемента $\langle x\rangle \in \langle A\rangle_1^\infty$.

Теорема 2. *Если A – конечномерная спектральная алгебра над полем C,* тоСБФ (6) *БЭЛ $\langle x\rangle \in \langle A\rangle_1^\infty$ является над A суммой ряда Фурье с коэффициентами Фурье, равными моментам $x^k = \mu^k\left(\langle x\rangle\right)$ $(k \in Z)$ БЭЛ $\langle x\rangle \in \langle A\rangle_1^\infty$.*

Теорема 3. *Если A – конечномерная спектральная алгебра над полем C, то $\lambda_\theta\left(\langle x\rangle\right)$, как функция переменной $\langle x\rangle \in \langle A\rangle_1^\infty$, есть мультипликативный функционал на банаховой бариалгебре $\langle A\rangle_1^\infty$, и, следовательно, является гомоморфизмом алгебр $\langle A\rangle_1^\infty$ и A.*

Теорема 4. *Если A – конечномерная спектральная алгебра над полем C, то ГБА $\langle A\rangle_1^\infty$ с обобщённым скалярным произведением*

$$\langle\langle x\rangle\,,\ \langle y\rangle\rangle = \sum\nolimits_{k=-\infty}^{+\infty} x^k (y^k)^*$$

изометрически изоморфна алгебре Λ_1^∞ СБФ (6) *со скалярным произведением*

$$\left(\lambda_\theta\left(\langle x\rangle\right),\ \lambda_\theta\left(\langle y\rangle\right)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \lambda_\theta\left(\langle x\rangle\right)\ \left(\lambda_\theta\left(\langle y\rangle\right)\right)^* d\theta.$$

Теорема 5 (спектральная). *Для каждого БЭЛ $\langle x\rangle \in \langle A\rangle_1^\infty$ имеет место спектральное бари-разложение*

$$\langle x\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \lambda_\theta\left((x)\right)\ \langle\xi\rangle_\theta\, d\theta. \tag{7}$$

Доказательство этих и других утверждений даны в работе [2]. Мы же, следуя схеме изложенной в [1, 2], применим теоремы 1-5 к анализу и решению ненормированного уравнения КдФ [7]

$$\partial_t^1 u(\theta,\,t) - 6\,a\,u(\theta,\,t)\,\partial_\theta^1 u(\theta,\,t) + b\,\partial_\theta^3 u(\theta,\,t) = 0 \qquad (\,a,\ b \in C) \tag{8}$$

и схожих с ним нелинейных дифференциальных уравнений (см. также [8]). Будем искать 2π-периодические (по $\theta \in Re(A)$) решения ДУ (8) в виде СБФ (6) некоторого БЭЛ (1), (2), т.е. в виде

$$u\left(\theta,\,t\right) = \lambda_\theta\left(\langle x(t)\rangle\right) = \sum\nolimits_{k=-\infty}^{+\infty} x^k\left(t\right)\ e^{-i\,k\,\theta}, \tag{9}$$

где

$$\langle x\left(t\right)\rangle = \left\langle \ldots, x^{-2}\left(t\right)/x^{-1}\left(t\right), x^{-1}\left(t\right)/x^{0}\left(t\right)\,; x^{0}\left(t\right)\,; x^{1}\left(t\right)/x^{0}\left(t\right), x^{2}\left(t\right)/x^{1}\left(t\right), \ldots \right\rangle \tag{10}$$

– неизвестный БЭЛ, подлежащий определению.

Дальше для простоты будем считать, что $A = C$, и, следовательно, $\langle A\rangle\,{}_1^{\infty} = \langle C\rangle\,{}_1^{\infty}$, $\theta \in R$. Согласно теоремам 1-5, моменты $x^k = x^k\,(t)$ БЭЛ (10) удовлетворяют бесконечномерной автономной динамической системе (ДС)

$$i\,\partial_t^1 x^k\,(t) = 3\,a\,k\sum\nolimits_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x^{\alpha}\,(t)\;x^{k-\alpha}\,(t) + b\,k^3 x^k\,(t) \quad (k \in Z)\,, \tag{11}$$

или

$$i\,\partial_t^1 x^k\,(t) = k\,(b\,k^2 + 6\,a\,x^0)\;x^k\,(t)\;+3\,a\,k\sum_{\alpha\in Z\,\setminus\{0,k\}} x^{\alpha}\,(t)\;x^{k-\alpha}\,(t) \quad (k \in Z)\,, \tag{11$'$}$$

причём, при $k = 0$ имеем

$$i\,\partial_t^1 x^0\,(\,t) = 0, \quad \text{т.е.}\;\; x^0\,(t) = c^0,$$

где $c^0 \in C$ – произвольная постоянная.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Для того чтобы СБФ* (9) *была решением КдФ (8), необходимо и достаточно, чтобы БЭЛ* (10) *был решением ДС* (11) (*или* (11$'$)).

Найдём часть решений этой системы при условии, что

$$x^k = x^k\,(t) = 0 \;\; (\forall k \in Z\,:\,k < 0)\,. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что условие (12) согласуется с ДС (11$'$) и упрощает её до вида

$$i\,\partial_t^1 x^k\,(t) = k\;\left(b\,k^2 + 6\,a\,c^0\right)\;x^k\,(t) + 3\,a\,k\sum\nolimits_{\alpha=1}^{k-1} x^{\alpha}\,(t)\;x^{k-\alpha}\,(t) \quad (k \geq 2)\,, \tag{13}$$

причём, при $k = 1$ имеем

$$i\,\partial_t^1 x^1\,(\,t) = \left(b + 6\,a\,c^0\right)\;x^1\,(t)\,, \quad \text{т.е.}\;\; x^1\,(\,t) = c^1\exp\left(-i\;\left(\,b + 6\,a\,c^0\right)\;t\right)\,,$$

где $c^0,\; c^1 \in C$ – произвольные постоянные. Следовательно, ДС (13) имеет рекуррентную форму, позволяющую каждое следующее решение $x^k\,(\,t)\;\;(k \geq 2)$ этой системы выражать через предыдущие$x^{\alpha}\,(\,t)\;\;(\alpha = 0,\,1,\,\ldots,k-1)$ по формуле общего решения линейного ДУ первого порядка:

$$\begin{aligned} &x^k\,(\,t) = \\ &= \exp\left(-i\;\left(\,b\,k^3\;+6\,a\,k\;c^0\right)\;t\right)\;\left(c^k + 3\,a\,k\;\int_0^t\left(\sum\nolimits_{\alpha=1}^{k-1} x^{\alpha}\,(\tau)\;x^{k-\alpha}\,(\tau)\right)\;\exp\left(\;i\;\left(\,b\,k^3\;+6\,a\,k\;c^0\right)\;\tau\right)\;\;d\tau\right)\end{aligned} \tag{14}$$

где $c^k = x^k\,(0)\;\in C$ – произвольная постоянная (начальное значение). Остаётся подставить (14) в (9), чтобы при условии (12) получить комплекснозначные решения уравнения (8).

Однако формула общего решения (14) ДС (13) достаточно сложна для своего анализа. Поэтому рассмотрим частные решения этой системы, а именно, решения вида

$$x^k\,(t) = C^k\;\left(x^1(t)\right)^k = C^k\,(c^1)^k\exp\left(-i\,k\;\left(\,b + 6\,a\,c^0\right)\;t\right) \qquad (\forall k \in Z\,:\,k \geq 2)\,, \tag{15}$$

где $C^k \in C$ – постоянные, подлежащие нахождению. Подставляя (15) в (13), найдём, что при $b \neq 0$

$$C^k = \frac{3\,a}{b\,(1-k^2)}\sum\nolimits_{\alpha=1}^{k-1} C^{\alpha}C^{k-\alpha} \quad (k = 2,\;3,\;4,\;\ldots)\,. \tag{16}$$

Отсюда последовательно получаем

$$\begin{aligned} &C^2 = -\tfrac{a}{b}(C^1)^2,\;\; C^3 = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{a}{b}\right)^2(C^1)^2,\;\; C^4 = -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a}{b}\right)^3(C^1)^2,\;\; C^5 = \tfrac{5}{16}\left(\tfrac{a}{b}\right)^4(C^1)^2,\\ &C^6 = -\tfrac{87}{280}\left(\tfrac{a}{b}\right)^5(C^1)^2,\;\;\ldots\;\;,\;\; C^k = (-1)^{k-1}D^k\;\left(\tfrac{a}{b}\right)^{k-1}(C^1)^2,\;\;\ldots\end{aligned} \tag{17}$$

где $C^1 \in C$ – любое допустимое число, $D^k\;(k \in N)$ – числа, определяемые рекур-рентным образом, согласно соотношению (16) (первые шесть из них выписаны в (17) в явном виде). Нетрудно показать, что

$$\left|D^k\right| \leq 3/(k+1) \quad (k \in N).$$

Отсюда

$$\left|C^k\right| \leq \frac{3}{k+1}\;\left|\frac{a}{b}\right|^{k-1}\;\left|C^1\right|^2 \tag{18}$$

Следует заметить, что оценку (18) можно улучшить. Действительно, из (16) на основании (18) сначала получаем

$$\left|C^k\right| \leq \frac{27}{(k^2-1)}\left|\frac{a}{b}\right|^{k+1}\left|C^1\right|^4\sum\nolimits_{\alpha=1}^{k-1}\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{k-\alpha+1} \quad (k = 2,\;3,\;4,\;\ldots)\,,$$

а затем, согласно неравенству Коши-Буняковского [6] и равенству $\sum_{\alpha=1}^{\infty}\alpha^{-2}=\pi^2/6$,

$$\left|C^k\right| \le \frac{27}{(k^2-1)}\left|\frac{a}{b}\right|^{k+1}\left|C^1\right|^4\sum_{\alpha=1}^{k-1}\frac{1}{(\alpha+1)^2} \le 27\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\left|C^1\right|^4\left|\frac{a}{b}\right|^{k+1}\frac{1}{k^2-1} \quad (\,k=2,\ 3,\ 4,\ \ldots) \tag{19}$$

Тем самым, формула (15) даёт более простое по форме, чем (14), решение ДС (13). Подставляя (12) и (15) в (9), получим решение уравнения КдФ (8) в форме неполного ряда Фурье по переменной $\theta\in R$:

$$u\,(\theta,\,t)=c^0+c^1\exp\left(-i\,(b+6\,a\,c^0)\;t\right)\;e^{-\,i\,\theta}+\;\sum\nolimits_{k=2}^{+\infty}C^k\,(c^1)^k\exp\left(-i\,k(b+6\,a\,c^0)\,t\right)\;e^{-\,i\,k\,\theta}, \tag{20}$$

где $C^k\in\ C(k=2,\ 3,\ \ldots)$ определены по формулам (17) (с оценкой (19)), c^0 – любая, а $c^1\in C$ – допустимая, постоянные.

За счёт выбора параметра c^1 в (20) (либо ввиду (19) параметров a и b в (8)) можно добиться равномерной сходимости функционального ряда (20) и всех его производных, и, тем самым получить классическое решение ДУ КдВ (8).

Понятно, что решение (20) является комплекснозначным. Это является следствием условия (12), приведшего к неполному ряду Фурье. Условие же (12) продиктовано соответствующей простотой решения бесконечномерной ДС (11). Но даже в этом частном случае вещественная $u_r(\theta,t)=Re\,(u(\theta,t))$ и мнимая $u_i(\theta,t)=Im\,(u(\theta,t))$ части решения (20) являются при $a=a_r+ia_i,\ b=b_r+ib_i$ вещественными 2π-периодическими (по $\theta\in R$) решениями непростой нелинейной системы ДУ

$$\begin{aligned}&\partial_t^1u_r-6\,a_r\,u_r\partial_\theta^1u_r+b_r\,\partial_\theta^3u_r+6a_iu_i\,\partial_\theta^1u_r+6a_i\partial_\theta^1u_i\,u_r=-6\,a_ru_i\partial_\theta^1u_i+b_i\partial_\theta^3u_i,\\&\partial_t^1u_i+6\,a_i\,u_i\partial_\theta^1u_i+b_r\,\partial_\theta^3u_i-6a_ru_r\,\partial_\theta^1u_i-6\,a_r\partial_\theta^1u_r\,u_i=6a_iu_r\partial_\theta^1u_r-b_i\partial_\theta^3u_r,\end{aligned} \tag{21}$$

где первое (относительно $u_i(\theta,t)$) и второе (относительно $u_r(\theta,t)$) – неоднородные уравнения КдФ. Отметим, что, когда $a,\ b\in R$ (т.е. $a_i=0,\ \ b_i=0$), система (21) имеет вид

$$\begin{aligned}&\partial_t^1u_r-6\,a_r\,u_r\,\partial_\theta^1u_r+b_r\,\partial_\theta^3u_r=-6\,a_ru_i\partial_\theta^1u_i,\\&\partial_t^1u_i+b_r\,\partial_\theta^3u_i-6a_ru_r\,\partial_\theta^1u_i-6\,a_r\partial_\theta^1u_r\,u_i=0,\end{aligned} \tag{21$'$}$$

Понятно, что возможны и другие комбинации вещественной и мнимой частей комплекс-ных параметров $a=a_r+ia_i$ и $b=b_r+ib_i$ ДУ (8).

Далее, решение общей ДС (11) можно (как и в её частном случае (13)) искать в форме (15), точнее, в форме

$$x^k\,(t)=C^k\,(c^1)^k\exp\left(-i\,k\,C_0\,t\right)\qquad(k\in Z\,)\,, \tag{22}$$

где $C^k\in C$ – постоянные (кроме $C^0=c^0$), подлежащие нахождению; $c^1\in C$ и $C_0\in C$ – допустимые условием (2) постоянные. Подставляя (22) в (11) или (11$'$), получаем для определения постоянных C^k $(k\in Z\backslash\{0\})$ бесконечную *квадратичную алгебраическую систему уравнений типа свёртки* :

$$C^k=\frac{3\,a}{C_0-b\,k^2}\sum_{\alpha\in Z}C^\alpha C^{k-\alpha}\qquad(k\in Z\backslash\{0\}) \tag{23}$$

или

$$C^k=\frac{3\,a}{C_0-6\,a\,c^0-b\,k^2}\sum_{\alpha\in Z\,\backslash\{0,k\}}C^\alpha C^{k-\alpha}\qquad(k\in Z\backslash\{0\})\,. \tag{23$'$}$$

Зная решение системы (23), можно по формулам (22) и (9) получить часть 2π-периодических (по θ) решений исходного ДУ (8). В связи с этим отметим, что в работе [9], в силу применяемого там метода, решаются только линейные алгебраические системы уравнений типа свёртки.

В нашем же случае важно заметить, что задачу поиска решения $u\,(\theta,\,t)$ ДУ (8), можно обратить, а именно, зная 2π-периодическое (по θ) решение $u\,(\theta,\,t)$ ДУ (8), можно по формуле (7), где $\lambda_\theta\,(\langle x(t)\rangle)=u\,(\theta,\,t)$, получить решение (10) ДС (11) и, тем самым, свести решение бесконечномерной автономной квадратичной динамической системы (11) к решению нелинейного эволюционного уравнения третьего порядка (8).

Понятно, что таким методом можно получить решения достаточно широкого класса линейных и нелинейных конечных и бесконечных алгебраических систем уравнений типа свёртки. В частности, возвращаясь к системе (23), можно заключить, что для её решения достаточно уметь решать нелинейное ДУ второго порядка

$$b\,y''(\theta)+3a\,y^2(\theta)-C_0\,y(\theta)+c^0=0. \tag{24}$$

Уравнение (24) (при $a=b=1$) рассмотрено, например, в работе [7] в связи с частными (типа бегущих волн) решениями уравнения КдФ. При условии, что

$$y_1\ge y_2\ge y_3,\;\;y_2=0$$

– действительные корни кубического уравнения

$$y^3 - \frac{1}{2}C_0 y^2 + C_1 y = y(y-y_1)(y-y_3) = 0$$

$(C_0 = 2(y_1+y_3),\ C_1 = y_1 y_3 \in R$ – любые обеспечивающие это условие постоянные), приведено $T-$периодическое решение ДУ (24) $(a = b = 1)$:

$$y(\theta) = y_1 cn^2\left(\sqrt{(y_1-y_3)/2}\,(\theta-\theta_0),\ \kappa\right), \tag{25}$$

$$T = 2\sqrt{2/(y_1-y_3)}\,K(\kappa) = \sqrt{8/(y_1-y_3)}\ \int_0^1 \left((1-\xi^2)(1-\kappa^2\xi^2)\right)^{-1/2} d\xi,$$

где $cn\,(z,\ \kappa)$ – эллиптическая функция Якоби с модулем

$$\kappa = \sqrt{y_1/(y_1-y_3)}.$$

Пусть $C_0,\ C_1 \in R$ (или $y_1 > 0,\ y_3 \le 0$) такие, что период функции (25) $T = 2\pi$, т.е.

$$K(\kappa) = \pi\sqrt{y_1/2}\,\kappa^{-1}. \tag{26}$$

Сравнивая график функции $K(y_3) = K(\kappa(y_3))$ (см. [10]) с графиком функции $\varphi(y_3) = \pi\sqrt{y_1/2}\,\kappa^{-1}(y_3)$ (при любом фиксированном $y_1 > 0$), нетрудно убедиться, что уравнение (26) имеет единственное решение

$$y_3 = \psi(y_1) \le 0\ (\forall\, y_1 > 0), \tag{27}$$

при котором функция (25) является $(2\pi)-$периодическим решением ДУ (24) $(a = b = 1)$.

Следовательно, решение системы (23) определяется по формуле (7):

$$C^k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(\theta)\, e^{ik\theta}\, d\theta \quad (k \in Z), \tag{28}$$

где ввиду (25) и (27)

$$y(\theta) = y_1 cn^2\left(\sqrt{(y_1-\psi(y_1))/2}\,(\theta-\theta_0),\ \kappa(y_1)\right) \quad \left(\kappa(y_1) = \sqrt{y_1/(y_1-\psi(y_1))}\right). \tag{29}$$

Подставляя (29) в (22)

$$x^k\,(t) = (c^1)^k\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(\theta)\, e^{ik\theta}\, d\theta\right)\exp\left(-i\,k\,C_0\,t\right) \quad (k \in Z\,), \tag{30}$$

а затем полученный результат в (9), находим 2π-периодическое решение ДУ (8):

$$u\,(\theta,\,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (c^1)^k\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(\theta)\, e^{ik\theta}\, d\theta\right)\ e^{-i\,k\,(\theta+C_0\,t)}, \tag{31}$$

где $c^1 \in C$ и $C_0 \in R$ – допустимые постоянные. При этом знак "скорости"

$$C_0 = 2(y_1 + \psi(y_1))$$

зависит от $y_1 > 0$ и функции (27). Таким образом, величина $y_1 > 0$ является важнейшим "скрытым" параметром 2π-периодического решения (31). Явный же параметр $c^1 \in C$ определяет многообразие 2π-периодических решений ДУ (8), получаемых описанным бариоперационным методом.

Остаётся заметить, что функция (29) – аналитическая, поэтому проблем с выполнением условия (2) для (30) и сходимостью ряда (31) (вместе со всеми его частными производными из ДУ (8)) при условии, что $|\,c^1| = 1$ не существует. Случаи, когда $|\,c^1| \ne 1$, требуют дополнительного исследования.

В заключение работы отметим, что изложенный метод нахождения периодического решения уравнения КдФ (8) применим к достаточно широкому классу линейных и нелинейных эволюционных уравнений. Причём, в случае более общей конечномерной спектральной алгебры A (над полем C) – к системам таких уравнений. Но об этом в последующей работе.

Библиографический список

1. *Бородин, А.В.* Бариоперационный метод решения нелинейного эволюционного уравнения [Текст] / А.В. Бородин – Сб. тр. МНК ММТТ-23. – Т.1. – Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т – 2010. – С. 61-63.

2. *Бородин, А.В.* Многомерный барианализ и иго приложения [Текст] / А.В. Бородин. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. – Ч. I. – 432 с.
3. *Бородин, А.В.* Одномерный барилинейный анализ и изоспектральные уравнения Шредингера [Текст] / А.В. Бородин. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 1997. – 177 с.
4. *Рудин, У.* Функциональный анализ [Текст] / У. Рудин. – М.: Мир, 1975. – 443 с.
5. *Кантор, И.Л.* Гиперкомплексные числа [Текст] / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. – М.: Наука, 1973. – 144 с.
6. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
7. *Кудряшов, Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений [Текст] / Н.А. Кудряшов. – М.-И.: Институт компьютерных исследований, 2004. – 360 с.
8. *Бородин, А.В.* Барианализ точных решений нелинейных эволюционных уравнений [Текст] / А.В. Бородин. – Ярославский педагогический вестник. – 2010. – № 3 (52). – С. 72-78.
9. *Гахов, Ф.Д.* Уравнения типа свёртки [Текст] / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
10. *Янке, Е.* Специальные функции [Текст] / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

О sонормальных пространствах

Аль Баяти Джелал Хатем

1. Введение и предварительные сведения

Пусть (X, T) – топологическое пространство. Для подмножества $S \subset X$ замыкание, внутренность и дополнение множества S по отношению к (X, T) будем обозначать через $\boldsymbol{cl\ S}$, $\boldsymbol{int\ S}$ и $\boldsymbol{S^C}$ соответственно.

Ранее было введено понятие просто-открытого множества, вызвавшее определенный интерес. Согласно Neubrunnova[5], подмножество S пространства (X, T) называется *просто-открытым* (далее будем называть такие множества sо-множествами), если $S = O \cup N$, где O открыто а N нигде не плотно (=nwd, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\ N) = \emptyset$). Ganster, Reilly и Vamanmurthy [6] показали, что подмножество S пространства (X, T) является sо-множеством тогда и только тогда, когда оно есть пересечение полуоткрытого и полузамкнутого множеств пространства (X, T). В [7] и [8] sо-множества названы полу-локально замкнутыми и NDB-множествами, соответственно. В.Л. Клюшин, Аль Баяти Джелал [1] показали некоторые свойства sо-множество. дополнение sо-множество будем обозначать через sс-множество.

Nour [9], назвал подмножество S пространства (X, T) *регулярно-открытым* (соотв., *регулярно-замкнутым*), если $S = \mathrm{int}(\mathrm{cl}\ S)$ (соотв., $S = \mathrm{cl}(\mathrm{int}\ S)$). Подмножество S пространства (X, T) называется *полурегулярным,* если существует такое регулярное открытое множество U, что $U \subset S \subset \mathrm{cl}\ U$.

Полуоткрытые множества были введены Левиным [3]. Напомним, что S называется *полуоткрытым*, если $S \subset cl\,(intS)$. *Полузамкнутое* множество есть дополнение к полуоткрытому.

Согласно S. Maheshwari и R. Prasad [10] Пространство X называется *s-нормальным* если любые два дизъюнктных замкнутых множества содержатся в дизъюнктных полуоткрытых.

Подмножество S пространства (X, T) называется *локально замкнутым,* если $S = O \cap F$, где O есть открытое, а F – замкнутое подмножества пространства (X, T).

Отображение называется *просто-непрерывным* [5] (соотв., *слабо просто-непрерывным* [2]), если прообраз открытого множества (соотв., sо-множества) есть sо-множество.

2. sо-нормальные пространства

Определение 2.1. Пространство называется *sо-нормальным*, если любые два дизъюнктных замкнутых множества содержатся в дизъюнктных sо-множествах.

Теорема 2.2. *Всякое полуоткрытое подмножество пространства (XT) есть sо-множество.*

Доказательство. Пусть A – полуоткрытое подмножество пространства (XT). Как показано в [5], существует такое открытое множество O, что $O \subset A \subset \mathrm{cl}\ O$. Но $A = O \cup (A \setminus O)$. Пусть $B = A \setminus O$. Тогда $B \subset ((\mathrm{cl}\ O) \setminus O)$. Теперь нам остается только доказать, что B есть nwd в X. Имеем $= \mathrm{int}\ \mathrm{cl}\ (\mathrm{cl}O - O) = \mathrm{int}\ \mathrm{cl}\ (\mathrm{cl}O \cap O^c) \subset \mathrm{int}\ (\mathrm{cl}O \cap \mathrm{cl}O^c) = \mathrm{int}\ (\mathrm{cl}O \cap O^c) = \mathrm{int}\ \mathrm{cl}O \cap \mathrm{int}\ O^c \subset \mathrm{cl}O \cap (\mathrm{cl}O)^c = \phi$. Итак, $(\mathrm{cl}\ O) \setminus O$ есть nwd, но $B \subset ((\mathrm{cl}\ O) \setminus O)$, следовательно, B есть nwd. Теорема доказана.

С помощью теоремы 2.2 можно доказать, что всякое всякое s-нормальное пространство есть sо-нормальное пространство.

Легко доказать, что, всякое нормальное пространство и всякое s-нормальное пространство есть sо-нормальное пространство. Но, как показывает следующий пример, обратное, вообще говоря, неверно,

Пример 2.3. Рассмотрим топологию $\tau = \{\emptyset, \{b,d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, X\}$ на множестве $X = \{a,b,c,d\}$. Заметим, что $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, X\}$ есть семейство замкнутых множеств, а $\{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, X\}$ – семейство sооткрытых множеств. Тогда X является sо-нормальным, но не нормально, так как пара замкнутых множеств $\{a\}$ и $\{c\}$ не имеют непересекающихся открытых окрестностей.

Теорема 2.4. *Для любого топологического пространства X следующие условия равносильны:*

a *X есть so-нормальное пространство;*

b *для всякой пары открытых множеств U и V такой, что U∪V=X, существует пара sc-множеств A и B таких, что A⊂U, B⊂V и A∪B = X;*

c *для всякого замкнутого множества F и любого открытого множества G, содержащего F, существует so-множество U такое, что F⊂U⊂G.*

Доказательство. (a) ⇒ (b). Пусть U и V – такие пары открытых множеств so-нормального пространства X, что X=U∪V. Тогда X-U,X-V – непересекающиеся замкнутые множества. Так как X есть so-нормальное пространство, то существуют непересекающиеся so-множества U_1 и V_1 такие, что X-U⊂U_1 и X-V⊂V_1. Пусть A = X-U_1, B = X - V_1 .Тогда A и B есть sc множества такие, что A⊂U, B⊂V и A∪B=X .

(b) ⇒(c). Пусть F – замкнутое множество и G открытое множество, содержащее F. Так как XF G есть открытые множества такие, что XF∪G = X, то из (b) следует существование таких sc-множеств W_1 и W_2, что W_1 ⊂XF и W_2 ⊂G и W_1∪W_2 = X. Итак F⊂XW_1 XG ⊂XW_2 и (XW_1)∩(XW_2) = ∅. Пусть U = XW_1 и V = XW_2. Тогда U и V – такая пара непересекающихся sc-множеств , что F⊂U⊂XV⊂G. Так как XV есть sc-множества, то F⊂U⊂G.

(c) ⇒ (a). Пусть F_1 и F_2 – дизъюнктные замкнутые множеств в X. Пусть G = XF_2, тогда F_1∩G=∅. Но F_1 ⊂G, где G есть открытое множество. Тогда согласно (c), существует so-множество U⊂X такое, что F_1 ⊂ U ⊂G. Отсюда следует, что F_2 ⊂XU = V, то V so-множество и U∩V = ∅. Следовательно F_1 и F_2 отделимы so-открытыми U и V. Следовательно, X есть so-нормальное пространство.

Теорема 2.5. *Всякое регулярное открытое подпространство so-нормального пространства sonормально.*

Доказательство. Пусть Y – регулярное открытое подпространство so-нормального пространства X. Пусть A и B – дизъюнктные замкнутые подмножества пространства Y. Так как Y регулярно открытое, то AB – замкнутые подмножества пространства X. Так как X so-нормально, то существуют дизъюнктные so-множества U и V в X такие, что A ⊂U и B⊂V. Но U∩Y и V∩Y so-множества в Y такие, что A⊂U∩Y и B⊂V∩Y. Следовательно Y so-нормально.

Прообраз so-нормального пространства при просто-непрерывном отображении, вообще говоря, не является so-нормальным, как показано в следующем примере.

Пример 2.6. Пусть X – несчетное множество такое, что (X,T_d) есть дискретное пространство и (X,T_i) является антидискретным пространством. Теперь, пусть f:(X,T_d) →(X, T_i), определенное формулой f(x) = x, ∀ x ∈ X. Тогда f есть просто-непрерывное отображение и прообраз (X,T_i) не является so-нормальным.

Теорема 2.7. *Пусть (XT) и (YF) – два нормальных пространства. Отображение f:(XT)→(YF) есть просто-непрерывное отображение тогда и только тогда, когда для всякого замкнутого подмножества B пространства Y, F^{-1}(B) замкнуто в пространстве X.*

Доказательство. Необходимость. Если f:(XT)→(YF) просто-непрерывное отображение, то для любого открытого O подмножество пространство Y, f^{-1}(O) есть so-множество в X. Если B – любое замкнутое подмножество Y, то B^c открыто. Таким образом, $f^{-1}(B^c)$ есть so-множество, но $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$, следовательно, f^{-1}(B) есть sc-множество.

Достаточность. Если для всех замкнутого подмножества Y, f^{-1}(B) есть sc-множество в X, и если O является открытым подмножеством пространства Y, то O^c замкнуто. Также $f^{-1}(O^c)$ =($f^{-1}(O))^c$ sc-множество. Таким образом, f^{-1}(O) есть so-множество.

3. Слабые so-нормальные пространства

Определение 3.1. Пространство называется *сильно so-нормальным*, если для каждого замкнутого множества A и для каждого регулярно замкнутого множества B таких, что A∩B=∅, существуют дизъюнктные so-множества U и V такие, что A⊂U и B⊂V.

Всякое so-нормальное пространство есть слабые so-нормальное пространство но, как показывают приведенные ниже примеры, обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 3.2. Рассмотрим топологию τ = { ∅,{a},{a,b},{a,c},X} на множестве X = {a,Ь,c}. Тогда X является слабым so-нормальным пространством, но, оно не so-нормально, так как два дизъюнктные замкнутые множеств {B} и {c} не содержатся в дизъюнктных so-множествах.

Теорема 3.3. *Для любого топологическое пространство X следующие условия равносильны*

d *X есть so-нормальное;*

a *для всякой пары открытых множеств U и V одно из которых открытое, а другое регулярно открыто, таких что U∪V = X, существует sc-множеств G и H такие, что G⊂U, H⊂V и G∪H = X;*

e *для любого замкнутого множества A и любого регулярно открытого множества B, содержащего A, существует sc-множество V такое, что A⊂V⊂B.*

Доказательство: (a)⇒(b) Пусть U-открытое множество, а V-регулярно открытое подмножество сильно so-нормального пространства X такое, что U∪V = X. Тогда (XU) и замкнутое множество (XV) регулярно замкнутого множества и (XU)∩(XV) = ϕ. Но X сильно so-нормальное пространство, поэтому существуют непересекающиеся открытые множества U_1, V_1 такие, что X-U⊂U_1 и X-V⊂V_1. Пусть G = X-U_1 и H=XV_1. Тогда G и H – sc-множества такие, что G⊂U, H⊂V и G∪H=X.

(b) ⇒ (c) и (c) ⇒ (a) очевидны.

Теорема 3.4. *Если f:X→Y есть слабо просто-непрерывный гомоморфизм топологического пространство X на слабое so-нормальное топологическое пространство Y, то X есть слабое sонормальное пространство.*

Доказательство. Пусть A – замкнутое подмножество пространства X и B регулярное открытое множество, содержащее A. Тогда f(A) замкнуто и f(B) есть регулярно открытое подмножество Y такое, что f(A)⊂f(B). Но Y слабо so-нормально. Поэтому существует sc-множество U в X такое, что f(A)⊂U ⊂f(B), так что по теореме 3.3. имеем A⊂f(U) ⊂B и X есть слабо so-нормальное пространство.

Библиографический список

1. *Клюшин, В.Л.* О просто-открытых множествах [Текст] / В.Л. Клюшин, Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейн // Вестник РУДН. – Серия Математика. Информатика. Физика.– 3(2011). – 34-38.
2. *Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейн* Некоторые результаты о просто-непрерывных функциях [Текст] / Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейн // Вестник РУДН. – Серия Математика. Информатика. Физика. – 1,(2012). – 9-13.
3. *Levine N.L.* 1963. Semi-open sets and semi-continuity in topological space. Amer. math. Monthly, 70, 36-41.
4. *Crossley S.G. and Hildebrand S.K.* Semiclosure. Texas J. Sci., 22(1970), 99-112.
5. *Neubrunnova* 1975 On transfinite sequences of certain types of functions. Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Com. Math., 30, 121-126.
6. *Ganster M., Reilly I.L. and Vamanmurthy M.K.* 1992. Remarks on Locally closed sets. Mathematical Pannonica, 3(2): 107-113.
7. *Sundaram P. and Balachandran K.* Semi generalized Locally closed sets in topological spaces. Preprint.
8. *Dub K. K., Chae G.L and Pan war O.S.* 1984. Some properties of "S-connectedness between sets"and "Set s-connected mappings". Indian J. Pure Appl. Math. 15(4): 343-354.
9. *Nour T.M.* 1995. Totally semi continuous functions. Indian J. Pure Appl. Math. 26(7): 675-678.
10. *Maheshwari S. and Prasad R.* On s-normal spaces. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S.), 22(68) (1978), 27-29.

Об уравнениях Льенара на окружности

В.Ш. Ройтенберг

1. Уравнения Льенара на окружности. Будем рассматривать уравнения Льенара

$$\ell : \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

с ω-периодическими C^r-функциями ($r \geq 0$) $f(x)$ и $g(x)$, заданными на R. Мы можем считать, что уравнение задано на окружности $S^1 = R/\omega Z$. Обозначим Λ_ω^r – множество таких уравнений. Пусть $C^r(S^1)$– банахово пространство ω-периодических C^r-функций с нормой $\|\varphi\|_{C^r} := \max\limits_{x\in R} \max\{|\varphi(x)|, |\varphi'(x)|, ..., \left|\varphi^{(r)}(x)\right|\}$. Отождествив уравнение ℓ с упорядоченной парой функций (f, g), мы отождествим Λ_ω^r с банаховым пространством $C^r(S^1) \times C^r(S^1)$ с нормой $\|\ell\| = \max\{\, \|f\|_{C^r}, \|g\|_{C^r}\}$.

Будем обозначать

$$a := a(\ell) := \int_0^\omega f(x)dx, \quad b := b(\ell) := \int_0^\omega g(x)dx.$$

Уравнение ℓ определяет на касательном расслоении $TS^1 = S^1 \times R$ автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x), \end{cases}$$

которую будем также обозначать ℓ.

2. Бесконечно удаленные замкнутые траектории. Обозначим $\bar{R} := R \cup \{-\infty, +\infty\}$ – двухточечную компактификацию R. Превратим $\bar{R}$ в одномерное C^∞-многообразие с краем, взяв в качестве карт (R, h_1), $h_1(x) := x$, $((0, +\infty], h_2)$, $h_2(x) := 1/x$ при $x \in (0, +\infty)$ и $h_2(+\infty) := 0$, $([-\infty, 0), h_3)$, $h_3(x) := 1/x$ при $x \in (-\infty, 0)$ и $h_3(-\infty) := 0$. Конечно, $\bar{R}$ диффеоморфно отрезку числовой прямой. Мы хотим “продолжить” систему ℓ на $S^1 \times \bar{R}$.

В областях $S^1 \times (0, +\infty)$ и $S^1 \times (-\infty, 0)$ системы уравнений

$$\ell_+ : \begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = -f(x) - g(x)/y, \end{cases} \quad \text{и } \ell_- : \begin{cases} \dot{x} = -1, \\ \dot{y} = f(x) + g(x)/y \end{cases}$$

имеют те же (ориентированные) траектории, что и система уравнений ℓ. В координатах x и $z = 1/y$ системы уравнений ℓ_+ и ℓ_- примут, соответственно, вид

$$\bar{\ell}_+ : \begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{z} = f(x)z^2 + g(x)z^3. \end{cases} \quad \text{и } \bar{\ell}_-: \begin{cases} \dot{x} = -1, \\ \dot{z} = -f(x)z^2 - g(x)z^3. \end{cases}$$

Но системы $\bar{\ell}_+$ и $\bar{\ell}_-$ определены и при $z = 0$, то есть, соответственно, на $S^1 \times (0, +\infty]$ и $S^1 \times [-\infty, 0)$. Кривые $\Gamma_+ := S^1 \times \{+\infty\}$ и $\Gamma_- := S^1 \times \{-\infty\}$, задаваемые в координатах x, z уравнением $z = 0$, являются траекториями, соответственно, системы $\bar{\ell}_+$ и $\bar{\ell}_-$. Будем их называть *бесконечно удаленными замкнутыми траекториями* уравнения Льенара.

Теорема 1. *Если $a = a(\ell) < 0$ ($a = a(\ell) > 0$), то Γ_+ и Γ_- – устойчивые (неустойчивые) замкнутые траектории.*

Доказательство. От систем уравнений $\bar{\ell}_+$ и $\bar{\ell}_-$ перейдем к уравнению

$$\frac{dz}{dx} = f(x)z^2 + g(x)z^3, \tag{1}$$

где, соответственно, $z \geq 0$ и $z \leq 0$. Обозначим $z(u, x)$ его решение, удовлетворяющее начальному условию $z(u, 0) = u$. При достаточно малом $\delta > 0$ и $|u| < \delta$ оно определено для $x \in [-\omega, \omega]$ и аналитически зависит от u[1].

Так как $z(0, x) = 0$, то

$$z(u, x) = z_1(x)u + z_2(x)u^2 + z_3(x)u^3 + ...,$$

где $z_1(x)$ – решение уравнения $z_1'(x) = 0$, удовлетворяющее начальному условию $z_1(0) = 1$, и потому $z_1(x) \equiv 1$, $z_2(x)$ – решение уравнения $z_2'(x) = f(x)z_1^2(x)$, удовлетворяющее начальному условию $z_2(0) = 0$, и потому $z_2(x) = \int\limits_0^x f(s)ds$, $z_3(x)$ – решение уравнения

$$z_3'(x) = 2f(x)z_1(x)z_2(x) + g(x)z_1^3(x),$$

удовлетворяющее начальному условию $z_2(0) = 0$, и потому

$$z_2(x) = 2\int\limits_0^x f(s)\int\limits_0^s f(t)dtds + \int\limits_0^x g(s)ds.$$

Функция $P_+(u) := z(u, \omega)$ ($P_+(u) := z(u, -\omega)$) является функцией последования по траекториям системы $\bar{\ell}_+$ ($\bar{\ell}_-$) на трансверсали $x = 0,\ u \in [0, \delta)$ ($x = 0,\ u \in (-\delta, 0]$)) . Ее можно представить в виде

$$P_+(u) = u + au^2 + z_2(\omega)u^3 + ...(P_-(u) = u - au^2 + z_2(-\omega)u^3 + ...). \tag{2}$$

Отсюда следует, что если $a = a(\ell) < 0$ ($a = a(\ell) > 0$), то Γ_+ и Γ_- – устойчивые (неустойчивые) замкнутые траектории.

Будем говорить, что бесконечно удаленная замкнутая траектория $\Gamma_+(\Gamma_-)$ уравнения $\ell \in \Lambda_\omega^r$ является *грубой*, если для любой окрестности V траектории $\Gamma_+(\Gamma_-)$ в $S^1 \times \bar{R}$ существует такая окрестность U уравнения ℓ, что для любого уравнения $\tilde{\ell} \in U$ найдутся окрестности $V_k \subset V$ $(k = 1, 2)$ траектории $\Gamma_+(\Gamma_-)$ и гомеоморфизм $h : V_1 \to V_2$, переводящий траектории уравнения $\tilde{\ell}$ в V_1 в траектории уравнения ℓ в V_2 с сохранением ориентации на них.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Бесконечно удаленные замкнутые траектории Γ_+иΓ_- являются грубыми тогда и только тогда, когда $a(\ell) \neq 0$.*

3. Бифуркации бесконечно удаленных замкнутых траекторий. Рассмотрим бесконечно удаленные замкнутые траектории Γ_+и Γ_- уравнения Льенара ℓ в случае $a = a(\ell) = 0$. Тогда

$$2\int\limits_0^\omega f(s)\int\limits_0^s f(t)dtds = 2\int\limits_0^\omega \int\limits_0^s f(t)dt(\int\limits_0^s f(t)dt)'ds = \left(\int\limits_0^\omega f(x)dx\right)^2 = 0,$$

и потому $z_2(\omega) = b(\ell)$, $z_2(-\omega) = -b(\ell)$, а $P_\pm(u) = u \pm b(\ell)u^3 + ...$ Следовательно, при $b(\ell) < 0$ Γ_+ – устойчива, а Γ_- – неустойчива, а при $b(\ell) > 0$ все наоборот.

Теорема 3. *Пусть $a(\ell) = 0$, а $b(\ell) < 0$. Тогда существуют такая окрестность $U(\ell)$ уравнения ℓ в Λ_ω^r и такие окрестности $V(\Gamma_+)$ и $V(\Gamma_-)$ замкнутых траекторий Γ_+ и Γ_- в $S^1 \times \bar{R}$, что для любого уравнения $\tilde{\ell} \in U(\ell)$*

1) $b(\tilde{\ell}) < 0$,

2) *если $a(\tilde{\ell}) \leq 0(a(\tilde{\ell}) \geq 0)$, то $\Gamma_+(\Gamma_-)$ – единственная замкнутая траектория в $V(\Gamma_+)(V(\Gamma_-))$,*

3) *если $a(\tilde{\ell}) > 0(a(\tilde{\ell}) < 0)$, то в $V(\Gamma_+)(V(\Gamma_-))$ существует единственная замкнутая траектория, отличная от $\Gamma_+(\Gamma_-)$, она устойчива (неустойчива) и задается уравнением $z = Z(x, \tilde{\ell})$, где $Z(x+\omega, \tilde{\ell}) = Z(x, \tilde{\ell}), Z(x, \tilde{\ell})$ непрерывно зависит от $(x, \tilde{\ell})$ и $Z(x, \ell) \equiv 0$.*

В случае $a(\ell) = 0, b(\ell) > 0$ в этих утверждениях Γ_+ и Γ_- *меняются ролями.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\ell} : \ddot{x} + \tilde{f}(x)\dot{x} + \tilde{g}(x) = 0$. Правая часть уравнения

$$\frac{dz}{dx} = \tilde{f}(x)z^2 + \tilde{g}(x)z^3 =: F(x, z, \tilde{\ell})$$

является аналитической функцией от $(z, \tilde{\ell}) \in R \times \Lambda_\omega^r$. Поэтому его решение $z(u, \tilde{\ell}, x)$, удовлетворяющее начальному условию $z(u, \tilde{\ell}, 0) = u$, также аналитическая функция от $(u, \tilde{\ell})$ [1]. Тогда функции последования по траекториям систем $\tilde{\bar{\ell}}_\pm$ на трансверсали $x = 0$ к $\Gamma_\pm$ имеют вид $P_\pm(u, \tilde{\ell}) = u \pm a(\tilde{\ell})u^2 + q_\pm(u, \tilde{\ell})u^3$, где $q_\pm$ – аналитические функции, $q_\pm(0, \tilde{\ell}) = \pm b(\tilde{\ell})$. Отсюда легко получить все утверждения теоремы.

4. Достаточные условия существования замкнутых траекторий. Если $\forall x \in R \ g(x) \neq 0$, то уравнение Льенара не имеет особых точек, а потому и замкнутых траекторий, гомотопных нулю. Рассмотрим вопрос о существовании замкнутых траекторий, негомотопных нулю.

Теорема 4. *Если $a > 0$ и $\forall x \in R\, g(x) \neq 0$, то уравнение Льенара имеет в $S^1 \times R$ единственную негомотопную нулю замкнутую траекторию. Эта траектория грубая, устойчивая и лежит в $S^1 \times (0, +\infty)$ $(S^1 \times (-\infty, 0))$ при $g(x) < 0(\,g(x) > 0)$. Все остальные траектории в $S^1 \times R$ ω-предельны к ней.*

Доказательство. Пусть $\forall x \in R \ g(x) < 0$. В точках $(x, 0)$ производная от координаты y в силу системы ℓ равна $-g(x)$ и потому положительна. Следовательно, любая замкнутая траектория, начинающаяся в точке множества $S^1 \times (0, +\infty)(S^1 \times (-\infty, 0))$, из него не выходит и потому является замкнутой траекторией уравнения Абеля (1). Согласно [2, 3] уравнение (1) имеет не более трех замкнутых траекторий с учетом их кратности. Из (2) видно, что $z = 0$ – двукратная замкнутая траектория. Поэтому, если уравнение ℓ имеет в $S^1 \times R$ замкнутую траекторию, то она единственная и грубая. Так как положительная полутраектория L^+ системы ℓ, начинающаяся в точке множества $S^1 \times (0, +\infty)$ не выходит из него, а Γ_+ при $a > 0$ неустойчива, то в $S^1 \times (0, +\infty)$ должна иметься замкнутая траектория, к которой L^+ ω-предельна.

Случай $g(x) < 0$ рассматривается аналогично.

5. Пример. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} - \beta + \sin x = 0,$$

где $f(x)$ – непрерывная 2π-периодическая функция, $f(x) \geq 0$, $\beta > 0$. Оно описывает колебания кругового маятника с постоянным вращающим моментом и демпфированием, линейно зависящим от угловой скорости, а также ряд задач теории электрических машин [4]. В [4] приведено его исследование при постоянном коэффициенте демпфирования $f(x) = a$.

Пусть $f(x)$ – ненулевая функция. Тогда $a = \int_0^{2\pi} f(x)dx > 0$. Из теоремы 4 следует, что при $\beta > 1$ все траектории в $S^1 \times R$ ω-предельны к единственной замкнутой траектории, негомотопной нулю. Для $0 < \beta < 1$ из теоремы 3 следует существование таких чисел $v > 0$ и $\varepsilon > 0$, что при $\max\limits_{x \in R} f(x) \leq \varepsilon$ уравнение имеет в $S^1 \times (v, +\infty)$ единственную замкнутую траекторию и эта траектория устойчива.

6. Типичные уравнения Льенара. Обозначим $\Sigma^0\Lambda_\omega^r$ множество уравнений из Λ_ω^r $(r \geq 1)$, имеющих в $S^1 \times \bar{R}$ только грубые особые точки и грубые замкнутые траектории и не имеющих двойных сепаратрис.

Уравнение $\ell \in \Lambda_\omega^r$ назовем *грубым в* $S^1 \times \bar{R}$, если существует такая его окрестность U в Λ_ω^r, что для любого уравнения $\tilde{\ell} \in U$ найдется гомеоморфизм $h : S^1 \times \bar{R} \to S^1 \times \bar{R}$ переводящий траектории уравнения $\tilde{\ell}$ в траектории уравнения ℓ с сохранением ориентации на них.

Теорема 5. *Множество $\Sigma^0\Lambda_\omega^r$ открыто и всюду плотно в Λ_ω^r $(r \geq 1)$ и состоит из уравнений, грубых в $S^1 \times \bar{R}$.*

Библиографический список

1. *Лефшец, С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений [Текст] / С. Лефшец. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 387 с.
2. *Плисс, В.А.* О числе периодических решений уравнений с полиномиальной правой частью [Текст] / В.А. Плисс // ДАН СССР. – 1959. – Т. 127. – № 5. – С. 965-968.
3. *Casull, A., Guillamon, A.* Limit cycles for generalized Abel equations // Int. J. Bifurcation Chaos. – 2006. – V. 16. – № 12. – P. 3737-3745.
4. *Андронов, А.А.* Теория колебаний. [Текст] / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

Трибология качения

Л.П. Размолодин

Среди различных видов трения, возникающего при взаимодействии тел, одним из недостаточно изученным является трение качения. В теории трения качения, со времён рассмотрения его Кулоном (1736-1806), подход к физической трактовке взаимодействия каток-поверхность другого тела практически не изменился [1]. Кулон опытным путём установил, что момент пары трения качения $\tilde{M}_{\text{тк}}$ не зависит от радиуса катка и прямопропорционален его нормальному давлению на опорную поверхность. Коэффициент же трения качения $\mathrm{f}_{t\text{к}}$ зависит от материала соприкасающихся тел и от опорной плоскости. В данном случае под опорной плоскостью понимается та часть общей плоскости, по которой тела соприкасаются. При рассмотрении трения качения всегда подразумевается, что каток является абсолютно твёрдым телом, а деформируемым телом опорная поверхность. На практике возможен прямопротивоположный случай, а также вариант, когда оба взаимодействующие тела являются деформируемыми. В [2], где рассматривается движение деформируемого тела шины автомобиля по жёсткой поверхности, при очень подробном анализе силовых факторов, влияющих на динамику движения, учёт трения качения свёлся к вводу в дифференциальное уравнения движения момента трения качения и коэффициента трения качения физическое обоснование которого дано весьма приближённо. В [3] Более подробно рассмотрено силовое взаимодействие колеса – шины автомобиля с дорогой и коэффициент трения качения связывается с внешними силовыми факторами такими как моментом, приложенным к колесу со стороны двигателя, силе нормального давления, силе продольной тяги, силе реакции опоры. Однако снос вертикальной реакции, обусловленный внешними по отношению к колесу силами, будет определяться и деформацией, находящегося под давлением в шине воздуха и упругой деформацией покрышки. В однородных по материалу колёсах железнодорожных вагонов модуль упругости обода и тела колеса близки и его можно принимать как равноупругое тело, что упрощает задачу нахождение коэффициента трения Надо отметить, что хотя в литературе и отмечается, что этот коэффициент зависит от радиуса тела и движущей силы, но в силу неизвестности вида этой зависимости его принимают постоянной величиной. Более детальное рассмотрение качения абсолютно твёрдого тела даёт иную физическую картину силового взаимодействия тел и позволяет установить эту зависимость. На рис. 1 изображён каток, соприкасающийся с опорной поверхностью на участке “a-b”.

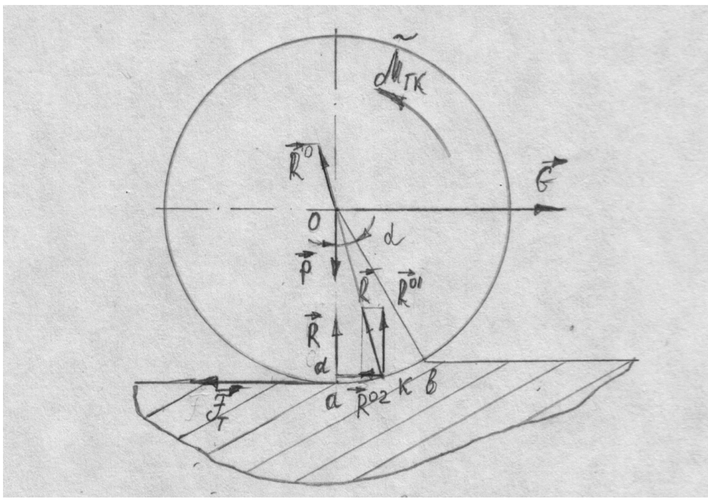


Рис. 1

На каток действует сила $\vec{P}$ тяжести, активная сила $\vec{G}$, приложенная в точке “O” и вызывающая перемещение катка. Ранее указывалось [4], что в точке “a” на каток действует сила трения $\vec{F}_{\text{т}}$, противоположная предполагаемому направлению перемещения катка. Однако, в реальности существование этой силы (сцепления, скольжения) возможна только в том случае, если отсутствует промин “a-b”, обеспечивающий упор катка в направлении движения. По Кулону к реакции опоры $\vec{R}$, приложенной в точке “a”, при условии, что на участке “a-b” приложена система n_i параллельных $\vec{P}$ сил реакции опоры ещё необходимо прибавить момент пары трения качения $\tilde{M}_{\text{тк}}$. Её направление и величина определяются по лемме о параллельном переносе силы $\vec{R}$ в нашем случае из точки “b” в точку “a”. Система сил $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{G}$, $\tilde{M}_{\text{тк}}$ является неуравновешенной, т.к. в противовес $\tilde{M}_{\text{тк}}$ нет силы, обеспечивающую пару силе $\vec{G}$. Это несоответствие разрешается, если уточнить физическую картину силового взаимодействия тел. На участке промина в каждой её точке действуют распределённые силы реакции связи $\vec{R}_i$, направленные по главным нормалям к центру катка. Силы $\vec{R}_i$ представляют собой систему сходящихся сил, равнодействующая которых $\vec{R}^{\circ}$ приложена в точке “O” катка. Линия её действия перпендикулярна касательной, проведённой в центре дуги $\cup ab$. Перенесём равнодействующую вдоль её линии действия в точку "к" дуги $\cup ab$, и разложим на две составляющие вертикальную $\vec{R}^{\circ 1}$ и горизонтальную $\vec{R}^{\circ 2}$

$$\vec{R}^{\circ} = \vec{R}^{\circ 1} + \vec{R}^{\circ 2}. \tag{1}$$

Получим иную по отношению к Кулону силовую картину взаимодействия тел. Реакция опорной поверхности будет приложена в точке "к" по Кулону в точке "b", при этом дуга $\cup ak$ равна $\cup kb$. Парой сил, вызывающей качение является $(\vec{G}\ \vec{R}^{\circ 2})$, а не $(\vec{G}\ \vec{R}_{\text{тр}})$. Момент трения качения определяется парой $(\vec{P}\ \vec{R}^{\circ 1})$. Плечо этой пары расстояние "kd" будет зависеть от деформационных свойств опорной поверхности. Чем больше промин дуга $\cup ab$, тем больше момент трения качения при прочих постояных величинах. В изложенном представлении момент трения качения определяется как $\text{M}_{\text{тк}}$=$\text{f}_{\text{тк}}$ $\text{R}^{\circ 1}$=$\text{f}_{\text{тк}}$P, но коэффициент трения качения $\text{f}_{\text{тк}}$ зависит от деформации опорной поверхности и геометрических размеров катка – его радиуса, что вытекает из следующих представлений.

$$\text{M}_{\text{тк}} = f_{\text{тк}} R^{\circ 1} = P, \quad \text{но } d\text{к} = r\sin\alpha/2. \tag{2}$$

Таким образом, $\text{M}_{\text{тк}} = r\sin\alpha/2P$, т.е. $\text{f}_{\text{тк}} = r\sin\alpha/2$. Угол α зависит от физических свойств опорной поверхности её деформации и в пределах упругой деформации связан с модулем упругой деформации, т.е. α=f(D).

В данном представлении коэффициент трения качения несёт в себе ясный физический смысл и может определяться теоретически.

Движение катка по поверхности является плоскопараллельным, т.е. возможно относительное вращательное движение катка относительно оси, проходящей через полюс "O" катка и перпендикулярной плоскости движения. В этом случае, если трение между катком и дугой промина будет недостаточным, то возможно проскальзывание катка в промине, то есть необходимо учитывать силу трения сцепления между катком и опорной поверхностью. На рис. 2 показано силовое взаимодействие тел в этом случае. Кроме ранее указанных сил прибавляется сила трения сцепления направленная в стороны движения катка и приложенная в точке "к" середине дуги $\cup ab$.

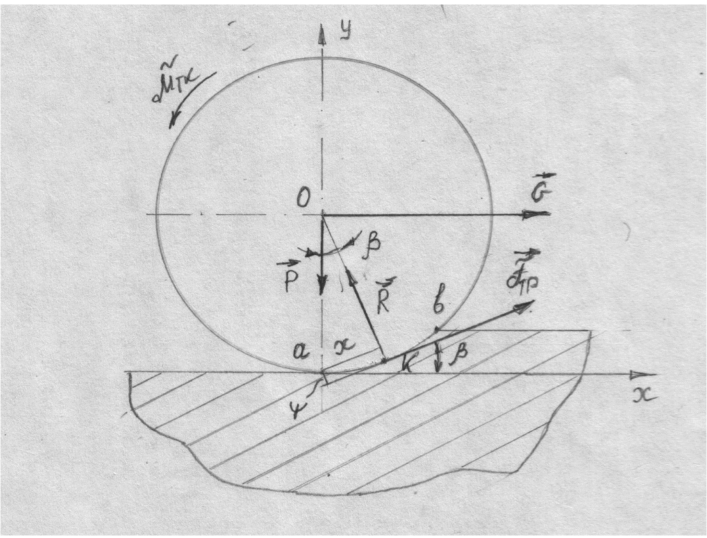


Рис. 2

Система сил, действующая на каток, плоская из условий её равновесия можно записать:

$$\begin{aligned} Ax &: G + F_{\text{тр}}\cos\beta - R\sin\beta = 0,\\ Ay &: -P + R\cos\beta + F_{\text{тр}}\sin\beta = 0,\\ \sigma M_a &: \tilde{M}_{\text{тк}} - G\cdot r + R\cdot x + F_{\text{тр}} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Разрешая (3) относительно $\tilde{M}_{\text{тк}}$ получаем $M_{\text{тк}} = \text{P}\cdot f_{\text{т}}\cdot r$. Таким образом коэффициент трения качения, равный $f_{\text{т}}\cdot r\cos\beta$ зависит от трения сцепления $f_{\text{т}}$, радиуса катка r и угла β, т.е. величины промина, который определяется деформационными свойствами основания.

Рассмотрим случай, когда тело по которому движется каток не деформируется, а деформируется каток. На рис. 3 и рис. 4 показаны силы, действующие на тела в этом случае.

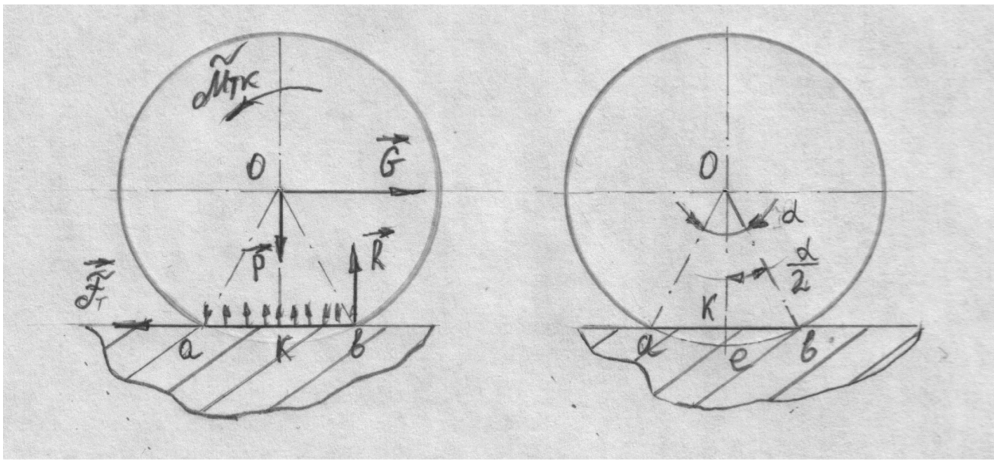


Рис. 3 Рис. 4

Каток и поверхность соприкасаются по прямому участку ab. При этом |Oa| = |Ob|=r, где r радиус катка. Величина деформации катка Δr=r-Ок=ке (рис. 4). На ab в этом случае возникает сила трения $\vec{T}_т$ (сцепления, скольжения). Парой сил, вызывающей качение катка является ($\vec{G}$ $\vec{F}_т$), её величина $G \cdot$ Ок. Момент трения качения $M_{тк}$=R$\cdot 0,5ab$, где коэффициент трения качения $f_{тк}$=0,5$\cdot ab$. При равновесии $M_{тк}$=G·Ок, т.е $P \cdot ka = G \cdot Ok$, где Ок=r – ке (рис. 3). Оценим выражение для кв=$f_{тк}$. Из закона Гука следует ке=P$\cdot r/F \cdot E$, где E – модуль упругости, F – площадь соприкосновения тел.

Для поперечного размера площади соприкосновения тел, взятого за единицу F = 1$\cdot ab$, тогда

$$ke = \mathrm{P} \cdot r/ab \cdot E. \quad (5)$$

Из ΔОкв $\cos\alpha/2$ =Ок/Ов =(r – ке)/r = 1 – P/ab$\cdot E$.

Отсюда $\alpha/2$=arccos$(1 - P/ab \cdot E)$. Для $\tan\alpha/2$ можно записать $\tan\alpha/2$ =кв/Ок, откуда кВ=Ок$\cdot\tan\alpha/2$. Следовательно,

$$f_{\mathrm{fтк}} = r(1 - \mathrm{P}/2f_{\mathrm{fтк}} \cdot \mathrm{E})(\tan(\arccos(1 - P/2ab \cdot E))). \quad (6)$$

По этому выражению $f_{тк}$ находится методом итерации с необходимой степенью точности. Более общий случай, когда оба тела каток и опорная поверхность деформируются, можно свести к одному из рассмотренных выше частных случаев.

Плоское движение тела по неподвижной поверхности широко используется на практике.

Это движение колёс железнодорожного, автомобильного транспорта, самолётов, сельхозмашин и т.д. Полученный результат для оценки коэффициента трения качения позволит, отталкиваясь от теоретических результатов более точно его прогнозировать, что, в конечном итоге, приведёт к существенному сокращению расхода энергии на транспортировку грузов.

Библиографический список

1. *Онищенко, О.Г.* Структура, кинематика и динамика механизмов [Текст] / О.Г. Онищенко, Б.А. Коробко, К.М. Ващенко. – ПолтНТУ, 2010. – 274 с.
2. Дорога. Шина, автомобиль, водитель [Текст] / под. ред. А.А. Хачатурова. – М.: Изд-во Машиностроение, 1976. – 534 с.
3. *Литвинов, А.С.* Автомобили: теория эксплуатацинных свой1ств [Текст] / А.С. Литвинов, Я.Е. Фаробин. – М.: Машиностроение, 1989. – 240 с.
4. *Голубева, О.В.* Теоретическая механика [Текст] / О.В. Голубева. – М.: Гос. изд. физмат. литературы, 1961. – 703 с.

Fuzzy. Жизнь как спектакль

Н.А. Трубников, Д.И. Степанова, Ж.Н. Трубникова

“Жизнь... такая штука, что нет ничего
такого, чего бы в ней не было”
Михаил Зощенко

При том, что “... сущность математики... в формальном методе...” [1, с. 36], в её формальных и “... достаточно богатых теориях всегда существуют недоказуемые истинные выражения” [2, с. 88]. Тем более в физике и уж, конечно, в биологии, где заведомо “витальная сумятица жизни опережает её догматическую мумификацию” (Ф. Феллини). В этой связи авантюризм попыток заложить здесь некий платцдарм поиска и/или инвентаризации доказуемых истин оправдывается хотя бы разновостребованной пользой от демаркации себетождественности Homo sapiens в гностическом сечении его пребывания в мире. “Непознанная жизнь не стоит того, чтобы быть прожитой” (Сократ).

Биогенез бытия la vie в рельефе природы переживается (воспринимается, осознаётся и осодеется) человеческим я в форме некоей мистерии осуществляющегося жизнепроявления и природопользования – собиогенез (витагенез) со-бытия (жития) de vie в быту стагнирующейся цивилизации.

Общественная или частная жизнь de vie может быть рассмотрена как поток сцен, событий, проявляющих объекты универсума со-бытия в тернарных отношениях, где они выступают как ресурсы R, стимулы S и эффекты E. Именно, праксеологическая модель жизненного акта эксплицируется эффектором $v(r, s,e)$, представляемым суперпозицией бинарных отношений $a(r, s) \circ p(s, e)$ как неинъективных многозначных отображений, таких как поведение (действие) $s{=}ar$ и порождаемые им процессы $e{=}ps$

$$v = e(s(r)) : R - a \to S - p \to E.$$

Собиогенез эффектора таким образом реализуется организованным в пространстве-времени сочетанием технологии действия a $= \lambda$r|sr с рабочим циклом процессора p $= \lambda$s|es.

Рассмотрим области определений отображений$s{=}\ ar$ и $e = ps$. В них обнаруживаются похожести (подобия) элементов в силу

$$A(r1) \cap A(r2) \neq \emptyset \text{и} P(s1) \cap P(s2) \neq \emptyset, \qquad (*)$$

где A(r), P(s) – множества a-образов элементов R в S и p-образов элементов S в E. Соответствующие отношения a^{-1}-похожести и p^{-1}-похожести:

$$r1a^{-1}r2 \equiv \mathrm{A}(r1) \cap \mathrm{A}(r2) \neq \emptyset,$$
$$s1p^{-1}s2 \equiv \mathrm{P}(s1) \cap \mathrm{P}(s2) \neq \quad \emptyset$$

симметричны ввиду A(r1) $\cap$ A(r2) $=$ A(r2) $\cap$ A(r1) и P(s1) $\cap$ P(s2) $=$ P(s2) $\cap$ P(s1), а также рефлексивны, ибо $\forall$r (A(r) $\cap$ A(r) $=$ A(r) $\neq \emptyset$) и $\forall$s (P(s) $\cap$ P(s) $=$ P(s) $\neq \emptyset$ при том, что a-отношение определено на всём R и p-отношение на всём S, чему в жизненном пространстве со-бытия будет более осторожным не искать ограничений.

С транзитивностью обследуемых отношений в $v-$ проблема, ибо в каждом из множеств R и S дело обстоит так, что

$$\exists r1, r2, r3((r1a^{-1}r2) \bullet (r2a^{-1}r3) \nRightarrow (r1a^{-1}r3))$$

и

$$\exists s1, s2, s3((s1p^{-1}s2) \bullet (s2p^{-1}s3) \nRightarrow (s1p^{-1}s3)).$$

Эта нетранзитивность обнаруживает области похожести в множествах R и S:

Def$_1$: A$^+$ (прокласс a^{-1}-похожести) $\equiv \varepsilon$r (r1a^{-1} r2);

Def$_2$: P$^+$ (прокласс p^{-1}-похожести) $\equiv \varepsilon$s (s1p^{-1} s2);

Def$_3$: **A** (класс a^{-1}-похожести) $\equiv \varepsilon$r (r1a^{-1} r2 $\bullet$ card A$^+$ $=$ max);

Def$_4$: **P** (классp^{-1}-похожести) $\equiv \varepsilon$s (s1p^{-1} s2 $\bullet$ card P$^+$ $=$ max).

Энтузиазм в изображении неизвестного известным останавливается уровнем независимости критериев истины. Забыв это, мы начинаем лгать про природу. Экспликация, скорее, не уточнение, а целеизбираемый конструкт понятия по его мотивам.

Похожесть или сходство [3] акт-объектов со-бытия имеет два полюса: его отсутствие – автономность (независимость, “полная различимость”, “нуль-неразличимость”) и его полноту – себетождественность (“нуль-различимость”, “полная неразличимость”) .

Помимо разных способов задания похожести биогностический интерес представляет её смыкание с идеологией нечёткости [4, 5]. Идентификации элементов R посредством стимулов S и стимулов S посредством эффектов E оказываются часто неточными из-за существования A(r1) $\cap$ A(r2) $=$ A(r2) $\cap$ A(r1) и P(s1) $\cap$ P(s2) $=$ P(s2) $\cap$ P(s1).

На континууме похожести a^{-1} (или p^{-1}), т.е. на носителе R (или S) как области определения (первый этап осмысления факт-объекта) лингвистической переменной ζ с именем, скажем, "мера похожести" можно выбрать ("синтаксическое правило" Syn) в качестве области её предзначений набор (терм-множество) S^+ (подмножество S) нечётких переменных f, суживающих искомый смысл факт-объекта (к примеру, "чётко различимы до автономности", "уверенно различимы", "практически различимы", "достаточно хорошо различимы", "почти неразличимы", "в принципе, но не в деталях различимы-неразличимы", "совершенно неразличимы", "на самом деле, абсолютно неразличимы" и т.п.). Когда смысл выбран, начинается поиск значений: "значение = f (смысл)" [6, с. 28]. Здесь опять, как и при выборе f, работает, уже в роли f, апперцепция эксперта, выбирающего на носителе R (универсум как первый этап дефиниции осмысления) его, строящий нечёткое множество A, элемент (из R) как значение, несущего окончательный смысл терма. Но, поскольку смысл остаётся неточным, в качестве значения приходится выбирать (Sem) несколько в разной степени подходящих под смысл элементов носителя и естественно сопровождённых указанной степенью экспертного подтверждения истинности соответствия или принадлежности элемента рассматриваемому смыслу. Мерилом истинности соответствия выбираются, например, числа в интервале $[0; 1]$ – область значений f, которая здесь выступает и как характеристическая функция множества и как функция истинности и называется функцией принадлежности μ (принадлежности элемента носителя смыслов к тому или иному из них). В результате 1) значением оказывается подмножество носителя, 2) элементами его являются пары $<$ элемент, истинность$>$, 3) подмножество является неточным, ибо операция "элемент $\in$ множество" размыта.

Предикатная интерпретация специфицированной переменной [7] как общего имени, "содержанием которого являются смысл (свойство, интенсионал) и значение (класс, экстенсионал)" [8], позволяет рассмотреть акт сознания как суперпозицию трёх отображений (предикатов трёх уровней):

$$\zeta \text{ (смысло-термы как значения } \zeta) = \mathrm{f}^{-1} \text{ (r как значение терма)},$$
$$\text{A (элементы A, Sem-отвечающие смыслу терма)} = \text{f (смысло-терм)},$$
$$\mu \text{ (истинность элемента из A – мера его адэкватности смысло-терму)} = \mu \text{ (элемент из A)}.$$

Разумеется, $\mathrm{R} = \{\mathrm{r}\} = \mathrm{dom}\,\zeta$, $\mathrm{A} = \varepsilon_r\ (\mathrm{r}^A = \mathrm{r} \in \mathrm{A} \bullet \mathrm{r} = a^{-1}(\mathrm{s}))$.

Возникающие при всём этом ассоциации с концептологиями вероятности и неупорядоченности в конце концов оправдываются. В частности, возможно транспонировать нечёткую логику в вероятностную [9], а также использовать идею шенноновской энтропии для оценки размытости ("нечёткости") нечёткого множества

$$\eta\ (\mathrm{A}) = \Sigma\mu\ (\mathrm{r}_j)\ \ln\,\mu\ (\mathrm{r}_j),\ \mathrm{r}_j \in$$

R с её способностью измерять уровень дисперсии.

Но, если не пытаться измерять мощности пересечений (*) и ограничиться скудной информацией о вышепредложенном эффекторе v, то в терминах нечёткости он может быть охарактеризован уже следующим образом: $\mathrm{f} = \lambda_s\ a^{-1}(\mathrm{s}) = a^{-1}$; A – s-смысл r, $\mathrm{A}(\mathrm{r}_j)$ – нечёткое множество, $\zeta = \{\mathrm{A}\} = \{$Различимость, Сходство, Неразличимость$\}$, μ: $\mathrm{r}^A \to \{0,]0,\ 1[\ ,1\}$

$$\begin{array}{ll}
\mu_{\mathrm{A1}}\ \text{различимость(r)} = & \{\ 1 \text{ при } \mathrm{A(r1)} \cap \mathrm{A(r2)} = \emptyset; \\
 & \{\ 0 \text{ при прочем; } \zeta = 0; \\
\mu_{\mathrm{A2}}\ \text{сходство(r)} = & \{\ 1 \text{ при } \mathrm{A(r1)} \cap \mathrm{A(r2)} \neq \emptyset; \\
 & \{\ 0 \text{ при прочем; } 0 < \zeta < 1; \\
\mu_{\mathrm{A1}}\ \text{неразличимость(r)} = & \{\ 1 \text{ при } \mathrm{A(r1)} \cap \mathrm{A(r2)} = \mathrm{A(r1)} = \mathrm{A(r2)}; \\
 & \{\ 0 \text{ при прочем; } \zeta = 1.
\end{array}$$

Ровно таким же образом всё это можно воспроизвести для субэффектора $p(s, e)$ и для суперэффектора $v(r, s, e\ )$.

Критерии истины создаются и применяются внутри сознания, фиксируя его неподатливость предвзятости восприятия и спекулятивному произволу мышления. Озабоченные дилеммой существования бытия ($\approx$ "мир природы") вне со-бытия ($\approx$ "картина мира") могли убедиться, что крайности, когда они начинают влиять на истину, не плодотворны. Здесь более осторожным, и, похоже, это чувствует "усреднённый исследователь", будет ощущение, что mezzo termino лежит между оптимумом и позитивом, позволяя ex vivo и in vivo иметь ввиду некоторый своего рода рельеф природы (exietre), ограничивающий свободу кристаллизации мятущегося сознания, со-творящего собственный мир и вместе с со-деянием – не только общую, но личную жизнь.

Потребительский тренд биогенеза устремлен в бесконечность, а жизненные ресурсы биосферы конечны и этот утробный дефицит пронизывает жизнь на всех её этажах, превращая конфликт в факт человеческого существования.

Работает игротрон $v{:}r - (a)fs - (p)fe\ $). Его субъектом является индивидаульное я (или коллективное я неофрейдизма), интерфейсом ставок – R, процедур-технологией – $a = \lambda\mathrm{r}|\mathrm{sr}$, процессором$p = \lambda\mathrm{s}|\mathrm{es}$, результатом – E. Ипостаси v: в биогенезе – биотрон, в витагегнезе – theatron (греч. зрелище).

Эвристическая интерпретация жизненного акта v: я-субъект, *выбирающий ресурсы, условия и конструирующий процедуру (технологию действий)* + *действие* fобъект f процессы в объекте (спровоцированные действиями) f результат (эффект). Курсив – это ставка $s= ar$, остальное – реакция $e = ps$. Но сущность игры есть итерация события, образуемого подобной последовательностью “ставка-реакция”, ибо ставка во власти субъекта, реакция – вне её; итерация события, мотивированного аппетитом к позитивному результату в соединении с ощущением способности произвести ставку и распространить свою власть на пространство жизненных ресурсов, увеличив персональный протекторат над ними. Или без этого азарта: удовлетворив свои необходимые или безмерно растущие потребности. В сущности ставка детерминистична, реакция – стохастична. По этой причине с неизвестными вообще шансами результат содержит и негатив = отсутствие приобретений $\not\equiv$ потери и возникает как интрига игры –

$$\text{шанс} = \text{вероятность приобретений} \times \text{размер их},$$

но возникает и драма игры –

$$\text{риск} = \text{вероятность потерь} \times \text{размер их}.$$

Ответственность как обязанность отвечать (платить) за риск – это издержки получения и реализации права выбирать, то есть свободы выбора, ибо “право есть свобода, предоставленная и ограниченная нормой” [8, с. 106]. Последняя нормграница – рельеф бытия exietre с его вершинами и пропастями, с меняющимся отдалением от которых в рамках других границ играет жизнь, соблюдая и нарушая их.

Роль дерзающего эго в организации жизни, включая открытие возможностей и установление и навязывание ограничений, эта роль конечно не беспредельна, но намного шире в области фантазий души, влияющей на действия тела. Это жизнеорганизующее сотворение себя и вокруг себя, предпринимаемое я-менеджером и я-исполнителем как функция организма составляют содержание, смысл, форму, стиль и аромат жизни, в любой сфере её забот, поиск ли это пищи, безопасности, половых партнеров или вообще удовольствий, которые собраны Абрахамом Маслоу в его пирамиде.

Сотворение – это инновация, созданная методом расширения границ воспринимаемого, понимаемого, переживаемого, делаемого, предполагаемого. Так раскрывается и прочувствуется самосуществование в секторах потребностей, так оно ощущается, мыслится, деется.

Так же как в игре, в познании два процесса: фактография (фактооформляющая перцепция при наблюдении и эксперименте) и версификация (толкование гипотезами и понимание теорией). Оба имеют непустые пересечения и как процессы и как результаты. В последнем фактография “семантирует” экстенсионал значения, версия “синтаксирует” интенсионал смысла как и различал их Готлоб Фреге [11]. Будем благодарны волшебникам, открывшим нам мир жизни с этой, истинностной его стороны. Они сумели и увидеть больше и понять в увиденном больше. Познание как образование – улучшение интеллектуального зрения, ибо человек, в отличие от орла, видит мозго-глазом, “в упор видит”. И это составление личного мнения о предмете видения (слышения, чувствования), как раз и делает нас умными, ибо, если “образование – это то, что останется, когда забудется всё выученное” (Харнак), то, так же как после гимнастики остается красивое сильное тело, так после учебы должен остаться умный и понимающий мозг. Запоминание даёт эрудита, а мышление – мыслителя, в зависимости от техники преподавания, точнее, от менеджмента обучения.

Но жизнь раскрывается не только истиной.

15-летняя девушка сочинила танго, “которым поцеловала весь мир” [12].

20-летняя девушка сочинила принцип, которым осветила весь мир: как в белоцвете сплетаются красный, бронзовый, зелёный, синий, сиреневый, так в жизни сплетаются добро, воля, свобода, истина, красота, выявляя характер жизни (savuir vivre) по уровню её культурности (*б*элитности) – критерия её нормальности (принцип бэль) [13].

$$\mathrm{Sv} \equiv \underline{б}(\mathrm{w}, \psi, \nabla, \theta, \xi), \qquad (**)$$

Sv – *б*элитность, w – добро, ψ – воля, ∇ – свобода, θ – истина, ξ – красота, $<\mathrm{Sv},(\mathrm{w},\psi, \nabla, \theta, \xi) >$ – экстенсионал бэль-функции, интенсионал бэль-функции:

$$\text{культуроскоп}\underline{б} =_{\eta} \ \lambda w, \psi, \nabla, \theta, \xi \underline{б}\ (w, \psi, \nabla, \theta, \xi) \qquad (***)$$

Редекс λ w, ψ, ∇, θ, ξ $\underline{б}$ (w, ψ, ∇, θ, ξ)$Б^+$, представляет аппликацию λ-абстракции и проживаемого фрагмента или объекта $Б^+$ окружающей жизни и обозначает рабочий акт функционирования алгоритма $\underline{б}$ (β – редукция) [14]. Равенство (***) имеет оттенок η-преобразования [15], состоящий в том, что для его выполнения необходимо, чтобы в любом из чуть ли не полутысячи дефиниций понятия культура, выставляемых слева от $=_\eta$ отсутствовали свободные вхождения компонентов, сводимые к аргументам абстракции. Но в любом случае $=_\eta$ работает в качестве экспликации.

Так что двуаспектность жития проявляется не только через очки θ-координаты (понимаемость перцептфактов, шкала “истина-ложь”), но и через призмы всех других координат и всего сепсета вместе (радуга культуры), то есть на шкалах справедливости, морали – “добро-зло”, устойчивости, предприимчивости – “воляпокорность”, ответственность, обеспеченность – “свобода-зависимость”, эстетика, сервис – “красота-безобразность” и в целом здоровье, норма – “культура- помойка”. Наверное уровень культурного проживания (переживания, жития, освоения (осознание-осодеение) жизни) способен подниматься с возрастом как у большинства людей так и у низко и высоко развитых их меньшинств [16], но в любом случае ответ искателям цели и смысла жизни прост: стремление к её культуре – это они и есть, и цель и смысл.

Этот культуртренд несёт более богатое восприятие и выстраивание жизни, дозволяемое рельефом exietre, который как океан содержит дары и таит опасность, драматизируя жизненный тур во всех секторах жизнедеятельности. И везде проживание жизни идёт по радуге траекторий культуры, которые, как показала автор бэль-функции, в одиночку не ходят. Энергия и усилия я-субъекта жизнедеятельности, хочет он того или не хочет, направлены вдоль всех траекторий и реализуются с различным успехом. Но лишь на θ-направлении концентрируется интеллектуальный и технический потенциал человечества, существуют учреждения, школы и академии, сосредоточена мощь науки и производства, Побочные эффекты этого перекоса, обесценивающие достижения, иллюстрируют характер интерференции параметров в формуле (***) культуры, указанный её автором: торможение роста негностических переменных. Движения и институты, предназначенные для их роста, или вообще не придуманы или, как искусство, вырождаются и в целом не сопоставимы с таковыми, обеспечивающими рост познания. Рост же интегритета культпеременных, то есть культуры организационно поддерживается в основном на словах, на деле же их и её имплицитный дрейф беззащитен от техницистской модерации.

Между тем ранее всех, и университетов в том числе, существует предприятие, по технологии и результатам как раз и способное выполнять охранительно-стимулирующую функцию в отношении каждой координаты человеческого измерения и всего их, обладающего цельностью, соцветия, то есть способное культивировать культуру. Это предприятие – театр.

Наверное не только У. Шекспир и Н. Бор заметили, что протекание жизни, и личной, и общественной, во многих отношениях напоминает театральный спектакль. Смена актов, сцен, кадров, декораций, исполнителей и их поведение, взаимоотношения, явные и скрываемые чувства, создание и провал планов, проектов, почти всё, чем чревата клиническая жизнь de vie. А мы заброшены в это мир актёрами, совмещая роли "…зрителей и действующих лиц в великой драме существования" [17, с. 36]. Это в десятку! Но разве мы обречены совмещать только такие роли? А сценаристы, дизайнеры, художники по костюмам, гримёры, суфлёры и, самое главное, режиссёры, разве не мы? Здесь у нашего я всё получается как хотелось бы? По менеджменту и исполнению вот этого мероприятия

Бэ(ль)ливинг (жизнекультивация) - пересечение процесса сотворения нормальной

и полноценной, то есть культурной жизни и процесса проживания в ней.

Так же, как наука уточняет повседневное мышление (А. Эйнштейн), а образование формирует знания, навыки и умения, так же театр способен помочь бэльливингу.

Взаимоотношения жизни и театра роскошны, плодотворны и загадочны. В культурогенезе жития театр может функционировать наподобие научного эксперимента по моделированию и исследованию жизни с последующим сравнительным анализом и коррекцией представлений о жизненном океане, в котором "…белеет мой парус такой одинокий на фоне стальных кораблей". Дополняя и исправляя, вызванные заботой, но отрывочные и подчас сомнительные наставления родителей, всевозможных воспитателей, кодексов морали или улицы, призывов демагогов и эгоистичных вождей.

Конечно пьесы, их авторы и постановщики сильно различаются по их бэль-ценности, то есть по разнице между $\underline{б}$-приобретениями и $\underline{б}$-потерями, но наиверный путь к истине – это познакомься с разнообразием (которое для этого и должно существовать, обеспечиваясь свободой слова) и составить своё мнение. А что делать? В школах преподяют что угодно: физику, биологию, экономику, географию, технологии, социологию, кулинарию, даже скотоводство, а науку "как жить" не преподают. Здесь требуется много чему научиться и как раз театр, будучи синтетическим искусством, касается этого многого и с разных сторон, в разных формах и стилях. Он способен и научить мудрости и воспитать чувства, включая нравственные. Так же как и отучить от глупости, лености, малодушия, зависти, жадности, хамства, пошлости, неуважения к женщине, высокомерия и лжи. Театр может затронуть всё, может показать величие и низость человека, ослепительную красоту и "свинцовые мерзости жизни" и сделать это убедительно и заразительно.

Конечно это акселерируется талантом с обеих сторон, индуцируемым "гениально играющим донором на гениально слушающего" и при этом растущего реципиента. Однако стержнем всего, что захватывает в плен зрителя во всех видах театра является его драматургия, вплоть до мнений, что "есть драма – есть театр, нет драмы – нет театра" [18, 19].

Что же представляет из себя эта особа и откуда она здесь в театре взялась?

Порассуждаем.

1) Фундаментальное несоответствие между неограниченным трендом биогеногенеза [20] и ограниченностью биосферных ресурсов для него создает и подпитывает весь калейдоскоп конфликтов, через который идет жизнь. Неодарвинист здесь не будет против [21].

2) В отличие от животного человек не только деятель, он – менеджер и, главное, собственной жизни. А раз менеджер, значит, решатель, обреченный на дороге конфликтов выбирать и платить за это имплицитно и эксплицитно в самых разных размерах, в том числе временем, которое в принципе дороже денег, потому, что время – это текущая невозвращаемая и непокупаемая жизнь.

3) Вычислимость решений имеет различные уровни и при переходе из неживого мира со-бытия в живой (все биологии с социологией, антропологией, юриспруденцией, медициной, экономикой, психологией, политологией, педагогикой и т.п. – назовём это всё квазибиологией) резко снижается и имеет предел из-за непреодолимой биогностической неопределенности [10, 22]. Поэтому доля актуальнейших и судьбоносных проблем (вплоть до быть или не быть) квазибиологии не разрешается ею в той мере, в какой это удаётся квазифизике (то есть собственно физике, химии, аэронавтике, минералогии, кристаллографии и т.п.) в отношении подобной и намного большей доли её проблем. Но в картине сознания, ответственной за жизнь, квазифизика погружена в квазибиологию с её неопределенностью и слабопредсказуемостью так же как технические достижения и продукция первой включены в обустройство и политику второй (машины "пока" не управляют человеком) со всеми её слаборешаемостями, шансами и риском.

При этом мы же понимаем, кто забрался и кого надо пригласить на престол земного царства. Это не экологический дракон антропизма, не справляющийся, а умножающий и без того критические проблемы жизни, когда не решать нельзя (дорога отрезана), решение невычислимо и отдаётся интуиции, альтернативы нечётки, на кону (приобретения-потери) – судьба и время уходит.

А вы спрашиваете, откуда драматизм. Так вот это он и есть.

Теперь смотрите. Кто из-за собственной глупости и малодушия переживал потери, особенно тяжёлые, будет благодарен тому, кто подскажет и поможет не допускать их. И когда несущая это рука встречает твою, резонируя с твоими недопониманиями, болью и вопросами, она действует как лекарство.

"Сколько истины может вынести человеческий дух, на какую степень истины он отваживается? Это становится... мерилом ценности. Заблуждение... не слепота, заблуждение – трусость. Всякое восхождение, всякий шаг... в познании вытекают из мужества, из жестокости по отношению к себе, из чистоплотности по отношению к себе" (Ф. Ницше, цит. по [14, с. 137]). Спасибо тебе, друг. За поддержку.

Библиографический список

1. *Карри, Х.* Основания математической логики [Текст] / Карри / пер. с англ. – М: Мир, 1969. – 568 с.
2. *Манин, Ю.И.* Вычислимое и невычислимое [Текст] / Ю.И. Манин. – М: Сов. Радио, 1980. – 128 с.
3. *Шрейдер, Ю.А.* Равенство, сходство, порядок [Текст] / Ю.А. Шрейдер. – М: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1971. – 255 с.
4. Представление знаний в информационных системах. Нечёткая логика и нечёткие множества. Лекция 3. – [Электронный ресурс]. Режим доступа http://www.insy.com
5. *Паклин, Н.* Нечёткая логика. Математические основы. [Электронный ресурс] Режим доступа http//www.basegroup.ru/fuzzilogic/math.htm
6. *Чёрч, А.* Введение в математическую логику [Текст] / А. Чёрч / пер. с англ. – М: ИЛ, 1960. – Т. 1. – 484 с.
7. *Войшвилло, Е.К.* Понятие [Текст] / Е.К. Войшвилло. – М: Изд МГУ, 1962. – 287 с.
8. *Трубникова, Ж.Н.* Клиническая праксеология [Текст] / Ж.Н. Трубникова. – Ярославль: Изд-во Аверс Плюс, 2010. – 148 с.
9. *Ибрагимов, В.А.* Элементы нечёткой математики. – Баку, 2010 [Электронный ресурс] Режим доступа http://www.anl.az/el_ru/i/u_enm.pdf -.
10. *Карнап, Р.* Значение и необходимость. Исследования по семантике и модальной логике [Текст] / Р. Карнап / пер. с англ. – М: ИЛ, 1959. – 372 с.
11. Биогностика in grosso modo [Текст] // Сб. статей. – Ярославль: Автодизель, 2010. – 254 с.
12. Bessame mucho [Электронный ресурс] http://patefon.knet.ru.besame. htm
13. *Трубникова, И.А.* Белогностика [Текст] / И.А. Трубникова, Н.А. Трубников. – Ярославль: Рио Гранд, 1996. – 148 с.
14. Лямбда-исчисление [Электронный ресурс] Режим доступа http://ru.wikipedia.org/wild
15. *Барендренгт, Х.* Типизированное лямбда-исчисление [Электронный ресурс] Режим доступа http://sphung.folding-maps.org/wiki/DenisMoskvin/L.C.
16. http://society.polbu.ru/novikova_sociology/ch07_xi.html
17. *Бор, Н.* Атомная физика и человеческое познание [Текст] / Н. Бор / пер. с англ. – М. ИЛ, 1961. – 152 с.
18. *Костелянец, Б.О.* Драма и действие. Лекции по теории драмы [Электронный ресурс] Режим доступа http://lib.ru.ec/b/307089/read
19. Theatre dramatike [Электронный ресурс] Режим доступа http:/www.lostfm.fr/music/Theatre +of+Dramatike
20. *Докинз, Р.* Эгоистичный ген [Текст] / Р. Докинз / пер. с англ. – М: Мир, 1993. – 318 с.
21. *Докинз, Р.* Расширенный фенотип. Длинная рука гена [Текст] / Р. Докинз / пер. с англ. – М: Астрель: CORPUS, 2010. – 512 с.
22. *Трубников, Н.А.* Биогностика в основаниях фармакологии [Текст] / Н.А. Трубников. – Деп. ВИНИТИ, 31.01.91, № 499-В 91. – 439 с.

Глава 3

Теория и методика обучения математике в школе и вузе

Проблемы перехода математического образования к новой парадигме в информационном обществе

В.А. Тестов

В настоящее время происходит формирование нового типа общества, характер и содержание которого можно обозначить как "постиндустриальное общество", "информационное общество", "сетевое сообщество" и т.п. В условиях стремительного расширения всемирной сети Интернет начала проявляться так называемая сетевая парадигма, основные ее принципы родились сами собой, по ходу включения во всемирную сеть все большего и большего числа людей. Проявилось такое явление, как кластеризация пользователей Интернет в группы по интересам. Впоследствии группы расширились и приобрели формат кластеров, объединяющих людей вокруг идей. Еще один аспект сетевой парадигмы – это экстерриториальность. В эпоху развития электронных коммуникаций компактное проживание – совершенно необязательное условие для существования кластера. Входящие в кластер люди могут находиться в разных концах планеты. Хотя каждый из кластеров объединен своими общими идеями, такие экстерриториальные кластеры ведут разумное и взаимовыгодное сосуществование.

Одним из социальных последствий стремительного технологического развития общества явился общий кризис системы образования. Становление нового типа общества требует не просто внедрения в обучение информационных технологий, а новой методологической основы всей системы образования, радикального обновления его целей и содержания, форм, методов и средств обучения.

Традиционная система обучения, базировавшаяся на классно-урочной системе и книгопечатании, приходит все в большее противоречие с реалиями информационного общества и сетевого пространства. Широкое распространение информационных технологий несомненно облегчило доступ каждому человеку к самой современной информации, но вместе с тем привело к тому, что молодые люди попадают в своего рода ножницы, когда знания, получаемые от учителя, из учебника, перекрываются потоком хаотичной информации, идущей, прежде всего, от Интернета и СМИ, которые оказывают на его восприятие гораздо большее влияние, поскольку опосредованы более высоким уровнем мотивации и более значимым эмоциональным фоном.

Замечено, что в современном мире молодые люди не стремятся наработать личностное знание, а предпочитают взять готовую информацию из Интернета. Стиль мышления молодежи сегодня за счет постоянного общения с масс-медиа – образно-эмоциональный. Мышление школьников и студентов все меньше тяготеет к абстрактным построениям. Все это идет вразрез с традиционным, вербальным стилем изложения учебного материала.

Педагогическое сообщество оказалось не готовым к этим негативным процессам. Можно констатировать, что в педагогике с конца XX века наступил период кризиса – переход к новой парадигме, непосредственно связанный с широким использованием информационных и коммуникационных технологий в обучении без достаточного научно-педагогического осмысления происходящих процессов.

Переход в образовании к новой парадигме – процесс не быстрый и достаточно болезненный. Пока научное педагогическое сообщество больше ставит проблемы, чем указывает пути их решения. Переход от образовательной парадигмы индустриального общества к новой парадигме только начался и теоретически еще не осмыслен. Ряд ученых считают, что при таком переходе происходит выход на главную роль проективного начала, отказ от понимания образования как получения готового знания и изменение роли учителя.

Все эти факторы присутствует в новой парадигме, но не являются определяющими. Главным остается фундаментальность образования. Можно сколько угодно записывать в "компетенциях", что специалист должен уметь вести себя в меняющемся мире: отказ от фундаментальности образования делает это заведомой фикцией. В современном мире возникает необходимость в людях, образованных фундаментально, а не натасканных на поведение в достаточно стандартных ситуациях.

Важнейшей задачей обучения является формирование у учащихся научной картины мира – целостной системы представлений об общих свойствах и закономерностях объективного мира. В современной математике все более различимы признаки становления новой научной картины мира. Создание и совершенствование компьютерной техники в значительной степени привело к возникновению и развитию новых областей математики. В частности последние десятилетия наблюдается бурный рост дискретной математики и ее приложений.

Однако в школьном курсе математики дискретные вопросы, затрагиваются примерно в той же мере, как и несколько десятилетий назад, что мешает обеспечить гармоничное сочетание дискретного и непрерывного в изучении математики и в понимании ее характера. Это приводит к тому, что у учащихся плохо формируется математическое мышление, связанное с восприятием дискретных объектов.

Другим новым важным разделом математики, требующем своего внедрения, как в вузовскую, так и в школьную программу по математике, является фрактальная геометрия – сравнительно молодая ветвь математики, лежащая на стыке современного математического анализа, геометрии и топологии. Помимо понятий дискретной математики и фракталов сегодня в разряд общеобразовательных уверенно можно отнести и ряд других понятий, с которыми работают и физики, и социологи, и биологи, и философы. Это теория катастроф, нечеткие отношения и нечеткие множества, послужившие основой математической теории мягких моделей.

Все эти новые направления в математике обладают большим методологическим, развивающим и прикладным потенциалом. Безусловно, изменения в математической картине мира не могут не сказаться и на содержании школьной математики, приближения его к современным направлениям развития математики.

Освоение новых важных компонентов содержания, способствующих интеллектуальному и общекультурному развитию учащихся, должно рассматриваться (и соответственно поощряться) как один из видов инноваций в обучении (а не только внедрение новых информационных технологий). Необходимо учитывать, что обновление содержания математического образования обусловлено не только последними достижениями математики, но и изменением требований общества к подготовленности выпускников школ и вузов.

Содержание курса математики общеобразовательной школы – очень болезненный и неоднозначный вопрос, по которому идут довольно напряженные дискуссии. Целый ряд крупных математиков современности видит необходимость совершенствования содержания школьного курса, включения в него новых важных математических идей. Однако высказанные ими в печати пожелания об обновлении школьного курса математики и освобождении его от некоторых технических и архаичных вопросов вызывают эмоциональные возражения со стороны представителей так называемой "абитуриентской математики" и обвинения в попытке нарушить традиции отечественного математического образования.

В качестве примера борьбы мнений можно привести длительный процесс введения в школьное математическое образование стохастической компоненты, который имеет более чем 200-летнюю историю, первые попытки к изучению вероятности в школе восходят к П.С. Лапласу. В дальнейшем все более очевидной становилась необходимость включения стохастики в школьный курс, чтобы готовить людей, способных адекватно воспринимать и анализировать процессы случайного характера, доминирующие в окружающем мире. Однако эта довольно драматичная история представляет собой целую серию циклов, состоящих из активизации этого процесса, более-менее масштабного внедрения стохастической линии, затем её резкой критики и последующего исключения стохастической компоненты из школьной программы.

Требуют обновления и формы, методы, средства, применяемые в обучении математике. В настоящее время информационные технологии создают принципиально новые возможности для работы учителя и в традиционных областях математики, для организации учебного процесса, для реализации известных дидактических принципов.

Основным средством обучения в информационном обществе становится не только учебная книга, но и компьютерные сети. Сетевое пространство становится второй виртуальной реальностью личности, компьютерные сети используются не столько для получения знаний, сколько для сотрудничества, получения опыта профессиональной деятельности. Отказ от классических подходов в образовании означает использование беспорядочной, хаотической основы, когда в учебный процесс вводится фактор творческой непредсказуемости.

Главные усилия направляются на создание мощной образовательной среды. Применение информационных технологий и компьютерной техники в обучении ведет к тому, что образовательная среда приобретает совсем другие возможности и ограничения. Сетевое пространство становится второй виртуальной реальностью личности, а для многих людей оно становится основным полем жизнедеятельности, где люди проводят большую часть своей жизни. Образовательные системы, прежде всего их основные подсистемы, связанные с передачей информации, усвоением нового, творчеством, относятся к сложным нелинейным самоорганизующимся системам, развитие которых происходит в направлениях, определяемыми их собственными структурами, непредсказуемым сочетанием тенденций и факторов, присутствующих в них самих. Развитие этой среды, как сложной открытой самоорганизующейся системы, подчиняется законам синергетики. Поэтому методологической основой образовательной парадигмы в информационном обществе должна стать постнеклассическая методология, которая основана на синергетическом мировидении и идеях мягкого моделирования.

Одним из главных препятствий для соединения синергетического мировидения и развития инновационных педагогических систем является "преодоление в сознании педагогов неизбежных рецидивов ньютоновского детерминизма и линейного мышления". Более того, как отмечают Е.Н. Князева и С.П. Курдюмов, в условиях современного мира "линейное мышление, до сих пор доминирующее в некоторых областях науки, становится принципиально недостаточным, и даже опасным" [2].

Один из принципов синергетики заключается в учете внутренних тенденций развития систем и согласовании с ними поставленных целей. Человек не должен навязывать этим системам пути развития, не свойственные их внутренним тенденциям. Попытки силового давления на систему могут привести к разрушению системы или к отклонению от оптимального пути развития. Но и полный отказ от управления ею чреват затяжным блужданием системы "по ровному полю возможностей" в поисках своего пути. Отсюда вытекает требование осторожного обращения с высокочувствительными сложными образовательными системами.

Традиционная педагогика не принимала того факта, что в учебном процессе должна быть определенная доля хаоса. Хаос предстает в качестве механизма выхода на структуры-аттракторы эволюции. Стало быть, бессмысленно бороться против хаоса, стремиться полностью вытеснить деструктивные элементы из образовательного процесса.

В современной информационной эпохе целостность знания часто нарушается, для человека все больше характерно фрагментарно-клиповое сознание, он перестает чувствовать необходимость воссоздания целостной смысловой картины мира, отдельные фрагменты знаний, полученные из сетей, создают ему иллюзию чувствовать себя находящимся на переднем крае науки и техники, не прилагая к этому значительных умственных усилий.

В этих условиях добиться строгой последовательности, линейности и систематичности в освоении социального опыта в школе не удастся. Главной задачей школы становится нелинейное упорядочивание информации, приведение ее в систему. Это особенно важно при разработке "фундаментального ядра"содержания образования, т.е. тех элементов, которые как бы "цементируют"картину мира ученика, представляют собой ее узловые точки.

Новую роль учителя характеризуют как наставничество. Но при обучении математике, как показывает опыт, ученик без диалога с учителем с проблемой понимания справиться не может, даже при использовании самых современных информационных технологий. Архитектура математического знания плохо совмещается со случайными постройками и требует особой культуры, как усвоения, так и преподавания. Поэтому учитель математики был и остается толкователем смыслов различных математических текстов.

В современном обществе социально-экономические процессы привлекли в центр внимания такую форму организации труда как *проектная деятельность*. Такой тип организации труда требует умения работать в команде, коммуникабельности, навыков самоорганизации. Однако, не менее важно, чтобы каждый член команды владел определенным кругом знаний – основой своей профессиональной компетентности.

Перед педагогами встают проблемы серьёзного обучения культуре труда и участию в коллективной деятельности. В качестве ведущего должен рассматриваться принцип обучения в кооперации и сотрудничестве в решении учебных и профессиональных проблем, в первую очередь при коллективном обучении через сеть.

Решению важной педагогической проблемы – обучению коллективным усилиям способствуют коллективные учебные проекты. Как заметил Г.Г. Малинецкий, выпускники наших отечественных вузов являются во многих случаях прекрасными солистами, но там, где дело касается согласованных коллективных усилий, они проигрывают по сравнению с иностранными специалистами. Дело в том, что коллективные студенческие проекты, в которых люди проходят дорогу от учебников к профессиональной жизни, являются в практике западного образования гораздо более распространенными, чем у нас [3].

Надо признать, что практика применения “проектного метода” в школьном обучении математике, в отличие от других предметов, показала ограниченные возможности этого метода. Более целесообразным представляется применение в практике обучения межпредметных проектов, реализующих интегративный подход в обучении математике и сразу нескольким естественнонаучным или гуманитарным дисциплинам. У таких проектов более разнообразна и интересна тематика, такие проекты по четырем-пяти-шести дисциплинам – самые долгосрочные, поскольку их создание подразумевает обработку большого объема информации.

Общепризнано, что школьная математика предполагает специально организованную деятельность по решению задач Однако, первое, что бросается в глаза при рассмотрении проектов “по математике”, – это практически полное отсутствие такой деятельности в большинстве из них. Тематика таких проектов очень ограничена, в основном, это темы, связанные с историей математики. В большинстве проектов присутствует деятельность, связанная с математикой лишь косвенно. Выход на современные разделы математики затруднен в силу отсутствия в школьной программе даже намека на такие разделы.

При работе над проектами целесообразно использовать идеи мягкого (или нечеткого) моделирования. По мнению В.М. Монахова, нечеткое моделирование более адекватно образовательной деятельности и в то же время изоморфно учитывает человеческий фактор. В связи с этим нечеткое моделирование может дать для образования результаты, более продуктивные и полезные, чем результаты системного моделирования [4].

Идеологи проектной деятельности на первый план выдвигают не усвоение знаний, а сбор и систематизацию некоторой информации. В математической деятельности сбор и систематизация информации является только первым этапом работы над решением проблемы, притом самым простым, для решения математической задачи требуются специальные умственные действия, невозможные без усвоения знаний. Математические знания обладают специфическими особенностями, игнорирование которых приводит к их вульгаризации. Как верно отмечает О.Р. Каюмов, знание в математике – это переработанные смыслы, прошедшие ступени анализа, проверки на непротиворечивость, генетическую совместимость со всем предыдущим опытом, последовательно переведенные с уровня “абстрактного” на уровень “обыденного”. Это не позволяет понимать под “знанием” просто факты и считать способность к редукции полноценным усвоением [1].

Математика как учебный предмет обладает и другой специфической особенностью: в ней решение задач выступает в качестве и объекта изучения и метода развития личности. Поэтому в ней решение задач должно оставаться основным видом учебной деятельности, особенно для учащихся, выбравших профили, связанные с математикой. Эту деятельность необходимо совершенствовать, обращая большее внимание на первоначальный этап (осознание места данной задачи в системе математических знаний) и заключительный этап (презентация решения задачи).

Компьютерные сети в обучении можно применять для совместного использования программных ресурсов, осуществления интерактивного взаимодействия, своевременного получения информации, непрерывного мониторинга качества полученных знаний и т.д. При таком образовании учебную деятельность учащийся осуществляет во взаимодействии с другими пользователями сети и с компьютером, т.е. учебная деятельность становится не индивидуальной, а совместной. В силу этого на такое обучение нам надо смотреть как на процесс, происходящий в учебном сообществе, в котором и ученики, и учителя и компьютер выполняют свои вполне определённые функции.

Одним из видов проектной деятельности студентов при использовании сетевых технологий является учебный сетевой проект. При изучении математики сетевые проекты являются удобным средством для совместной отработки студентами навыков решения задач, проверки уровня знаний, а также формирования интереса к предмету.

В Вологодском педуниверситете учебные Интернет-проекты с использованием ВИКИ-технологии применяются уже несколько лет, но пока только при обучении математике студентов-гуманитариев. Для таких студентов на первое место выдвигается не проблема понимания, а проблема мотивации, развития познавательной активности. Сетевые технологии способствуют решению этой проблемы, сближению процессов обучения и исследования.

Тем самым, в информационном обществе переход к новой парадигме в математическом образовании, основанной на постнеклассической методологии, уже начался.

Библиографический список

1. *Каюмов, О.Р.* К вопросу об уместности компетентностной доминанты в обучении математике [Текст] / О.Р. Каюмов // Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. – – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011. – Вып. 28. – С. 4-10.
2. *Князева, Е.Н.* Основания синергетики. Синергетическое мировидение [Текст] / Е.Н. Князева, С.П. Курдюмов. – М.: Ком Книга, 2005.
3. *Малинецкий, Г.Г.* Математическое моделирование образовательных систем [Текст] / Г.Г. Малинецкий // Синергетическая парадигма. Синергетика образования. – М.: Прогресс-Традиция, 2007. – С. 328-345.
4. *Монахов, В.М.* К вопросу использования методологии нечеткого моделирования при информатизации педагогических объектов [Текст] / В.М. Монахов // Математика. Образование. Материалы XVII Международной конференции. – Чебоксары, 2009. – С. 46-49.

Анализ популярных игр – как источник замечательных математических открытий, идей и обобщений

В.Е. Фирстов

1. Краткий обзор

В истории математики было немало примеров, когда в основе ее новых концепций развития лежали популярные игры. Пожалуй, наиболее ярким таким примером явилась игра в кости, анализ которой изложен в письмах Б. Паскаля к П. Ферма от 1654 г. и, по сути, заложил основы классической теории вероятностей [2].

Среди европейских интеллектуалов в 30-е гг. XVIII в. вызвала большие затруднения задача о кенигсбергских мостах, привлекшая внимание Л. Эйлера, который в 1736 г. доказал ее неразрешимость, установив, что нельзя, выйдя из произвольной точки, вернуться обратно, пройдя все 7 мостов Кенигсберга только один раз. Метод, который использовал Эйлер при решении этой задачи, в настоящее время лежит в основе современной теории графов [1]. Позже, изучая движение простейшей детской игрушки – волчка, Эйлер пришел к уравнениям динамики твердого тела (1765), составляющих основу теории гироскопа [3].

В эпоху Екатерины Великой в петербургских салонах получила широкое распространение игра в "пятнадцать", в которой 15 квадратных пронумерованных фишек размещены на квадратной доске 4×4 так, что одно поле доски остается свободным. Цель игры – используя свободное поле доски, исходя из произвольного расположения фишек, расположить их в порядке возрастания, начиная с левого верхнего угла доски. В некоторых случаях эта задача не поддавалась решению, что вызывало изумление публики. Элементарная теория групп, разработанная Ж. Лагранжем и А. Вандермондом в 1771 г. [3], убила эту игру в ее "салонном" расцвете, поскольку выяснилось, что решение этой задачи возможно только в том случае, когда исходная конфигурация фишек на доске является четной перестановкой.

Игра в бильярд появилась до нашей эры в Индии и Китае и, судя по английским летописям, в VI веке перекочевала в Европу. В России бильярд получил рапространение при Петре I [4]. Основы теории игры на бильярде разработаны французским механиком Г.Г. Кориолисом (1835) в трактате "Математическая теория явлений бильярдной игры" [5] и среди них можно выделить два фундаментальных аспекта, связанные с описанием динамики столкновений шаров и их отражения от бортов прямоугольного бильярда. Первый из них лег в основу классической кинетической теории идеального газа, у колыбели которой стояли Дж. Максвелл [6] и Л. Больцман [7]. Со вторым аспектом связано доказательство знаменитой теоремы возврата А. Пуанкаре [8] и рождение эргодической теории, представляющей раздел современной статистической механики, изучающей динамические системы с инвариантной мерой [9].

Родина шахмат – Индия не позднее V в. По легенде, индийский царь, ознакомившись с шахматной игрой, был восхищен ее красотой и мудростью. Узнав, что изобретатель игры является его подданным, царь пообещал выполнить любую его просьбу и был очень удивлен скромностью мудреца, который попросил в награду положить на первое поле шахматной доски положить одно пшеничное зерно, на второе – два и т.д., на каждое последующее поле положить вдвое больше зерен, чем на предыдущее. Царь приказал немедленно выдать награду мудрецу, однако на следующий день придворные математики сообщили, что не могут выполнить приказ царя, поскольку "скромность" мудреца составила $2^{64}-1$ зерен, которых нет не только в амбарах всего царства, но и... в амбарах всего мира. На Руси шахматы появились в IX-X вв. И, хотя давно было понятно, что искусство шахматной игры имеет логическую основу, впервые математическая теория шахмат, построенная в рамках теории множеств, прозвучала в докладе Э. Цермело на 5-м Международном конгрессе математиков в Кэмбридже (1912) [10]. Фактически, этот доклад открыл новое прикладное направление в математике, известное, как позиционные игры [11] и, в частности, успехи в этой области таковы, что современные шахматные программы обыгрывают даже чемпионов мира.

Устами Германа в финале оперы "Пиковая дама", премьера которой состоялась в 1890 г. в Петербурге, по сути, звучат пророческие слова: "Что наша жизнь? Игра!" Как ни странно, но именно исследование стратегий азартных игр оттачивало идеи комбинаторики и теории вероятностей в работах Паскаля, Бернулли, Эйлера и Чебышева [3], что привело Дж. фон Неймана в 1928 г. к строгому математическому определению стратегических игр [12], в рамках которых в настоящее время моделируется, например, управление системами в условиях конкуренции.

Приведенные примеры воплощения популярных игр в основательные математические концепции можно трактовать как управление определенным креативным процессом на основе GMP-стратегии [13] по критерию значимости исходных посылок и, таким образом, формализованные модели популярных игр выступают в роли универсумов, обобщение которых способствует плодотворному развитию математики. В этом контексте следует также рассматривать и всевозможные игры в домино, которые представляют интересный материал для исследования, однако его потенциал пока в полной мере раскрыт, хотя основания для оптимизма в этом направлении есть.

2. Классический набор домино – как комбинаторный объект

2.1. Из истории домино и его некоторые приложения.

Корни игры в домино ведут в древнюю Индию и Китай, однако укладки домино также тесно связаны с вопросами обеспечения прочности строительных сооружений, которая обеспечивается кладкой кирпича. Как показали раскопки посёлка Мергарх [14], технология кирпичной кладки известна человечеству ещё со времён первобытного общества, как минимум с VIII-го тысячелетия до н.э. Правила прочной кирпичной кладки (правила разрезки) дошли до нас в трактате римского архитектора Марка Витрувия (I в. до н.э.) [15]. Они исходят из того, что кирпич достаточно хорошо работает на сжатие и плохо на изгиб, поэтому при возведении конструкции из кирпича необходимо обеспечить его работу только на сжатие. К примеру, кладка на рис. 1а имеет поперечный разрез и не является прочной, а кладка на рис. 1б отвечает условиям прочности. Как видно из рис. 1, задача о прочной укладке кирпичей, фактически, эквивалентна задаче об укладке домино в виде прямоугольника, которая обладает особыми свойствами – она не имеет сквозных разрезов.

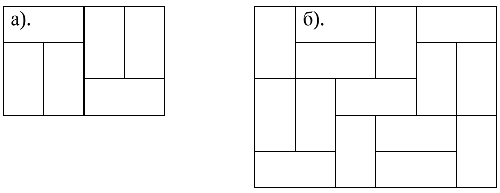


Рис. 1

Не так давно вопрос о прочных укладках комбинаторными методами удалось решить в общем виде и окончательный ответ гласит [16]: **прочное покрытие прямоугольника с помощью домино существует, если длина и ширина этого прямоугольника больше четырех, а его площадь четная; единственное исключение – прямоугольник размером** 6×6.

В XVIII в. игра в домино появилась в Италии и, вообще говоря, само слово "домино" происходит от латинского слова "dominus" – господин, отражающего тот факт, что всевозможные игры в домино обычно в качестве правил предусматривают некоторое отношение доминирования, по которому расставляются фишки в процессе игры. Однако, судя по всему, внимание математиков к этой игре не было достаточно основательным и долгое время домино являлось предметом занимательной математики. На этом пути комбинаторными методами, в частности, определено количество вариантов реализации упорядоченной цепи (или кольца) домино из 28 фишек, равное 7 959 229 931 520 $= 2^{13}\cdot 3^{8}\cdot 5\cdot 7\cdot 4231$ [18]; установлено число разбиений 28 фишек домино по

4 игрокам, которое оказалось равным $\frac{28!}{(7!)^4} \approx 4,725 \times 10^{14}$ и ненамного отличается от количества различных раздач карт в преферансе, равным $\frac{32!}{2\cdot(10!)^3} \approx 2,753 \cdot 10^{15}$ [18].

Однако совсем недавно в теории домино обнаружились очень глубокие обобщения, связанные с представлением фишек домино в виде димеров, которые рассматриваются на планарных графах [19]. Пусть Γ – конечный граф, а V и E – множества его вершин и ребер, соответственно. Подмножество ребер $w \subset E$ называется покрытием димерами графа Γ, если каждая вершина $v \in V$ инцидентна ровно одному ребру из w. В случае, когда Γ – планарный граф, удается определить количество различных покрытий димерами данного графа. Этим покрытиям отвечают определенные укладки домино, которые, по сути, можно рассматривать как систему спинов, поскольку в укладке фишка домино может занимать только одно из двух положений – вертикальное или горизонтальное. Гамильтониан $\mathcal{H}^{(D)}$ системы D-мерных спинов в представлении Гейзенберга имеет вид [20]:

$$\mathcal{H}^{(D)} = -J \sum_{<ij>} \overrightarrow{S_i^{(D)}} \cdot \overrightarrow{S_j^{(D)}}, \tag{1}$$

где спины $\overrightarrow{S_i^{(D)}}$ – D-мерные орты, J – параметр взаимодействия пары ближайших соседей $<ij>$ с параллельными спинами, локализованными в узлах i и j данной решетки спинов. При этом $(S_{i1}; S_{i2}; ...; S_{iD})$ – декартовы координаты векторов $\overrightarrow{S_i^{(D)}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{D} S_{in}^2 = 1$ для $1 \leq i \leq N$, N – количество узлов решетки и скалярное произведение в (1) представляет величина $\sum\limits_{n=1}^{D} S_{in} \cdot S_{jn}$. Для системы спинов, моделируемой планарной решеткой димеров в виде домино, спиновая размерность $D = 1$. В этом случае, благодаря связи димеров с дискретным комплексным анализом и их конформной инвариантности [19], удается построить решение двумерной модели Изинга, играющей важную роль в теории жидких пленок наноразмеров.

Таким образом, приведенные примеры указывают важные приложения домино и представляется актуальным рассмотрение данного объекта в рамках формальной теории.

Библиографический список

1. *Оре, О.* Теория графов [Текст] / О. Оре. – М.: Наука, 1968. – 352 с.
2. *Реньи, А.* Письма о вероятности [Текст] / А. Реньи. – М.: Мир, 1970. – 96 с.
3. *Стройк, Д.Я.* Краткий очерк истории математики [Текст] / Д.Я. Стройк. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
4. *Гальперин, Г.А.* Математические бильярды [Текст] / Г.А. Гальперин, А.Н. Земляков. – М.: Наука, 1990. – 288 с.
5. *Кориолис, Г.Г.* Математическая теория явлений бильярдной игры [Текст] / Г.Г. Кориолис. – М.: Гостехиздат, 1956. – 235 с.
6. *Максвелл, Дж.К.* Речи и статьи [Текст] / Дж.К. Максвелл. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1940. – 227 с.
7. *Больцман, Л.* Лекции по теории газов [Текст] / Л. Больцман. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 554 с.
8. *Кац, М.* Вероятность и смежные вопросы в физике [Текст] / М. Кац. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
9. *Синай, Я.Г.* Современные проблемы эргодической теории [Текст] / Я.Г. Синай. – М.: Физматлит, 1995. – 208 с.
10. *Цермело, Э.* О применении теории множеств к теории шахматной игры [Текст] / Э. Цермело // В кн. Матричные игры. Под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 167-172.
11. *Дж. фон Нейман* Теория игр и экономическое поведение [Текст] / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970. – 983 с.
12. *Дж. фон Нейман.* К теории стратегических игр [Текст] / Дж. фон Нейман // В кн. Матричные игры. Под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 173-204.
13. *Фирстов, В.Е.* Кибернетическая концепция и математические модели управления дидактическими процессами при обучении математике в школе и вузе [Текст] / В.Е. Фирстов. – Саратов: Издательский Центр "Наука", 2010. – 511 с.
14. *Бромлей, Ю.В.* История первобытного общества: эпоха первобытной родовой общины [Текст] / Ю.В. Бромлей / Институт этнографии имени Н.Н. Миклухо-Маклая. – М.: Наука, 1986. – С. 298.
15. *Марк Витрувий Поллион.* Десять книг об архитектуре [Текст] / Марк Витрувий Поллион. – М.: Изд-во Архитектура-С, 2006. – 328 с.
16. *Голомб, С.В.* Полимино [Текст] / С.В. Голомб. – М.: Мир, 1975. – 207 с.
17. *Перельман, Я.И.* Живая математика [Текст] / Я.И. Перельман. – Екатеринбург: Изд-во "Тезис", 1994. – 160 с.
18. *Виленкин, Н.Я.* Комбинаторика [Текст] / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1969. – 328 с.
19. *Dmitry Chelkak, Stanislav Smirnov.* Discrete complex analysis on isoradial graphs // Advances in Mathematics, 2011. V. 228. № 3. – P. 1590-1630.
20. *Стенли, Г.* Фазовые переходы и критические явления [Текст] / Г. Стенли. – М.: Мир, 1973. – 420 с.

О новом комплекте учебных пособий по дисциплине "Вводный курс математики"для студентов математических факультетов педвузов

И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева

В последнее время неуклонно увеличивается разрыв между уровнем математической (прежде всего, логической) подготовки выпускников средних общеобразовательных школ, пришедших учиться на математические факультеты педагогических вузов, и уровнем подготовки, необходимым студентам для успешного изучения математических дисциплин в высшей школе.

Математика, изучаемая в высшей школе, отличается от школьной математики прежде всего сложностью используемого математического языка, которая определяется специфическими для него логическими конструкциями. Именно поэтому проблемы, возникающие у студентов при изучении математических дисциплин, по существу, имеют логический характер и обусловлены тем, что студенты с большим трудом осваивают этот язык. Положение усугубляется еще и тем, что уровень логической подготовки выпускников средних школ в настоящее время заметно снижается. В такой ситуации трудно даже начать процесс обучения математике в вузе. Поэтому очень важно, чтобы в самом начале обучения студенты активно овладевали базовыми логическими знаниями, необходимыми им для успешного обучения и в будущей преподавательской деятельности. Все это возможно осуществить в рамках дисциплины "Вводный курс математики", изучаемой в первом семестре первого года обучения.

Дисциплина "Вводный курс математики" направлена на восполнение пробелов в логической подготовке студентов, столь необходимой для успешного изучения всех математических дисциплин. Целью освоения этой дисциплины является формирование комплекса теоретико-множественных и логических знаний и умений, необходимых для развития способности понимать устную и письменную математическую речь и пользоваться математическим языком в соответствии с его логическими нормами.

Логическая составляющая математического языка явно недооценена в преподавании математики в школе и вузе. И это особенно досадно, когда речь идет о преподавании ее студентам педагогического вуза, поскольку обучать будущих учителей правильно рассуждать, точно и четко выражать свои мысли важнее, чем обучать их технике вычислений или преобразований. Кроме того, не хватает широко доступных учебных пособий по дисциплине "Вводный курс математики", содержащих как теоретический, так и практический материал. Желание исправить ситуацию, использовать обучение логическим основам математического языка как средство формирования логической грамотности студентов и как следствие – повысить качество обучения математике в целом, привело сначала к разработке логико-ориентированного Вводного курса математики [6], а затем – к написанию взаимодополняющих учебных пособий "Практикум по Вводному курсу математики" [4] и "Вводный курс математики" [5]. Оба пособия предназначены для студентов высших педагогических учебных заведений, изучающих дисциплину "Вводный курс математики", а также для преподавателей, ведущих занятия по этой дисциплине. Оба пособия подготовлены на основе материалов, разработанных для занятий по Вводному курсу математики, проводимых авторами в течение нескольких лет на математическом факультете Московского педагогического государственного университета (МПГУ).

При написании пособий мы придерживались следующей позиции: 1) студентов необходимо специально обучать логическим основам математического языка, в первую очередь, логическим элементам математического языка и понятиям логического характера; 2) необходимо использовать обучение логическим основам математического языка как средство формирования логической компетентности студентов, как средство повышения эффективности обучения математике в целом.

В 2010 году в издательстве МПГУ было опубликовано учебное пособие "Практикум по Вводному курсу математики" [4]. Это пособие имеет гриф УМО по специальностям педагогического образования. Практикум состоит из предисловия, 22 разделов, трех приложений и списка литературы.

Учебное пособие [4] содержит систему логико-ориентированных задач и упражнений, предназначенных для использования на занятиях по Вводному курсу математики. В пособии представлены задачи и упражнения по следующим темам: Множества. Математические предложения и их строение. Строение математических определений и теорем. Математические рассуждения и их строение. Методы доказательства. Бинарные отношения. Функции. Каждому разделу (занятию) предшествует краткое изложение теоретического материала, содержащего определения, необходимые для решения задач этого раздела.

Учебный материал пособия разделен на 22 раздела, условно названных занятиями, и рассчитан на семестровый курс. Занятия 15, 17 и 18, посвященные правилам построения и структуре метаматематических доказательств, ввиду их особой сложности, отмечены звездочкой и не являются обязательными для изучения. Но если их проводить, то следует отвести по 4 уч. ч. на каждое, что вполне возможно, если на курс отведено 54 уч. ч. Занятия 20 и 21, посвященные бинарным отношениям и функциям, при желании можно проводить с определенной корректировкой их содержания сразу после темы "Множества". В приложениях приведено примерное содержание контрольной работы по темам занятий 1-12 и итоговой зачетной работы, а также программа дисциплины "Вводный курс математики".

В конце каждого занятия даны краткие методические рекомендации, в которых указано, на что следует обратить особое внимание, а также отмечены задачи, вызывающие трудности у студентов. Указано, какие задачи целесообразно решить на практическом занятии, а какие включить в домашнее задание. В домашнем задании отмечены номера задач, решение которых рекомендуется проверить на следующем занятии. Кроме того, указаны номера задач, рекомендуемых для использования в самостоятельных (проверочных) работах длительностью 5-10 минут на следующем занятии.

Годом позже, в 2011 году, Издательским центром "Академия" было издано учебное пособие "Вводный курс математики" [5]. Это учебное пособие имеет гриф УМО по образованию в области подготовки педагогических кадров и рекомендовано для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению "Педагогическое образование" (профиль "Математика"). Это пособие широко доступно не только студентам математического факультета МПГУ, но и студентам других вузов.

Назначение пособия "Вводный курс математики", также как и пособия "Практикум по Вводному курсу математики" – помочь студентам овладеть минимумом логических и теоретико-множественных знаний и умений на уровне, необходимом для успешного изучения математических дисциплин в педагогическом вузе, обеспечить базу для формирования логической грамотности студентов. Учебное пособие [5] помогает студентам адаптироваться к языку высшей математики. При изложении материала уделяется большое внимание формированию у студентов специальных и общекультурных компетенций, прежде всего связанных с культурой математической речи, логической культурой и культурой математического мышления, а также подготовке студентов к использованию полученных знаний и умений в текущей учебной и в будущей педагогической деятельности.

Учебное пособие "Вводный курс математики" [5] состоит из предисловия, четырех глав, списка литературы, двух приложений (в которых приведены латинский и греческий алфавиты с указанием названий букв на русском языке), указателя терминов и указателя символов.

Пособие содержит следующие главы: Множества и функции. Математические предложения и их строение. Математические определения и теоремы и их строение. Математические рассуждения и их строение. В первой главе изложены основы языка теории множеств. В этой же главе рассмотрены важнейшие математические понятия – бинарное отношение и функция, а также связанные с ними понятия. Вторая глава посвящена математическим предложениям: логическому строению предложений, их символической записи, операциям над предложениями, законам логической равносильности предложений. В третьей главе обсуждаются вопросы, связанные с логическим строением математических определений и теорем, с понятиями обратной теоремы, необходимого условия и достаточного условия. В этой главе рассмотрены также наиболее важные виды математических теорем. Четвертая глава посвящена математическим рассуждениям: понятиям правильного и неправильного рассуждения, логическим методам доказательств, структуре математических доказательств, а также специальному методу доказательства – методу математической индукции.

Каждая глава пособия состоит из нескольких подразделов, каждый из которых содержит две части: теоретическую и практическую. В отличие от практикума [4], в пособии [5] более полно представлена теория и предложен более широкий набор задач. Кроме того, изложение теории сопровождается большим количеством примеров, которые поясняют и иллюстрируют излагаемый материал, а также помогают в решении задач. Примеры, иллюстрирующие теоретический материал, а также задачи для самостоятельного решения, с одной стороны, опираются на школьный курс математики, позволяя повторить его на новом уровне (что обеспечивает преемственность со школой), а с другой – тесно связаны с материалом, изучаемым в рамках математических дисциплин в педагогическом вузе (что обеспечивает межпредметные связи). При написании пособия были использованы формулировки определений и теорем из учебников по математике для школы и вуза.

Учебное пособие "Вводный курс математики" [5] содержит задачи разного уровня сложности как математического, так и логического характера, что позволяет реализовать индивидуальный подход к учащимся. Более сложные задачи отмечены звездочкой. По всем темам число типовых задач достаточно велико, что позволяет преподавателям использовать эти задачи не только на практических занятиях и для домашних заданий, но и для разных форм контроля и для самостоятельной работы студентов. Кроме того, преподаватель имеет возможность выбора задач с учетом порядка изучения соответствующих тем в математических курсах. Многие задачи снабжены подробными указаниями. При составлении задач учтены типичные логические ошибки студентов. Многие задания можно легко преобразовать в форму теста и использовать их для компьютерного тестирования с целью самоконтроля и контроля знаний студентов по дисциплине "Вводный курс математики". Помимо традиционных задач, в некоторой степени перекликающихся с аналогичными задачами из изданий [1, 2, 3], в пособии [5] представлено довольно много оригинальных авторских задач.

Отметим, что в главе 1 ("Множества и функции") понятия, связанные с функциями и бинарными отношениями, сначала вводятся на интуитивном уровне. В этой же главе дается уточнение понятия "функция" в терминах бинарных отношений. Но этот материал отмечен звездочкой как сложный. Отметим, что, по усмотрению преподавателя, изучать его можно либо в главе 1, либо сразу после изучения глав 2 и 3. Кроме того, подразделы 4.2, 4.4 и 4.5, посвященные математическим доказательствам, являются особо сложными и не являются обязательными для изучения.

Доступность и неформальный стиль изложения материала в пособии [5] сочетается с достаточной математической точностью и четкостью представления материала на разумном уровне строгости. Изложение каждой новой темы получает убедительную мотивацию. Материал излагается ясным и четким языком, делаются акценты на особо важном материале; практически весь излагаемый материал иллюстрируется и поясняется примерами. Почти всем обобщениям и формулировкам определений предшествует рассмотрение более простых частных случаев и конкретных примеров.

Отметим некоторые особенности содержания пособия “Вводный курс математики” [5].

1. При изучении темы “Математические предложения и выражения” наряду с высказываниями и высказывательными формами изучаются имена и именные формы. Обычно в аналогичных пособиях по Вводному курсу математики речь идет только о высказываниях и высказывательных формах. В то же время изучение имен и именных форм не менее важно, поскольку они столь же часто используются в математическом языке и в языке обучения математике, правда, в школьном курсе их принято называть выражениями (числовыми или буквенными).

2. При изучении темы “Логические операции над предложениями” вводятся логические операции не только над высказываниями, но и над высказывательными формами. Нередко при первом знакомстве с логическими операциями идет разговор только об операциях над высказываниями, однако в математическом языке наиболее часто применяются операции над высказывательными формами. Кроме того, введению логических операций над высказываниями и высказывательными формами предшествует рассмотрение кванторов. Таким образом, студенты сразу знакомятся с кванторными конструкциями естественного математического языка, в первую очередь, использующими ограниченные кванторы, наиболее распространенные в математическом языке.

3. Особое внимание в пособии “Вводный курс математики” [5] уделяется заданиям на выявление логической структуры математических определений и теорем. Это обусловлено тем, что при работе с математическими определениями и теоремами у студентов часто возникают трудности из-за непонимания их логической структуры. Логико-ориентированное изучение во Вводном курсе математики формулировок определений и теорем помогает студентам преодолевать эти трудности, способствует лучшему усвоению и пониманию этих формулировок, а также помогает делать первые шаги при построении доказательств теорем. Для выявления логической структуры математических предложений удобно использовать логическую символику.

4. Большое внимание в пособии “Вводный курс математики” [5] уделено использованию логической символики при записи математических предложений и определений. В этом пособии представлен целый ряд задач, направленных на обучение грамотному использованию логической символики при записи предложений и определений. При этом логическая символика рассматривается не только и не столько как средство достижения краткости и наглядности записи определений и теорем, сколько как средство выявления их логического строения и обеспечения точности и однозначности понимания их смысла, не оставляющее места неопределенности и разночтению.

5. Несколько разделов пособия [5] посвящены математическим доказательствам – правилам их построения и их логической структуре. Традиционно во Вводном курсе математики изучаются логические аспекты только математического языка. В то же время, уже в школьном курсе математики учащиеся имеют дело с доказательствами. Однако, что такое доказательство, какова логическая структура доказательств, какие правила используются при их построении и другие вопросы, связанные с доказательствами, не обсуждаются даже в педвузе, за исключением курса математической логики. В то же время, об этом можно и нужно говорить уже на первом курсе, а именно во Вводном курсе математики. На соответствующем уровне доступности и строгости идет речь о математических доказательствах в главе 4 пособия “Вводный курс математики”.

В заключение отметим, что оба учебных пособия [4] и [5] содержат систематическое изложение учебной дисциплины “Вводный курс математики” и содержание каждого из них соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100 “Педагогическое образование” (профиль “Математика”).

Несомненно также, что эти пособия будут полезными не только студентам педагогических вузов, но и студентам классических университетов, обучающимся по математическим специальностям. Кроме того, содержащийся в пособиях материал может быть полезен широкому кругу читателей, изучающих математику и интересующихся ее логическими основаниями.

Студенты и преподаватели математического факультета МПГУ успешно используют пособия [4] и [5] на занятиях по Вводному курсу математики. Опыт показывает, что использование этого комплекта пособий способствует повышению эффективности усвоения студентами материала Вводного курса математики и повышению уровня логической подготовки будущих учителей математики, что способствует более эффективному изучению других математических дисциплин в педвузе в целом.

Библиографический список

1. *Михайлов, А.Б.* Математический язык в задачах: сборник задач [Текст] / А.Б. Михайлов, А.И. Плоткин, Е.А. Рисс, Е.Ю. Яшина. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2005. – 236 с.
2. *Моторинский, Ю.А.* Вводный курс математики: Методическая разработка [Текст] / Ю.А. Моторинский, Б.Д. Пайсон. – Барнаул: Изд-во БГПУ, 2006. – 69 с.
3. *Назиев, А.Х.* Вводный курс математики. Элементы математической логики: учеб. пособие [Текст] / А.Х. Назиев. – Рязань, 2000. – 125 с.

4. *Тимофеева, И.Л.* Практикум по Вводному курсу математики: учеб. пособие для студентов высш. пед. учебн. заведений [Текст] / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева, Е.В. Лукьянова / под ред. В.Л. Матросова. – М.: МПГУ, 2010. – 130 с.
5. *Тимофеева, И.Л.* Вводный курс математики: учеб. пособие для студентов высш. пед. учебн. заведений [Текст] / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева, Е.В. Лукьянова / под ред. В.Л. Матросова. – М.: Издательский центр "Академия", 2011. – 240 с.
6. *Тимофеева, И.Л.* О программе "Вводного курса математики" [Текст] / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева // Актуальные проблемы математического образования в школе и педагогическом вузе: материалы IV всероссийской научно-практической конференции. – Барнаул, 2007. – С. 391-396.

Об обучении математическому моделированию при изучении дифференциальных уравнений в экономическом вузе

Д.С. Миронов, Ю.Б. Мельников

Курс высшей математики в вузе является неотъемлемым компонентом экономического образования и необходим для формирования компетентного специалиста. Для умения применять полученные знания необходимо, чтобы теоретический материал был использован при моделировании социально-экономических задач и ситуаций. В противном случае студент может воспринимать математику как малопонятную и бесполезную науку. Поэтому обязательным условием успешности обучения математике студентов экономических и гуманитарных специальностей является применение математического аппарата для решения задач прикладного характера. Это применение, в основном, сводится к математическому моделированию, хотя при изучении математики не менее важны и другие задачи: формирование специфической научной идеологии, абстрактного мышления, воспитание "интеллектуальной честности" и др.

С одной стороны, под моделью понимается результат абстрагирования при исследовании моделируемого объекта. При этом исследователь выделяет свойства и характеристики, наиболее существенные с точки зрения целей исследования, и осуществляет абстрагирование от всех остальных особенностей исследования объекта. С другой стороны, например, в теории моделей (область математической логики) термин "модель" означает результат конкретизации теории [1]. С этой точки зрения модель теории – это объект, для которого выполняются все теоремы этой теории.

Математические модели не описывают непосредственно реальную действительность, они представляют собой отражение специальных "предметных моделей": экономических, физических и т.д. Область деятельности, в которой рассматриваются такие модели, будем называть "предматематикой". Строго говоря, обучение "предматематике" не является задачей математических курсов, однако обучение математике без использования предметных моделей для экономистов и инженеров является ущербным, неполноценным. Необходимо научить строить модели, оценивать их адекватность, анализировать, применять и т.д. Для этого в качестве основной эталонной модели математики целесообразно рассматривать её аппаратную модель [4].

Таблица 1

Методологический аппарат математики		
Обеспечивает развитие математического аппарата		
Понятийный аппарат	**Аналитический аппарат**	**Аппарат контроля адекватности**
Обеспечивает преобразование информации к виду, типовому для математики (например, в виде уравнения)	Обеспечивает обработку информации, представленной в стандартном виде, в частности, преобразование из одной формы в другую	В математике его основу составляет *доказательный аппарат*

Обычно математическое моделирование начинается с построения или выбора математического объекта, достаточно адекватно отражающего особенности предметной (физической, экономической и др.) модели. В процессе обучения нередко приходится решать обратную задачу: для математического объекта искать прообраз в виде некоторой предметной модели. Богатые возможности для этого предоставляются, например, при изучении дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение, полученное в результате исследования какого-либо реального явления и процесса, в сочетании с интерпретацией его элементов (переменных, выражений, отношений), мы будем называть дифференциальной моделью этого явления или процесса. Такую трактовку мы называем формально-конструктивной [3], см. табл. 2.

Таблица 2

Интерфейсный компонент модели	**Модельно-содержательный компонент модели**		
	Носитель модели	Система характеристик	Система отношений
Это система связей между моделируемым объектом и компонентами моделирующего объекта	Это множество элементов, из которых состоит объект в рамках данной модели	Это множество функций, определенных на носителе модели. Характеристика с числовым значением называется величиной (скалярной)	Это множество отношений на носителе и множестве характеристик.

Рассмотрим пример составления модели для экономической задачи.

Пример 1. Допустим, что проводится рекламная кампания о некоторой продукции A. Будем считать, что после рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции пропорциональна как числу людей из целевой группы, знающих о товаре (за счёт передачи информации в личном общении), так и числу потенциальных покупателей, которые пока о нём ничего не знают. Построить математическую модель для описания зависимости количества потенциальных покупателей, знающих о товаре, от времени.

В условии задачи описана экономическая модель. Её преобразование в математическую модель начнём с формирования интерфейсного компонента.

Под целевой группой мы будем понимать совокупность потенциальных покупателей. Обозначим количество потенциальных покупателей (т.е. объём целевой группы) через m, а количество людей из целевой группы, знающих о товаре в произвольный момент времени t, через $y(t)$. Скорость изменения числа людей, знающих о данной продукции, равна $\frac{dy}{dt}$. По предположению, она пропорциональна y и $(m-y)$, т.е. пропорциональна $y(m-y)$. Обозначим коэффициент пропорциональности через p.

Таким образом, отношение, описанное в экономической модели, можно представить в форме $\frac{dy}{dt}=py(m-y)$. С точки зрения теории моделирования, основанной на формально-конструктивном определении модели, данное уравнение нельзя трактовать как "математическую модель", поскольку, во-первых, без описания переменных и обоснования трактовки выражений (т.е. без интерфейсного компонента) это равенство собственно моделью не является. Во-вторых, выражению $\frac{dy}{dt}=py(m-y)$ можно поставить в соответствие несколько моделей: смысловую модель текста, графическую, стилевую и др. Нас интересует смысловая модель текста, в которой рассматриваются смысловые единицы, т.е. фрагменты текста, допускающие самостоятельную интерпретацию, причём эта самостоятельная интерпретация совпадает с толкованием, предусмотренным всем текстом. Например, в словосочетании "царская водка" слово "водка" смысловой единицей не является, поскольку трактовка этого слова как обозначения горячительного напитка не имеет прямого отношения к смеси азотной и серной кислот. В смысловой модели текста рассматриваются такие характеристики как сложность смысловой единицы, трудность восприятия, уровень субъективной новизны и др. В графической модели текста рассматриваются всевозможные символы и фрагменты (включая пробелы и переносы) текста. Рассматриваются такие характеристики как "читаемость" текста, гарнитура и размер шрифта или особенности почерка.

Отметим, что в рамках формально-конструктивного определения модели (см. табл. 1) само по себе дифференциальное уравнение моделью не является, оно представляет лишь её модельно-содержательный компонент. В частности, можно построить разные модели с одним и тем же модельно-содержательным компонентом, что является одним из проявлений полимодельности.

Пример 2. В некоторое помещение на определённое время заходит большое число посетителей (театральный спектакль, концерт, презентация). В этом помещении продаётся поштучно товар A (компакт-диск, репродукция, альбом и т.п.). Посетитель в единицу времени T покупает не более одного экземпляра товара A. Под актуальным спросом на товар A в единицу времени T будем понимать количество товара (в экземплярах), купленного за данную единицу времени T. Допустим, что в каждый момент времени удельный спрос (отношения объёма товара, купленного за единицу времени, к объёму имеющегося товара) прямо пропорционален количеству посетителей, не купивших товар. Найти зависимость количества проданного товара от времени.

На этой задаче также целесообразно продемонстрировать процесс построения математической модели: построение предметной модели (выделение основных элементов, характеристик, отношений) и преобразование этой модели в математическую модель. Экономическая модель представлена в условии задачи. Преобразуем её в математическую модель.

Сначала формализуем интерфейсный компонент. Пусть m – количество посетителей (количество проданного товара напрямую зависит от количества посетителей), y – количество проданного товара (по условию задачи), t – длительность промежутка времени от начала покупок (начала антракта, начала презентации и др.) до текущего момента времени, p – коэффициент пропорциональности.

В описании экономической модели, приведённой в условии задачи, рассматривается удельное изменение количества проданного товара, т.е. отношение *изменения* количества товара непосредственно к *количеству товара.* При преобразовании этой информации в математическую форму получаем выражение $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$.

Эта величина, по условию, пропорциональна количеству посетителей, не купивших товар к данному моменту времени. В предметной модели предполагается, что посетитель покупает не более одной единицы товара, поэтому количество посетителей, не купивших товар, равно $(m-y)$. Отсюда получаем уравнение $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = p(m-y)$. В итоге имеем такое же дифференциальное уравнение, что и при решении примера 1.

Явление полимодельности открывает новые возможности в области обучения построению математических моделей. Обычно основная проблема состоит в том, что для построения математической модели требуется хорошее владение соответствующей предметной моделью. Однако высокая насыщенность курса математики обычно не позволяет "безнаказанно" отвлекаться на рассмотрение, например, экономических моделей. Кроме того, преподаватель математики обычно не является специалистом в соответствующей предметной области. Один из вариантов выхода из этой ситуации состоит в том, чтобы в качестве исходной предметной области выбирать математику, т.е. строить математические модели математических объектов.

Пример 3. Рассмотрим полярную систему координат на плоскости. Найти кривую, у которой при изменении ϕ изменение ρ пропорционально площади прямоугольника σ, изображённого на рис. 1.

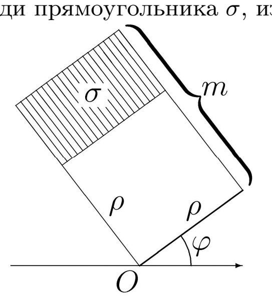


Рис. 1. Рисунок к примеру 3

Изменение ρ при изменении ϕ можно трактовать как $\frac{d\rho}{d\varphi}$. Площадь σ прямоугольника равна разности площади всей фигуры и площади квадрата: $m\rho - \rho^2 = \rho(m-\rho)$. Введём в интерфейсный компонент положительный коэффициент пропорциональности k, тогда $\frac{d\rho}{d\varphi} = k\rho(m-\rho)$.

Использование математических конструкций в качестве объектов для моделирования открывает следующие возможности: во-первых, обучение моделированию (построению, анализу, интерпретации, оценке адекватности результата) осуществляется без отрыва от изучения собственно математического содержания, во-вторых, обеспечивается более глубокое изучение свойств как моделируемой математической конструкции А, так и математического объекта В, моделирующего объект А. В-третьих, иногда моделирование математических объектов с помощью других математических объектов приводит к выявлению так называемых моделей-полиад. Например, векторную алгебру можно рассматривать как модель-триаду, составляющими которой являются векторно-геометрическая модель (оперирующая с направленными отрезками), векторно-символическая модель (носитель которой состоит из выражений вида $\vec{a} + 2\vec{b} \perp \vec{a}$, $2\vec{p} = \vec{q} - \vec{r}$ и т.п.), координатной модели (в которой рассматриваются строки координат и их компоненты). Утверждение, что эта система моделей образует модель-триаду означает, что любое утверждение, сформулированное в терминах одной из моделей, может быть переформулировано в терминах другой модели без потери информации, т.е. при обратной интерпретации получится утверждение, логически эквивалентное исходному (хотя, скорее всего, не совпадающее с ним дословно). Например, утверждение о коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в рамках векторно-символической модели может быть представлено формулой $\exists\lambda\left(\vec{a} = \lambda\vec{b}\right)$, причём последняя формула эквивалентна исходному утверждению (для ненулевых векторов). Обычно модели-полиады используются неявно, с фактическим отождествлением компонент. Но явное выделение компонент моделей-полиад и целенаправленное их использование позволяет в исследовании эффективно комбинировать возможности математического аппарата каждой из компонентов, совершенствовать механизмы контроля адекватности результатов и др.

Библиографический список

1. *Ершов, Ю.Л.* Математическая логика [Текст] / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
2. *Кейслер, Г.* Теория моделей [Текст] / Г. Кейслер, Ч.Ч. Чен. – М.: Мир. – 1977. – 616 с.
3. *Мельников, Б.Н.* Диалоговая теория как инструмент интеграции различных научных дисциплин в рамках системного подхода / Б.Н. Мельников, Ю.Б. Мельников // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11. – Ч. 3. – С. 38-43.
4. *Мельников, Ю.Б.* Алгебраический подход к созданию учебных презентаций по математике [Текст] / Ю.Б. Мельников // Образование и наука. – 2011. – № 5(84). – С. 129-141.
5. *Мельников, Ю.Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Монография [Текст] / Ю.Б. Мельников. – Екатеринбург: Уральское Изд-во, 2004. – 384 с.

Обучение использованию стратегий как инструмент управления учебной деятельностью

Ю.Б. Мельников, А.И. Романенко

Стремительное внедрение компьютерных технологий практически во все области человеческой деятельности, решая ряд традиционных проблем, выдвигает на первый план новые проблемы и задачи, подчас весьма неожиданные. Например, во все века вопросы о том, для чего нужна математика и что значит "хорошо знать математику" не вызывали особых разночтений, ответы на эти вопросы представлялись очевидными и почти не требующими комментариев. Однако с приходом эры компьютеров ситуация радикально изменилась и виртуозное владение вычислительным аппаратом математики выходит на второй план, поскольку вычислительный аппарат встраивается в программное обеспечение профессиональной деятельности (в кассовые аппараты, системы автоматического проектирования, бухгалтерские программы и т.д.). Для человека, не являющегося профессиональным математиком, при изучении математики приоритетным является умение формализовать информацию, представлять её в математической форме, анализировать математические модели, интерпретировать математические результаты в соответствующей предметной области, и, при необходимости, общаться с профессиональными математиками. В этих условиях в обучении математике нельзя ограничиваться только обучением решению математических задач, важно формировать компетенции в области управления деятельностью: постановке задач, построению планов деятельности, комплексной оценке адекватности деятельности и её результатов. В качестве инструмента для формирования этих компетенций мы рассматриваем обучение математической деятельности как обучение использованию стратегий. Эта идея перекликается со стратегическим подходом к обучению математике [2,3].

Как пример применения стратегии формализации понятий можно рассмотреть введение понятия арифметической и геометрической прогрессии. Возможны три варианта введения понятия: 1) дедуктивный вариант с использованием объяснительно-иллюстративного метода (понятие постулируется, а потом поясняется); 2) индуктивный вариант (получение определения как результата обобщения достаточно большого числа примеров); 3) "обобщённо-модельный", который состоит либо в построении нового понятия по аналогии с уже известным понятием или с помощью "вспомогательного" понятия, введение которого требует меньших усилий.

Первый вариант введения понятия "прогрессия" не отвечает задаче обучения самостоятельной деятельности (не ограничивающейся усвоением уже известных конструкций), второй может потребовать чрезмерных усилий для получения математически корректного определения. Поэтому применим третий – "обобщённо-модельный" – вариант. В качестве вспомогательного понятия рассмотрим последовательность, поскольку это более общее понятие проще формализовать. На начальном этапе обучаемым предъявляются (или они строят самостоятельно) различные цепочки чисел. Попытка формализовать понятие последовательности с помощью словосочетаний "цепочка чисел" и т.п., оценивается как неудачная, поскольку "цепочка" не рассматривается как математическое понятие (ясно, что понятие цепи в теории графов в данном случае к делу отношения не имеет). Один из типовых планов, входящих в стратегию формализации понятий, состоит в построении *экзоструктурной модели* объекта, т.е. построении модели, в которой раскрываются связи составляющих моделируемого объекта с элементами "внешней среды". Например, построение экзоструктурной модели может быть связано с установлением цели или мотивов введения рассматриваемой конструкции. Обычно объекты линейно упорядочивают с целью упрощения адресации к конкретному объекту: первый объект, второй объект и др. Следовательно, запись чисел в цепочку позволяет по данному номеру установить конкретный элемент последовательности. Ситуация, когда одному элементу (в данном случае, натуральному числу) ставится в соответствие некоторый объект (член последовательности с данным номером), в математике обычно моделируется как функция. Таким образом, обучаемые приходят к выводу, что последовательность – это функция. Выявление особенностей именно этой функции приходит к выводу, что областью ее определения является множество натуральных чисел. На этом этапе сложились благоприятные условия для применения стратегии формулирования определений (описание которой выходит за рамки данной работы).

В наш прагматичный век (как, впрочем и в любой другой век) актуальным является вопрос "зачем мы это делаем", в данном случае – зачем нам строгое определение последовательности? Один из вариантов ответа состоит в том, что одной из важнейших целей изучения математики является формирование умения формализовать информацию, представлять её в некотором стандартизованном виде. Важность этого умения обусловлена тем, что научный и административный аппараты предназначены для обработки только той информации, которая представлена в некотором стандартном виде, типовом представлении. С этой точки зрения представление последовательности как функции позволяет задавать последовательность с помощью типовых способов задания функции. Таким образом, для последовательности можно конкретизировать три типовых способа задания: формулой, графиком, таблицей. Уточняя последний вариант, получаем, что запись последовательности в виде цепочки чисел представляет собой "усечённый вариант" задания функции таблицей значений (первые строки в таблицах значений для всех последовательностей совпадают, поэтому их можно не писать).

В настоящий момент формализовано большое число стратегий математической деятельности: стратегия составления уравнений, стратегия решения уравнений, стратегия решения геометрических задач "на вычисление", стратегия решения задач с использованием аппарата линейной алгебры и др. Накопленный опыт позволяет сделать вывод о возможности обучения использованию стратегии без систематического явного изучения самой стратегии.

Обучение использованию стратегий можно рассматривать как один из вариантов проблемного обучения. Рассмотрим модель применения метода восходящего анализа с использованием иерархической модели стратегии.

Таблица 1

Иерархическая модель стратегии

Механизм развития		
Носитель	**Характеристики**	**Отношения**
Набор ЦМД	Отображения, ЦМД сопоставляющие метод построения планов, необходимые для этого ресурсы и др.	Принадлежность ЦМД к определённому классу ЦМД, разные сравнения ЦМД
Целевая модель деятельности (ЦМД)		
Носитель	**Характеристики**	**Отношения**
Набор целей	Отображения, типовым целям сопоставляющие типовые планы их достижения, другие характеристики целей	Принадлежность цели к определённому классу целей, разные сравнения целей
Цель		
Носитель	**Характеристики**	**Отношения**
Набор эталонных моделей результата деятельности (ЭМРД)	Оценки уровня сложности ЭМРД, объективной и субъективной новизны ЭМРД и др.	Принадлежность ЭМРД к определенному классу, сравнение разных ЭМРД и др.

В рамках иерархической модели стратегии метод восходящего анализа следует рассматривать как составляющую механизма развития стратегии. Реализация стратегии начинается с построения цели: построения или обогащения эталонных моделей деятельности, оценки их адекватности. Следующий этап реализации стратегии можно трактовать как построение ЦМД (целевой модели деятельности): подбор известных типовых планов, оценка их адекватности, в частности, уровня сложности и ресурсоёмкости (например, трудоёмкости) восприятия плана исполнителем, сложности и ресурсоёмкости его реализации, сравнение различных типовых планов по различным параметрам.

В методе восходящего анализа типовые планы сводят достижение цели ко вторичным, "подчинённым" целям. В случае, если выбранный план гарантирует достижение цели, ЦМД считается полной. В противном случае (например, если некоторые пункты воспринимаются исполнителем как цели, способ достижения которых не конкретизирован или неизвестен исполнителю), для построения плана применяется механизм развития стратегии. В методе восходящего анализа основу механизма развития стратегии составляет процедура развёртывания полученного плана, состоящая в поэтапной замене вторичных целей на типовые планы их достижения.

Например, надо найти арифметическую прогрессию, у которой 7-й член равен 15, а 8-й – равен 17. Формализация цели состоит в выборе оптимального типового способа задания прогрессии: с помощью формулы n-го члена, с помощью таблицы значений и, наконец, с помощью графика. Сравнительный анализ приводит к выводу об оптимальности формы ответа в виде формулы. Таким образом, исходная цель трансформировалась в две вторичные цели: нахождения первого члена прогрессии и нахождения её разности. Типовой план нахождения разности состоит в нахождении двух последовательных членов последовательности и вычислении разности между ними. В данном случае этот фрагмент типового плана приводит к полной ЦМД, которая состоит в вычислении разности между известными восьмым и седьмым членами последовательности. В результате вычисления получаем, что искомая разность равна 2. Осталась достичь последней цели: найти первый член исходной последовательности. Введение переменных выводит нас за пределы метода восходящего анализа, поэтому можно применить типовой план, состоящий в построении новой арифметической последовательности, у которой первый член равен 15, а разность равна (-2). Тогда седьмой член новой последовательности будет равен первому члену исходной последовательности. Этот типовой план можно трактовать как результат применения стратегии смены ролей и приоритетов – одной из семи базовых исследовательских стратегий [1]. В итоге получаем, что первый член исходной последовательности равен $15+(-2)\cdot(7-1)=3$.

Отметим, что в общем случае механизм развития стратегии не сводится к поэтапной замене целей на типовые планы их достижения. В случае, когда мы выходим за рамки метода восходящего анализа, механизм развития стратегии может включать в себя построение требуемого плана с помощью конкретизации или обобщения некоторого плана, комбинирования известных типовых планов, построения плана по аналогии (метод моделирования) и др.

Теоретический анализ и накопленный опыт обучения позволяют сделать следующие выводы. Во-первых, требуется дополнительное исследование для научно обоснованного определения уровня владения стратегиями: от умения действовать по заранее освоенному алгоритму до способности создавать собственные стратегии, в том числе с использованием эвристик. Во-вторых, добиться ощутимого прогресса у обучаемых в области использования стратегий можно только при условии создания специального учебно-методического обеспечения: учебников, системы заданий (в частности, индивидуальных домашних заданий) и использовании специальных методик, технологий или приёмов обучения. В-третьих, по-видимому, у каждого обучаемого имеется определённый предел развития компетенций в области использования стратегий и достижение им более высокого уровня является практически невыполнимой задачей. В-четвёртых, обучение использованию стратегий, как разновидность проблемного обучения, требует особого отношения к ошибкам обучаемых: умение ошибаться и более того, умение целенаправленно проводить рассуждения, потенциально или даже явно ошибочные, нередко является одним из условий успешности применения многих стратегий для построения планов деятельности.

Библиографический список

1. *Мельников, Ю.Б.* Алгебраический подход к математическому моделированию и обучению математической и "предматематической" деятельности [Текст] / Ю.Б. Мельников, К.С. Поторочина // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – № 3. – С. 19-24.
2. *Тестов, В.А.* Стратегия обучения в современных условиях [Текст] / В.А. Тестов // Педагогика. – 2005. – № 7. – С. 12-18.
3. *Тестов, В.А.* Стратегия обучения математике [Текст] / В.А. Тестов. – М.: Технологическая Школа Бизнеса, 1999. – 304 с.

Формирование практического мышления студентов вузов в процессе реализации расчетных проектов по математике при организации дистанционной формы обучения

В.В. Богун

Как известно, под мышлением подразумевается умственная и практическая деятельность человека, предполагающая систему включенных в нее действий и операций преобразовательного и познавательного (ориентировочно-исследовательского) характера. Мышление является сложным психологическим процессом, для которого характерны обобщенность и опосредованность, что и позволяет познавать как наглядные связи, отношения объектов и явлений, так и их сущность.

Существует определенное количество категорий классификации мышления, однако мы остановимся на разделение мышления на виды согласно характеру мышления, то есть на теоретическое и практическое.

Согласно Б.М. Теплову, деятельность теоретического мышления направлена на нахождение общих закономерностей явлений и процессов, тогда как практическое мышление ориентировано на решение конкретных практических задач. Теоретическое мышление строится на основе теоретических рассуждений и умозаключений, основная цель оперирования которыми заключается в познании законов и правил, согласно которым реализуются определенные изучаемые процессы и явления. Практическое мышление строится на основе суждений и умозаключений, основанных на решении практических задач, что определяет основная цель мышления, которая заключается в разработке средств практического преобразования действительности (постановка цели, создание плана, проекта, схемы). Оба вида мышления неразрывно связаны с практикой, однако если цель теоретической деятельности состоит в проверке на практике только конечных результатов, то цель практической деятельности состоит в пошаговом решении необходимой задачи.

Теоретическое понятийного мышление направлено на решение поставленной задачи в уме с начала и до конца, пользуясь готовыми заранее известными знаниями, выраженными в понятиях, суждениях и умозаключениях. Сущность теоретического образного мышления состоит в использовании представлений и образов, которые непосредственно формируются в ходе восприятии действительности или извлекаются из долговременной памяти человека. Оба вида теоретического мышления взаимно дополняют друг друга, поскольку теоретическое понятийное мышление несмотря на свою абстрактность наиболее точно и обобщенно отражает действительность, тогда как теоретическое образное мышление позволяет получить конкретное субъективное восприятие действительности, которое не менее реально, чем объективно-понятийное.

Суть практического наглядно-образного мышления состоит в оперировании объектами или образами окружающей действительности в данный период времени, при этом необходимые образы извлекаются из кратковременной оперативной памяти. Работа наглядно-действенного мышления состоит в совершении человеком практической преобразовательной деятельности с реальными объектами.

Практическое мышление направлено на решение специфических практических проблем и задач, которые могут возникать в специальных видах профессиональной деятельности или в повседневной жизни. Особенность практических задач состоит в их частном, а не в общем характере, а также ограниченности требованиями конкретной ситуации. Отсюда их относительная ограниченность во времени, необходимость их решения в обозримом отрезке времени – пока существуют условия и обстоятельства, вызвавшие эти задачи.

Практическое мышление подразумевает решение практических задач с целью разработки средств практического преобразования действительности, то есть применение наглядных моделей и алгоритмов для пошагового решения задач.

Для формирования практического мышления студентов вузов при использовании дистанционного обучения [1] применение стандартных статических тестовых систем в рамках используемых в настоящее время систем дистанционного обучения (“Прометей”, “WebTutor”, “Moodle” и т.д.) не является адекватным, поскольку в данных информационных систем отсутствуют возможности для поэтапного решения определенных теоретических и практических задач, так как они ориентированы на получение от учащегося только итогового результата без указания промежуточных результатов, что приводит в итоге к потере у студентов навыков пошагового решения задач согласно необходимому алгоритму.

Для решения данной проблемы необходима реализация в рамках систем дистанционного обучения определенных расчетных учебных проектов, позволяющих отражать поэтапные результаты мыслительной деятельности обучаемых, что приводит в итоге к формированию необходимого уровня практического мышления для решения в дальнейшем сложных практических задач, требующих отражение промежуточных результатов вычислений в соответствии с применяемым алгоритмом решения поставленной задачи..

По состоянию на настоящее время В.В. Богуном осуществляется внедрение разработанной им информационной динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов студентов вузов, которая направлена на решение проблемы отсутствия в современных СДО динамических средств для реализации учебных расчетных проектов [2-5], в учебный процесс на различных факультетах в рамках Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского и Ярославского государственного технического университета.

Для корректной, понятной и удобной работы студентов и преподавателей в рамках дистанционной системы разработчиком издано учебное пособие “Использование динамической информационной системы мониторинга дистанционных учебных проектов в обучении математики” [3], в котором представлена необходимая информация, при этом соответствующие инструкции продублированы непосредственно и на сайте при активации работы в системе студентом или преподавателем.

Рассматриваемая информационная система является заменой статической тестовой системы проверки знаний студентов, используемой в современных системах дистанционного обучения, соответствующим набором динамических расчетных проектов. Практическая работа в системе подразумевает нахождение значений определенного количества взаимосвязанных параметров на основе применения программных логических структур с возможностью многократного указания значений необходимых параметров соответствующих задач. Информационная система представляет собой независимую программную оболочку, расположенную в рамках динамического Интернет-сайта разработчика программы по адресу http://www.bogun.yaroslavl.ru/index.php?raz=sdob.

В рамках рассматриваемой информационной системы осуществляется указание непосредственно алгоритма решения задачи на программном уровне, затем автоматически на основе генератора случайных чисел при соблюдении определенных условий реализуется формирование индивидуальных значений исходных данных, после чего осуществляется автоматический расчет согласно программному алгоритму значений промежуточных и итоговых результатов с целью проведения сравнительного анализа с соответствующими значениями, указываемыми пользователями (студентами).

Динамическая система расчетных проектов, составляющая информационное ядро системы в целом, включает описание рассматриваемого курса в рамках учебной дисциплины, список наименований и описание соответствующих расчетных проектов в рамках каждого учебного курса, список наименований, описание, теоретический аспект, демо-версии и расчетные задания по соответствующим расчетным работам в рамках каждого расчетного проекта. С точки зрения каждой расчетной работы реализована автоматизирована генерация независимых вариантов демо-версий (значений исходных данных, промежуточных и итоговых результатов) для преподавателя и студента с возможностью просмотра демо-версий обоими представителями и администрирования только для одной из сторон. Генерация заданий (вариантов значений исходных данных) для студентов производится однократно, преподаватель получает доступ к работе студента только в режиме просмотра, студент получает доступ к своей работе с возможностью просмотра правильно указанных значений, просмотра и редактирования неправильно указанных ранее значений промежуточных и итоговых результатов. Следует отметить, что реализация демо-версий и расчетных заданий для работ осуществляется согласно разрабатываемому на программном уровне алгоритму решения соответствующих задач в рамках расчетной работы.

Организация учебного процесса с применением рассматриваемой информационной динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов студентов осуществляется по определенному алгоритму.

Сначала преподавателем в рамках информационной системы формируются необходимые методические и дидактические составляющие изучаемой учебной дисциплины: описание рассматриваемого курса в рамках учебной дисциплины, список наименований и описание расчетных проектов в рамках каждого курса, список наименований, описание и теоретический аспект по работам в рамках каждого учебного проекта.

Затем непосредственно преподавателем или администратором совместно с преподавателем осуществляется разработка и формирование в рамках системы расчетных алгоритмов и соответствующих программных модулей для реализации арифметических и логических процедур, необходимых при решении каждой расчетной задачи в рамках расчетного проекта с точки зрения определенной учебной дисциплины.

После реализации предыдущих шагов преподавателем и студентами осуществляется генерирование независимых вариантов демо-версий рассматриваемой расчетной работы для преподавателя и студента с возможностью просмотра демо-версий обоими представителями и администрирования только для одной из сторон. Получение автоматически рассчитанных значений промежуточных и итоговых результатов осуществляется на основе генерирования значений исходных данных с использованием случайных чисел и сформированного исходного кода программного модуля решения задачи в рамках расчетной работы.

Затем каждым из студентов реализуется генерирование соответствующего варианта расчетной работы в рамках расчетного проекта с возможностью просмотра преподавателем значений промежуточных и итоговых результатов (но без возможности редактирования) выполняемой студентом работы, возможностью для студента просмотра правильно указанных значений, просмотра и редактирования неправильно указанных ранее значений промежуточных и итоговых результатов на основе генерирования значений исходных данных с использованием случайных чисел и формулируемых условий, а также сформированного исходного кода программного модуля решения задачи.

Мониторинг проектной деятельности студентов с точки зрения как преподавателя, так и студента, осуществляется с целью анализа процесса выполнения студентом работы и формированием дальнейшей стратегии реализации текущей проектной деятельности.

Применение информационной системы в учебном процессе осуществляется в рамках курсов "Математика" и производных от него при изучении основ линейной алгебры и аналитической геометрии на плоскости.

В рамках данного курса подразумевается студентами следующих расчетных проектов:

1. Арифметические операции над матрицами (расчетные работы "Сложение, вычитание матриц и умножение матриц на числа", "Умножение матриц", "Возведение матриц в степени и нахождение определителей матриц", "Нахождение обратных матриц").
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений (расчетные работы "Решение совместных систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера", "Решение совместных систем линейных алгебраических уравнений с использованием обратной матрицы", "Решение совместных систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса").
3. Нахождение параметров произвольного треугольника на плоскости методами аналитической геометрии (расчетная работа "Определение параметров сторон и высот треугольника").

Во время апробации информационной системы осуществляется проведение входного и выходного тестирования, состоящего из следующих четырех субтестов, входящих в состав теста структуры интеллекта Р. Амтхауэра, позволяющих оценить изменение уровня теоретического и практического мышления студентов в процессе выполнения необходимых расчетных проектов:

- Субтест 5 (арифметические задачи) – анализируется практическое мышление, способность быстро решать формализуемые проблемы.
- Субтест 6 (числовые ряды) – анализируется теоретическое, индуктивное мышление, вычислительные способности, стремление к упорядоченности, соразмерности отношений, определенному темпу и ритму.
- Субтест 7 (пространственное воображение) – анализируется умение решать геометрические задачи, богатство пространственных представлений, конструктивные практические способности, наглядно-действенное мышление.
- Субтест 8 (пространственное обобщение) – анализируется умение не только оперировать пространственными образами, но и обобщать их отношения, то есть проверяется аналитико-синтетическое мышление, конструктивность теоретических и практических способностей.

Таким образом, имеющиеся в настоящее время системы дистанционного обучения не позволяют реализовывать учебный процесс с применением поэтапного решения практических задач, что негативно сказывается на формировании практического мышления студентов в процессе изучения естественно-научных дисциплин. Разработанная и активно внедряемая в вузах В.В. Богуном информационная динамическая система мониторинга дистанционных учебных проектов позволяет компенсировать данный недостаток при организации дистанционного обучения, предоставляя возможность реализации не статических тестовых заданий, а полноценных динамических расчетных проектов, основанных на использовании программных алгоритмов формирования решения задач.

Библиографический список

1. Информационные и коммуникационные технологии в образовании [Текст]: учеб.-метод. пособие / И.В. Роберт, С.В. Панюкова, А.А. Кузнецов, А.Ю. Кривцова. – М.: Дрофа, 2008. – 312 с.
2. *Богун, В.В.* Информационные особенности динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов [Текст] / В.В. Богун // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – № 1. – 9 с.
3. *Богун, В.В.* Использование информационной динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов в обучении математике [Текст]: учеб. пособие / В.В. Богун. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – 136 с.

4. *Богун, В.В.* Реализация расчетных проектов по математике с использованием дистанционной формы обучения [Текст] / В.В. Богун // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – № 4. – 6 с.
5. *Богун, В.В.* Проблемы и перспективы реализации единой среды дистанционного обучения студентов педагогических вузов [Текст] / В.В. Богун, Е.И. Смирнов, А.А. Кузнецов // Информатика в образовании. – 2010. – № 7. – 9 с.

Некоторые особенности чтения лекций по курсу "Уравнения математической физики" при использовании презентаций

Е.А. Голикова

Традиционная лекция как одна из форм организации обучения, появилась еще в Древней Греции. Как на протяжении всей истории, так и сейчас такая форма обучения имела сторонников и противников. Однако в современном высшем образовании лекция по-прежнему один из основных видов занятий. При этом виды лекций довольно разнообразны: информационные, обзорные, установочные, консультативные, проблемные. С внедрением информационных технологий (ИТ), появились новые виды лекционных занятий и, более того, интерактивные образовательные системы, претендующие на полное замещение преподавателя компьютером. Довольно много работ посвящено различным аспектам применения ИТ в высшем образовании и даже утверждается, что "построение современного образовательного процесса в вузе на основе использования информационно-педагогических технологий дает основание для становления и развития новой отрасли дидактики высшей школы – электронной дидактики" [8]. Тем не менее отмечается "недостаточная разработанность дидактических, методических, психологических требований к реализации мультимедийных обучающих систем лекционных курсов" [2].

Внедрение ИТ в повседневную практику преподавания в вузе происходит сейчас очень широко и в разных формах. Однако это реже полноценные, удовлетворяющие современным компьютерным возможностям и дидактическим требованиям мультимедийные обучающие системы или электронные учебники [2, 5, 3]. Но чаще это различные электронные учебные пособия, тесты, конспекты лекций, презентации. Понятно, что это связано с объемом затрат на создание обучающих систем, которые могут и не оправдываться в силу быстрого наращивания компьютерных мощностей. Поэтому оптимальное использование ресурсов сейчас – это недорогое, не громоздкое, мобильное при использовании и при изменении методическое информационное обеспечение учебного процесса, создаваемое самими преподавателями. На этом пути создание различных вариантов лекций с использованием компьютера представляется и рациональным и перспективным.

Очень широко распространенной формой использования компьютера в учебном процессе стало чтение лекций с использованием презентаций. Сейчас можно найти презентации по всем без исключения дисциплинам, читаемым в вузе. В связи с таким повсеместным переходом от традиционной лекции (ТЛ) к презентационной лекции (ПЛ) неизбежно возникает ряд вопросов. Во-первых, всегда ли объективно необходим этот переход; во-вторых, как не потеряв преимуществ ТЛ, приобрести новое качество, создавая ПЛ? В данной работе анализируется опыт создания презентационного курса лекций "Уравнения математической физики", читаемого на втором курсе физико-технического факультета Уральского федерального университета. На этом примере по нескольким показателям проводится сравнение ТЛ и ПЛ а также соотносится практический лекционный опыт с работами психологов и дидактиков, на основании чего формулируются рекомендации по чтению ПЛ по математике.

Традиционная лекция (ТЛ) – это одна из форм организации обучения, в условиях которой преподаватель системно и последовательно, преимущественно монологически излагает и объясняет учебный материал по целой теме, а обучающиеся слушают и записывают содержание лекции, в отдельных случаях задавая вопросы, на которые преподаватель отвечает [1]. Её главная цель – дать ровно столько информации, чтобы обосновать рассматриваемые на ней положения. Она должна служить для слушателя путеводителем к другим источникам информации, которыми обычно являются учебники или научные публикации, хранящиеся в библиотеке. Основное преимущество такой лекции – живое общение с преподавателем, ощущение непосредственного "рождения идеи", элемент творчества. Данное определение ТЛ есть в большей степени определение информационной лекции, которая читается в традиционной (безкомпьютерной) форме. Назовем презентационной лекцией (ПЛ) лекцию, в которой преподавателем используются компьютерные презентации. Отметим, что это определение самое общее и включает различные виды лекций как классифицированные по дидактическим особенностям (информационные, обзорные, установочные, консультативные, проблемные) так и по уровню использования информационных технологий (ИТ) (электронная, мультимедийная и т.п.). Например, электронная лекция есть совокупность компьютерных технологий, одновременно использующих несколько информационных сред: графику, текст, видео, фотографию, анимацию, звуковые эффекты, звуковое сопровождение [6]. Мультимедийная лекция подразумевает использование интернет-технологий.

Использование ИТ безусловно расширяет возможности преподавания, одновременно позволяя выдвигать и новые дидактические цели обучения. Однако "выявлено, что применение мультимедийных обучающих систем в лекционных курсах ***потенциально*** (курсив Семеновой Н.Г.) обеспечивает, по сравнению с лекциями, проводимыми по традиционной технологии, более высокий уровень реализации таких традиционных дидактических требований, как научность, наглядность, доступность, прочность, сознательность и активность обучающихся, единство образовательных, развивающих и воспитательных функций обучения” [5]. На практике довольно часто указанная потенциальная возможность не становится актуальной. Связано это зачастую с игнорированием законов восприятия информации, опосредованной компьютером.

Психологические законы восприятия информации.

Известно, что эффективность обучения напрямую зависит от таких психологических процессов как восприятие, внимание, мотивация, воображение, мышление и др. Специфика ИТ не может не влиять на характер протекания этих процессов [7].

Восприятие.

а) При работе с компьютером максимально включены все каналы восприятия, достаточно высок уровень возбуждения. Когда информация подается с экрана, то ее восприятие протекает в состоянии напряженного внимания. Лектор должен учитывать, что даже просто смотреть на экран физиологически труднее, чем на доску. Желательно чередовать формы подачи информации: с экрана, с доски, устно. Кроме того, информационно перегружать слайд не желательно.

б) По предпочитаемой форме восприятия информации различают три типа людей – аудиалы, визуалы и кинестетики. Учитывая эти особенности, лектор должен озвучить текст, дать возможность его прочесть и законспектировать.

Внимание.

а) *Непроизвольное* внимание возникает без усилий со стороны человека и не вызывает утомления. Основа непроизвольного внимания – интерес к чему-то новому яркому, необычному. Яркое пятно (например, выделенный цветом фрагмент), движение на слайде (например, постепенное появление текста) активизирует этот вид внимания. Кроме того текста в кадре должно быть как можно меньше.

б) Настоящее понимание не возникает в результате простого рассматривания, оно требует определенных усилий ума, когда внимание сознательно концентрируется на объекте изучения. Такое внимание называется *произвольным*, или активным, волевым, оно вызывает быстрое утомление. Примерно через 20 минут мозг перестает воспринимать информацию. Учитывая это, необходимо переключать внимание аудитории с помощью яркой иллюстрации или предложив другой вид работы.

Память.

а) Если воспринятая информация привлечет внимание, то она будет удерживаться в кратковременной памяти 20 секунд, пока мозг ее обрабатывает и интерпретирует. Для того чтобы информация из кратковременной памяти перешла в долговременную необходимо повторить эту информацию несколько раз, лучше в разном виде.

б) Объем учебной информации в кадре должен соответствовать емкости кратковременной памяти: 5-7 объектов, т.е. человек за один раз может освоить от пяти до семи фрагментов разнородной информации – слов, цифр, рисунков и т.д., если эти фрагменты объединены по смыслу. На самом деле, лектор не может рассчитывать на одновременное восприятие более чем 4-5 объектов.

Эффективность восприятия зрительной и слуховой информации.

а) Исследования показали, что хотя аудио-визуальные (видео) средства и вызывают определенный интерес и положительное отношение, но не дают почти никакого выигрыша в эффективности обучения. Поэтому стремиться насыщать презентации видеорядом не стоит.

б) Попытки совместить голос с показом текста на экране в большинстве случаев дают обратный результат. Совмещать текст и голос (как за кадром, так и комментарий лектора) не следует, это мешает восприятию текста [9].

Принцип обратной связи.

Исследованиями установлено, что процесс восприятия информации облегчается, если при изучении какой-то новой информации обучаемый сам совершает определенные практические действия в контексте изучаемого материала.

Результаты проведенного анализа сведем в таблицу:

Психологические особенности восприятия информации	**Требования к презентациям и их представлению**
Состояние напряженного внимания при чтении с экрана	Не перегружать слайд информационно, чередовать формы подачи информации
Аудиалы, визуалы, кинестетики	Озвучить, дать возможность прочесть и законспектировать текст
Непроизвольное и произвольное внимание	Минимум текста (слов), постепенное его появление на экране, выделение цветом, переключение внимания не реже чем через 20 мин
Долговременная и кратковременная память	Повторить информацию несколько раз в разном виде, на слайде 4-6 объектов
Эффективность восприятия зрительной и слуховой информации	Насыщать видеорядом и совмещать текст (запись-чтение) и голос не стоит

Некоторые рекомендации по содержанию и технике проектирования слайдов можно найти в работах Ю.Б. Мельникова [4]. Однако недостаточно сделать читаемые слайды, очень важно их правильно преподнести.

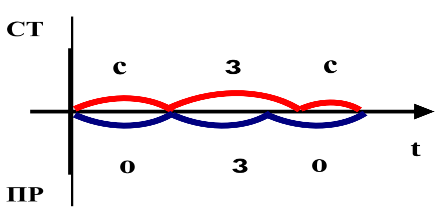
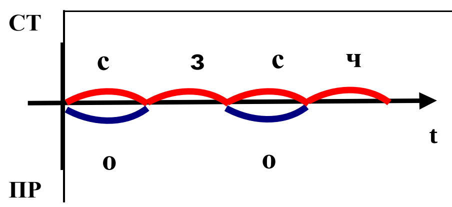
Деятельность преподавателя и студента при чтении лекций по математике с использованием презентаций.

Специфика математики, как дисциплины, отражается в следующих особенностях *математической* лекции (текста): а) информационная насыщенность (плотность) содержания; б) высокий уровень абстракции; в) объем и сложность содержания; г) высокий уровень иерархичности и логической взаимосвязи изучаемых понятий [6]. Основная часть математической информации в концентрированном виде содержится в символах, формулах, графиках. По сути дела содержание математической лекции – это содержание сложного математического текста. Навык работы с математическим текстом формируется на лекции. При этом студенты не только учатся усваивать математическую информацию, но и генерировать собственную. Известно, что *печатный текст* (тем более математический) как источник информации строится на принципах абстрагирования содержания от действительности, ему свойственны такие черты, как линейность, последовательность, предметность, рациональность. Эти черты формируют и способ мышления по структуре сходный с рационально-логическим построением математического текста. Таким образом, на математической лекции формируется навык работы с математической информацией (текстом) и рационально-логический способ мышления. Однако способы работы с информацией как у лектора, так и у студента на ТЛ и на ПЛ различные.

Проведем сравнение по некоторым параметрам чтения ТЛ и ПЛ по математике. Если читается ТЛ, то информация (переработанный адаптированный текст) поступает от преподавателя в устной форме и параллельно записывается. При этом вырабатывается определенный ритм: записи делаются преподавателем и студентами практически синхронно. В ниже приведенной таблице ритм изображен схематично: по оси ординат – деятельность студентов (СТ) и преподавателя (ПР), по оси абсцисс отложено время. Обозначения: “С” – слушание, “З” – запись, “Ч” – чтение, “О” – объяснение.

Если читается ПЛ, то форма подачи информации – визуальная в виде печатного текста, требующая другого ритма в общении с аудиторией. Комментирование лектором текста в момент записи или чтения этого текста аудиторией нарушает психологические законы восприятия. Следует заметить также, что ритм подачи информации лимитирован на ТЛ возможностями преподавателя, в отличие от ПЛ, где имеются широкие возможности регулирования ритма, обусловленные большим объемом презентационной информации.

Различен и тип деятельности студентов. Во-первых, восприятие печатного текста отличается от восприятия устной информации хотя бы тем, что чтение, в отличие от слушания сопровождается внутренней артикуляцией. Во-вторых, на ТЛ студенты записывают и анализируют устную речь под руководством преподавателя, а на ПЛ идет анализ и конспектирование печатного текста под руководством преподавателя.

<table>
<tr><th></th><th>ТЛ</th><th>ПЛ</th></tr>
<tr><td>Форма подачи информации</td><td>Устная речь</td><td>Печатный текст</td></tr>
<tr><td>Ритм подачи и обработки информации</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Тип деятельности студента</td><td>Запись и анализ устной речи под руководством преподавателя</td><td>Анализ и конспектирование печатного текста под руководством преподавателя</td></tr>
</table>

Таким образом, техника чтения ПЛ более приближена к технике работы с математической литературой и

ПЛ можно рассматривать как следующий этап (по сравнению с ТЛ) подготовки студента к самостоятельной познавательной деятельности.

На наш взгляд, чтение ПЛ по математике есть ***сознательное*** *(часто заменяется на интуитивное, полученное с помощью опыта)* ***управление*** *процессом подачи информации и ее обработкой студентами в соответствии с психологическими законами восприятия.* Заметим, что при чтении ТЛ значительная часть сил лектора расходуется на первичное воспроизведение информации (тем более, если идет сложный учебный материал). А на ПЛ, используя расширившиеся возможности, лектор может ставить более творческие дидактические цели. При этом переход на новый уровень общения с аудиторией, подразумевающий большую сознательность и активность обучающихся, является насущно необходимым. В противном случае, чтение такой лекции сводится к “комментированию подготовленных визуальных материалов” и схема “активный преподаватель – пассивный ученик” заменяется на схему “пассивный преподаватель – пассивный ученик”, что ведет к потере контакта с аудиторией и, в результате, к потере студенческой аудиторией познавательного интереса, мотивации к конспектированию и к работе на лекции вообще.

Таким образом, при переходе к ПЛ от ТЛ одной из целей должно быть *повышение познавательной активности студентов, обеспеченное правильным управлением потоком информации со стороны преподавателя.* Этой цели подчиняется и детальная проработка слайдов. При этом важнее правильное управление подачей информации и ее обработкой студентами, чем излишняя детализация слайдов.

Основные рычаги управления информационным потоком:

а) правильный ритм подачи информации (позволяет студентам записать-прочитать текст, вовремя переключает внимание, обеспечивает нужное количество повторений, чередует разные формы подачи информации и виды работы);

б) свободное перемещение по электронному тексту (в этом помогают гиперссылки);

в) четкая команда на запись (преподаватель указывает что именно записывать, а что – нет);

г) принцип обратной связи (в каждой лекции отводится время для самостоятельной работы студентов, например в форме мини контроля).

Если лектор четко контролирует процесс восприятия информации а также процесс конспектирования, добиваясь, чтобы студенты вели указанные им записи, и кроме того проводит самостоятельные работы с последующей проверкой, то назовем такой стиль управления *жестким.* Этот стиль управления необходим (и привычен для студентов) при переходе от ТЛ к ПЛ. Кроме того жесткое управление необходимо на начальном этапе освоения специфики работы с математической информацией (текстом). В результате студент обучается навыкам работы с математическим текстом, приобретает опыт в конспектировании, понимая, что просто переписывать отдельные куски текста необязательно, что где-то достаточно сделать заметки на полях, а что-то сложное записать полностью (особенно если на это обратит внимание преподаватель).

Для подготовленной аудитории (здесь имеется в виду, что студент уже имеет опыт анализа математической информации на ПЛ) управление может быть *мягким* с минимизацией непродуктивных записей, т.е. студент сам решает что и когда ему записывать. В этом направлении неоднократно делались попытки создания всевозможных рабочих тетрадей – дело очень трудоемкое, хотя вполне полезное. При наличие слайдов в этом нет необходимости. При этом в деятельности преподавателя акцент смещается на активизацию самостоятельной деятельности студентов: совместная и самостоятельная генерация доказательств, самостоятельное решение и постановка задач и т.п. Таким образом, ПЛ можно воспринимать как переходный этап к самостоятельной работе студентов с математическим текстом и к интерактивной форме обучения с использованием мультимедийных обучающих систем. Кроме того ПЛ (с мягкой системой управления) предоставляет больше возможностей для перехода от репродуктивной к продуктивной учебно-познавательной деятельности.

С использованием презентаций был прочитан курс лекций “Уравнения математической физики” на втором курсе физико-технического факультета Уральского федерального университета. Основное содержание презентаций составлял достаточно полный математический текст, позволяющий не использовать доску вообще, либо использовать ее для дополнительных пояснений. В зависимости от необходимости, текст в кадре мог появляться построчно или любыми фрагментами. Всего было создано около 400 слайдов. Для анализа качества восприятия студентами презентационной лекции в начале и в конце обучения была проведена анкета (результаты приведены в нижеследующей таблице).

Вопросы анкеты	**В начале обучения**	**В конце обучения**
За использование слайдов на лекции	67%	79%
Успевают конспектировать все или почти все	80%	91%
Считают, что изложение визуально более понятное по сравнению с ТЛ	60%	83%
Считают, что изложение по содержанию более понятное по сравнению с ТЛ	53%	74%
Считают, что объем информации больший по сравнению с ТЛ	71%	65%

После первого анкетирования лектором была проведена корректировка управления подачей информации.

Было исключено параллельное с записыванием-чтением комментирование содержания слайдов, четко подавалась команда на конспектирование. К концу семестра управление стало более мягким, но с регулярными мини контролями. По результатам повторного анкетирования можно сделать вывод, что отношение к ПЛ стало более положительным, что косвенно свидетельствует о более качественном усвоении обучающимися учебного материала. Активность аудитории к концу обучения возросла, что позволило совместно с преподавателем генерировать доказательства теорем и решения задач.

Библиографический список

1. *Андреев, А.А.* Введение в Интернет-образование [Текст] / А.А. Андреев. – М: Логос, 2010.
2. *Зайнутдинова, Л.Х.* Создание и применение электронных учебников (на примере общетехнических дисциплин) [Текст] / Л.Х. Зайнутдинова. – Астрахань: Изд-во "ЦНТЭП", 1999.
3. *Зимин, О.В.* Печатные и электронные учебные издания в современном высшем образовании: Теория, методика, практика [Текст] / О.В. Зимин. – М.: Изд-во МЭИ, 2003.
4. *Мельников, Ю.Б.* Алгебраический подход к созданию учебных презентаций по математике [Текст] / Ю.Б. Мельников // Образование и наука. – 2011. –№ 5(84). – С. 129-141.
5. *Семенова, Н.Г.* Психолого-педагогические основы создания мультимедийных обучающих систем лекционных курсов технических дисциплин [Текст] / Н.Г. Семенова. – Оренбург: РИК ГОУ ОГУ, 2006.
6. *Семенова, Н.Г.* Мультимедийная обучающая система по математике как средство формирования профессиональной направленности обучения студентов электротехнических специальностей [Текст] / Н.Г. Семенова, И.П. Томина // Вестник ОГУ. – 2010. – № 9(115). – С. 203-208.
7. *Титова, С.В.* Психолого-педагогические подходы к исследованию проблемы обучения с использованием ИТ. Психологические последствия компьютеризации [Электронный ресурс]. http://stitova.ffl.msu.ru/old/web/psychit.html
8. *Ширшов, Е.В.* Дидактическая система на основе применения информационно-педагогических технологий в вузе [Текст] / Е.В. Ширшов // Открытое образование. – 2003. – № 4. – С. 11-22.
9. *Чурбанова, О.В.* Анализ психолого-педагогических основ разработки сетевых обучающих программ [Текст] / О.В. Чурбанова, Е.В. Ширшов // Материалы конференции "Электронные учебники", МЭСИ. – 2001. – С. 447-454.

О моделировании валового регионального продукта

Г.Е. Козлов

Основным индикатором роста региональной экономики является индекс физического объема валового регионального продукта (ВРП) относительно предыдущего года. Показатель валового регионального продукта является по своему экономическому содержанию весьма близким к показателю валового внутреннего продукта (ВВП) Российской федерации. Однако между этими показателями есть существенная разница. Сумма валовых региональных продуктов по России не совпадает с ВВП, поскольку не включает добавленную стоимость по нерыночным коллективным услугам (оборона, государственное управление и так далее), оказываемым государственными учреждениями обществу в целом. Существенным недостатком региональных экономических индикаторов, построенных на системе региональных счетов, является то, что предварительную оценку величины и индекса ВРП регионов Федеральная служба государственной статистики (Росстат) публикует с 14-ти месячным опозданием, и в течение еще двух лет данные уточняются. Внедрение современных информационных технологий немного сократило этот срок. Предварительная оценка величины и индекса ВРП регионов России за 2010 г., в том числе и Ярославской области, будет помещена на официальном сайте Росстата в марте 2012 г. [6]. Естественно, это сокращает информационную значимость указанных индикаторов в оперативном управлении развитием региона.

Региональные органы государственной власти остро нуждаются в новых методах и моделях получения оперативной и точной оценки индекса физического объема ВРП за предыдущий год.

В статье предлагается оценка индекса физического объема ВРП Ярославской области с использованием линейных эконометрических моделей, что позволяет сделать прогноз указанного показателя за предыдущий год по значениям показателей, опубликованных органами Росстата в начале текущего года

Эконометрическая модель *(econometric model)* [4] – это статистическая модель, которая является средством прогнозирования значений определенных переменных, называемых **эндогенными переменными**. Для того чтобы сделать такие прогнозы, в качестве исходных данных используются значения других переменных, называемых **экзогенными переменными.** Эконометрические методы прогнозирования позволяют получать прогнозы различных показателей, в том числе и социально-экономических, затем анализировать качество полученных прогнозов на основе статистических критериев.

Построение эконометрической модели и прогноза индекса физического объема ВРП включает в себя следующие этапы:

– постановка задачи, анализ экономической ситуации;

– определение экзогенных и эндогенных переменных, которые будут включены в модель;
– сбор статистических данных для построения модели;
– спецификация (определение первоначального вида модели;
– параметризация (определение параметров модели);
– проверка адекватности с использованием статистических тестов;
– сравнение прогнозных свойств построенных моделей;
– разработка рекомендаций по использованию модели (моделей) для оценки прогнозного значения величины индекса физического объема ВРП.

В качестве начальной спецификации эконометрической модели будем рассматривать множественную линейную регрессию вида:

$$Y_t = b_0 + b_1X_{1t} + b_2X_{2t} + \ldots + b_pX_{pt} + e_t, \quad (1)$$

где Y_t – значение эндогенной переменной или результативного признака модели, измеренного в момент времени t; b_0,b_1, b_2,..., b_p – параметры модели; X_{1t},X_{2t},...,b_pX_{pt} – значения используемых в модели экзогенных(объясняющих) переменных или факторных признаков, измеренных в момент времени t; P – количество объясняющих переменных; e_t – случайная компонента, характеризующая разницу между фактическим значением результативного признака в модели и соответствующим расчетным значением в момент времени t.

Расчетное значение результативного признака определяется по найденному регрессионному уравнению и его параметрам:

$$Y_t = b_0 + b_1X_{1t} + b_2X_{2t} + \ldots + b_pX_{pt}. \quad (2)$$

В качестве объясняющих переменных для построения регрессионных уравнений были использованы индексы показателей экономики Ярославской области относительно предыдущего года в сопоставимых ценах: промышленного производства (X_2), потребительских цен на непродовольственные товары (X_3), потребительских цен на платные услуги (X_4), потребительских цен (X_5), физического объема розничной торговли (X_6), физического объема продукции сельского хозяйства (X_7), потребительских цен на продовольственные товары (X_8). Из общероссийских показателей был выбран индекс физического объема ВВП России (X_1). Результативный признак – это индекс физического объема ВРП Ярославской области (Y).

Информационной базой построения эконометрических моделей были данные о численном значении указанных региональных и российских экономических индексов за 1997-2010 гг. [1, 2, 5, 6]. К сожалению, индекс физического объема ВРП Ярославской области в период 1991-1997 гг. не разрабатывался.

В результате при построении нормальных классических линейных моделей множественной регрессии в качестве факторных признаков рассматривался один показатель, характеризующий годовую динамику экономики России, и восемь – годовую динамику экономики Ярославской области. Объем выборки наблюдений для построения моделей равен 13, поэтому можно построить линейные модели множественной регрессии, включающие не более трех факторов.

Были проанализированы восемь однофакторных моделей, 28 двухфакторных моделей и 56 трехфакторных моделей. Таким образом, были получены 94 модели индекса физического объема ВРП Ярославской области относительно предыдущего года. С помощью критерия Стьюдента из полученных моделей отклонялись модели со статистически незначимыми коэффициентами и содержащие коллинеарные факторы. Далее с помощью критерия Дарбина-Уотсона и вычисления сериальной корреляции остатков отклонялись модели с автокорреляцией в остатках. Избыточность модели оценивалась с помощью толерантности, которая во множественной регрессии позволяет исключить из модели неинформативные переменные.

Затем модели тестировались на подтверждение гипотезы гомоскедастичности. Модели, для которых наблюдалась гетероскедастичность, отклонялись. Для оставшихся моделей проводилась проверка гипотезы о нормальности распределения остатков с помощью построения нормальных вероятностных графиков остатков. Все статистические гипотезы проверялись для уровня значимости 0,05. В итоге осталось четыре нормальных классических линейных регрессионных эконометрических модели: две однофакторных и две двухфакторных, для которых с достаточно высокой степенью вероятности можно считать, что оценки их параметров являются несмещенными, состоятельными и эффективными. Ни одна из трехфакторных моделей не соответствовала статистическим требованиям. Для выявления мультиколлинеарности между факторами была составлена матрица коэффициентов парной корреляции. Под коллинеарными понимают независимые переменные, имеющие коэффициент корреляции по модулю больший 0,8 (табл. 1).

Таблица 1

Матрица коэффициентов парной корреляции

	Y	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**
Y	1,0000								
X1	0,8520	1,0000							
X2	0,8803	0,8113	1,0000						
X3	–0,5373	–0,4877	–0,1757	1,0000					
X4	0,2623	0,1495	0,2665	0,0829	1,0000				
X5	–0,4723	–0,4244	–0,1263	0,9879	0,1858	1,0000			
X6	0,3447	0,6087	0,1104	–0,5403	–0,0643	–0,4767	1,0000		
X7	0,5715	0,4181	0,5718	–0,4894	0,0408	–0,5236	–0,0519	1,0000	
X8	–0,4868	–0,4055	–0,1406	0,9795	0,0570	0,9876	–0,4263	–0,5621	1,0000

Данные, приведенные в таблице 1, свидетельствуют, что тесная связь наблюдается между индексами ВВП России (X1) и промышленного производства Ярославской области (X2), индексами потребительских цен(X5), потребительских цен на непродовольственные(X3) и продовольственные товары(X8). Не следует включать эти факторы в одну модель.

Наиболее тесную статистическую связь индекс ВРП Ярославской области имеет с индексами ВВП России и промышленного производства Ярославской области.

В качестве модели (A) рассмотрим однофакторную регрессию зависимости ВРП от ВВП России.

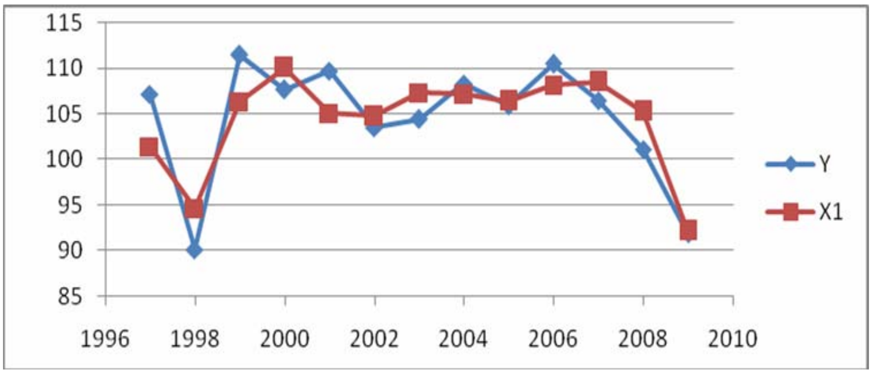


Рис. 1. Динамика индексов физического объема производства ВРП Ярославской области и ВВП России за период 1997-2009 гг., ед.

Статистические характеристики параметров регрессионной модели (A), а также точечные оценки индекса ВРП Ярославской области за 2009 и 2010 гг. приведены в таблице 2.

Таблица 2

Статистические характеристики параметров модели (A)

Y = -6,1993 + 1,0602X1		
Показатель	b0	b1
Значение	–6,1993	1,0602
Стандартная ошибка	20,5312	0,1964
t-критерий Стьюдента	–0,30	5,40
Уровень значимости	0,7683	0,0002
Стандартизированный коэффициент		0,8520
R	0,8520	
R^2	0,7259	
$F-$критерий Фишера	29,133	
Среднеквадратическое отклонение	3,6294	
Критерий Дарбина-Уотсона	2,76	
Сериальная корреляция остатков	–0,5038	
Оценка индекса ВРП за 2009 г.	0,915	
Ошибка оценки индекса ВРП за 2009 г., %	0,5	
Оценка индекса ВРП за 2010 г.	1,041	

Далее изучим зависимость ВРП от индекса промышленного производства (модель Б).

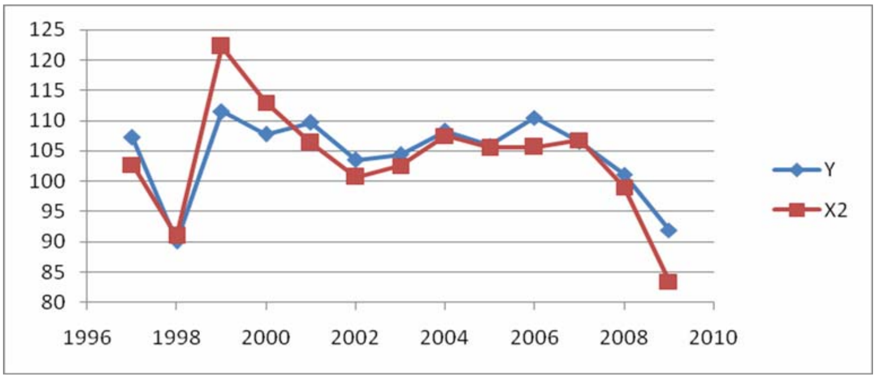


Рис. 2. Динамика индексов физического объема производства ВРП и промышленного производства Ярославской области за период 1997-2009 гг., ед.

Таблица 3

Статистические характеристики параметров модели (Б)

Y = 40,578 + 0,6172X2		
Показатель	b0	b1
Значение	40,578	0,6172
Стандартная ошибка	10,4233	0,1003
t-критерий Стьюдента	3,893	6,1547
Уровень значимости	0,0025	0
Стандартизированный коэффициент		0,8803
R	0,8803	
R^2	0,778	
$F-$критерий Фишера	37,881	
Среднеквадратическое отклонение	3,2886	
Критерий Дарбина-Уотсона	1,64	
Сериальная корреляция остатков	0,136	
Оценка индекса ВРП за 2009 г.	0,92	
Ошибка оценки индекса ВРП за 2009 г., %	0,1	
Оценка индекса ВРП за 2010 г.	1,069	

Далее рассмотрим двухфакторные модели. Характеристики параметров модели (В) заданы в таблице 4, а модели (Г) – в таблице 5.

Таблица 4

Статистические характеристики параметров модели (В)

Y = 62,3382 + 0,5686X2 – 0,1441X3			
Показатель	**b0**	**b1**	**b2**
Значение	62,3382	0,5686	–0,1441
Стандартная ошибка	7,905	0,0613	0,0319
t-критерий Стьюдента	7,886	9,281	–4,518
Уровень значимости	0	0	0,0011
Стандартизированный коэффициент	–	0,811	–0,395
Толерантность	–	0,9122	0,9122
R		0,9623	
R^2		0,926	
$F-$критерий Фишера		62,574	
Среднеквадратическое отклонение		1,9778	
Критерий Дарбина-Уотсона		2,23	
Сериальная корреляция остатков		–0,214	
Оценка индекса ВРП за 2009 г.		0,937	
Ошибка оценки индекса ВРП за 2009 г.,%		1,9	
Оценка индекса ВРП за 2010 г.		1,067	

Таблица 5

Статистические характеристики параметров модели (Г)

Y = 61,0794 + 0,5847X2 – 0,1429X5			
Показатель	**b0**	**b1**	**b2**
Значение	61,0794	0,5847	–0,1429
Стандартная ошибка	8,859	0,068	0,0378
t-критерий Стьюдента	6,894	8,6	–3,784
Уровень значимости	0	0	0,0036
Стандартизированный коэффициент	–	0,834	–0,367
Толерантность	–	0,984	0,984
R		0,9526	
R^2		0,9075	
F–критерий Фишера		49,041	
Среднеквадратическое отклонение		2,2116	
Критерий Дарбина-Уотсона		2,01	
Сериальная корреляция остатков		–0,116	
Оценка индекса ВРП за 2009 г.		0,942	
Ошибка оценки индекса ВРП за 2009 г.,%		2,5	
Оценка индекса ВРП за 2010 г.		1,065	

Модель (А) содержит незначимый свободный член, однако при прогнозе индекса ВРП на 2009 г. она дает ошибку (0,5%), которая меньше только у модели (Б). Модели (В) и (Г) близки по своим статистическим и прогнозным свойствам, но более точной можно признать модель (В), т.к. у нее более высокий коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}926$ и более высокие показатели статистики Стьюдента и Фишера.

Индекс ВРП характеризует годовую динамику всей экономики региона, которая характеризуется множеством факторов. Поэтому для его оценки нельзя отдать предпочтение какой-то одной модели. Одна из полученных моделей занизила значение индекса ВРП Ярославской области за 2008 г., а три завысили. Как один из вариантов свертки прогнозных значений индекса можно предложить средневзвешенную оценку, с использованием в качестве весов коэффициент детерминации модели.

Средневзвешенная оценка индекса ВРП Ярославской области на 2010 г. по всем моделям равна 1,055.

Полученные модели можно использовать при индикативном планировании социально-экономических показателей региона.

Библиографический список

1. Национальные счета России в 1996-2003 годах [Текст]: Статистический сборник. – М.: Росстат, 2004.
2. Национальные счета России в 2001-2008 годах [Текст]: Статистический сборник. – М.: Росстат, 2009.
3. *Халафян, А.А.* STATISTICA 6. Статистический анализ данных [Текст] / А.А. Халафян. – М.: Бином, 2007.
4. Эконометрика[Текст]: учебник для вузов / под. ред. В.С. Мхитаряна. – М.: Проспект, 2008.
5. URL: http//www.gks.ru/wps/portal/!ut/p.
6. URL: http//www.gks.ru/dbscripts/cbsd.

Возможности использования ИКТ при моделировании доказательств в курсе математики основной школы

Е.В. Лукьянова

Многие исследования в области методики преподавания математики посвящены реализации принципа наглядности в обучении математике, в частности в обучении доказательству. Однако до сих пор не были разработаны методики, позволяющие сделать поиск доказательства, процесс построения доказательства и результат этого процесса наглядными для учащихся. В основном исследователи ограничиваются построением чертежей, изображений тел и их комбинаций и т.д., то есть объектов, которые сами по себе являются средствами наглядности. Но насколько такого рода наглядность позволяет сделать более понятным доказательство? Само доказательство при этом не становится более простым, и часто внимание учащихся обращено на рисунки, а вовсе не на рассуждение. Можно ли сделать более наглядной взаимосвязь между предложениями – членами доказательства? Можно ли продемонстрировать ход рассуждения при построении доказательства, сделать наглядным процесс его построения?

Существуют средства математической логики, позволяющие сделать более наглядным поиск доказательства и отдельные (простейшие) шаги доказательства. Такие средства предоставляют логические системы естественного вывода. Формализованные в виде правил вывода элементарные рассуждения позволяют выявить шаги процесса построения доказательства, что дает возможность проследить и зафиксировать ход рассуждения при поиске доказательства.

И.Л. Тимофеева в своих работах исследовала возможности использования логических средств естественного вывода в обучении доказательству учащихся и предложила модель понятия доказательства – понятие доказательства в виде дерева, адаптированную для будущих учителей математики. В этой модели доказательства существенную роль играет символическая запись предложений – членов доказательства. Поскольку в основной школе логическая символика практически не используется, возникает необходимость адаптировать модель, предложенную И.Л. Тимофеевой, к курсу математики основной школы. Мы предлагаем использовать особые модели доказательств в виде дерева, названные нами дедуктивными схемами доказательств, которые специально адаптированы для школьников [2]. Дедуктивные схемы позволяют отразить древовидную структуру доказательства без использования символической записи участвующих в нем предложений.

Под *дедуктивной схемой доказательства* понимаем условное представление доказательства, в котором с помощью графических средств (рамок и стрелок разного формата) наглядно отражена логическая структура доказательства, а именно: статус членов доказательства, взаимосвязи между членами доказательства (предложениями) и, может быть, его фрагментами (вспомогательными рассуждениями), а также обусловленный этими взаимосвязями древовидный порядок членов доказательства.

Различаем два вида дедуктивных схем – полные и краткие. В *полной дедуктивной схеме* присутствуют все члены доказательства, отражены все логические взаимосвязи между ними, и все шаги доказательства, каждый из которых соответствует какому-то логическому правилу. По сути, полная дедуктивная схема представляет собой доказательство в виде дерева, графически оформленное с помощью рамок и стрелок разного формата. *Краткая дедуктивная схема* отражает структуру краткого ("свернутого") доказательства, в котором присутствуют переходы энтимемного типа (т.е. переходы, в которых некоторые предложения опущены).

Компьютерные программы, в частности Power Point, позволят учителю реализовать динамическую модель многих доказательств школьного курса математики. С помощью анимации в презентациях можно сделать визуальным процесс рассуждения при поиске доказательства и зафиксировать элементарные шаги этого рассуждения. Дискретность процесса рассуждения позволяет зафиксировать элементарные шаги, а анимация предложений, используемых на обсуждаемом шаге рассуждения, позволит наглядно продемонстрировать их логическую связь и те соображения, по которым делается шаг рассуждения.

Дедуктивные схемы в сочетании с использованием компьютера позволяют создать динамичную модель доказательства. В динамичной модели доказательства можно реализовать следующее:

1) наглядное представление взаимосвязи между членами доказательства;

2) демонстрация статуса предложений – членов доказательства;

3) фиксирование элементарных шагов построения доказательства и наглядное их представление;

4) построение свернутого доказательства (краткой дедуктивной схемы) и последующая его детализация (разворачивание краткой схемы в более полную);

5) фиксирование рассуждения в процессе поиска доказательства;

6) фиксирование шагов "снизу вверх"и "сверху вниз"и построение одного доказательства разными способами: синтетическим, аналитическим, комбинированным;

7) демонстрация процесса построения доказательства в удобном для учащегося темпе и повторение этого процесса необходимого количества раз.

Использовать “презентации дедуктивных схем доказательств” лучше всего в том случае, когда на уроке изучаются утверждения, имеющие относительно простую логическую структуру доказательства. Рассмотрим в качестве примера доказательство утверждения "Среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического". Построение доказательства этого утверждения может быть организовано на уроке алгебры в 8 классе следующим образом.

В первую очередь учителю рекомендуем записать на доске, а учащиеся в тетради, что дано и что требуется доказать: "*Дано*: а ≥ 0 и $b \geq 0$. *Доказать*: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$". Затем в форме фронтальной беседы обсудить с учащимися *идею* доказательства:

1) для того чтобы доказать неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, достаточно доказать неравенство $a + b \geq 2\sqrt{ab}$;

2) для того чтобы доказать неравенство $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, достаточно доказать неравенство $(a + b)^2 \geq 4ab$ (для обоснования этого перехода используется условие "числа а и b – неотрицательны"; позже именно этот переход следует подробно обсудить с учащимися);

3) для того чтобы доказать, что $(a + b)^2 \geq 4ab$, достаточно доказать, что разность $(a + b)^2 - 4ab$ неотрицательна;

4) используя формулы сокращенного умножения и равносильные преобразования, получаем, что разность $(a + b)^2 - 4ab$ равна $(a - b)^2$, а значит, является неотрицательным числом (эти преобразования на доске можно не записывать, достаточно попросить учащихся провести их в тетради).

На демонстрационном экране по шагам отражается процесс построения дедуктивной схемы (соответствующие переходы пронумерованы), представленной на рис. 1. Отметим, что предложенная нами последовательность появления каждого из предложений в этой схеме не единственна.

В этой схеме в рамку с волнообразной границей заключено условие задачи, которое *пока* не использовалось. Если учащиеся при обсуждении идеи доказательства сами заметят, где именно используется условие задачи, – целесообразно отразить это в дедуктивной схеме. Далее следует провести детализацию построенной дедуктивной схемы доказательства.

Степень детализации дедуктивной схемы доказательства (степень полноты) и порядок, в котором сокращенные переходы будут развернуты, зависят от цели урока и математической подготовки учащихся. Опишем один из возможных вариантов детализации дедуктивной схемы на рис. 1.

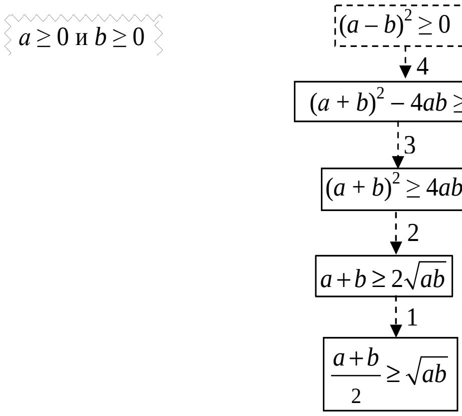


Рис. 1

Сначала развернем наиболее значимый, на наш взгляд, переход – переход (2).

1. Выясним, на каком основании сделан переход (2) от неравенства $(a+b)^2 \geq 4ab$ к неравенству $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Поскольку числа a и b – неотрицательные, то и произведение этих чисел неотрицательно. Кроме того, ранее доказано, что квадрат любого числа – число неотрицательное, т.е. $(a+b)^2$ является неотрицательным числом.

Итак, выполнены все условия теоремы: "Для любых x, y, если x $\geq$ 0,y $\geq$ 0, x $\geq$ y, то $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$". Это означает, что из обеих частей неравенства $(a+b)^2 \geq 4ab$ можно извлечь квадратный корень, получив при этом верное неравенство $\sqrt{(a+b)^2} \geq \sqrt{4ab}$.

Таким образом, схема на рис. 1 будет преобразована в схему на рис. 2.

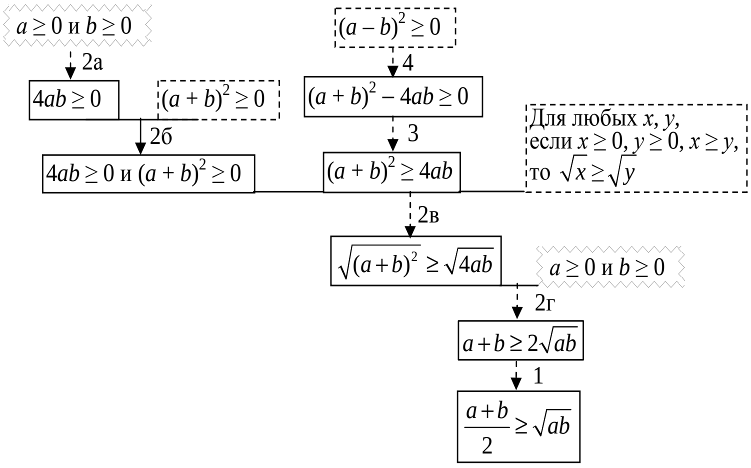


Рис. 2

2. Далее, на наш взгляд, целесообразно развенуть переход (2г). Заметим, что вынесение числового множителя из-под знака корня обычно у учащихся трудностей не вызывает. Хуже дело обстоит с извлечением корня из квадрата некоторого выражения. Учащиеся считают, что всегда $\sqrt{x^2} = x$, забывая, что для произвольного x$\sqrt{x^2} = |x|$. Учителю необходимо подчеркнуть, что знак модуля можно опускать только в том случае, когда x – неотрицательно. Поскольку числа a и b – неотрицательные, то и сумма этих чисел неотрицательна. Следовательно, что $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$. Эти объяснения отражены на следующей схеме (рис. 3).

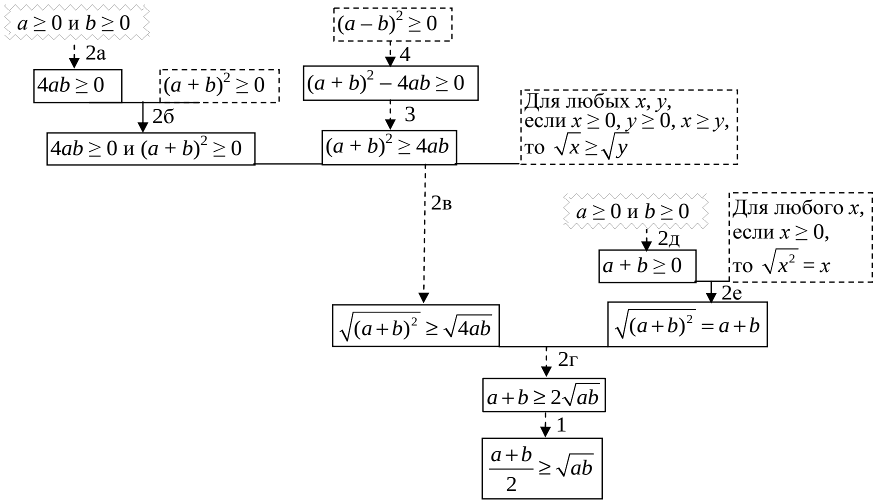


Рис. 3

Остальные переходы в дедуктивной схеме рассматриваемого доказательства, на наш взгляд, целесообразно развернуть устно.

В заключение отметим, что презентации подобного рода удобно использовать при построении дедуктивной схемы доказательства на уроке, поскольку на доске трудно расположить рамки, содержащие члены доказательства. При использовании компьютера на доске следует записать текст доказательства, который должен появиться у учащихся в тетради. Особо отметим, что не считаем целесообразным построение дедуктивных схем учащимися в тетрадях на уроке. При необходимости можно раздать учащимся заранее заготовленные листы с рассматриваемой дедуктивной схемой.

Итак, с помощью программы Power Point можно визуализировать процесс построения доказательства. Отметим, что создание такого рода презентаций удобно еще и тем, что учащиеся могут взять у учителя презентацию и при подготовке уроков дома смогут еще раз "прокрутить"доказательство, построенное на уроке.

Кроме программы Power Point в настоящее время существуют множество программ, в которых возможно реализовать пошаговое построение доказательства, в частности Flash, Express Animator, Stickman и др. Программное обеспечение интерактивных досок так же позволяет реализовать пошаговое фиксирование процесса построения доказательства. Одной из наиболее удобных программ для визуализации процесса рассуждения на интерактивной доске является программа SMART Notebook для интерактивной доски SMART Board.

Библиографический список

1. *Лукьянова, Е.В.* Использование компьютера при изучении математических доказательств в средней школе [Текст] / Е.В. Лукьянова // Сб. материалов XVIII Международной конференции "Применение новых технологий в образовании". – Троицк, 2007. – С. 181-183.
2. *Лукьянова, Е.В.* Дедуктивные схемы доказательств в обучении геометрии учащихся средней школы [Текст] / Е.В. Лукьянова, И.Л. Тимофеева // Проблемы совершенствования математической подготовки в школе и ВУЗе: Сборник материалов по теории и методике обучения математике. – М.: МПГУ, 2008. – Вып. 13. – С. 82-86.
3. *Лукьянова, Е.В.* Моделирование элементарных рассуждений с помощью программы Power Point [Текст] / Е.В. Лукьянова, И.Л. Тимофеева // Сб. материалов XVII Международной конференции "Применение новых технологий в образовании". – Троицк, 2006. – С. 236-238.
4. *Тимофеева, И.Л.* О логических эвристических средствах построения доказательств [Текст] / И.Л. Тимофеева // Математика в школе. – 2004. – № 10. – С. 42-50.

Концепция компетентностного подхода при обучении математике

Н.Б. Яновская

Если целью средней школы принято считать овладение учениками совокупностью навыков и умений предшествующих поколений при желании и стремлении увеличивать запас знаний, то высшая школа должна привить студентам умение находить, анализировать и использовать информацию в практической деятельности, а также научить способам деятельности и навыкам творческого мышления, приемам саморазвития и самообразования. Осуществляя системный анализ проблемной ситуации, студент должен уметь выявлять из проблемной ситуации задачу и корректно формулировать ее с целью последующего решения. Выпускник технического университета должен обладать инженерными компетенциями, что определяет переход от традиционного ЗУНовского образования к инновационному и требует изменения образовательных технологий и форм организации учебного процесса.

Компетентность (от латинского *competo*) – добиваюсь, соответствую, подхожу и соответственно перевод: знания и опыт в той или иной области. Если следовать дальнейшей интерпретации [1], то добиваюсь – самообразовываюсь, преобразовывая собственные знания; соответствую – благодаря собственной системе знаний вношу свое личностно-индивидуальное мнение в процесс овладения знаниями; подхожу – вхожу в образовательный процесс как единое целое, преобразуя его, улучшая и гибко изменяя по необходимости. Именно такое понимание компетентности как процесса самообразования путем преобразования собственных знаний определяет обучение, при котором студент становится активным участником учебного процесса, а технология обучения имеет цель саморазвитие интеллектуальной сферы студентов.

Понятие компетенции в различных источниках достаточно проработано и особого различия между определениями не существует [2]. Выделяют профессиональные и ключевые компетенции:

- ключевые компетенции формируются с ранних лет жизни ребенка,
- профессиональные компетенции формируются на основе ключевых,
- ключевые компетенции выполняют три важнейшие функции: помогают в дальнейшем обучении, помогают быть более успешным в дальнейшей жизни, позволяют стать более “гибким” – соответствовать запросу своего времени.

Это объясняет, почему формирование и дальнейшее развитие ключевых компетенций сугубо индивидуально и зависит от многих факторов.

Директор Департамента образования, культуры и спорта Совета Европы М. Стобарт [3] считает, что готовность выпускника вуза к активной деятельности в профессиональной сфере определяют сформированные “общие ключевые” компетенции:

- межкультурные (способность жить с людьми разных культур, языков и религий);
- политические и социальные (способность участвовать в совместном принятии решений, регулировать возникающие конфликты и брать на себя ответственность за принятые решения);
- информационно-технологические (владение информационными технологиями и способность критического отношения к информации и рекламе в СМИ);
- коммуникативные (владение устным и письменным общением и иностранными языками);
- профессиональные (способность учиться всю жизнь при любом виде деятельности).

Применительно к высшему профессиональному образованию компетенции выпускника вуза делят на группы соответственно общим принципам либо признакам. В некоторых случаях компетенции делят на уровни, причем за основу различения каждого уровня принимают знания и умения обучающихся. Европейская система квалификаций (ЕСК) предлагает восемь уровней компетенций соответственно объему знаний и умений, приобретаемых в образовательном процессе и переходу к “самоуправляемому изучению теории и практики и способности интегрировать знания”.

I уровень. Базовые знания и умения, способность выполнять простые задачи под непосредственным руководством. Формирование умений учиться при структурированной поддержке. Квалификации не ориентированы на трудовую деятельность.

II уровень. Ограниченный объем знаний, умений и широких компетенций, преимущественно конкретных и общеобразовательных. Умения применяются под руководством в контролируемой среде. Обучающиеся берут ограниченную ответственность за собственное обучение.

III уровень. Широкие общеобразовательные знания, практические и базовые теоретические знания в конкретной области, способность выполнять задачи под руководством. Обучающиеся берут ответственность за собственное обучение и имеют ограниченный практический опыт в конкретной области трудовой или учебной деятельности.

IV уровень. Значительные практические и теоретические знания, включая знания и умения в конкретной области. Способность применять знания, умения и компетенции для самостоятельного решения проблем. Осуществление самоуправляемого обучения.

V уровень. Широкие теоретические и практические знания, способность применять знания и умения для разработки стратегических решений абстрактных и конкретных проблем. Умение учиться создает основу для автономного обучения.

VI уровень. Глубокие теоретические и практические знания, умения и компетенции, относящиеся к конкретной области обучения и трудовой деятельности. Профессиональный подход и применение знаний для обоснования при вынесении суждений.

VII уровень. Самоуправляемое изучение теории и практики. Способность интегрировать знания, формулировать суждения с учетом ответственности и осмысливать опыт при управлении изменениями в сложной среде.

VIII уровень. Системное освоение высокоспециализированной области знаний и способность к критическому анализу, оценке и синтезу новых сложных идей.

Сравнение уровней компетенций показывает, что первые три уровня характеризуют сферу среднего образования. Основное отличие третьего уровня компетенций от второго – объем компетенций и ответственность обучающихся за собственное обучение. Если второй уровень компетенций характеризует ограниченный объем знаний и умений, то третий уровень характеризуют обладание широкими общеобразовательными знаниями и переход от ограниченной ответственности за собственное обучение к полной ответственности. Третий уровень компетенций, таким образом, характеризует выпускников средней школы, получивших аттестаты зрелости и берущих ответственность за продолжение собственного обучения.

Четвертый уровень компетенций характеризует обучение студентов технического университета на первом-втором курсах. Действительно, в высшей школе студенты начинают приобретать “значительные практические и теоретические знания и умения в конкретной области” по сравнению с “широкими общеобразовательными знаниями” выпускников средней школы. Наряду с этим к студентам первого-второго курса выдвинуты требования осуществлять “самоуправляемое обучение” и обладать “способностью применять знания для самостоятельного решения проблем”. Это определяет требования к организации учебного процесса в техническом университете и полностью соответствует изучению математики на основе самостоятельного конструирования условий математических упражнений с целью последующего решения [4].

С пятого по седьмой уровни компетенций характеризуют обучение студентов на третьем-четвертом-пятом курсах профессионального образования, так как в результате обучения студенты приобретают “значительные практические и теоретические знания и умения в конкретной области”, овладевают специализированными знаниями, умениями и компетенциями (изучают спецдисциплины) для самостоятельного решения проблем и учатся “осуществлять самоуправляемое обучение”.

Получается следующая последовательность:

1 уровень

обладание базовыми знаниями и умениями

↓

2 уровень

ограниченный объем знаний, умений и широких компетенций

↓

3 уровень

широкие общеобразовательные знания,
практические и базовые теоретические знания

↓

4 уровень

значительные практические и теоретические знания и умения

↓

5 уровень

широкие теоретические и практические знания

↓

6 уровень

глубокие теоретические и практические знания, умения и компетенции

↓

7 уровень

самоуправляемое изучение теории и практики,
способность интегрировать знания и формулировать суждения с учетом различных факторов,
осмысление опыта при управлении изменениями в сложной среде

Согласно “Стратегии модернизации общего образования” понятие компетентности шире понятия “знание, умение, навык”, но в любом случае компетентность основана на знаниях, и потому студент вначале приобретает знания, а затем на их основе приобретает компетенции. Компетентностный подход при обучении не противопоставлен ЗУНам, а характеризует опыт и умения практически реализовать знания. Основная функция компетентностного подхода – не подготовка к жизни, а непосредственное включение в сам жизненный процесс [7]. Делая акцент на практическом применении полученных знаний, компетентностный подход к образованию фиксирует и устанавливает подчиненность знаний умениям: компетентность не может существовать без знаний, а знания предполагают компетентность. И потому если говорить о компетенциях не вообще, а конкретно, то "в конечном счете все сводится к пресловутым ЗУНам", так как "когнитивной основой всех компетенций являются научные знания" [5]. Знаниевый и компетентностный подходы к обучению, имея принципиальные различия в целях, содержании и технологии реализации, взаимно проникают один в другой [6]. Принципиальные различия и основные положения знаниевого и компетентностного подходов представлены в табл. 1.

Иногда "знаниевый" подход к обучению называют "квалификационным" [1], подчеркивая, что основная цель обучения – получение знаний при "традиционной жесткой дисциплинарной модели обучения", а "компетентностный" подход к обучению является более "адаптивным к внешней среде образовательной модели" (табл. 2).

Сравнение основных положений компетентностного подхода (табл. 1, табл. 2 и табл. 3) позволяет определить его общие характерные признаки и утверждать, что переход к компетентностному обучению предполагает изменение психологических, общепедагогических и дидактических процедур взаимодействия преподавателя и студентов, то есть изменение психологии преподавателя и студента, а также методики и технологии обучения. Основой учебного процесса в вузе становится самостоятельная деятельность студента по освоению теоретического и практического объема знаний и приобретению профессиональной компетентности в результате этой деятельности. Это определяет изменения технологии организации учебного процесса не только при закреплении изученного материала, но и при изучении вновь изучаемого.

Профессиональные компетенции студента технического университета классифицируют [1] по четырем основным группам:

Таблица 1

Компоненты структур знаниевого и компетентностного подходов

Сравниваемые положения	Знаниевый подход	Компетентностный подход
цели	формирование системы знаний, умений, навыков и опыта творческой деятельности; формирование научного миропонимания, основ культуры	формирование системы компетенций. практическая направленность процесса обучения
основания, ценности	фундаментальность	прагматичность. связь с работодателями
принципы	– сознательность и активность; – наглядность обучения; – систематичность и последовательность; – доступность – прочность; – научность; – связь теории с практикой	– самостоятельность обучающегося; – формирование содержания обучения через проблемы познавательного, профессионального, коммуникативного, организационного, нравственного характера; – целостное включение студентов в учебно-познавательную деятельность; – открытость и свобода выбора студентами своих действий – формирование рефлексивной позиции к себе как к субъекту деятельности
отбор содержания	многопредметность	междисциплинарность
организация образовательного процесса	последовательная классно-урочная (лекционно-семинарская)	модульная
технологичность	методы обучения (объяснительно-иллюстрационный, метод проблемного изложения, частично-поисковый, исследовательский)	технологии обучения (проекторная, кейсовые технологии, презентация идей, исследования ролевых моделей)
система оценивания	пятибалльная	рейтинговая
роль педагога	лидер	тьютор, консультант, помощник
роль обучающегося	объект	субъект
оценка качества	ГОС второго поколения (2008 г)	ИСО 9000 ГОС третьего поколения
модель подготовки	ЗУНовская	компетентностная
ключевые термины	знания, умения, навыки	компетенции, компетентности, компетентность

- познавательные (когнитивные) – способность критического подхода к изучаемой дисциплине, глубокое знание изучаемой дисциплины, способность самостоятельного приобретения знаний;
- творческие (креативные) – способность:
  - устанавливать поиск причинно-следственных связей,
  - применять новые подходы к решению известных проблем,
  - определять возможности практического применения закономерностей изученных дисциплин в нетрадиционных ситуациях,
  - решать нестандартные задачи,
  - выявлять основные противоречия в изучаемой области и формулировать новые задачи и проблемы;
- социально-психологические способности – следовать нормам принятого в обществе социального поведения;
- инженерные, включающие инженерный анализ (способность решать инженерные задачи), инженерное проектирование, инженерную практику, исследования и личностные навыки (необходимые для инженерной деятельности).

Если исходить из видов современной инженерной деятельности, то более приемлемым является деление компетенций соответственно их общим принципам на следующие три группы:

- компетенции работы со знаниями (“когнитивные”, “научные”);
- личностные и социально-этические (включающие коммуникативные компетенции и способность учиться);
- профессиональные (базовые компетенции, являющиеся основой профессии, и дополнительные, принадлежащие другим видам деятельности, но значимые для данной профессии).

Изучая общетехнические дисциплины, студенты приобретают внепрофессиональные компетенции, главные из которых личностно-профессиональные. К ним относят: высокую работоспособность в выполнении планов намеченной работы, хорошую технику решения творческих задач, регулярность контроля и выполнения, способность отстаивать свои цели, результативность промежуточных этапов на пути к цели, “умение держать удар” [8]. При изучении математики (а это I-II курсы обучения) основное значение имеют творческие и познавательные компетенции. Творческие компетенеции – студент формулирует новые задачи и проблемы, познавательные – студент знает изучаемый учебный материал, относится критически, учится самостоятельно приобретать знания и осуществлять самостоятельный поиск причинно-следственных связей. Все это становится возможным, если основой изучения математики сделать личностно ориентированное рефлексивное обучение – самостоятельное конструирование студентами математических задач и упражнений с целью последующего решения. В процессе обучения происходит “рефлексивный выход” студента “за пределы совершаемого в деятельности” и установление отношения между когнитивным процессом и результатами учебной деятельности (Г.П. Щедровицкий).

Таблица 2

“Квалификационный” и “компетентностный” подходы

квалификационный подход	компетентностный подход
ориентирован на	
получение квалификации	формирование личности специалиста
модель обучения	
дисциплинарная (предметно-содержательная)	междисциплинарная (интегративная)
результат образовательного процесса описывается	
ЗУНами	комплексом компетенций специалиста
качество подготовки выпускника определено	
числом прослушанных курсов	степенью приобщения к целостной сфере будущей профессиональной деятельности
модель	
пассивная – студентов обучают предметам и в конце обучения становится известно, какие компетентности сформированы	активная – направлена на формирование компетенций, усиливая практико-ориентированность ценностно-смысловой и личностной составляющих образования
образовательные технологии	
передача знаний	проблемное обучение, модульное обучение, технологии сотрудничества
главное при обучении	
содержание образования (что преподают)	результат образования (компетенции студента)
преподаватель управляет образовательным процессом (активный участник образовательного процесса), студент реагирует на управляющее воздействие (пассивный участник образовательного процесса)	преподаватель и студент – равные субъекты учебного процесса, объединенные единой образовательной целью

Сравнение основных характеристик технологии обучения математике, основанной на самостоятельном конструировании студентами условий задач и упражнений, обеспечивающей рефлексивный подход при обучении и саморазвитие интеллектуальной сферы студентов, и положений знаниевого и компетентностного подходов к обучению позволяет утверждать, что технология обучения, основанная на конструировании условий математических упражнений студентами при последующем решении этих упражнений, имеет цели знаниевого подхода и принципы обучения компетентностного подхода. Основные из них: самостоятельность студента, формирование содержания обучения через проблемы познавательного и коммуникативного характера, целостность включения студента в учебно-познавательную деятельность, открытость и свобода выбора студентом своих действий, формирование рефлексивной позиции к себе как к субъекту деятельности.

Таблица 3

Основные положения компетентностного подхода

Табл. 1	Табл. 2
цели обучения	результат образовательного процесса
формирование системы концепций	
организация образовательного процесса	образовательные технологии
модульное обучение	
принцип обучения самостоятельность обучающегося, формирование рефлексивной позиции к себе как к субъекту деятельности	модель обучения активная, направленная на усиление практико-ориентированности, ценностно-смысловой и личностной составляющих образования

Компетентность выпускника определяет сочетание фундаментальных и практических знаний, навыков и умений, позволяющих реализоваться в послевузовской практической деятельности. Студент должен уметь ориентироваться в различных ситуациях и быть готовым к продолжению образования, к переквалификации, самообразованию и саморазвитию [9]. Этому студент должен научиться в процессе обучения в вузе. Организация учебного процесса, основанная на самостоятельном конструировании условий математических упражнений при последующем решении и проверке правильности решения, придает образовательному процессу характер исследовательско-рефлексивной деятельности. [10] Основным результатом такого обучения является умение осуществлять рефлексивный “выход”, то есть через осознание в процессе деятельности. Это основная внепрофессиональная компетенция, приобретаемая студентом при изучении математики, которая необходима выпускнику вуза при выполнении задач профессиональной деятельности.

Библиографический список

1. *Галета, С.Г.* К вопросу о компетентности преподавателя в современном образовании [Текст] / С.Г. Галета // Проблемы университетского образования. Компетентностный подход в образовании: сб. материалов III Всероссийской науч.-метод. конф.: в 2 т. – ТГУ, 2007. – Т. 1. – 332 с. – С. 141.
2. *Боюр, В.Р.* Подход к выделению уровней матрицы компетенций [Текст] / В.Р. Боюр // Проблемы университетского образования. Компетентностный подход в образовании: сб. материалов III Всероссийской науч.-метод. конф.: в 2 т. – ТГУ, 2007. – Т. 1. – 332 с. – С. 75.
3. *Викарчук, О.Н.* Особенности компетентностного подхода в довузовском образовании [Текст] / О.Н. Викарчук, Е.Р. Захаренкова // Проблемы университетского образования. Компетентностный подход в образовании: сб. материалов III Всероссийской науч.-метод. конф.: в 2 т. – ТГУ, 2007. – Т. 1. – 332 с. – С. 111-112.
4. *Яновская, Н.Б.* Обучение математике в школе и вузе: взгляд изнутри [Текст] / Н.Б. Яновская // Высшее образование сегодня. – М., 2003. – № 2. – С. 66-69.
5. Стратегия модернизации содержания общего образования [Текст]. – М., 2001.
6. *Сальников, Н.М.* Реформирование высшей школы: концепция новой образовательной модели [Текст] / Н.М. Сальников, С.Ф. Бурухин // Высшее образование в России. – 2008. – № 2. – С. 3-5.
7. *Зимняя, И.А.* Компетентностный подход. Каково его место в системе современных подходов к проблеме образования? (теоретико-методологический аспект) [Текст] / И.А. Зимняя // Высшее образование сегодня. – 2006. – № 8. – С. 20-26.
8. *Гордеев, А.В.* Формирование компетентностей специалиста [Текст] / А.В. Гордеев // Высшее образование сегодня. – 2006. – № 8. – С.156-158.
9. *Стажков, С.М.* Некоторые аспекты реформирования инженерной высшей школы [Текст] / С.М. Стажков // Высшее образование в России. – 2008. – № 3. – С. 50-54.
10. *Адольф, В.А.* Проектирование образовательного процесса на основе компетентностного подхода [Текст] / В.А. Адольф, И.Ю. Степанова // Высшее образование в России. – 2008.– № 3. – С. 158-161.

Технология организации ОДИ (организационно-деятельностной игры) на примере коллоквиума по теории вероятностей (случайные события и случайные величины)

Т.А. Бородкина

Создателем ОДИ (организационно-деятельностной игры) является Георгий Петрович Щедровицкий [1929-1994]. Объект ОДИ представляет собой некоторую проблему, которую предстоит решить в ходе игры, используя эффективные методы мышления. Целью такой игры является создание “продукта игры” - текста, проекта, резолюции, содержащего решение поставленной или сформулированной в ходе игры проблемы. ОДИ рассматривается как средство и метод решения комплексных проблем, и как эффективная форма организации и развития коллективной мыследеятельности.

Г.П. Щедровицкий [1] выделил три этапа развёртывания ОДИ.

1) Этап подготовки (формирование команды организаторов, методологов и исследователей игры в ходе разработки её основной концепции, рабочих целей, оргпроектов, программ и плана);

2) Основной этап (осуществление рабочих процессов, порождающих продукты и результаты). Этот этап делится на три фазы:

– изложение всем участникам замысла, основной концепции и важнейших рабочих целей проводимой игры, затем - её оргпроекта, программы и регламента;

– практическое вхождение участников в игру, проработка и освоение рабочих и игровых целей, организация, соорганизация и самоорганизация игровых групп (самоопределение участников), имитация рабочих процессов;

– рабочая фаза (фаза реальных рабочих процессов).

3) Этап выхода из игры и обобщения опыта (этап рефлексивного и мыслительного анализа).

Основной принцип организации и проведения ОДИ согласуется с принятой синергетической картиной мира: ОДИ – самодеятельная, самоорганизующаяся и саморазвивающаяся система.

ОДИ – новая культурно-историческая форма организации коллективной мыследеятельности любого назначения, обеспечивающая развитие самой мыследеятельности.

Нам представляется целесообразным проведение коллоквиума по теории вероятностей (случайные события и случайные величины) в форме ОДИ в силу вышеизложенных её особенностей.

В основу составления заданий для ОДИ “Коллоквиум по теории вероятностей (случайные события и случайные величины)” были положены методические рекомендации П.М. Эрдниева [2], дополненные нашим собственным опытом преподавания теории вероятностей. Основные требования, предъявляемые к набору заданий: 1) полнота (возможность подтвердить знания по всем вопросам, связанным с темой коллоквиума); 2) организация собственной творческой деятельности (постановка студентом перед самим собой и однокурсником задачи); 3) усложнение и вариативность заданий; 4) возможность проявления собственных стилевых особенностей; 5) возможность работы в группе и индивидуально. При этом предполагается использование студентами следующих методов и приёмов мыслительной деятельности: аналогия, обобщение, различение, обращение, анализ, синтез, целостность, рефлексия. Предложенный набор заданий (см. ниже) позволяет реализовать конкретные подходы к обучению: одновременное изучение/использование нескольких понятий; обеспечение единства процессов составления и решения задач; рассмотрение определённых и неопределённых заданий; обращение структуры задания (противопоставление исходного и преобразованного задания); достижение системности знаний; развитие стилевой гибкости; согласование житейских представлений с полученными знаниями; получение собственных интерпретационных моделей; активизация мыслительной деятельности; мотивирование учебной деятельности студента; развитие визуального мышления.

Особый интерес представляет собой оценка результатов коллоквиума. Предлагаем следующие критерии: 0 баллов ставится за невыполненное или выполненное неверно задание; 1 балл – за стандартный вопрос/решение, связанный/связанное с интерпретационными моделями, которые были использованы в учебном процессе (репродуктивный уровень); 2 балла – за нестандартный вопрос/решение, связанный/связанное либо с собственным субъектным опытом, либо с созданной студентом собственной интерпретационной модели (продуктивный уровень). Возможны бонусы: 1 балл за оригинальность выполнения задания (творческий уровень).

Рассмотрим пример проведения коллоквиума по теории вероятностей (случайные события и случайные величины) с использованием технологии организации ОДИ.

Цель игры:

1. сообщить/подтвердить приобретённые знания;
2. проявить креативные навыки;
3. научиться работать в команде;
4. научится оценивать свои знания и знания своих однокурсников.

Участники игры:
студенты 3-х групп 2-го курса института строительства и архитектуры:
3 группа – 7 человек, 4 – 4, 7 – 11 (итого 22 человека).
Средства обучения:

1. тетрадь 18 листов;
2. письменные принадлежности (ручка, карандаш, резинка, линейка);
3. фломастеры;
4. калькулятор.

Водящий: преподаватель.
Эксперт: преподаватель.
Помощники: студенты, которые не собираются в это время сдавать коллоквиум или студенты старших курсов.
Время: 70 мин.
Время окончания выполнения задания определяется звуковым сигналом (выбирают / придумывают сами студенты).
Оценка:
0 баллов – задание не выполнено;
1 балл - задание выполнено верно;
2 балла – задание выполнено верно и оригинально.
Возможны бонусы: 1 балл.
Студенты сидят за партами по одному.

№	Задание	Количество баллов	Время, мин.	Приёмы и технологии
1	Продолжить фразу: “вероятность выглядит как. . . ”	0,1,2	3	Приём “выглядит как”, ТКМ (технология критического мышления)
2	Придумать 2 теоретических вопроса и 4 задачи для соседа по темам: комбинаторика, случайное событие, случайная величина, многомерные случайные величины, функции случайных величин, закон больших чисел	0,1,2,3,4,5,6	10	Приёмы, направленные на развитие креативных навыков; технология развития креативных приёмов и навыков
3	Соседи объединяются в пары, начиная с 1-ой парты; с соседом поменяться придуманными вопросами/задачами; ответить на полученные вопросы / решить задачи	0,1,2,3,4,5,6	15	Приём: работа в парах; технология дифференцированного обучения

4	Вернуть свою тетрадь; оценить работу соседа по бальной системе 0/1 за каждый правильный результат	0,1,2,3,4,5,6	3	Приём взаимной оценки; ТКМ
5	Решить 3 задачи, предложенные преподавателем	0,1,2,3	5	
6	Составить для каждой из предыдущего пункта задачи обратную и решить её	0,1,2,3,4,5,6	10	Приём обратной задачи; теория и методика обучения математике
7	Найти запланированные ошибки (3)	0,1,2,3	4	Приём запланированных ошибок; ТКМ
8	Дано условие, студенту самому сформулировать вопрос/задачу для случайного события и случайной величины. Решить полученные задачи.	0,1,2,3,4	10	Приём обратной задачи; теория и методика обучения математике
9	Изобразить случайные элементы строительного сооружения	0,1,2	4	Технология контекстного обучения
10	Написать резюме при приёме на работу: " Полученные мной во время учёбы знания по теории вероятностей помогут мне при решении следующих производственных задач..."(продолжить)	0,1,2	3	Приём: возможности применения; технология рефлексивного обучения
11	Задать (написать) теоретические или практические вопросы непонимания преподавателю по изученному материалу	0,1,2	3	Рефлексивный приём; технология рефлексивного обучения

Задание 5.

Решить 3 задачи:

1) Дан ряд распределения случайной величины X:

x	–3	1	4
p	0,2	?	0,3

Найти коэффициент асимметрии.

2) Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,05. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что абсолютная разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время t окажется меньше двух.

3) Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) равномерно распределена внутри прямоугольного треугольника с вершинами O(0;0), A(0;8), B(8;0). Найти двумерную плотность вероятности системы.

Задание 7.

Найти **3** *запланированные ошибки (с обоснованием для получения положительных баллов).*

1) Вероятность невозможного события равна нулю.

2) Мама предложила братьям Андрею и Олегу предоставить решение спора о том, кому мыть посуду, случаю. Если при бросании игрального кубика выпадет число очков, кратное 2, то посуду будет мыть Андрей, а если кратное 3, то посуду моет Олег. Для Олега это предложение не выгодно.

3) Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Вероятность среди 5 случайно выбранных волокон смеси обнаружить менее двух окрашенных равна $\frac{13}{16}$.

4) При стрельбе была получена частость попадания 0,6. Было сделано 30 выстрелов, если получено 12 промахов.

5) M(X)=2, где X – число выигрышных лотерейных билетов, если куплено 20 билетов, для каждого из которых вероятность быть выигрышным постоянна и равна 0,1.

6) M(X-Y)=M(X)-M(Y).

7) D(X-Y)=D(X)-D(Y), если случайные величины X, Y независимы.

Задание 8.

Дано условие.

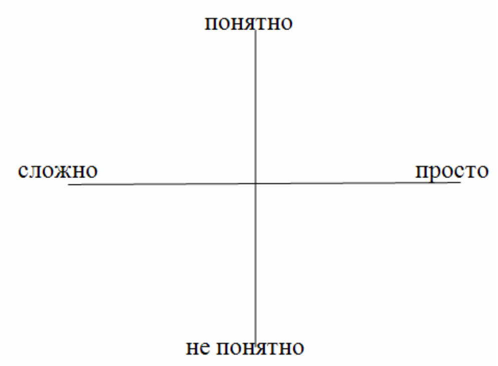
Кристофер Робен вызвался помочь Кенге определять количество конфет, которые будет разрешено съесть крошке Ру в день его рождения. Для этого он решил использовать игральный кубик.

Поставить задачу / вопрос для случайного события и случайной величины. Решить.

Подведение итога коллоквиума студентами (приём самооценки): оценочное окно. Прошу здесь и сейчас в оценочном окне расположить в соответствии с выбранной системой координат точки, определяемые номером задания: 1) самостоятельно; 2) в микрогруппах; 3) в общем оценочном окне представителем от каждой микрогруппы.

Задания, выполненные в тетради, сдаются на проверку преподавателю. Результаты – через 60 мин или на следующий день. Выигрывает (сдаёт коллоквиум) – студент, набравший 29-42 балла.

Оценочное окно:



Библиографический список

1. *Щедровицкий, Г.П.* Организационно-деятельностная игра как новая форма организации коллективной мыследеятельности. Методы исследования, диагностики и развития международных трудовых коллективов [Текст] / Г.П. Щедровицкий. – М., 1983. –
2. *Эрдниев, П.М.* Обучение математике в школе [Текст] / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев // Укрупнение дидактических единиц. Книга для учителя. – 2 изд. испр. и доп. – М.: АО "СТОЛЕТИЕ", 1996. – 320 с.

Методические особенности обучения геометрии учащихся вечерней школы с использованием ИГС

Т.С. Ширикова

При переходе к всеобщему среднему образованию вечерняя (сменная) общеобразовательная школа была и остается важной составной частью системы образования нашей страны. Современная вечерняя школа отличается сложным контингентом учащихся: неоднородной по возрасту (от подростков 15 лет до 30-летних взрослых), уровню обученности и обучаемости, социальному положению, степени и характеру занятости вне школы, характеристикам восприятия, памяти, внимания, мотивации и другим признакам. Учащиеся вечерней школы нередко имеют ошибочную самооценку, негативные ценностные ориентации и поведенческие установки. Для значительного числа молодежи вечерняя школа последний шанс получить качественное образование. Современная вечерняя школа предлагает учащимся различные формы обучения, самой востребованной из которых является очно-заочная. Выбор данной формы обучения при всей своей привлекательности обуславливает и появление ряда учебных трудностей, которые наиболее ярко проявляются при обучении математике:

– увеличение доли самостоятельной учебной работы при освоении программы дисциплины (в учебном плане этой формы обучения на математику в 9 классе отводится всего 2 часа в неделю);

– частичная утрата или отсутствие базовых знаний, умений и навыков для освоения программного материала (у большинства учащихся имеется перерыв в учении, пробелы в математических знаниях за предыдущие годы обучения);

– объективная невозможность или нежелание посещать учебные занятия в системе (вызванная совмещением учебы с работой, домашними делами, или низкой учебной мотивацией);

– необходимость подготовки учащихся вечерняя (сменная) общеобразовательная школа в сдаче выпускных экзаменов по математике в форме ЕГЭ.

Главная задача учителя математики в этих условиях заключается в том, чтобы заинтересовать учащихся своим предметом и научить добывать знания самостоятельно, снять их учебную тревожность, вызванную ожиданием привычных неудач. На необходимость ее решения обращают внимание многие ученые [1, 2] и др.

Мы видим возможность решения данной задачи при обучении геометрии учащихся вечерней (сменой) общеобразовательной школы в использовании технологии обучения геометрии с использованием интерактивной геометрической среды. К их числу относятся такие программные продукты как GeoGebra, GeoNext, предметно-ориентированная инструментальная среда Живая геометрия, пакет Динамические Геометрические системы DGS и др. Общим достоинством этих сред является возможность компьютерной поддержки учебно-исследовательской деятельности учащихся в процессе поиска способа решении задач, осмысления изучаемых геометрических положений, обоснования истинности теорем. Привлечение интерактивных геометрических сред к процессу обучения геометрии учащихся вечерних (сменных) общеобразовательных школ позволяет создать условия для:

– развития познавательного интереса за счет переноса увлечения компьютерной техникой и новыми информационными технологиями (что так характерно для современных подростков) их области внеучебной деятельности в учебную;

– формирования готовности учащихся к самостоятельному получению геометрических знаний в ходе моделирования средствами интерактивной геометрической среды геометрических объектов и проведения компьютерных экспериментов для расширения знаний об устойчивости и изменчивости их свойств;

– снижения учебной тревожности учащихся за счет визуализации интеллектуальной деятельности учащихся, а также использования возможностей среды для снижения технических трудностей, связанных с вычислениями, техникой построений, контролем правильности действий.

Остановимся подробнее на иллюстрации второй возможности. На примере методики работы с теоремой об отношении площадей подобных треугольников. Будем выделять в процессе работы с теоремой этапы, соответствующие этапам гносеологического цикла математического познания (схема 1):

Схема 1

Гносеологический цикл в математическом познании по Т.А. Ивановой [3, с. 132]

Накопление фактов →	Выдвижение гипотез →	Проверка истинности доказательством →	Построение теории →	Выход в практику
Общенаучные эмпирические методы: наблюдение, сравнение, анализ. Частные методы: вычисление, построение, измерение, моделирование	Гипотетико-дедуктивные: анализ, синтез, аналогия, неполная индукция, обобщение, абстрагирование, интуиция, конкретизация, дедукция	Доказательство, правила вывода, законы логики, методы доказательства и опровержения: синтетический, аналитический, от противного, полной индукции, исчерпывающих проб, математической индукции, контрапозиции, контрпримеры, специальные методы	Аксиоматический метод.	Математическое моделирование.

Рассмотрим возможности использования ИГС на отдельных этапах работы с теоремой на примере утверждения: “Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия” (8 класс). Наиболее типичной ошибкой при изучении соотношении величин подобных треугольников для учащихся вечерней школы является проведение ложной аналогии “Если отношение соответственных сторон равно коэффициенту подобия, то это верно и для отношения площадей”. Это заблуждение является настолько устойчивым, что единичный контрпример не позволяет убедить учащихся в необходимости отказаться от этой аналогии. В связи с этим работа с утверждением теоремы должна начинаться с накопления и обобщения фактов альтернативных первичной гипотезе. Для накопления фактов можно использовать возможности ИГС, связанные с

построением параметрически заданного динамического чертежа, а так же использования функции записи данных в таблицу (рис. 1).

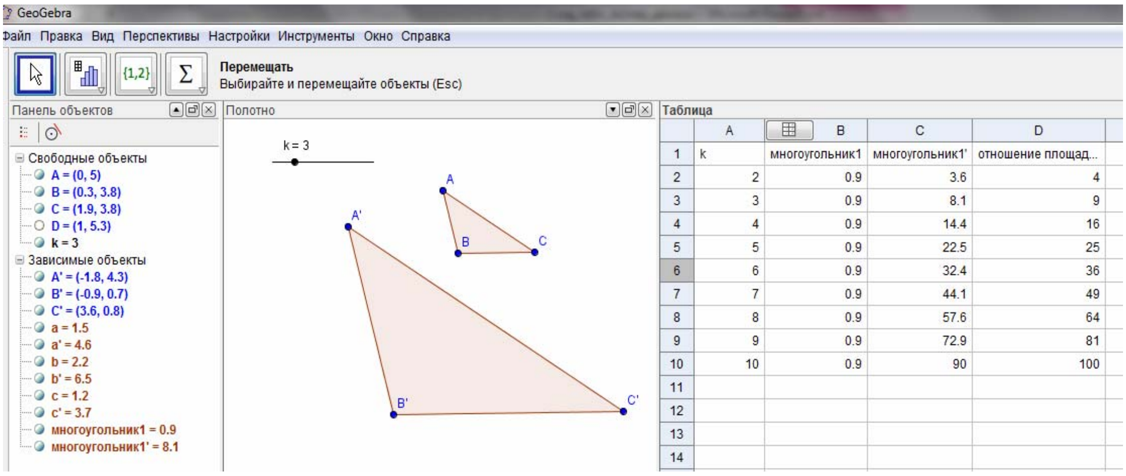


Рис. 1

Данные компьютерного эксперимента позволяют учащимся выдвинуть гипотезу о возможном равенстве отношения площадей квадрату коэффициента подобия с объяснением возможных несоответствий некоторых данных накоплением погрешности и заменой точных значений приближенными.

Проверка выдвинутой гипотезы может быть проведена сначала "методом компьютерного доказательства", т.е. установления факта динамической устойчивости отношения площадей подобных треугольников при фиксированном значении коэффициента подобия. Здесь ИГС используется для проведения компьютерного эксперимента, устанавливающего факт независимости отношения площадей подобных треугольников от параметров, задающих исходный треугольник (рис. 2).

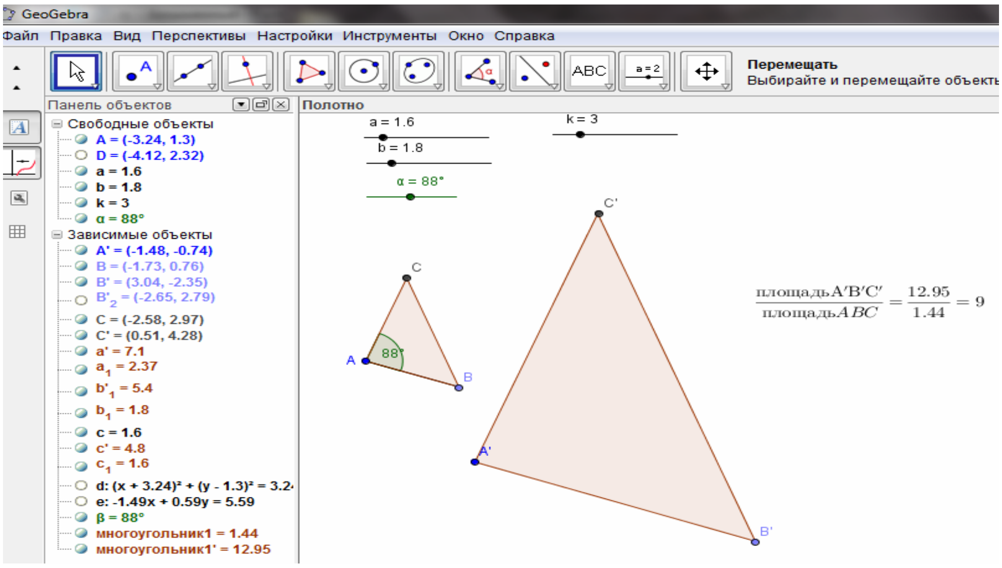


Рис. 2

На этапе построения теории необходимо логически обосновать факт динамической устойчивости отношения площадей подобных треугольников при фиксированном коэффициенте подобия. Для этого учащимся предлагается провести расчеты, не придавая параметрам конкретных числовых значений:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}a'b'\sin\gamma}{\frac{1}{2}ab\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{2}(ka)(kb)\sin\gamma}{\frac{1}{2}ab\sin\gamma} = k^2$$

Реализация этапа "выход в практику" должна начинаться с демонстрации учащимся практической значимости доказанного утверждения. Для этой цели может быть использовано задание решить двумя способами задачу "Даны два подобных треугольника ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, коэффициент подобия k=1,5. Площадь треугольника ΔABC равна 15 см^2, одна из сторон равна 3,2 см. Найдите площадь треугольника $\Delta A_1B_1C_1$". Первый способ – без использования знания формулы $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$, второй способ – с использованием формулы $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$.

Решение задачи рассмотрим в виде таблицы пошагово.

Шаги решения.	Первый способ (без формулы).	Второй способ (с помощью формулы).
1	Имеем для ΔABC: $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, по условию $S=15$, $a=3$. Получаем: $b=\frac{2\cdot 15}{3\cdot\sin\gamma}=\frac{10}{\sin\gamma}$	По формуле $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^2$ получаем $S_{A'B'C'}=S_{ABC}\cdot k^2$
2	$a'=ka=1{,}5\cdot 3=4{,}5$ $b'=kb=1{,}5\cdot\frac{10}{\sin\gamma}=\frac{15}{\sin\gamma}$	Получаем $S_{A'B'C'}=15\cdot 1{,}5^2=33{,}75$
3	Для $\Delta A_1B_1C_1$ $S'=\frac{1}{2}a'b'\sin\gamma$, тогда $S'=\frac{1}{2}a'b'\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 4{,}5\cdot\frac{15}{\sin\gamma}\sin\gamma=$ $=33{,}75$	

Включение компьютерного эксперимента в систему методов обоснования геометрических утверждений позволит, на наш взгляд, снять многие трудности (окоторых говорилось выше), которые испытывают учащиеся вечерней школы при изучении систематического курса геометрии.

Библиографический список

1. *Кулюнкин, Ю.Н.* Социально-психологические проблемы обучения учащихся вечерних школ [Текст] / Ю.Н. Кулюнкин. –“Вечерняя школа”, 1980. – № 2. – С. 37.
2. *Першанина, Е.В.* Пути улучшения качества знаний учащихся вечерних школ [Текст] / Е.В. Першанина, В.В. Гоциридзе, Л.З. Наспер [и др.]. – М.: Просвещение, 1985. – 128 с.
3. *Иванова, Т.А.* Теоретические основы гуманитаризации общего математического образования [Текст]: дис. ... докт. пед. наук / Т.А. Иванова. – Н.-Новгород, 1988. – 338 с.

Проектирование индивидуальных образовательных траекторий учащихся в процессе изучения математического анализа

А.М. Маскаева

Уточнено понятие индивидуальная образовательная траектория учащихся старших классов. Разработана модель проектирования индивидуальных образовательных траекторий учащихся на основе вариативности (обоснован выбор учителя и учащихся), модульности (выделены базовые и вариативный модули раздела "Начала математического анализа") и деятельностного подхода (расписаны этапы деятельности учителя и учащихся). Представлено поле образовательных траекторий изучения математического анализа, которое состоит из разнообразных траекторий изучения данного раздела в соответствии с выбором учащихся.

В настоящее время наметился переход к личностно-ориентированным стандартам образования, в которых учитываются индивидуальные особенности и личностные качества обучающихся, предоставляется возможность выбора дальнейшего пути развития. Сейчас в образовании, с одной стороны, присутствует многообразие различных типов учебных заведений, образовательных программ, подходов, педагогических задач, методов и форм обучения; с другой стороны – личность имеет право на общекультурное развитие и самореализацию в соответствии со своими особенностями, способностями и интересами, на основе свободного выбора мнений, убеждений, индивидуальных образовательных траекторий [3].

Индивидуальная образовательная траектория предусматривает наличие индивидуального образовательного маршрута (содержательный компонент), а также разработанный способ его реализации (технологии организации образовательного процесса). А.В. Хуторской определяет индивидуальную образовательную траекторию как персональный путь реализации личностного потенциала каждого в образовании [4]. Е.А. Александрова под индивидуальной образовательной траекторией понимает программу образовательной деятельности старшеклассника, разработанную им совместно с педагогом (с разным их долевым участием, зависящим от готовности обучающегося к данному виду деятельности и наличия у него соответствующих навыков [1].

На основе анализа различных подходов, мы рассматриваем индивидуальную образовательную траекторию как процесс и результат поэтапного обогащения, становления и развития опыта, личностных и регулятивных характеристик старшеклассника на основе выбора в структуре функционального отражения содержания, форм, методов и средств вариативного обучения математике. Построение индивидуальной образовательной траектории связано с осуществлением будущим выпускником выбора, осознанием личной ответственности за свой выбор, формированием установки на саморазвитие себя как личности.

Анализ содержания стандарта среднего (полного) общего образования по математике по разделу “Начала математического анализа” дает возможность выделить модульные элементы для базовой и вариативной части курса изучения данного раздела математики, а сам раздел рассматривать, как учебный модуль (таблица 1).

Список вариативных модульных элементов может изменяться и дополняться в зависимости от потребностей учащихся и возможностей учителей. Учащиеся, родители, социум могут предъявить заказ на приобретение определенных компетенций по учебному модулю “Начала математического анализа”, при этом учитель должен скорректировать их желания и предоставить разработанный учебно-методический комплекс по заказному модульному элементу.

Таблица 1

Базовые и вариативные модульные элементы

Базовые модульные элементы (МЭ)	Вариативные модульные элементы (МЭV)
MЭ$_1$ “Производная”; MЭ$_2$ “Применение производной к исследованию функций”; MЭ$_3$ “Первообразная”; MЭ$_4$ “Определенный интеграл”.	МЭV_1 “Пределы”; МЭV_2 “Методы интегрирования”; МЭV_3 “История развития математического анализа”; МЭV_4 “Применение производной и интеграла в областях науки”; МЭV_5 “Нестандартные методы дифференцирования и интегрирования”.
Учебная линия “Подготовка к ЕГЭ по математике”	

Раздел математики “Начала математического анализа” был выбран не случайно, существует несколько причин: изучение в средней школе этого раздела всегда было трудным для учащихся; изучение его на первых курсах в ВУЗах для любых специальностей также было затруднительным (большой процент неуспеваемости у студентов именно по этому разделу математики); с точки зрения математики этот раздел связан с абстрактными понятиями, т.е. при его изучении необходим качественный скачок у учащихся от конкретно-образного мышления к абстрактному мышлению, что очень непросто сделать в ВУЗах, не говоря уже о средней школе. А для этого нужно использовать новые формы работы – организовать возможность построения индивидуальных образовательных траекторий изучения этого раздела учащимися.

Базовые модульные элементы изучаются на занятиях, а вариативные модульные элементы предоставляют возможность выбора учащимися формы изучения и получаемые результаты. Учебная линия "Подготовка к ЕГЭ по математике"пронизывает содержание базовых модульных элементов, представляет собой подобранные задания, входящие в ЕГЭ по математике за предыдущие года. Необходимо каждый год обновлять банк заданий и структурировать их по каждому базовому модульному элементу. Содержание $MЭV_1$ "Пределы"и $MЭV_2$ "Методы интегрирования"входит в состав дистанционного курса, помещенный на сайте учебного заведения. Результатом изучения $MЭV_3$ "История развития математического анализа"является реферат на выбранную тему. $MЭV_4$ "Применение производной и интеграла в областях науки"представляет собой работу над учебным проектом, в результате которой учащиеся составляют глоссарий терминов, решают прикладные задачи, строят графики с помощью компьютерных программ, готовят презентацию и выступление на конференции. $MЭV_5$ "Нестандартные методы дифференцирования и интегрирования"предусматривает две формы изучения: исследовательский проект и факультативный курс. В результате исследовательского проекта учащиеся готовят презентацию, а по итогам факультативного курса предусмотрена контрольная работа.

Таким образом, состав и структура учебного модуля "Начала математического анализа"позволяет проследить процесс развертывания индивидуальных образовательных траекторий учащихся.

Индивидуальная образовательная траектория учащегося состоит из обязательной, вариативной, коррекционной и организационной частей. Обязательная часть включает основные для изучения модули M_1, M_2,..., M_n, которые соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта и составляют основную, инвариантную часть индивидуальной образовательной траектории учащихся. Вариативная часть включает набор модулей MV_1, MV_2,..., MV_n и предполагает выбор учащихся интересующих направлений для дальнейшего изучения. Обязательная и вариативная части индивидуальной образовательной траектории учащегося направлены на определение содержания изучаемого материала. Коррекционная часть предусматривает оказание помощи учащимся в выборе модулей из вариативной части с учетом их индивидуальных особенностей, а также определение организационной части. В организационную часть входят следующие компоненты методической системы: формы, методы, технологии, средства, контроль изучения выбранного содержания. Эта часть индивидуальной образовательной траектории также предполагает выбор учащихся.

Для проектирования индивидуальных образовательных траекторий учащихся используется принцип модульности, который реализуется через: модуль базового образования (обязательное образование) и вариативный модуль (предполагающий выбор), модуль коррекции (созданный для учета индивидуальных особенностей участников), модуль организационно-педагогического обеспечения [2].

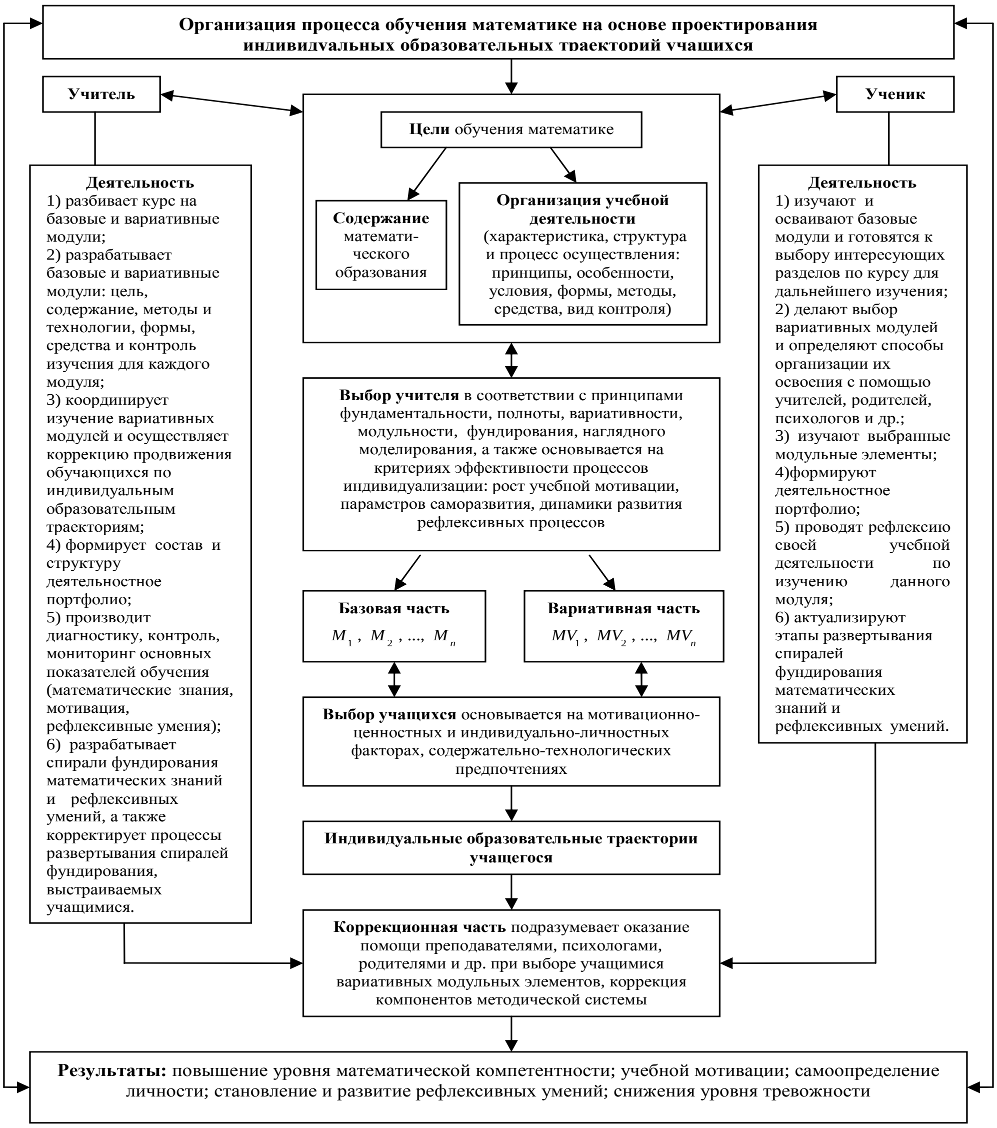


Рис. 1. Модель проектирования индивидуальных образовательных траекторий учащихся

При построении индивидуальной образовательной траектории учащихся большая роль отводится выбору, а также определению индивидуальных особенностей, личностных предпочтений, способностей и интересов учащихся. Выбор осуществляется как преподавателем, так и учащимся, но выбор учащихся корректируются преподавателями, родителями, психологами и др. Изменяются функциональные обязанности преподавателей в процессе разработки и реализации индивидуальных образовательных траекторий учащихся: аналитически-проектирующая, консультирующая, координирующая, организующая и коррекционная.

Модель проектирования индивидуальных образовательных траекторий (рис. 1) даёт возможность организовать выбор учащихся траекторий изучения учебного модуля "Начала математического анализа", что в свою очередь позволяет организовать вариативное обучение в старших классах.

Поле образовательных траекторий изучения учебного модуля "Начала математического анализа"представлено на схеме (рис. 2), которая состоит из разнообразных траекторий изучения данного учебного модуля в соответствии с выбором учащихся. Из схемы видно, что базовыми узлами являются выделенные четыре модульных элемента (МЭ1, МЭ2, МЭ3 и МЭ4), а учебной линией является подготовка к ЕГЭ по математике.

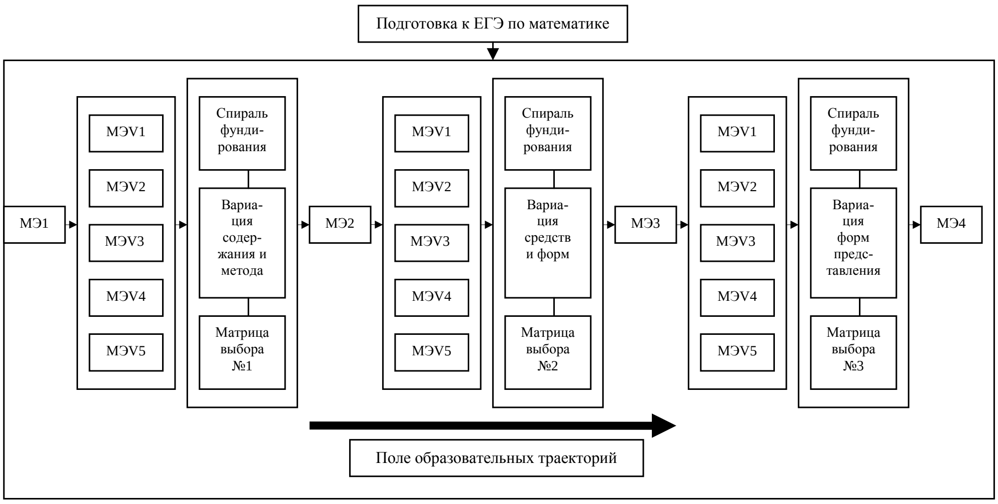


Рис. 2. Поле образовательных траекторий изучения учебного модуля “Начала математического анализа”

В процессе изучения первого модульного элемента "Производная"учитель проводит пропедевтику вариации содержания и методов: на уроках на основе наглядного моделирования происходит знакомство учащихся с возможными вариантами освоения содержания учебного модуля "Начала математического анализа"и разнообразными методами (аналитические, графические, численные и др.) на примере изучения базового модульного элемента. После изучения МЭ1 учащиеся делают выбор содержания и метода изучения вариативного модульного элемента из приложенного списка (МЭV1, МЭV2, МЭV3, МЭV4 и МЭV5) на основе развертывания спиралей фундирования математической компетентности и рефлексивных умений, учёта матрицы выбора № 1, и заполнения технологических карт и деятельностного портфолио.

Далее изучается второй базовый модульный элемент "Применение производной к исследованию функций"и выполняются задания по выбранному вариативному модульному элементу в соответствии с матрицей выбора № 1. В процессе изучения МЭ2 учитель проводит пропедевтику вариации средств и форм: на уроках происходит знакомство учащихся с разнообразными средствами и формами изучения учебного модуля "Начала математического анализа"на примере изучения базового модульного элемента. После изучения МЭ2 учащиеся делают выбор средств и форм изучения вариативного модульного элемента на основе спиралей фундирования математической компетентности и рефлексивных умений, матрицы выбора № 2.

Далее изучается третий базовый модульный элемент "Первообразная"и выполняются задания по выбранному вариативному модульному элементу в соответствии с матрицей выбора № 2. В процессе изучения МЭ3 учитель проводит пропедевтику вариации форм представления результатов изучения: на уроках происходит знакомство учащихся с разнообразными формами представления результатов изучения учебного модуля "Начала математического анализа"на примере изучения базового модульного элемента. После изучения МЭ3 учащиеся делают выбор форм представления результатов изучения вариативного модульного элемента на основе спиралей фундирования математической компетентности и рефлексивных умений, матрицы выбора № 3.

Далее изучается четвертый базовый модульный элемент "Определенный интеграл"и выполняются задания по выбранному вариативному модульному элементу в соответствии с матрицей выбора № 3.

В результате развертывания индивидуальной образовательной траектории учащегося формируются его деятельностное портфолио, которое включает результаты изучения каждого базового модульного элемента, каждого этапа выбора, а также каждого этапа работы над вариативным модульным элементом в процессе изучения учебного модуля "Начала математического анализа".

Библиографический список

1. *Александрова, Е.А.* Педагогическое сопровождение старшеклассников в процессе разработки и реализации индивидуальных образовательных траекторий [Текст] / Е.А. Александрова // Дис. ... докт. пед. наук / Е.А. Александрова. – Тюмень, 2006. – 375 с.
2. *Жемулин, С.А.* Моделирование учебной деятельности учащихся при проектировании образовательного процесса в школе [Текст] / С.А. Жемулин // Автореферат дис. ... канд. пед. наук. – Ярославль, 2008. – 21 с.
3. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года [Текст] // Вестник образования. – 2002. – № 6. – с. 11-40.
4. *Хуторской, А.В.* Современная дидактика [Текст]: учебник для вузов / А.В. Хуторской // СПб: Питер, 2001. – 544 с.

Математико-прикладная олимпиада как одна из форм формирования исследовательской компетентности будущих радиофизиков

Г.М. Семенова

"В последние годы большое распространение, как одна из форм активизации научного творчества студентов, получили студенческие олимпиады и конкурсы по математике. Предлагаемые на таких олимпиадах задачи носят нестандартный характер и требует от студента не только прочных знаний по программе, но и изобретательного, творческого подхода; как правило, они иллюстрируют в упрощенной форме ту или иную глубокую математическую идею" [2].

Традиционно более подготовленные по математике выпускники средних образовательных учреждений выбирают физические направления ВУЗов, и наша задача – вовлекать их в особые формы работы (олимпиады, математические бои, конференции, творческие соревнования и др.). Поскольку современная высшая школа требует от своих выпускников высокого уровня научной подготовки, то одним из условий обучения радиофизиков является не только изучение математической науки, но и развитие навыков исследовательской деятельности.

Нами не ставится цель разработки методики обучения умению решать математические задачи повышенной трудности, поставленной задачей является подбор и разбор профессионально-ориентированных задач олимпиадного уровня, формирующих исследовательскую компетентность в ходе подготовки к выступлению на олимпиадах, а также развитие устойчивой мотивации к изучаемой дисциплине будущих радиофизиков. В нашем случае математико-прикладная олимпиада – эта студенческая олимпиада первого тура (1-2 курсы), для отбора способных студентов для участия в университетской математической олимпиаде. В перечень заданий данной олимпиады включены профессионально-ориентированные задачи олимпиадного уровня.

К основным *целям* проведения математико-прикладных олимпиад можно отнести:

– воспитание и подготовку сознательных и высокообразованных людей с прочными математическими знаниями и умениями применять их в новой ситуации, способных к активной научно-исследовательской деятельности;

– повышение интереса студентов к углубленному изучению фундаментальной части учебного цикла, развитие роста профессиональной мотивации;

– умение применять полученные фундаментальные математические знания для исследования моделей физических процессов и реальных явлений на практике;

– развитие у студентов логического мышления, побуждение интереса к решению нестандартных ситуаций, умений логично и последовательно рассуждать; аналитических умений (сводить решение сложной задачи к решению ряда простых задач);

– формирование исследовательской компетентности в ходе подготовки к математической олимпиаде;

– ознакомление с современными научными открытиями в области математики, физики, достижениями нанотехнологий, внедрением научных открытий в производстве; овладение современной компьютерной техникой;

– привлечение профессорско-преподавательского состава, аспирантов, магистрантов, студентов старших курсов к проведению олимпиад.

Мы считаем, что уже с 1 курса следует привлекать одаренных студентов, имеющих достаточную базу знаний по математике, к учебно-исследовательской работе, в частности, на математико-прикладную олимпиаду, где они приобретают уверенность в своих силах, возможностях, формируют научный стиль мышления, творческую математическую деятельность. Рассмотрим в качестве примера олимпиадную задачу для студентов младших курсов [1].

Задача. Снегопад в городе начался еще до полудня и продолжался с одинаковой скоростью (по толщине) до вечера. Ровно в полдень бригада студентов вышла на дорогу и приступила к уборке снега. За первые 2 часа студенты продвинулись на 2 км, но за последующие 2 часа – только на 1 км. Студенты работали с одинаковой скоростью (по объему) и продвигались только вперед. В котором часу начался снегопад?

Решение. Пусть h_0 – высота снежного покрова к моменту начала уборки, h_1 – высота снежного покрова, выпадающего за единицу времени. Заметим, что при этом $t_1 = \frac{h_0}{h_1}$ есть продолжительность снегопада до начала уборки. Высота снежного покрова на неубранном участке к моменту времени t, будет равна $h(t) = h_0 + h_1 t$ и, так как скорость продвижения бригады в процессе уборки снега обратно пропорциональна высоте снежного покрова, то она равна $v(t) = \frac{k}{h_0+h_1 t}$. Длина участка дороги убранного за первые два часа в два раза больше длины участка убранного за последующие два часа, что равносильно условию: $\int\limits_0^2 \frac{k\,dt}{h_0+h_1 t} = 2\int\limits_2^4 \frac{k\,dt}{h_0+h_1 t}$.

Из последнего равенства последовательно получаем:

$$\frac{k}{h_1}\ln(h_0+h_1 t)|_0^2 = 2\frac{k}{h_1}\ln(h_0+h_1 t)|_2^4.$$

Подставляя числовые значения, получим $\ln\left(\frac{h_0+2h_1}{h_0}\right) = 2\ln\left(\frac{h_0+4h_1}{h_0+2h_1}\right)$, далее зная, что $t_1 = \frac{h_0}{h_1}$, имеем $1 + \frac{2}{t_1} = \left(\frac{t_1+4}{t_1+2}\right)^2$, решая данное уравнение, находим $t_1 = \sqrt{5} - 1$.

Таким образом, снегопад начался в момент времени $12-(\sqrt{5}-1)=13-\sqrt{5}\approx 10,75$, то есть приблизительно в 10 часов 45 минут.

Ответ: в 11 ч.

В ходе подготовки к данным олимпиадам, а именно в процессе решения профессионально-ориентированных задач олимпиадного уровня, у студента происходит развитие умений логично и последовательно рассуждать, формируется исследовательская компетентность, способствующая умению моделировать физические процессы, что очень важно для будущей профессиональной деятельности. Результаты олимпиад подтверждают эффективность такой подготовки.

Библиографический список

1. *Дмитриев, И.Г.* Математические олимпиады Лаврентьевских чтений 1997-2000 (Якутский госуниверситет) [Текст] / И.Г. Дмитриев. – Якутск: Изд-во ЯГУ, 2010. – 53 с.
2. *Садовничий, В.А.* [Текст] / В.А. Садовничий // Вестник МГУ. – 2006. – № 2.

Метод проектов как средство развития самостоятельной деятельности студентов

Н.Т. Ням

Новая концепция высшего образования, включающая переосмысление как содержательной компоненты на основе фундаментализации и гуманитаризации, так и структурной его части – переход на многоуровневую подготовку специалистов, подчеркивает необходимость коренного изменения, как преподавания, так и технологии обучения в целом. В этих условиях изменяется соотношение аудиторной и внеаудиторной нагрузки студентов, объем самостоятельной работы увеличивается, изменяются формы ее организации и контроля. Целью самостоятельной работы становится формирование профессиональных качеств будущего специалиста [4, с. 185].

Поиск ответа на вопрос “Как построить учебный процесс по математике, направленный на развитие самостоятельной деятельности студентов и способствующий подготовке квалифицированного специалиста?” позволил нам выдвинуть предположение, что использование проектной и информационной технологий обучения будет способствовать развитию самостоятельной деятельности студентов.

В современной педагогике метод проектов считается одним из наиболее продуктивных методов самостоятельной деятельности студентов. Включение студентов в проектную деятельность способствует их саморазвитию и отвечает современным задачам образования [3, с. 173].

Под методом проектов мы понимаем - способ достижения дидактической цели через детальную разработку проблемы, которая должна завершиться вполне реальным, осязаемым практическим результатом, оформленным тем или иным образом [4, с. 186].

Реализация метода проектов и исследовательского метода на практике ведет к изменению позиции преподавателя. Из носителя готовых знаний он превращается в организатора самостоятельно познавательной, исследовательской деятельности своих студентов.

Методика работы над проектом: подготовительный, практический и обобщающий этапы.

На первом этапе осуществляется разработка заданий для самостоятельной работы. На втором этапе практическое использование подготовленного материала для самостоятельной работы студентов.

На третьем подведение итогов защита проекта.

Например, учебный проект “Производная в экономике” [2]. Цель: показать приложения производных к решению экономических задач; сформировать умение решать экономические задачи с помощью производной.

Этапы работы над данным учебным проектом:

1) Постановка экономической задачи и изучение литературы. На этом этапе мы определяем задачи:

– выделение из содержания поставленной задачи экономических терминов;

– ознакомление с выделенными экономическими понятиями;

– повторение или изучение математических понятий необходимых для решения поставленной экономической задачи;

– составление глоссария, который содержит все необходимые экономические и математические термины для решения поставленной задачи.

Рекомендуемая литература:

– Высшая математика для экономистов. Практикум. Под ред. Н.Ш. Кремера. 2007. 479 с.

– Клюшин, В.Л. Высшая математика для экономистов: Учеб. пособие. М.: ИНФРАМ, 2006. 448 с.

– Коршунова Н.И., Плясунов В.С. Математика в экономике. М.: Изд. “Вита-Пресс”, 1996. 368 с.

Результат: Глоссарий, который содержит все необходимые экономические и математические термины для решения поставленной задачи.

2) Решение экономической задачи. Задачи этого этапа:

– составление плана, решения экономической задачи;

– реализация плана;

– проведение консультаций по математике и экономике.

Результат – это ответ на вопрос поставленной экономической задачи.

3) Построение графика производственной функции и ее производной. Задачи данного этапа:

– изучение литературы по информатике для работы в MS Excel, OpenOffice Calc, GeoGebra, Graph;

– ввод необходимых формул;

– работа с мастером диаграмм;

– построение графиков.

Консультирование с преподавателем информатики.

Результат – Графики производственной функции и ее производной выполненные в MS Excel, OpenOffice Calc, GeoGebra, Graph.

4) Защита проекта. На этом этапе мы определяем задачи:

– оформление решения экономических задач;

– подготовка презентации решения поставленных экономических задач;

– подготовка к выступлению на конференции или миниконференции.

Рекомендовать студентам оформление решения экономической задачи в виде презентации.

Конечный результат – презентация решения поставленных экономических задач.

Примерные экономические задачи могут быть предложены для выпольнения проекта “Производная в экономике” [2].

1) Цементный завод производит x т цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 т цемента. Производственные мощности завода таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 т в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наименьшими (наибольшими), если функция затрат имеет вид: $K = -x^3 + 98x^2 + 200x$.

2) Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x выражается функцией y=50x-0,05 x^3 (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

3) Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией y = –0,5x+80. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

4) Объем продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$(ед.), 1≤t≤8, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

5) Опытным путем установлены функции спроса $q = \frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p + 0,5$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

6) Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна 1?

7) Объем продукции u (усл. ед.) цеха в течение рабочего дня представляет функцию $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, где t – время (ч). Найти производительность труда через 2 ч после начала работы.

8) Зависимость между издержками производства y (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции x (ед.) выражается функцией $y = 10x - 0,04x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 5 ед.

9) Функции спроса q и предложения s от цены р выражаются соответственно уравнениями $q = 7 - p$ и $s = p + 1$. Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 5% от равновесной.

10) Объем выпущенной заводом продукции x и выручка z, полученная от ее реализации, связаны следующей зависимостью: $z = \frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 10x$. Найдите предельную выручку и постройте ее график. Пользуясь этим графиком определите, при каком объеме производства выручка максимальна (минимальна). Чему равна при этом предельная выручка? Что это означает?

11) Предприятие производит x единиц продукции в месяц и реализует ее по цене $P = 25 - \frac{1}{30}x$. Суммарные издержки производства составляют: $K = \frac{1}{15}x^2 + 5x + 300$. Определите, при каком объеме производства прибыль предприятия будет максимальной.

12) Зависимость полных издержек производства K от объема производствах выражается с помощью формулы: $K = x^3 - 4x^2 + 9x$. Рассчитайте, при каком объеме производства средние издержки минимальны.

13) Имеется запас меда стоимостью в C рублей. Известно, что с течением времени стоимость меда повышается по закону $V = Ce^{\sqrt{\frac{t}{2}}}$, а затраты на хранение настолько меньше V, что ими можно пренебречь. С другой стороны, если мед продать, а деньги положить в банк, то на вырученную сумму непрерывно будут начисляться 10% годовых. То есть сумма V_0, положенная в банк в момент времени $t = 0$, через t лет станет равной $V_1 = C_0e^{\sqrt{\frac{t}{2}}}$(10%= $\frac{1}{10}$). Определите момент времени t_0, в который наиболее выгодно продать имеющийся запас меда и положить деньги в банк, чтобы через t лет сумма, накапливаемая на счете, была максимальной.

Рассмотрим выполнение учебного проекта “Производная в экономике” по выделенным этапам. Была предложена следующая экономическая задача 1) [1,2].

Первый этап состоял в составлении глоссария с экономическими и математическими терминами необходимыми для решения поставленной задачи. Математические термины:

– Производная первого порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0 определяется как предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, т.е. $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

– Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$, из$x_2 > x_1$, следует $f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1))$. Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке I, и ее производная неотрицательна (неположительна) внутри I и равна нулю лишь в конечном множестве точек, о функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом промежутке I;

– точка максимума (минимума) функции $y = f(x)$. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причем вблизи этой точки слева от x_0 производная функции $f(x)$ положительна (отрицательна), а справа от x_0 она отрицательна (положительна), то x_0 – точка максимума (минимума) функции $f(x)$.

– Производная второго порядка y", или f"(x)определяется так $y - (y')'$, или $f"(x) = (f'(x))'$.

Если $f'(x_0) = 0$ и $f"(x_0) < 0$ ($f"(x_0) > 0$), то x_0 – точка максимума (минимума) функции $y = f(x)$.

Экономические термины:

– однофакторная производственная функция выражает зависимость между стоимостью выпускаемой продукции и стоимостью суммарных затрат на ее производство;

– функция затрат – это функция, в которой роль зависимой переменной играют затраты, а независимая переменная определяет уровень выпуска;

– квадратная производственная функция имеет вид $y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2$, где $a_0 > 0, a_1 > 0$, $a_2 > 0, x \geq 0$;

– предельные издержки производства – это предел среднего приращения издержек производства при $\Delta x \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, где x – объем производства некоторой продукции, K – суммарные затраты или издержки производства. $K = f(x)$ – производственная функция (функция затрат), описывающая зависимость издержек производства K от объема х выпускаемой продукции. На $\Delta K = f(x+\Delta x) - f(x)$ единиц возрастут затраты, если объем производства увеличится на Δx единиц;

– экономический смысл производной в данной точке – предельные издержки производства при данным его объеме;

– удельные затраты – это средние затраты на единицу продукции.

Производительность труда. Пусть функция $q = q(t)$ выражает объем q произведенной за время t продукции и пусть требуется найти производительность труда в момент t_0. Рассмотрим период времени от момента t_0 до $t_0 + \Delta t$. За этот период объем произведенной продукции составит $\Delta q = q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)$. Средняя производительность за этот период равна $\frac{\Delta q}{\Delta t}$. Тогда производительность труда в момент t_0 можно определить как предельное значение средней производительности при $\Delta t \to 0$: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0+\Delta t)-q(t_0)}{\Delta t}$.

Эластичность. Выражение $(\ln y)' = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{y'}{y}$ называется **логарифмической производной** функции $f(x)$. Логарифмическую производную называют также темпом изменения T_y функции y: $T_y = \frac{y'}{y}$.

Эластичностью *$E_x(y)$* функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению аргумента x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = x \cdot \frac{y'}{y}. \qquad (a)$$

Эластичность функции приближенно выражает процентное изменение функции $y = f(x)$ при изменении аргумента x на 1%. Из формулы (a) следует, что эластичность функции равна произведению независимой переменной х на темп изменения функции T_y: $E(y) = E_x(y) = xT_y$.

Отметим свойства эластичности: $E(uv) = E(u) + E(v)$; $E(\frac{u}{v}) = E(u) - E(v)$, очевидным образом следующие из соответствующих свойств логарифмов.

Эластичность функции применяется при анализе спроса и предложения. Пусть $D = D(p)$ – функция спроса от цены товара p.

Эластичность спроса относительно цены определяется отношением:

$$E = \frac{\text{Процентное измененние спроса}}{\text{Процентное измененние цены}}.$$

Процентное изменение спроса – это $\frac{\Delta D}{D} \cdot 100$, а процентное изменение цены – это $\frac{\Delta p}{p} \cdot 100$. Поэтому $E = \frac{\Delta D}{D} \cdot 100 : (\frac{\Delta p}{p} \cdot 100) = \frac{p}{D} \cdot \frac{\Delta D}{\Delta p}$. При непрерывной зависимости ΔD от Δp разностное отношение в выражении заменяют пределом при $\Delta p \to 0$: $E(D) = up \cdot \frac{D'(p)}{D(p)}$. Ввиду того, что функция спроса $D = D(p)$ является убывающей , ее производная отрицательна и эластичность спроса также отрицательна.

Различают три вида спроса:

– эластичный, если |E(D)| >1;

– нейтральный, если |E(D)|=1;

– неэластичный, если |E(D)| <1.

Аналогично понятие эластичности предложения как отношение процентного изменения предложения к процентному изменению цены. Так как функция предложения S=S(p) – возрастающая, то $E(S) = p \cdot \frac{S'}{S}$ есть положительная величина.

Второй этап работы над проектом заключался в решении поставленной задачи. Было предложено следующее решение.

1) В данным случае удельные затраты - это средние затраты на 1 т цемента. При объеме производства в x т удельные затраты составят: $\frac{K}{x} = -x^2 + 98x + 200$.

2) Задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения функции $y = -x^2 + 98x + 200$ на промежутке [20;90].

а) Найдем производную этой функции y' = – 2x + 98, y- – 2.

б) При x = 49 y'=0 , y(49)= – 2 <0. Следовательно, x=49 – точка максимума.

в) Вычислим значения функции в концах промежутка и в точке экстремума: f(20)=1760, f(49)=2601, f(90)=320.

Следовательно, $\max\limits_{[20;90]} \frac{K}{x} = y(49) = 2601$, $\min\limits_{[20;90]} \frac{K}{x} = y(90) = 320$.

Ответ: удельные затраты будут наибольшими при объеме производства x=49, а наименьшими – при x=90.

Третий этап заключался в построении графиков производственной функции и ее производной, используя средства MS Excel, OpenOffice Calc, GeoGebra, Graph (см. рис. 1).

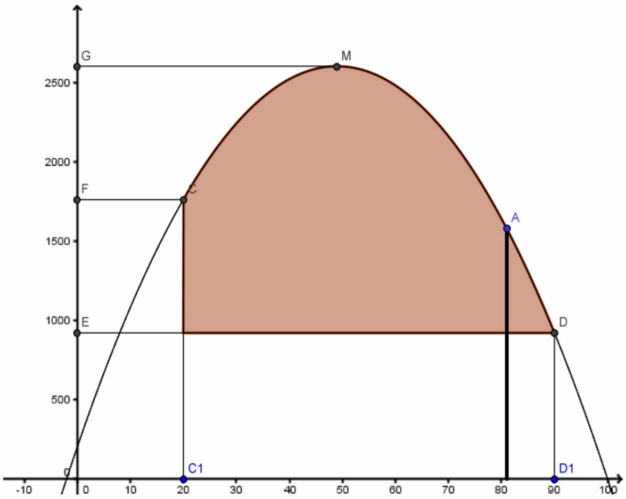


Рис. 1. График производственной функции

На четвертом этапе происходит обобщение полученных результатов в виде подготовки презентации в MS PowerPoint, OpenOffice Impress и выступление с докладом о решении поставленной экономической задачи.

Анализ результатов и оценка работы над проектом "Производная в экономике" на факультете гуманитарных и социальных наук РУДН рассмотрим с точки зрения формирования проектной деятельности студентов.

Критерии оценки работы над проектом:

– Наличие развитой познавательной мотивации студентов, ценностного отношения к математическим и экономическим знаниям и умениям, обусловленных профессиональными интересами;

– Владение фундаментальными и прикладными математическими и экономическими знаниями, необходимыми в будущей профессиональной деятельности;

– Готовность к самостоятельному применению сформированных знаний, умений, навыков, опыта деятельности для решения проектных задач;

– Сформированность творческого мышления, способность к творческой деятельности при выполнении проектных заданий;

– Владение навыками рефлексии, способность к анализу результатов собственной деятельности и самооценке.

Таким образом, проектная деятельность способствует развитию следующих приемов самообразования студентов: анализ научной и специальной литературы, выбор методов решения поставленной задачи, планирование собственной деятельности, выбор формы представления полученных результатов, обобщение полученной информации и формулирование выводов [3, с. 175]. Использование метода проектов в процессе обучения студентов математике будет способствовать развитию самообразования.

Библиографический список

1. *Клюшин, В.Л.* Высшая математика для экономистов [Текст]: учеб. пособие / В.Л. Клюшин. – М.: ИНФРАМ, 2006. – 448 с.
2. *Маскаева, А.М.* Вариативность форм изучения раздела "Начала математического анализа" в средней школе [Текст]: учеб. пособие / А.М. Маскаева. – М.: РУДН, 2011. – 62 с.
3. *Митрохина, С.В.* Самообразование студентов в ходе проектной деятельности по математике / С.В. Митрохина, Н.Т. Ням // Актуальные проблемы обучения математике, физике и информатике в школе и вузе: Материалы III межрегиональной научно-практической конференции учителей (20-21 января 2012 г.) /Под общ. ред. М.А. Родионова. – Пенза, 2012. – С. 173-175.
4. *Митрохина, С.В.* Современные подходы к организации самостоятельной работы студентов гуманитарных факультетов при изучении математики / С.В. Митрохина // Математическое образование и информационное общество: проблемы и перспективы: сборник трудов XLVIII Всероссийской (с международным участием) конференции (18-21 апреля 2012 г.) / Под общ. ред. Е.И. Саниной. – М.: РУДН, 2012. – С. 185-189.

Методические идеи В.К. Беллюстина в выступлениях делегатов I-го Всероссийского съезда преподавателей математики 1911-1912 гг.

Н.М. Епифанова

В связи с юбилеем I Всероссийского съезда преподавателей математики на страницах периодических изданий большое внимание уделяется:

– проблемам школьного образования, многие из которых были сформулированы еще в начале XX века и не потеряли своей актуальности в начале XXI века,

– людям, внесшим неоспоримый вклад в процветание школьного образования и в том числе школьного математического образования.

Именно благодаря самоотверженному труду школьных учителей к началу XX века по грамотности населения Ярославская губерния занимала 1-е место среди земских губерний и 4-е место среди губерний Европейской России (грамотными были 65% мужчин, 43% – женщин). (В то время как к 1914 году в городах охват детей (в возрасте 8-11 лет) начальной школой по всей Империи составлял всего 46%.)

В Ярославской губернии в конце XIX – начале XX веков:

– быстрыми темпами шло становление сети учебных заведений, связанных с только что построенной Северной железной дорогой; росло число учеников, получивших и более высокое образование. (Так, если в губернии в 1909 г. было 13 средних учебных заведений, то в 1914 г. функционировало уже 19 и 3 училища (реальных и коммерческих) [18];

– в соответствии с законом от 1909 г. "О педагогических курсах для преподавателей средней школы в университетских городах", новыми веяниями времени и появлением новых учебных заведений силами преподавателей Демидовского лицея и учительского института (ЯУИ) была на хорошем методическом уровне организована переподготовка преподавательского состава (через проведение летних и зимних учительских курсов);

– появилось много частных гимназий, училищ, школ разного уровня не только в больших городах губернии (женские гимназии Н.Д. Антиповой, О.Н. Корсунской, Ионафановское епархиальное училище...), но и в сельской местности (например, открытая на средства учительницы Н.Ф. Самсоновой в селе Бектышево Переславского уезда народная школа для крестьян) [15].

Но настоящую гордость Ярославского школьного образования первого десятилетия XX века составляли ее учителя – выпускники Московских и Петербургских университетов и вузов, многие из которых были авторами школьных учебников, разработчиками новых методических идей, корреспондентами методических и литературных журналов. Это:

– *Первухин Нил Григорьевич* (выпускник Московского университета 1896 г.) – учитель Мариинской женской гимназии, инспектор Ярославского реального училища, директор коммерческого училища, инициатор развития экскурсионного дела в Ярославской губернии, редактор журнала "Русский экскурсант", автор искусствоведческих работ о храмах Ярославля, издатель альбомов фотографий памятников ярославской старины;

– *Смирнов Кронид Анемподистович* (выпускник Московской духовной семинарии 1896 г.) – преподаватель духовной семинарии и ЯУИ, автор статьи о К.Д. Ушинском "Солнце русской педагогики";

– *Критский Петр Андреевич* (выпускник Московского учительского института 1890 г.) – педагог, организатор и руководитель первой ярославской бесплатной библиотеки, член Губернской ученой архивной комиссии, автор нескольких путеводителей-справочников по городам Ярославского края, а также учебника для учащихся "Наш край. Ярославская губерния. Опыт родиноведения" (одного из лучших в историографии края);

– *Флеров Всеволод Александрович* – директор Новинской учительской семинарии Мологского уезда, педагог-методист начальной школы, разработчик звукового метода обучения грамоте;

– *Беллюстин Всеволод Константинович* (выпускник Московского университета 1886 г.) – педагог-методист, бессменный лектор на учительских летних курсах, автор учебников "Арифметический задачник для 1-4 годов обучения", "Методика арифметики" и книги "Как постепенно люди дошли до настоящей арифметики";

– *Липенский Владимир Николаевич* (выпускник Московского университета) – учитель в женской гимназии П.Д. Антиповой, мужской гимназии и гимназии О.Н. Корсунской; преподаватель истории и географии в ЯУИ, первый руководитель институтской библиотеки ЯУИ; автор статей, вошедших в сборник "Ярославль в его прошлом и настоящем";

– *Соколов Николай Самсонович* – директор Ярославского реального училища, делегат 1 и 2 съездов преподавателей математики, председатель городского физико-математического кружка, автор нескольких учебников по физике и математики для городских училищ и женских гимназий, имевший в губернии один из лучших кабинетов физики и обсерваторию.

Не случайно, еще в 1893 г. в Ярославле при дирекции народных училищ был открыт один из первых в стране Педагогический музей, который славился своей коллекцией, в 1910 г. для музея даже была "нанята особая квартира" (Семеновский спуск, 6) [1].

О позитивной деятельности Ярославского Педагогического музея *"в деле развития школьного образования в губернии"* писали многие методические журналы того времени. Известный педагог-методист начальной школы *В.А. Флеров* (1860-1919) в своей статье отмечал, что *"есть музеи, в которых все говорит о деятельности, творческой инициативе, стремлении создать нечто единственное, культурный уголок... способствуя приобщению к культуре самых широких слоев населения"* [17].

Так в июне 1911 г. для *"широких слоев населения"* в музее была устроена выставка наглядных пособий, а также педагогической и методической учебной литературы. Губернская газета отмечала, что *"был замечен глубокий интерес жителей города и педагогов губернии к организованной выставке: учителя изучали пригодность наглядных пособий и наводили справки о их стоимости... знакомились с "Минимальный список наглядных пособий, необходимых для каждой правильно организованной школы".* [1] К созданию этого списка были привлечены директор музея и прекрасный педагог *А.В. Ананьев* , известные в Ярославской губернии педагог-методист *В.К. Беллюстин* (1865-1925), педагог-краевед *П.А. Критский* (1865-1922).

Ярославские педагоги принимали активнейшее участие в новом для российского образования проекте, а именно, в разработке программ проведения внеклассной работы с учащимися. При содействии музея была даже организована выставка самодельных наглядных пособий, выполненных учащимися городских училищ на внеклассных занятиях. Эту выставку посетил *"весь город - взрослое население и учащиеся"* [10].

Ярославские учителя активно участвовали в общественной жизни страны и губернии: выступали с лекциями, организовывали благотворительные спектакли в пользу малоимущих гимназистов и студентов, печатали статьи в ведущих педагогических журналах, создавали собственные учебники и пособия, принимали участие в профессиональных съездах и конференциях.

На I Всероссийского съезда преподавателей математики (27.12.1911-3.01.1912) Ярославскую губернию на съезде представляли 11 педагогов-математиков зарегистрированных под номерами:

"196. Гаганидзе Мария Константиновна, Ярославль;

277. Даниловский Ал.Ал., Рыбинск;

324. Елизаров Василий Михайлович, Мариинская гимназия, Ростов;

365. Зайцев Александр Максимович, Ярославль;

475. Корзинин Ник. Ник., Рыбинск;

482. Косминков Алексей Павлович, Ростов;

715. Никаноров Владимир Митрофанович, Ярославль;

873. Розанов Алекс. Николаевич, Рыбинск;

925. Сергеев Гавр. Петрович, Ярославль;

972. Соколов Ник. Самсонович, дир. Ярос. реального училища;

1115. Чачхиани Борис Константинович, Ярославль" [16].

Мысль о созыве Съезда в Петербурге на Рождественских каникулах 1911-1912 года принадлежала отделу математики Педагогического музея Военно-учебных заведений, увлеченных принципами реформы образования, предложенными Ф. Клейном (1849-1925) и представленными на съезде в г. Мерано, а именно:

– концентрация учебного материала вокруг одной мысли, взаимопроникновение и взаимоизучение отдельных предметов (*дидактический принцип*),

– внимание на духовное (умственное) развития учащихся в учебном процессе (*психологический принцип*),

– развитие навыков практического использования полученных знаний, способностей рассмотрения окружающего мира с математической точки зрения (*практический принцип*).

На совещании *"кружка лиц, взявших на себя эту задачу"* (май 1911 г.), было

– разработано положение о Съезде,

– избран комитет съезда в составе:

• председатель: директор Педагогического Музея военно-учебных заведений ген.-л. З.А. Макшеев,

• товарищ председателя – ген.-л. М.Г. Попруженко, проф. К.А. Поссе, проф. С.Е. Савич,

• члены: В.Ф. Каган, проф. Б.К. Млодзиевский, Б.Б. Пиотровский, С.И. Шохор-Троцкий... (всего 15 человек),

• заведующие выставочной и хозяйственной комиссий и комиссии для "обревизирования" денежной отчетности [16].

При содействии журнала "Обновленная школа" было выпущено 8 номеров "Бюллетень съезда" с перечнем вопросов, подлежащих обсуждению на заседания съезда:

"1)психологические основы обучения математике (активность, наглядность, роль интуиции и логики и т.д.);

2) содержание курса математики с точки зрения:

а) современных научных течений,

б) современных запросов жизни,

в) современных общепедагогических воззрений;

3) согласование программ математики средней школы с программами низшей и высшей школ;

4) вопросы школьной методики преподавания;

5)ученики и учебные пособия;

6) исторические и философские элементы в курсе мат. средней школы;

7) рисование, лепка, ручной труд, как вспомогательные средства при обучении математики;

8) подготовка учителей" [16].

"Министерство народного просвещения, Министерство промышленности и торговли, начальник Главного управления военно-учебных заведений оказали съезду материальную поддержку (1000+1000+5000руб.)" [16].

Съезду были выделены безвозмездно или за минимальную плату помещения. Для встречи приезжающих было организовано на вокзале дежурство. (Было даже написано ходатайство о льготном проезде участников съезда по железной дороге.)

Открылся 1 Съезд преподавателей математики России в Санкт-Петербурге 27 декабря 1911 г. по ст.ст. в большой аудитории Педагогического музея Военно-учебных заведений России. Продолжался съезд 8 дней. Участвовало в нем 1217 членов и гостей съезда, представлявших учителей математики почти всех губерний Российской Империи (от школ села Гори или Дедеркаль Волынской губернии, до школ, гимназий, училищ Ашхабада, Вильно, Уфы, Хабаровска. . .) и преподавателей математики ее виднейших вузов (Петербургского, Московского, Харьковского. . .).

Среди участников съезда были люди разного возраста и опыта преподавательской деятельности.

Было проведено 7 общих заседаний, на которых было сделано 23 доклада (еще 3 доклада были представлены тезисами и конспектами). По всем 26 докладам были проведены прения.

Кроме того, на съезде работали 5 секций (учебная литература по математике, программы и экзамены, методика математики, преподавание математики в технических и коммерческих учебных заведениях).

На общих собраниях была заслушана информация о деятельности 9 территориальных математических кружков преподавателей математики.

Было проведено анкетирование делегатов съезда по 43 позициям, связанным с вопросами преподавания математики.

Для делегатов съезда были организованы экскурсии на завод аэропланов "Гамаюн", зоологический музей Академии наук, Пулковскую обсерваторию, городскую женскую школу им П.А. Потехина.

По результатам работы съезда были опубликованы в 1913 г. три тома материалов: 1 том – материалы общих собраний, 2 том – материалы секций, 3 том – материалы, по разным причинам не попавшие в первые два тома. Интерес для современного Ярославского учителя математики представляют не только тексты докладов, но и тексты прений по докладам:

– М.Г. Попруженко – "Учебная литература по математике",

– В.В. Бобынина – "Цели, формы и средства введения исторических элементов в курс математики средней школы",

– С.И. Шохор-Троцкого – "Психологические основы обучения математики",

– В.Р. Мрочека – "Обзор литературы на русском языке по методике арифметике",

– В.Ф. Кагана – "О подготовке учителей математики. . . ".

Ибо участники прений в своих выступлениях, так или иначе, ссылались на труды не принимавшего участие в съезде, но известного в педагогических кругах России, педагога *В.К. Беллюстина (1865-1925).*

В.К. Беллюстин сформировался как педагог и методист на **Ярославской земле**, работая в Новинской учительской семинарии, которая была одной из первых пяти государственных учительских семинарий, открытых по предложению основоположника русской педагогической науки К.Д. Ушинского, одно время работавшего в Ярославском Демидовском лицее.

Родился В.К. Беллюстин 3 февраля 1865 г. в г. Зубцове Тверской губернии в семье священника. В 1886 г. окончил физико-математический факультет Московского университета со степенью кандидата. Работал в Алексинском уездном училище, Новинской учительской семинарии, был директором Поливановской учительской семинарии, директором народных училищ Владимирской губернии, директором Нижегородского учительского института, преподавая психологию, педагогику, методику и историю преподавания математики. Умер в 1925 г. [13].

На протяжении всей своей педагогической деятельности В.К. Беллюстин занимался разработкой основных вопросов теории методики преподавания арифметики; долгие годы являлся руководителем летних курсов народных учителей центральных губерний России, был участником учительского съезда.

В 1899 г. вышли в свет сразу несколько книг талантливого педагога: “Арифметический задачник для 1-го – 4-го годов обучения” и “Методика арифметики (в 4 частях)”. В 1907 г. увидела свет наиболее известная книга В.К. Беллюстина “Как постепенно люди дошли до настоящей арифметики” [3].

Журнал “Вестник опытной физики и элементарной математики” откликнулся на выход этой книги хвалебной рецензией, отмечая, что *“появление в свет доступно и хорошо написанной работы В. Беллюстина по истории математики весьма желательно и должно быть приветствуемо”* [7].

Далее в рецензии отмечалось:

“В этой умело составленной книге выпукло изображена история почти всей школьной арифметики, начиная с нумерации и кончая “дополнительными статьями” арифметического курса.

Труд Беллюстина нельзя считать самостоятельным ученым исследованием, а компилятивными общедоступными очерками. Но книга эта, ясно и умело написанная, принесет несомненно пользу не так юным математикам, которым автор прежде всего назначает свой труд, а скорее педагогам, мало знакомым с историей математики”.

Книга и учебники В.К. Беллюстина была весьма востребованы среди учителей начала XX века.

В течение всей своей педагогической деятельности В.К. Беллюстин активно сотрудничает со многими педагогическими изданиями своего времени. Его статьи, заметки, обзоры педагогической литературы с завидной регулярностью появляются в журналах “Педагогический листок” (Журнал для педагогического и общенаучного самообразования воспитателей и начальных учителей), “Педагогический вестник Московского учебного округа (средняя и низшая школа)”.

Анализ трудов I Всероссийского съезда преподавателей математики свидетельствует, что многие идеи, высказанные на съезде, были созвучны идеям, отраженным В.К. Беллюстиным в методических статьях, учебниках, пособиях для учителей. Недаром же докладчики неоднократно в выступлениях или ссылались на работы В.К. Беллюстина, или апеллировали к его опыту. Да и само имя В.К. Беллюстина, его труды были хорошо известны передовому учительству начала XX века.

Остановимся подробнее на тех моментах работы Съезда, когда, так или иначе, упоминалась имя В.К. Беллюстина или выступающими делегатами высказывались идеи, созвучные мыслям, озвученными в своих статьях и книгах В.К. Беллюстиным.

1. Проблема *“преподавать историю математики как отдельный предмет или вводить эпизодически”* и составления *“доступных для учащихся учебников по истории математики и историко-математической хрестоматии для слушателей высших учебных заведений”* [16], подробно рассмотренная в докладе *В.В. Бобынина* “Цели, формы и средства введения исторических элементов в курс математики средней школы” вызвала живейший интерес у делегатов съезда. В.В. Бобынин

– обратил внимание на то, что средства историзации использовались с самого начала функционирования отечественного образования (XVIII в.),

– коротко охарактеризовал взгляды на эту проблему некоторых зарубежных математиков и философов (Ф. Бэкона, Дж. Валлиса, Г. Гегеля, А.К. Клеро, А. Пуанкаре, В.Г. Спенсера),

– отметил, что внедрение средств историзации в преподавание предмета происходит эпизодически и случайно и никогда – систематически, ибо *“при систематической форме историзации необходимо наличие очень высокого или высокого уровня историко-математической компетентности учителя математики”*, а также *“наличие соответствующей литературы”* [16].

В прениях по докладу принял участие представитель Ярославской губернии *Б.К. Чачхиани* (Б.К. Чачхиани – выпускник Московского университета 1898 г., преподавал математику в женских гимназиях Антиповой и Корсунской, а с 1909 г. – в ЯУИ.) Он акцентировал внимание слушателей на “*трудности рассматриваемой проблемы”*, ибо даже “*на конкурс, объявленный в 90 годах XIX в. Институтом Искусств и Наук Венеции, на составление доступных для учащихся учебников по истории математики и историко-математической хрестоматии для слушателей высших учебных заведений... не было представлено ни одного пособия”* и высказал несколько существенных замечаний:

“Тут были указаны некоторые сочинения на русском языке по истории математики, но была пропущена книжка Беллюстина “Как люди дошли до настоящей арифметики” и книга по истории математики профессора Киевского Университета Ващенко-Захарченко, а также пропущено сочинение Неводовского...;

Мне приходится преподавать в учительском институте и в средней школе. Тогда как в учительском институте легко ввести исторический элемент, в средних школах мужских и женских не представляю себе возможным это сделать при существующем положении: из своей практики могу сказать, что там по недостатку времени, которое уходит систематический курс, это почти невозможно...;

Что касается написания учащимися рефератов, то они будут отчасти помогать этому делу. Но откуда взять времени преподавателю и на подготовку этих рефератов, и на отдельные вечерние практические занятия, когда у него большей частью от 25 до 40 уроков, откуда, наконец, найдется время, чтобы прослушать эти рефераты? Делая такие пожелания, мы отойдем от жизни” [16].

В ходе прений по докладу были разработаны некоторые рекомендации:

– предложение *Д.Д. Мордухай-Болтовского*, предлагавшего уменьшить на один час число часов по истории в средней школе с отнесением этого часа к истории физико-математических наук, было признано преждевременным;

– эпизодическая форма была признана основной формой историзации, приемлемой для школы.

Кстати, делегат съезда *К.Н. Дерунов* на первой секции "Учебная литература по математике" обратился к делегатам съезда с просьбой ознакомиться с его пособием "Примерный библиотечный каталог для школ" и *"вычеркнуть малоценные и устаревшие и вписать те сочинения, которые заслуживают внимания"* [15]. В его каталоге под номером 6424 значилась книга В.К. Беллюстина "Как постепенно дошли люди до настоящей математики".

2. В своем выступлении "Обзор литературы на русском языке по методике арифметике" *В.Р. Мрочек* отмечал, что

"... в существующей методической литературе можно различить 3 направления: эмпирическое, переходное и экспериментальное;

В основу построения методики эмпирического направления положены не дидактические и психологические принципы, а "голый опыт". Каждый из авторов добавляет свои эмпирические крупицы к той массе крупиц, которая составилась до него трудами отдельных эмпириков 18 и 19 столетий;

Отдельные детали часто верны; иные замечания практического характера предвосхищают выводы экспериментальной дидактики; но общий характер изложения совершенно не удовлетворяет поставленным выше требованиям..." [16].

Перечисляя фамилии основных представителей эмпирического направления, он указывает и фамилию В.К. Беллюстина. *"К этому направлению принадлежат:*

1) Арженинов, К.П. "Методика начальной арифметики";

2) Беллюстин, В.К. "Методика арифметики";

3) Шохор-Троцкий, С.И. "Методика арифметики"..." [16].

В прениях по докладу выступили многие методисты. В частности, делегат *Д.Л. Волконский* высказал следующие возражения:

"Классификация направлений в методике арифметике, указанная Мрочеком, несостоятельна, так как эта классификация неверна по существу и не характерна для методических взглядов некоторых методистов...;

Из иностранцев лучше всех разработали методику арифметики немцы и американцы. Но работы немцев слишком педантичны, а американцев – слишком практичны;

Русские методисты должны пойти средним путем: должны планомерно и целесообразно соединить систематичность с практичностью, теоретичность с жизненностью, избегая односторонностей" [16].

М.Г. Попруженко также вступился за русских методистов, отметив, что *"классификация методик, сделанная Мрочеком, вызывает разнообразные сомнения по поводу психологических начал, положенных в основу ее, и, во всяком случае, из нее не вытекает заключение, что новейшие методики "научные", являются наилучшими, заслоняющими собой все предыдущие. И в прежних методиках есть глубокие психологические наблюдения опытных педагогов, и ищущий преподаватель может найти в них очень ценные для него указания"* [16].

3. На съезде также было уделено внимание проблеме профильных классов. Попытки создания профильных классов, школ и классов с углубленным изучением отдельных предметов предпринимались в России примерно с середины XIX века, когда началась новая реформа среднего образования.

Исходя из реалий времени, в 1900 г. по инициативе Министерства народного просвещения была создана специальная комиссия по разработке новых планов и программ для учебных заведений различного профиля и были разработаны планы 6 типов. Но, к сожалению, педагоги были не готовы к работе по программам разного профиля.

Большое внимание проблеме профильных классов было уделено и на I Всероссийском съезде преподавателей математики. Доклады профессора С.-Петербургского университета *К.А. Поссе* и директора Московского межевого института *В.Б. Струве* содержали конкретные предложения о разделении курса математики на "*общеобразовательный и специальный, для желающих продолжить свое образование в высших учебных заведениях"* [15].

А в докладе *А.В. Васильева* "Математическое и философское преподавание в средней школе" [16] рассматривался вопрос *"об индивидуализации преподавания, по крайней мере, на высшей ступени средней школы"*. На необходимость индивидуализации обучения настойчиво указывал в своих статьях и В.К. Беллюстин. В предисловии к книге "Методика арифметики" [4] В.К. Беллюстин советует:

– "*принимать во внимание развитие детей и местные школьные условия и вносить в методику те необходимые изменения, которые требует учебная жизнь...;*

– заменить устаревшие, искусственные (большую часть так называемых типичных) задачи вычислениями и задачами, входящими в круг домашней и школьной, сельской и городской жизни; ввести в курс арифметики геометрические сведения...;

– не забывать, что... необходимым условием разумного усвоения является самостоятельность... упражнения и навыки составляют необходимый элемент любого обучения...;

– обучение... должно оказывать влияние на образование речи ученика и на развитие его характера, способствовать развитию его индивидуальности".

4. На съезде живейшую дискуссию вызвал вопрос, рассмотренный в выступлении *В.Ф. Кагана*, "О подготовке учителей математики...". В докладе автор затронул следующие моменты:

– рассмотрел историю "*тех мер, которые применялись в России для подготовки преподавателей*",

– описал систему "*действующих в настоящее время учреждений для подготовки учителей*",

– высказал "*соображения относительно наибольшей целесообразности подготовки этого дела в настоящее время*",

– привел примеры документов "*о временных педагогических курсах с целью подготовления учителей математики и физики*" [16].

Временные педагогические курсы весьма широко практиковались и на территории и Ярославской губернии. К их проведению привлекались преподаватели Демидовского лицея, ЯУИ, учительской семинарии, в том числе и В.К. Беллюстин. Педагогические издания прошлых лет, всегда в лестной форме упоминается о лекторской деятельности В.К. Беллюстина, отмечая, что на курсах из лекторов *"среди учителей и учительниц... всем предпочитался Беллюстин"* [12].

Да и сам В.К. Беллюстин не без гордости в предисловии к своей книге "Методике арифметики" отмечал: *"Способы, изложенные в моей методике, ... предложены были вниманию многочисленных учителей, которых я имел честь видеть своими слушателями и собеседниками на 17 учительских курсах и 1 учительском съезде"* [4].

5. На съезде много внимания уделялось проблеме преподавания школьной геометрии. Идеи, зафиксированные в докладе *Н.А. Извольского* "Современное состояние курса геометрии в средней школе...", резолюциях секций, *"следует стремиться к созданию такого учебного курса... позволяющего сделать близкими сознанию учащихся объекты, над которыми работает геометрия"* созвучны идеям, изложенным В.К. Беллюстиным в статьях и методических пособиях. Так в статье "Основные положения по обучению начальной геометрии" В.К. Беллюстин рекомендовал учителям "*при преподавании геометрии... придерживаться следующих принципов:*

– сообразности с природой учащихся детей;

– наглядности;

– практичности;

– обучения проведению необходимых измерений, черчения и вычислений;

– постепенности в образовании геометрических понятий;

– доступности для учащихся геометрических выводов и доказательств;

– точности и определенности при использовании геометрического языка";

– использования эвристического метода [6].

6. Идеи, высказанные в докладе *Н.Н. Володкевича* "О реальном направлении преподавания математики в связи с жизненными и научными фактами", "*о постоянной проверке результатов, добытых умственными операциями, на их согласование с действительностью*", созвучны мыслям В.К. Беллюстина о том, что *"теоретичность образования, не дающая возможность применения знания к делу, является вредным началом в современной системе образования, так как исключает возможность гармонического духовного развития человека, то есть параллельного развития ума, чувства, воли...".* Рассуждая в статье "Очерк современных течений в современной математике" о реформаторском движении в области обучения математике в России, о задачах математики, В.К. Беллюстин отмечал, что *"характерными признаками, отличающим реформаторское движение – являются требования:*

– преемственности изучаемого, то есть связи математики с жизнью;

– создания запаса геометрических представлений ученика, формируемого через выполнение чертежей и изготовление моделей, развития глазомера;

– связи между элементарной математикой и высшей;

– установления одного метода на всем протяжении учебного пути..." [5].

Содержание приведенных выше документов свидетельствует, что

– многие проблемы современного образования были обозначены еще в начале XX века,

– многие отечественные педагоги пытались в силу своего опыта и знаний предложить решение данных проблем,

– многие педагогические и методические идеи, лежащие в основе совершенствования преподавания, построены с привлечением опыта работы преподавателей "старой школы начала XX века".

Воздавая должное опыту современных передовых учителей математики, демонстрирующих образцы высокого методического мастерства, не стоит забывать имена блестящих педагогов-методистов прошлого века, оказавших большое влияние на развитие школьного обучения, создавших *"ценную, во многом самобытную и оригинальную методику,*

– отразившую в себе черты русского национального характера...;

– делающую ставку на инициативу и самостоятельность в работе, на простоту и безыскусность приемов обучения" [5].

Библиографический список

1. *Ананьев, А.В.* Педагогический музей при Ярославской дирекции народных училищ (1915-1916) [Текст] / А.В. Ананьев. – Ярославль. – 1916.
2. *Беллюстин, В.К.* Арифметический задачник для 1-го – 4-го годов обучения. [Текст] / В.К. Беллюстин. – М.: 1899-1905.
3. *Беллюстин, В.К.* Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. [Текст] / В.К. Беллюстин. – М.: 1907; – М.: Госуд. изд., 1922; 1940.
4. *Беллюстин, В.К.* Методика арифметики. [Текст] / В.К. Беллюстин. – Ч. 1-4.: Курс младшего отделения начальной школы. – М.: 1899.
5. *Беллюстин, В.К.* Очерк современных течений в современной математике. [Текст] / В.К. Беллюстин // Педагогический вестник Московского учебного округа (средняя и низшая школа). – 1912.– № 5-6.
6. *Беллюстин, В.К.* Основные положения по обучению начальной геометрии. [Текст] / В.К. Беллюстин // Педагогический вестник Московского учебного округа (средняя и низшая школа). – 1912. – № 1.
7. Вестник опытной физики и элементарной математики [Текст]. – 1908. – № 445.
8. Влияние педагогических учебных заведений на формирование русской школы методики арифметики //http//www.biografiaru/cgi-in/guotes.pl?action=show&name=metmat05.
9. *Гушель, Р.З.* Страницы истории школьного дела в Ярославле XIX – начале XX века [Текст] / Р.З. Гушель. – Ярославль: ООО "Академия-76". – 2010.
10. *Духовницкий, Н.* Внеклассные занятия в высших начальных училищах Ярославской губернии. [Текст] / Н. Духовницкий // Педагогический вестник Московского учебного округа (средняя и низшая школа). – 1914. – № 7.
11. История ЯГПУ за 100 лет. [Текст] / под ред. М.В. Новикова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008.
12. Краткосрочные педагогические курсы для учителей и учительниц, организованные Ростовским уездным земством Ярославской губернии. [Текст] // Педагогический вестник Московского учебного округа (средняя и низшая школа). – 1912. – № 7-8.
13. Педагогическая энциклопедия [Текст]. – М.: Советская энциклопедия, 1964. – Т. 1.
14. Педагогический листок [Текст] // Журналу для педагогического и общенаучного самообразования воспитателей и начальных учителей. М., 1902. – № 1.
15. *Самсонова, Н.Ф.* Как сделалась моя школа двухклассною. [Текст] / Н.Ф. Самсонова // Бектышевская сельская школа в XIX столетии. – Т. 6. – Переславль-Залесский, 2006. – Переславская быль.
16. Труды I Всероссийского Съезда преподавателей математики [Текст]. – СПб.: Север, 1913. – Т. 1-3.
17. *Флеров, В.* Чем мы сильны. [Текст] / В. Флеров // Русская школа. – 1912.– № 2.
18. *Шиванова, Л.И.* История ЯГПУ им. К.Д. Ушинского (1908-2008) [Текст]: путеводитель по музею / Л.И. Шиванова. – Ярославль. – 2007.
19. http: //www.riku.ru/lib/uh-mus-post/g14.htm

Использование информационно-коммуникационных технологий в обучении эконометрике

Ю.Н. Бурханова

Внедрение в образовательный процесс информационных технологий, в частности – системы *Mathematica,* приводит к перестройке всей методической системы, поэтому необходимо перепроектировать эту систему. В настоящей заметке рассмотрим некоторые аспекты методической системы обучения эконометрике с использованием компьютерной системы *Mathematica* и постараемся раскрыть вопросы методики внедрения указанной системы в образовательный процесс в целях эффективной реализации обучения студентов экономических специальностей.

Компьютерные математические системы (КМС) [2] рассматриваются не только как средство информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) в обучении эконометрике, но и как средство осуществления межпредметных связей в обучении таким дисциплинам, как математика и информатика, в вузах экономического профиля. Сформулируем основные положения этой методики.

Учебные пособия для обучения эконометрике с применением компьютерной математической системы *Mathematica,* компьютерные учебники по эконометрике, созданные в самой среде *Mathematica*, могут использоваться в системе высшего образования на аудиторных занятиях, в процессе внеаудиторной работы: при организации самостоятельной работы студентов, на факультативных занятиях, в кружковой и учебно-исследовательской работе.

Перечислим темы эконометрики, при изучении которых целесообразно применять компьютерную систему *Mathematica:* корреляционно-регрессионный анализ, системы эконометрических уравнений, временные ряды. Данные темы могут быть представлены более полно теоретически и методически с компьютерным сопровождением. При отборе этих тем учебной программы по эконометрике учитывалась необходимость (в частности, для формирования соответствующих компетенций):

– компьютерного сопровождения лекционного материала;

– решения эконометрических задач на практических занятиях с последующей компьютерной проверкой ответов, в том числе и тех, которые не имеют аналитических решений;

– выполнения заданий творческого и исследовательского характера во время внеаудиторной работы, существенно повышающих заинтересованность студентов в изучении эконометрики и являющихся дополнительным мотивирующим фактором.

Таким образом, считаем, что при проведении занятий с использованием системы *Mathematica* необходимо учитывать основные требования, сформулированные Е.И. Смирновым и У.В. Плясуновой [3]:

1) Использовать ИКТ преимущественно не для решения одношаговых задач, а в качестве средства построения продукционных моделей для реализации алгоритма решения задачи, а также для проверки правильности полученного ответа.

2) Использовать ИКТ для автоматического выполнения каких-либо вычислений только после того, как был сформирован навык выполнения этих вычислений без помощи КМС.

3) Требование обоснования необходимости выполнения того или иного математического действия при решении задачи.

4) На начальном этапе формирования навыка выполнения того или иного математического действия необходимо подробное проговаривание выполняемых действий (в соответствии с теорией поэтапного формирования умственных действий), при построении продукционной модели требование письменного пояснения выполняемых действий.

5) Отсутствие полного отказа от выполнения вычислений и преобразований без помощи ИКТ, периодическое проведение вычислительных практикумов без использования компьютера с последующей проверкой результатов на компьютере.

Может возникнуть вопрос: нет ли опасности при построении способов обучения эконометрике в условиях систематического применения ИКТ, что обучаемый будет запоминать лишь последовательность действий, обеспечивающих получение ответа от компьютера? В случае использования системы *Mathematica* это исключено, так как никаких особенных действий подобного рода не требуется: ввод математических выражений, предназначенных для вычислений или преобразований, происходит в традиционной математической символике. Напротив, практическое применение системы *Mathematica* для наиболее рационального решения эконометрических задач позволяет по-новому оценивать работу на компьютере и построить работу так, что студенты будут больше времени уделять анализу полученных результатов и экономическому прогнозу. Именно к такому применению системы в учебном процессе следует стремиться.

Компьютерная поддержка, естественно, не заменяет традиционные формы преподавания, а дополняет и обогащает их, помогает существенно преобразить учебный процесс, осветить изучаемое явление или объект с разных сторон, подготовить студента к квалифицированному применению компьютера в учебной деятельности, сделать процесс обучения более привлекательным и интересным для студентов.

Компьютерные модели легко вписываются в традиционный урок эконометрики и позволяют преподавателю организовывать новые виды учебной деятельности, например: урок закрепления знаний – решение задач с последующей компьютерной проверкой ответов; урок обобщения и систематизации знаний; урок комплексного применения знаний, умений, навыков; компьютерная лабораторная работа или компьютерный практикум. Использование на занятиях компьютерных математических систем открывает перед студентами огромные познавательные возможности, делая обучающихся не пассивными слушателями и наблюдателями, а активными участниками проводимых занятий.

Обучение эконометрике, базирующееся на использовании КМС, хотя и основывается на традиционном содержании, требует использования как классических, так и модернизированных форм и методов обучения.

Для классических форм обучения могут использоваться учебные пособия для работы с компьютерной математической системой *Mathematica.* Для поддержки модернизированных форм обучения требуется создание на базе КМС средств обучения одного или нескольких ниже перечисленных видов:

1. компьютерных обучающих программ;
2. компьютерных тренажёров;
3. компьютерных контролирующих программ;
4. компьютеризированных учебников и задачников;
5. компьютерных (электронных) учебников и задачников. Последний вид педагогических программных продуктов сочетает в себе свойства четырёх предыдущих. Система *Mathematica* хорошо приспособлена для создания таких программных средств силами преподавателя, ведущего курс эконометрики в вузе.

Стоит отметить главные функции, которые обеспечивают программные продукты учебного назначения в среде *Mathematica,* сформулированные Т.А. Ивановой [1], и благодаря которым достигается методически эффективное их применение:

– возможность быстро “собрать” задачу, имея при этом полную свободу в выборе её параметров, методов решения, типа начальных и граничных условий и т.п., то есть провести её полную постановку, не программируя;

– возможность быстрого решения многих вариантов задачи (например, при различных значениях параметров, разных методах и т.п.) и их сравнение между собой;

– наглядное и красивое отображение результатов решения задач;

– возможность в ограниченное время выполнения задания, указанного в обучающей программе, либо по индивидуальному заданию преподавателя;

– возможность проведения самостоятельного исследования какого-либо процесса или свойств точного аналитического либо приближённого численного решения задачи, то есть возможность проведения небольшой либо достаточно серьёзной исследовательской работы.

Так, например студенты самостоятельно могут определить вид функциональной зависимости $y{=}\phi(x)$ по опытным данным x и y. Пусть в результате n измерений получен ряд экспериментальных точек (x_i, y_i). Известно, что через n точек можно всегда провести кривую, аналитически выражаемую многочленом $(n-1)$-й степени. Этот многочлен называют интерполяционным. Однако такое решение проблемы не является удовлетворительным, поскольку $y_i \neq \varphi(x_i)$ из-за случайных ошибок измерения значений y_i. Так что, $y_i \neq \varphi(x_i) + \delta_i$, где δ_i – некоторая случайная ошибка. Поэтому требуется провести кривую так, чтобы она в наименьшей степени зависела от случайных ошибок. Эта задача называется сглаживанием (аппроксимацией) экспериментальной зависимости и часто решается методом наименьших квадратов. Сглаживающую кривую называют аппроксимирующей.

Ввиду простоты расчетов аппроксимация линейной зависимости используется довольно часто. Кроме того, многие функции, зависящие от двух параметров, можно линеаризовать путем замены переменных. Например, гиперболическая, логарифмическая, показательная или степенная функции. Следующий пример реализует аппроксимацию нелинейной зависимости методом наименьших квадратов с помощью системы *Mathematica*.

Определим размерность опытных данных:

n=30

Список с точками экспериментальной зависимости:

X=Table[i,{i,n}]

{a0=2 a1=-1 mu=1 sigma=0.1}

Вид исходной зависимости y(x) :

y[x_]:=a0+a1/x

Список с точками исходной зависимости:

Z=Map[y,X]

W=RandomArray[NormalDistribution[mu,sigma],n]

Y=Z+W

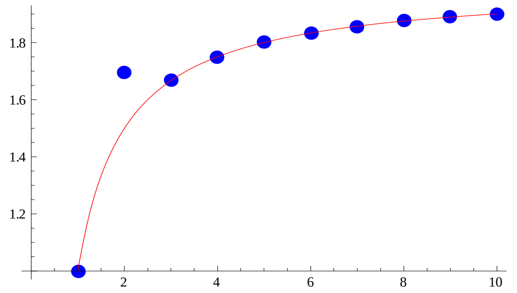
pXY=Transpose[{X,Y}]

Графики исходной y(x) и экспериментальной зависимости $Y(X)$:

p1=ListPlot[pXY,PlotStyle->{Blue,PointSize[.03]}]

p2=Plot[y[x],{x,X[[1]],X[[n]]},PlotStyle->{Red}]

pic1=Show[{p1,p2}]



Решение для другой предполагаемой нелинейности:

f2u[x_]:=Exp[-x]

f2v[y_]:=1/y

U=Map[f2u,X]

V=Map[f2v,Y]

pUV=Transpose[{U,V}]

psi=Fit[pUV,{1,x},x]

c=CoefficientList[psi,x]

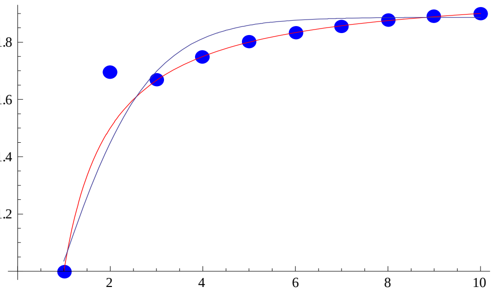
phi2[x_]:=1/(c[[1]]+c[[2]]*Exp[-x])

y3=phi2[x]

delta2=Apply[Plus,(Y-phi2[X])^2]

p2=Plot[y3,{x,X[[1]],X[[n]]}]

Show[{pic1,p2}]



Таким образом, используя систему *Mathematica,* студенты обучаются решению основополагающих задач эконометрики, на основе которых строится дальнейший анализ статистической значимости полученных нелинейностей и последующий доверительный прогноз.

Итак, методическая организация обучения эконометрике с применением ИКТ строится на использовании преподавателем и студентами учебных пособий и компьютерных учебников, созданных в среде *Mathematica.* Проверка уровня усвоения осуществляется через проведение контрольных срезов по темам и обязательных контрольных работ за семестр. В самостоятельных и контрольных работах предлагается классическое решение эконометрических задач, а также решение с помощью компьютерной математической системы *Mathematica.* Вопросы, изученные студентами самостоятельно с помощью компьютерного учебника, в обязательном порядке включаются в курсовой экзамен.

Содержание курса эконометрики и восприятие его студентами может существенно измениться при активном использовании такой качественной компьютерной предметной среды, каковой является *Mathematica.*

Активное использование компьютеров для решения экономических задач и в других дисциплинах специализации должно сформировать у студентов общий взгляд на место, роль и возможности современных компьютерных математических систем (прежде всего – системы *Mathematica*). Кроме того, это подготовит их к активному использованию компьютеров в их будущей профессиональной деятельности.

Практика показывает, что высвобождение учебного времени за счёт автоматизации рутинных вычислений (для чего *Mathematica* подходит идеально) позволяет примерно втрое увеличить количество решаемых задач, выполняемых расчётов и сосредоточиться на анализе полученных результатов, составлении прогнозных данных. При этом, разумеется, не стоит впадать в крайность, заменяя всё преподавание вычислительной работой на компьютере. Напротив, компьютер может помочь избежать подмены изучения эконометрических идей и методов неизбежно сопровождающей их рутинной вычислительной работой, которая зачастую происходит в отсутствие средств автоматизации вычислений (прежде всего символьных и графических).

Использование ИКТ в обучении математическим дисциплинам ценно как для преподавателей, которые с помощью ИКТ могут интенсифицировать учебный процесс и качественно осуществить личностно-ориентированный подход, так и для студентов, получающих информацию повышенного уровня и приобретающих навыки использования ИКТ в будущей профессиональной деятельности. В частности, система *Mathematica* с успехом может быть использована в обучении эконометрике.

Библиографический список

1. *Иванова, Т.А.* Использование информационных технологий в обучении математике и информатике студентов средних специальных учебных заведений технического профиля [Текст]: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.08 / Т.А. Иванова. – Елабуга, 2008. – 227 с.
2. *Капустина, Т.В.* Компьютерная система *Mathematica* 3.0 в вузовском образовании [Текст] / Т.В. Капустина. – М.: Изд-во МПУ, 2000. – 240 с.
3. *Плясунова, У.В.* Использование компьютерных математических систем в обучении математике студентов специальности “Информатика” педагогических вузов [Текст]: автореф. дис. . . . канд. пед. наук: 13.00.02 / У.В. Плясунова – Ярославль, 2004. – 22 с.

Глава 4

История и философия математики и математического образования

Геометрическая алгебра древней Греции и ее приложения

А.Е. Малых, В.И. Данилова

Зародившись в глубокой древности из практических и хозяйственных нужд, геометрия была затребована египтянами для восстановления границ земельных участков после регулярных разливов реки Нил, при сооружении оросительных каналов, культовых сооружений, храмов, пирамид и т.д. Священные книги древней и средневековой Индии, Китая содержат сведения о геометрических фигурах и их свойствах, в частности, правильных многоугольниках. Они повсеместно использовались при построении фундаментов храмов и алтарей, жертвенников, имевших кратные площади и объемы. В связи с этим были востребованы метрические задачи.

Истоки теоретической части геометрии относят к естественно-научным и философским школам ***древней Греции***. Ведущее место среди них занимала *пифагорейская* (VI-V вв. до н.э.). Именно в ней происходило накопление математических фактов и формирование теоретических основ науки.

Одной из причин создания математических теорий явилось открытие иррациональностей, что привело к трудностям как в теоретико-числовом, так и геометрическом планах. Была поставлена под удар вся метрическая часть геометрии, теория подобия. Пифагорейцы стали искать выход из создавшейся ситуации. Так как множество геометрических величин (отрезков) оказалось, как они считали, более "полным" по сравнению с системой рациональных чисел, то стали строить новую теорию на основе геометрических объектов, получившей название *геометрической алгебры*. Неопределяемыми понятиями ее являлись отрезки, над которыми были определены четыре арифметических операции. Деление интерпретировалось эквивалентной задачей *приложения площадей*.

Метод приложения площадей был применим к: решению задач, сводившихся к линейным и квадратным уравнениям, доказательству тождеств и теорем; определению длин сторон правильных вписанных и описанных многоугольников через диаметры вписанной и описанной окружностей; делению отрезка в среднем и крайнем отношениях ("золотое сечение"); выражению длин ребер правильных многогранников через диаметр описанной сферы и др. Решение задач такого рода выполнялось с помощью канонического метода (*параболического*, *эллиптического*, *гиперболического*) в зависимости от вида квадратного уравнения. При его применении находился лишь положительный корень. Поэтому греки формулировали условия геометрических задач таким образом, чтобы они имели положительное решение. Для этого в их условие (там, где требовалось) вводились ограничения (диоризмы) [3].

При решении задач, относящихся к нахождению площадей фигур, в историческом плане наметились два подхода. Один был связан с понятиями *равновеликости* и *равносоставленности*, другой вначале представлял последовательность правил для решения задач, а впоследствии оформился в виде аналитического.

Первый широко применялся уже в древней Греции. Он назывался методом *разложения* (*разбиения*). Суть его заключалась в следующем: для вычисления площади искомой фигуры пытались разбить ее на конечное число частей так, чтобы из них можно было составить другую, более простую, площадь которой могла быть найдена. Там же появились и первые "головоломки". К ним, в частности, относилась игра "стомахион", изобретенная великим Архимедом (280-212 гг. до н.э.), в переводе с греческого означавшая "то, что вызывает злость". Название, по-видимому, указывало на трудность, необходимость приложить терпение при составлении любой заданной фигуры. Прямоугольник, длины сторон которого относились как 1:2, разрезали на 14 частей (рис. 1), из которых составлялись различные фигуры (рис. 2 а,б).

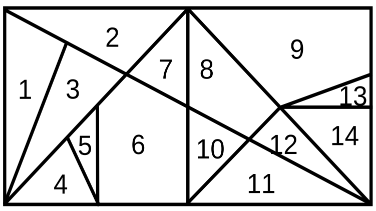
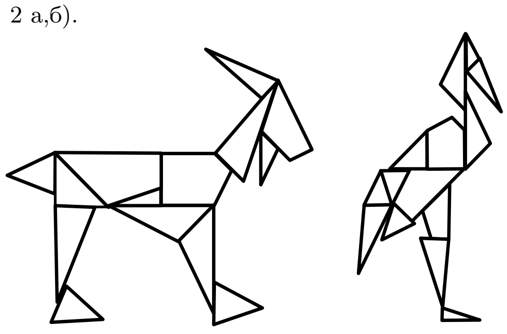


Рис. 1



а) *б*)

Рис. 2

Широкое распространение и особенно на родине создателя – китайского ученого Та-нга – получила увлекательная головоломка “танграм” (II в. до н.э.). Он предложил разрезать квадрат на семь частей (рис. 3), из которых можно составлять разнообразные фигуры–силуэты (рис. 4 а-г). Популярность игры привела к появлению состязаний на составление наибольшего количества фигур с наименьшими затратами времени. Победители, как и при древней игре в шахматы, награждались призами, получали известность.

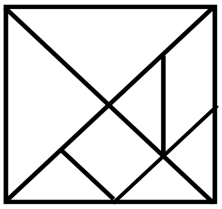


Рис. 3

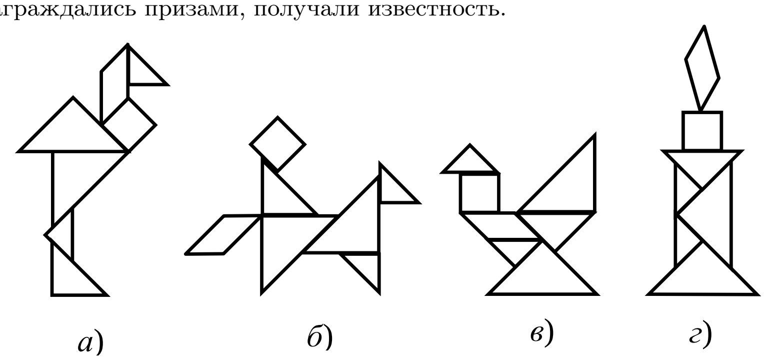


Рис. 4

Используя метод разбиения, искомую фигуру приводили к равновеликому ей квадрату, площадь которого сравнивали с квадратом – эталоном. На рисунках 5 и 6 показаны две равносоставленные фигуры – крест и квадрат.

Тогда же в пифагорейской гетерии были доказаны, в частности, теоремы о равновеликости геометрических фигур: параллелограмма (ромба) и прямоугольника, треугольника и параллелограмма; трапеции и треугольника, а также другие. Заметим, что все теоремы такого вида доказываются аналогичным образом и в современном школьном курсе геометрии.

С методом разбиения в древней Греции был тесно связан другой способ вычисления площадей – *метод дополнения*. Он заключался в том, что вместо разрезания фигур на равные части, их дополняли так, чтобы получившиеся после этого фигуры были равны.

На рисунках 5 и 6 крест и квадрат имели одинаковую площадь, так как они равносоставлены. Если дополнить каждый из них четырьмя равными треугольниками (рис. 7, 8), то в результате получится *одна и та же* фигура. Следовательно, крест и квадрат равновелики.

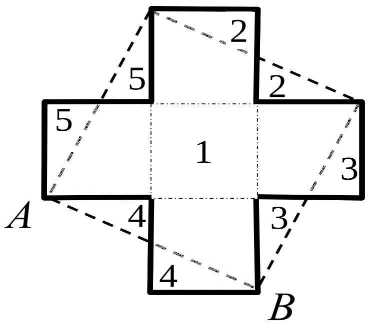


Рис. 5

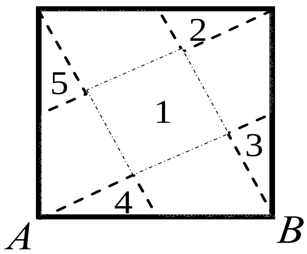


Рис. 6

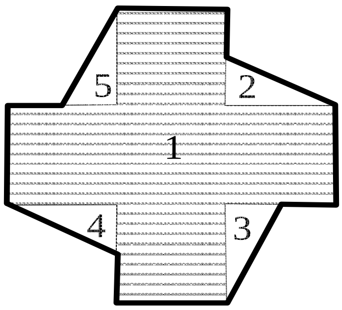


Рис. 7

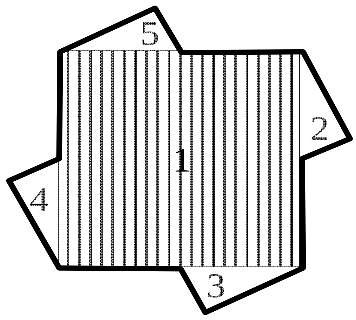


Рис. 8

Метод дополнения был успешно применен для доказательства многих теорем элементарной геометрии. Прежде всего, к их числу относилась теорема Пифагора. Наиболее раннее ее доказательство было выполнено для равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 9). Под рисунком, как и обычно, вместо доказательства помещалась лаконичная надпись: “Смотри”!

Теорема для общего вида прямоугольного треугольника была доказана в пифагорейской школе также с использованием метода дополнения. Пусть ABC – такой треугольник (рис. 10). Для доказательства того, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах, обращались к рисункам 11 а, б. На них показано, что квадрат 1 и взятые вместе квадраты 2 и 3 можно дополнить четырьмя прямоугольными треугольниками a, b, c и d, равными ΔABC, до квадрата. Длина стороны каждого из них равна сумме длин катетов треугольника ABC [2].

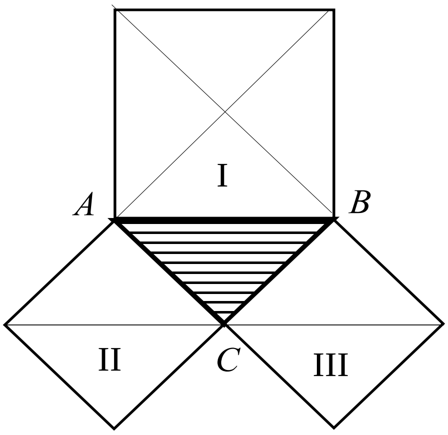


Рис. 9

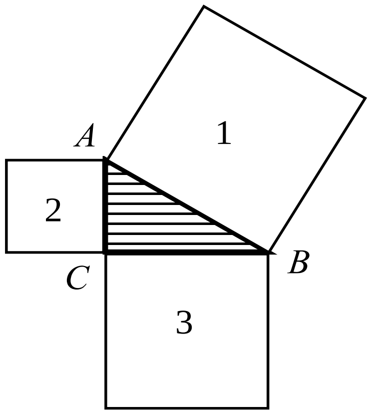
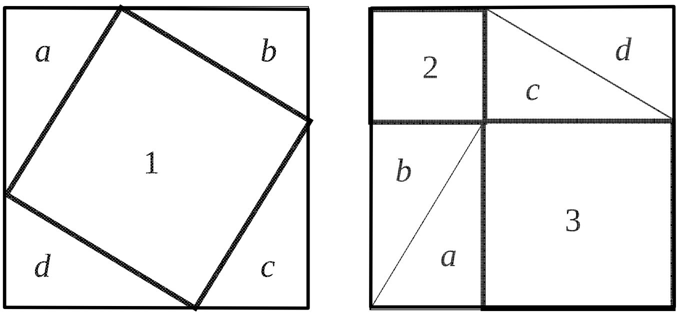


Рис. 10



а) Рис. 11 *б*)

Заметное место при изучении пифагорейцами свойств геометрических фигур, вычислении их площадей занимало преобразование в *равновеликие* им фигуры. Исходной послужила *теорема* о равновеликости треугольников с одним и тем же основанием и равными высотами, опущенными на это основание (рис. 12). Ее использовали для преобразования многоугольников (выпуклых и не являющихся таковыми) в равновеликие им треугольники. На рисунках 13 и 14 показано преобразование выпуклого и невыпуклого четырехугольников в равновеликие им ΔABK и ΔFDA соответственно.

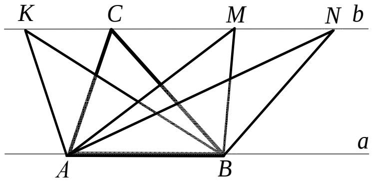


Рис. 12

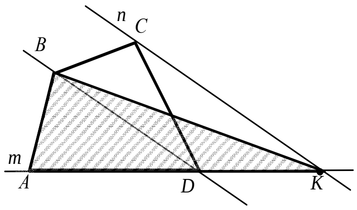


Рис. 13

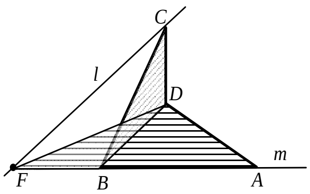


Рис. 14

Аналогичным образом пифагорейцы преобразовывали выпуклые 5-, 6-,. . . , n-угольники в равновеликие им треугольники, а затем – в прямоугольники и квадраты. На рисунке 15 показано преобразование шестиугольника $ABCDEF$ в равновеликий ему треугольник MCK, который затем преобразовывали в равновеликий ему прямоугольник $MSTK$ (рис. 16). После этого, используя параболический метод приложения площадей, преобразовывали $MSTK$ в равновеликий ему квадрат $TRUV$ (рис. 17). Поэтому $\mathrm{S}_{ABCDEF} = \mathrm{S}_{MCDEF} = \mathrm{S}_{MCDN} = \mathrm{S}_{\Delta MCK} = \mathrm{S}_{MSTK} = \mathrm{S}_{TRUV}$.

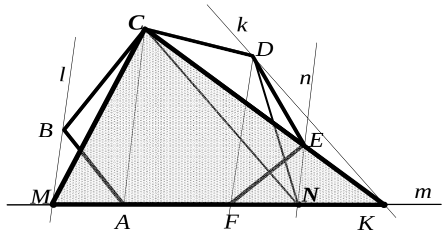


Рис. 15

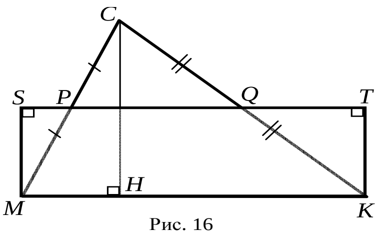


Рис. 16

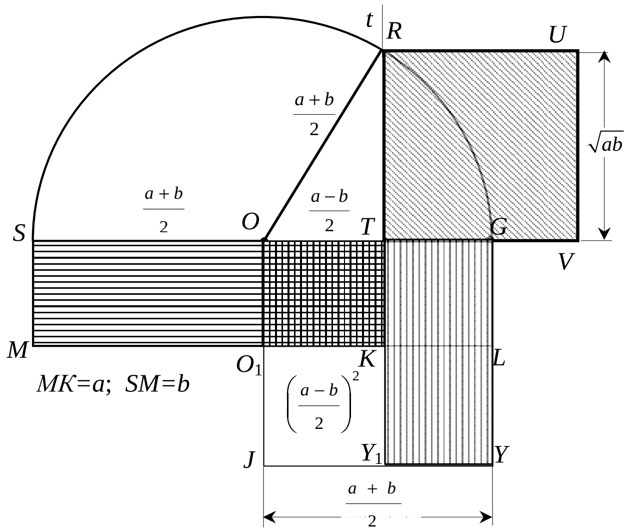


Рис. 17

В "Началах" Евклида (III в. до н.э.) широко использована геометрическая алгебра. Среди его задач отметим предложение XI книги II (деление отрезка в отношении "золотого сечения"): "разделить AB в точке H на две части, чтобы прямоугольник, заключенный между целым отрезком AB и одной из его частей, был равен квадрату, построенному на другой его части" На рисунке 18 отрезок AB точкой H разделился в соответствии с условием задачи: $AH^2 = AB{\cdot}BH$ [4].

В предложении X книги XIII "Начал" Евклид поместил задачу: "Квадрат, построенный на стороне вписанного [правильного] пятиугольника, равен сумме квадратов сторон вписанных в тот же круг правильных шестиугольника и десятиугольника" [1]. Ученый дал геометрическое доказательство, показав справедливость тождества $a_5^2 = a_{10}^2 + a_6^2$.

В ***средневековой Западной Европе*** Абрахам Савасорда (Abraham Judaeus) из Барселоны (начало XII в.) применял геометрическую алгебру к решению алгебраических уравнений и их систем. Заметим, что его работы легли в основу "Practica Geometriae" (1224) Леонардо Пизанского. Савасорда рассмотрел систему уравнений: $\begin{cases} x+y=14, \\ xy=48. \end{cases}$ Вначале он строил прямоугольник $ABCD$, площадь которого равна 48, и продолжил CD за точку C так, чтобы $DC + CF = 14$ (рис. 19). Тогда x=8, y=6 [5].

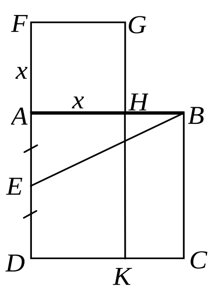


Рис. 18

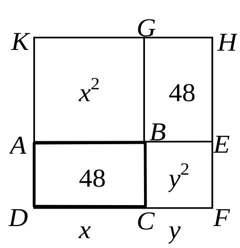


Рис. 19

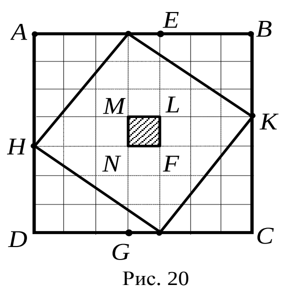


Рис. 20

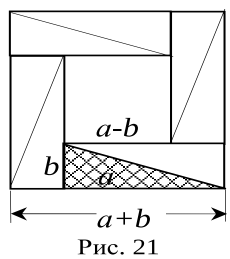


Рис. 21

Сведения о геометрической алгебре древних греков проникли в ***Китай***. Как следует из [7], уже в трактате, относящемся приблизительно к 1100 гг. до н.э., написанном в разговорной форме и касающегося свойств прямоугольного треугольника с длинами сторон 3, 4, 5, имеется задача, в которой следовало доказать сформулированное словесно тождество $2(a^2 + b^2) - (a - b)^2 = (a + b)^2$. Геометрическое решение представлено на рисунке 20, где рассмотрен квадрат $ABCD$ из 49 клеток. В этом случае выполняется тождество: $2(4^2 + 3^2) - (4 - 3)^2 = (4 + 3)^2$.

Аналогичная задача помещена в комментариях Конфуция к классическому труду "И-Кинг".

В комментариях к трактату о "Чжоу-би" Чжан Цюнь Цинь (II-III вв.) привел задачу, связанную с теоремой Пифагора (рис. 21): квадрат, построенный на сумме длин катетов a и b треугольника ($a > b$), он разбивал на восемь треугольников, равных исходному, и внутренний квадрат со стороной, равной разности длин катетов. Отсюда следовала справедливость тождества $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 8 \cdot \frac{1}{2}ab$ в общем случае.

Ученые стран ислама также проявляли интерес к геометрическим построениям. В трактате по алгебре "Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы" Мухаммеда ибн Мусы ал-Маджуси ал-Хорезми (787 – ок. 850) представлено шесть канонических видов линейных и квадратных уравнений, записанных в словесной форме. Автор формулировал для них лишь правила, дающие положительные корни, и применил их при решении уравнений с числовыми коэффициентами. После этого ал-Хорезми приводил геометрические доказательства. Так, справедливость одного из решений уравнения $x^2 + 10x = 39$, которое впоследствии было помещено во многих арабских и европейских средневековых книгах по алгебре, устанавливалась с помощью геометрических построений (рис. 22). Строился искомый квадрат x^2, а на его сторонах – четыре прямоугольника шириной 5/2. В вершинах квадрата добавлялись четыре квадрата с длиной стороны 5/2. Получившийся при этом большой квадрат имел площадь $39 + 4 \cdot (5/2)^2 = 64$, а сторона его – $(x + 2 \cdot 5/2) = 8$, поэтому x = 3.

Другое геометрическое решение этого уравнения показано на рисунке 23. Левая часть дополнялась до полного квадрата: $x^2 + 2{\cdot}5x + 25 = 39 + 25$; $(x+5)^2 = 8^2$, откуда x = 3. Отрицательный корень не учитывался [7].

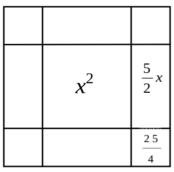


Рис. 22

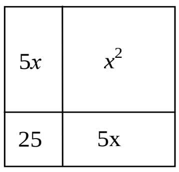


Рис. 23

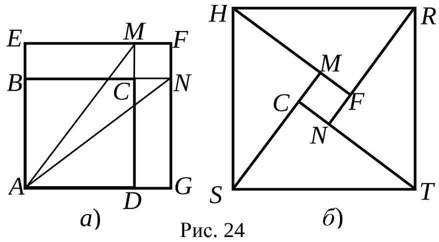


Рис. 24

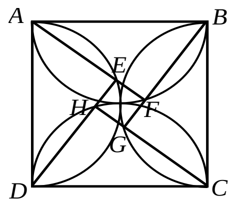


Рис. 25

В "Трактате о геометрических построениях" Абу-л-Вафы ал Бузджани (940-998) имеется задача: построить квадрат из двух квадратов, *длины сторон которых неизвестны* [8]. Он предложил наложить меньший из них ($ABCD$) на другой ($AEFG$) и продолжить его смежные стороны (BC и DC) до пересечения в точках N и M соответственно со сторонами большего квадрата; N и M соединил с А (рис. 24 а). Далее ученый рассмотрел два равных прямоугольника $AEMD$, $ABNG$ и маленький квадрат $CMFN$. Прямоугольники он разбивал диагоналями AM и AN на равные треугольники. Длины их катетов равны сторонам данных квадратов, а CN – разности длин катетов этих треугольников. Далее автор расположил около маленького квадрата четыре прямоугольных треугольника с катетами, равными сторонам исходных квадратов (рис. 24 б). Полученный квадрат $HRTS$, равновелик сумме двух данных квадратов с неизвестными длинами [2].

Еще в одной задаче (рис. 25) следовало разделить данный квадрат на два квадрата, если *известна длина стороны одного*. На сторонах известного квадрата $ABCD$ как на диаметрах Абу-л-Вафа описал внутри его полуокружности. С опорой на предыдущую задачу он составил из прямоугольных треугольников AED, AFB, BGC, DHC и квадрата $HEFG$ с известной стороной искомый квадрат [8].

Из геометрических задач Абу-л-Вафы представляет интерес своеобразное построение квадрата, равновеликого *трем равным квадратам*. Ее решение было помещено во многих последующих руководствах (рис. 26 а-в). Ученый разделил первые два квадрата диагоналями пополам (рис. 26 а,б), полученные равнобедренные прямоугольные треугольники a, b, c, d приложил гипотенузами к сторонам третьего квадрата так, чтобы каждая вершина последнего совпадала с вершиной не более одного треугольника. Если вершины этих четырех треугольников последовательно соединить отрезками AB, BC, CD и DA, то получится искомый квадрат. Отметим важное замечание ученого: "Точно так же обстоит дело, если мы хотим построить квадрат, состоящий более чем из трех или менее чем из трех квадратов" [8, с. 118].

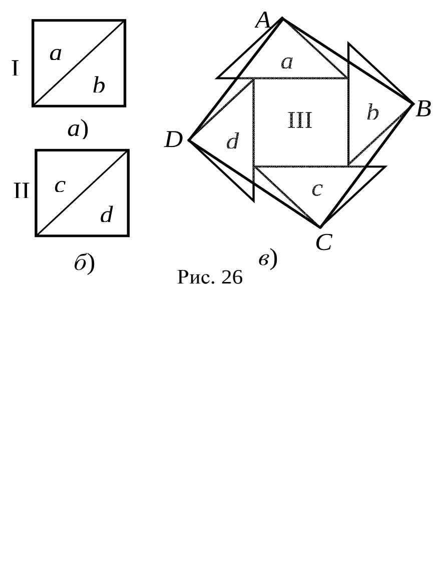


Рис. 26

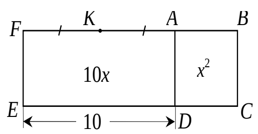


Рис. 27

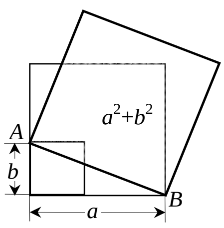


Рис. 28

Как и у ал-Хорезми, в трактате Омара Хайяма (XI в.) “Об алгебраических доказательствах”, приведена задача, сводящаяся к уравнению $x^2+10x=39$. Однако ученый дал другое геометрическое решение ее (рис. 27).

Наиболее ранние геометрические сведения ***индийцев*** представлены в “Шульба-сутре” (VI-V вв. до н.э.) – руководстве при постройке алтарей, храмов и других культовых сооружений. Строения ориентировались по странам света, в основаниях их лежали определенные геометрические фигуры (обычно правильные многоугольники), которые были или подобными или равновеликими им. Эти сведения приводили к построению прямого угла, квадрата, прямоугольных треугольников с целочисленными длинами сторон, построению их них трапеций, преобразованию прямоугольника в равновеликий ему квадрат; построению квадрата, равновеликого сумме (рис. 28) или разности двух данных квадратов и др. [9].

При выполнении таких построений у индусов встречались утверждения, которые впоследствии появятся в древней Греции, например, параллелограммы, построенные на одном основании и между одними и теми же параллельными линиями, равновелики (рис. 29).

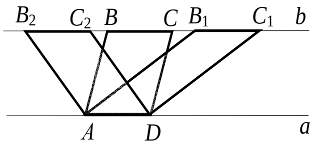


Рис. 29

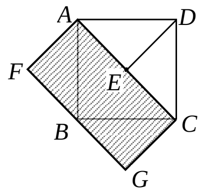


Рис. 30

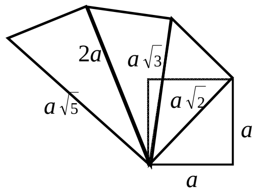


Рис. 31

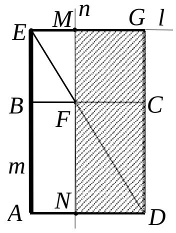


Рис. 32

Преобразование квадрата в равновеликий ему прямоугольник представлено на рисунке 30 [9]. Для построения квадратов, имеющих площадь в k раз большую данного, на диагонали исходного квадрата строили последовательно гипотенузы с длинами $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, 2a, $a\sqrt{5}$ и т.д. (рис. 31). Для преобразования квадрата в прямоугольник, одна из сторон которого известна (m), выполнялись построения, представленные на рисунке 32.

Во всех геометрических построениях в “Шульба-сутре” важное место занимала теорема Пифагора. Составители руководства использовали шесть видов прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25; 12, 35, 37; 15, 36, 39. Из них и подобных им треугольников составляли равнобедренные трапеции [9].

Среди геометрического материала индусов имеется задача, связанная с теоремой Пифагора (рис. 33). В ней сравнивалась сумма площадей квадратов, построенных на катетах, с площадью квадрата, построенного на гипотенузе.

Индийские ученые проявляли интерес и к решению алгебраических уравнений, давая им геометрическую интерпретацию. Особое внимание они уделяли неопределенным уравнениям. Так, уравнение ax + by + c = xy преобразовывалось к виду ab + c = (x − −b)(y − − a) (*). Если ab + c могло быть представимо в виде двух множителей, т.е. mn, то множество решений имело вид x = m + b; y = n + a. Тождество (*) доказывалось геометрически (рис. 34). Разность между площадью прямоугольника xy и площадью гномона (заштрихованная часть), равная ax + by – ab, представлялась, с одной стороны, площадью прямоугольника (x − − b)(y − − a), а с другой – (ab + c) (по условию) [10].

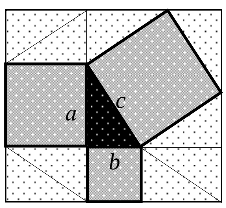


Рис. 33

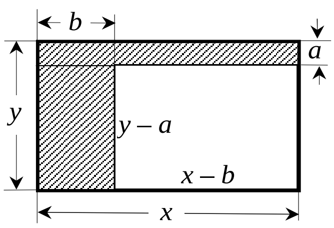


Рис. 34

Представленный материал раскрывает интерес к геометрической алгебре со стороны ученых различных стран и разных времен. Заслуживает внимания также дальнейшее изучение форм передачи математических сведений древних греков и ученых отмеченных выше стран.

Библиографический список

1. *Рыбников, К.А.* История математики [Текст] / К.А. Рыбников. – М.: МГУ, 1974.
2. История математики с древнейших времен до начала нового времени [Текст] / под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970.
3. *Башмакова, И.Г.* Лекции по истории математики в Древней Греции [Текст] // Историко-математические исследования / И.Г. Башмакова. – М.: Наука, 1958. – Вып. XI.

4. *Евклид* Начала: в 3 т. / пер. и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского [Текст] / Евклид. – М.: ГТТИ, 1949-1950.
5. *Bortolotti, E.L.* L/algebra nella storia e nella preistoria della scienze [Text] / E.L. Bortolotti // Osiris, 1936. V.I.P. 184-230.
6. *Gandz, S.* The origin and development of the quadratic equation in babylonian, greek and early arabic algebra [Text] / S. Gandz // Osiris, 1937. V. III. P. 405-557.
7. *Юшкевич, А.П.* История математики в средние века [Текст] / А.П. Юшкевич. – М.: Физматгиз, 1961.
8. *Абу-л-Вафа* Книга о том, что необходимо знать ремесленнику из геометрических построений [Текст] / Абу-л-Вафа / Пер. и примеч. С.А. Красновой // Физико-математические науки в странах Востока, 1966. – Вып. I (IV). – С. 56-140.
9. *Володарский, А.И.* Очерки истории средневековой индийской математики [Текст] / А.И. Володарский. – М.: Наука, 1977. – Гл. VI.
10. *Zeuthen, H.G.* Sur l/arithmétique géometrique des Grecs et des Indiens [Text] / H.G. Zeuthen // Biblioteca Mathematica, 1904. F. 3. Bd. 5. P. 97-112.

Об аксиомах и постулатах в античной математике

Г.А. Зверкина

Как известно, античная математика с эпохи Возрождения являлась эталоном логического построения научного знания; именно на “Начала” Евклида, жившего в конце IV – начале III в. до н.э., ориентировались математики и физики, а также представители других областей знания (так, например, Бенедикт Спиноза (1632-1677) предпринял попытку аксиоматико-геометрического обоснования философии в сочинении 1677 г. “Этика, доказанная в геометрическом порядке и разделенная на пять частей”).

Логическое построение научного знания предполагает использование некоего набора базовых недоказываемых фактов, на которых основаны дальнейшие рассуждения. Античная геометрия в “Началах” Евклида разделяет такие базовые факты на две группы – постулаты и аксиомы. О причинах различия в названии этих групп недоказываемых положений “Начал” учёные начали задумываться уже в древности, однако все они рассматривали эти первоначальные положения с точки зрения науки своего времени. Мы же попытаемся связать сравнение постулатов и аксиом с теми условиями, в которых работали учёные античности. Кроме того, далее мы увидим, что не все базовые положения Евклидовых “Начал” идеально строги и точны (причина этому – тогдашнее состояние научного знания и представлений о строгости высказываний).

Понятно, что рассмотрение только аксиом и постулатов без учёта определений тех объектов, к которым применяются эти недоказуемые утверждения, было бы неполным. Поэтому ниже приводится перечень всех определений, постулатов и аксиом по [1, с. 11-15].

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

О1. Точка есть то, что не имеет частей.

О2. Линия же – длина без ширины.

О3. Концы же линии – точки.

О4. Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.

О5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

О6. Концы же поверхности – линии.

О7. Плоская поверхность есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.

О8. Плоский же угол есть наклонение друг к другу двух линий, в плоскости встречающихся друг с другом, но не расположенных по <одной> прямой.

О9. Когда же линии, содержащие угол, прямые, то угол называется прямолинейным.

О10. Когда же прямая, восстановленная на <другой> прямой, образует рядом углы, равные между собой, то каждый из равных углов есть прямой, а восставленная прямая называется перпендикуляром к той, на которой она восставлена.

О11. Тупой угол – больший прямого.

О12. Острый же – меньший прямого.

О13. Граница есть то, что является оконечностью чего-либо.

О14. Фигура есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ.

О15. Круг есть плоская фигура, содержащаяся внутри одной линии [которая называется окружностью], на которую все из одной точки внутри фигуры падающие [на окружность круга] прямые равны между собой.

О16. Центром же круга называется эта точка.

О17. Диаметр же круга есть какая угодно прямая, проведённая через центр и ограничиваемая с обеих сторон окружностью круга, она же и рассекает круг пополам.

О18. Полукруг же есть фигура, содержащаяся между диаметром и отсекаемой им <частью> окружности. Центр же полукруга – то же самое, что и у круга.

О19. Прямолинейные фигуры суть те, которые содержатся между прямыми, трёхсторонние – между тремя, четырёхсторонние же – четырьмя, многосторонние же – которые содержатся между более чем четырьмя прямыми.

О20. Из трёхсторонних фигур равносторонний треугольник есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же – имеющая только две равные стороны, разносторонний же – имеющая три неравные стороны.

О21. Кроме того, из трёхсторонних фигур прямоугольный треугольник есть имеющий прямой угол, тупоугольный же – имеющий тупой угол, а остроугольный – имеющий три острых угла.

О22. Из четырёхсторонних фигур квадрат есть та, которая и равносторонняя и прямоугольная, разносторонник же – прямоугольная, но не равносторонняя, ромб – равносторонняя, но не прямоугольная, ромбоид (параллелограмм) – имеющая противоположные стороны и углы, равные между собой, но не являющаяся ни равносторонней ни прямоугольной. Остальные же четырёхсторонники будем называть трапециями.

О23. Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той ни с другой <стороны> между собой не встречаются.

ПОСТУЛАТЫ. Допустим:

П1. Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.

П2. И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой.

П3. И что из всякого центра и всяким раствором <может быть) описан круг.

П4. (Акс. 10.) И что все прямые углы равны между собой.

П5. (Акс. 11.) И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ (Аксиомы)

А1. Равные одному и тому же равны и между собой.

А2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

А3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

А4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.

А5. И удвоенные одного и того же равны между собой.

А6. И половины одного и того же равны между собой.

А7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

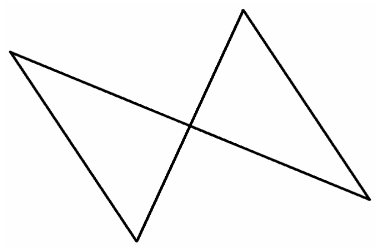
А8. И целое больше части.

А9. И две прямые не содержат пространства.

Рассмотрение всего перечня этих высказываний не входит в нашу задачу; мы остановимся лишь на некоторых из них – на тех, обсуждение которых важно в контексте поставленной в статье задачи.

Определения О1 и О2, несомненно, связаны с теорией "идей" Платона (428 или 427 г. до н.э., – 348 или 347 г. до н.э.). Возникновение понятия идеальной линии связано с развитием геометрической алгебры: как известно, большинство алгебраических и арифметических задач в античности решалось геометрическими методами (это было связано с очень неудобной для арифметических действий существовавшей тогда в Греции системой записи чисел – нумерации; всё известное нам математическое знание древних цивилизаций прошло через период геометрического решения арифметико-алгебраических задач). Стремление получить наиболее точное решение задачи в ситуации, когда решение её производилось на земляной площадке, или на восковой табличке, или даже с помощью рисунка на камне или осколке керамического сосуда – остраконе, – т.е. в условиях, когда не удавалось построить чертёж с достаточно ровными и тонкими линиями, и привело к возникновению представления об очень тонкой, не имеющей толщины линии, позволяющей идеально точно решить задачу,.

Далее, определение О4 не является в полном смысле определением того, что мы называем прямой линией: как это было замечено уже в античности: Прокл Диадох (412-485) называл расположенные одинаково относительно всех своих точек кривые "гомеомерическими" и указывал три таких линии: прямая, окружность и спираль (винтовая линия) – см. [2]. Аналогично под определение О7 подходит не только плоскость, но и поверхность сферы.



Также современный математик может увидеть неточность в определениях О19 и О22: не указав, что четырёхсторонник ограничен *несамопересекающимися* прямыми, Евклид неумышленно допускает, что изображённая на рисунке фигура может называться и четырёхсторонником, и параллелограммом (это соответствует представлению о том, что "Начала" излагались ученикам устно, с сопровождением одновременно строящихся черетежей-иллюстраций).

Чрезвычайно интересны определения О22 и О23. Первое из них подразумевает существование хотя бы одного квадрата, а сейчас известно, что знаменитый пятый постулат о параллельных эквивалентен, в частности, тому, что существует хотя бы один прямоугольный четырёхугольник – [3, с. 255-256], а второе определение подразумевает существование параллельных прямых (что, с современной точки зрения, также надо обосновывать).

Само существование параллельных прямых, как часто полагают, доказывается предложениями 27 и 28 I книги "Начала":

Предложение 27. *Если прямая, падающая на две прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, то прямые будут параллельны друг другу* [1, с. 39].

Предложение 28. *Если прямая, падающая на две прямые, образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, или внутренние односторонние <углы вместе>, равные двум прямым, то прямые будут параллельны между собой* [1, с. 40].

Однако существование ситуации, описанной в этих предложениях (т.е. то, что одна прямая может образовывать описанные углы с двумя другими), также не обосновывается.

Итак, краткий обзор определений Евклида приводит к выводу, что эти определения несут в себе и некую аксиоматическую составляющую – а именно, они подразумевают существование описываемых объектов. Что же касается "неточности" некоторых определений, то это лишний раз подтверждает устную традицию изложения геометрии, где рассказ сопровождался геометрическими изображениями, что отмечал Г. Вилейтнер (1874-1931). Формулируя определение (а затем и предложения), учитель иллюстрировал их изображениями описываемых объектов, и эта наглядность снимала возможные вопросы. *В отличие от современной математики, в античности все изучаемые геометрические объекты были не воображаемыми, а вполне наглядными и осязаемыми.*

Следующая группа положений "Начал" – это постулаты и аксиомы. Уже Прокл отмечал геометрический характер постулатов, в отличие от аксиом (хотя аксиомы А7-А9 имеют некоторое геометрическое использование).

Постулаты (postulates или требования – перевод с греческого слова $\alpha\iota\tau\mu\alpha\tau\alpha$, в отличие от $\alpha\xi\acute{\iota}\omega\mu\alpha$ – аксиома) в настоящее время в математике и философии стали практически идентичны аксиомам. Однако тот факт, что Евклид различал эти положения, заставляет внимательнее рассмотреть их содержание, применение и причины их появления.

Большинство комментаторов Евклида, начиная с греческих и арабоязычных, и кончая европейскими исследователями, рассматривали постулаты как геометрическую часть аксиом, т.е. недоказываемых положений. Но все эти комментаторы работали в условиях, существенно отличавшихся от условий работы древнегреческих исследователей.

Как известно, ещё до наступления н.э. в Китае изобрели бумагу, которая была хорошо известна в странах Азии уже в V-VI вв., а к XI-XII вв. распространилась и в Европе, вытеснив дорогостоящий пергамент, изобретённый, по разным сведениям, в V или II в. до н.э. Папирус же в эллинистическом мире был не так широко распространён и доступен, как представляется (например, во II в. до н.э. нехватка папируса для нужд Александрийской библиотеки привела к запрету вывоза папируса за пределы Египта).

Античные математики, т.е. геометры, как уже ранее указывалось, производили геометрические построения и вычисления в основном на земляных площадках, посыпанных песком каменных плитах (полах, подоконниках) или столах, а также на небольших восковых табличках. Во всех этих случаях они сталкивались с ситуациями, когда необходимые построения на чертеже не могут быть произведены – либо из-за нехватки места, либо из-за неровностей основы чертежа. Ещё б*о*льшие трудности возникали при разметке предполагаемого сооружения на местности – будь то проектируемый мост, или строящаяся гавань, или плотина (канал) для отвода воды.

В этом свете совершенно иначе воспринимаются постулаты.

П1 допускает возможность соответствующего геометрического построения, несмотря на то, что между заданными точками может протекать река, лежать камень или находится иное препятствие – но всё равно отрезок прямой между ними провести можно. Здесь, кстати, Евклид не утверждает *единственности* этой прямой; лишь аксиома А9 позволяет показать, что *между* рассматриваемыми точками прямая единственна.

П2 и П3, очевидно, также связаны с проблемой пространства для построения чертежа. Часто дополнительные построения (например, проведение касательных и секущих к окружности до их точки пересечения, или же окружности для построения, например, перпендикуляра) требуют достаточно большого пространства. Евклид указывает здесь, что чертёж строится на достаточно большой (и ничем не занятой) поверхности и целиком, вместе с дополнительными построениями, помещается на ней.

Чрезвычайно интересен П4. Действительно, как два прямых угла могут быть неравными? Обратясь опять к условиям, в которых работали древние геометры (земляная площадка или восковая дощечка после нанесения и стирания многих рисунков/записей не могла быть идеально ровной), и учитывая А7, всегда ли можно утверждать, что прямые углы равны между собой? Всегда ли можно их совместить, и они совпадут?

С точки зрения современного математика можно считать, что П4 говорит о том, что поверхность для построения чертежа имеет постоянную кривизну, что вместе с П5 это приводит к тому, что поверхность имеет нулевую кривизну, т.е. она – плоскость. Но вряд ли такого рода соображения интересовали математиков античности. П4 соответствует тому, что чертежи строятся на *ровной, не бугристой* поверхности, и в этом случае все фигуры можно "передвигать" по поверхности, не меняя их вида, и, соответственно, доказывать их равенство или неравенство с помощью наложения. Евклид использует П4 в доказательстве Предложения 14, из которого *косвенно* следует единственность продолжения прямой (т.е., в частности, единственность прямой, проходящей через две данные точки):

Предложение 14. *Если с некоторой прямой в какой-нибудь её точке две прямые, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные <вместе> двум прямым, то эти прямые по отношению друг к другу будут по одной прямой.* [1, с. 27].

Сейчас вместо П1 в геометрии принято следующее утверждение:

"Через всякие две точки пространства можно провести прямую и притом только одну.

Из этого свойства следует:

Если две прямые наложены одна на другую так, что какие-нибудь две точки одной прямой совпадают с двумя точками другой прямой, то эти прямые сливаются и во всех остальных точках (потому что в противном случае через две точки можно было бы провести две различные прямые, что невозможно).

По той же причине ***две прямые могут пересечься только в одной точке"*** [4, с. 14].

На самом деле, как мы видим, эти утверждения лишь следуют из П1 и (опосредованно) из П4, а также из А9, но не являются базовыми в геометрии Евклида (хотя фактически используются в "Началах").

Надо сказать, что многовековое изучение "Начал" Евклида математиками Востока и Запада привело к созданию множества новых различных формулировок для базовых положений евклидовой геометрии. Эти формулировки со временем стали столь привычны, что часто мы считаем их принадлежащими Евклиду.

Так, самая популярная переформулировка П5 звучит так:

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.

Однако в античные времена учёных не заботили вопросы существования и единственности: удалось решить задачу – значит, решение вот такое (и оно есть, т.е. существует), а поскольку другого решения не получилось, о возможности существования другого решения учёный не задумывался. Нарисован объект на чертеже, и наглядно видно, что по-другому нарисовать не удастся – и вопроса о единственности также не возникает. (В трактате "Данные" Евклид неоднократно приводит одно решение из нескольких имеющихся, не упоминая о возможности другого решения – см. [5].) Как мы уже видели, в определениях Евклид также не касается вопроса существования определяемых объектов.

Если же вернуться к условиям работы античных геометров, можно предположить, что, подобно предыдущим постулатам, П5 лишь указывает на то, что пространство для построения чертежа настолько (потенциально) велико, что наклоненные друг к другу прямые рано или поздно пересекутся.

Что же касается аксиом, то сразу ясно, что они являются *правилами построения логических конструкций,* или правилами, по которым Евклид доказывает свои предложения. Причём исключительно геометрический характер имеет только А9: с её помощью Евклид доказывает равенство фигур при их наложении одну на другую, или при "совмещении" на основании А7 (см., например, предложение 4 из I книги "Начал").

Часто к "геометрическим" относят, кроме А9, аксиомы А7 и А8. Действительно, они используются Евклидом в геометрических доказательствах, но они также могут быть использованы и в арифметических рассуждениях, когда величины изображаются отрезками и эти отрезки могут быть наложены друг на друга – при этом определяется, равны они или нет; кроме того, эти аксиомы могут быть использованы и при доказательстве числовых равенств и неравенств с использованием жетонов (или иных предметов, изображающих единицы-монады, которые представляют целые числа).

Итак, можно сделать следующие выводы:

Постулаты, или требования – это описание необходимых условий для проведения геометрических построений.

Аксиомы – это правила получения достоверных фактов с помощью логических выводов.

Определения "Начал" Евклида, имея ряд погрешностей с нашей точки зрения, отражали представления античных геометров об объекте исследования. При этом определения несут в себе аксиоматическую составляющую, утверждающую, в частности, существование определяемых объектов: так, из определения квадрата, подразумевающего существование этой фигуры, следует т.н. аксиома о параллельных (5-й постулат Евклида).

Библиографический список

1. Начала Евклида. Книги I-VI [Текст] / пер. с греч. и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М.-Л.: ГТТИ, 1948. – 448 с.
2. *Proclus.* A commentary on the first book of Euclid's Elements. Tr. with introd. and notes by G. R. Morrow. Princ., 1970. 355 p.
3. *Лелон-Ферран, Ж.* Основания геометрии [Текст] / Ж. Лелон-Ферран. – М.: Мир, 1989. – 312 с.
4. *Киселев, А.П.* Геометрия (Планиметрия и Стереометрия) [Текст] / А.П. Киселев. – М.: Физматлит, 2004. – 328 с.
5. *Зверкина, Г.А.* Обзор трактата Евклида "Данные" [Текст] / Г.А. Зверкина // Математика и практика, математика и культура. – М., 2000. – С. 174-192.

Об особенностях древнерусской математики второй половины XV века (новый аспект)[1]

Р.А. Симонов

Во второй половине XV в. во всем христианском мире ожидали Конца Света в 7000/1492 году. Соответствующие эсхатологические настроения накладывали отпечаток на религиозную и светскую жизнь. Например, люди интересовались, а что будет, если Конец Света в 1492 г. не наступит? По этому поводу и другим аспектам эсхатологии Новгородский архиепископ Геннадий обратился за разъяснением к просвещенному греку Дмитрию Траханиоту, который находился на службе у великого князя Московского Ивана III. Дмитрий Траханиот ответил Геннадию посланием, где якобы рекомендовал ждать еще семь лет Конца Света, а если и они пройдут, "и знамение не явится, подобает разумети к тому и о всех седмиц, или яко да приложатся и от месец седмица и дней и часов..."[2]. Перевод: "И если событие (Конец Света) не произойдет [и после 7 лет], то следует понимать, что оно может случиться по истечении любой "семерки": 7 месяцев, 7 недель, 7 дней, 7 часов...".

Я.С. Лурье, трактовавший совет о "седморичности" Конца Света как исходящий от Дмитрия Траханиота, выразил общее мнение советской науки, существовавшее к 1989 г. Однако за год до этого, в 1988 г., два молодых ученых – А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк – вновь исследовали это послание и опубликовали его[3]. В частности, они отметили, что Б.Н. Флоря (сейчас член-корреспондент РАН) "значительно уточнил этот вопрос, обратив внимание на осуждение Дмитрием "плотского смотрения", согласно которому конец света должен быть "седморичен" (прежде эта точка зрения по недосмотру исследователей инкриминировалась самому ученому греку)"[4]. Спустя несколько страниц А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк еще раз затрагивают этот вопрос: "Утверждение о том, что конца света следует ждать "в седмом числе", т.е. по истечении 7-й тысячи, 7-го года, 7-го месяца, которое исследователи приписывают самому Дмитрию Траханиоту (лишь Б.Н. Флоря оспорил этот тезис), на самом деле есть изложение взглядов его оппонентов. От подобных ложных мудрствований Дмитрий решительно отказывается: "Сия... все помышлениа суть"[5].

В послании Дмитрия Траханиота также приводятся хронологические вычисления. Воспроизвожу их полностью (в переводе): "О годах и о седьмой тысяче лет в разные сроки и у разных народов. Но то есть ложь, ибо Второго пришествия все дождутся в общий срок. И это есть истина мудрецов. Поскольку от Адама до составления астрономических "перских каноний"[6] прошло 6139 лет, а от того года до сегодняшнего – 858, то всех лет будет 6997 [=1489 г.]. [Проверка: 6139+858=6997 – Р.С.]. И опять от Адама до составления "арапских каноний" прошло 6169 лет, а от того года до сего года – 828, то всех лет будет 6997. [6169+828=6997]. И вновь

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, грант № 12-03-00501.

[2]*Лурье Я.С.* Траханиот Дмитрий Мануилович // Словарь книжников и книжности Древней Руси / Отв. ред. акад. Д.С. Лихачев. Л., 1989. Вып. 2, часть 2. С. 436.

[3]*Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Послание Дмитрия Траханиота новгородскому архиепископу Геннадию Гонзову о седмеричности счисления лет // Естественнонаучные представления Древней Руси / Отв. ред. Р.А. Симонов. М., 1988. С. 51-75.

[4]*Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 58; см. также: *Флоря Б.Н.* Греки-эмигранты в русском государстве второй половины XV – начала XVI в. Политическая и культурная деятельность // Руско-Балкански културни връзки през средневековието. София, 1982. С. 138.

[5]*Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 67.

[6]"Канонии", – очевидно, календарные правила, установления.

от Адама до составления “халдейских каноний” прошел 4761 год, а от того года до нынешнего 2236 лет, то всего будет 6997 лет. [4761+ 2236=6997]. И опять от Адама до султана Мельхиона, то есть до “египетских каноний”, прошло 6586 лет, а от того года до текущего – 411, что дает то же число. [6586+411=6997]. Опять от Адама до составления “еврейских каноний” прошло 5249 лет, а оттуда до сего года – 1748, что дает то же число. [5249+1748=6997]”.

А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк на основе календарных расчетов Дмитрия Траханиота заключили: “Ученый грек находит место известным ему календарям внутри времени христианской истории, суммируя годы, отсчитанные каждой системой счисления лет, с годами, прошедшими от сотворения мира до составления тех или иных каноний, – разумеется, эти расчеты во всех случаях складывались в одну и ту же цифру (?, по-видимому, – число Р.С.) – 6997 лет – и давали остнование автору утверждать, что “коли уже начяло всем едина, и лета до сех мест приходит на едино, подобает же и концу всем едину быти”[1]. (Смысловой перевод: “Если начало всем едино и года сходятся к одному – 6997 году, значит, и концу седьмой тысячи лет подобает быть общим для всех”).

А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк сообщили, что ““персские канонии” – это эра Иездегерда, начавшаяся 16 мая 632 г.”[2] Действительно, “последний из династии Сасанидов царь Йездигерд III... провел в 632 г. календарную реформу”[3]. Но при проверке данных следует иметь в виду, что “персские канонии” источника на 631 год 2 месяца и 15 суток позднее мартовского новогодия, которое, очевидно, использовал Дмитрий Траханиот (о чем подробнее далее). Поэтому за исходное следует брать число 631. Проверка: 631+858=1489. Результат получается идеальным, при этом следует учитывать, что точность подобных расчетов допускает погрешность до года[4].

По мнению А.И. Плигузова и И.А. Тихонюка, “арапские канонии” должны ориентироваться на “хиджру” – переселение Мухаммеда из Мекки в Медину (июль 622 г.), но Дмитрий начинает арбское летосчисление с 661 г., и причину этого отклонения еще предстоит установить”[5]. Число 661 в послании Дмитрия Траханиота явно не указано. Следовательно, его установили А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк. Это можно было сделать, например, двумя путями. 1. Перевести исходную дату 6169 г. в эру от Рождества Христова, что дает искомое значение: 6169-5508=661. 2. Вначале перевести итоговое число послания 6997 в эру от Р.Х., что даст 1489 г. (6997-5508=1489); затем вычесть из него второе число послания – 828. Это приводит к искомой величине: 1489-828=661. Значит, число 661 не является ошибкой переписчика. Поскольку оно отличается от числа “хиджры” (622), то встает вопрос, что же оно означает?

А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк склонны думать, что Дмитрий Траханиот, вместо правильного числа “хиджры” (622), “начинает арабское летосчисление с 661”, причину чего “еще предстоит установить”[6]. Следует иметь в виду, что Русь только-только избавилась от Ордынской зависимости (“стояние на Угре” произошло в 1480 г.), и большинство тех государственных чиновников, через которых шли Ордынские докумениты, еше находились на государевой службе, а они знали, что такое “хиджра”. И таких чиновников в стране были десятки, если ни сотни. В такой ситуации было бы странным незнание “хиджры” Дмитрием Траханиотом. По-видимому, указанный в послании 661 г. это не ошибочный год “хиджры”, с которого “Дмитрий начинает арабское летосчисление”, а дата какого-то календарного события, которое произошло позже.

Таковым событием могло быть фактическое введение “хиджры”. Дело в том, что “хиджра” была введена после смерти Мухаммеда, но связывалась с реальным событием: его переселением или бегством (по-арабски, бегство – “хиджра”) из Мекки в Медину, что произошло в 622 г. Событие это в литературе описывается поразному. Вот несколько версий. “В 638 г. по повелению халифа Омара был введен календарь лунной хиджры и начало новой эры было отнесено к 622 г.”[7]. “Второй преемник Мухаммеда халиф Омар ибн аль-Хаттаб... остановился на этой эре и стал считать, начиная от 17-го года хиджры”[8]. Легко найти, когда это случилось: 622+17=639 г., то есть спустя год после даты, указанной в предыдущей версии. “Отправной точкой счета лет, эрой мусульманского счета времени является 16 июля 662 г. н.э.... Мусульманский календарь с эрой хиджры был признан Кораном и узаконен Арабским халифатом”[9]. Дата узаконения эры хиджры Арабским халифатом здесь не указывается.

Далеко неполные воспроизведенные данные свидетельствуют об отсутствии в историографии единой даты введения эры хиджры и единства во мнении об инициаторе введения эры хиджры (Омар, Арабский халифат). Поэтому нельзя исключать, что 661 год в послании Дмитрия Траханиота указывает на существовавшую во 2-й пловине XV в., а теперь малоизвестную дату (661 г.) какого-то варианта узаконения эры хиджры во всем арабском мире или его части.

---

[1] *Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 68.
[2] *Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 68.
[3] *Климишин И.А.* Календарь и хронология. 3-е изд. М., 1990. С. 227.
[4] *Цыбульский В.В.* Календари и хронология стран мира. М., 1982. С. 67, 69; *Каменцева Е.И.* Хронология. 2-е изд. М., 2003. С. 93.
[5] *Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 68.
[6] *Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 68.
[7] *Селешников С.И.* История календаря и хронология. М., 1970. С. 110-111.
[8] *Климишин И.А.* Указ. соч. С. 271.
[9] *Каменцева Е.И.* Указ. соч. С. 61-62.

Как отмечали А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк, следующие далее в послании Дмитрия Траханиота "«халдейские канонии» – эра Набонасара (с 747 г. до н.э.)". Число 747 в послании Дмитрия Траханиота отсутствует; его нашли/указали А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк. Рассчетно его можно получить двумя путями. 1. Вычитанием из 5508 исходного числа 4761: 5508-4761=747. 2. Вычитанием из второго числа, указанного Дмитрием Траханиотом, числа года расчетов, переведенного в эру от Р.Х. (6697/1489 г.): 2236-1489=747. Следовательно, число 747 реальный календарный факт, известный Дмитрию Траханиоту, судя по его расчетам. Знакомо это число и календарной историографии: "Эпохой эры Набонасара является 26 февраля 747 г. до н.э. по юлианскому календарю"[10].

По данным А.И. Плигузова и И.А. Тихонюка, "«египетские» канонии султана Мельхиона – арабская эра Джелал-ад-Дина Малик-шаха, исчисляющая годы с марта 1079 г."[1] В историко-научной историографии подготовка календарной реформы 1079 г. приписывается знаменитому персидскому математику, астроному и поэту Омару Хайяму (1048-1123 или ок. 1131): "В 1076 г. для Хайяма и его помощников в Исфахане, столице Мелик-шаха, была построена астрономическая обсерватория – одна из крупнейших в то время... Календарная комиссия Омара Хайяма назначила начальное весеннее равноденствие на эпоху 15 марта 1079 г. по юлианскому календарю. Эта дата была также принята за так называемую эру Джалал-ад-дина – по почетному прозванию Малик-шаха"[2].

Указываемое А.И. Плигузовым и И.А. Тихонюком время (март 1079 г.), как начало эры Джалал-ад-дина, явно в послании Дмитрия Траханиота не дано. Как нашли число 1079, А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк не сообщают. Дополнительные подсчеты обнаружили неожиданный результат. А именно: вычитание из исходного 6586 "переводного" числа 5508 дало новое значение 1078 (6586-5508=1078), вместо предполагаемого 1079. То же значение (1078) получилось при вычитании числа года расчетов 1489 г. в эре от Р.Х. (6997-5508=1489) из второй величины, указанной Дмитрием Траханиотом в послании (411): 1489-411=1078. Следовательно, новое значение 1078 не является ошибкой переписчика, а можеть быть результатом хронологических/календарных причин. И действительно, предположение, что рассчеты велись в январе-феврале мартовского 6997 года, возвращает "утраченное" число 1079. Дело в том, что в таком случае при переводе дат нужно вычитать число 5507 (а не 5508)[3]: 6586-5507=1079. Кроме того, и дата расчетов в эре от Р.Х. изменится: 6997-5507=1490 (год), а вычитание из нее второго числа Дмитрия Траханиота (411) дает сакраментальное число 1079: 1490-411=1079.

Итак, хронологическое исследование записи об эре Джелал-ад-дина у Дмитрия Траханиота позволяет ее датировать январем-февралем 1490 г., что уточняет общую датировку этого послания. А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк о датировке послания Дмитрия Траханиота заключали следующее: "Итак, все ранние списки (Троицк. 730 – С и Н – Ч) дают нам одну и ту же дату написания послания: 1489 г., и с этой датой согласованы все хронологические расчеты лет... Послание Дмитрия Траханиота следует датировать началом 6997 г. – мартом 6997 г. (1 сентября 1488 г. – 22 марта 1489 г.)"[4]. Из этих слов также следует, что А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк считали, что Дмитрий Траханиот вел календарный счет в системе сентябрьского новогодия, что опровергается приведенными хронологическими расчетами. Дмитрием Траханиотом использовалось и мартовское новогодие, по крайней мере, в части послания, где говорится об эре Джалал-ад-дина.

Далее в расчетной части послания Дмитрия Траханиота указываются "еврейские канонии": "Еврейские канонии" начинаются у Дмитрия с 268 г. до н.э. Вместо 3761 до н.э., – и здесь мы затрудняемся указать причину явной несогласованности нашего источника с общепринятым взглядом"[5]. Возможно, у Дмитрия Траханиота представлен отзвук важного этапа в развитии еврейского календаря, связанный с переходом от лунного на лунно-солнечный счет, что прозошло примерно в IV в. до Р.Х.: "...Примерно в IV в. до н.э. лунный календарь начал постепенно вытесняться более сложным, лунно-солнечным календарем. Его разработка продолжалась много столетий, и ее полное завершение обычно относят к 499 г. н.э."[6].

Непонятно, откуда взялось у А.И. Плигузова и И.А. Тихонюка число 268, его нет у Дмитрия Траханиота. Расчеты дают похожее число – 258, - которое, кстати, получается, если исходить из мартовского новогодия, при котором вычисления велись в январе-феврале 1490 г., как в предыдущем случае (то есть при "переводе" дат с числом 5507). Действительно, при "переводе" даты 5249 до Р.Х., указываемой Дмитрием Траханиотом в качестве основной, получаем: 5507-5249=258 (год до Р.Х.). Второе число 1748 (из указываемых Дмитрием Траханиотом) имеем в случае сложения найденной величины 258 с числом 1490 года (6997-5507=1490) выполнения вычислений: 258+1490=1748. Значит, вычисления в случае "еврейских каноний" показывают, что и они могли вестись Дмитрием Траханиотом в январе-феврале 1490 г.

Вероятно, расчеты по "канониям" им изложены в послании архиепископу Геннадию в реальной временной

[10] *Климишин И.А.* Указ. соч. С. 320.

[1] *Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 68.

[2] *Селешников С.И.* Указ. соч. С. 74-76; см. также: *Климишин И.А.* Указ. соч. С. 97, 227, *Бородин А.И., Бугай А.С.* Хайям Омар Гиясэддин Абу-ль Фахт ибн Ибрахим // Биографический словарь деятелей в области математики. Киев, 1979. С. 506.

[3] *Каменцева Е.И.* Указ. соч. С. 68-69.

[4] *Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 60-61.

[5] *Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 68.

[6] *Селешников С.И.* Указ. соч. С. 117, см. также: *Цыбульский В.В.* Указ. соч. С. 75; *Каменцева Е.И.* Указ. соч. С. 25.

последовательности: расчеты, указанные первыми, – “персидских”, “арабских”, “халдейских” “каноний”, производились в (конце?) 1489 г. Подсчеты заключающих список “египетских” и “еврейских” “каноний” проводились уже в начале 1490 г. (январь-февраль).

Рассмотрев “канонии”, Дмитрий Траханиот коснулся христианского летосчисления в эре от Рождения Христа с редкой эпохой в 5511 лет. А.И. Плигузов и И.А. Тихонюк по этому поводу писали: “Грек (то есть Дмитрий Траханиот – Р.С.) (как и доминиканец Вениамин из ближайшего окружения Геннадия) считал, что “латыны” числят от Адама до рождества Христова 5511 лет, а не 5500, как думал Геннадий. Среди известных нам писателей один только польский хронист Ян Длугош при переводе на Дионисиеву эру вычитал не 5508, а 5511 лет, т.е. также разделял сотворение Адама и Христово рождество 5511 годами. Это ... <может говорить>, что Дмитрий обучался хотя бы некоторым календарным премудростям в польско-литовском государстве”[1].

В конце послания Дмитрий Траханиот, подводя итог, возвращается к указанной календарной эпохе: “Что же седмь век? Нъ век есть тысяча лет по ветхому житию, что жили до девятьсот лет и болши! Да сълчили, что до Христа прошло 5000 лет и 511, а по Христе до семи век осталася одна 1000 лет и 500 без 11 (то есть 1489 лет —Р.С.). Ино то, деи, то истинно, Христос в последняя дни пришол по пророчьской речи, а по семи векам от Адама, то седмая тысяща и истинно. Да то и написали”[2]. Перевод: “Что же семь веков? Но век есть тысяча лет, по ветхому/древнему житию <людей>, что жили до девятисот лет и больше! Да сочли <они,> что до Христа прошло 5511 лет, а по Христе, до семи веков, осталось 1489 лет. И это действительно так [5511+1489=7000]; по пророчеству, Христос в эти дни <должен> придти, по <прошествии> семи веков от Адама, а в действительности – семи тысяч лет. Да о том и написали”. Дмитрий Траханиот редкую календарную эпоху в 5511 лет “отодвинул” ко времени допотопных патриархов, а по ней Второе пришествие должно было произойти в 1489 г. от Р.Х. Однако из его расчетов следовало, что Второго пришествия в 1489 г. не было, так как вычисления “египетских” и “еврейских” “каноний” он, очевидно, производил в январе-феврале 1490 г., фактически уже перешагнув 7000-летний рубеж (в календарной эпохе 5511 г.).

Итак, Дмитрий Траханиот в хронологических расчетах, по-видимому, использовал разные календарные эпохи: при вычислении “каноний” применял эпоху в 5508 лет, в “латынском” счете, фигурировавшем также в выходной записи послания, эпоху в 5511 лет. Причем календарная эпоха в 5508 лет им применялась как бы неявно в хронологических расчетах “каноний”, что обнаруживается в результате их историко-математического изучения, сам Дмитрий Траханиот (и современные исследователи его творчества) об этом не говорят/не замечают. Эпоха в 5511 лет Дмитрием Траханиотом явно упоминается в послании неоднократно. Почему Дмитрий прибег к эпохе 5511 лет? Она ему позволила приблизить наступление 7000-летия уже в 1489 г. (а не в 1492 г., как ожидалось многими). Тем самым он наглядно мог продемонстрировать своему сановному адресанту архиепископу Геннадию, что опасаться 7-й тысячи лет уже реально не следует. Это согласуется с данными современной историографии, что в своем послании “Дмитрий Траханиот сомневается в роковом значении 7000 г.”[3].

Таким образом, хронологические расчеты послания Дмитрия Траханиота играют роль своеобразного средства манипулирования сознанием окружающих его на государственной службе высших лиц Российского государства.

В таком случае речь может идти о новом для отечественной истории математики аспекте приложения – социально-политическом. В этой связи заслуживает внимания хронология статьи “О татарской [вере]”[4], сохранившейся в 4 списках XVI в. Эта хронология имеет сложный, уникальный для древнерусской книжности характер. В ней переплетены мотивы русской христианской и “татарской” мусульманской эсхатологии.

Чтобы правильно понять историко-математическое значение этой хронологической эсхатологии, необходимо проследить историю статьи “О татарской [вере]”. Судя по новейшим научным исследованиям О.Л. Новиковой[5], статья могла возникнуть в 1501 г. в Кирилло-Белозерском монастыре на основе выписок, сделанных местным писцом-иноком из материалов посетившего монастырь Пермского епископа Филофея. По одним данным, еп. Филофей там же и в том же году скончался[6], а по другим – отъехал в соседний Ферапонтов монастырь, где почил в 1508 г.[7] Известны две рукописных книги, созданные /переписанные в окружении еп. Филофея, но в них нет текста с хронологическими записями, попавшими в статью “О татарской [вере]”. Изучая эту статью по конволюту (сборнику, хранящемуся в Российской Национальной библиотеке, СПб., шифр Соф. 1462, составленному не ранее 30-х гг. XVI в. из текстов разного времени конца XV – первой трети XVI в.[8]), О.Л. Новикова отметила, что она или ее хронология (“этот фрагмент”) встречается у А.Х. Востокова и является частью “пока

[1] *Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 68-69.

[2] *Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 74-75.

[3] *Романова А.А.* Древнерусские календарно-хронологические источники XV-XVII вв. СПб., 2002. С. 115.

[4] *Симонов Р.А.* Хронология статьи “О татарской [вере]” // Румянцевские чтения-2011: В 2 ч. М., 2011. Ч. 2. С. 102-108.

[5] *Новикова О.Л.* Сборник книжника рубежа XV-XVI веков с рассказами о Флорентийской унии и афонских монастырях: опыты атрибуции // Каптеревские чтения-9 / Отв ред. М.Н. Бибиков. М., 2011. С. 5-25.

[6] Полное собрание русских летописей. Т. 12. С. 253; Вычегодско-Вымская летопись // Родники пармы. Сыктывкар, 1989. С. 28.

[7] *Зимин А.А.* Краткие летописцы XV-XVI вв. // Исторический архив. М., 1950. Т. 5. С. 29; *Новикова О.Л.* Указ. соч. С. 23.

[8] *Новикова О.Л.* Указ. соч. С. 9.

не выявленного хронографического сочинения"[9]. В XXI в. статья "О татарской [вере]" по изданию А.Х. Востокова также рассматривалась Д.Ю. Кривцовым[10], который датировал список 30-ми гг. XVI в. И.М. Грицевская обнаружила еще два списка этого текста, относящихся к 60-м и 60-70-м гг. XVI в. (РНБ, Солов. № 831/941, 1560-е гг. Л. 407 об.; РНБ, Солов. № 853/963, 1560-1570 гг.)[11].

Еп. Филофей был, по-видимому, не чужд календарно-хронологическим интересам. Когда в конце XV в. выяснилось, что ожидаемый в 1492 г. Конец Света не состоялся, то обнаружились затруднения с пасхальными расчетами на последующие годы, и митрополит всея Руси Зосима на состоявшемся Соборе изложил свою пасхалию и для сверки поручил составить пасхалию архиепископу Новгородскому Геннадию. По летописному свидетельству, пасхальные расчеты на 20 лет также составил в марте-апреле 1492 г. епископ Филофей[1]. Как справедливо заметила А.А. Романова, "в 1492 г. мы имеем уникальный случай в русской истории, когда составление новых расчетов для календаря приобрело значение едва ли не общегосударственное"[2].

До сих пор реальных хронолого-математических текстов, с достоверностью принадлежавших еп. Филофею, не обнаружено. В этой связи любой подобный текст, даже фрагментарный, связанный с деятельностью Филофея, заслуживает внимания. Именно таковым можно считать хронолого-эсхатологическую запись статьи "О татарской [вере]". Как уже отмечалось, в ней соседствуют, даже как бы переплетаются два сюжета – русский и "татарский". Русская часть отражала концепцию Второго пришествия Христа, которое ожидалось по истечении 7000 лет в эре от С.М., то есть в 1492 г. в эре от Р.Х. В статье указывается количество лет, оставшихся до наступления указанного события: "Летописца осталося... рускаго 18 лет", что выводит на дату 1474 г. (1492-18=1474); этот год указан также явно в эре от С.М. – [6]982 г. (6982-5508=1474)[3].

Следует учитывать, что в XV в. на Руси при "переводе" даты на "латынский" счет реально могли получить дату, б***о***льшего числа (1482 г.), используя при вычитании число 5500[4], а не 5508, то есть с разницей в восемь единиц. Например, так, по-видимому, считал архиепископ Геннадий[5]. Известен соответствующий "живой" случай, отраженный А.И. Соболевским. Он относится к числу "распросов", которым подвергали иностранцев, а затем разговор записывали: "По римскому закону от Божия нарожениа лет тысяща и четыреста и пятьдесят и одно, мая в первый день, на память святаго мученика Мокея. А по русскому летописцу тысяща и четыреста и пятьдесят и девять. Тогды турской Царьград взял; а имя царю Амурат"[6]. Разговор относился к 1451 г., но был записан позже, судя по указанному факту падения Константинополя[7]; при переводе даты на русский счет, "распросчик" передал ее 1459 годом, то есть сделал на восемь лет старше.

Параллельно с русской христанской эсхатологической хронологией в статье "О татарской [вере]" рассматривается "татарская" мусульманская эсхатология, якобы связанная с посмертным пророчеством Мухаммеда о его Втором пришествии через тысячу лет после смерти ("сказывал себи тысящу лет лежати до Второго"). Причем, сообщалось количество прошедших лет ("по-татарскы отошло лет 884") и, как в случае русских расчетов, указывалось, сколько осталось Мухаммеду лет до воскресения: "Ино тотарьского летописца осталося 116 лет". [Проверка: 884+116=1000]. Переводя число лет 884 (как, очевидно, лунных) в солнечный счет, получим: 884-[884/33][8]=884-26=858. Учтя, что Мухаммед умер в 632 г. найдем искомый год: 632+858=1490 (год). Надо иметь в виду, что, как отмечалось выше, точность подобных расчетов равна году. Кроме того, мы не знаем, была ли известна информатору или автору расчетов XV в. та дата смерти Мухаммеда, которая принята в современной историографии (632 г.). Дело в том, что уже в XI в. не знали точной даты смерти Мухаммеда, о чем писал известный восточный ученый-энциклопедист Бируни (973-1048 или после 1050)[9].

Паслание Дмитрия Траханиота и статья "О татарской [вере]" связаны между собой общим предметом – эсхатологическими расчетами. При ближайшем рассмотрении эта связь оказывается более тесной, чем может показаться на первый взгляд. Толкование Б.Н. Флори (в трактовке А.И. Плигузова и И.А. Тихонюка) пока-

---

[9] *Новикова О.Л.* Указ. соч. С. 8, 24; см. также: *Востоков А.Х.* Описание русских и словенских рукописей Румянцевского музеума. СПб., 1842. С. 270-274.

[10] *Кривцов Д.Ю.* Рассказ о поездке митрополита Алексея в Золотую Орду в литературных источниках и историографии // Проблемы происхождения и бытования памятников древнерусской письменности и литературы. Н. Новгород, 2002. С. 223-305; *Кривцов Д.Ю.* Прения митрополитов Петра и Алексея с мусульманами: Источниковедческий аспект // История и исторический процесс: Материалы научной конференции. Н. Новгород, 2005. С. 136-140.

[11] *Грицевская И.М., Симонов Р.А.* Статья "О татарской [вере]" в сборниках XVI в. // Древняя Русь. Вопросы медиевистики. 2011, № 3. С. 35-37.

[1] См. текст предисловия к пасхалии: *Романова А.А.* Епископ Пермский и Вологодский Филофей и атрибутированное ему предисловие к пасхалии // Средневековое православие от прихода до патриархата. Волгоград, 1997. С. 103-110

[2] *Романова А.А.* Древнерусские календарно-хронологические источники XV-XVII вв. С. 117.

[3] *Симонов Р.А.* Хронология статьи "О татарской [вере]". С. 102, 106-107.

[4] О причинах подобных расхождений см.: *Климишин И.А.* Указ. соч. С. 324-345.

[5] *Плигузов А.И., Тихонюк И.А.* Указ. соч. С. 69.

[6] *Соболевский А.И.* Переводная литература Московской Руси XIV-XVII веков. СПб., 1903. С. 385.

[7] Константинополь пал в 1453 г., см.: *Лурье Я.С.* Иона // Словарь книжников и книжности Древней Руси / Отв. ред. акад. Д.С. Лихачев. Л., 1988. Вып. 2, ч. 1. С. 425.

[8] Квадратные скобки означают, что берется целая часть частного, а остаток от деления отбрасывается, см.: *Климишин И.А.* Указ. соч. С. 271-272.

[9] *Аль-Беруни Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед.* Избранные произведения. Ташкент, 1957 (Т. 1), 1974 (Т. 5, ч. 1); *Климишин И.А.* Указ. соч. С. 270-271.

зывает, что русские власти (в лице крупного придворного/государственного чиновника Дмитрия Траханиота) были озабочены последствиями, которые могли случиться, если Второе пришествие не произойдет в 1492 г. (Если же оно случится, то наступит Конец Света, и с этим ничего не поделаешь.) Стремясь пресечь грозившую перманентность эсхатологических ожиданий, чтобы скорее перевести страну на обычный рабочий ритм, власти были заинтересованы в таких хронологических расчетах, которые успокаивали население, а не возбуждали его грозящими радикальными переменами.

Примерно той же цели объективно служили "татарские" эсхатологические расчеты статьи "О татарской [вере]". Дело в том, что Пермский край XV в. был огромным районом, с населением, первоначально чуждым христианству и русской культуре, к тому же с исламизированными соседями (в определенной части). Достаточно сказать, что из трех предшественников Филофея по Пермской епископии, канонизированных Русской православной церковью как святые чудотворцы, двое (епп. Герасим и Питирим) были зверски убиты[1]. Епископ Филофей мог предусмотреть некие контрмеры, предвидя возможность усиления напряженности у своей паствы как в ожидании Конца Света перед 1492 годом, так и (при его неосуществлении) в предположении о его наступлении в ближайшее время после 1492 г.

Одним из каналов информации, к которому прибегали московские власти, были "вести", собираемые "начальными людьми" (митрополитами, епископами, боярами) в процессе бесед с иностранцами, иногда с записью их[2]. Возможно, такой информационный канал мог использовать и Филофей. В 1490 г. он приезжал в Москву на очередной Собор и мог встретиться с неким "бакшеем" – чиновником ослабевшей, но все еще влиятельной Орды, беседу с которым записал. Из статьи "О татарской [вере]" видно, что речь могла идти о разных вопросах, в том числе о пребывании митрополита Алексея в Золотой Орде в XIV в. и о некоторых данных из жизни основателя ислама Мухаммеда.

Заканчивается статья "О татарской [вере]" переплетенными между собой "русскими" христианскими (1474 г.) и "татарскими" хронолого-эсхатологическими расчетами (1490 г.) о возможном Втором пришествии (воскресении) через 1000 лет после смерти Мухаммеда. Скорее всего, эти данные в полном объеме не принадлежали "бакшею". Так, "татарские" расчеты, связанные с делением указанного 1000-летнего периода 1490 годом на две части, не могли быть актуальными для ордынского чиновника ("бакшея") в связи с нескорым Вторым пришествием Мухаммеда – в 1602 г.[3], то есть более чем через столетие. Тогда как для Филофея такая временн**а**я удаленность могла представлять явный интерес, так как снимала, хотя бы частично, эсхатологическую напряженность у населения Пермской епархии и соседних с ней народов, отодвигая наступление Второго пришествия ("татарского") в даль лет. Отсюда вытекает возможность отнесения "русских" и "татарских" эсхатологических расчетов (с их переплетением) не исключительно "бакшею", а также епископу Филофею[4]. В таком случае расчеты статьи "О татарской [вере]" следует трактовать как уникальный случай использования последним хронологии в целях государственного значения.

Послание Дмитрия Траханиота и статья "О татарской [вере]" представляют историю русской эсхатологии второй половины XV в. более "жизненной" и разнообразной. Для истории математики расчеты по эсхатологической хронологии не только расширяют источниковую базу исследований, но и "высвечивают" указанную, недостаточно изученную сторону древнерусской действительности, как возможный объект приложения историко-математического метода.

Работа А.И. Некрасова в ЦАГИ

И.А. Тюлина, В.Н. Чиненова

Александр Иванович Некрасов (1883-1957) – академик, выдающийся ученый в области аэрогидромеханики и математики, заведующий кафедрой теоретической механики механико-математического факультета МГУ (с 1933 по 1938 и с 1943 до конца своей жизни), профессор МВТУ им. Н.Э. Баумана, автор замечательного учебника по теоретической механике.

[1] *Петренко Н.А.* Агиографические источники о епископах пермских // Христианизация Коми края и ее роль в развитии государственности и культуры: В 2 т. Сыктывкар, 1996. Т. 1. С. 207; *Власов А.Н.* Миссия русской православной церкви в Пермском крае (по материалам древнерусской письменности) // История Пермской епархии в памятниках письменности и устной прозы: Исследования и материалы. Сыктывкар, 1996. С. 24-26.

[2] *Соболевский А.И.* Указ. соч. С. 383-385.

[3] *Симонов Р.А.* Новое о "татарской" эсхатологической записи 1474/1490 гг. // Семинар по геральдике и вспомогательным историческим дисциплинам. Бюллетень № 81. Заседание 8 февраля 2012 г. / РГГУ. М., 2012. С. 6.

[4] *Симонов Р.А.* К атрибуции епископу Филофею хронолого-эсхатологических расчетов статьи "О татарской [вере]" // Румянцевские чтения-2012 / РГБ: В 2 ч. М., 2012. Ч. 2. С. 220-223.

А.И. Некрасов – сотрудник ЦАГИ

А.И. Некрасов был большим знатоком аналитической механики, математики, небесной механики, однако главной областью его исследований была гидроаэромеханика.

Своими исследованиями он внес большой вклад в развитие отечественной механики, что не раз отмечалось различными государственными наградами.

Большая часть жизни А.И. Некрасова была связана с Центральным аэрогидродинамическим институтом (ЦАГИ). Александр Иванович являлся видным организатором исследовательских работ в области авиации. Его научная деятельность была тесно связана с авиационной промышленностью. А.И. Некрасов был учеником и последователем Н.Е. Жуковского, ближайшим коллегой С.А. Чаплыгина, организовавших ЦАГИ.

На самом трудном раннем этапе строительства ЦАГИ (оснащения его лабораторий современной измерительной техникой, налаживания производства, устройства полигонов для испытаний самолетов) А.И. Некрасов после кончины Н.Е. Жуковского был введен в руководящую группу сотрудников ЦАГИ.

Во время организации в декабре 1918 г. ЦАГИ по инициативе Н.Е. Жуковского руководящим органом института стала Коллегия, которую он и возглавил. В 1923 г. А.И. Некрасов был введен в ее состав ученым-консультантом. 1 декабря 1925 г. Научно-технический отдел ВСНХ СССР утвердил новое положение о ЦАГИ и его структуру; А.И. Некрасов в этом году в состав Коллегии института не вошел.

В 1929 г. А.И. Некрасов был переведен из Наркомпроса в ЦАГИ в общетеоретический отдел на должность старшего инженера. Приказом № 62 от 17 мая 1930 г. по научно-исследовательскому сектору ПТУ ВСНХ СССР он был назначен на должность заместителя директора ЦАГИ по научной части[1].

25 сентября 1931 г. в связи с новыми задачами, поставленными перед ЦАГИ, институт разделился на два основных сектора – Научно-исследовательский и Конструкторско-производственный. В 1933 г. в состав Научно-исследовательского сектора входили экспериментально-аэродинамический, экспериментально-гидродинамический и другие отделы. В этом же году был создан новый отдел особых конструкций. А.И. Некрасов работал заместителем начальника ЦАГИ по научно-исследовательской работе до 1938 г.

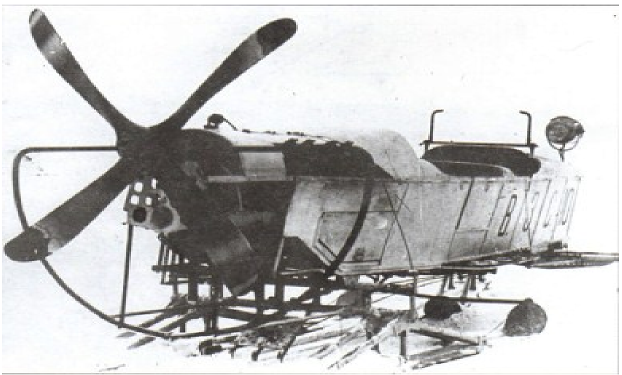
С 1932 по 1938 г. А.И. Некрасов был постоянным участником семинара общетеоретической группы ЦАГИ, которой руководил академик С.А. Чаплыгин (с 1921 г. после смерти Н.Е. Жуковского – президент Коллегии ЦАГИ).

[1]Дело А.И. Некрасова [Текст] // в сб. “Материалы архива научно-мемориального музея Е.Н. Жуковского”. – С. 13.

С именами участников этого семинара - выдающихся ученых А.И. Некрасова, М.В. Келдыша, Н.Е. Кочина, М.А. Лаврентьева, Л.И. Седова и др. – связан важный этап в развитии теоретической аэрогидродинамики. В их исследованиях были получены фундаментальные результаты, позволившие решать различные задачи самолетостроения, учета сжимаемости воздуха и др.

21-27 декабря 1933 г. в связи с 15-летием ЦАГИ были проведены три юбилейные Всесоюзные научно-исследовательские конференции: Третья конференция по аэродинамике, Первая конференция по гидродинамике, Первая конференция по прочности авиационных конструкций. Открытие и первое пленарное заседание были совместными и состоялись 21 декабря 1933 г. в Московском Доме ученых, где А.И. Некрасов, А.Н. Туполев, Л.Г. Лойцянский и др. выступили с докладами. Этому событию А.И. Некрасов посвятил статью “К пятнадцатилетию ЦАГИ (Обзор деятельности института)”[1].

В 1921 г. в ЦАГИ были созданы и успешно прошли испытания аэросани.



Но металлургическая база в СССР была еще слаба. В 1923 г. обсуждался вопрос о вводе в самолетостроение

[1]К пятнадцатилетию ЦАГИ: обзор деятельности института [Текст] // Фронт науки и техники. – 1933. – № 12. – С. 18-25.

металлических конструкций. Был получен особый сплав Дюраля, названный кольчугалюминием, из которого построили цельнометаллические аэросани АНТ-3, что явилось началом металлического самолетостроения в СССР.

В 1932-1933 гг. аэросани ЦАГИ обслуживали арктическую экспедицию на полуострове Новая Земля. Среди материалов архива Научно-мемориального музея им. Н.Е. Жуковского обнаружен текст телеграммы, поступившей в ЦАГИ из Русской гавани от Ермолаева и Петерса 17 января 1933 г. на имя А.И. Некрасова: "Аэросани ЦАГИ успешно использованы экспедицией Арктического института при изучении совершенно неизвестных областей северной половины Новой Земли. Горный хребет, открытый в центральной части Новой Земли, в честь Института назван «Хребтом ЦАГИ»"[1].

После маленького моноплана АНТ-1 в 1924 г. был построен полностью из отечественных материалов двухместный моноплан АНТ-2. Это событие стало историческим в развитии металлического советского самолетостроения: впервые в стране был создан цельнометаллический самолет. В 1926 г. в ЦАГИ был сделан АНТ-3, в 1929 г. – АНТ-4, позже – другие военные и гражданские самолеты. Налажено их серийное производство. В мае 1934 г. выпущен самолет вместимостью 70 пассажиров и 8 человек экипажа. Ученые института занимались также и народнохозяйственными задачами: создавали ветряные двигатели, турбины, принимали участие в строительстве гидростанций[2].

Работая в ЦАГИ, А.И. Некрасов часто бывал в научных командировках за границей. В 1934 г. он возглавлял советскую делегацию на XIV авиационной выставке в Париже. На приеме, устроенном учеными Франции, он рассказывал о ЦАГИ, работы которого демонстрировались на выставке.

На советском стенде были представлены самолеты "Сталь-2", Р-5, АИР-9, модель гондолы стратостата "СССР-1", экспонировались работы Экспериментально-аэродинамического отдела ЦАГИ: прибор для изучения штопора, многооборотные моторчики, модели гидросамолетов для испытания в гидроканале и др.

14 февраля 1935 г. А.И. Некрасов, А.Н. Туполев, И.И. Сидорин, А.А. Архангельский и др. были командированы на полгода в США с остановкой во Франции. В задачи этой группы входило изучение состояния самолетостроения в США, конструкций лучших американских самолетов и их оборудования, методов производства на авиазаводах, применяемых материалов, эксплуатации самолетов на воздушных линиях; ознакомление с авиационными научно-исследовательскими институтами и лабораториями. Члены комиссии по возвращении из США широко осветили в газетных и журнальных статьях состояние самолетостроения и авиационных научно-исследовательских институтов и лабораторий США[3].

Руководство ЦАГИ придавало большое значение подготовке кадров. Этому вопросу А.И. Некрасов посвятил статью "ЦАГИ и подготовка высококвалифицированных кадров". В 1932 г. в ЦАГИ была организована аспирантура, которую возглавил М.А. Лаврентьев.

13 февраля 1935 г. приказом по ЦАГИ в соответствии с решением Совнаркома от 13 января 1934 г. был создан специальный Совет ЦАГИ для проведения защиты докторских и кандидатских диссертаций. В со-

[1]Дело А.И. Некрасова [Текст] // в сб. "Материалы архива научно-мемориального музея Е.Н. Жуковского". – С. VIII.
[2]К пятнадцатилетию ЦАГИ: обзор деятельности института // Фронт науки и техники. – 1933. – № 12. – С. 20.
[3]Дело А.И. Некрасова [Текст] // в сб. "Материалы архива научно-мемориального музея Е.Н. Жуковского". – С. IX.

став этого Совета вошли Н.М. Харламов (председатель), С.А. Чаплыгин (зам. председателя), А.Н. Туполев, Л.С. Лейбензон, В.В. Голубев, М.А. Лаврентьев, А.И. Некрасов и др. В 1937 г. Александр Иванович был заместителем председателя Ученого совета ЦАГИ, который был создан 10 октября этого года “для заслушивания и оценки научно-исследовательских работ, выполненных сотрудниками ЦАГИ для представления в ВАК на соискание ученых степеней и выполненных ими плановых научно-исследовательских работ Института”. Председателем Ученого совета стал С.А. Чаплыгин, в его состав также вошли В.П. Ветчинкин, В.В. Голубев Н.Е. Кочин и др. В этом же году А.И. Некрасов работал в комиссии по рассмотрению работ, представляемых ЦАГИ на конкурс молодых научных работников, в которую также вошли С.А. Чаплыгин, В.В. Голубев, Г.Х. Сабинин и А.А. Уманский.

Постановлением ВАК по делам высшей школы при СНК СССР от 23 мая 1937 г. и приказом по ЦАГИ № 132, Р2 от 29 июня 1937 г. А.И. Некрасов был утвержден в ученом звании профессора по специальности “теоретическая механика”[1].

С каждым годом производственные мощности ЦАГИ росли. В ноябре 1935 г. была произведена закладка корпуса малых труб института, на которой присутствовали начальник ЦАГИ Н.М. Харламов, его заместитель А.Н. Туполев, А.И. Некрасов, а также секретарь райкома ВКП(б) Брандт, Н.В. Бабушкин, инженерно-технические работники, рабочие ЦАГИ и строители. Перед началом закладки был проведен митинг.

А.И. Некрасов всегда принимал активное участие в научных конференциях, проводимых в ЦАГИ. В мае 1936 г. он вместе с С.А. Чаплыгиным, А.Н. Крыловым и Н.А. Соколовым входил в состав президиума конференции по волновому сопротивлению, которая состоялась в институте. Докладчиками на этой конференции были Л.И. Седов, М.В. Келдыш, Н.Е. Кочин, Л.Н. Сретенский и др.[2].

В 1936 г. коллектив, руководимый А.Н. Туполевым, был выделен из ЦАГИ в отдельное Опытно-конструкторское бюро (завод № 156).

В 1938 г. А.И. Некрасов был необоснованно осужден по ст. 58, о чем ранее умалчивалось, но в 1943 г. досрочно освобожден. Будучи в командировке в США, попал в автомобильную аварию и еле выжил. Вернулся назад инвалидом, на родине узнал, что он агент ФБР, за что и получил срок.

Будучи под арестом с января 1938 по август 1943 г., А.И. Некрасов работал в ЦКБ-29-НКВД и занимался научными исследованиями, связанными с авиационной техникой и оборонной промышленностью; выполнил более 64 работ, которые имели важное практическое значение[3]. Наиболее интересные из них были опубликованы посмертно во втором томе Собрания сочинений [1]. Перечень работ А.И. Некрасова (64 названия) и его неопубликованные труды, выполненные им в это время, хранятся в Научно-мемориальном музее им. Н.Е. Жуковского.

После освобождения в августе 1943 г. А.И. Некрасов продолжил свою работу на кафедре теоретической механики МГУ, а также в Опытно-конструкторском бюро А.Н. Туполева (которое располагалось в бывшем здании ЦКБ-29-НКВД).

Этот коллектив со дня основания института создавал разнообразные конструкции самолетов с высокими летными характеристиками. С 1943 по 1949 г. А.И. Некрасов – ученый-специалист и начальник теоретическо-расчетной бригады завода № 156 (выписка из приказа № 408 от 21 октября 1943 г. по заводу № 156 ОКБ НКАП), с 1949 по 1955 г., – научный консультант Опытно-конструкторского бюро академика А.Н. Туполева. В 1930-1940-е годы среди профессоров и студентов механико-математического факультета Московского университета ходила крылатая фраза: “Самолеты Туполева появляются на кончике пера А.И. Некрасова”.

Долгое время А.И. Некрасов работал в Институте механики АН СССР: в 1944 г. он был назначен старшим научным сотрудником института, а с 1945 г. и до конца своей жизни заведовал отделом аэрогидромеханики. Он говорил: “Большой институт – это такой, где малое число сотрудников решает весьма серьезные проблемы”.

В 1946 г. он был избран действительным членом АН СССР по отделению технических наук. В тот же день академиками были избраны М.В. Келдыш и М.А. Лаврентьев.

Работу в Московском университете и Институте механики А.И. Некрасов вел до последних дней своей жизни. Александр Иванович скончался 21 мая 1957 г.

Правительство, высоко оценив деятельность Александра Ивановича, наградило его в 1945 г. орденом Трудового Красного Знамени, в 1953 г. А.И. Некрасов был награжден орденом Ленина; медалями Советского Союза: “За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941-1945 гг.” (1946 г.). В 1947 г. он был удостоен звания заслуженного деятеля науки и техники РСФСР за выдающиеся заслуги в области развития авиационной техники. В 1952 г. А.И. Некрасову присуждена Государственная (Сталинская) премия СССР II степени за работы по теории волн конечной амплитуды.

Библиографический список

1. *Некрасов, А.И.* Собрание сочинений [Текст] в 2 т. / М.: Изд-во АН СССР, 1961-1962.
2. *Волгина, В.Н., Тюлина, И.А.* Александр Иванович Некрасов [Текст] / М.: Наука, 2001.

[1]Дело А.И. Некрасова [Текст] // в сб. “Материалы архива научно-мемориального музея Е.Н. Жуковского”. – С. X.
[2]Там же. С. X.
[3]Дело А.И. Некрасова [Текст] // в сб. “Материалы архива научно-мемориального музея Е.Н. Жуковского”. – С. 1.

3. Центральный аэрогидродинамический институт: итоги научно-исследовательской и производственной работы за 15 лет [Текст] // Научно-техническое обслуживание тяжелой промышленности. – М.-Л.: НКТП, 1934. – С.122-130.

Элиаким Гастингс Мур – основатель первой американской математической школы

В.Г. Алябьева

В 2012 году исполняется 150 лет со дня рождения выдающегося американского математика Элиакима Гастингса Мура (Eliakim Hastings Moore (1862-1932) – основателя первой американской математической школы.

Звёздный час для Мура настал в 1893 году. В этом году Мур был президентом Международного математического конгресса, проводимого в США в рамках Всемирной выставки.

В последней четверти XIX века США превратились в могучую индустриальную державу. К 1894 году страна занимала первое место в мире по объёму промышленной продукции. Однако накопление материальных богатств сопровождалось слабой "интеллектуальной активностью". Развитие наук в США отставало от европейского уровня и от потребностей американской жизни. Журнал "Nation" признавал, что *американцы постыдно мало способствовали развитию мировой мысли.* Правительство страны и администрация штатов стали проявлять обеспокоенность неудовлетворительным развитием науки в стране, стали поддерживать реформаторские проекты в сфере высшего образования. В стране стали открываться новые университеты. Если до Гражданской войны 1861-1865 года решающее влияние на развитие высшей школы США оказывали французские, особенно английские, институты, то после Гражданской войны усилилось влияние немецких университетов. Проявлением этого влияния было открытие в 1876 году университета Джона Гопкинса в Балтиморе – первого университета США, воспринявшего многие черты немецкого университета. Главной из этих черт явилось создание исследовательских центров при университете, где сообща вели научную работу преподаватели, аспиранты, студенты. Эти центры в США получили название *аспирантских школ искусств и науки* (Graduate schools of Arts and Science). Университет Джона Гопкинса утвердил понятие "*университетский профессор*", то есть профессор-исследователь. Первым президентом университета Джона Гопкинса был Д.К. Гилман (1831-1908), который много сделал для становления этого исследовательского центра в Балтиморе. Гилман поставил задачу собрать в университетский центр самых способных преподавателей и студентов. Так, к созданию кафедры математики он привлёк известного английского математика Дж.Сильвестра. Артур Кэли приезжал в Балтимор с лекциями об абелевых и тэта-функциях. Одним из учёных, которому предлагалась кафедра математики в университете Джона Гопкинса, был Феликс Клейн, но он предпочёл Гёттинген. Через 10-20 лет после открытия университета Джона Гопкинса его выпускники заняли ведущие позиции в науке, политике, бизнесе. В 1896 году в Гарварде работало 10 профессоров из Балтимора, в Колумбийском университете – 13, в университете Висконсин – 19. Общим правилом для университета был свободный выбор студентами учебных дисциплин со специализацией в одной из них. Среди фундаментальных исследований в конце XIX века выдвинулись исследования по физико-математическим наукам. К достижениям этого времени относится работа Бенджамина Пирса из университета Гарварда по линейным ассоциативным алгебрам.

В 1892 году был открыт университет в Чикаго, воспринявший черты университета нового типа, подобно университету Джона Гопкинса. Открытие университета в Чикаго сопровождалось значительными событиями, получившими мировую известность.

В 1893 году в Чикаго проводилась Всемирная выставка, посвящённая 400-летию открытия Америки, призванная продемонстрировать всему миру индустриальную мощь Соединённых Штатов. В программу выставки были включены конгрессы и конференции, в том числе и математический конгресс. Однако на этом конгрессе кроме американских учёных (их было около 40), присутствовало лишь несколько европейцев. Среди европейцев был Феликс Клейн, который привёз доклады немецких учёных. Математический конгресс и по истечении времени продолжал именоваться международным, но не получил порядкового номера. Доклады конгресса (13 американских авторов, 16 – немецких, 3 – французских и итальянских) были опубликованы в 1896 году Американским математическим обществом. Блестящим организатором конгресса был Элиаким Гастингс Мур. Э.Г. Мур был президентом конгресса, совместно с Генрихом Машке и Оскаром Больца входил в состав редакционного комитета по изданию трудов конгресса. Мур со временем стал видной фигурой в математике. Он и его ученики: Л.Диксон, О.Веблен, Г.Биркгоф, - составили славу американской математической науки. В университет Чикаго Мур был приглашён в качестве профессора математики в 1892 году (и оставался в этой должности до конца своих дней).

Биографическая справка. Э.Г. Мур родился 26 января 1862 года в Мариетте, штат Огайо, умер в Чикаго 30 декабря 1932 года. Мур является создателем американской математической школы. Он проявил себя как глубокий исследователь и как умелый организатор науки. Его научные интересы относились к геометрии, теории групп, теории чисел, теории функций, интегральным уравнениям (русскому читателю Мур известен как специалист по функциональному анализу, или, как говорили во времена Мура, общему анализу). Мур возглавлял чикагскую секцию Нью-Йоркского математического общества, созданного в 1888 году. Благодаря его усилиям, общество было реорганизовано в общенациональное Американское математическое общество (что отчасти было связано с проведением международного математического конгресса). До 1899 года Американское математическое общество издавало единственный журнал "*Bulletin of the American Mathematical Society*". Мур первым предвидел крутой рост математических исследований в Америке и связанную с этим необходимость в дополнительном журнале, посвящённом исключительно исследовательской работе. С 1899 года такой журнал стал издаваться, он издаётся до сих пор и называется "*Transactions of the American Mathematical Society*". Мур был первым редактором "Transactions" и оставался им до 1907 года.

Мур окончил университет Йеля в 1885 году (правда, университетом колледж Йеля стал именоваться с 1887 года). Во времена студенчества наибольшее влияние на Мура оказал профессор Хьюберт Ньютон (Hubert Newton, 1830-1896), который во время своей европейской стажировки слушал в Сорбонне лекции М.Шаля по высшей геометрии. После окончания университета в Йеле Мур продолжил обучение в Европе. Летом 1885 года Мур прибыл в Гёттинген, где учил немецкий язык и слушал лекции Г. Вебера, Г. Шварца. Зимой 1885-86 года Мур переехал в Берлин, где читали лекции по математике К. Вейерштрасс и Л. Кронекер. Поездка в Европу была значительным событием в жизни молодого американского учёного. В кругу европейских математиков Мур зарекомендовал себя способным исследователем. Для американских коллег он стал человеком, из первых рук познавшим европейскую (в частности, немецкую) математику. Сам испытавший глубокое уважение к немецкой науке, Мур и своим ученикам прививал уважение и дружеский интерес к немецкой математике. По возвращении в Соединённые Штаты молодой Мур преподавал в Йеле, четыре года в Северо-Западном университете, с осени 1892 года стал работать профессором математики в Чикаго. По предложению Мура для работы в университете Чикаго были приглашены немецкие математики Оскар Больца (Oskar Bolza, 1857-1942) и Генрих Машке (Heinrich Maschke, 1853-1908). Больца – воспитанник немецкой школы анализа Вейерштрасса. Его основные научные интересы относились к вариационному исчислению, а также к теории эллиптических и гиперэллиптических функций (в вариационном исчислении известна одна из основных задач – задача Больца). С 1888 года Больца работал в Соединённых Штатах: преподавал в университете Джона Гопкинса, с 1893 года работал профессором математики в Чикаго, в 1910 году вернулся в Германию. Генрих Машке – выдающийся исследователь и превосходный лектор по геометрии. Мур, Больца, Машке прекрасно дополняли друг друга. Благодаря их усилиям университет в Чикаго с 1892 года по 1908 год был непревзойдённым университетом США по обучению высшей математике. С 1899 года в университете Чикаго работали выдающиеся ученики Мура: сначала – Л. Диксон, затем – О. Веблен, Г. Биркгоф. Мур был поглощён исследовательской и преподавательской деятельностью. Современники отмечали жизнелюбие Мура, его необыкновенную увлечённость математикой. В лекционной комнате профессор Мур мог часами беседовать со студентами, обсуждая какую-нибудь математическую тему, дискуссия не прекращалась даже во время еды. Молодёжь тянулась к профессору Муру, охотно занималась под его руководством математическими исследованиями. За период с 1896 по 1929 год 30 человек под руководством Мура получили докторские степени. Широта научных интересов Мура, высокие требования к математической строгости служили вдохновляющим примером для его учеников.

Леонард Юджин Диксон (Leonard Eugene Dickson, 1874-1954) – выдающийся американский математик, его научные интересы относились к алгебре, теории чисел и истории теории чисел. Им написано 280 статей, опубликовано 18 книг, наиболее известен его трёхтомник "История теории чисел". Диксон окончил университет в Техасе, получил диплом магистра в 1894 году, продолжил учёбу в университете Чикаго, где в 1896 году стал первым доктором математики. Его научным руководителем был Е.Г. Мур. После защиты докторской диссертации Диксон в течение года стажировался в университетах Парижа и Лейпцига, на всю жизнь сохранив любовь ко всему французскому. Возвратившись из Европы в Соединённые Штаты, Диксон в 1899 году был приглашён для работы в университет Чикаго, где проработал до конца своей математической карьеры, порой отлучаясь для чтения лекций в качестве приглашённого профессора. В период до 1925 года Л.Ю. Диксон был самым влиятельным алгебраистом страны.

Освальд Веблен (Osvald Veblen, 1880-1960) учился в университетах Айовы, Гарварда, Чикаго. В Чикаго он слушал лекции О. Больца, Г. Машке, Е. Мура. Докторская диссертация Веблена 1904 года выполнена под руководством Е.Г. Мура. Проработав два года в Чикаго, Веблен переезжает в Принстон. С 1905 года по 1932 год он работает в университете Принстона. Веблен был одним из основателей Института перспективных исследований в Принстоне и руководил Институтом с 1932 по 1950 год. Веблен занимался главным образом топологией. Под его руководством Принстон превратился в один из лучших мировых центров по топологии. По знаменитой книге Веблена “Analysis situs” училось несколько поколений математиков.

В научном творчестве Мура можно выделить четыре периода, в течение которых доминировали его интересы к различным разделам математики. Первые 7 лет научной деятельности Мур преимущественно занимался геометрией. Последующие 10 лет – теорией групп и сопутствующими ей темами, в том числе тройками Штейнера. Шесть лет Мур посвятил классическому анализу, интегральным уравнениям. Последние 12 лет Мур занимался общим (функциональным) анализом.

Остановимся на вкладе Мура и его учеников в развитие дискретной математики. Их результаты относятся к конечным группам, конечным алгебрам и конечным геометриям, к конечным комбинаторно-геометрическим конфигурациям.

Мур рано начал интересоваться теорией групп, к которой он возвращался в своей жизни не раз. Ему и его ученику Л. Диксону принадлежит современное определение группы: ***группа*** есть совокупность элементов, обладающих следующими свойствам. Элементы группы по известному закону могут перемножаться, произведение элементов вновь принадлежит группе. Это символическое умножение элементов подчинено сочетательному закону. В группе существует один и только один единичный элемент, при умножении на который справа и слева ни один элемент группы не изменяется. Всякий элемент a группы имеет один и только один обратный элемент a^{-1} такой, что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Уравнения $ay = b$ и $ya = b$, где a, b – элементы одной группы, имеют по одному решению, принадлежащему группе.

Изначально в теории групп Мур стоял на абстрактной точке зрения, именно, исходил из аксиоматического определения группы, не зависящего от вида элементов, содержащихся в группе. Такая точка зрения восходит к Кронекеру и Дедекинду. Теории групп посвящены первые статьи Мура 1892 и 1893 года. В статье 1892 года “О конгруэнц-группах порядка 360, содержащихся в группе дробно-линейных подстановок” он получил следующий результат. Если q есть простое число, превосходящее 3, то группа модулярного уравнения преобразований эллиптических функций порядка q состоит из всех дробно-линейных преобразований одного переменного, имеющего коэффициенты из поля Галуа $GF[q]$ с определителем, равным 1. Более общий случай, когда q равно степени простого числа, рассмотрен Муром в статье “О дважды бесконечных системах простых групп” [2]. В этой статье Мур доказал, что *любое конечное поле есть поле Галуа.* Этот результат он сообщил в докладе, прочитанном на Международном математическом конгрессе в 1893 году. В более поздней статье 1903 года “Подгруппы обобщённой конечной модулярной группы” Мур нашёл все подгруппы обобщённой модулярной группы. Автоморфизм (конечной) группы (Мур называет его голоэдрическим изоморфизмом) Мур определил в статье 1894 года “Группа голоэдрических преобразований группы в себя” как подстановку элементов группы, которая сохраняет таблицу умножения группы (сейчас говорят “сохраняет групповую операцию”). Независимо от Мура это определение дал в Германии в 1893 году Отто Гёльдер (Otto Ludwig Hölder, 1859-1937). В статье 1895 года “О жордановых линейных группах” Мур, рассмотрев абелеву группу порядка p^n типа (1,1,. . . ,1) доказал, что её группа автоморфизмов является группой линейных однородных преобразований от n переменных с коэффициентами из $GF[q]$, исследованная К. Жорданом в “Трактате о подстановках”. Терминология, используемая Муром, восходит к Жордану: отображение φ группы G в группу G', при котором в каждый элемент $x' \in G'$ отображается n элементов из G, Жордан назвал мероэдрическим изоморфизмом. О.Ю. Шмидт в своей монографии 1916 года “Абстрактная теория групп” [1], явившейся первой книгой на русском языке по абстрактной теории групп и одной из первых книг в мире по этой тематике после монографии Сегье (J.A. Séguier, “Элементы абстрактной теории групп”), называет такое отображение $n-$кратным гомоморфизмом. Изоморфизм групп Жордан называл голоэдрическим изоморфизмом. При этом Жордан не требовал явно, чтобы при изоморфизме сохранялась групповая операция, хотя во всех его примерах это требование выполнялось. Шмидт, как и Жордан, не различал гомоморфизм φ и обратное ему отображение φ^{-1}. Термин “гомоморфизм” ввёл Ф. Клейн в 1893 году.

В 1897 году Мур построил группы, изоморфные симметрической и знакопеременной группам подстановок, в 1898 году доказал теорему: “*Любая конечная группа линейных преобразований от n переменных имеет эрмитов инвариант*”. Если к положительной эрмитовой форме применить все преобразования некоторой группы G, затем сложить все результирующие формы, то сумма будет инвариантна относительно G. Эта теорема, независимо от Мура, была открыта А. Лёви (A. Loewy, 1873-1935) и Фуксом (L. Fuchs, 1833-1902). Всего с 1893 по 1905 год Мур опубликовал 12 статей по теории групп, в том числе, хорошо известную статью 1902 года “Определение абстрактных групп”.

С теоретико-групповыми работами Мура тесно связаны его исследования тактических конфигураций. Так, в работах 1894-95 гг. Мур нашёл тактические инварианты для линейной, однородной линейной и дробно-линейной групп. Четыре статьи Мура посвящены системам троек Штейнера, т.е таким распределениям n элементов в неупорядоченные тройки, что каждая пара элементов появляется точно в одной тройке. Для $n = 7$ существует единственная система троек $abc, adr, ast, bds, brt, cdt, crs$ из элементов a, b, c, d, r, s, t. Мур вычислил порядок группы автоморфизмов этой системы троек, равный 108, доказал простоту и дважды транзитивность этой группы. Заметим, что, если элементы троек считать точками, а тройки – прямыми, то система троек образует проективную плоскость второго порядка.

В 1895 году Мур читал курс лекций "Группы" в университете Чикаго. Слушателями этого курса были Диксон, Слот (Slaugt), Яффе (Yaffe) – будущие известные математики США.

В 1896 году Мур опубликовал большую статью "Tactical memoranda" [3], явившуюся подлинным гимном тактическим разделам математики. В этой статье Мур даёт определение тактической конфигурации. К этому времени в геометрии К.Т. Рейе (Karl Theodor Reye, 1838-1919) определил *геометрическую* конфигурацию, элементами которой являются геометрические образы: точки, прямые, плоскости. Так, плоская конфигурация (n_i, g_k) содержит n точек и g прямых, отношение инцидентности для которых удовлетворяет следующим требованиям: 1) через каждую точку проходит i прямых, 2) на каждой прямой лежат k точек. *Тактическая* конфигурация, согласно Муру, состоит из n множеств, содержащих, соответственно, $k_1, k_2, ..., k_n$ элементов. Для любой пары множеств (a_i, a_j) выполняется условие: любой элемент a, где $a \in a_i$, инцидентен с a_{ij} элементами из множества a_j. Мур подчёркивает плодотворность понятия тактической конфигурации и приводит примеры всевозможных систем математических объектов, которые можно воспринимать как тактические конфигурации. К таковым относятся сочетания, размещения, системы Штейнера, геометрические конфигурации, конечные группы.

Мур ввёл системы, обозначенные им через $S[k, l, m]$, $m \geq k \geq l$, состоящие из k–сочетаний заданного m–элементного множества, при этом каждое $l-$сочетание входит в одно и только одно $k-$сочетание. Число $k-$сочетаний в $S[k, l, m]$ равно

$$\frac{m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (m-l+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (k-l+1)}.$$

К этим системам обратился в 1938 году Э. Витт в статье "О системах Штейнера". Витт назвал системами Штейнера системы $S[k, l, m]$ Мура, обозначил их через $S(l, k, m)$ и пояснил, что вводит термин "системы Штейнера" по той причине, что Штейнер строил подобные системы. Термин "системы Штейнера" утвердился в математической среде. Изучению свойств систем Штейнера, поиску неизоморфных систем, нахождению их групп автоморфизмов посвящались в XX веке многочисленные статьи. Авторов не заботил тот факт, что системы Штейнера определил не Штейнер. Как об удивительном факте сообщал в 1984 году известный специалист в области блок-схем Х. Ханани в статье "Об изначальных системах Штейнера", что Штейнер в "Комбинаторных задачах" ввёл не те системы, которые сейчас называют штейнеровыми. Ханани, однако, не сообщает, кто ввёл штейнеровы системы.

Теоретико-групповые и тактические исследования Мура продолжили его ученики, прежде всего Л. Диксон и О. Веблен.

Диксон обобщил результаты Галуа, Жордана, Серре, относящиеся к линейным группам простого порядка до групп над произвольным конечным полем. Он дал первое обширное изложение теории конечных полей, одновременно с Уэддербёрном (J.H.M. Wedderburn, 1862-1948) доказал, что *любое конечное тело есть поле.* В большой статье 1905 года "О конечных алгебрах" [4] Диксон исследовал независимость постулатов конечного поля и построил два типа конечных алгебр, для которых не выполняются некоторые постулаты поля. Одна алгебра – с делением, в ней умножение некоммутативно и верен правый дистрибутивный закон умножения относительно сложения. Диксон доказал, что если $(p^n - 1)$ и n не взаимно просты (p – простое число), то существует по крайней мере одна некоммутативная алгебра с p^n элементами. Над алгеброй Диксона с 9 элементами Веблен и Уэддербёрн построили недезаргову проективную плоскость. Исследования Диксона некоммутативных алгебр продолжил в 1935 году Ганс Цассенхауз (Hans Zassenhaus, 1912-1991). Если Диксон показал, что коммутативность умножения и коммутативность сложения конечной алгебры с делением являются следствиями из остальных аксиом и что ни один из дистрибутивных законов не зависит от остальных аксиом поля, то Цассенхаус перечислил все возможные алгебры с делением, в которых выполняется лишь один из дистрибутивных законов, например, левый. Цассенхаус назвал такие алгебры почти-полями и в статье "О конечных почти-полях" [5] дал общий метод их построения. Кроме почти-полей, которые можно получить методом, предложенным Цассенхаусом, есть ещё семь особых почти-полей порядков p^2, где $p = 5, 7, 11, 23, 29, 59$, построенных Диксоном. В 1967 году Дональд Пассман (Donald Passman) доказал, что иных конечных почти-полей нет.

Библиографический список

1. *Шмидт, О.Ю.* Абстрактная теория групп [Текст] / О.Ю. Шмидт // Избранные труды. Математика. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – Т. 1. – С. 17-175.
2. *Moore E.H.* A doubly-infinite system of simple groups / Mathematical Papers Read of the International Mathematical Congress in Chicago 1893, published by MacMillan. 1896. P. 208-242.
3. *Moore E.H.* Tactical memoranda, I-III // American Journal of Mathematics / 1896. V. 18. P. 264-303.
4. *Dickson L.E.* On finite algebras // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften der Georg-August-Universität zu Göttingen. 1905. S. 358-393.

5. *Zassenhaus H.* Über endliche Fastkörper // Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 1935. Bd. 11. S. 187-220.

“Маджма‘ ал-аркам” – источник по истории точных наук Средней Азии XVIII-XIX веков

М.Ш. Холов

“Маджма‘ ал-аркам” (“Собрание цифр”) Мирзы Бади‘-Дивана [1] является редким и ценным источником по истории позднесредневековой Средней Азии. Рукопись состоит из пяти глав. Первая глава посвящена государственной службе. Вторая и третья главы посвящены правилам составления финансовых документов. Четвертая глава посвящена математике: арифметике, алгебре и геометрии. Пятая глава посвящена астрономии и содержит таблицы арифметических действий с градусными делениями по принципу действий с шестидесятиричными дробями [1, 79б-83а].

“Маджма‘ ал-аркам” представляет особую ценность для истории математики в Средней Азии, так как помогает внести ясность в вопрос о состоянии точных наук в XVIII-XIX веков, т.е. в период, остающийся наименее исследованным. Этот труд подтверждает, что в Средней Азии XVIII-XIX веков математика носила, в основном, прикладной характер. Она находила применение в экономической жизни общества и развивалась в тесной связи с другими практическими науками.

Математика занимает настолько большое место в рукописи, что иногда ее относят к разряду математических трактатов. Поскольку чиновникам канцелярии Бухарского эмирата, занимавшимся финансами государства, связанными с налоговыми поступлениями, оплатой труда чиновников, духовенства, распределением пожалований, разделом имущества и наследства, чеканкой монет и др., необходимо было знание математики и других точных наук, автор приводит обширные сведения по арифметике, алгебре, геометрии, астрономии, хронологии, метрологии, монетному делу.

Автор не указывает, откуда он заимствовал материал по математике, однако по традиционности изложения “Маджма‘ ал-аркам” примыкает к математическим трудам ал-Хорезми (783-850), ал-Бузаджани (940-998), Насирэддина Туси (1201-1274), Гиясиддина Каши (1380-1429), Алоуддина Кушчи (1403-1474), Бахауддина Амили (1546-1621) и других таджикских ученых.

В предисловии к сочинению отмечается необходимость “илм-и хисаб” (“науки исчисления”) в практической жизни людей. Сочинение дает представление об объеме математических знаний людей, занятых финансовыми и налоговыми расчетами. В сочинении разъясняются правила арифметических действий с целыми числами и дробями: сложение, вычитание [1, 25а-34а], умножение, деление [1, 42б-45б], удвоение, раздвоение, извлечение корней и возведение в степень. Известно, что в средневековой арифметике удвоение и раздвоение рассматривались как самостоятельные арифметические действия.

Разъясняется несколько способов извлечения квадратного корня из целых чисел и дробей [1, 55а-58а]. Один из них – это способ, описанный таджикским ученым Абулхасаном Насави (1010-1075) в трактате “Достаточное об индийской арифметике”, а позднее Гиясиддином Каши в “Ключе арифметики”. Второй способ основан на применении таблиц; приводятся правила и таблицы извлечения квадратного и кубического корней. В конце раздела говорится, что: “Таким же образом поступают с другими степенями, как квадрато-квадрат, квадрато-куб и так до бесконечности” [1, 61а]. Это означает, что автор был знаком и с извлечением корней любой степени. Эти правила извлечения корней относятся только к рациональным числам. Что касается корней из иррациональных чисел, то автор считает их недействительными.

Умножение чисел производилось по таблице [1, 42б], основанной на буквах абджада и изложенной в стихах.

Сведения по геометрии заключают в себе ряд правил, в основном верных, для вычисления площадей треугольников, четырехугольников, поверхностей и объемов шара, цилиндра, конуса [1, 45б-50а]. Поскольку вычисление площадей треугольников и четырехугольников приводится в основном в целях измерения земельных площадей, то в некоторых случаях автор приводит лишь приближенный результат. Например, он приводит такое определение площади четырехугольника: “Сложив западную и восточную его стороны и разделив пополам, умножают на половину суммы южной и северной сторон” [1, 46а].

Термины “площадь” и “объем” не дифференцированы; оба понятия передаются одним словом – мисахат. Поэтому определить, в каком значении слово употреблено, можно только по контексту.

Раздел сочинения, касающийся алгебры, начинается с изложения двадцати одного довода (асас), на которых автор основывает теорию линейных и квадратных уравнений [1, 58а-62а]. Эта теория применяется на многочисленных примерах раздела наследства.

Автор не только излагает материал, содержащийся в математических трактатах, но пытается также “критически” истолковать его, нередко подвергая сомнению отдельные положения. Так, он не согласен с существующим правилом извлечения корней из дробных чисел: “[Извлечение] квадратного корня из дробного числа в трактатах по счету излагают так. Из требуемой части (числитель дроби) извлекают корень; извлекают корень также из знаменателя. [Первый] корень относят к корню упомянутого знаменателя. Однако такое действие не удовлетворило [меня], ничтожного и неопытного. [Мне] ничтожному стало очевидно лишь то, что знаменатель изменять не надо; [первый] корень числа следует соотнести [непосредственно] к знаменателю. Например, по моему мнению, корень числа $\frac{9}{16}$ есть число $\frac{3}{16}$. Но, исходя из трактатов, [должно] получится $\frac{3}{4}$".

Раздел астрономии начинается с приведения цифр с 1 по 60 и их обозначение арабскими буквами. Далее говорится, что круг делится на 12 частей (бурдж), каждый бурдж равен 30°, каждый градус равен 60 минутам, минута равна 60 секундам, секунда равна 60 терциям и т.д. Приведены примеры на четыре арифметических действия для решения астрономических задач.

Библиографический список

1. *Мирза Бади'-Диван.* Маджма' ал-аркам. [Текст] / Рукопись Национальной библиотеки им. Фирдоуси, № 649.

"Рисала дар илми мисахат" ("Трактат о науке измерения") – геометрический труд Бахауддина Амили

М.Ш. Холов

Наследие ученых-математиков Средневекового Востока VIII-XV веков изучено достаточно [1], чего нельзя сказать о математических трудах XVI-XIX веков. Одним из ярких представителей ученых XVI-XVII веков является персидско-таджикский математик, астроном, философ, законовед и поэт Бахауддин Амили (1546-1621), который внёс значительный вклад в развитие математических наук средневекового Востока. Им написано множество трудов по арифметике, алгебре, геометрии, в том числе: "Хуласат ал-хисаб" ("Сущность арифметики"), "Илм ал-хисаб" ("Наука арифметики"), "Рисала фил-каваид ал-хисабия вад-далаил ал-хандасия" ("Трактат об арифметических правилах и геометрических указаниях"), "Рисала дар хисаб" ("Трактат об арифметике"), "Манзума ашкал ат-тасис йа урджуза фил-хандаса" ("Предложения обоснования в стихах или поэма о геометрии"), "Рисала дар илми мисахат" ("Трактат о науке измерения"), "Рисала дар нисбати иртифои джибал" ("Трактат об отношении высоты горы"), "Таликат ала ал-боб ас-самин фил-джабр вал-мукабала" ("Примечание к восьмой главе об алгебре и ал-мукабале"), "Бахр ул-хисаб" ("Море арифметики") и другие, некоторые копии которых хранятся в Рукописном фонде Института языка, литературы, востоковедения и письменного наследия АН Республики Таджикистан им. Рудаки (№ 1611/3, № 1611/4) и Национальной библиотеке Республики Таджикистан им. Фирдоуси (№ 931, 1239, 1260/2, 1788, 1836/2).

Книга Бахауддина Амили "Трактат о науке измерения" состоит из введения и трех разделов. Она начинается с определения геометрии и ее основных понятий "... искусство измерения состоит в отыскании, сколько раз заключается в непрерывной пространственной величине линейная единица или ее части, или оба вместе, если это есть линия; или же сколько заключается квадратных единиц, если это есть поверхность; или сколько кубических единиц, если это есть тело [2, с. 67-71].

По определению Б. Амили линия есть величина одного измерения, прямая линия есть кратчайшая из всех, которая может быть проведена между двумя точками. Далее, автор переходит к определению кривой линии, круга, плоскости, дуги, диаметра, хорды, сегмента.

При определении сектора Б. Амили обращает внимание на то, что если провести к центру круга два радиуса, образуются два сектора, один с большой дугой и другой с меньшей. Затем он дает определение фигур, образованных дугами круга (чечевицеобразной, подковообразной и т.п.) и других фигур.

После этих он переходит к прямолинейным фигурам, из числа которых он упоминает треугольник, квадрат, трапецию, ромб, прямоугольник и ромбоид. Трапецию он разделяет на два прямых угла, один тупой и один острый; ко второму виду принадлежат трапеции, у которых два острых и два тупых угла. Кроме того, он упоминает еще фигуру, которую он называет "огурец", но об этой фигуре нет никаких указаний, а потому о виде ее ничего не известно. Из многоугольников рассматривает многоугольники с пятью, шестью,..., и двенадцатью сторонами. Все эти фигуры он рассматривает также и для случая, когда все стороны равны, т.е. правильные многоугольники. Для некоторых многоугольников вводит особые названия, как например: ступенеподобная, барабаноподобная и острозубчатая фигура.

После этих определений, во втором разделе он излагает правила вычисления площадей плоских фигур. Площади треугольников он находит, используя методы, равносильные методам ал-Каши и ал-Кушчи.

Для нахождения высоты h ΔABC дано следующее правило: если стороны треугольника a, b и c, причем a больше сторон b и c, то растояние x вершины B от основания h выражается формулой:

$$x = (a^2 - b^2 + c^2) : 2c.$$

Соединив эту точку с вершиной A треугольника, получим высоту h, а по теореме Пифагора находим её значение.

Далее даны правила для нахождения площадей квадрата, прямоугольника и ромба. Площади правильных шестиугольников, восьмиугольников и вообще многоугольников с четным числом сторон, он находит умножением половины их периметра на половину диагонали, соединяющей две противоположные вершины. Все другие многоугольники он делит на треугольники и затем находит площадь каждого треугольника отдельно. В современной символике первый его способ приводит к формуле:

$$S = d^2 - (\frac{d^2}{7} + \frac{d^2}{14}).$$

Если эти выражения сравним с формулой $S = \pi R^2$, то увидим, что автор принимает $\pi = 22{:}7$.

Из вышеуказанного утверждения он делает вывод, что круг равновелик прямоугольному треугольнику, у которого катетами являются длина окружности и радиус данного круга.

Третий раздел работы Б. Амули посвящен вычислениям площади поверхности и объемов тел. Для вычисления площади поверхности шара он также дает три способа. Правила, которые дает Б. Амули для вычисления площади поверхности шара, в современной символике имеют следующий вид:

1. $S_{\text{шар}} = 2\,lR$.
2. $S_{\text{шар}} = \frac{22}{7}d^2$.
3. $S_{\text{шар}} = 4[d^2 - (\frac{1}{7}d^2 + \frac{1}{4}d^2)] = 16[R^2 - (\frac{R^2}{7} + \frac{R^2}{14})]$.

где R – радиус шара, d – диаметр и l – длина окружности большого круга.

Далее следуют правила для нахождения площади поверхностей шара, призмы, пирамиды, цилиндра, конуса. О площадях других фигур автор ничего не говорит, а только замечает, что он отыскивает их при помощи правил, указанных выше. Для нахождения объема шара Б. Амули дает несколько правил, из которых первое самое точное правило его выражено

$$V_{\text{шар}} = \frac{S(\text{шар})}{3} \cdot \frac{d}{2},$$

так как $S_{\text{шар}} = 2\,lR$ и $l = 2\pi R$, то

$$V_{\text{шар}} = \frac{2}{3}lR^2 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Другое правило для нахождения объема шара не вполне точное. Оно приводится к выражению:

$$V_{\text{шар}} = d^2\{(1 - \frac{3}{14}) - \frac{3}{14}(1 - \frac{3}{14}) - \frac{3}{14}[(1 - \frac{3}{14}) - \frac{3}{14}(1 - \frac{3}{4})]\} = (\frac{11}{14})^3 d^3 = (\frac{11}{14}d^3).$$

При $\pi = \frac{22}{7}$ формула примет вид:

$$V_{\text{шар}} = (\frac{\pi d}{4}d)^3.$$

Отсюда можно отметить, что Б. Амули принимал шар равновеликим кубу, сторона которого есть четверть большого круга. С другой стороны формулу Б. Амули можно представить в виде:

$$V_{\text{шар}} = \frac{1331}{2744}d^3 = \frac{4}{3}(\frac{7986}{2744})R^3 = \frac{4}{3}(\pi)R^3.$$

Следовательно, $\pi = \frac{7986}{2744} = 2{,}91$. Неточность этого выражения заметил Равшен алДжумбури, который дал для объема шара другое выражение, а именно:

$$V_{\text{шар}} = d^3[(1 - \frac{3}{14}) - \frac{1}{14}(1 - \frac{3}{4})] = \frac{4}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot R^3,$$

в котором $\pi = 22{:}7$.

Объем призмы и цилиндра Б. Амули вычисляет, умножая площади их основания на высоту. Точно так же он вычисляет объемы пирамиды и конуса – умножая площади их основания на треть высоты. Объемы усеченных конусов и пирамид автор находит вычитая из целой пирамиды или конуса верхнюю дополнительную пирамиду и конуса. Высоту полной пирамиды или конуса находит по известным высотам усеченных пирамид или конуса и по данным радиусам основания конуса и данным сторонам верхнего и нижнего оснований пирамид. Обозначая через R, r и h радиусы верхнего и нижнего оснований усеченного конуса и его высоту, по правилу Б. Амули найдем для высоты целого конуса H выражение:

$$H = \frac{h \cdot 2R}{2R - 2r} = \frac{hR}{R - r}.$$

Точно так же для пирамиды:

$$H = \frac{h \cdot a}{a - b},$$

где b – верхняя, a – нижняя сторона оснований и h – высота усеченной пирамиды.

Приведенные выражения были известны еще таджикским математикам Гиясиддину Кошони (1380-1429) и Алауддину Кушчи (1403-1474). Вероятно, что Б. Амули заимствовал их из сочинений этих ученных. Доказательство истинности приведенных выражений Б. Амули не приводит, они даны в виде известных правил. Автор только замечает, что "...Доказательство всех этих действий объяснены в моем большом сочинении под заглавием "Полный курс арифметики" окончание которого зависит от Бога" [л. 49а].

В заключение автор излагает метод практического применения геометрии к нивелировке земли для системы подачи воды, определению высоты предметов, нахождения ширины рек и глубины колодцев. При решении этих вопросов Б. Амули пользуется различными вспомогательными приборами, такими как зеркала, астролябия и др.

Библиографический список

1. *Матвиевская, Г.П.* Очерки истории тригонометрии. Древняя Греция. Средневековый Восток. Позднее Средневековье [Текст] / Г.П. Матвиевская. – Под ред. С.Х. Сираждинова. – Изд. 2-е. – М.: Книжный дом “Либроком”, 2012. – 160 с.
2. *Собиров, Г.* Математические и астрономические науки на Ближнем и Среднем Востоке в XV-XVIII вв. Средняя Азия, Иран, Турция, Северная Индия [Текст] / Г. Собиров. – Душанбе: “Деваштич”, 2011. – 200 с.

Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере

Г.И. Синкевич

Во второй половине XIX века продолжалась работа по упорядочению математического анализа, начатая Огюстеном Коши, и продолженная Карлом Вейерштрассом, Эдвардом Гейне, Георгом Кантором, Рихардом Дедекиндом и Шарлем Мере. В 1872 году у каждого из них вышли работы, связанные с арифметизацией анализа. Это лекции Вейерштрасса “Элементы арифметики”, изданные его учеником Е. Коссаком [10], статья Гейне “Элементы учения о функциях” [1, 9], “Непрерывность и иррациональные числа” Дедекинда [2], “Новый точный инфинитезимальный анализ” Шарля Мере [13].

Рис. 1. Портрет Шарля Мере

Рассмотрим здесь работы Шарля Мере, не получившие признания, но от этого не менее значимые.

Шарль Мере (Charles Méray) родился 12 ноября 1835 года в Chalon-sur-Safne, умер 2 февраля 1911 в Safne-et-Loire. В 11-летнем возрасте его отличало благоговейное отношение к математике, хотя учитель отмечал, что мальчик мало что понимал в геометрии и алгебре, да и сам Мере говорил о себе: “Я был влюблён в математику без понимания”. Он с увлечением читал историю математики Монтюкла, а в 18-летнем возрасте поступил в Нормальную школу в Париже, показав первый результат среди поступавших. Своим учителем считал Шарля Брио. С 1857 по 1859 работал учителем лицея в Сен-Квентине, а затем взял отпуск и семь лет жил в деревне в Бургундии, занимаясь виноделием. В 1866 году он стал читать лекции в университете Лиона, а с 1867 года и до конца жизни был профессором математики в университете Дижона. В 1899 году стал членом-корреспондентом Парижской Академии наук. Первая его работа по геометрии вышла в 1868 году, а в 1869 году в Дижоне вышла работа, оцененная значительно позже, в которой он первым даёт строгое определение иррационального числа: “Замечания о природе определённых величин с использованием пределов этих величин” [12]. Ему принадлежат несколько курсов анализа, выходивших с 1872 года [13, 15].

В работе [12] Мере формулирует два принципа теории иррациональных (неизмеримых, incommensurables) чисел: “1. Переменная величина ν, которая последовательно принимает значения ν_1, ν_2, ..., ν_n, ..., стремится к некоторому пределу, если её члены будут постоянно возрастать или убывать, оставаясь при этом в первом случае меньше, а во втором случае больше некоторой фиксированной числовой величины. 2. Переменная ν

определяется ещё дополнительным свойством, что разность $\nu_{n+p} - \nu_n$ стремится к нулю при неограниченно возрастающем n, каково бы ни было отношение между n и p.

Определим также эквивалентные возрастающие последовательности.

Если m и n бесконечно возрастают, разность $u_m - v_n$ двух возрастающих последовательностей сходится к нулю для некоторого зависимого промежуточного (взаимно обоюдного) индекса между этими индексами, легко выяснить, как достигается бесконечно малая для всякого другого закона. Говорят также, что возрастающие переменные u и v эквивалентны.

Их пределы (подлинные или фиктивные): предположим, что u и v имеют пределами Uи V (добавим, что это рациональные числа). Если u и v эквивалентны, тогда U и V равны между собой. Напротив, допустим, что u и v не имеют предельной (числовой) точки. Будет оправданным, выражаясь фигурально, сказать, что они имеют равные пределы". Эти пределы он называет, в отличие от числовых пределов, "фиктивными пределами" возрастающих последовательностей.

Рассмотрим рассуждения Мере из курса 1872 года. Он был издан в Париже, получил невысокую оценку Германа Лорана [11], и остался незамеченным соотечественниками, а франко-прусская война затруднила знакомство с ним немецких математиков. Лоран писал: "Методы, применяемые в этой работе, столь тонки и деликатны, что неизвестно, будут ли они понятны даже знатокам абстракций высшего Анализа, и стоило ли так резко разрушать многолетние традиции" [11, с. 25]. В качестве причины невысокой популярности трактатов Мере П. Дюгак называет его "чрезвычайно личный язык, который затрудняет чтение текста" [7, с. 348].

Мере следовал классической традиции Лагранжа и Коши, излагавших анализ на основании рядов Тейлора и Маклорена. Коши в 1821 году определял иррациональные числа как пределы последовательностей рациональных чисел, и даже определил операцию умножения и деления иррационального числа на рациональное, а также возведения иррационального числа в степень [6, с. 337, 341; 5, с. 382, 388]. Рассматривались только целые функции, т.е. могущие быть разложены в ряд по целым степеням, и Мере неоднократно подчёркивает, что этого достаточно для нужд анализа. Мере опирается на критерий сходимости Коши, но для своей теории вводит много новых понятий: фиктивного предела, олотропности[1] и связанных с ними. Он считал, что "разрывные функции, не имеющие производных, не интегрируемые никогда не встретятся, так что о них можно не беспокоиться. Не стоит обращаться к уравнению Лапласа, принципу Дирихле, потому что производные определяются, рассчитываются, перемешиваются в дифференциальные выражения так, как этого хотел Лагранж, то есть с помощью простых операций" [12]. Тем не менее, Мере идёт дальше Коши, – он определяет операции над иррациональными числами строго и последовательно, и на их основе вводит понятие непрерывной функции.

Поразительно, что точно так же и в том же году рассуждали в немецком городе Галле Кантор и Гейне в своих работах [4, 9].

Мере называет иррациональные числа (не разделяя их на алгебраические и трансцендентные) неизмеримыми.

Вот его рассуждение [13] (курсив Мере):

"Назовём вариантой числовое значение (целое или дробное, положительное или отрицательное) $v_{m,n,\ldots}$, величина которого зависит от значения целых m, n, $\ldots$, которые берутся в любых возможных комбинациях величин, и которые нумеруются с помощью этих индексов, например:

$$v_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}$$

$v_{m,n} = \frac{1}{mn}$ – это варианта двух индексов.

1. Если существует число V, для которого при достаточно больших m, n,$\ldots$, разность $V - v_{m,n,\ldots}$ по абсолютному значению будет произвольно мала для достаточно больших величин индексов, то говорят, что варианта $v_{m,n,\ldots}$ стремится или сходится к пределу V.

Если $V = 0$, варианта $v_{m,n,\ldots}$ называется бесконечно малой. Таковой будет, например, разность между вариантой и её пределом.

Среди вариант, не имеющих пределов, нужно отметить такие, у которых абсолютная величина может приобрести значение, большее любого наперёд заданного числа; их называют *бесконечными* величинами; а те, которые наоборот, имеют числовые значения, меньшие, чем некоторое конечное число, называются *конечными.*

2. Нетрудно установить следующие утверждения:

I. Сумма, произведение (или произведение степеней) определённого числа нескольких конечных вариант и постоянных значений будет конечной величиной. То же для отношения двух подобных величин, у которых знаменатель не является бесконечно малым.

II. Произведение бесконечно малой на постоянную или конечную величину, сумма некоторого количества таких произведений (положительных степеней), на бесконечно малую, обратная к бесконечно большой, будет бесконечно малой вариантой.

III. Степень с бесконечным (положительным) показателем некоторой постоянной величины или варианты будет бесконечной или бесконечно малой смотря по тому, какое у этой величины окончательное абсолютное значение: превосходит ли оно величину >1, или оно меньше, чем величина <1.

[1]Этот термин принадлежит Мере и в дальнейшем никем не употреблялся.

IV. Сумма, произведение (или произведение степеней) определённого количества некоторых вариант, имеющих пределы, и постоянной величины, имеют в пределе результат, который получится, если подставить в этом вычислении предел этих значений. То же самое относится и к частному двух подобных величин, если знаменатель не является бесконечно малым.

Неизмеримые числа.

3. Назовём сходящейся такую варианту $v_{m+n,\ldots}$, для которой разность между $v_{m+p,n+q,\ldots}$ и $v_{m+n,\ldots}$ для произвольных p и q будет меньше любой бесконечно малой варианты с индексами m и n, короче говоря, такой, что эта разность стремится к нулю для m, n бесконечных независимо от p и q.

Вот примеры такой сходимости:

1^0. Варианты, имеющие предел. Так как $v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots} = (V - v_{m,n,\ldots}) - (V - v_{m=p,n+q,\ldots})$ – это разность двух бесконечно малых вариант.

2^0. Конечные варианты, которые, начиная с некоторого значения индексов, уже не растут и не уменьшаются (говоря алгебраически). Это легко доказывается.

4. Две варианты $v_{m,n,\ldots}$ и $v'_{m',n',\ldots}$ эквивалентны, когда их разность $v_{m,n,\ldots} - v'_{m',n',\ldots}$, рассматриваемая как единая варианта с индексами m, n, ...m', n', ..., будет бесконечно малой.

Установив это, легко докажем следующее.

Сумма, произведение (или произведение степеней) некоторого количества сходящихся вариант, и неизменных величин, будет сходящейся вариантой, эквивалентной такой, которая получилась бы заменой соответствующих эквивалентов. То же верно и для частного, если знаменатель не является бесконечно малым.

5. Это утверждение тривиально, если варианты имеют пределами определённые числа, но в том случае, когда некоторые из них не сходятся ни к какому пределу, *выражаемому численно*, это утверждение тоже остаётся справедливым.

Тем не менее, согласимся, что это в переносном смысле означает, что инварианта сходится к некоему фиктивному *неизмеримому* пределу, если она сходится к точке, не допускающей точное определение. Если несоизмеримые пределы двух сходящихся вариант равны, то эти варианты будут эквивалентны; сумма, произведение и т.д. вариант, сходящихся к какому-либо пределу, подлинному или фиктивному, в зависимости от случая, есть сумма или произведение или т.п. их пределов, подлинных или фиктивных. И, если дополнить эти условия, верны предложения, которые мы сформулировали, равно как и цитируемые теоремы.

6. *Сходящаяся варианта, не являющаяся бесконечно малой, конечна при сохранении определённого знака.* По нашей гипотезе существуют бесконечные комбинации величин m, n,..., которым соответствует $v_{m,n,\ldots}$, превосходящие по абсолютному значению фиксированное число δ. Придадим m, n,... такие достаточно большие значения, чтобы $v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}$ было бы численно меньше, чем δ, каковы бы не были p, q,... Так как $v_{n+p,m+q,\ldots}$ равно $v_{m,n,\ldots} + (v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots})$, это равенство справедливо для всех p, q, ..., короче говоря, для всех индексов, равных или превосходящих знак $v_{m,n,\ldots}$.

Более того, если две варианты $v_{m,n,\ldots}$ и $v'_{m',n',\ldots}$ сходятся к несоизмеримым пределам, и не являются эквивалентными, их разность $v_{m,n,\ldots} - v'_{m',n',\ldots}$ конечна и сохраняет определённый знак. Смотря по тому, каков этот знак, $+$ или $-$, мы говорим, что неизмеримый предел первой больше или меньше, чем второй.

Таким же образом, говорят, что измеримое число a больше или меньше неизмеримого конечного числа для варианты $v_{m,n,\ldots}$, смотря по тому, как получается, $a - v_{m,n,\ldots} >$ или < 0.

Если, по абсолютному значению, эта конечная разность остаётся меньше ε, назовём значением неизмеримого числа приближённым в соответствии с ε, с избытком в первом случае и с недостатком во втором случае.

Мы будем определять все неизмеримые числа, приближая их значения с помощью некоторого δ, каким бы малым его не вообразить.

Действительно, пусть $v_{m,n,\ldots}$ – сходящаяся соответствующая варианта, и для данных достаточно больших $m, n, \ldots$, при которых $v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}$ остаётся по абсолютной величине меньше, чем $\frac{1}{2}\delta$, каковы бы ни были $p, q, \ldots$

Тождество $v_{m=p,n+q,\ldots} = v_{m,n,\ldots} + (v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots})$ приобретает вид $\left(v_{m,n,\ldots} + \frac{1}{2}\delta\right) - v_{m+p,n+q,\ldots} > 0$ при $\delta < 0$, $\left(v_{m,n,\ldots} - \frac{1}{2}\delta\right) - v_{m+p,n+q,\ldots} < 0$ при величине числа $< \delta$.

Тогда $\left(v_{m,n,\ldots} + \frac{1}{2}\delta\right)$, $\left(v_{m,n,\ldots} - \frac{1}{2}\delta\right)$ будут приближениями к неизмеримому числу сообразно δ, одно с избытком, второе с недостатком.

7. Это утверждение хорошо проверяется на примерах. Положительное неквадратное число a, не являющееся точным рациональным квадратным корнем какой-либо числовой величины, может быть представлено бесконечным множеством квадратных вариант, которые к нему сходятся. Мы утверждаем, что эти рациональные (положительные) будут сходящимися и эквивалентными друг другу вариантами.

Действительно, пусть $v_n^2 = a + \varepsilon_n$, $v_{n+p}^2 = a + \varepsilon_{n+p}$, ε_n, ε_{n+p} сходятся к нулю при бесконечно возрастающих индексах, и тогда $v_{n+p} - v_n = \frac{\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n}{v_{n+p} + v_n}$.

Знаменатель не является бесконечно малым, потому что в противном случае v_n^2, v_{n+p}^2 сходятся к нулевому пределу, отличному от a, числитель же нет, тогда $v_{n+p} - v_n$ стремится к нулю при бесконечно возрастающем n, независимо от соотношения между n и p, что и доказывает сходимость варианты v_n.

Таким же образом доказывается эквивалентность двух вариант, квадраты которых сходятся к одному и тому же числу. *Это означает, что все положительные числа рационально измеримы или неизмеримы.* Они употребляются для обозначения рационального фиктивного a, означая истинное рациональное, когда a есть квадратное число.

Таким образом, мы сказали, что квадраты многих вариант имеют общий предел a, и все могут стремиться к неизмеримому пределу $\sqrt{a}$.

Равенство $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ означает, что квадраты двух вариант сходятся к числу 8, и другая к числу 2, первая эквивалентна удвоенной второй.

Неравенство $1 < \sqrt{2} < \sqrt{8}$ выражает избыток первой над второй и их обеих перед единицей завершается знаком $+$.

В подобном равенстве $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$ мы будем воспринимать рациональный корень четвёртой степени как биквадратный из варианты, сходящейся к a и равен рациональному корню из квадрата такой эквивалентной варианты, квадрат которой равен a.

Рассуждая таким образом, *мы всегда можем получить утверждение о неизмеримых числах, выражающее основные отношения между числами в их собственном смысле.*

8. Надо сказать ещё кое-что о неизмеримых вариантах. Пусть $u_{m,\,n,\,\ldots}$ – это последовательность величин такого рода, и величины $v_{m,\,n,\,\ldots}$ приближённо отличаются от неё на величину $\varepsilon_{m,\,n,\,\ldots}$, причём эта последняя бесконечно мала.

Если $v_{m,\,n,\,\ldots}$ – сходящаяся величина, мы делаем заключение, что обе величины стремятся к одному и тому же пределу, измеримому или нет, а именно к пределу $v_{m,\,n,\,\ldots}$.

Так как по абсолютной величине $v_{m,\,n,\,\ldots} - u_{m,\,n,\,\ldots} < \varepsilon$, $v_{m+p,\,n+q,\,\ldots} - u_{m+p,\,n+q,\,\ldots} < \varepsilon$, тогда $(v_{m+p,\,n+q,\,\ldots} - v_{m,\,n,\,\ldots}) < (u_{m+p,\,n+q,\,\ldots} - u_{m,\,n,\,\ldots}) + (\varepsilon_{m,\,n,\ldots} + \varepsilon_{m+p,\,n+q,\,\ldots})$, где в последней части второе слагаемое бесконечно мало, условие для сходимости u заключается в том, что её величины в разных случаях (разновременно) измеримы. Необходимо добиться , чтобы разность $u_{m+p,\,n+q,\,\ldots} - u_{m,\,n,\,\ldots}$ была бы меньше варианты с индексами m, $n, \ldots$, p, $q, \ldots$, бесконечно малой для неограниченно возрастающих m, $n, \ldots$, и для некоторых фиксированных p, $q, \ldots$.

Теперь мы полагаем необходимым утверждать, что далее мы будем понимать неизмеримые числа в том смысле, который мы продемонстрировали выше, в их приближении к бесконечно малым, бесконечным и конечным".

Далее Мере определяет непрерывную функцию и расширяет это понятие, создав новый термин "олотропная функция":

"Пусть $f(x,\, y, \ldots)$ – сумма целых рядов, R_x, R_y, ... – их области (круги) сходимости, R_x°, $R_y^\circ, \ldots$ – соответственно меньшие положительные величины. Если $x', y', \ldots, x, y, \ldots$ – произвольные варианты в этих кругах, центры которых в точках O_x, O_y, ... как центры областей R_x°, R_y°, ..., таким образом, что все разности $x' - x$, $y' - y$, ... будут бесконечно малыми, и разность $f(x',\, y',\, \ldots) - f(x,\, y,\, \ldots)$ также стремится к нулю.

Рассмотрим сумму N первых элементов целого (по целым степеням) ряда. Заменив варианты на сходящиеся варианты, которые сходятся внутри меньшего внутреннего круга сходимости, получим сходимость вариант и их эквивалентность друг другу, при N – индекс замещённых вариант от переменных, неограниченно сходящимся к каким-либо значениям.

Именно это и будет как раз тем, что обеспечит целочисленному ряду свойство определять значение функции, даже неизмеримое, от независимых переменных. Мы полагаем излишней другую точку зрения в этой теории.

Если x', y', ... *соответственно стремятся к данным пределам x, $y, \ldots$, расположенным во внутренней части круга сходимости, $f(x',\, y',\, \ldots)$ стремится к $f(x,\, y,\, \ldots)$.*

Будем говорить, что функция $f(x,\, y,\, \ldots)$ олотропна (olotrope) на порциях S_x, $S_y, \ldots$ вспомогательной плоскости, определённой геометрически независимыми переменными, когда для всех значений переменных x, $y, \ldots$, ограниченных этими областями, $f(x+h,\, y+k,\, \ldots)$ представляет собой ряд по целым степеням, а h, $k, \ldots$ таковы, что они остаются внутри области сходимости, отличаясь на величины, не превосходящие δ_x, $\delta_y, \ldots$, все не равные нулю.

Назовём δ_x, $\delta_y, \ldots$ *областями олотропии* или *олометрами* функции те участки, на которых выполняются названные условия.

Сразу же из этого определения следует, что $f(x,\, y, \ldots)$ представляется в форме ряда по целым степеням от $x - x_0$, $y - y_0$, ..., где x_0, y_0, ... обозначают некоторые числовые значения переменных внутри области, такие, что для соседних точек x, $y, \ldots$, для которых модули их разностей остаются внутри олометров. Таким образом, получается вместо $x - x_0$, $y - y_0$, ... можно писать h, k, ... $f(x_0 + h,\, y_0 + k,\, \ldots)$.

Сумма целочисленного ряда есть олотропная функция от переменных внутри круга с тем же центром, что и круг сходимости, но меньшего размера".

Понятие олотропной функции аналогично понятию равномерно непрерывной функции, сформулированному в те же годы Кантором и Гейне. К сожалению, оно не было развито ни в последующих работах Мере, ибо он работал только с целыми функциями, ни его коллегами. Мере излагает классический анализ с помощью введённых понятий – определяет производную, теорему о среднем, теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, Ферма о необходимом условии экстремума, теорию интеграла и дифференциальных уравнений.

Таким образом Мере расширил понятие числа добавлением иррациональных чисел как классов эквивалентных сходящихся последовательностей и фиктивных пределов (сходящаяся последовательность есть число). Он отвергал физические и геометрические образы ради создания внутреннего языка чистого анализа [14, с. 15-16].

Сейчас французы чтут память своего соотечественника, называя построение иррационального числа построением Мере-Кантора-Гейне. Именем Шарля Мере названо бургундское вино, которое вы видите на рис. 2.

Рис. 2. Вино “Шарль Мере”

Библиографический список

1. *Гейне, Э.* Элементы учения о функциях [Текст] / Э. Гейне; пер. с нем., примечания Г.И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексные программы. Межвузовский тематический сборник трудов. – Спб: СПбГАСУ. – В печати.
2. *Дедекинд, Р.* Непрерывность и иррациональные числа [Текст] / Р. Дедекинд; пер. с нем. С.О. Шатуновского. – Одесса, 1923. – 4 изд. – 44 с.
3. *Дюгак, П.* Понятие предела и иррационального числа, концепции Шарля Мере и Карла Вейерштрасса [Текст] / П. Дюгак // Историко-математические исследования. – 1973. – XVIII. – С. 176-180. – [электронный ресурс]: http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1970_num_23_4_3163
4. *Кантор, Г.* Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов [Текст] / Г. Кантор // Труды по теории множеств – М., 1985. – С. 9-17.
5. *Коши, О.* Алгебрический анализ [Текст]; пер. с фр. Ф. Эвальдом, В. Григорьевым, А. Ильиным / О. Коши. – Lepzig : Druck von Bär & Hermann, 1864. – 252 с.
6. *Cauchy, A.-L.* Course d’Analyse de l’Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique / A.-L. Cauchy // Oeuvres. Ser. 2, t. 3. 1-471. – [Электронный ресурс]: http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_CAUCHY_1_2
7. *Dugak, P.* Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite / P. Dugak // Revue d’histoire des sciences et de leurs applications. – 1970. – T. 23. – n°4. – P. 333-350. [Электронный ресурс]: http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1970_num_23_4_3163
8. *Dugac, P.* Elements d‘analyse de Karl Weierstrass / P. Dugac // Archive for History of Exact Sciences. – Paris, 1972. – 10. – P. 41-176.
9. *Heine, E.* Die Elemente der Functionenlehre / E. Heine // J. reine angew. Math. – 1872. – 74. – S. 172-188.
10. *Kossak, E.* Die Elemente der Arithmetik, Programm Fried / E. Kossak // Werder. Gymn. – Berlin, 1872.
11. *Laurent, H.* Ch. Méray. Nouveau précis d’analyse infinitésimale / H. Laurent // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 1873. – 4. – P. 24-28.
12. *Méray, Ch.* Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données / Ch. Méray // Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. phys. nat.– 1869. – (2) 4. – P. 280-289
13. *Méray, Ch.* Nouveau précis d’analyse infinitesimale / Ch. Méray. – Publication : F. Savy. XXIII – Paris: 1872. – 310 p. – [Электронный ресурс]: http://mathdoc.emath.fr/cgi-bin/linum?aun=000839
14. *Méray, Ch.* Considérations sur l’enseignement des mathématiques / Ch. Meray. – [Darantière] ([Dijon]). – 1892. – 52 p. [Электронный ресурс]: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k994185
15. *Méray, Ch.* Leçons nouvelles sur l’analyse infinitésimale et ses applications géométriques. Principes généraux / Ch. Méray. – Paris: Gauthier-Villars et fils. – 1 vol. – 1894-1898. – [Электронный ресурс]: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k995200

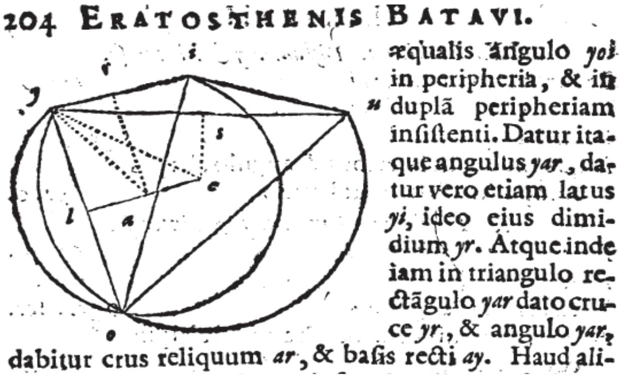
16. *Pionchon, J.* Notice sur la vie et les travaux de Charles Méray / J. Pionchon // Revue bourguignone d'Enseignement Supérieur. – 1912. – 22. – P. 1-158.
17. *Roque T.* Les définitions les plus rigoureuses sont-elles plus faciles à comprendre? Charles Méray et la proposition d'une définition "naturelle" des nombres irrationnels / T. Roque. – Universidade Federal do Rio de Janeiro. – [Электронный ресурс]: https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:M_XHOIq-lT0J:www.edc.uoc.gr/~tzanakis/ESU6/PdfFiles/6-04-Roque.pdf+LES+D%C3%89FINITIONS+LES+PLUS+RIGOUREUSES+SONT-ELLES+PLUS+FACILES+%C3%80+COMPRENDRE+?+Charles+M%C3%A9ray+et+la+proposition+d%E2%80%99une+d%C3%A9finition+%C2%AB+naturelle+%C2%BB+des+nombres+irrationnels+Tatiana+ROQUE+Universidade+Federal+do+Rio+de+Janeiro&hl=ru&gl=ru&pid=bl&srcid=ADGEESibLOQS4DwTFRO8LZ2pT-RURu5s2O6fOQ2XAzxeveCB7PIrC9lfdiz02Ee4rl9SXU_csvvIIaIHIXrOhxQq1F5PEMDof99jumFI0b2oQZf–V_ELTh2wxYNHq_6SPmluy_c36hQ&sig=AHIEtbSVhM-sJquEPe48C1HY_8OUxb0kCg
18. *Tannery, J., Méray Ch.* "Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques, Première partie: Principes généraux" / J. Tannery // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 1894. – (2)18. – P. 80-90.

Засечка Снеллиуса

О.О. Барабанов

Обратная угловая засечка (resection) заключается в местоопределении наблюдателя по углам между направлениями на известные пункты (минимум – на три). Эта задача имеет многовековое богатое прошлое, а в своих обобщениях, модификациях и применениях обещает не менее богатое будущее. Наверняка обратную угловую засечку применяли еще древние греки, а затем арабы. Однако отчетливыми письменными свидетельствами об этом мы в настоящий момент не располагаем. Поэтому отсчет документированной истории обратной угловой засечки приходится пока вести с сержанта мексиканской армии Кукунутти (1592), который использовал свой приближенный способ решения обратной угловой засечки. Этот факт, обнаруженный в 1935 году неким проф. Броуном [1], увековечен в статье "**Cucunutti** method of resection" авторитетного американского словаря [2]. Способ Кукунутти состоял в свободных движениях топографической карты по горизонтальному столу наблюдателя с целью получить пересечение трёх лучей в одной точке (каждый луч начинался в *непосредственно* наблюдаемом пункте и проходил через его образ на карте). Тем самым, осуществлялась необходимая гомотетия с центром, который на карте и становился искомой точкой. Надо думать, что Кукунутти для осуществления своего способа многократно применял визирную линейку и карандаш. Идея аналого-графического способа Кукунутти совершенно очевидна и поэтому она, наверняка, не раз возрождалась. В частности, в военных училищах России до последнего времени преподавался, а, может быть, преподается и сейчас способ Болотова [3], в котором непосредственно наблюдаемые лучи единожды прочерчиваются на кальке до точки её пришпиливания, а затем калька перекладывается на карту так, чтобы добиться инциденции лучей на кальке и соответствующих пунктов на карте. Искомая на карте точка отмечается протыканием через кальку карты булавкой.

В документированной истории обратной угловой засечки следующим за Кукунутти нам известен **Виллеброрд Снелл (лат. Снеллиус)** (нидерл. *Willebrord Snel van Royen*; 1580, Лейден – 30 октября 1626, Лейден) – голландский математик, физик и астроном. Не отвлекаясь от темы, заметим, что по своему вкладу в математику Снеллиус должен иметь место, по крайней мере, в топ-дюжине самых значительных математиков XVII века. В своей книге *"Голландский Эратосфен"* [4] от 1617 года Снеллиус дал четкую постановку и решение обратной угловой засечки, отвечающее античным образцам. На рисунке представлен чертеж со с. 204 "Голландского Эратосфена", описывающий *циркульный* алгоритм Снеллиуса исчерпывающим образом. На чертеже Снеллиуса известные пункты – вершины верхнего тругольника. Отсчет углов ведется от левого пункта. Каждый из углов даст дугу соответствующей окружности. В пересечении этих дуг – искомая точка. Пунктиром показано, как строить соответствующие окружности (используется свойство вписанных в окружность углов).


204 ERATOSTHENIS BATAVI.

æqualis angulo *yoi* in peripheria, & in duplā peripheriam insistenti. Datur itaque angulus *yar*, datur vero etiam latus *yi*, ideo eius dimidium *yr*. Atque inde iam in triangulo rectāgulo *yar* dato cruce *yr*, & angulo *yar*, dabitur crus reliquum *ar*, & basis recti *ay*. Haud ali-

Следующим после Снеллиуса стал английский моряк Джон Коллинз, опубликовавший в 1671 году свой, отличный от алгоритма Снеллиуса, циркульный алгоритм для обратной угловой засечки [5].

Затем французский инженер Лоран Потенот в 1692 году опубликовал нечто похожее на циркульное решение для обратной угловой засечки [6]. Любопытно, что фрагмент чертежа Потенота на с. 277 его статьи [6] с опорным треугольником ABC чрезвычайно похож на конфигурацию Снеллиуса.

Коллинз и Потенот, как, впрочем, и последующие авторы не упоминают Снеллиуса. Но работа Коллинза, по крайне мере, оригинальна, что трудно утверждать о статье Потенота. Между тем, сложилась традиция называть обратную угловую засечку задачей Потенота, см., например, [7, 8]. Это вызывает сожаление.

Это вызывает тем большее сожаление в силу того, что алгоритм Снеллиуса превосходит все другие, до сих пор известные алгоритмы. Смотрите: на чертеже Снеллиуса – дуги, а не окружности! Это очень важно, ибо дуги могут не пересекаться во второй точке. Такое может вполне произойти, если современный робот получает "зрительную" информацию с выбросом.

Кроме того, я рискну высказать следующее не вполне математическое суждение: ничего проще алгоритма Снеллиуса придумать невозможно. Если так, то речь должна идти только о его грамотном компьютерном исполнении.

В литературе упоминаются известные математики, публиковавшие свои решения обратной угловой засечки уже после Потенота. Это Кассини, Ламберт, Бессель [9] и др.

По-видимому, первым, кто предложил аналитический алгоритм для обратной угловой засечки стал Гаусс, который в статье *"Приложение теории вероятностей к одной задаче практической геометрии"* [10, 11] от 1823 г. ставит задачу в прямоугольных координатах и в них же получает ответ. В своем алгоритме Гаусс использует переход к полярным координатам и, как неизбежное зло, – арктангенс.

В истории обратной угловой засечки работа Гаусса занимает исключительное место потому, что Гаусс в ней впервые решил методом наименьших квадратов задачу обратной многократной засечки (измерений больше чем неизвестных). Методика Гаусса стала классической для всех последующих поколений геодезистов. Однако Гаусс отвел (на мой взгляд – несколько стеснительно) в своей работе опорной процедуре (однократной засечке) второе по порядку изложения место. Этот момент характерной для Гаусса рефлексии наложил отпечаток на всю последующую геодезическую литературу (на мой взгляд, этот отпечаток – плохой).

Вот вступление к опорной процедуре (вычисление центра линеаризации, решение однократной обратной засечки по трем известным пунктам, directe Methode) у Гаусса [11, с. 132]: "Положенные в основу наших вычислений приближенные координаты пункта H вычислены *непосредственно* при помощи четвертого и пятого приведенных выше углов. Хотя непосредственный способ вычислений следует рассматривать как почти известный, но для полноты я приведу его еще здесь в том виде, в каком я его обычно применяю".

После Гаусса, с его явно не лучшим алгоритмом, число публикаций решений однократной обратной угловой засечки множилось и множилось. В специальном исследовании [12] уже утверждалось наличие более 500 различных решений обратной угловой засечки. Какой хаос, если учесть, что среди них нет (я в этом уверен) ни одного решения, адекватного задаче!

Проблема адекватного алгоритма, актуальная для человечества, всё более окружаемого плохо запрограммированной автоматикой, поставлена в ряде наших работ, см. [13, 14].

Приведем адекватный алгоритм координатной реализации засечки Снеллиуса в случае безошибочных измерений (нет малых ошибок). Для его вывода используется наш прием [13, 14] принимать в нужном месте комплексно сопряженную переменную как неизвестную.

На входе алгоритма: известные пункты a_0, a_1, a_2 как точки комплексной плоскости, углы α_1, α_2, измеренные от направления до a_0. На выходе: точка z, из которой производились наблюдения или сообщение о критической ситуации.

Для первого угла имеем

$$\begin{cases} a_1 - z = k_1 e^{i\alpha_1}(a_0 - z); \\ k_1 > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем уравнение первой окружности Снеллиуса

$$e^{-i\alpha_1}\frac{(a_1 - z)}{(a_0 - z)} = *,$$

где символ $*$ обозначает выражение, сопряженное левой части равенства. Аналогичное уравнение получим для второй окружности Снеллиуса. В результате, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными $z, \bar{z}$:

$$\begin{cases} e^{-i\alpha_1}(a_1 - z)(\bar{a}_0 - \bar{z}) = *; \\ e^{-i\alpha_2}(a_2 - z)(\bar{a}_0 - \bar{z}) = *. \end{cases}$$

Чтобы избавиться от членов $z\bar{z}$, умножим первое уравнение на $\sin\alpha_2$, второе – на $\sin\alpha_1$, а затем вычтем из первого уравнения второе. Получим уравнение, которое задает некоторое аффинное множество, а в случае общего положения – прямую, проходящую через точки пересечения окружностей Снеллиуса. Если коэффициент при $\bar{z}$ окажется близким к нулю, в ответ пойдет сообщение "Вы вблизи опасной окружности". Если коэффициент при $\bar{z}$ окажется отличным от нуля, выражаем $\bar{z}$ линейно через z из этого уравнения и подставляем в одно из уравнений последней системы. Получим квадратное уравнение, одним из корней которого будет a_0, а другим – искомый. Найденное z используем для нахождения k_1, k_2. Если хотя бы один из этих коэффициентов окажется отрицательным, в ответ пойдет сообщение "Выброс".

Как видим, приведенный алгоритм требует только однократного вычисления синуса и косинуса измеренных углов и строго соблюдает ориентацию. Наш алгоритм является алгебраическим.

Также обходятся без обратных тригонометрических функций алгоритмы последнего времени [15, 16], уступающие, однако, нашему алгоритму по адекватности задаче. Например, алгебраический алгоритм [16] стартует с квадратов синусов измеренных углов, что уже означает некоторую индифферентность к ориентации.

Мы утверждаем, что адекватный алгоритм для однократной обратной угловой засечки получится, если к приведенной выше нашей реализации алгоритма Снеллиуса добавить гарантии точности через процедуру вычисления среднеквадратических ошибок координат по среднеквадратической ошибке угломера [17].

В заключение отметим, что засечка, о которой шла речь, это всего лишь небольшая часть математического наследия Снеллиуса, см. [18, 19]. Зато она, – по-настоящему, Засечка или зарубка в памяти человечества.

Библиографический список

1. *Brown, J.M.* Engineering News Record, January 10, 1935.
2. Glossary of the Mapping Sciences. – ASCE Publications, 1994. 581 p.
3. *Болотов, А.П.* Геодезия или Руководство к исследованию общего вида земли, построению карт и производству тригонометрических и топографических съемок и нивелировок [Текст] / А.П. Болотов. – 1836, – Ч.1.; 1837. – Ч.2.
4. *Snellius, W.* Eratosthenes Batavus, 1617.
5. *Collins, J.* A Solution of a Chorographical Probleme // Philosophical Transactions. Vol. 6(1671). P. 2093-2096.
6. *Pothenot, L.* Mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de l'Académie royale des sciences. Année 1692. P. 276-280.
7. *Хренов, Л.С.* Задача Потенота [Текст] / Л.С. Хренов // Квант. – 1973. – № 3. – С. 30-34.
8. Справочник геодезиста [Текст] / Под ред. В.Д. Большакова и Г.П. Левчука. – М., 1966.
9. *Bessel, F.W.* Über eine Aufgabe der practischen Geometrie // Astronomische Nachrichten. Vol. 3. Nr. 60. 1824. S. 193-196. Nr. 61. 1825. S. 221-224.
10. *Gauss, C.F.* Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der practischen Geometria // Astronomische Nachrichten. Vol. 1. Nr. 6. 1823. S. 81-86.
11. *Гаусс, К.Ф.* Избранные геодезические сочинения [Текст] / К.Ф. Гаусс. Т. 1. Приложение теории вероятностей к одной задаче практической геометрии / Под ред. Г.В. Багратуни, пер. с нем. Н.Ф. Булаевского. – М.: Издательство геодезической литературы, 1957. – С. 129-133.
12. *Bock, W.* Mathematische und geschichtliche betrachtungen zum Einschneiden. – Hannover, Techn. Univ., Diss., 1951. 203 s.
13. *Барабанов, О.О.* К использованию виртуальных координат в работе с топопривязчиком [Текст] / О.О. Барабанов, Л.П. Барабанова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1989. – № 5. – С. 58-63.
14. *Барабанов, О.О.* Математические задачи дальномерной навигации [Текст] / О.О. Барабанов, Л.П. Барабанова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
15. *Font-Llagunes, J.M., Batlle, J.A.* A new method that solves the three-point resection problem using straight lines intersection // J. Surv. Eng. (2009).
16. *Wildberger, N.J.* Greek Geometry, Rational Trigonometry, and the Snellius-Pothenot Surveying Problem // Chamchuri Journal of Mathematics. V. 2(2010). № 2. – P. 1-14.
17. *Клюшин, Е.Б.* Оценка точности обратной угловой засечки [Текст] / Е.Б. Клюшин, Мохамед Зейдан Эль-Шейха Заки, Е.П. Власенко // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2008. – № 6.
18. *Haasbroek, N.D.* Gemma Frisius, Tycho Brahe and Snellius, and their Triangulations (Delft, 1968).
19. *Wreede, L.C.* Willebrord Snellius (1580-1626): a Humanist Reshaping the Mathematical Sciences (Doctoral Thesis, University of Utrecht, 2007).

История развития методов анализа полиэдральных математических моделей

Т.А. Ласковая, К.К. Рыбников, О.К. Чернобровина

В более ранних работах авторов приводился исторический анализ тех немногих результатов, которые предшествовали появлению аппарата решения задач линейного программирования [14]. Впервые попытки исследования систем линейных неравенств, по-видимому, появились лишь в начале XIX века в работах Ж.Б. Фурье (1826, 1827) (см., например, [1, 2]). Им была рассмотрена выпуклая кусочно-линейная поверхность, направленная выпуклостью "вниз", то есть к плоскости z=0. Эта поверхность, названная автором "чашей", состоящая из плоских кусков-граней обладает точкой, наиболее близко располагающейся к плоскости z=0. Для поиска этой точки Ж.Б. Фурье выдвинул идею итерационного метода (цитируем по [1]):

“Чтобы быстро достичь самой низкой точки чаши, поднимают какую-нибудь точку горизонтальной плоскости, например, начало координат X и Y, по вертикали до пересечения с самой верхней плоскостью, т.е. среди всех точек пересечения, находящихся на этой вертикали, выбирают самую удаленную от плоскости X и Y. Пусть эта точка пересечения, расположенная на экстремальной плоскости, будет m_1. По той же плоскости спускаются из точки m_1 и m_2 какого-нибудь ребра полиэдра и, следуя по этому ребру, спускаются из точки m_2 до вершины m_3, общей для трех экстремальных плоскостей. Начиная с точки m_3, продолжают спускаться по другому ребру до новой вершины m_4 и продолжают применять тот же приём, следуя всегда по тому из двух ребер, которое ведет в более низкую вершину. Таким образом очень быстро приходят в самую низкую точку полиэдра”.

По замечанию Ж.Б. Фурье “исчисление неравенств показывает, что этот же процесс годится для любого числа неизвестных”.

Надо заметить, что идеи Ж.Б. Фурье были востребованы математиками только через столетие для анализа систем линейных неравенств общего вида (метод Фурье-Моцкина – 1923, 1931) [1]. Сами же задачи изучения многомерных полиэдров стали вызывать интерес у исследователей лишь к середине XIX века в связи с появлением многомерных математических моделей в задачах теоретической механики.

Рассмотрение случая, когда система линейных неравенств может быть несовместной, было предпринято П.Л. Чебышевым при формулировке задачи о нахождении точки “наименее уклоняющейся от системы плоскостей”. Впоследствии эта точка получила в математической литературе название “чебышевской” (см., напр., [3]).

При рассмотрении несовместной системы линейных уравнений

$$d_i = d_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + a_i = 0, \quad (i = 1, \ ..., \ m),$$

в качестве характеристики уклонения от плоскостей $d_i(x) = 0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, была выбрана величина

$$\inf_x \max_{1\le i\le m} |d_i(x)| = \max_{1\le i\le m} |d_i(x)| \,,$$

которая соответствует чебышевской точке $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ ..., x_n^*)$.

Аналогично при решении системы линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + a_i \le 0, (i = 1, \ 2, \ ..., \ m) \tag{1}$$

по величине

$$L = \min_x \max_{1\le i\le m} d_i(x) \,,$$

можно провести анализ системы (1).

При $L>0$ система неравенств (1) несовместна, а при $L\le 0$ совместна. Точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ ..., x_n^*)$ такая, что

$$L = \max_{1\le i\le m} |d_i(x^*)| = \min_x \max_{1\le i\le m} |d_i(x)| \,,$$

называется чебышевским решением системы (1) при $L\le 0$ и чебышевским приближением системы (1) при $L>0$. В любом случае x^* называют чебышевской точкой системы (1).

В работах П.Л. Чебышева были рассмотрены лишь частные случаи алгоритмического решения задачи определения x^*. Только в 1951 году С.И. Зуховицкий показал, что для решения этой задачи в общем виде применим симплекс-метод.

Наконец, на рубеже XIX и XX веков появились работы, позволяющие проводить анализ множества решений системы линейных неравенств – полиэдра. Наиболее важным результатом явилась теорема Г. Вейля-Г. Минковского (1909): множество M является многогранником тогда и только тогда, когда M – ограниченный полиэдр.

Наряду с работами Г.Ф. Вороного, Фаркаша и др. о структурах многогранников эта теорема явилась базисной идеей для общего метода решения задач линейного программирования: линейная функция на выпуклом многограннике достигает своего максимума или минимума хотя бы в одной из его вершин.

Итерационный подход к решению задач об определении специальных решений систем линейных неравенств (в том числе и приближенных) нашел применение в работе Ш.Ж. Валле Пуссена (1910), которую в определенной степени можно считать разработкой прототипа симплекс-метода. Автором был предложен метод минимизации чебышевского отклонения $\max\limits_{1\le i\le m} |Ax - b|$ для заданных матрицы A размера $m \times n$ и m-мерного вектора b, то есть метод нахождения чебышевской точки (см., напр., [1]). При предположении абсолютной невырожденности матрицы A доказано, что если чебышевское отклонение равно L, то в решении x^* по крайней мере $m{+}1$ компонент равны $\pm L$, а остальные компоненты равны нулю. На основании этого он предложил алгоритм направленного перебора квадратных подматриц максимального размера матрицы A, который можно оценить как идейно близкий к методу направленного перебора вершин многогранника допустимых решений в задачах линейного программирования.

Метод же решения известной задачи линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_G(\min_G), \tag{2}$$

где

$$G = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ x_j \ge 0\ ,\ \ (i = 1, 2, \ldots, m),\ \ (j = 1, 2, \ldots, n)\}$$

– многогранник допустимых решений, был получен независимо Л.В. Канторовичем при решении задач планирования производства для фанерного треста в Ленинграде в конце 30-х годов [4] и Дж.Б. Данцигом на рубеже 40-х и 50-х годов [5].

Интерпретацией метода Л.В. Канторовича как двойственного симплекс-метода мы обязаны Т.С. Купмансу (1959-1960, см., напр., [1])), а более поздняя по времени работа Дж.Б. Данцига оказалась широко известной из-за аналитического описания вершин многогранника G и геометрически ясного и простого метода решения задач линейного программирования, основанного на направленном переборе вершин многогранника, который получил название "симплекс-метод".

Перейдем теперь к основной цели представляемой авторами работы. Как отразились открытия в теории выпуклых многогранников (ограниченных полиэдров) и разработка симплекс-метода на создании и изучении прикладных математических моделей?

Краткий и, конечно, неполный анализ таких моделей сводится к следующим направлениям.

1. Решение задач планирования в экономике.

Создание симплекс-метода позволило решать большой класс задач планирования производства, где в задаче (2) вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяет план предприятия, x_j – объем выпускаемой продукции j-го типа, a_{ij} – затраты i-го ресурса предприятия на единицу j-го типа его продукции, b_i – лимит на i-ый ресурс.

Помимо этих задач были открыты широкие возможности анализа других важных в практическом отношении моделей: задач о назначениях, задач о максимальном потоке в стационарной сети и т.д.

2. Полиэдральный подход к анализу универсальных двоичных узлов преобразований в электронных схемах.

Под универсальным двоичным узлом электронной схемы с n входами и одним выходом понимается устройство, осуществляющее техническую реализацию булевой функции

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Идея построения многогранника G, содержащего множество решений уравнения $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ (или 1), рассматривалась в работах П.Л. Хаммера (Иванеску), С. Рудеану, А. Чарнса, Ф. Грано, Г.В. Балакина, В.Г. Никонова, Н.В. Никонова, а также авторов настоящей статьи (см., напр. [6-9, 13]). В работах отечественных математиков этот подход получил название метода разделяющих плоскостей. В работе [10] были рассмотрены многогранники G, множество вершин которых совпадало с множеством решений булева уравнения или системы булевых уравнений.

3. Решение задач анализа формальных нейронов и их комплексов в нейросетях.

Начиная с 1943 г., когда У.С. Мак-Каллок и У. Питтс опубликовали свою работу [11], в которой приводилась простейшая модель, которая до определенной степени отражала функционирование реального биологического нейрона, интерес к созданию таких моделей и их обобщений-комплексов формальных нейронов) не ослабевает. Стоит упомянуть работы Дж. фон Неймана, Ф. Розенблита, Т. Кохонена и других [12].

Математическую модель формального нейрона можно представить уравнением

$$y = f(g) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 \le 0),$$

где y – выходной сигнал нейрона; $f(g)$ – функция выходного блока нейрона; a_i – постоянный коэффициент – вес i-го входа; x_i – i-й сигнал; a_0 – начальное состояние нейрона; i=1,2,3,...,n – номер входа нейрона; n – число входов.

Функция выходного блока, получившая в литературе название функции активации, может, вообще говоря, иметь любой вид в зависимости от особенностей конкретной задачи. Одним из наиболее часто встречающихся типов функций активации является пороговая, то есть функция f (g), имеющая вид:

$$f(g) = \begin{cases} b, \text{ если } g < d; \\ c, \text{ если } g \ge d, \end{cases}$$

где b и c – некоторые постоянные. Как правило, выбираются случаи b=–1, c=1 или b=0, c=1. Значение d обычно выбирается равным нулю.

В этом случае, очевидно, анализ схемы функционирования формального нейрона сводится к анализу структуры множества решений системы неравенств вида

$$g < 0 \quad \text{или} \quad g \geq 0,$$

где каждое неравенство порождается набором входных сигналов.

Полиэдральная структура формальных нейронов и составленных из них блоков позволяет решить задачу реализации универсальных двоичных узлов преобразования электронных схем комплексом формальных нейронов с пороговой функцией активации [13].

Задачи выбора коэффициентов функции активации для решения ряда прикладных проблем также сводятся к анализу полиэдров. В качестве примера можно рассмотреть задачу настройки формального нейрона для распознавания векторных массивов, которая заключается в следующем.

Требуется найти коэффициенты a_0, a_1, $\ldots$, a_n, d (иногда - задано заранее), решая систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j^{(i)} + a_0 < d, (i = 1, 2, ..., t_1), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j y_j^{(k)} + a_0 \geq d, (k = 1, 2, ..., t_{2)}, \end{cases} \tag{4}$$

где $X = \{(x_1^{(i)}, x_2^{(i)},\ ..., x_n^{(i)})\}$, $|X| = t_1$ и $\mathrm{H} = \{(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, ..., y_n^{(k)})\}$, $|Y| = t_2$ – адресные части двух распознаваемых векторных массивов.

Если система (4) совместная, то любое её решение определяет решение задачи настройки [9]. В противном случае может быть построен формальный нейрон, приближенно решающий эту задачу. Подход к определению такого приближенного решения, основанный на определении чебышевской точки системы неравенств (4), изложен в [15].

Библиографический список

1. *Схейвер, А.* Теория линейного и целочисленного программирования [Текст]. В 2-х т. Т. 1 / А. Схейвер. – М.: Мир, 1991. – 360 с.
2. *Kohler D.A.* Translation of a report by Fouries on his work on linear inequalities // Opersearch 10, 1973, p. 38-42.
3. *Зуховицкий, С.И.* Линейное и выпуклое программирование [Текст] / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
4. *Канторович, Л.В.* Математические методы в организации и планировании производства [Текст] / Л.В. Канторович. – Л.: ЛГУ, 1939. – 162 с.
5. *Dantzig G.B.* Maximization of a linear functions of variables subject to linear inequalities.-Activity analysis of production and allocation, ed. T.C. Koopmans, Cowles Commision Monograph 13 Wiley, N.Y., 1951 – p. 339-347.
6. *Hammer (Ivanescu) P.L., Rudeanu S.* Pseudo-Boolean Methods for Bivalent Programming-Springer-Verlag OHG, Berlin, 1966. 215 p.
7. *Charnes A., Granot F.* Existence and representation of diophantine and mixed diophantine solutions to linear equations and inequalities. Discrete Math., 11, № 3, 4, 1975.
8. *Балакин, Г.В.* Методы сведения булевых уравнений к системам пороговых соотношений [Текст] / Г.В. Балакин, В.Г. Никонов // Обозрение прикл. и пром. математики. – 1994. – Т. 1. – Вып. 3. – С. 389-401.
9. *Никонов, В.Г.* Применение полиэдральных методов в прикладных математических задачах, сводящихся к анализу и решению систем линейных неравенств [Текст] / В.Г. Никонов, К.К. Рыбников. – Вестник МГУ леса. Лесной вестник. – М.: МГУЛ, 2003 –№ 1. – С. 69-73.
10. *Рыбников, К.К.* Полиэдральный подход к анализу некоторых узлов преобразований электронных схем. Целочисленные многогранники [Текст] / К.К. Рыбников, О.К. Чернобровина // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2010. – Т. 17. – Вып. 4. – С. 586-587.
11. *Мак-Каллок, У.С.* Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности [Текст] / У.С. Мак-Каллок, У. Питтс // В кн. “Автоматы” / под ред. К. Шеннона, Дж. Маккарти. – М.: ИЛ, 1956. – С. 362-384.
12. *Редько, В.Г.* Эволюция. Нейронные сети. Интеллект [Текст] / В.Г. Редько. – М.: Ком Книга, 2006. – 224 с.
13. *Ласковая, Т.А.* О реализации универсальных двоичных узлов преобразования электронных схем комплексом формальных нейронов с пороговой функцией активизации [Текст] / Т.А. Ласковая, К.К. Рыбников, О.К. Чернобровина // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2011. – Т. 18. – Вып. 2. – С. 295-297.
14. *Рыбников, К.К.* История развития теории выпуклых многогранников как основы аппарата линейного программирования [Текст] / К.К. Рыбников, О.К. Чернобровина // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2011. – Т. 18. – Вып. 3. – С. 461-463.
15. *Рыбников, К.К.* Приближенные методы настройки формального нейрона для решения задачи распознавания двух векторных массивов [Текст] / К.К. Рыбников // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2009. – Т. 16. – Вып. 2. – С. 380-382.

История задачи о потере устойчивости вертикальной стойки

Петрова

В строительной механике важную роль играют задачи потери устойчивости. Под устойчивостью понимается свойство системы сохранять свое первоначальное равновесное состояние. Само понятие потери устойчивости делится на два вида. Первый – переход от одной моментной формы равновесия к другой (например, в случае арочных конструкций). Второй вид – переход от безмоментной формы равновесия к моментной (потеря устойчивости колонн, стоек и др.). В данном докладе рассматривается задача о потере устойчивости второго типа.

Пусть имеется вертикальная стойка, высота которой больше поперечного сечения примерно в десять раз. Необходимо найти значение усилия, действующего по оси стойки, которое способствует ее изгибу, а затем излому.

До XVIII века задачи о потере устойчивости, также как и другие задачи строительной механики решались опытным путем, при помощи составления физических моделей.

Первая математическая формулировка задачи принадлежит Леонарду Эйлеру [2]. Для решения этой задачи Эйлер вывел теоретическую формулу и рассмотрел ее варианты при различных способах закрепления.

Для шарнирного закрепления обоих концов:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

Если стойка с одного конца заделана, а другой свободный:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}.$$

Если стойка с одного конца заделана, а другой имеет шарнирное закрепление:

$$P = \frac{2\pi^2 EI}{L^2}.$$

Если оба конца заделаны:

$$P = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}.$$

Позднее, в 1757 г. в своей работе *"De motu vibratorio tympanorum"* Эйлер вывел ту же формулу для критической силы на основе приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси [3].

Однако формула Эйлера справедлива лишь для неэксцентрических нагрузок и гибких стержней. В иных условиях, когда нагрузка эксцентрична или стержень менее гибок, она неверна. Впервые это обнаружил английский инженер Итон Ходкинсон (Iton Hodgkinson, 1789-1861), уже в XIX веке. Он составил эмпирическую формулу для расчета чугунных стоек и колонн [4, 6].

Формула Ходкинсона для полных внутри колонн:

$$P = 44,16\frac{d^{3,6}}{L^{1,7}}.$$

Для пустых внутри колонн:

$$P = 43,3\frac{d^{3,6} - d'^{3,6}}{L^{1,7}}.$$

Но и эта формула также не дает определить значение разламывающего усилия с учетом эксцентричной нагрузки. Более существенный недостаток в том, что формула Ходкинсона применима только к определенным сортам чугуна. Следующая формула, также полученная экспериментально, – это формула Лава:

$$P = \frac{RS}{1,55 + 0,0005}\left(\frac{L}{d}\right)^2.$$

Август Эдвард Хоф Лав (Augustus Edward Hough Love, 1863-1940), английский математик, профессор натуральной философии в Оксфорде. Исходя из опытов Ходкинсона, он вывел формулу для случая, когда отношение длины к диаметру находится в пределах от 10 до 180.

Для чугунных стоек, полных или пустых внутри, в которых отношение длины к диаметру заключается в пределах от 4 до 120, значение разламывающей нагрузки:

$$P = \frac{RS}{1,45 + 0,00337}\left(\frac{L}{d}\right)^2.$$

Хотя в формуле Лава значение нагрузки зависит от свойств материала, но не выявлена зависимость численных коэффициентов от этих свойств. Этого недостатка не имеет формула Эйлера.

Е. Ламарль, бельгийский инженер, в 1845 г. первым установил предел применимости формулы Эйлера. Он предложил для стержней малой гибкости принять критическое напряжение равным пределу текучести. В дальнейшем теория устойчивости Эйлера подверглась проверке в опытах И. Баушингера (1887 г.), Л. Тетмайера и А.Г. Консидера (1890-1896 гг.) [1].

Иоганн Баушингер (Bauschinger I, 1834-1893) в 1887 г. провел небольшое, но хорошо поставленное экспериментальное исследование устойчивости сжатых стержней в лаборатории Высшей технической школы в Мюнхене. Поперечные сечения образцов из сварочного железа были двутавровое, корытообразное, угловое и тавровое. Большинство образцов имело на донцах тонкие конические наконечники, наглухо прикрепленные к образцам и свободно поворачивающиеся в конических углублениях стальных подушек, прикрепленных к плитам пресса. Таким образом, осуществлялось шаровое шарнирное закрепление концов образцов.

В результате испытаний И. Баушингер установил, что вследствие различных погрешностей изгиб образца начинается при небольшой сжимающей силе и постепенно растет. При некотором значении сжимающей силы появляется значительное искривление оси в плоскости наименьшей жесткости, что обычно приводит к разрушению стержня. Эта величина сжимающей силы очень близка к критической, подсчитанной по формуле Эйлера при условии, что напряжение, соответствующее этой силе, меньше предела пропорциональности материала при сжатии.

В 1890 г. Л. Тетмайер опубликовал результаты своих опытов по устойчивости сжатых стержней различных поперечных сечений из сварочного и литого железа. Так же как и в опытах И. Баушингера, образцы имели конические наконечники, что соответствовало схеме шарового шарнирного закрепления концов. В результате проведенных испытаний Тетмайер пришел к заключению, что при значительных отношениях длины стержня к минимальному радиусу инерции, когда напряжение в стержне меньше предела пропорциональности материала при сжатии, формула Эйлера справедлива. При больших напряжениях он предложил линейную зависимость критического напряжения от гибкости и определил величины постоянных, входящих в эту зависимость для литого и сварочного железа [5].

Справедливость формулы Эйлера при критических напряжениях, меньших предела пропорциональности материала при сжатии, подтвердили также результаты опытов французского инженера Армана Габриэля Консидера (Considere A.G.) [6] в 1891 г.

В 1889 г. немецкий инженер Фридрих Энгессер (Friedrich Engesser, 1848-1931) предложил вычислять критическое напряжение по формуле Эйлера с заменой модуля упругости на касательный модуль:

$$\sigma_t = \frac{\pi^2 E_k}{\lambda^2},$$

а также соответствующую формулу для касательно-модульной нагрузки:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_k J}{(\mu l)^2}.$$

Экспериментальное определение критических сил для сжатых стержней производилось неоднократно. Особенно обширный опытный материал собрал профессор Ф. Ясинский. Он составил таблицу критических напряжений в зависимости от гибкости для целого ряда материалов и положил начало современным методам расчета сжатых стержней на устойчивость.

В 1895 г. Л. Тетмайер и Ф. Ясинский на основе анализа экспериментальных данных предложили эмпирическую линейную формулу для вычисления критических напряжений [7]:

$$\sigma_{\text{кр}} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_T,\ (\lambda \le \lambda_T) \\ a - b\lambda,\ (\lambda_T \le \lambda \le \lambda_*) \end{array} \right\},$$

где λ_T – наибольшее значение гибкости, для которой ещё можно считать $\sigma_{KP} = \sigma_T$.

Полагая $\sigma_{KP} = \sigma_T$, $\lambda = \lambda_T$ и $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{пц}}$, $\lambda = \lambda_*$, получаем:

$$\sigma_T = a - b\lambda_T, \quad \sigma_{\text{пц}} = a - b\lambda_*,$$

откуда находим формулу для выражения коэффициентов:

$$a' = \frac{\sigma_T \lambda_* - \sigma_{\text{ПЦ}}\lambda_T}{\lambda_* - \lambda_T}, \quad b = \frac{\sigma_T - \sigma_{\text{ПЦ}}}{\lambda_* - \lambda_T}.$$

Постоянные A, B определяются из условий $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_T$ при $\lambda = 0$, $\sigma_{KP} = \sigma_{\text{ПЦ}}$ при $\lambda = \lambda_*$.

Используя эти условия, находим:

$$A = \sigma_T, \quad B = \frac{\sigma_T - \sigma_{\text{ПЦ}}}{\lambda_*^2}.$$

После подстановки в формулу А, В получаем:

$$\sigma_{KP} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{\text{ПЦ}}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^2 .$$

Теоретическое решение, полученное Эйлером, оказалось применимым на практике лишь для очень ограниченной категории стержней, тонких и длинных, с большой гибкостью. Между тем, в конструкциях очень часто встречаются стойки с малой гибкостью. Попытки использовать формулу Эйлера для вычисления критических напряжений и проверки устойчивости при малых гибкостях вели иногда к весьма серьезным катастрофам, а опыты над сжатием стержней показывают, что при критических напряжениях, больших предела пропорциональности, действительные критические силы значительно ниже определенных по формуле Эйлера.

В настоящее время имеются попытки теоретического решения этой задачи, но они скорее указывают путь к дальнейшим исследованиям, чем дают основания для практических расчетов.

Библиографический список

1. *Карлович, В.М.* Строительная механика[Текст] / В.М. Карлович. – 1891. – 500 с.
2. *Эйлер, Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле [Текст] / Л. Эйлер. – М.-Л.: ГТТИ, 1934. – Прил. 1. Об упругих кривых. – С. 447-572.
3. *Euler L.* De motu vibratorio tympanorum // Nove commentarii Acadamiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. – 1767. – V. 10.
4. *Bailey R.W.* The utilization of creep test data in engineering design // The Institution of mechanical engineers. Proceeding. – 1935. – V. 131. – P. 131-269.
5. *Tetmajer L.* Mittheilungen der Anstalt zur Pruefung von Baumaterialen in Zuerich. 1890. – H. IV.
6. *Hodgkinson E.* Theoretical and experimental researches to ascertain, the strength and best forms of iron beams // Manchester Literary and Philosophical Society, – 1831. – V. 5. P. 407-544.
7. *Ясинский, Ф.С.* О сопротивлении продольному изгибу [Текст] / Ф.С. Ясинский // Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – С. 11-137.

С.Е. Савич – математик и актуарий

Н.С. Ермолаева

Имя этого математика до недавних пор лишь упоминалось в книгах по истории математики. Теперь на него обратили внимание как на специалиста по актуарной науке. В данной статье будет подробнее сказано о его жизни и деятельности на этих двух поприщах без притязаний на полноту. Первой, но краткой прижизненной биографией Савича была статья Д.К. Бобылёва в Энциклопедии Брокгауза и Ефрона [55].

1. Юные годы. Университет

Сергей Евгеньевич Савич родился 9 мая (по старому стилю) 1864 г. в Благовещенске. Его отец – полковник, был командиром Забайкальской артиллерийской бригады; мать – Екатерина Ивановна Носова. У четы было два сына – Александр и Сергей. Оба они родились до брака, но “отец их узаконил” [53].

Сергей получил среднее образование, сначала окончив Первую военную гимназию, а затем 11 июня 1882 г. он получил аттестат известной Ларинской гимназии в Петербурге. Учился он хорошо, т.е. оценки были 5 и 4. В том же году 31 августа он был принят на физико-математический факультет Санкт-Петербургского университета “по разряду математических наук”.

Началась новая жизнь. Из его преподавателей на старших курсах укажем только А.Н. Коркина (интегрирование дифференциальных уравнений), Д.К. Бобылева (механика и высшая динамика), С.П. Глазенапа (астрономия и геодезия), А.А. Маркова (теория вероятностей), И.И. Боргмана (теория электричества), Ю.В. Сохоцкого (высшая алгебра).

Савич был весьма активным студентом. Так, он вместе со своим другом Л.С. Домогаровым в 1883 г. издали объёмный “Курс аналитический геометрии” по лекциям математика и механика Н.С. Будаева [2], где, кроме обычных сведений, много внимания уделялось проекциям и элементам проективной геометрии.

Одной из форм внелекционной работы со слушателями в Петербургском университете были организованы физико-математические кружки, или, как их называли в официальных документах, “математические собеседования”. Первый такой кружок был официально открыт в 1884 г. под руководством профессора физики Ф.Ф. Петрушевского, которого в 1887 г. заменили А.А. Марков и Д.Ф. Селиванов. На заседаниях кружка с докладами выступали также преподаватели и молодые учёные из числа “оставленных при университете для приготовления к профессорскому званию”. С.Е. Савич принимал активное участие в этом кружке. Так, например, в одном из докладов он рассказал о примере непрерывной не дифференцируемой нигде функции, которую позднее включил в своё руководство по теории функций комплексного переменного. В 1884 г. Савич докладывал “О методе пределов” и “Об эквиполенсах Беллавитиса” [3]. Судя по названию последнего доклада, там речь шла о работах итальянского математика Д. Беллавитиса (1803-1880), у которого по этой теме были две работы. В первой из них (1884 г.) речь шла о развитии некоторых идей Л.Карно по "геометрии положения", а во второй (1884 г.) был дан особый метод действий с отрезками для более простого решения графических задач.

В 1886 г. Савич сделал два сообщения: "Обобщение Эйлеровых интегралов I рода" и "Доказательство преобразования Куммера при помощи теории функций комплексного переменного". В этом втором докладе речь, видимо, шла о преобразованиях Э. Куммера для улучшения сходимости рядов, а эта тема тогда интересовала А.А. Маркова, который в 1890 г. опубликовал свой способ улучшения сходимости рядов [11, с. 24].

В 1884 г. студенты получили возможность печатать свои труды. Вышло три сборника. В первом из них, за которым наблюдал профессор физики П.П. Фан-дер-Флит, была напечатана статья Савича "О неэвклидовой геометрии" [20], где он представил основные положения неевклидовых геометрий по работам самого Н.И. Лобачевского, а также Б. Римана, К.Ф. Гаусса и Э. Бельтрами.

Во втором томе Савич напечатал две статьи. В первой из них – "Доказательство одной теоремы теории эллиптических функций по Chasles'ю" [21] – он изложил основные методы "синтетической" (т.е. проективной) геометрии и применил их для доказательства теоремы сложении эллиптических функций, а во второй – "К теории Эйлеровых интегралов" [22] – предложил вывод рядов Лежандра, Гудермана и Бине для логарифма гамма-функции от комплексного аргумента, исходя из выражения последней в виде бесконечного произведения [11, с. 22-24]. За издание второго тома "Записок" отвечали Савич и его друг А.С. Домогаров.

Однако студенческая жизнь Савича была нарушена известием о смерти его родителей. Пришлось просить свидетельство о бедности. Его брат Александр, тогда в возрасте 23-х лет, был хроническим больным и потому работать не мог. Какую-то помощь Савич получал от родственников. Ходатайство было принято, и Савич был освобождён от платы за обучение. Это не было единичным случаем. Так, например, я видела список фамилий 22-х студентов, освобожденных по этой причине от платы [53].

С 50-х годов XIX в. вплоть до 1917 г. в Петербургском университете установилась традиция проводить конкурсы студенческих научных работ "на соискание наград медалями". Порядок конкурсов был такой. В начале года факультеты объявляли ту или иную тему. Написанные работы подавались под девизом. После рассмотрения их профессорами и объявления тех работ, которым присуждались награды (золотая или серебряная медаль, похвальный отзыв), конверт с девизом вскрывался и фамилия автора оглашалась; в противном случае конверт уничтожался, и автор оставался неизвестным. Иногда случалось так, что работа не имела награды, но её могли зачесть в качестве кандидатской диссертации (тогда так называлась дипломная работа). Степень кандидата считалась низшей учёной степенью. В восьмидесятых годах, когда учился Савич, диссертации после их рассмотрения, возвращались их авторам.

На физико-математическом факультете темы по математике объявлялись не каждый год, так как они чередовались с темами по механике, физике, астрономии и с темами естественного отделения этого факультета. В 1885 г., когда Савич заканчивал учёбу, была тема "О различных методах для вычисления определённых интегралов, как точного, так и приближённого". Савич получил за работу по этой тематике серебряную медаль [4, с. 137], а не золотую, как указано, в частности, в [13, с. 405].

Важное событие в жизни Савича произошло, когда он был на последнем четвёртом курсе: это – любовь. Он хотел жениться, но об этом надо было заявить университетским властям, что он и сделал 16 мая 1886 г., но до свадьбы он должен был сдать кандидатский экзамен. Савич успешно его сдал 1-го июня. Тогда же он просил разрешения пользоваться университетской библиотекой (он посещал её с 1881 г. ещё до поступления в университет), мотивируя это тем, что он собирается заниматься наукой. В итоге Савич был утверждён кандидатом физико-математических наук, а в сентябре того же 1886 г. оставлен при университете [5], но без стипендии. Савич был одним из 24-х человек, оставленных без стипендии [17].

Свадьба состоялась 6 июня того же года. Избранницей Савича стала учительница Петровской гимназии Мария Кузьминична Моравская, которой тогда было 26 лет.

2. На преподавательской стезе

После окончания курса и женитьбы встал вопрос о работе. Савич хотел писать магистерскую диссертацию, но надо было думать и о средствах для существования своей семьи. (К сожалению, сведений об этом начальном периоде нет.) Работу он нашёл – стал преподавателем математики в Константиновском артиллерийском училище, где он преподавал аналитическую геометрию до 1900 года и издал свой курс в двух частях [25, 24] (это второе издание, первого я не видела). Курс был весьма обширный и ясно изложен. В 1899 г. Савич преподавал в Пехотном юнкерском училище ведомства Морского министерства. Предположу, что через пару лет после окончания университета он стал работать в какой-нибудь страховой компании и осваивать новое для него дело, а также писать магистерскую диссертацию.

Диссертационная тема, которую выбрал Савич, относилась к новым изысканиям решений дифференциальных уравнений. Как писал Савич в своей диссертации [23], он хотел изложить новую теорию ещё осенью 1888 г., "но затянул", а в 1889 г. В.А. Анисимов опубликовал работу по той же тематике, но в его исследовании не было приложений теории.

Савич изучил обширный ряд работ иностранных учёных. Из русских математиков он указал на работы

М.А. Тихомандрицкого, А.В. Васильева и А.А. Маркова. Составленный Савичем список работ по этой теме, занимающий 9 страниц, имеет и самостоятельное значение.

Основания теории линейных дифференциальных уравнений Савич изложил, следуя И.Л. Фуксу, теоретическую часть о правильных (теперь говорят: "регулярных") интегралах он пояснил на конкретном примере. Одну из четырёх глав он отвёл приложению конформных отображений [9, с. 49]. Отметим, что в диссертации М.А. Тихомандрицкого (1876 г.) исследовались только частные, но важные вопросы, связанные с аналитической теорией дифференциальных уравнений.

Кроме работ ведущих математиков Европы, Савич нашёл одну интересную для него статью некоего Пепэна. (Théophile Pepin – французский иезуит, преподаватель математики в иезуитском коллеже, занимался теорией чисел и той же темой, что и Савич.) В диссертации Савич дал другое доказательство способа Пепэна. Позднее Н.М. Гюнтер (1871-1941), который начал готовить свою магистерскую диссертацию [7], в 1899 г. опубликовал статью [6], где ссылается на диссертацию Савича в той части, где он применил способ Пепэна для решения дифференциальных уравнений второго порядка с регулярными интегралами.

Диссертация Савича была готова к декабрю 1891 г., а издана в 1892 г. Оппонентами, давшими положительный отзыв, были К.А. Поссе, А.А. Марков и А.Н. Коркин [53], который внимательно прочитал и одобрил работу, хотя и не был сторонником новых методов изучения решений уравнений в комплексной области. Защита состоялась 29 апреля 1892 г. и прошла успешно. С осеннего семестра того же года Савич стал приват-доцентом университета.

За весь период работы в университете Савич читал курсы теории функций комплексного переменного, высшей (проективной) геометрии и начертательной геометрии. По первой дисциплине он издал в 1906 г. книгу [34], написанную им по лекциям, которые он читал в Петербургском университете и на Высших женских (Бестужевских) курсах (далее – ВЖК). Там Савич указывает лишь два направления при изложении теории функций – Коши и Вейерштрасса, из которых он по субъективным соображениям отдаёт предпочтение системе изложения в духе Коши, но с добавлением основных результатов Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера. Савич рассматривал и эллиптические функции, отмечая лишь их свойство двоякой периодичности. Кроме того, Савич привёл очень краткий исторический очерк развития этой теории; правда, у него есть неточности и неверные датировки.

Что касается геометрической тематики, то лекции Савича издавали студенты. В начале XX века в университете ими был организован "издательский комитет при физико-математическом факультете". Лекции Савича по высшей геометрии были изданы в первый раз его студентом Коловрат-Червинским в 1903 г. [31], а затем Комитетом – в 1907 г. [36], 1908 г. [38] и в 1911 г. [42]. Отмечу, что все эти курсы были в основном схожи по содержанию, но существенно отличались вступительной частью, в которой автор излагал не только цели и задачи этой теории, но и давал историю проективной геометрии. В издании 1907 г. были указаны лишь цели и задачи этой теории, в других история этой науки рассмотрена более подробно. Особенно мне понравился курс [42], где уже на нескольких страницах была дана история проективной геометрии и приведены библиографические ссылки.

Курс начертательной геометрии издавался дважды: в 1907 г. [37] и в 1910 г. [40]. Последнее издание было дополнено в связи с изменением учебного плана, а потому была отпечатана его новая несколько расширенная программа [41].

Ещё один литографированный курс лекций Савича, изданный в 1905 гг. под названием "Теория эллиптических функций" [32], был очень странным, начиная с его бумажной обложки со стилизованными буквами и разными квадратиками. Дело в том, что эллиптических функций там вообще не было, хотя в предисловии указано, что до изложения теории этих функций надо рассмотреть теорию функций комплексного переменного. Текст не был дописан до конца, где-то теорема не была доказана полностью, где-то имелись приписки другим почерком, возможно, и автора. Был ли этот экземпляр единственным, не знаю. К сожалению, наличие этого издания дало повод говорить, что Савич первым излагал теорию эллиптических функций как самостоятельный предмет без теории функций. Отмечу для примера, что литографированный курс 1911 г. В.Я. Успенского [51] тоже назывался "Теория эллиптических функций", хотя им отводилась только половина всего текста. Название, вероятно, давали студенты – так короче. (Похожий случай: мои студенты называют линейную алгебру "матрицами".) В своё время отдельный курс эллиптических функций читали Е.И. Золотарёв и П.Л. Чебышёв, но там обычно рассматривались эллиптические интегралы.

В 1913 г. в протоколах Совета университета [15, с. 178] появилась такая запись: "Отчислен из состава приват-доцентов Сергей Евгеньевич Савич, как не приступивший к чтению лекций без уважительных причин, с 13 сентября". Обстоятельства мне не известны, но после него геометрию читать было некому.

В 1899 г. в Институте инженеров путей сообщения отмечали 50-летие своего основания. Для юбилейного журнала Савич написал статью [27] по теории конических сечений, изучаемых в проективной геометрии. Савич сформулировал две основополагающие теоремы и дал более простое доказательство второй из них, а именно: "точки конического сечения и касательные в этих точках образуют две полярные формы". Статья Савича в этом журнале появилась потому, что он в то время работал в Министерстве путей сообщения.

На ВЖК Савич работал в 1900-1918 годах. После ухода в 1899 г. Н.Я. Сонина Савич стал "руководителем по учебной части" (т.е. деканом) физико-математического факультета. .

Одновременно с ВЖК в 1905-1914 гг. Савич преподавал в Императорском электротехническом институте, сначала как приват-доцент, так как не было свободной ставки профессора, а в 1906 г. он стал ординарным профессором: после ухода К.А. Поссе ставка профессора стала вакантной. Это было очень важно для Савича для поддержания престижа.

Кроме того, Савич преподавал в Николаевской морской академии сначала аналитическую геометрию, а в 1908 г. ему передал свои курсы дифференциального и интегрального исчисления А.Н. Крылов, которому надо было работать в "Опытовом бассейне". В этой Академии Савич работал до 1912 г.

3. Общественная деятельность Савича

В 1890 г. по инициативе академика В.Г. Имшенецкого в Петербурге было создано Математическое общество. Первое организационное собрание состоялось 20 октября этого года, а первое заседание – 15 декабря. Савич вступил в это общество 15 января 1891 г.

За первое десятилетие активной работы этого общества Савич сделал три доклада. На заседании 17 марта 1892 г. он выступил с докладом по случаю 100-летия со дня рождения Н.И. Лобачевского. Он рассказал о жизни и деятельности Лобачевского, но большую часть времени отвёл его работам по геометрии, отметив их важное значение как в научном плане, так и в философском [16, с. 55]. Здесь ему пригодилась его студенческая работа. 20 ноября того же года Савич выступил с докладом "О рациональных интегралах одного линейного дифференциального уравнения 3-го порядка (приём Pepin'a)", т.е. по теме его диссертации, но там он рассматривал уравнения 2-го порядка. В 1896 г. состоялось мемориальное заседание в связи с 300-летием со дня рождения Рене Декарта, на котором Савич выступил с докладом "О работах Декарта по геометрии". Больше Савич с докладами не выступал, а как часто посещал заседания – неизвестно.

Работая на ВЖК, Савич был членом "комиссии по доставлению средств" для этого учебного заведения, а в 1911 г. он стал товарищем председателя этой добровольной организации. Ещё об одном обществе, в котором участвовал Савич, будет сказано дальше.

В 1898 г. Савич написал статью "О математических трудах Конта" [26], в которой он привёл биографию Огюста Конта, при этом тактично не упомянул о характере его болезни. Основное внимание автор уделил "позитивной философии" Конта, его "иерархии наук" и указал на сильные и слабые стороны Конта, в том числе, на математические ошибки в его трудах, отметив, что эти ошибки были уже замечены Ж. Бертраном. Савич подчёркивал, что Конта интересовала "систематизация имеющегося материала больше, чем стройное логическое развитие основных идей математики" [26, с. 165]. Однако заслуги Конта велики, так как он первым поставил эти важные вопросы и старался на них ответить. Материал этой статьи Савич докладывал на заседании Философского общества при Петербургском университете 7 марта 1898 г. По этому поводу у него была переписка с председателем этого общества философом Э.Л. Радловым (1854-1928), который был и редактором журнала, где напечатана статья Савича о Конте. (В то время Радлов преподавал философию на ВЖК.) Это было основанием для Савича сообщать о своём членстве в этом обществе.

Однако эта тема имела продолжение. Дело в том, что к этому времени в Петербургском университете несколько профессоров различных специальностей решили издать русский перевод трудов Огюста Конта в 6-ти томах. В предисловии к первому тому [29] Савич не повторил свою статью, а на десяти страницах охарактеризовал взгляды Конта на основные проблемы математики, а для удобства читателя он сначала представил структуру наук, которую дал Конт, изложивший свой текст в форме лекций.

После 9 января 1905 г. в России началась первая революция. Студенты тоже откликнулись на это событие. Савич, решив выступить в их защиту, написал большую статью в газете "Право" [33]. Не приводя содержания этой статьи, процитирую два высказывания Савича об образовании. Он писал, что "...действительное распространение научных знаний и поднятие школы на надлежащую высоту также мало занимает нашу администрацию, как и удовлетворение других духовных запросов народа". И далее: "Один крупный представитель и даже вдохновитель современного строя прямо заявил, что сохранить современный порядок управления страной возможно только при полном невежестве народной массы, и что потому подъём народного образования совсем не должен входить в задачи дальновидной администрации, дорожащей этим порядком" [33, № 11, стб. 804 и 805] (текст печатали в два столбца).

Отметим, что в 1907 г. Савич приглашал к себе в гости освободившегося после заключения в Шлиссельбургской крепости Н.А. Морозова (1854-1946), революционера и математика [1].

Университет был закрыт. Чтобы студенты могли продолжить обучение, был найден выход: по договорённости с руководством гимназии К. Мая, где работал Н.М. Гюнтер по совместительству с ВЖК, были предоставлены аудитории. Там Савич и другие профессора читали лекции. Обычно указывают, что это была идея Гюнтера, другие – что Савича. Полагаю, что вёл переговоры с директором именно Савич.

В начале XX века в европейских странах стали уделять особое внимание математическому образованию в средних учебных заведениях, создавались комиссии для рассмотрения этих вопросов. В Петербурге тоже решили обсудить эти вопросы на съезде учителей. Был создан оргкомитет, в который вошёл и Савич. Были найдены помещения для участников съезда: в гимназии К. Мая и в ВЖК, конечно, при участии Савича. Съезд проходил с 29 декабря 1911 г. по 3 января 1912 г. и Савич был одним из трёх вице-президентов этого Съезда. На следующий съезд в Москву он не ездил по понятным причинам: делать доклады он не мог, а вице-президентами были москвичи; к тому же он был занят другой сферой деятельности Ещё надо добавить, что Савич в это время был председателем бюро постоянного комитета по устройству курсов для народных училищ и какое-то время состоял в комиссии литературного фонда. Тогда в Петербурге было много разных добровольных обществ, а в одном из женских обществ состояла супруга Савича. К 1912 г. количество обществ достигло своего апогея – это стало модным: ведь многие общества открывали члены императорской семьи.

4. Вторая профессия С.Е. Савича

С 1875 г. в России появились страховые общества (точнее – эмеритальные кассы) для служащих железных дорог, а конце 1880-х годов в Петербург был переведён Б.Ф. Малешевский (1844-1912), который уже давно занимался вопросами страхования. В Министерстве путей сообщения он стал членом учёного комитета, но вскоре перешёл в министерство финансов. В 1889-1890 и 1894 гг. вышел его объёмный труд в нескольких книгах (2247 страниц) по вопросам страхования со множеством таблиц и пособием по тем разделам математики, которые будут нужны начинающим страховщикам. Благодаря общению с Малешевским, Савич многому научился. Прошло время, и когда был принят закон о новом виде страхования, то Савич принял в этом участие, как в своё время Малешевский, когда требовался закон об иностранных страховых обществах. В 1900 г. Савич написал книгу [28], в которой в доступной форме он изложил основы математического аппарата и самого актуарного дела, так как изучать объёмные труды Малешевского было трудно. В частности, Савич включил в свою книгу, с разрешения Малешевского, одну из составленных им таблиц. В книге Савича есть и необходимые сведения по математике, включая элементы теории вероятностей. В 1909 г. вышло второе расширенное издание этой столь нужной книги [39].

В связи с изменениями пенсионного устава Савич написал краткие пояснения [30] по составлению расчётов по новым правилам и дал образец таких вычислений. Рекомендации предназначалось для служащих земства Псковской губернии, но использовались и в других земствах.

В 1909 г. было создано Общество страховых знаний, одним из четырёх инициаторов которого был Савич. Он был избран товарищем председателя этого общества, состоявшего из четырёх секций, одна из которых была математической. Общество издавало свой журнал, но Савич печатал свои статьи обычно в “Страховом обозрении”, где многие статьи помещались без указания их авторов или только с их инициалами. В этом журнале он напечатал статью [35], которая была издана и отдельно.

Ещё пример деятельности Савича. В 1909 г. рассматривались тарифы Российского союза обществ взаимного от огня страхования. Составленный проект этих тарифов представили четырём экспертам, одним из которых был профессор Савич, а другим – профессор И.М. Занчевский. (так они были представлены).

Отметим, что И.М. Занчевский (1861-1928), профессор и ректор Новороссийского университета в Одессе, был специалистом по теоретической механике, в частности, по пространственной кинематике. В 1907 г. он был отстранён от должности ректора за то, что во время революции 1905-1907 гг. не принимал мер против студенческих революционных выступлений. После двухлетнего следствия, его вызвали в Петербург на суд в Сенате, который запретил ему занимать какую-либо государственную должность. Тогда он стал работать в частных компаниях, возможно, в банке. В 1911 г. он был членом Совета коммерческого общества взаимного кредита: ведь он быстро освоил новую область и. в частности, математическую статистику. В Обществе страховых знаний Занчевский сделал доклад по применению математической статистике в вопросах страхования, который был рекомендован к печати, а в этой поездке он был экспертом по сделанным расчётам. Ещё в 1907 г. Савич в письме к В.А. Стеклову, тогда работавшему на, сообщил, что к нему придёт на завтрак Занчевский и предложил Стеклову “составить ему компанию” [48]. После знакомства Занчевский не раз общался со Стекловым. Есть ещё один документ в фонде академика Стеклова [49]: это предварительный список лиц, которые поедут в 1912 г. на пятый конгресс математиков в Кембридже. В этом списке есть и Савич.

Вернёмся к проблемам Пензенского общества. На вопрос о предложенном перестраховочном тарифе Савич, отметив его формальность, сказал “Этот метод, сам по себе неправильный, решить задачи не может. И вообще для установления огневого тарифа одна статистика, как бы хорошо её не обработали, как бы она ни была хороша, не может служить достаточным основанием потому, что пожарное состояние городских имуществ, как и всех прочих, есть вещь меняющаяся” [12, с. 111].

Итак, Савич был на государственной службе, начиная с Министерства путей сообщения и кончая Министерством внутренних дел (МВД). Он быстро продвигался по служебной лестнице. Так, в 1895 г. он был уже надворным советником и чиновником особых поручений министерства финансов, а также членом страховой компании этого министерства. Чины постоянно повышались: от коллежского асессора до действительного статского советника к 1917 г.

Остаётся открытым вопрос: как он попал на государственную службу? Предположительно, он мог иметь родственников в этих структурах. Ведь когда С.Е. Савич осиротел, то ему помогали родственники. В Петербурге были люди с этой фамилией, из них двое работали в страховых отделах МВД, а один – в Департаменте железных дорог.

В 1895 г. в Брюсселе состоялся Первый международный конгресс актуариев, организованный тремя известными бельгийскими актуариями. На этом конгрессе Савич был избран (как и в последующих конгрессах, за исключением одного) вице-президентом. Поясним, что президентом конгресса всегда было титулованное лицо, а вице-президент – это ведущий какой-либо секции. Так, если секций было восемь, то соответственно было и восемь вице-президентов.

На первом конгрессе Савич рассказал о тех требованиях, которые предъявляются в России к иностранным страховым обществам. На другом конгрессе в Париже в 1900 г., приуроченном к всемирной выставке, он представил историю российских страховых обществ (на конгрессе Савич возглавлял историческую секцию). Савич ездил на эти конгрессы не один. Так, например, один раз с ним ездил Б.С. Ястремский с математическим докладом, а другой – член Общества страховых знаний В. Борткевич, хотя он в то время работал в Берлинском университете.

Ограничусь этим, так как более подробные сведения имеются у других авторов, в том числе и в книге [47]. В.К. Малиновский, её редактор и издатель, снабдил книгу дополнительными материалами из работ Савича и привёл его краткую биографию по статье из энциклопедии [55]. Отметим, что к настоящему времени о деятельности Савича писали и другие авторы.

Конгрессы проходили в разных странах. Восьмой конгресс должен был состояться в 1915 году в Петербурге (Петрограде). Для его подготовки, как было выяснено на примере организации других конгрессов, нужно было года два: это и согласование программы со странами-участницами, и издание докладов с переводом их на разные языки, и т.д. Ещё на первом конгрессе было учреждено Постоянное бюро в Брюсселе, которое обсуждало разные вопросы и осуществляло координацию работ стран-участниц. Савич был постоянным членом этого Бюро. Для конгресса 1915 г. было решено дать от России общий доклад от разных авторов из Общества страховых знаний. Редактирование этой общей работы поручили Савичу, а он был мастером изложения. Однако из-за войны конгресс не состоялся.

Итак, к 1917 г. Савич был уже управляющим директором Второго российского страхового общества, учреждённого в 1835 г.

Закончу этот раздел рассказом И.Я. Депмана: “В те далёкие годы даже среди студентов университета было известно, как отрицательно относились профессора к С.Е. Савичу, который в качестве председателя Объединённой математической комиссии петербургских страховых обществ получал оклад, много раз превышающий профессорский” [8, с. 54]. Без комментариев.

5. После 1917 г.: в России и в эмиграции

После революции 1917 г. ежеквартальный журнал “Общества страховых знаний” продолжал издаваться ещё полгода. Времена настали другие: пришлось не только прекратить издание, но и саму страховую деятельность в прежней её форме. Все денежные средства всех страховых компаний были изъяты.

23 марта 1918 г. был введён государственный контроль за страхованием, для чего был приглашён бывший служащий страховой компании М.Т. Елизаров, а 23 ноября был принят декрет о государственной монополии этого дела. В этом новом учреждении стал работать Б.С. Ястремский. Приглашён он был не только за свою компетентность в статистике, но и потому, что его отец был активным революционером и народовольцем.

Другой член Общества страховых знаний, И.М. Занчевский, бывший ранее членом совета общества взаимного кредита, покинул Петербург в конце 1916 г. Он уехал в Киев, а затем в Одессу, где снова стал ректором, правда, на короткое время. Здесь причина ясна: Занчевский был судим как участник революции 1905-1907 гг.

Что касается С.Е. Савича, то он эмигрировал во Францию, как и некоторые его коллеги по Обществу, например, А.Д. Покотилов. Дата отъезда Савича с семьёй неизвестна, как и дата его появления в Париже. Одни эмигрировали через Финляндию, а других выслали на пароходе “Прейссен” в Германию, (как, например, Д.Ф. Селиванова после его ареста), а уже потом многие переезжали в другие страны. По понятным причинам Савич выбрал Париж, куда приехал с семьёй в 1922 г. или немного раньше. Кстати, в Париже оказались ещё несколько его однофамильцев из Петербурга.

Русская эмиграция, рассчитывая на скорое падение советского режима, полагала, что России будут нужны квалифицированные специалисты. С этой целью была основана Русская академическая группа, во главе которой было три человека. Главной фигурой был Д.П. Рябушинский (1864-1962). Туда входили С.Е. Савич и В.Г. Демченко, который вскоре уехал в Белград. Эта группа инициировала создание Русского народного университета [18] и Русского высшего технического института. Рябушинский там читал теоретическую механику, а Савич – высшую математику, т.е. курсы, которые он читал в России, из них курсы дифференциального и интегрального исчисления были изданы в Париже в 1933 г. (эти книги я не видела). В работе Парижской группы и в преподавании принимали участие и французские профессора [10].

На всё это, как и на стипендии для студентов, нужны были деньги, и они находились. В частности, французское правительство в первое время довольно щедро субсидировало студентов; денежные средства поступали и от некоторых частных лиц. Очень многое для обеспечения русских студентов сделал М.М. Фёдоров из Петербурга. [19]. В 30-е годы деньги стало добывать трудно: во Франции в 1929-36 гг. был экономический кризис, франк был девальвирован.

В 1930 г. Рябушинский организовал философский кружок, а с декабря 1931 г. и до начала Второй мировой войны в Париже существовал “кружок изучения России”, на заседаниях которого заслушивались различные доклады по истории русской науки, в частности, были доклады о русских учёных и их трудах: о П.Л. Чебышёве, А.М. Ляпунове, С.В. Ковалевской, Д.М. Менделееве, Н.И. Лобачевском [14, с. 65]. Полагаю, что о Лобачевском докладывл Савич, хотя он мог рассказать и о других учёных.

После Первой мировой войны, в 1920 г. в Страсбурге состоялся Международный конгресс математиков, на который не были допущены немецкие учёные, а от России был только один Д.П. Рябушинский. Возможно, Савича тогда ещё в Париже не было. Следующий конгресс прошел в 1928 г. в Белграде. В делегации. СССР представляли Академию наук С.Н. Бернштейн и Н.М. Крылов. Русская академическая группа была в лице гидромеханика В.Г. Демченко, тогда уже имевшего степень доктора. Среди членов этого конгресса было 34 делегата из СССР, но в списке участников конгресса было ошибочно указано "С. Савич, Ленинградский университет, СССР". Конечно, для Савича поездки на конгрессы были радостными событиями: ведь он имел возможностью повидать своих знакомых и узнать новости; поговорить с Н.М. Гюнтером.

Следующий конгресс математиков в 1932 г. проходил в швейцарском Цюрихе. На этом конгрессе было 700 участников. В списке делегаций от Франции от Русского высшего технического института (Париж) были профессора Д. Рябушинский и С. Савич, а СССР и отдельно Украину представляли 12 человек.

Среди российской делегации был и Э. Кольман, выступивший с докладом о математических открытиях Карла Маркса. Зарубежные математики, говорят, очень смеялись, а вот какая реакция была у Савича, который опубликовал заметку, в которой написал кто из русских эмигрантов приехал на конгресс и кто из СССР, а это были: "П.А. Александров, Н.Г. Чеботарёв и Э. Кольман, последний, как представитель Академии, имевший наглость выступить с докладом на нелепую тему "Марксистское обоснование дифференциального исчисления". Из прежней профессуры записались на конгресс несколько серьёзных математиков, но никто из них в Цюрих не прибыл" [46].

Первый послевоенный конгресс актуариев проходил в Лондоне, где Савич был просто участником, но уже от Франции. В.К. Малиновский в [47] пишет, что Савич работал во Франции как актуарий, но не указывает когда и в каких обществах он работал. Конечно, Савича хорошо знали в Париже по Международным конгрессам.

Прошли годы. Возможно к началу Второй мировой войны Савич уже не работал. Для Франции война началась в 1939 г., немецкие войска оккупировали большую часть Франции, а в 1942 г. и оставшуюся свободную зону. Оставаться в Париже было небезопасно, тем более, для русских. Полагаю, что семья Савичей переехала в нейтральную Швейцарию. Об этом можно судить по краткой заметке в газете "Русские Новости", где родственники Савича сообщили, что профессор математики Сергей Евгеньевич Савич скончался в Швейцарии 23 июня 1946 г. Затем его тело было перевезено в Париж. Панихида состоялась 1 июля в верхней церкви собора Св. Александра Невского на улице Дарю, № 12 [54]. Место погребения мне не известно. Могу только высказать предположение, что он мог быть похоронен на кладбище Батиньоль, что почти в черте города, так как там был похоронен Иван Яковлевич Савич (1828-1943), выпускник Петербургского университета, публицист.

Подводя итоги, можно сказать, что хотя Савич творческим математиком не стал, но он был прекрасным лектором, ясно излагающим свой предмет устно и в печати. Он очень любил свою преподавательскую работу и не покидал её даже тогда, когда он был достаточно состоятельным в финансовом плане. Савич был мастером изложения своих мыслей и чужих теорий. Он любил быть на людях, особенно любил собрания и конгрессы, и немало сделал общественно полезного. Особо надо отметить его вторую профессию: он стал актуарием высокого ранга.

Библиографический список

1. Архив Российской академии наук [Текст]. – Ф. 543. – Оп. 4. – № 1627.
2. *Будаев, Н.* Курс аналитической геометрии, составленный по лекциям профессора Н. Будаева С. Савичем и А. Домогаровым [Текст] / Н. Будаев. – Изд. студентов 1-го курса. – Типо-литогр. С.Ф. Яздовского, 1883. – 512 с.
3. Годичный акт императорского Санкт-Петербургского университета. 8 февраля 1885 года [Текст]. – СПб.: Типо-литогр. А.М. Вольфа, 1885. – [за 1884].
4. Годичный акт императорского Санкт-Петербургского университета. 8 февраля 1886 года [Текст]. – СПб.: Типо-литогр. А.М. Вольфа, 1885. – [за 1885].
5. Годичный акт императорского Санкт-Петербургского университета. 8 февраля 1888 года [Текст]. – СПб.: Типо-литогр. А.М. Вольфа, 1888. – [за 1887].
6. *Гюнтер, Н.М.* О линейных уравнениях с правильными интегралами, интегрируемых в гипергеометрических функциях [Текст] / Н.М. Гюнтер // Сборник Института инженеров путей сообщения императора Александра I. – Спб.: тип. Ю.Н. Эрлих, 1899. – Вып. L. – С. 305-342.
7. *Гюнтер, Н.М.* О приложениях теории алгебраических форм к интегрированию линейных дифференциальных уравнений [Текст] / Н.М. Гюнтер. – СПб.: типогр. Ю.Н. Эрлих, 1903.
8. *Депман, И.Я.* С.-Петербургское математическое общество [Текст] / И.Я. Депман // Историко-математические исследования / под ред. Г.Ф. Рыбкина и А.П. Юшкевича. – М.: ГИФМЛ, 1960. – Вып. 13. – С. 11-106.
9. *Ермолаева, Н.С.* Петербургские математики и теория аналитических функций [Текст] / Н.С. Ермолаева // Историко-математические исследования. – М.: Изд-е Международного фонда истории науки, 1994. – Вып. 35. – С. 23-55.

10. *Ермолаева, Н.С.* Русское математическое зарубежье (первая волна) [Текст] / Н.С. Ермолаева // Природа. – 1994. – № 11. – С. 80-86.
11. *Ермолаева, Н.С.* Студенческие математические кружки в Петербургском университете [Текст] / Н.С. Ермолаева // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН. Годичная научная конференция / Ред. В.М. Орёл. – М.: "Янус-К", 1997. – Ч. 2. – С. 22-28.
12. Исторический очерк двадцатипятилетней деятельности Пензенского и Российского союзов обществ взаимного от огня страхования [Текст]. – 1890-1915. [б.м.]: Издание Российского союза обществ взаимного от огня страхования, 1915.
13. История отечественной математики [Текст]. В 4 т. Т. 2. 1801-1017. – Киев: "Наукова думка", 1967.
14. *Ковалевский, П.Э.* Зарубежная Россия. Дополнительный выпуск [Текст] / П.Э. Ковалевский. – Paris: Librairie des Cinq Continents, 1971. 347 p.
15. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за 1913 г. [Текст]. – СПб.: Изд-во универс., 1914. – № 69.
16. Протоколы С.-Петербургского математического общества. 1890-1899 [Текст]. – СПб.: типогр. В. Киршбаума, 1899.
17. Российский Государственный Исторический Архив [Текст]. – Ф. 733. – Оп. 27. – Д. 316.
18. Русский народный университет в Париже. Основан в 1921 году. Обзор деятельности за первые десять лет существования [Текст]. – Paris, 1931, 25 с.
19. Русская молодёжь в высшей школе за границей. Деятельность Центрального комитета по обеспечению высшего образования русскому юношеству за границей. 1922-23 – 1931-32 учебные годы [Текст]. – Париж, 1933. – 62 с.
20. *Савич, С.* О неэвклидовой геометрии [Текст] / С. Савич // Записки физико-математического общества студентов Императорского С.-Петербургского университета. Год первый. – 1884. – СПб.: тип. Морского министерства, в главном адмиралтействе, 1885. – С. 91-123.
21. *Савич, С.* Доказательство одной теоремы теории эллиптических функций [Текст] / С. Савич // Записки студентов физико-математического факультета Императорского С.-Петербургского университета. – 1885. – СПб., 1886. – Том 2. – С. 26-45.
22. *Савич, С.* К теории Эйлеровых интегралов [Текст] / С. Савич // Записки студентов физико-математического общества Императорского С.-Петербургского университета. – 1886-7. – СПб.: типогр. Х.Ш. Гертнер, 1886. – Том 3. – С. 76-83.
23. *Савич, С.Е.* О линейных дифференциальных уравнениях с правильными интегралами [Текст] / С.Е. Савич. – СПб.: типогр. Академии наук, 1892. – 162 с.
24. *Савич, С.Е.* Аналитическая геометрия. Курс младшего класса Константиновского Артиллерийского училища [Текст] / С.Е. Савич. – Изд. 2-е. – СПб., литография Константиновского Артиллерийского училища, 1895. – Ч. 2. – 111 с.
25. *Савич, С.Е.* Аналитическая геометрия. Курс младшего класса Константиновского Артиллерийского училища [Текст] / С.Е. Савич. – Изд. 2-е. – СПб., литография Константиновского Артиллерийского училища, 1896. – Ч. I. – 200 с.
26. *Савич, С.Е.* О математических трудах Конта [Текст] / С.Е. Савич // Журнал министерства народного просвещения. Седьмое десятилетие. – СПб.: тип. "В.С. Балашев" и Ко, 1898. – Ч. CCCXVII. – С. 152-169.
27. *Савич, С.Е.* Заметка по теории конических сечений [Текст] / С.Е. Савич // Сборник Института инженеров путей сообщения императора Александра I. – Спб.: тип. Ю.Н. Эрлих, 1899. – Вып. L. – С. 157-160.
28. *Савич, С.Е.* Элементарная теория страхования жизни и трудоспособности. По поручению министерства путей сообщения [Текст] / С.Е. Савич. – СПб.: Издание железнодорожного пенсионного комитета, 1900. – 351 с.
29. *Савич, С.Е.* От редактора первого тома [Текст] / С.Е. Савич // Огюст Конт. Курс положительной философии в шести томах. Полный перевод с последнего французского издания под редакциею, с примечаниями и статьями профессоров С.Е. Савича, С.П. Глазенапа, О.Д. Хвольсона, Д.И. Менделеева, К.А. Тимирязева, А.С. Лаппо-Данилевского, И.М. Гревса и Н.О. Лосского, с приложением статьи Н.И. Кареева. – СПб.: Книжный магазин тов-ва "Посредник", 1900. – Т. 1. – С. VI-XVI.
30. *Савич, С.Е.* Необходимое дополнение, разъясняющее некоторые §§ устава пенсионных касс служащих в Земстве Псковской губернии [Текст] / С.Е. Савич. – Псков: тип. Псковского губернского ведомства, 1901.
31. *Савич, С.Е.* Высшая геометрия. Лекции, читанные в Императорском С.-Петербургском университете в 1902/03 г. [Текст] / С.Е. Савич. – Изд-ие студента Коловрат-Червинского. – СПб.: [литогр.] 1903. – 93 с.
32. *Савич, С.Е.* Теория эллиптических функций [Текст] / С.Е. Савич. – СПб.: Литогр. Богданова, 1904-5.
33. *Савич, С.Е.* Забастовка в высших учебных заведениях [Текст] / С.Е. Савич // Право. – 1905. – № 11, 12.
34. *Савич, С.Е.* Теория функций комплексного переменного [Текст] / С.Е. Савич. – СПб., типогр. Императорской Академии наук, 1906. – 203 с.
35. *Савич, С.Е.* Влияние размера огневого риска на ставку [Текст] / С.Е. Савич // Страховое обозрение. – СПб.: типогр. А. Бенке, 1906. – № 8, 9. – 14 с.
36. *Савич, С.Е.* Высшая геометрия. По лекциям, читанным в 1906 [Текст] / С.Е. Савич. – Спб.: Издательский комитет при физико-математическом факультете С.-Петербургского университета, 1907. – 228 с.

37. *Савич, С.Е.* Начертательная геометрия. По лекциям профессора С.Е. Савича [Текст] / С.Е. Савич. – СПб.: Изд. ком. при физ-мат фак. СПб, 1907.
38. *Савич, С.Е.* Высшая геометрия. По лекциям профессора С.Е. Савича [Текст] / С.Е. Савич. – Изд. 2-ое. – Издат. комитет при физ.-матем. факультете СПб. университета. – Литогр. Богданова, 1908. – 228 с.
39. *Савич, С.Е.* Элементарная теория страхования жизни и трудоспособности. По поручению министерства путей сообщения [Текст] / С.Е. Савич. – Изд. 2-е. – СПб., 1909. – 336 с.
40. *Савич, С.Е.* Начертательная геометрия [Текст] / С.Е. Савич. – СПб.: Издат. комитет при физико-математическом факультете С.-Петербургского университета, 1909-1910. – 228 с.
41. *Савич, С.Е.* Программа по начертательной геометрии[Текст] / С.Е. Савич. – СПб.: Издательский комитет при физико-математическом факультете С.-Петербургского университета, 1910. – 4 с.
42. *Савич, С.Е.* Высшая геометрия. По лекциям профессора С.Е. Савича [Текст] / С.Е. Савич. – Изд. 3-е. – Издательский комитет при физико-математическом факультете СПб. университета. – Литогр, Богданова, 1911. – 238 с.
43. *Савич, С.Е.* [Некролог] [Текст] // Страховое обозрение. – СПб., 1912. – № 5. – С. 322-333.
44. *Савич, С.Е.* Памяти Б.Ф. Малешевского. Речь, произнесённая С.Е. Савичем в общем собрании членов Общества Страховых знаний 31 января 1913 г. [Текст] / С.Е. Савич // Известия Общества Страховых Знаний. – СПб., 1913. Вып. 9. – С. V-VIII.
45. *Савич, С.Е.* Теория функций комплексного переменного [Текст] / С.Е. Савич. – Изд-е второе, исправленное и дополненное. – СПб.: книгоиздательство Естествоиспытатель", 1915. – 216 с.
46. *Савич, С.Е.* Международный конгресс математиков [Текст] / С.Е. Савич // Вестник Русского высшего технического института во Франции. – 1933. – Вып. 6. – № 6 (25). – С. 97-98.
47. *Савич, С.Е.* Элементарная теория страхования жизни и трудоспособности [Текст] / С.Е. Савич. – Изд. 3-е, исправл. с дополнениями / Отв. ред. В.К. Малиновский. [С предисловием редактора]. – М.: "Янус-К", 2003. – 495 с.
48. Санкт-Петербургский филиал архива РАН [Текст]. – Ф. 162. – Оп. 2. – Д. 410.
49. Санкт-Петербургский филиал архива РАН [Текст]. – Ф. 162. – Оп. 3. – Д. 99.
50. Съезд Русского национального Объединения 5-12 июня 1921 года [Текст]. – Париж: Русский национальный комитет, 1921. – 31 с.
51. *Успенский, Я.В.* Теория эллиптических функций [Текст] / Я.В. Успенский. – СПб.: Издательский комитет при физико-математическом факультете СПб. университета. – Литогр. Богданова, 1911. – 228 с.
52. Центральный Государственный Исторический Архив [Текст]. – Ф. 14. – Оп. 3. – Д. 22766.
53. Центральный Государственный Исторический Архив [Текст]. – Ф. 14. – Оп. 3. – Д. 317.
54. *Чуваков, В.Н.* Русский зарубежный некрополь (1917-1967) [Текст] / В.Н. Чуваков. – М., 1967. – 709 с.
55. Энциклопедический словарь [Текст]. – СПб.: Изд. Ф.А. Брокгауз и И.А. Ефрон, 1900. – Т. 28а. – С. 35.

О некоторых неопубликованных документах из архива академика А.А. Андронова

Е.В. Губина

В 2011 году отмечалось 110 лет со дня рождения академика А.А. Андронова. Этой дате были посвящены доклад [1] и публикация [2].

За прошедший год в фонде А.А. Андронова Архива РАН удалось обнаружить ряд документов, которые, насколько известно автору, ранее не публиковались; в частности, в [3] они не упоминаются.

Целая серия из этих документов показывает глубокую озабоченность А.А. Андронова качеством образования в стране и в частности – в Горьковском (сейчас Нижегородском) университете, в котором он работал с 1931 года до последних дней своей жизни. По этому поводу А.А. Андронов писал письма[1] И.В. Сталину, черновики которых сохранились в Архиве РАН. Приведём характерные фрагменты из этих черновиков.

"Глубокоуважаемый Иосиф Виссарионович!

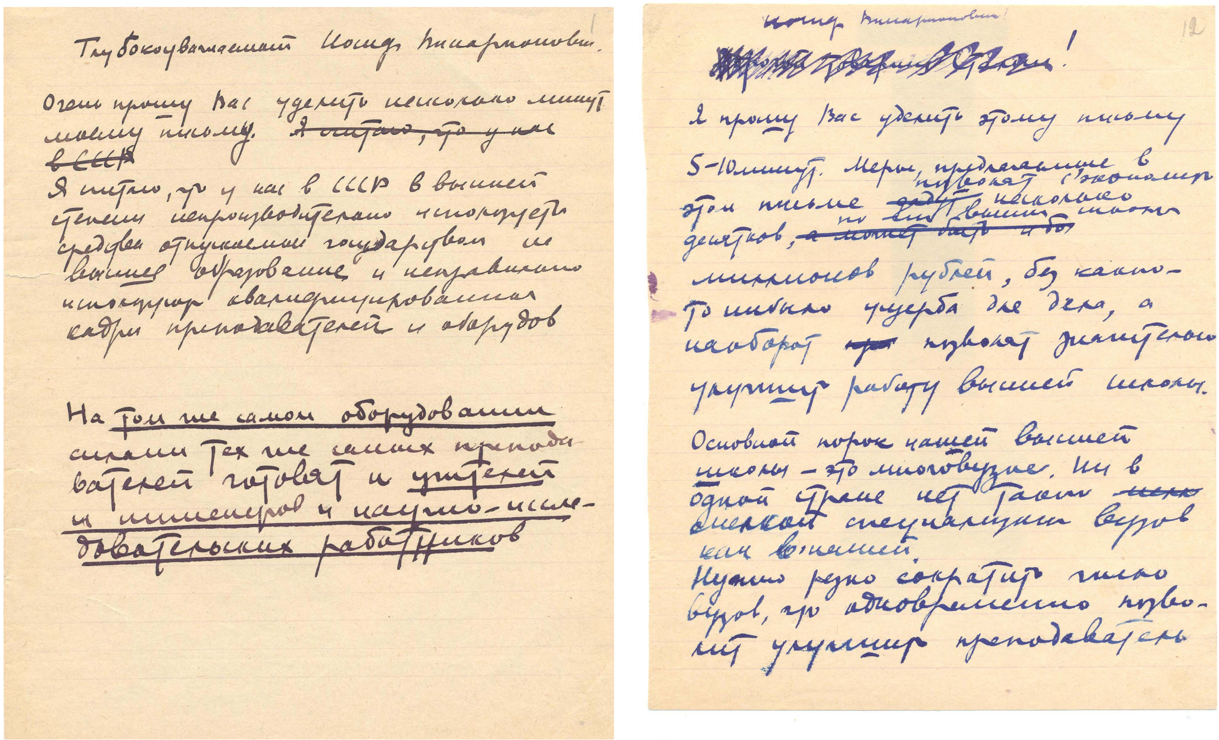
Очень прошу Вас уделить несколько минут моему письму. Я считаю, что у нас в СССР в высшей степени непроизводительно используются средства, отпускаемые государством на высшее образование, и неправильно используются квалифицированные кадры преподавателей и оборудов[ание].

На **том же самом оборудовании** и силами тех же самых преподавателей готовят и **учителей, и инженеров и научно-исследовательских работников**" (Д.190. Л.1)[2].

"Наши ВУЗы, в особенности провинциальные, очень плохо оборудованы, обучение в них стоит очень дорого, преподаватели в них в громадном большинстве недостаточно квалифицированы, а т.к. даже [в] малоквалифицированных преподавателях чувствуется нехватка, процветает совместительство. . ." (Д.190. Л.2).

[1]Автору неизвестно, были ли эти письма отправлены адресату. По-видимому, в настоящее время можно надеяться выяснить это только изучая архив Сталина.

[2]Здесь и ниже даны ссылки на номер дела ("Д") и листы ("Л") документа из описи 1 фонда 1938 собрания документов А.А. Андронова в архиве РАН.



Глубокоуважаемый Иосиф Виссарионович!

Очень прошу Вас уделить несколько минут моему письму. ~~Я считаю, что у нас в СССР~~

Я считаю, что у нас в СССР в высшей степени непроизводительно используются средства отпускаемые государством на высшее образование и неправильно используются квалифицированные кадры преподавателей и оборудование.

На том же самом оборудовании силами тех же самых преподавателей готовят и учителей и инженеров и научно-исследовательских работников

Иосиф Виссарионович!

Я прошу Вас уделить этому письму 5-10 минут. Меры, предлагаемые в этом письме позволят сэкономить несколько по высшей школе десятков, миллионов рублей, без какого-либо ущерба для дела, а наоборот позволят значительно улучшить работу высшей школы.

Основной порок нашей высшей школы – это многовузие. Ни в одной стране нет такой мелкой специализации вузов как в нашей.

Нужно резко сократить число вузов, что одновременно позволит улучшить преподаватель

Рис. 1. Черновики писем А.А. Андронова Сталину (уменьшено)

“Иосиф Виссарионович!

Я прошу Вас уделить этому письму 5-10 минут. Меры, предлагаемые в этом письме, позволят сэкономить по высшей школе несколько десятков миллионов рублей, без какого-либо ущерба для дела, а наоборот, позволят значительно улучшить работу высшей школы.

Основной порок нашей высшей школы – это многовузие. Ни в одной стране нет такой мелкой специализации вузов, как в нашей. Нужно резко сократить число вузов, что одновременно позволит улучшить преподавательский состав и улучшить оборудование оставшихся вузов.

В гор. Горьком – 3 технических вуза: индустриальный (основные специальности: автомобилестроение, судостроение, химия); водный (судостроение, эксплуатация судов); строительный (производство строительных работ). Все эти три вуза могут быть объединены в один – политехнический институт.

2 вуза наркомпроса: университет и педагогический институт. Нужно оставить один вуз – университет, возложив на него подготовку преподавателей. . . ” (Д.190. Л.12, 13).

В тех же черновиках – заметки и рассуждения об организации учебного процесса, о том, как должны быть организованы лекции:

“. . . Например, профессор, доктор физ. мат. наук Г.С. Горелик замечательно читает лекции по физике. Его в среду слушает 60-70 человек университетских студентов. Но в désинституте параллельно читает[ся] такой же курс физики значительно более слабым лектором, которого слушают 20-30 человек. Аналогичные примеры можно привести по ряду других университетских курсов. Я сам в университете читаю курс теории электромагнитного поля, причем меня слушают 20-30 человек. Аналогичный курс в пединституте читает[ся] другим лектором, которого посещают [около] 15 человек. . . ” (Д.190. Л.6).

В черновике письма неустановленному адресату читаем:

“. . . хочу поделиться с Вами моими впечатлениями от последнего из вариантов проекта постановления об университетах, который мне показали в Ц.К. и который одобрен рядом организаций. Этот проект мне показался неудовлетворительным в ряде пунктов.

1. Нет ясной идеи о необходимости **децентрализации науки** [неразборчиво]. В связи с этим нет **никаких** материальных преимуществ для провинциальных ученых – ни в отношении зарплаты, ни в отношении пенсии, ни в отношении личной ино-литературы и заграничных командировок, ни тем более в отношении [фраза не закончена].

2. Нет ясной идеи о необходимости замещения **университетских** кафедр людьми, имеющими **научное имя**. В связи с этим нет ничего ни о составе совета университета, ни о том, кто может быть **доцентом** университета, ни о выборности ректора и деканов, ни о том, чтобы **существенно** снизить часы нагрузки. . .

3. Нет ясной идеи о том, что нужно **коренным** образом изменить материальную обстановку самой работы

ученых (библиотеки, лаборатории, аудитории)" (Д.188. Л.3).

Очевидно, многое из приведённых выше размышлений А.А. Андронова актуально и сегодня.

Из многочисленных публикаций об А.А. Андронове хорошо известно, какие высокие требования он предъявлял к уровню научной работы и какое внимание уделял подготовке молодых ученых. Приводимые ниже заметки Андронова ещё раз это подтверждают:

"**Академическая работа, научная работа – это основное.** Общественная работа должна помогать студентам учиться, должна заставить студента чувствовать себя граждан[ином] нашей великой социалист[ической] родины, но она не должна мешать научной работе. Есть постановление правит[ельства] о том, что общест[венная] работа огран[ичена] 4 час[ами] в неделю – оно активистами не выполн[яется]" (Д.190. Л.7).

Андронов делает выписки из размышлений выдающегося русского физика, профессора Московского университета Петра Николаевича Лебедева:

"Давая тему начинающему, т.е. взявшись за задачу **формирования** будущего ученого, мы должны совершенно ясно себе представить и свою нравственную ответственность перед данным лицом. Искалечить такого начинающего нет ничего легче: дать ему интересную тему, но такую, которая ведет к ряду неожиданных промежуточных трудностей – он затянется на деталях, проработает больше известного срока, на опыте разочаруется, и дело готово. Конечно, из 20 случаев в 19 это будет не жалко, но сказать вперед, кого из 20 жалко потерять – невозможно, а поэтому всех начинающих надо ставить в выгодные для них условия. Поэтому начинающему вы имеете нравственное право давать только такую задачу, вполне определенный и **достижимый** результат которой вы **безусловно** можете гарантировать." (Д.190. Л.8).

Современники А.А. Андронова неоднократно отмечали необыкновенную широту его интересов. Например, Г.С. Горелик пишет: "А.А. Андронов был цельным жизнерадостным человеком, очень много знавшим и жадно всем интересовавшимся. При всей своей целеустремленности в научных исследованиях он был полной противоположностью тому, что имеют в виду, когда говорят "узкий специалист". Он обладал обширным умом и богатой разносторонней культурой. В круг его научных интересов входили: вся физика, математика, техника, астрономия. Его живейшим образом интересовало все естествознание, медицина, история, литература, живопись..." [4]. Это ещё раз подтверждают выписки Андронова (Д.188. Л.1, 1об., 2) из книги "Разговоры с Гете" (издательство "Academia", 1934) Иоганна Петера Эккермана, долголетнего секретаря Гете:

"Допустим, что мы в течение прошлых столетий имели бы в Германии только две столицы, Вену и Берлин, или только одну; можно вообразить себе, на каком уровне стояла бы тогда немецкая культура! Но это было бы гибельно также и для всеобщего благополучия, которое возвышается рука об руку с культурой".

"Германия обладает более чем двадцатью рассеянными по всему государству университетами и имеет свыше сотни столь же широко распространенных публичных библиотек".

Здесь стоит пометка Андронова: "[Разговор 23 октября 1828 года]".

Далее А.А. Андронов пишет: "Изложение точки зрения Гете: "Централизация всей культурной жизни страны вокруг одной или двух столиц неминуемо привела бы к ущербу культурного развития, которое опирается в Германии на множество созданных всем ходом ее истории локальных центров и развертывается в богатых и необычайно разнообразных формах университетского образования, гимназий, технических и промышленных училищ, многочисленных публичных библиотек, рассеянных по всей стране, а также многочисленных театров, художественных галерей и музыкальных организаций" (Предисловие Асмуса)".

Перейдём теперь к другой группе документов, непосредственно связанной с собственно научной деятельностью А.А. Андронова. При этом, как многократно отмечалось, "в А.А. Андронове мы должны видеть не только крупного ученого, но и большого труженика в области истории науки. Разумеется, интеллигентный и любознательный человек (каким и был А.А. Андронов) не может не интересоваться историей той науки, которой он посвятил жизнь" [5]. Это ещё раз иллюстрируют "Заметки А.А. Андронова по поводу работ Ляпунова" (Д.122. Л.1-9, 9об.), в которых Андронов тщательно конспектирует терминологию, основные определения и теоремы "2-ой методы Ляпунова" и тут же пишет заметки, касающиеся биографии А.М. Ляпунова:

"**А.М. Ляпунов**

Родился 25 мая 1857 в Ярославле. Умер 3 ноября 1918 года. С 1864 (т.е. с 7-ми летнего возраста) жил в имении "Балабаново" недалеко от Теплого стана до 1870. В 1870 был принят в третий класс Нижегородской гимназии (Дворянского института), которую окончил в 1876 году с золотой медалью.

А.М. Ляпунов, третий по значению русский математик после Н.И. Лобачевского и Чебышева".

И далее следуют записи такого же биографического характера о другом выдающемся математике с нижегородской родословной – о В.А. Стеклове.

А.А. Андронов вел большую научную переписку. Приведем фрагменты из его письма А.Н. Колмогорову (Д. 230. Л. 1-3).

"Глубокоуважаемый Андрей Николаевич!

Простите за задержку ответа: я был долгое время в Москве, а потом был занят и лишь вчера смог заняться вплотную присланным Вами переводом. Книгу Шмидта "Прямое регулирование" **перевести и издать** стоит. Это небольшая и, в **общем**, доступная книжка.

Однако в ней есть ряд существенных дефектов.

1) Исторические замечания, рассыпанные во многих местах книги, необъективны, а иногда прямо ошибочны.

2) Претензии автора на особую значимость полученных им результатов, про-скальзывающие в ряде мест книги, – неосновательны.

3) Неудовлетворительны математические дополнения. Не в том смысле, что те задачи, о которых говорит Шмидт, могут быть решены аналитически без использования метода **численного** интегрирования (что можно сделать), а в том смысле, что в этом дополнении не сформулированы достаточно четко те математические задачи, которые Шмидт фактически решает и которые он считает математическими моделями исследуемых им регуляторов.

4) Неправильно или скорее требует поправок и разъяснений замечание автора (в предисловии) об отсутствии в литературе по регулированию таких работ, которые удовлетворительно решают задачи, выдвигаемые практикой.

Поэтому, на мой взгляд, прежде чем выпускать эту книжку нужно:

а) дать другую аннотацию <. . . >

б) сократить предисловие, выбросив (или переделав) всю историческую часть, в которой не отражена роль фактических создателей теории регулирования – Максвелла, Вышнеградского, Стодолы.

в) дать новое примечание к следующим страницам <. . . >

г) изменить или снабдить примечаниями математическое дополнение (часть Третью) с тем, чтобы в нем были отчетливо сформулированы (в виде системы дифференциальных уравнений с указаниями о том, как проводится необходимое (из-за разрывного характера кулоновского трения) доопределение) те математические задачи, которые приближенно решает автор.

10. IV. 48. А.А. Андронов

Позже (документ не датирован) Андронов возвращается к теме издания книг по теории регулирования:

“Глубокоуважаемый Андрей Николаевич!

Когда-то Вы мне писали, что интересуетесь иностранными книгами по теории регулирования, заслуживающими перевода и издания в СССР. Несколько дней назад я познакомился с маленькой книжкой Оппельта “Основные законы регулирования”. Ганновер, 1947.[1] Книжка Оппельта является, по моему мнению, лучшей из известных мне элементарных книг по современной теории регулирования. При небольшом объеме эта книга содержит несравненно более современный материал и охватывает более широкий круг вопросов, чем издаваемая Вами сейчас книжка Шмидта, **вышедшая в Германии еще в 1939 году.** Если книга Оппельта будет принята Вами к переводу и к изданию, то я рекомендовал бы в качестве переводчика кандидата технических наук П.Г. Зубкова, а в качестве редактора доктора технических наук М.А. Айзермана. М.А. Айзерман имеет экземпляр этой книжки и может дать ее Вам для ознакомления”.

В заключение приведём фрагменты из переписки А.А. Андронова с И.Г. Петровским, которая представляет определённый интерес с точки зрения истории исследований по 16-ой проблеме Гильберта. В письме А.А. Андронову и А.Г. Майеру (Д.330. Л.1, 1об., 2, 2об.) от 17.04.1934 И.Г. Петровский пишет:

“Дорогие Александр Александрович и Артемий Григорьевич!

Простите, пожалуйста, за задержку с высылкой оттиска. Она объясняется тем, что я, как видите, уехал в Днепропетровск и торопился.

Вот пример диф. ур-ния вида $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, где M и N – многочлены, имеющего довольно много предельных циклов ($\frac{n^2}{8}$). Пусть $P_n\,(x,y) = 0$ есть полином степени n, который представляет действительную кривую, состоящую из $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ [+1] овалов. Такие кривые, как показал K. Rohn и Hilbert, существуют[2]. +1 поставлена в квадратные скобки потому, что ее стоит прибавлять только при четном n. Тогда все эти овалы будут предельными циклами для уравнения $\frac{dy}{dx} = -\frac{P'_x}{P'_y} + P$.

Действительно, 1) все они служат интегральными кривыми этого уравнения. 2) Овалы семейства кривых $P_n(x,y) = C$ являются вблизи овалов $P_n(x,y) = 0$ циклами без прикосновения по терминологии Poincaré, потому что вблизи этих овалов $P_n(x,y)$ с каждой стороны от овала сохраняется один и тот же знак[3]. Таким образом, мы получили пример диф. уравнения вида $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{N}$, где степень M равна $2n-1$, а степень n[4] равна $n-1$, которое имеет $\frac{n(n-1)}{2}$ [+1][5] предельных циклов. В частности при $n=1$[6] получается диф. уравнение, где M третьей степени и N – первой, имеющее 1 предельный цикл.

Было бы удивительно, если бы не удалось, варьируя коэффициенты M и N , увеличить число предельных циклов только что построенного дифференциального уравнения. Но никаких примеров, подтверждающих это предположение, у меня нет. Предположение о максимальном числе предельных циклов $\frac{n^2}{2}$ у меня возникло только по аналогии с тем, что известно для алгебраических кривых.

[1]По-видимому, речь идёт о книге W. Oppelt, Principles of Automatic Regulation. Wolfenbiittel, Hannover, 1947.

[2]Здесь у И.Г. Петровского неточность – это показал A. Harnack в 1876 г.

[3]Все эти овалы можно считать конечными. (*Примечание И.Г. Петровского*)

[4]Здесь в письме описка – нужно N.

[5]Здесь нужно $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ [+1].

[6]Опять описка – должно быть $n=2$.

Я с большим интересом жду Ваших сообщений. Пожалуйста, пишите подробнее о всех полученных результатах.

Ваш Петровский

P.S. Пишите по моему московскому адресу, т.к. скоро я вернусь".

Другое письмо на ту же тему (Д. 330. Л. 6) датировано 15.07.1947:

"Дорогой Александр Александрович!

Во время нашей последней встречи Вы говорили, если я не ошибаюсь, что кто-то из Ваших учеников построил пример уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – многочлены второй степени, с четырьмя предельными циклами. Так ли это? Если я не ошибся, напишите, пожалуйста, как расположены эти циклы.

Ваш И. Петровский".

И черновик ответа А.А. Андронова (Д.246. Л.1):

"Дорогой Иван Георгиевич!

Я получил Ваше письмо. Здесь какое-то **недоразумение.** Н.Н. Баутин доказал, что максимальное число циклов в **окрестности фокуса** для уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – многочлены второй степени, равно **трем**. В этом случае все циклы, окружают фокус и вложены друг в друга. Я Вам сказал, что у нас есть подозрение (но не доказательство), что четырех циклов не может быть у такого уравнения даже в общем случае (а не в окрестности фокуса)" [1]

Библиографический список

1. *Губина, Е.В.* Академик А.А. Андронов и его школа (к 110-летию со дня рождения А.А. Андронова) [Текст] / Е.В. Губина // Труды IX Международных Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011. – С. 261-266.
2. *Губина, Е.В.* Академик А.А. Андронов (к 110-летию со дня рождения) [Текст] / Е.В. Губина // Математика в высшем образовании. – 2011. – № 9. – С. 73-82.
3. Александр Александрович Андронов (1901-1952) [Текст]. – Н.-Новгород: Изд-во ННГУ им. Лобачевского, 2001. – 287 с.
4. *Горелик, Г.С.* Жизнь и труды А.А. Андронова [Текст] / Г.С. Горелик // Памяти Александра Александровича Андронова. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – С. 13-19.
5. *Горяченко, В.Д.* Андронов Александр Александрович [Текст]: монография / В.Д. Горяченко. – Н.-Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1992. – 64 с.

Жизнь и творчество Франсишко Гомеша Тейшейры (1851-1933)

А.А. Харламов, В.И. Харламова

Начнём рассказ о жизни португальского математика Франсишко Гомеша Тейшейры (Francisco Gomes Teixeira) с известных фактов его биографии. В нашей работе мы использовали данные биографии Тейшейры из книги Рудольфа Гимараеша (Guimaraes, 1914); биографию, написанную Энрики де Вильена (Vilhena, 1936); диссертацию Грасы Алвеш о Тейшейре (Alves, 2004) и биографический альбом Наталии Б. да Провиденсии (Providкncia, 2011). Документы и переписку Тейшейры мы получили в архивах Университетов Куимбры и Порту, а также использовали материалы и впечатления, привезённые нами из поездки в то место, где он родился и где был похоронен.

Франсишко Гомеш Тейшейра родился 28 января 1851 года в селе Сан Кожмадо (S. Cosmado) в районе Визеу (Viseu) в центральной части Португалии, в семье коммерсанта. Его отец Мануэл Гомеш Тейшейра и мать Мария Мадалена Машадо имели трёх сыновей и дочь: братья Франсишко, Педро (стал военным инженером) и Себастио (пошел по стопам отца и занялся коммерцией), и сестра Виториа-Каролина (разделила обычную судьбу женщин той эпохи – замужество, семья, дети).

Франсишко получил первые домашние уроки католической веры и представления о морали ещё до школы, а затем пошел учиться в начальные классы в своём селе Сан Кожмадо (эта школа сейчас носит его имя). По замыслам отца, Франсишко должен был получить теологическое образование, достаточное для духовной карьеры, и, если получится, то и юридическое образование (церковное право). Поэтому из начальной школы Франсишко был направлен в школу падре Розейры[2] – религиозное учебное заведение начального уровня в городке Ламего, недалеко от Сан Кожмадо. Там Франсишко жил в семье у своего родственника Ф.М. де

[1]Позднее в работах S.L. Shi (1980) и Chen L.S. &Wang M.S. (1979) были построены квадратичные системы с "большим" предельным циклом вокруг одного состояния равновесия и с тремя "малыми" предельными циклами вокруг другого состояния равновесия.

[2]Эта школа падре Розейры существует в наши дни и даже имеет страничку в интернете.

Карвалью, врача по профессии. Де Карвалью, помимо занятий медициной, увлекался математикой (особенно геометрией), и это, как отмечают биографы (Guimaraes, 1914), (Vilhena, 1936), имело решающее значение в формировании интересов Франсишко. Кроме обязательных занятий теологией, языками, историей и религиозной литературой в школе, всё свободное время дома он стал посвящать занятиям математикой.

Уровень образования в школе падре Розейры был ниже уровня, необходимого для поступления в университет[1], поэтому Франсишко дополнительно прошел подготовку в колледже Сан Бенто в Куимбре, где уровень обучения считался уже достаточным для продолжения образования в университете.

Следующим известным событием из жизни Франсишко Гомеша Тейшейры было его зачисление в университет Куимбры вольнослушателем на факультет математики в октябре 1869 года (Alves, 2004), (Providkncia, 2011). Итак, выбор между теологией, правоведением и математикой был сделан в пользу математики, что не входило в изначальные планы семьи Франсишко.

На втором году обучения (в 1870 году) после сдачи экзаменов за первый год Франсишко из положения вольнослушателя перешел в статус обычного студента (Guimaraes, 1914), (Vilhena, 1936). В июле 1874 года Франсишко Гомеш Тейшейра окончил пятилетний курс факультета математики Университета Куимбры со степенью *бакалавра.* В январе 1875 года он представил работу по астрономии (методы определения солнечного параллакса при наблюдении прохождении Венеры на фоне диска Солнца), сдал экзамен и получил степень *лисенсиадо.* Уже 30 июня 1875 года им была представлена диссертация “Интегрирование уравнений в частных производных второго порядка”, признанная соответствующей уровню докторской диссертации, и 18 июля 1875 года Гомешу Тейшейре была присвоена учёная степень *доктор математики.*

На следующий год после получения докторской степени, Гомеш Тейшейра был избран членом-корреспондентом Королевской Академии Наук Лиссабона. В том же 1876 году Тейшейра начал работать преподавателем на факультете математики в Университете Куимбры, замещая временно отсутствующих профессоров.

Биографы, рассказывая о Гомеше Тейшейре, сообщают мало о тех моментах его жизни, которые не касаются математики. В результате перед нами возникает идеализированный образ человека, не имеющего других увлечений и интересов кроме занятий математикой. В это трудно поверить и, поэтому повышенный интерес вызывают те строки биографии, в которых скупо сообщается о нематематической жизни Тейшейры. Одним из таких моментов является сообщение о первой поездке Тейшейры в Альпы в 1876 году и его участии в пеших прогулках по горным тропам (Vilhena, 1936). Детали этой поездки отсутствуют, но любовь к горам проходит через всю жизнь Тейшейры. В старости он написал об этом книгу (Teixeira, Santubrios de Montanha, 1926), где попытался сравнить свою любовь к математике и любовь к горам в мистической форме[2]. В 1877 году Тейшейра (в компании со своим братом Педро) совершает путешествие по средиземноморью, они посещают Испанию, Марокко, Мальту и Италию. Это путешествие он описал в своей книге (Teixeira, Santubrios de Montanha, 1926).

В 1877 году Гомеш Тейшейра возглавил первый португальский международный математический журнал Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas (Журнал математических и астрономических наук), созданный правительством Португалии для повышения культурного престижа страны. Журнал впоследствии стал известен как журнал Тейшейры (Teixeira Jornal). С этого времени значительная часть жизни Тейшейры уже связана с издательской деятельностью.

Мы пытались обнаружить какие-либо документы, которые могли бы объяснить, почему для этой трудной миссии был выбран именно Гомеш Тейшейра, молодой человек 26 лет, только начинающий свою научную карьеру. Как можно судить теперь, выбор был необычайно удачным и стоит удивляться прозорливости тех, кто принял такое решение. Единственным свидетельством, имеющим отношение к возникновению журнала, является упоминание де Вильена (Vilhena, 1936), что распоряжение о создании и финансировании журнала было дано королевским министром Ж. Лусиано де Каштру. Журнал печатался за государственный счёт и издавался с перерывами до 1902 года, за это время было опубликовано 15 томов[3].

В 1878 году, ещё не имея постоянной должности в университете Куимбры, Тейшейра уезжает в Лиссабон по назначению на место третьего астронома в лиссабонскую обсерваторию, но, спустя четыре месяца, возвращается назад в Куимбру. С ноября 1879 года Гомеш Тейшейра начинает читать курс математического анализа, а через три месяца, в феврале 1880 года, становится полным профессором математики Университета Куимбры. В этот же период, одновременно с обязанностями по изданию журнала и преподаванием в университете Куимбры, Гомеш Тейшейра принимает участие в политической жизни своей страны. В 1879 году его выбирают депутатом парламента Португалии от Партии Восстановления (Partido Regenerador), и он участвует в сессиях парламента. Эта депутатская деятельность продолжается в 1883 и 1884 годах.

Мы уже отметили выше, что журнал Тейшейры выходил без строгой периодичности. В хронологии журнала можно выделить восемь периодов, когда журнал не издавался: 1) 1879–1880; 2) 1884; 3) 1888; 4) 1890; 5) 1893; 6) 1895-1896; 7) 1898-1899; 8) 1901-1904. Рассмотрим эти периоды, основываясь на биографических данных:

[1]В то время единственным высшим учебным заведением Португалии был университет Куимбры (образован в 1290 году указом короля Дом Дениша I).

[2]Современные португальские альпинисты пишут в интернете, что первым португальским альпинистом был Гомеш Тейшейра, а его книгу (Teixeira, Santubrios de Montanha, 1926) считают свидетельством появления альпинизма в Португалии еще в 19 веке.

[3]Последний том, датированный 1902 годом, содержал статьи 1903 и 1904 годов, вышел с задержкой в 1905 году.

1. Устройство на работу и начало преподавания в университете Куимбры, 1879-1880. Депутатская деятельность, 1879. Путешествие в Альпы, 1879;
2. Переезд в Порту и женитьба, 1884. Депутатская деятельность, 1883, 1884;
3. Конкурс Королевской Академии Наук Лиссабона, 1887-1888. Издание первого тома курса математического анализа в 1887 и подготовка следующих томов;
4. Подготовка и издание второго (1889) и третьего (1892) томов курса анализа;
5. Конкурс Королевской Академии Наук Мадрида открытый в 1893 году;
6. Конкурсы Королевской Академии Наук Мадрида, 1895, 1896-1897;
7. Данных нет. Предположительно: переиздание курса анализа;
8. Подготовка к изданию собрания математических трудов, начиная с 1902 года. Выход первого тома математических трудов в 1904 году (позже вышли семь томов сочинений в период 1904-1915). Закрытие журнала Тейшейры в 1905 году.

Почти каждый из периодов, когда журнал переставал выходить, совпадает или близок по времени с важными событиями в жизни или работе Тейшейры. Те периоды, где мы не можем что-либо добавить, например, седьмой период 1898-1899 годов, связаны с отсутствием биографических деталей. Тем не менее, ясно прослеживается закономерность, которой мы можем дать объяснение. Издание журнала целиком находилось “на плечах” Тейшейры, который всегда работал один без секретарей и редакторов, вся переписка с авторами велась только через его домашний адрес. Сейчас трудно узнать причины, но первое, что приходит на ум, это высокая степень его личной ответственности за судьбу журнала. Другая вероятная причина – это отсутствие достаточно квалифицированных людей в его окружении. У биографов вообще нет упоминаний о сподвижниках, учениках или соавторах Тейшейры. Книги, учебники и научные статьи – всё написано им одним. Нет ни одной коллективной публикации! Наверное, этим отличается наше время научных сообществ от той эпохи интеллектуалов-одиночек.

В 1883 году Гомеш Тейшейра добивается перехода из университета Куимбры в Политехническую Академию в Порту и, после вступления в должность полного профессора математики в мае 1884 года, начинает читать курс дифференциального и интегрального исчисления, а спустя короткое время назначается директором академии. В 1887 году выходит первый том его курса “Анализ бесконечно малых”, содержащий изложение дифференциального исчисления. В 1889 и 1892 выходят следующие два тома, посвящённые интегральному исчислению. В работе Алвеш (Alves, 2004) собрано большое количество хвалебных отзывов современников Тейшейры на его курс анализа.

Надо отметить некоторые особенности математического мировоззрения Гомеша Тейшейры, не попавшие тогда в поле зрения критики. Тейшейра, как человек воспитанный в католической вере и получивший начальное теологическое образование, вольно или невольно придерживался догматических доктрин. Ниже, в части посвящённой его религиозным книгам, мы выскажем нашу точку зрения на его мировоззрение. Сейчас мы хотим отметить то, что связано с его курсом анализа. В то время существовали теологические проблемы с использованием понятия бесконечности. По соображениям веры это понятие не обсуждалось и, по мере возможности, не использовалось. Именно этим можно объяснить вынесение в название курса слов о бесконечно малых. Бесконечно большие величины не считались числами[1].

В 1905 году Гомеш Тейшейра открывает новый международный журнал *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto* (Научная летопись Политехнической Академии Порту)[2]. Новый журнал *Annaes* был общенаучным, но для математиков журнал *Annaes* должен был стать продолжением старого журнала Тейшейры.

В 1906 году Гомеша Тейшейру выдвигают в действительные члены Королевской Академии Наук Лиссабона, членом-корреспондентом которой он был с 1876 года, а в следующем, 1907 году избирают академиком.

В 1910 году, после падения монархии в Португалии планировалась давно обсуждаемая реформа образования. Во главе группы профессоров Политехнической Академии Порту Тейшейра посещает страны Западной Европы для изучения их опыта и планов реформы образования. С июня по сентябрь они побывали во Франции, Бельгии, Голландии, Германии, Швейцарии и Италии. Во время этой поездки Тейшейра встречается с Ф. Клейном (Геттинген), А. Гутцмером (Халле), Л. Пинкерле (Болонья), Г. Кастельнуово и Дж. Питтарелли (Рим). Из путешествия португальские профессора вернулись с большими надеждами на ближайшие перемены. В рамках проводимой реформы уже в 1911 году создаётся университет Порту, восстанавливается университет Лиссабона, реформируется университет Куимбры, реорганизуются высшие учебные заведения Лиссабона (Технический, Финансово-Экономический и Агрономический Институты). Политехническая Академия Порту была преобразована в Естественно-научный факультет созданного университета Порту, а Гомеш Тейшейра избран первым ректором нового университета. В новом качестве Тейшейра начинает читать курс геометрии и

[1]Тейшейра был знаком с работами Г. Кантора, с математическими работами Б. Рассела. На мировоззрение Тейшейры эти изменения в математике не оказывают влияния. В курсе анализа бесконечно малых Тейшейра избегает понятия бесконечности.

[2]После 1927 журнал выходит под названием *Anais da Faculdade de Sciкncias do Porto*.

анализа (Providkncia, 2011). В 1912 году Тейшейра участвовал в V Международном Конгрессе Математиков в Кембридже (Великобритания) и встречался там со многими выдающимися учёными того времени.

В республиканской Португалии происходят быстрые политические изменения. Страна, много веков бывшая опорой католической веры, в 1913 году разрывает отношения с Ватиканом. В 1914 году в Европе начинается Первая Мировая война. В начале марта 1916 года Германия объявляет Португалии войну, но театр военных действий находится далеко за пределами страны[3]. Академическая жизнь продолжается, в июне 1916 года Гомеш Тейшейра выступает с докладом в Академии Наук Лиссабона о португальском математике Даниеле А. да Сильва. В 1917 году работа Тейшейры *"Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches"* (Трактат о кривых) выходит на французском языке, и Парижская Академия Наук по представлению П. Аппеля присуждает ей премию (Prize Binoux). В этом же году образуются Испанская и Португальская Ассоциации Научного Прогресса, созданные усилиями университетов. Гомеш Тейшейра избирается президентом португальской Ассоциации и принимает участие на конгрессе испанской Ассоциации в Севилье в мае 1917 года. В этом же 1917 году был изготовлен бронзовый бюст Гомеша Тейшейры и установлен в университете Куимбры в зале его имени[4]. В следующем, 1918 году по возрасту Тейшейра становится почётным ректором, продолжая преподавательскую деятельность. В 1919 году в Бильбао проходит конгресс португальской и испанской Ассоциаций научного прогресса. На конгрессе Гомешу Тейшейре вручают испанский "Большой крест Афонсо XII". В 1920 году португальское правительство награждает Тейшейру "Большим крестом Св. Иакова с мечом". В 1921 году широко отмечается семидесятилетие Тейшейры, в Порту проходит посвященная Тейшейре конференция португальской и испанской Ассоциаций научного прогресса, французская Ассоциация научного прогресса награждает Тейшейру памятной медалью. В 1922 году Тейшейра проводит конференцию на тему "Четыре знаменитые женщины в истории математики: Гипатия Александрийская, Мария Аньези, Софи Жермен и Софья Ковалевская".

В 1923 году бронзовый бюст Тейшейры (копия бюста в Куимбре) устанавливается на его родине в Сан Кожмадо. В том же году его награждают французским орденом Почётного Легиона. В 1924 году начальная школа в родном селе Тейшейры Сан Кожмадо получает его имя "Школа Доктора Гомеша Тейшейры". Тейшейра собирался принять участие в VII Международном Конгрессе Математиков в Торонто (Канада) в 1924 году и даже получил субсидии на поездку, но, по болезни, не смог поехать[1].

В 1925 году Тейшейра перестаёт читать свой основной курс геометрии и анализа. В этот год он совершил поездку в Ватикан, был принят папой Пием XI в церкви Сан Грегорио Маньо. Во время его приезда в Ватикане была организована "академическая неделя". В присутствии кардиналов и министров Тейшейра выступил с докладом об истории математики в Португалии (Teixeira, L′Oeuvre des Mathйmatiques en Portugal depuis le siиcle XV jusqu'au siиcle XVIII, 1925). Это событие вызвало отклики в португальских газетах 1925 года, что и позволило нам узнать про это чуть больше.

В этот период Тейшейра занят изложением своего мировоззрения, за последние восемь лет своей жизни он написал пять книг. В 1925 году выходит книга "Панегирики и конференции" о выдающихся математиках Португалии. Затем выходит книга "Горные святилища" (Teixeira, Santuбrios de Montanha, 1926) где, рассказывая о своих путешествиях в горах, он сравнивает восхождение с мистическим постижением математики. В 1928 году выходит книга религиозного содержания "Апофеоз Св. Франциска Ассизского. Его жизнь и труды". В 1930 году им написана религиозная книга "Одна святая и одна мудрая" (Teixeira, Uma Santa e uma sбbia, Clara de Assis e Sofia Kovalewsky, 1930). В 1931 году выходит ещё одна религиозная книга "Св. Антоний Лиссабонский, история, традиция и легенда" (Teixeira, Santo Antуnio de Lisboa, 1931). Тейшейра успел закончить свою последнюю книгу "История математики в Португалии" (Teixeira, Histуria das Matemбticas em Portugal, 1934) но она появилась после его кончины.

Постоянной темой его книг становится обсуждение этических факторов в науке. Его тексты изобилуют этическими понятиями с целью доказать, что математика заслуживает восхищения. Если бы у нас остались только его математические труды, то было бы непонятно, что же вдохновляло его в его научном исследовании, что давало ту эмоциональную составляющую, необходимую для атмосферы созидания. Литературная часть, оставленная Тейшейрой, как нам кажется, даёт ответ на такие вопросы. Тот эмоциональный накал, с которым он восхваляет математику, искренне считая её одним из инструментов божественного сотворения мира, его мистическое восприятие реальности с безусловным торжеством добра – всё это даёт ключ к пониманию мотивации его многолетних трудов в математике. Тот ускользающий налёт вторичности, который можно заметить в некоторых его исследованиях, может быть следствием его религиозного смирения и, вытекающей из этого, этической сдержанности в научном подходе, где нет места ни добру, ни злу. Гомеш Тейшейра соединял в себе все положительные эмоции религиозной мистики и холодный ум истинного учёного.

[3]Португальский экспедиционный корпус был отправлен в 1917 году во Францию для участия в военных действиях против Германии.

[4]Португальский обычай устанавливать прижизненные скульптуры с удивлением отмечается в путевых заметках Н.М. Крылова.

[1]От Португалии на конгресс приехал Ф.М. да Кошта Лобу, там он познакомился с Н.М. Крыловым, также участником конгресса. В 1927 году, по приглашению Кошта Лобу, Крылов приехал в Португалию и прочёл курс лекций в университете Куимбры.

Умер Гомеш Тейшейра 8 февраля 1933 года. Сразу после кончины было вскрыто оставленное им письмо на имя президента Португалии, где он просил похоронить себя в церкви своего родного села Сан Кожмадо. В том же письме он оставил текст на латыни для своего надгробия. Разрешение было получено, а сразу после этого был издан декрет, утвердивший процедуру захоронения. По воспоминаниям родственников, представители католической церкви Португалии выражали недовольство и просили перезахоронить Гомеша Тейшейру на обычном кладбище, где похоронены его остальные родственники. Но этого не произошло из-за отсутствия достаточных средств у обеих сторон.

Библиографический список

1. *Alves, M.G.* (2004). Francisco Gomes Teixeira: o homem, o cientista, o pedagogo. Minho: Universidade do Minho.
2. *Guimaraes, R.* (1914). Biografia de Francisco Gomes Teixeira. Histyria e Memyrias da Academia das Sciknciasde Lisboa, XII, parte 2.
3. *Providkncia, N.B.* (2011). Francisco Gomes Teixeira. Um Ensaio Biográfico. Coimbra: Edições MinervaCoimbra.
4. *Teixeira, F.G.* (1934). Histyria das Matemáticas em Portugal. Coimbra: Imprensa da Universidade.
5. *Teixeira, F.G.* (1925). L'Oeuvre des Mathématiques en Portugal depuis le siucle XV jusqu'au siécle XVIII. B Memoria Pontefнcia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei. Vol. VIII, Roma: École Typographique Pie X.
6. *Teixeira, F.G.* (1931). Santo Antynio de Lisboa. Lisboa: Livraria Clássica Editora.
7. *Teixeira, F.G.* (1926). Santuários de Montanha. Lisboa: Livraria Clássica Editora.
8. *Teixeira, F.G.* (1930). Uma Santa e uma sábia, Clara de Assis e Sofia Kovalewsky (изд. 1). Lisboa: Livraria Clássica Editora.
9. *Vilhena, H.* (1936). O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira. Lisboa: Oficinas Fernandes.

Исследование педагогической и научной деятельности Франсишко Гомеша Тейшейры, португальского математика конца XIX-го – начала XX-го вв.

В.И. Харламова, А.А. Харламов

Франсишко Гомеш Тейшейра (Francisco Gomes Teixeira, 1851-1933) был одним из наиболее известных португальских математиков, оставившим заметный след в различных областях [1]. Мы можем условно разделить деятельность Тейшейры по следующим четырём основным направлениям. Во-первых, он вошел в историю как основатель первого международного португальского математического журнала *Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas* (Журнал математических и астрономических наук) выходившего в 1877-1902 годы. Во-вторых, он известен как талантливый педагог, создавший в конце XIX века весьма современный, даже по сегодняшним меркам, курс математического анализа, включивший самые последние, на момент написания, достижения математики. В-третьих, как математик, он внёс значительный вклад в развитие математического анализа, геометрии и истории математики на Пиренейском полуострове. И, наконец, в-четвёртых, он активно участвовал в общественно-культурных реформах Португалии в последней четверти 19 века и позже, в 1911 году, был избран первым ректором нового университета в городе Порту.

Франсишко Гомеш Тейшейра родился 28 января 1851 года в Португалии. В 1869 году Тейшейра поступил вольнослушателем в университет Куимбры на факультет математики (Alves, 2004), (Providkncia, 2011) и на втором году обучения перешел в статус обычного студента (Guimaraes, 1914), (Vilhena, 1936). Во время учёбы Гомеш Тейшейра был отмечен ежегодными премиями за работы, поданные на университетский конкурс. Первая работа Тейшейры 1871 года (Teixeira, Desenvolvimento das funcзxes em fracзго continua, 1871) привлекла внимание известного португальского математика Даниела А. да Сильвы (Daniel A. Da Silva), который представил эту работу Королевской Академии Наук Лиссабона и добился её публикации (Teixeira, Aplicaзго das fracзxes continuas б determinaзго das raizes das equaзxes, 1873).

В 1874 году Тейшейра окончил курс факультета математики Университета Куимбры, а в 1875 году он представил диссертацию "Интегрирование уравнений в частных производных второго порядка" (Teixeira, Integraзго das equaзxes бs derivadas parciaes de segunda ordem, 1875), за которую ему была присвоена учёная степень *доктор математики*. В 1876 году Гомеш Тейшейра был избран членом-корреспондентом Королевской Академии Наук Лиссабона. В том же году Тейшейра начал работать на факультете математики в Университете Куимбры, замещая временно отсутствующих профессоров математики.

Следующий 1877 год стал судьбоносным в жизни Гомеша Тейшейры. При поддержке академических и правительственных кругов, в 1877 году появился первый португальский международный математический журнал Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas (Журнал математических и астрономических наук), созданный для повышения культурного престижа страны. Молодой математик Гомеш Тейшейра был назначен правительством Португалии возглавить журнал, который впоследствии был известен как журнал Тейшейры (Teixeira

[1]По данным *WorldCat-2012* Тейшейра является автором 109 научных трудов в 171 издании, опубликованных на 9 языках и хранящихся в 703 библиотеках мира. Труды Тейшейры неоднократно переиздавались, и последние датируются 1971, 1995, и 2006 гг.

Jornal). Журнал печатался до 1902 года за государственный счёт, за это время было опубликовано 15 сводных томов.

Задачи журнала были декларированы в первом томе: преодоление математической изоляции Португалии и налаживание прямых контактов с математиками других стран. Уже в первом томе журнала за 1877 год появляются публикации Ш. Эрмита и Г.Дж. Беллавитиса. Многочисленные личные контакты Гомеша Тейшейры, его переписка с известными математиками и признание его собственных работ позволили привлечь к участию в журнале математиков из многих европейских стран[2]. Это совпало с началом процесса объединения математиков и интернационализации математического сообщества.

Тем временем в университете Куимбры освободилась должность профессора математики (Vilhena, 1936), и с ноября 1879 года Гомеш Тейшейра начинает читать курс математического анализа, а через три месяца, в феврале 1880 года, становится полным профессором математики университета Куимбры. Если судить по публикациям, научные интересы Тейшейры не сосредоточены в этот период на чем-то определенном, он публикует статьи и по астрономии (Teixeira, Noticia sobre Saturno, 1877), и по разложению функций в ряды, и по уравнениям в частных производных.

Интересно отметить, что Тейшейра начинал активно публиковаться в первых трех томах своего журнала, а затем в четвертом (1882) и в пятом (1883) томах его публикации исчезают, но появляются так называемые "библиографии" – краткие содержания работ опубликованных в научных журналах других стран. Затем, начиная с шестого тома (1885), его активность возобновляется, а также определяются его интересы, как то: дифференцирование сложных и неявных функций, разложение функций комплексного переменного в ряд, интегральное исчисление, одним словом, вся тематика сосредоточена на математическом анализе. Так продолжается до 10-го тома включительно (1891), а начиная с 11-го тома (1892), публикации Тейшейры исчезают из его журнала, но при этом увеличивается объем раздела "библиографий", подготавливаемых Тейшейрой. После 1892 года Тейшейра продолжает публиковать свои научные статьи только в ведущих иностранных журналах.

На наш взгляд, международные контакты Тейшейры оказали определённое влияние на его научные интересы и способствовали новым успешным математическим исследованиям. Примером этому могут служить те исследования Тейшейры, где он сосредотачивается на обобщении и интерпретации известных результатов, разбросанных по разным журналам и книгам. Например, в теории рядов он делает обобщение для ряда Бюрмана (Teixeira, Sur les séries ordonnŭes suivant les puissances d'une fonction donnŭe, 1900), представив разложение функции по положительным и отрицательным степеням (так называемая теорема Тейшейры), аналогично тому, что сделал Лоран для обобщения ряда Тейлора. Работая с рядами, Тейшейра вводит различные замены переменных, позволяющие трансформировать один ряд в другой, как например, ряд Бюрмана в ряд Тейлора или в ряд Лагранжа, и наоборот. В этом же разделе математики (разложение функций по степеням другой функции) ему принадлежит очень красивый пример – разложение функций по степеням синуса (Teixeira, Sur le dŭveloppement des fonctions en sŭrie ordonnŭe suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable, 1896); этот пример используется в известном курсе анализа (Уиттекер & Ватсон, 1963). Тейшейра обобщает формулу дифференцирования Фаа ди Бруно (Faá di Bruno), обобщая ее на случай сложной функции от многих функций (Teixeira, Sur les derivées d'ordre quelconque, 1880). Тейшейра делает обобщения или рассматривает частные случаи для решений Эрмита по вычислениям интегралов некоторых функций (Teixeira, Extrait d'une lettre adressée a M. Hermite, 1888; Teixeira, Extrait d'une lettre de M. Gomes Teixeira a M. Hermite, 1888). В процессе своих исследований Тейшейра предложил много характерных примеров и математических задач, которые сразу нашли отклик у известных математиков, включивших эти упражнения в свои курсы: математического анализа (Whittaker & Watson, G.N., 1927), теории дифференциальных уравнений (Goursat, 1898; Forsyth, Theory of Differential Equations, 1906) и теории функций комплексной переменной (Forsyth, Theory of Functions of a Complex Variable, 1893).

В 1883 году Гомеш Тейшейра перешёл из университета Куимбры в Политехническую Академию в Порту[1] и, после вступления в должность полного профессора математики в мае 1884 года, начинает читать курс дифференциального и интегрального исчисления.

В этот период Тейшейра начинает интенсивную работу над курсом анализа, ставя себе цель – реформировать преподавание математики в Португалии. Он пересматривает старые программы, включает новые исследования, активно использует курсы анализа Коши, Вейерштрасса и Эрмита. Тейшейра пытается синтезировать все последние достижения для формирования нового уровня преподавания. Исторические традиции преподавания математики в Португалии имели существенный недостаток: обучение велось по иностранным книгам, в основном на латыни и на французском языке, поэтому создание современного курса математического анализа на португальском языке было требованием того времени. Уже в 1887 году выходит первый том его курса, содержащий изложение дифференциального исчисления. В 1889 и 1892 выходят следующие два тома курса посвящённые интегральному исчислению. Он даёт название этому труду "Анализ бесконечно малых", и

[2]В журнале Тейшейры печатались: Ш. Эрмит, Ш. Валле Пуссен, Г.Дж. Беллавитис, М. Лерх, Э. Чезаро, Г. Виванти, М. Биргер Ханстед, М.Д'Окань, Дж. Лориа, К. Лепэж, А. Гуцмер, Ж. Пирондини, Э. Вейр, М. Бассани, Ип. Пламеневский, С. Пинкерле, М. Лёпон, Р. Марколонго, Ж. Дуран Лорига, Д. Бессо, М.П. Схоуте, Э. Новарезе, Ф. Сибирани.

[1]Этот переезд в Порту биографы Тейшейры объясняют личными обстоятельствами и связывают с его женитьбой в 1884 году.

этот курс совершенствуется и переиздаётся несколько раз, последнее девятое издание вышло в 1912 году. В работе Алвеш (Alves, 2004) собраны многочисленные отзывы современников Тейшейры на его курс анализа. Мы можем узнать мнения Дарбу (Darboux), де Окань (Maurice d'Ocagne), Пирондини (G. Pirondini), Галдеано (Zoel G. de Galdeano), Лерха (M. Lerch), и эти мнения весьма и весьма лестные. Отмечаются мелкие недостатки, например, некорректность рассмотрения максимумов и минимумов функции двух переменных, ошибки в написании имён в тексте и ссылках, и т.п. Тейшейра внимательно воспринимает мнения других математиков, что положительно влияет на содержание и расположение материала.

Но некоторые замечания сейчас вызывают улыбку. Например, португальский математик Шапо Монтейра (A. Shiappa Monteira) из Лиссабона выражает свою критику по поводу недопустимости применения доказательств некоторых теорем, заново сделанных Тейшейрой. По его мнению, следовало бы использовать традиционные доказательства и привычные формулировки.

Курс анализа Тейшейры, как мы можем судить, получился и современным, и содержательным, и доступным для изучения. Изложение материала необычайно корректно, исторично и обобщенно. Все части по мере изложения содержат исторические обстоятельства, ссылки и сведения об авторстве каждой идеи и теории, в результате читатель как бы становится соучастником открытия. В конце каждой темы даются замечательно составленные примеры и задачи, в этих местах проявляется математическая одарённость и талант педагога Тейшейры. Позже, эти "авторские" задачи Тейшейры, получили широкое использование в известных курсах анализа и теории функций комплексной переменной других авторов (Форсайт, Гурса, Виттекер и Ватсон).

Определённый этап жизни Гомеша Тейшейры связан с успешным участием в различных научных конкурсах. В декабре 1887 года, на конкурс, объявленный Королевской Академии Наук Лиссабона, Тейшейра представляет шесть работ, в числе которых только что вышедший первый том его курса анализа. По итогам, объявленным в 1888 году, курс анализа Гомеша Тейшейры был признан победителем.

В 1893 году в Испании открывается научный конкурс Королевской Академии Наук Мадрида, и Тейшейра в 1895 году получает поощрительную премию этой Академии за работу под названием *"Sobre o desenvolvimento das funcções em série"* (О разложении функций в ряд). Поданная на конкурс работа не соответствовала правилам предусмотренным конкурсом. Работа была представлена на португальском языке, а по правилам конкурса должна была быть написана на испанском или на латыни. Несмотря на это, работа была рассмотрена и награждена вне конкурса.

На конкурс Королевской Академии Наук Мадрида 1897 года Тейшейра подаёт работу *"Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches"* (Трактат о кривых), ставшую впоследствии одной из самых известных его работ[1]. Победу в этом конкурсе присудили сразу двум работам, вместе с Тейшейрой первую премию получил известный итальянский математик Джино Лория.

К этому же времени относится письмо Тейшейры к профессору А.В. Васильеву в Казанский университет. Предметом письма стала работа профессора Н.В. Бугаева "Обобщённая форма ряда Лагранжа" (Бугаев, 1901) вышедшая в Математическом Сборнике, издававшемся Московским математическим обществом. В своей статье Бугаев ссылается на португальского математика Гомеша Тейшейру, как сделавшего первый шаг в расширении формы ряда Лагранжа в 1881 году (Teixeira, Sur le dйveloppement des fonctions implicites en sйrie, 1881) и предлагает свою общую форму ряда. По существу, в этом письме Тейшейра сообщает Васильеву о своих исследованиях рядов, сделанных после 1881 года. По мнению Тейшейры, эти работы не могли быть известны Бугаеву[2]. Нам не удалось найти ответное письмо Васильева к Тейшейре, но письмо Тейшейры Васильев нашёл интересным и поместил его в Известиях Физико-математического общества при Казанском университете (Teixeira, Remarques sur un travail publiй par N. Bougaiev, 1903).

В феврале 1902 года Королевское правительство Португалии, в лице премьер-министра Эрнеста Рудольфа Рибейро (Ernesto Rodolpho Hintze Ribeiro), принимает указ о публикации всех математических трудов Тейшейры за счёт государства[3]. Собрание трудов должно было объединить все научные статьи, учебные курсы, трактаты по геометрии, научную переписку с математиками других стран (письма-статьи) и работы по истории математики. Всего было издано семь томов, последний вышел в 1915 году.

Уже в 1904 году вышел первый том, содержащий работы 1880-1903 годов. Туда вошли исследования по теории рядов, ранее опубликованные в журнале Крелле (Crelles Journal), в журнале Лиувилля (Liouville Journal), и в трудах Королевской Академии Наук Мадрида, работы по дифференциальным уравнениям, статьи по анализу и аналитической геометрии, выдержки из переписки с Эрмитом и работа по истории математики.

В 1906 году вышли второй и третий тома трудов Тейшейры. Второй том содержал статьи по анализу за 1877-1906 годы в различных журналах (включая журнал Тейшейры), переписку Тейшейры с Эрмитом, Таннери (Jules Tannery), Лерхом, Шоуте (P.H. Schoute), статьи по аналитической геометрии, теории рядов за 1904-1906, работы по теории функций и теории чисел. Третий том был посвящён курсу анализа бесконечно малых и содержал часть курса по дифференциальному исчислению.

[1] Работа переиздавалась в 1971 году в Нью-Йорке, а в 1995 – в Париже.

[2] К несчастью, в июне 1903 года Н.В. Бугаев скончался, и Тейшейра вынужден был обратиться к А.В. Васильеву

[3] По этому поводу мы встретили один восхищённый отклик из Лондона. Автор высказывает мнение, что правительство Португалии относится к Тейшейре, как к своему золотому запасу, что в Англии и в мечтах невозможно представить себе, что сочинения британских математиков будут опубликованы за счёт британского правительства.

Четвёртый и пятый тома трудов, вышедшие в 1908 и 1909 годах, включили в себя первую и вторую части работы Тейшейры по геометрическим кривым *“Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches”* (Трактат о кривых), написанную в 1892-1895 годах. Это одна из самых известных работ Тейшейры.

В 1912 году вышел шестой том со второй частью курса анализа бесконечно малых, содержащий интегральное исчисление. И, наконец, в 1915 году вышел последний седьмой том, третья часть работы *“Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches”* (Трактат о кривых).

В 1925 году Тейшейра по возрасту перестаёт читать курс Геометрии и Анализа. За последние восемь лет своей жизни Тейшейра написал пять книг: 1925 год – книга “Панегирики и конференции” о математиках Португалии; 1926 год – “Горные святилища” о путешествиях в горы; 1928 год - книга религиозного содержания “Апофеоз Св. Франциска Ассизского. Его жизнь и труды”; 1930 год – религиозная книга “Одна святая и одна мудрая” о Св. Кларе Ассизской и Софье Ковалевской; 1931 год – религиозная книга “Св. Антоний Лиссабонский, история, традиция и легенда”; и последняя книга по истории математики “История математики в Португалии” (Teixeira, História das Matemáticas em Portugal, 1934) вышла посмертно.

Умер Гомеш Тейшейра дома в Порту 8 февраля 1933 года и похоронен в церкви своего родного городка Сан Кожмадо.

Библиографический список

1. *Alves, M.G.* (2004). Francisco Gomes Teixeira: o homem, o cientista, o pedagogo. Minho: Universidade do Minho.
2. *Forsyth, A.R.* (1906). Theory of Differential Equations (T. VI). Cambridge: University Press.
3. *Forsyth, A.R.* (1893). Thery of Functions of a Complex Variable. Cambridge: University Press.
4. *Goursat, E.* (1898). Leçons sur l’intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann.
5. *Guimaraes, R.* (1914). Biografia de Francisco Gomes Teixeira. História e Memórias da Academia das Sciências de Lisboa , XII, parte 2.
6. *Providкncia, N.B.* (2011). Francisco Gomes Teixeira. Um Ensaio Biográfico. Coimbra: Edições MinervaCoimbra.
7. *Teixeira, F.G.* (1873). Aplicação das fracções continuas á determinação das raizes das equações. Jornal das Sciencias Mathematicas Physicas e Naturaes, IV.
8. *Teixeira, F.G.* (1871). Desenvolvimento das funcções em fracção continua. Coimbra: Imprensa da Universidade.
9. *Teixeira, F.G.* (1888). Extrait d’une lettre adressée a M. Hermite. Bulletin des Sciences Mathématiques, XII, deuxème série, 272-276.
10. *Teixeira, F.G.* (1888). Extrait d’une lettre de M. Gomes Teixeira a M. Hermite. Bulletin des Sciences Mathйmatiques, XII, deuxème série, 288-290.
11. *Teixeira, F.G.* (1934). História das Matemáticas em Portugal. Coimbra: Imprensa da Universidade.
12. *Teixeira, F.G.* (1875). Integração das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem. Coimbra: Imprensa da Universidade.
13. *Teixeira, F.G.* (1877). Noticia sobre Saturno. Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, I.
14. *Teixeira, F.G.* (1903). Remarques sur un travail publié par N. Bougaiev. Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kasan *, XIII*, 67-70.
15. *Teixeira, F.G.* (1896). Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable. Journal für die reine und angewandte, CXVI (Heft 1). 14-32.
16. *Teixeira, F.G.* (1881). Sur le développement des fonctions implicites en série. Journal de mathématiques pures et appliquées, VII, 3^a série.
17. *Teixeira, F.G.* (1880). Sur les derivées d’ordre quelconque. Giornale di Matematica di Bettaglini, XVIII. P. 306.
18. *Teixeira, F.G.* (1900). Sur les séries ordonnées suivant les puissances d’une fonction donnée. Journal für die reine und angewandte, CXXII (Heft 2). 97-123.
19. *Vilhena, H.* (1936). O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira. Lisboa: Oficinas Fernandes.
20. *Whittaker, E.T. & Watson, G.N.* (1927). A Course of Modern Analysis (изд. 4^a). Cambridge: University Press.
21. *Бугаев, Н.В.* (1901). Обобщенная форма ряда Лагранжа [Текст] / Н.В. Бугаев // Математический Сборник. – 22. – С. 219-224.
22. *Уиттекер, Э.Т.* (1963). Курс современного анализа [Текст] / Э.Т. Уиттекер, Д.Н. Ватсон. – Изд. 2. – М.: Изд-во физю-мат. литературы.

О работах Д.Д. Мордухай-Болтовского по математической биологии

В.Е. Пырков

Математико-биологические работы Д.Д.Мордухай-Болтовского, насколько нам известно, до сих пор не являлись предметом специального исследования. Лишь в некоторых обзорных публикациях научного наследия Д.Д. Мордухай-Болтовского имеются упоминания о наличии подобных работ [8, с. 6; 11, с. 157]. Между тем, сам Дмитрий Дмитриевич очень трепетно относился к этим исследованиям и то, что удалось опубликовать, характеризовал как “очень близкое своему сердцу духовное детище, потребовавшее немало труда” [4, с. 4].

Такой повышенный интерес в применении математики к биологии можно объяснить следующими субъективными причинами:

Во-первых, для всего творчества Д.Д. Мордухай-Болтовского вполне характерным является восприятие любого знания сквозь призму "математика": все, с чем он сталкивается в окружающем мире непременно оказывалось втянутым в сферу его универсальной науки – математики. Так он подходит не только к проблемам биологии, но и к проблемам педагогическим и даже психологическим и более того, пытается в итоге рассматривать их как математическую дисциплину, выстраивая свою особую аксиоматику[1].

Во-вторых, его приверженность к данной теме поддерживалась общением с сыном Филаретом (с которым он был особенно близок) – доктором биологических наук, известным гидробиологом. Это подтверждают воспоминания близких и сохранившаяся переписка между учеными, в частности по проблемам исследования радиолярий[1]. В самих работах Д.Д. Мордухай-Болтовской также указывает, что получил от Филарета Дмитриевича "не мало ценных указаний" [6, с. 2].

В-третьих, это личное знакомство и оживленная переписка с крупнейшими исследователями в области математической биологии как зарубежными (д'Арси Томпсон), так и отечественными (А.А. Любищев, В.И. Вернадский и др.).

На сегодняшний день математико-биологические исследования Д.Д. Мордухай-Болтовского представлены 12 работами. Три из них опубликованы [4, 6, 7], а остальные находятся в рукописях и хранятся в архивных собраниях различных лиц – учеников и коллег Д.Д. Мордухай-Болтовского. Многое погибло вместе со всем имуществом, сгоревшим в г. Ростове-на-Дону во время войны. Наиболее полная коллекция математико-биологических рукописей Д.Д. Мордухай-Болтовского хранится в Санкт-Петербургском филиале архива РАН (Ф. 821. Оп. 1. Д. 43-51)[2].

Свой интерес и первый опыт применения математики к биологии сам Дмитрий Дмитриевич связывает с участием в работе авиационного кружка, учрежденного при Ростовском университете и руководимого проф. А.П. Поспеловым. Первые его работы и выступления на заседаниях этого кружка были связаны с изучением полета птиц, крылаток и летучек семян растений [5, с. 48]. Так, в 1924 г. в студенческом авиакружке им был прочитан доклад "О крылатках в растительном мире", который позже перерос в большое исследование "О парашютах и планерах в растительном и животном царствах", опубликованное в 1934 г. на страницах Ученых записок РГУ [6].

В этой работе Д.Д. Мордухай-Болтовской задался целью исследовать целесообразные приспособления, относящиеся к поднятию и опусканию и вообще движению в воздухе и воде различных организмов. Он убедительно показывает, что и в растительном и в животном мире применяются все принципы воздухоплавания, в том числе принцип аэростата, основанный на законе Архимеда. Содержание статьи в основном посвящено вопросам аэро и гидродинамики, и практически не сопровождается математическими выкладками, которые приводятся только в трех местах работы, но как указывает во введении автор математика здесь – "это манера мыслить с стремлением не решить, а лишь поставить математические проблемы" [6, с. 1]. Автор рассматривает принципы движения природных аэростатов, парашютов, планеров и геликоптеров. Отдельно исследует форму организмов и роль, которую играют в движении особенности их строения: хвосты, крылышки, стержни, дырки. Рассмотрены особенности рыбообразной и яйцеобразной формы организмов в воздухе и воде. Текст сопровождается многочисленными конкретными примерами представителей растительного и животного мира.

Вторая публикация – это тезисы доклада "Скелеты радиолярий с точки зрения сопротивления материалов" [7], сделанного на заседании математической секции НИИ ФМИ при РГУ в ноябре 1936 г. В ней предлагается математическое обоснование наличия в скелетах радиолярий стержней с полой структурой, массивных стержней, стержней с различным сечением и с перекладинами, наличие колец в стержнях и др.

Третья, наиболее содержательная математически, работа из цикла математико-биологических работ Д.Д. Мордухай-Болтовского, была опубликована в 1936 г. Работа над ней, как свидетельствует сам автор, длилась около восьми лет [4, с. 4], и это сказалось на качестве её исполнения. Как свидетельствует Ю.Л. Войтеховский[3] "по систематичности и тщательности проработки проблемы она не превзойдена до сих пор. Впрочем, правильнее будет сказать, что она практически забыта" [1].

Прежде чем характеризовать данную работу, позволим себе некоторое отступление. Один из адресатов Д.Д. Мордухай-Болтовского, известный энтомолог А.А. Любищев, выделял три главных направления в развитии математической биологии. Первое из них чисто математическое, а скорее, геометрическое – рассматривает организм или его части с точки зрения формы (морфологическое). Второе, скорее механическое – изучает процессы, протекающие в организме (физиологическое). Наконец, третье направление – статистическое, рассмат-

[1]Мордухай-Болтовской Д.Д. Биологическая аксиоматика (рукопись). АРАН. Ф. 606. Оп. 3. Д. 48.

[1]СПбФАРАН. Ф. 821. Оп. 1. Д. 179.

[2]Кривые и поверхности в биологии (Д.43); О движении водных организмов (Д.44); Геометрия и механика водорослей (Д.45); Деление яйца и планиметрические конфигурации (Д.46); Проблемы о сферах и кругах в биологии (Д.47); Органические формы в четырехмерном пространстве (Д.48); Биологическая аксиоматика (Д.49); Некоторые механические задачи, относящиеся к скелетам радиолярий (Д.50); Вариационные задачи в биологии (Д.51).

[3]Войтеховский Юрий Леонидович – доктор геолого-минерал. наук, директор Геологического института Кольского научного центра РАН.

ривает организм как совокупность составляющих его элементов или же собрание более или менее однородных организмов рассматривается как некоторая реальная совокупность (эволюционное). Последнее направление развилось позднее других и переживает сейчас свой расцвет. Первое же, наоборот, до сих пор вызывает споры, но по мнению А.А. Любищева именно оно "представляет собой вершину биологического исследования" [10, с. 66]. "Геометрия радиолярий" – одна из первых работ профессионального математика, выполненная в первом из рассмотренных направлений. Причем, как верно подметил А.В. Родин, для Мордухай-Болтовского в этой работе "не геометрические формы являются инструментом описания радиолярий, а радиолярии являются инструментом демонстрации геометрических форм" [9, с. 5].

В предисловии к "Геометрии радиолярий" автор отмечает: "Я убежден, что лет через пятьдесят математическая биология займет такое же место, как математическая астрономия, что там, где стоят эти маленькие хижины, будут стоять великолепные постройки, воздвигнутые более могучими умами" [4, с. 3]. Эти слова Д.Д. Мордухай-Болтовского стали пророческими для расцвета математической биологии в наши дни.

"Геометрия радиолярий" – это девяностостраничный труд, поражающий мощью математического арсенала автора. Для анализа форм радиолярий автор применяет теорию многогранников, элементы вариационного исчисления, топологию, дифференциальные уравнения и др.

Первая часть книги посвящена изучению формы радиолярий с помощью теории экстремумов. В ней рассматриваются изопериметрические задачи, задачи изоклинизма в теории узлов и теории решеток, так называемые "тангенциальные" задачи о вписании сфер и кругов. Вторая часть – "Полиэдрия", посвящена теории многогранников, наблюдаемых в структуре организмов, их преобразованиям и метрическим свойствам.

В наш век нанотехнологий обнаружилась неожиданная связь этой работы Д.Д. Мордухай-Болтовского с исследованием и разработкой наноматериалов на основе фуллеренов. Чтобы пояснить её, позволим себе некоторое отступление.

Фуллерены – это специально организованные молекулы чистого углерода. В 1985 году была экспериментально открыта молекула C_{60}, состоящая из 60 атомов углерода. Исследователи[1] предположили, что атомы углерода в этой молекуле находятся в вершинах усеченного икосаэдра. За это экспериментальное открытие, авторы получили в 1996 г. Нобелевскую премию по химии.

Известно, что первооткрыватели фуллеренов заимствовали их структуру из структуры скелета радиолярий – морских одноклеточных организмов. При этом они использовали подход, изложенный в книге "Рост и форма" выдающегося шотландского математика и биолога Д'Арси Томпсона (1860-1948), который представил в своей работе подробный анализ формы и структуры скелета радиолярий, очень похожий на то, что было сделано в "Геометрии радиолярий" Д.Д. Мордухай-Болтовского. Несмотря на схожесть содержащихся в этих книгах идей и фактов, книга А. Томпсона стала своеобразным научным бестселлером, а работа Д.Д. Мордухай-Болтовского столкнулась с определенным неприятием и оказалась практически забытой.

На связь этих двух работ обратил наше внимание известный исследователь фуллеренов, популяризатор науки, профессор университета им. Бен-Гуриона (Израиль) Евгений Кац. Наше виртуальное знакомство в сети интернет породило у обоих массу вопросов. Кому из ученых принадлежит приоритет в математическом исследовании структуры радиолярий? Были ли они знакомы с результатами работ друг друга? Как их оценивали? Ответов на эти и другие возникающие вопросы у нас не было, а получить их очень хотелось. Целенаправленное изучение сохранившихся документов и сопоставление фактов позволило отчасти удовлетворить этот интерес.

Первое издание книги "Рост и форма" было выпущено издательством Кембриджского университета в 1917 году, после книга пять раз переиздавалась (1942, 1952, 1959, 1963 и 1992). Теоретически, эта книга вполне могла быть знакома Д.Д. Мордухай-Болтовскому. Тем не менее, скрупулезно перечисляя источники, Д.Д. Мордухай-Болтовской не упоминает книгу А. Томпсона ни в предисловии к своей "Геометрии радиолярий", ни в отчетах, имеющихся в архивах. Вот, например, отрывок из "Отчета о работе летом 1929 г. на пособие от Ассоциации исследовательских институтов":

"Для основной своей темы – геометрия радиолярий – я преимущественно использовал капитальный труд Геккеля (Report of the Scient. Results of the voyage of Challenger, XIII том). Это необыкновенно роскошное издание с изображением огромного числа видов радиолярий и с подробным их описанием. Я имел терпение снять на кальку более сотни снимков и переписать в тетрадь текст. За этим трудом следует знаменитая работа Геккеля "Die Radiolarien. Berlin. 1862", которая, конечно уже в виду ее устарелости, дает меньше материала. Были и здесь скалькированы рисунки, но они представляли большей частью лишь повторение того, что я нашел в первой книге. Упомяну Acantarien Поповского и монографию Шевякова, давшие тоже снимки и выписки из текста. Наконец, работы Hertwig-a, Muller-a, Brandt-a. Удалось мне также изучить и интересную для геометра "Протоморфологию"Геккеля. Из учебников по зоологии, мной просмотренных, укажу на книгу "Delage et Nerouerd. Traite de Zoologie concrete t. I. 1896", где очень подробно говорится о радиоляриях. Что касается до работ, относящихся к многогранникам, то удалось познакомиться с классическим мемуаром Gordan, "Морфологией полиэдра"Eberhardt, а также со статьями Mebius в полном собрании его трудов. Проблемы о максимумах и минимумах, относящихся к многогранникам, столь важные в предпринятой биологико-геометрической работе, я изучал в работах Штейнера, Линделёфа и других. По кристаллографии я ознакомился с "Кристаллографи-

[1] Английский астрохимик Г. Крото и американские физико-химики Р. Смолли и Р. Кёрл.

ей"Шенфлиса, где применяется теория групп, и учебником Soret и Aroth"[2].

Только Геккеля он упоминает и в самой "Геометрии радиолярий"как своего предшественника: "Приступая к геометрическим исследованиям форм организмов, я должен отметить, что геометрическая точка зрения здесь не является совершенно новой. Геккель в своей "Протоморфологии"классифицирует органические формы, как кристаллы, на основании элементов симметрии". И ни слова о Томпсоне.

Специальные изыскания в архивах позволили обнаружить переписку между Д.Д. Мордухай-Болтовским и В.И. Вернадским. Письмо от 9 апреля 1939 года содержит интересующие нас сведения о знакомстве Д.Д. Мордухай-Болтовского с работой Томпсона. Судя по письму, знакомство с этой книгой Д.Д. Мордухай-Болтовскому порекомендовал В.И. Вернадский, он же позаботился о её пересылке Д.Д. Мордухай-Болтовскому через межбиблиотечный абонемент. В своем письме Д.Д. Мордухай-Болтовской пишет: "Глубокоуважаемый Владимир Иванович! Отсылая книгу D'Arcy W.Thompson "On Growth and Form" обратно, считаю необходимым еще раз поблагодарить Вас за Вашу исключительную любезность и вместе с тем прошу извинения, что я не выполнил требование библиотеки: вернуть книгу, как можно скорей, что, конечно, являлось при этом почти равносильным требованием совершенно её не использовать. ... Книга для меня оказалась очень интересной и поучительной. С моими исследованиями она лишь соприкасается, но для меня не мало материала для размышлений. У Арси Томпсона подход исключительно каузальный, в то время как у меня телеологический. У меня мало биологии, много математики при этом преимущественно элементарной. У Арси Томпсона больше биологии, математические проблемы только ставятся, но не решаются, хотя есть ссылки, но, к сожалению, без библиографических указаний, на их решение. Есть правда решения качественные или путем аналогий. Динамики т.е. того что меня преимущественно интересует у него совсем нет, всякая форма рассматривается только с точки зрения статики т.е. равновесия, что, конечно не верно, так как животные движутся. К сожалению, автор слишком повторяется, все можно было бы изложить короче"[1].

В то же время есть основания предполагать, что Д'Арси Томпсон читал книгу Д.Д. Мордухай-Болтовского. Такой вывод можно сделать исходя из сохранившейся рукописи "Автобиографии профессора Д.Д. Мордухай-Болтовского от 7 февраля 1946 года", где ученый пишет: "Из математическо-биологических работ (часть которых погибла) удалось напечатать только о крылатках и летучках растений и соответствующих им аппаратах низших водных животных и геометрию радиолярий. С последней работой некоторые заграничные биологи ознакомились благодаря резюме, а Д'Арси Томпсон в Шотландии знал в некоторой мере русский язык. От последнего получил очень хороший отзыв"[2].

Возникают еще два вопроса: когда была написана Томпсоном глава о радиоляриях, и как это соотносится со временем его знакомства с работой Мордухай-Болтовского?

В предисловии к изданию 1963 года А. Томпсон отмечает, что только ко второму изданию (1942) книга была существенно дополнена. Совсем недавно, в сети появилась оцифрованная версия первого издания книги Томпсона 1917 года[3], благодаря чему удалось ответить на первый вопрос: интересующий нас математический анализ строения радиолярий в данном издании отсутствует, то есть он был добавлен Томпсоном в книгу только в 1942 г., а значит, был впервые выполнен и опубликован Мордухай-Болтовским в 1936 г.

Получить ответ на второй вопрос, не так просто: отзыв, который упоминает Мордухай-Болтовской нами пока не обнаружен, и вероятность его обнаружения чрезвычайно мала.

Из около полутысячи научных работ, вышедших из под пера Д.Д. Мордухай-Болтовского, обладавшего необычайной широтой интересов, работы по математической биологии составляют незначительную часть по количественной характеристике, но существенную, по внесенному вкладу в науку. Почему же, при очевидной заинтересованности ученого, количество математико-биологических работ осталось столь незначительным? Одну из причин автор озвучивает в своих публикациях: "Я очень сожалею, что слишком поздно натолкнулся на эту необыкновенно интересную область исследования" [4, с. 3]. "Геометрия радиолярий" вышла из печати, когда её автору было уже 60 лет, в последующие же годы, особенно в период ВОВ его здоровье было сильно подорвано.

Еще одну из причин прекращения дальнейших публикаций по математической биологии Д.Д. Мордухай-Болтовской описал в письме своему корреспонденту В.И. Вернадскому: "Глубокоуважаемый Владимир Иванович! Мне было очень приятно узнать из Вашего любезного письма, что и Вас как меня интересует Математическая биология. Спешу дать некоторые разъяснения. Статья "Биологическая и математическая аксиоматика" предназначалась как Введение (*к "Геометрии радиолярий" – прим. В.Е.*), но директор Дернов выбросил её как идеологически неподходящую (*"вследствие антидарвинистического запаха" – из разъяснения этой причины в письме к А.В. Шубникову – прим. В.Е.*). Статья же о геометрии радиолярий подняла целую бурю всяких обвинений, излагаемых в стенгазете в очень грубой форме. Едва ли это Введение в котором устанавливается моя чисто формальная точка зрения, далекая от всяких философских предпосылок могла бы здесь помочь, вследствие того, что уровень научных знаний у нападавших был очень невысок и все сводилось только к придиркам к некоторым выражениям. К сожалению, пришлось прекратить не только печатание, но и доклады в

[2]ГАРО Ф.Р-2605. Оп. 1. Д. 23. Л. 4.
[1]АРАН Ф. 518. Оп. 3. Д. 1101. Л. 4.
[2]Архив РГУ Ф. Р-46. Оп. 22. Д. 63. Л. 87.
[3]Режим доступа: http://archive.org/details/ongrowthform1917thom

Исследовательском институте на эти темы”[4].

В 2011 году на международной конференции по нанотехнологиям, проходившей в Санкт-Петербурге, была выражена заинтересованность в переиздании “Геометрии радиолярий” Д.Д. Мордухай-Болтовского и введении её в широкий научный оборот. Благодаря общим стараниям в начале мая 2012 г. в издательстве URSS в виде отдельной книги вышло 2-е издание[1] “Геометрии радиолярий”. В качестве предисловия к ней помещено научно-популярное введение Е.А. Каца с оценкой значения этой работы Д.Д. Мордухай-Болтовского для современного состояния науки о фуллеренах.

Заметим, что изучение радиолярий является актуальным в океанологии, а одним из наиболее активных исследователей радиолярий является профессор Demetrio Boltovskoy (Аргентина) – внук Д.Д. Мордухай-Болтовского.

Библиографический список

1. *Войтеховский, Ю.Л.* О кристаллах, полиэдрах, радиоляриях, вольвоксах, фуллеренах и немного – о природе вещей [Текст] / Ю.Л. Войтеховский // Природа. – 2004. – № 8. – С. 8-18.
2. *Кац, Е.А.* Многогранные радиолярии. О переиздании книги Д.Д. Мордухай-Болтовского “Геометрия радиолярий” [Текст] / Е.А. Кац // Троицкий вариант – наука, 2012. – № 10(104). – С. 10.
3. *Кац, Е.А.* Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры: Родословная форм и идей [Текст] / Е.А. Кац. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
4. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* Геометрия радиолярий [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской // Ученые записки РГУ, 1936. – С. 1-91.
5. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* Математика в Ростовском университете [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской // Ростовский университет. Юбилейный сборник. – Ростов-н/Д, 1941. – С. 48.
6. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* О парашютах и планерах в растительном и животном царствах [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской // Ученые записки РГУ. – 1934. – Вып. 1. – С. 1-17.
7. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* Скелеты радиолярий, с точки зрения сопротивления материалов [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской // Ученые записки НИИМиФ при РГУ. – 1937. – Т. 1. – С. 74-75.
8. *Несторович, Н.М.* По поводу 40-летия научной, педагогической и общественной деятельности проф. Дмитрия Дмитриевича Мордухай-Болтовского [Текст] / Н.М. Несторович // Известия РГПИ. – Ростведиздат, 1940. – Т. X.
9. *Родин, А.В.* Философская математика Дмитрия Дмитриевича Мордухай-Болтовского [Текст] / А.В. Родин // В кн. Д.Д. Мордухай-Болтовской. Философия. Психология. Математика. – М.: Серебряные нити, 1998.
10. *Светлов, П.Г.* Александр Александрович Любищев. 1890-1972 [Текст] / П.Г. Светлов. – Л.: Наука, 1982.
11. *Хапланов, М.Г.* Выдающийся математик Д.Д. Мордухай-Болтовской (1876-1952) [Текст] / М.Г. Хапланов // РГУ 1915-1965. Статьи, воспоминания, документы. – Изд-во РГУ, 1965.

Книги усадебных библиотек как дешифраторы повседневных потребностей дворян

С.И. Лякишева

Многогранная жизнь дворян в XIX в. является предметом изучения специалистов разного профиля на протяжении уже второго столетия. Это неслучайно – в начале XX века произошли большие социальные потрясения, которые целенаправленно, грубо и безвозвратно разрушили огромный пласт русской культуры и привели к катастрофическим изменениям культурной ситуации в стране, продолжающимся до сих пор. Весьма важно обратиться к теме образовательных и культурно-исторических традиций дворянских семей и усадебного уклада и книговедам, поскольку книжные собрания дворян являются ценным материалом для изучения, представляя собой самостоятельную ценность в создании культуры нации. Источников о функциональном значении усадебных библиотек крайне мало – незначительный, “бисерный” материал можно найти в сборниках Общества изучения русской усадьбы “Русская усадьба”, исследуя истории отдельных дворянских гнезд, сборнике исторических очерков “Дворянская и купеческая сельская усадьба в России XVI-XX вв.”, “Альманахах библиофила”, автобиографических повестях. Основным же материалом для исследования дворянских библиотек является, во-первых, опыт реконструкций – библиографические описания существующих музейных библиотек, во-вторых, воспоминания и мемуары дворян, поскольку каждая усадьба порождала особый мир, особую культурную и духовную атмосферу, передать которую были способны только непосредственные участники и свидетели усадебной жизни.

Прежде всего, следует отметить, что время расцвета русских усадеб началось со второй половины XVIII века, когда дворяне, получив законодательные гарантии незыблемости своего состояния, обустраивали свою жизнь по европейскому образцу. Особый интерес представляют те усадьбы, которые на протяжении долгого

[4]АРАН. Ф. 518. Оп. 3. Д. 1101. Л. 6.

[1]К сожалению, это издание репринтное, сохранившее в себе опечатки первого.

времени принадлежали одному роду. В них свято хранилась память предков, соблюдались традиции, они становились "культурными гнездами", оказавшими большое влияние на отечественную культуру. Традиционно, из поколения в поколение, дворянские собрания книг и других документов, собранные на основе собственного вкуса предшественников, были рассчитаны на ежедневное результативное пользование. Для более глубокого понимания тонкостей периода организаций дворянских усадеб обратимся к содержимому книжных шкафов – книги в жизни дворян играли роль настолько огромную, что фактически они являлись источником удовлетворения их многообразных потребностей. С их помощью можно более глубоко исследовать русскую усадебную жизнь и понять детали повседневного дворянского быта.

В первую очередь, книги были необходимы для ведения хозяйства, а значит, они удовлетворяли **витальные, т.е. жизненные, потребности.** Дворяне создавали жилищно-хозяйственные комплексы в сочетании с райскими уголками из английских и французских парков, фруктовых садов, аллей и беседок, и в усадебной библиотеке появлялись *архитектурные увражи и альбомы, книги по вопросам архитектурной теории и практики.* Несмотря на то, что физически дворянин не занимался строительством архитектурных объектов в усадьбе, изначально он был первым лицом, главным архитектором в собственном владении, и в совершенстве должен был разбираться в теории архитектуры. С этой же целью для обустройства усадьбы собиратели домашних библиотек приобретали и *книги о создании садов и парков*, авторами которых были как отечественные – И. Лем, В. Левшин, Н. Осипов, А. Болотов, Н. Львов, А. Самборский, А. Максимович-Амбодик, так и зарубежные писатели-масоны – Делиль, Жирарден, Руссо. Так, например, в библиографическом описании Яснополянской библиотеки, собираемой несколькими поколениями владельцев и, в первую очередь, дедом Л.Н. Толстого Н.С. Волконским, есть сведения о наличии книги Жака Делиля, изданной в 1782 г., "Искусство украшать пейзажи"[1] (Delille, Jacques Montanier. Les Jardins, ou l'Art d'embellir les pausages. Paris; Lausanne: Lakombe, 1782). Создававший роскошную усадьбу с красивыми парками, Н.С. Волконский не мог не иметь в своем собрании этого столь популярного в те годы произведения. В дворянских библиотеках находились масонские книги, изданные не только во Франции, но и в Германии, Швейцарии, Голландии (сколько голландских, а не только французских или английских парков создавалось в русских усадьбах в XIX веке!), Дании, Англии. Авторы-теоретики садового искусства зарождали в читателе-дворянине мысль о возможности понимания и изучения "темного языка природы", поскольку, если обратить пристальное внимание на любой пейзажный парк, можно увидеть, что в нем присутствует "масонский" взгляд, отличавшийся особой программой. Собственно, это не парк, скорее, сад медитации с отдельными знаками для игры воображения. В статье В.С. Турчина "Взгляд русского масона на природу естественную и искусственную"[2] отмечается, что при натурных исследованиях в усадьбах можно обнаружить пруды или насыпи в виде пяти- или шестиконечных звезд. Подобная символика объясняется благодаря обращению к масонским книгам усадебных библиотек. Пятиугольная звезда входила в качестве элемента в знак 5-й степени, а 6-угольная означала "тайну шестидневного творения". Неслучайно деревья высаживали таким образом, что они образовывали всевозможные тайные фигуры, от квадратов и кругов до особых знаков и даже букв. В качестве примера можно привести все тот же яснополянский французский парк. Тропинки и ручейки, прихотливо петляя по парку, могли "выписывать" буквы таинственного алфавита. Цветочный партер перед домом мог повторять мотивы "масонского ковра в ложе", а из цветов на клумбах складывали "часы", напоминающие о том, что мир находится в вечных переменах.

Следует отметить, что в России среднепоместные усадьбы создавались и обустраивались для постоянной жизни в них и получения дохода. Тщательное изучение особенностей многочисленных усадеб показывает, что фактически дворяне были образованными, профессиональными организаторами сельского хозяйства, промышленности и торговли. Более того, устойчивость и жизнеспособность имения, и главное – включение всего хозяйства в совершенно новые, свойственные капиталистическому укладу, отношения заставляло помещиков заниматься промышленным производством. Появлялись помещики – рационализаторы, помещики-предприниматели, стремящиеся перестроить свои хозяйства на основе новейших достижений в сфере агрономической науки и сельского хозяйства в целом.

Первопричиной столь активной и успешной хозяйственной деятельности являлась возможность приобретения книг и журналов ***по практической тематике***: в усадьбах XIX века повсеместно открывались заводы кожевенные, салотопенные, мыльные, пивоваренные, воскобойные, свечные, клейные, красильные, кирпичные, винокуренные, полотняные, канатные, пенькотрепальные, крупорушильные, табачные, известковые, маслобойные, свеклоперерабатывающие, конезаводы – их и традиционные оранжереи, винокурни, псарни также нужно было содержать грамотно, в соответствии с выпускаемыми техническими новинками, важно было переоснастить, например, винокуренные заводы появившимися английскими медными котлами, о чем узнавали из свежих журналов. Управление усадьбой требовало серьезной теоретической подготовки и, соответственно, ежедневной многочасовой работы с книжными и журнальными новинками.

Для организации огородов хозяева усадеб обращались к книге Е.Г. Аверкиевой "Практические советы по огородничеству". ((Вып. 1-24) Учеб. Маг. "Начальная школа", 1893-1894). Значимость ее заключалась в том, что каждый из 24 выпусков посвящен особенностям выращивания какого-либо одного овоща. Например, выпуск

[1]Библиотека Л.Н. Толстого: Тула, Ясная Поляна, 1999. С. 275.

[2]Турчин В.С. Взгляд русского масона на природу естественную и искусственную // Русская усадьба, вып. 8(24). С.41-48.

18 был посвящен спарже, выпуск 24 – хмелю, выпуск 9 – огурцам в грунте и т.д. С не меньшим интересом изучали и книгу И.Л. Елина "Как ухаживать за огородом. Советы о том, как сеять и выращивать необходимые овощи в домашнем огороде" (М., Посредник, 1894).

Характерно, что практически все помещики свои наблюдения вносили в "садовые и огородные записи", где отмечали сроки высева, уборки и хранения зерновых культур, фиксировали опыты по выращиванию рассады в парниках, отбору семян, разведению иноземных овощей и бахчевых культур, зачастую опубликовывая их. Так, например, П.Н. Крекшин (1748-1763), составил трактат "Экономия о садах"[1], где описал приемы посадки плодовых кустарников и деревьев, ухода за ними, средства борьбы с вредителями.

В усадебных оранжереях в огромных деревянных бочках выращивали "померанцовыя и цытронныя деревья", персики, виноград, финики, лимоны, о разнообразии сортов которых и тонкостях подобного предпринимательства также узнавали из книг, зачастую рукописных. Успехом пользовалась книга В.С. Уильямса "Лучшие тепличные и оранжерейные растения" (СПб., 1876-1880).

Полеводство требовало не менее основательных знаний. Рационализаторской деятельностью занимались помещики крупнопоместных усадеб, особенно те, кто содержал конные заводы, требовавшие значительного количества зеленого корма и корнеплодов. Получить его можно было только с применением многополья, плодосеменной системы и травосеяния. Несомненным помощником становилась книга П. Вагнера "Основы разумного удобрения сельскохозяйственных растений. Три чтения проф. П. Вагнера"[2], с информацией, как подмешивать в почву торфяной порошок, улучшать возделывания лугов и т.д. Из книг владелец усадьбы мог узнать рекомендации по ведению и срокам пахоты, сева, уборки урожая, удобрению почвы, хранению сена и зерна. В яснополянской библиотеке Л.Н. Толстого находится книга, получившая золотую медаль от Императорского Российского общества за лучшее сочинение на русском языке по садоводству и огородничеству, "Сочинения Р.И. Шредера, главного садовника и преподавателя садоводства", испещренная подчеркиваниями Л.Н. Толстого, рачительного хозяина яснополянской усадьбы, на протяжении нескольких сотен страниц. С большим интересом он изучал разделы о классификации и обработке почвы, удобрениях, видах плугов. Вот только несколько моментов, на которые Толстой обращал внимание тщательным подчеркиванием: "...известно, что картофель – самое щекотливое растение относительно удобрения, и на второй, даже на третий год после сильного унаваживания, выходит водянистым и мыльным"[3], "...Роговые стружки, волос, перья, копыта и прочие также употребляются в измельченном виде и представляют сильное азотистое удобрение, которое особенно благотворно действует на зеленые части растений. Вещества эти вообще доступны в значительном количестве только в тех местах, где производится обработка различных животных продуктов. 1 пуд роговых стружек считается по действию равным 1 возу навоза", "...удобрение от водяных домашних птиц, особенно гусиное, по своим свойствам скорее вредно, чем полезно[4]" и т.д.

Для изучения способов борьбы с вредными насекомыми дворяне - владельцы многочисленных огородов и садов читали книгу П.Н. Штейнберга "Вредные насекомые и испытанные способы борьбы с ними" (СПб., П.И. Сойкин).

Помещичье предпринимательство не могло развиваться без книг и в ***животноводстве***, первенство в котором принадлежало ***коневодству***. Не подлежит сомнению значение усадебного быта в воспитании дворянских детей в сохранении традиций воинской службы, в обучении их воинским приемам и конной езде. На территории усадебного хозяйства лошадей не только выращивали, но и учили ходить под седлом и в упряжке. Об ассортименте и продаже необходимых хомутов, седел, попон, упряжей, повозок, саней хозяева дворяне-помещики узнавали из рекламных разделов сельскохозяйственных журналов. Там же можно было почерпнуть информацию о запасе фуража с наибольшим количеством витаминов или как подготовить лошадь для "псовой и птичьей охоты". В пореформенной России коневодство становилось доходной отраслью экономики – продажа лошадей оказалась выгодным делом и для дворян полезной оказалась книга К.А. Дитерихс "Лошадь в крестьянском хозяйстве"[5] – о правильной покупке лошади, о содержании лошади и уход за нею, о лечении лошадиных болезней. Наличие в усадьбах больших конных дворов создавало необходимость приобретения в домашнюю библиотеку и журнал "Коннозаводство за 1890 г.", и такие книги, как: Н. Ловыгин "Рысистые заводы в России", "Заводы разных губерний" (Вып. 1. М., 1878).

Для тех, кто разводил пчел, а пасека находилась в каждой усадьбе, необходима была книга И. Дзержон "О пользе пчеловодства". Большим успехом пользовался и трехтомный "Энциклопедический лечебник домашних животных и дворовых птиц" (СПб., ред. Журн. "Труды", 1855-1856). Столь же затребованными были *книги по плодоводству, лесоводству и переработке продуктов сельского хозяйства*. Ценились новинки и с подробным *техническим описанием*, например, английских станков для резания сечки, машины для подсеивания и веяния

---

[1]Самарин А.Ю. Представления русского дворянина XVIII о природе // Историческая антропология. – М., 1998. – С. 201-203.

[2]Вагнер П. Основы разумного удобрения сельскохозяйственных растений / Три чтения проф. П. Вагнера. – М.: тип.-лит. И.Н. Кушнерева, 1891.

[3]Сочинения Р.И. Шредера, главного садовника и преподавателя садоводства Петровской земледелия и лесной академии. С.-Петербург, издание А.Ф. Девриена, 1886. С. 66.

[4]Там же, с. 49.

[5]Дитерихс К.А. Лошадь в крестьянском хозяйстве". – М., Посредник, 1890.

зерна, для сбивания коровьего масла, для дергания пней.

У Л.Н. Толстого, владельца земель в самарских степях, в сохранившейся яснополянской библиотеке есть книга С. Хайновского Дешевый кумыс (домашнее приготовление). (СПб., тип. Скарятина, 1873). Судя по тому, что отметки "стр. не разрезаны" нет, книга в свое время в самарском хозяйстве по производству кумыса изучалась[1].

Для организации красивых цветников – яркого символа каждой усадьбы дворяне обращались к книге И.Л. Елина "Как ухаживать за цветами. Правила ухода за цветами и вообще за всеми культурными растениями, разводимыми в комнатах и на вольном воздухе" (М., Посредник, 1896).

В территорию дворянских усадеб входили близлежащие леса, изобилующие грибами. Для более тщательного и правильного отбора урожая в грибной период владельцы усадеб знакомились с книгой Д. Кайгородова "Собиратель грибов. Карманная книжка, содержащая в себе описание важнейших съедобных, ядовитых и сомнительных грибов, растущих в России" (СПб, А.С. Суворина, 1891" или работой А.Н. Бекетова "Главнейшие съедобные и вредные грибы, с 8-ю таблицами акварельных рисунков. (СПб., изд. дир. Л.Н. Симонова, 1890).

Дворянская библиотека уникальна тем, что она служила отражением желаний и планов всех семейных собирателей книг. Так, например, *поваренные книги* собирали хозяйки усадеб, в частности, для разнообразного приготовления отдельных видов дичи, результата популярнейшего вида времяпрепровождения помещиков - охоты. Приверженцы же вегетарианской кухни знакомились с книгой-руководством к изготовлению вкусного здорового стола из растительных продуктов: А.П. Зеленков "Одна неделя обедов вегетарианца". (М., В.П. Быков, 1894), "Вегетарианская кухня. Наставление к приготовлению 800 блюд, хлебов и напитков для безубойного питания" (М., "Посредник", 1894).

В разнообразном усадебном меню соседствовали блюда русской и иностранных кухонь. Лакеи в нитяных белых перчатках разносили блюда, зачастую приготовленные по рецептурным новинкам из дамских журналов или купленных книг. Матлот, стуфато, компот Маседуан, сабаен, плумп-пудинг, бюрдалю, баваруаз, гранд-ассорти – с помощью разнообразных рецептов можно было удивлять гостей, не повторяясь в блюдах.

Мода на французскую кухню, характеризующаяся многообразием блюд, требовала много посуды – сухарницы, соусницы, сосуды для специй. Об искусстве сервировки стола, а также о том, в каких столичных магазинах можно было приобрести лучшую столовую посуду, выпускаемую заводами Гарднера, Попова, Батенина или сервизы английской фирмы Веджвута, также можно было узнавать из выписываемых журналов, богатых рекламными объявлениями.

Поваренные книги писали и сами. Важно, что при поиске рецепта в книгах у дворян происходил ответ на витальные потребности, в случае же, когда рецепты записывали и даже издавали, хозяева усадеб реализовывали свои потребности духовные. Доставляющие удовольствие в процессе составления, такого рода книги становилась семейной реликвией для нескольких последующих поколений. Примером тому служит "Поваренная книга С.А. Толстой"[2]. Будучи хлопотливой хозяйкой, жена Л.Н. Толстого вместе со своим младшим братом С.А. Берс составила домашнюю поваренную книгу из 162 рецептов, связанных с семейными историями, среди них: "Яблочный квас Марии Николаевны" – М.Н. Толстой, младшей сестры Льва Николаевича, "Лимонный квас Маруси Маклаковой" – близкой знакомой семьи Толстых, "Квас Шостак" - Е.Н. Шостак, двоюродной тетки Софьи Андреевны, начальницы Елизаветинского училища в Петербурге, "Пастилу яблочную Мар. Петр. Фет" – жены А.А. Фета, "Пасху Бестужевых" – В.Н. Бестужев-Рюмин в 1876-1879 гг. был начальником Тульского оружейного завода. Название знаменитого анковского пирога связано с доктором медицинских наук, домашним врачом семьи Берс Николаем Богдановичем Анке. В "Поваренной книге С.А. Толстой" есть и рецепт приготовления кумыса, помогавшего Толстому поправить здоровье, и рекомендации изготовления зубного эликсира, одеколона, состава для лица, а также средства от тараканов, и все ее содержание подтверждает мысль об удобстве составления собственных домашних книг для универсального и успешного пользования ими.

Собственные книги составляли в соответствии со своими интересами. Так, например, С.Т. Аксаков, страстно любящий охоту и рыбную ловлю, и ежедневно пропадающий часами с сыном Константином в своем Абрамцево на реке Воря, не просто наслаждался природой – впоследствии он написал "Записки об уженье рыбы", "Воспоминания охотника о разных охотах" – созданными книгами он поделился с читателями своей радостью, о чем сообщил Н.В. Гоголю.

Большой популярностью в дворянской среде пользовались и книги по *спортивной и игровой* тематике. Для своих детей дворяне старались приобрести книгу А. Алтаева "Сделайте сами. Зимние занятия детей" (СПб. Типо-лит. Б.М. Вольфа, 1892)[3]. Летом умственные занятия детей и взрослых сменялись играми, не только традиционными, но и входившими в моду дворян теннис и крокет. "Новая теннисная площадка – в конце той узкой и длинной просади черешчатых дубков. . . , – писал В.В. Набоков, – была выложена по всем правилам грунтового искусства рабочими, выписанными из Восточной Пруссии. Вижу мать, отдающую мяч в сетку. . . *Майерсовское руководство для игры в лоун-теннис* перелистывается ветерком на зеленой скамейке"[4] *(курсив мой – С.Л.).*

[1] Библиотека Льва Николаевича Толстого в Ясной Поляне. М.: Книга, 1975. С. 412.
[2] Поваренная книга С.А. Толстой. – Тула: Приокское кн. изд-во, 1991.
[3] Библиотека Льва Николаевича Толстого в Ясной Поляне. Ч. 1-я. М.: Книга, 1975. С. 31.
[4] Набоков В.В. Указ. соч. С. 380

Раздел *домоводства* у дворян служил для удовлетворения **эстетических потребностей**. Дамские платья шились в усадьбах по чертежам и лекалам со страниц модных журналов, служившим идеям моды и уюта в дворянском доме. В начале XIX века стало чрезвычайно модным занятием шить бисером – им вышивали экраны для каминов, кошельки, кисеты, футлярчики, ошейники для собак, украшали шкатулку для рукоделия, портфели, обнизывали чубуки трубок и стояны подсвечников, бисерные чехольчики для мелков, которыми игроки в карты писали на зеленом сукне ломберного стола. Из бисера плелись целые картины, бисерными панно с изображением сложных цветочных букетов или гирлянд украшали столешницы дамских бюро или столиков для рукоделия. Бисерные панно, довольно большие по размерам и чрезвычайно трудоемкие по работе, создавались годами и являли собой наглядное свидетельство незаурядного мастерства, вкуса и терпения русских аристократок. Образцами для них служили не только покупные раппорты с модными античными сюжетами, но и гравюры и иллюстрации из книг. Идеи для вышивания орнаментальных композиций из пышных букетов, цветов, гирлянд и венков для украшения столовых скатертей или постельного белья, панно на стены, подушек брали также *из выписываемых журналов*. Из постоянно пополнявшегося раздела домоводства дворянка могла узнать о вышивке Мадэр, Ренессанс и Ришелье, об особенностях венецианского кружева, о датском шитье "Хедебо", о монограммах времен Гольбейна, об испанском двойном шве "елочкой", китайских, греческих и албанских мотивах, о скатертях, выполненных марокканским швом, напоминающим штопку. Кропотливая работа требовала усидчивости и терпения, но слишком соблазнительными для исполнения были новые образцы в следующем выпуске журнала!

В свет дамы выходили, демонстрируя шали, веера, шарфы, вставки на платьях, каемочки на вуалях зачастую собственного исполнения. В книгах и журналах по рукоделию, ставших в XIX в. доступными и многообразными, читательницы находили образцы узоров со всеми оттенками цветов и растений. Из дамских журналов можно было узнать о модных тканях, о способах плиссировки, гофре, а также о выпуске изобретенных машинок для изготовления многочисленных складок, хитроумных и сложных рисунков и фасонов или ножниц с зубчатым колесом, способных обрезать плотные ткани в виде фестонов, без обсыпания краев.

Там же, в разделе домоводства, в дворянских библиотеках хранились книги Федченко и Флерова "Руководство к собиранию растений для гербария", Д.Р. Шредера "Цветник и травник. Руководство к выращиванию, собиранию и высушиванию лекарственных растений, с описанием, от каких болезней и в каком виде они применяются" (СПб, кн. П.П. Сойкина, 1909). Дворяне учились понимать природу в детстве, и собирание растений, интересных перышек, раковин, насекомых приятно занимало дворянских детей часами. На основе книжных руководств узнавали, в какое время дня нужно собирать растения, чтобы они не были покрыты росой и впоследствии не чернели, как расправлять согнутые листья и цветы, складывать их в ботанические коробки, обкладывая влажным мхом, как укладывать для просушки в старые книги или помещать их под пресс, и в конечном результате, как из высушенных растений составлять интересную коллекцию с названием "гербариум".

Собрания карточных пасьянсов, гадальные книги, сонники также находили место в домашней библиотеке, благодаря чему можно было научиться гадать на курице, собачьей шерсти, луковицах и другом подручном материале.

Лечить ангину сельдереем, гипертонию – свеклой, ипохондрию – пижмой помогали владельцам усадьбы *домашние травники и лечебники*. Дворяне увлекались гомеопатией, о чем говорит наличие в дворянских библиотеках такой книги, как "Начальные основания естественной истории, содержащее царства животных, растений и ископаемых" – СПб., Импер тип., 1794 (Изд. акад. В. Севергиным). Часть 2-я книги посвящена травам и их свойствам.

Практическое применение книг находило свое место и в таких "мелочах", как кладка печей. Печи в господских, или "белых" кухнях должны были выдерживать большую нагрузку в связи с ежедневной выпечкой хлеба и приготовлением огромного количества блюд. Функциональность печи зависела от правильной ее кладки. Тонкостям и хитростям печного дела можно было научиться с помощью книги Н.И. Кржишталович "Описание устройства печей комнатных, кухонных, сушильных, банных и ретирадных". Со сметами и 20-ю таблицами чертежей" (Новгород, Губ. тип., 1898).

Обращаясь к вышеупомянутой библиотеке Л.Н. Толстого, можно сделать вывод, насколько значительное место в усадебных книжных собраниях занимали общественно-политические и исторические *журналы*. Это и "Вопросы философии и психологии", "Запросы жизни", "Городское дело", "Исторический вестник", "Русская старина", "Русский архив", "Русская мысль", журналы религиозной тематики: "Церковные ведомости", "Русский паломник", "Русское богословие", "Странник", "Церковный вестник", "Пчеловодство", "Театр и искусство", "Искусство", "Народная школа", "Педагогический музей", "Вестник воспитания", а для детей - "Иллюстрированный журнал для детского чтения", "Мир божий", "Родник".

Любое появление технических новинок, столь разнообразных преимущественно во второй половине XIX века, сопровождалось выпуском профильной литературы. Так, например, семейные дагерротипы быстро сменились фотографиями, и весьма актуальной покупкой для домашней библиотеки стала книга В.А. Дюбюк, А.Ф. Рейне "Современная фотография. Руководство к сниманию на броможелатинных пластинах, печатанию на альбуминной бумаге, аристотипной и бромосеребряной бумагах. Фотографирование при вспышках магния". (М., А. Рейне, 1889) – эта книга приобреталась в домашнюю библиотеку теми дворянами, которые начинали осваивать, например, появившийся и сразу ставший популярным фотоаппарат "Кодак". По мере освоения этой книги увлечение фотографией становилось любимым видом времяпрепровождения дворян.

Такова основа усадебных библиотек для удовлетворения витальных потребностей, благодаря изучению которой можно сделать вывод: домашняя библиотека была основным помощником и при организации псарен, и при строительстве ледников и амбаров, и при покупке мебели, и при организации приема гостей, воспитании детей - не существовало ни одной сферы деятельности владельцев усадьбы, где дворяне могли бы обходиться без книг.

Однако приоритетом над практическим аспектом пользования домашней библиотекой являлись ***культурные потребности*** дворян, само предназначение их деятельности заключалось в сохранении культурной среды и обогащении духовно-нравственным содержанием жизни общества в целом. Именно им было присуще понимание норм и ценностей, образцов поведения и стиля жизни, смыслов и идеалов. В тиши усадебных библиотек воспитывалось несколько поколений русских дворян, между культурными традициями которых и традициями иных сословий существовала определенная разница. Наиболее образованные и просвещенные слои русского дворянства смогли создать высочайшего уровня культуру, с выработанной системой самосознания, нравов, обычаев, поведения (а оно должно было соотноситься с традициями и нормами данного сословия, где поддерживался престиж и соблюдался статус). Основой дворянского поведения были безукоризненность манер, обязательное соблюдение этикетных предписаний, вежливость, уважение к человеку, корректность, умение скрывать личные неприятности и переживания, умение защищать свой внутренний мир от посторонних – достойному поведению дворянам помогали учиться не только среда высшего света, но и книги по *этикету и культуре поведения.* Кроме того, значительный раздел усадебных библиотек состоял из *литературы по искусству* – скромное книжное собрание по этой теме от предшествующих поколений стремительно пополнялось дворянами в XIX веке за счет увеличения типографий и их технических возможностей, поскольку на полиграфическое исполнение при покупке подобных книг обращали особое внимание. Весьма затребованными для удовлетворения культурных потребностей являлись в дворянском доме *книги по истории музыки и театра, а также ноты* - постановки домашних спектаклей и музицирование в усадьбах - явление частое. В библиотеках дворян находились трагедии, комедии, либретто опер. В последнее десятилетие XVIII века популярен был сборник “Российский Феатр, или Полное собрание российских феатральных сочинений” в 39-ти томах, приобретение которого усиливало интерес и популярность к театральным постановкам в дворянских домах. Полезными оказывались и “Песни, собранные П.В. Киреевским” (М.,1860-1864, 1868 (10 выпусков), “Пантеон русского и всех европейских театров”. (Ред. Ф.А. Кини, в 4-х ч. СПб., 1840).

Следует отметить, что представителями любых общественных движений в XIX веке являлись выходцы из дворян, от монархистов до экстремистов, чья деятельность базировалась на соответствующей литературе. Чтение было главным средством общественного переустройства и для вольнодумцев, и для масонов, славянофилов, западников, бомбистов – все они считали книгу вернейшим средством преобразований. Они размышляли и об обустройстве России, и об укреплении власти, и о методах борьбы с ней в случае необходимости. Представители каждого направления по-своему изучали условия жизни и настроения масс, делая выводы о том, какая книга нужна народу. Таким образом, книга служила выражением и **социальных потребностей**. Рассматривая содержимое книжных шкафов с этой точки зрения, становится понятно наличие *книг по педагогике,* занимавших в дворянской библиотеке достойное место. В XIX веке стремительно развивалось образование, прогрессивной тенденции распространения которого способствовала политика правительства Александра I. В 1803 году в России было учреждено Министерство народного просвещения, отвечающее за проведение реформы народного образования. К середине XIX века в своих уездах помещики повсеместно создавали школы для крестьянских детей. Зачастую, имевшие возможность заграничных поездок, дворяне приобретали книги зарубежных педагогов – педагогический опыт Германии, Франции, Швейцарии был, несомненно, выше опыта российского. Книги по педагогике позволяли создавать народные школы с полноценной методикой преподавания. На основании дневниковых записей Л.Н. Толстого периода заграничной поездки во Францию и Германию с целью дальнейшей организации в своем уезде крестьянских школ есть возможность проследить, какие книги он приобретал в книжных магазинах. Это и “История педагогики” немецкого ученого, писателя и педагога, ученика К. Песталоцци Раумера (тт. 1-2, Штудтгарт, 1857), где дается характеристика выдающихся педагогов и различных течений в педагогике с эпохи Возрождения до начала XIX в., с анализом смены взглядов на цели и методы образования, борьбы и взаимовлияния разных направлений, и “Книга для чтения” М. Гаррика (Париж, 1860), содержащая элементарные сведения из области науки, искусства и промышленности, три выпуска “Книги для чтения для детей 8-12 лет” Т. Лебрэна (Париж, 1860-1861), где материал расположен по временам года, со сведениями различных отраслей знаний, и французские учебные книги Г. Ритта по начальной арифметике, немецкий букварь “Большая азбука” (Лейпциг, б.г.), “Элементарный курс орфографии” и “Расширенный курс орфографии” (Нью-Йорк, б.г.) М. Вильсона, “Общая орфография” (Нью-Йорк, 1867) Ч. Сандерса, и книги немецких педагогов К. Стоя и А. Дистервега, с изложением основ педагогики, учебник начальной арифметики А. Дамке, книга Э. Жирардена “О народном образовании во Франции” (Париж, 1842) и многие другие.

Отличавшиеся гражданским самосознанием, дворяне были неравнодушны и к проблемам социально-политического характера. Обращение к содержанию исторических разделов дворянских усадебных библиотек показывает, что систематическое общение с книгами способствовало расширению представлений дворян-читателей об особенностях русской истории и зарубежных стран, а также воспитанию глубокого патриотического чувства. Книги этой тематики воспитывали у дворян европейское и национальное мышления, интерес к истории Отечества и народным традициям. Российскую историю изучали по таким книгам, как М. Щербатов "История Российская (1789), В. Бергман "История Петра Великого" (в 6 тт.; 1833), "Деяния Российских полководцев и генералов" (1822), "Ядро хронологическое истории Всемирной, от начала света до кончины Екатерины II" (М.: Тип. Гария и компания, 1804-1805) и многим другим.

Государственная служба на ответственных должностях обусловила появление в дворянских библиотеках такой темы, как *гражданское законодательство и римское право* – знание обширной литературы по данным вопросам позволяло быть первыми и вторыми лицами в губернии долгосрочно.

В раздел *географии* домашней библиотеки хозяевами библиотек приобретались: труды экспедиций, периодика, путеводители по Европе – карты, планы европейских столиц и больших городов, проспекты курортов и вод, каталоги музеев, отечественные путеводители, например, "Новейший и любопытнейший указатель Москвы, или Альманах для приезжающих в сию столицу и для самих жителей оной..." (М., 1829 г.), иллюстрированный 14 литографиями: "Вид церкви Василия Блаженного", "Вид Вознесенского монастыря", "Вид царского терема" и т.д. Лабиринты московских переулков, облик площадей и улиц оказывались для читателей этого указателя, приехавших в Москву, вполне узнаваемыми. Дворянам из провинции легко было ориентироваться в Москве в разнообразии церквей, мостов, музеев, дворцов и кладбищ благодаря путеводителям "Москва и окрестности. Летние прогулки воспитанников I-го Московского кадетского корпуса", "Москва, или Исторический путеводитель по знаменитой столице" (М., 1827-1831). У дворян, не имевших возможности бывать в столице, оставался вполне достойный вариант совершать заочное путешествие по Москве, находясь в собственной домашней библиотеке.

В дворянских домах имелись и фундаментальные атласы. "Подробный атлас всех частей света"[1] снабжен предисловием автора А. Ильина: "Географическая наука в последнее время сделала такие громадные успехи, что стала потребностью каждого образованного человека". В большей степени эти слова можно уверенно отнести к дворянам. С 1865 года у хозяев усадеб появилась возможность приобретать "Атлас Российской империи с планами городов". По таким *атласам* дворяне изучали карты природы, населения, этнографию, вероисповедание, пути сообщения и т.д. В библиотеку покупали и "Путешествие вокруг света в 1803,4,5 и 1806 г. на кораблях "Надежда" и "Нева" под началом Крузенштерна". СПб., 1809 г., и "Путеводитель по Европе" (Сост. П. Якубович, 1874).

Для путешествующих дворян своеобразной энциклопедией *развлекательного чтения* в дороге являлась изданная А. Смирдиным "Библиотека для дач, пароходов и железных дорог, собрание романов, повестей и рассказов, новых и старых, оригинальных и переводных" (Санкт-Петербург, 1855-1857), многотомные сборники – "Развлечение деревни, двора и города" (в 12-ти т.), "Пестрота, или Любопытная и поучительная смесь" (в 20-ти т.), комплекты английских сатирических журналов Аддисона и Стиля "Болтун", "Зритель", "Опекун".

В любой дворянской библиотеке хранились и *календари*. Их разнообразие было настолько велико, что можно встретить и "Календарь императорского лицея в память Цесаревича Николая" (Универ. тип.), и "Календарь в пользу убежища для неизлечимых взрослых", и "Рысистый календарь и сведения об испытаниях лошадей на рысистых ипподромах в Санкт-Петербурге и Царском Селе с 1845-1849 год" (СПб., 1849).

Характерное явление для комплектования практически всех дворянских библиотек – появление университетских лекций и диссертационных трудов в период обучения дворянских детей в университетах.

Кроме того, достойное место на полках дворянских книжных шкафов занимали *дневники*, хранившиеся без утайки от домашних. Помимо взаимной переписки, дворяне традиционно вели дневниковые записи, писали воспоминания, не с целью увидеть их напечатанными – ими двигало желание сохранить и передать память о семье. Пик ведения дневников пришелся на XIX век, когда они стали элементом духовного быта, соперничая с эпистолярным жанром. Дневник не предполагал тиражирования, однако пишущий его рассчитывал на прочтение следующим поколением. В дворянской среде дневник служил способом выражения **творческой потребности** в фиксировании примечательных фактов личной жизни и общественных событий и занимал достойное место в домашних библиотеках. По той же причине в усадебных библиотеках находим и рукописные *альбомы.* Их традиция пришла в Россию в середине XVIII из Западной Европы, преимущественно из Германии и Франции. Если до конца XVIII века составлением альбомов занимались преимущественно мужчины, то в XIX веке эта традиция закрепилась за женщинами. Их изящные альбомы были небольших размеров, чтобы они могли легко поместиться в дамской сумочке. В разных альбомах между листами встречаются пряди волос, засушенные цветы. Чаще всего в них записывали стихотворения, элегии, мадригалы, романсы, пожелания, помещали собственные рисунки, часто вклеивали вырезанные из книг офорты и гравюры. Оформляющие альбом придерживались строгих законов заполнения. Так, например, первую страницу оставляли незаполненной – существовало мнение, что с открывшим ее может случиться несчастье. В начале альбома писатели родители и старшие, затем – подруги и знакомые, последние же страницы альбома отличались особой нежностью – они отводились для тех, кто более всех любил владелицу альбома. Пик расцвета альбомной традиции пришелся на 1820-1830-е годы, когда альбом из способа внутрисемейного творчества превратился в модный факт светской

[1] Подробный атлас всех частей света, изданный в память двадцатипятилетия Картографического заведения А. Ильина. А. Ильин. СПб., 1884. 65 л.

культуры. Как видим, содержимое книжных шкафов составляло и **эмоциональную** канву жизни русских дворян. Наверное, благодаря наличию подобных книг в усадьбах и царила атмосфера сентиментальной романтики с культом любования природой и душевными переживаниями.

Что еще имело место в дворянских библиотеках? Весьма важную роль в ее комплектовании играли *собственные сочинения* не только упомянутого уже практического характера. Научные труды, литературное творчество, деловая и личная переписка - подобная деятельность была выражением **духовных потребностей** дворян. Возникает вопрос: для чего при обилии книг возникала потребность пробовать свои силы в литературе? Дело в том, что просвещенному дворянину книга несла не только добро – она ставила перед ним и много проблем. В первую очередь, это относилось к модной европейской книге, часто причинявшей отечественному читателю душевный дискомфорт и определенную тревогу. Большая часть художественных книг в усадебной библиотеке имелась на *французском языке*. На бытовом уровне такие книги оказывали наиболее сильное влияние на формирование вкуса, на развитие и образование дворянина-читателя. Это чувствительные романы Фенелона, аббата Прево, Лесажа, Корнеля, Расина, Буало, Скюдери, Скаррона, Руссо, Мариво, Бомарше, Седена, Вольтера, Гюго, Мюссе, Жорж Санд, А. Дюма, Теофиля Готье, Эжен Сю, Стендаля, Бальзака, Мериме, Ансло, Ламартина, Шатобриана, Огюстена Скриб, Беранже, которые были в каждой дворянской библиотеке. Безусловно, влияние французского языка на русскую культуру – это многоаспектное явление, которое не только замедляло, но и обогащало язык русского общества. Нельзя не упомянуть и о политическом аспекте: французский язык был обязательным и необходимым инструментом международных отношений России с Европой, помогавшим России быть равной среди равных ей стран. Знание французского языка позволяло представителям дворянского общества знакомиться с трудами французских философов – энциклопедистов в оригинале. Однако, чем больше дворяне знакомились с подобными книгами, тем быстрее у них возникала **патриотическая потребность** писать самим для восполнения пробела в отечественной литературе.

Потребность писать самим охватывала не только взрослых, но и детей-дворян. В описании усадьбы Зубовых Кузнецово Кадниковского уезда Вологодской губернии читаем: "...подросшим детям самим начинало хотеться что-то сочинять, и они в течение многих лет ежемесячно выпускали "Кузнецовскую хронику", куда записывали свои стихи, рассказы, а кое-кто и музыкальные сочинения. Недаром среди детей Юлия Михайловича Зубова, который сам был поэтом и даже опубликовал в Петербурге в 1890 г. большую поэму "На юг!", шестеро детей сами писали стихи"[1]. Далее автор статьи пишет: "*Чтение толкало к научным изысканиям и изобретателььству*" (курсив мой – Л.С.). Юлий Михайлович, сам написавший несколько научных статей о знаниях, системе счета, культуре и образовании, и интересовавшийся воздухоплаванием, увлек своих сыновей идеей постройки воздушного шара, который летом был сооружен и успешно запущен.

Для *русского* раздела владельцы усадебных библиотек приобретали книги Сумарокова, Державина, Дмитриева, Княжнина, Хераскова, "Душечку" Богдановича, Пушкина, Тютчева, Тургенева, Толстого. П.П. Семенов Тян-Шанский вспоминал: "Все бывшие у нас литературные книги я читал много раз и, конечно, прежде всего, Пушкина, а затем всех предшествующих ему поэтов: Дмитриева, Державина, Ломоносова, басни Крылова, Хемницера, трагедии Озерова, "Душеньку" Богдановича и даже Тредиаковского, который меня очень забавлял"[2].

В разделе *религии* имелись Библия, Евангелие, рассказы о святых местах, книги Ф. Фаррара "Жизнь Иисуса Христа", "Жизнь и труды Св. апостола Павла", Б. Паскаля "Мысли о религии и о некоторых других вопросах".

Таким образом, жизненные судьбы усадебных владельцев домашних библиотек были неодинаковы, но их объединяла страсть к книжному собирательству.

Дворяне трепетно относились к домашним книгам, исподволь воссоздающим портрет поколений. В зрелые годы И.С. Тургенев обратил внимание на книги, доставшиеся ему по наследству. В автобиографической повести "Фауст" он писал: "Вчера я раскрыл все шкафы и долго рылся в заплесневевших книгах. Я нашел много любопытных, прежде мною не замеченных вещей: "Кандида" в рукописном переводе 70-х годов; ведомости и журналы того же времени; "Торжествующего хамелеона" (то есть Мирабо); "Le paysan perverti"[3] и т.д. Попались мне детские книжки, и мои собственные, и моего отца, и моей бабки, и, даже, представь себе, моей прабабки"[4].

Таким образом, дворянские усадебные библиотеки имели следующий функциональный ассортимент: они выполняли функции ***релаксации***, ***удовлетворения витальных, культурных, социальных, образовательных, эстетических и духовных потребностей***, благодаря которому были затребованы и актуальны. Кроме того, они образовывали владельцев книжных собраний. Совершенно очевидна универсальность и самодостаточность их фондов усадебных библиотек. Являясь хранилищами ценных семейных реликвий – дневников и мемуаров, а не только книг, карт или нот, они становились символом культуры и старины рода. Книги вырабатывали сознание собственной силы и значимости.

[1]Лукина Н.В. Усадьба Зубовых Кузнецово Вологодской губернии / Русская усадьба: Сборник общества изучения русской усадьбы: Вып. 7 (23) / Ред.-сост. М.В. Нащекина. – М. : Жираф, 2001. С. 434-449.

[2]Семенов Тян-Шанский П. П. Детство и юность.// Русские мемуары. 1826-1856. М., 1990. С. 449-450.

[3]"Развращенный крестьянин" (франц.)

[4]И.С. Тургенев. Полное собрание сочинений и писем: В 28 т.: Сочинения в 15 т. Письма: В 13 т. Т. VII (сочинения). – М.-Л.: Наука, 1961. – 1968. С. 179

Формировались домашние библиотеки с ориентацией на европейский стиль жизни, с преимущественным влиянием французских и немецких традиций. Они побуждали к изменению предназначения комнат, производству новых видов мебели, строительству новых комнат или отдельных оборудованных флигелей. Библиотеки являлись “носителями книжного вируса”, быстро заняв достойное место почти во всех усадьбах.

Кроме того, дворянские библиотеки, недоступные для посторонних, содержали редкие издания, ценные рукописи и уникальные фамильные архивы. Хорошо организованный солидный подбор книг обладал необходимым потенциалом для достижения образовательных и культурных целей владельцев усадеб.

О высокой степени неразрывной связи дворян, в том числе и молодых, с книгами говорит такой любопытный пример: К.Н. Батюшков в 14-летнем возрасте из пансиона писал отцу: “Сделайте милость, пришлите мне Геллерта, – у меня и одной немецкой книги нет; также лексиконы, сочинения Ломоносова и Сумарокова, “Кандида”, сочинения Мерсье, “Путешествие в Сирию”, и попросите у Анны Николаевны каких-нибудь французских книг и оныя все... пришлите, и еще 15 р. на другие нужные книги. Вы, любезный папенька, обещали мне подарить ваш телескоп: *его можно продать и купить книги. (Курсив мой – С.Л.)* Они по крайней мере без употребления не останутся”[1].

Остается только осознавать, какой жизненной трагедией для многих дворян становилась потеря домашних библиотек в годы эмиграции.

Тождества Диофанта, Брахмагупты и Фибоначчи и их применение в специальной теории относительности

П.Н. Антонюк

Рассмотрим тождества

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2)=(AC-BD)^2+(BC+AD)^2,$$
$$(A^2+B^2)(C^2+D^2)=(AC+BD)^2+(BC-AD)^2,$$
$$(A^2-B^2)(C^2-D^2)=(AC+BD)^2-(BC+AD)^2,$$
$$(A^2-B^2)(C^2-D^2)=(AC-BD)^2-(BC-AD)^2,$$

которые независимо друг от друга вывели Диофант (III век), Брахмагупта (VII век) и Фибоначчи (XIII век). Эти тождества попарно эквивалентны. Здесь A, B, C и D – элементы коммутативного кольца.

Покажем, что с помощью данных тождеств можно решить две задачи в специальной теории относительности: вывести преобразование Лоренца и вывести формулы вращения в плоскости. Преобразование Лоренца и вращение взаимно симметричны, а потому и рассматриваться должны совместно.

Вывод преобразования Лоренца в плоскости (x, ct). Предположим, что при преобразовании от одной инерциальной системы отсчета к другой выполняются три условия: сохраняется квадрат интервала, $c^2t^2-x^2=c^2t'^2-x'^2$; модуль скорости одной системы относительно другой меньше скорости света или $c^2t^2-x^2>0$, $c^2t'^2-x'^2>0$; длины и промежутки времени сохраняют свой знак. Здесь c – скорость света. Все обозначения общеприняты [1, 2]. Очевидно, что

$$\frac{(x^2-c^2t^2)(x'^2-c^2t'^2)}{(x'^2-c^2t'^2)}=1.$$

Математическое тождество

$$(A^2-B^2)(C^2-D^2)=(AC-BD)^2-(BC-AD)^2$$

приводит к тождеству

$$\left(\frac{xx'-ct\,ct'}{x'^2-c^2t'^2}\right)^2-\left(\frac{ct\,x'-x\,ct'}{x'^2-c^2t'^2}\right)^2=1,$$

связывающему физические величины.

Параметризуем соответственно правую и левую ветви единичной гиперболы $x^2-y^2=1$:

$$\begin{cases} X=ch\,\psi\ge 1>0; \\ Y=sh\,\psi; \end{cases}\qquad \begin{cases} X=-ch\,\psi\le -1<0; \\ Y=sh\,\psi. \end{cases}$$

В результате получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} xx'-ct\,ct'=\pm ch\,\psi(x'^2-c^2t'^2); \\ ct\,x'-x\,ct'=sh\,\psi(x'^2-c^2t'^2); \end{cases}$$

относительно старых координат x, ct. Находим решение системы

$$x=\pm ch\,\psi\cdot x'+sh\,\psi\cdot ct',\quad ct=sh\,\psi\cdot x'\pm ch\,\psi\cdot ct',$$

[1] Майков Л. Батюшков. Его жизнь и сочинения. СПб., изд. А.Ф. Маркса, 1896. С. 12.

связывающее старые координаты x,ct и новые координаты x', ct'. Из полученного решения следуют формулы для *собственной длины* и *собственного времени* движущегося тела:

$$x_2 - x_1 = \pm ch\,\psi(x'_2 - x'_1), \quad t_2 - t_1 = \pm ch\,\psi(t'_2 - t'_1).$$

Поскольку длины и промежутки времени сохраняют свой знак, приходится исключить из рассмотрения гиперболический косинус, взятый с отрицательным знаком, или, другими словами, отбросить левую ветвь единичной гиперболы. Окончательно получаем уравнения преобразования Лоренца

$$x = ch\,\psi \cdot x' + sh\,\psi \cdot ct', \quad ct = sh\,\psi \cdot x' + ch\,\psi \cdot ct'.$$

Отметим, что бесконечное множество параметрических представлений единичной гиперболы порождает бесконечное множество представлений преобразования Лоренца. Отметим также, что данный вывод не содержит предположения о линейности преобразования Лоренца.

Алгебраический вывод формул вращения в плоскости (x, y). Сохранение квадрата ненулевого радиуса, $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ дает соотношение

$$\frac{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}{(x'^2 + y'^2)} = 1.$$

Математическое тождество

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (BC - AD)^2,$$

приводит к тождеству

$$\left(\frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(\frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 = 1.$$

Параметризуя единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} X = \cos\phi; \\ Y = \sin\phi; \end{cases}$$

получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} xx' + yy' = \cos\phi(x'^2 + y'^2); \\ yx' - xy' = \sin\phi(x'^2 + y'^2); \end{cases}$$

относительно старых координат x, y. Решение системы имеет вид:

$$x = \cos\phi \cdot x' - \sin\phi \cdot y', \quad y = \sin\phi \cdot x' + \cos\phi \cdot y'.$$

Эти хорошо известные формулы обычно выводятся в курсах теоретической механики геометрическим путем. Отметим, что бесконечное множество параметрических представлений единичной окружности порождает бесконечное множество представлений вращения в плоскости.

Библиографический список

1. *Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М.* Теория поля [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 7-е изд. – М.: Наука, 1988. –512 с.
2. *Угаров, В.А.* Специальная теория относительности [Текст] / В.А. Угаров. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
3. *Антонюк, П.Н.* Рациональная параметризация преобразований в теории поля [Текст] / П.Н. Антонюк // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". – 2011. – Спец. выпуск "Физические интерпретации теории относительности". – С. 60-67.

"МАТЕЗИС" – лучшее Российское научно-просветительское издательство первой четверти XX века: люди и книги

И.Э. Рикун

Одесское издательство "Матезис" (греч. mathesis – знание) (1904-1925) специализировалось на издании книг по естествознанию, преимущественно по математике и физике. Тщательным подбором литературы, стремлением пропагандировать передовые направления в науке, первоклассным полиграфическим исполнением оно заслужило репутацию одного из лучших научных издательств Российской империи.

Одесской национальной научной библиотекой им. М. Горького в 2002 году была подготовлена книга о "Матезисе", ядром которой является каталог книг издательства, хранящихся в ее фондах, а также в фондах научной библиотеки Одесского национального университета им. И.И. Мечникова. Описаны особенности экземпляров: штампы библиотек, штампы и записи владельцев, инскрипты (подарочные надписи). Приведены краткие биографические сведения о владельцах и дарителях. Отдельные разделы посвящены участникам товарищества, авторам, редакторам и переводчикам изданных книг, художникам, которые сотрудничали с издательством, и типографиям, в которых книги печатались. За прошедшее время были найдены новые материалы; второе, дополненное издание будет напечатано издательством Московского центра непрерывного математического образования.

В процессе работы над каталогом, наряду с печатными источниками, изучались фонды Государственного архива Одесской области, одесские периодические издания начала XX века, а также велся поиск в Интернете. Найденные материалы проливают свет на некоторые новые факты истории издательства и дают возможность сделать определенные предположения и выводы.

Датой основания издательства можно с уверенностью считать 1904 год. Первое упоминание о нем появилось на страницах журнала "Вестник опытной физики и элементарной математики" (далее – ВОФЭМ) от 15 января 1904 г. в № 361. В дальнейшем объявления об изданиях, готовящихся к печати, и каталоги издательства регулярно появлялись в ВОФЭМ вплоть до 1914 года. В середине 1904 года был готов предварительный набор объявленных книг, и в цензуру было подано прошение:

"*Его высокородию господину отдельному цензору по внутренней цензуре в г. Одессе. Статского Советника Артемия Робертовича Орбинского*

Прошение.

Настоящим честь имею просить о разрешении представить к цензуре в предварительном наборе следующие сочинения:

I, Аррениус, Физика неба, перевод с немецкого под редакцией А.Р.Орбинского

II, Абрагам, Сборник элементарных опытов по физике, перевод с французского под редакцией приват-доцента Б.П.Вейнберга и

III, Ауэрбах, Властительница мира и ее тень (чтение об энергии и энтропии).

Для набора в тип. Шпенцера.

Статский советник Ар. Орбинский.

Одесса, 31 июля 1904 г. Стурдзовский переулок, 2, собств. дом"

Первые книги издательства датированы следующим 1905 годом.

Основателями товарищества были приват-доценты Новороссийского университета В.Ф. Каган, С.О. Шатуновский, А.Р. Орбинский и владелец одной из одесских типографий М.Ф. Шпенцер.

Центральной фигурой этого союза был В.Ф. Каган, на то время уже единственный редактор ВОФЭМ, с 1900 года печатавшегося в типографии М.Ф. Шпенцера.

В июле 1908 года в одесских газетах было напечатано распоряжение старшего инспектора по надзору за заведениями печати: "*Вследствие циркулярного предложения Главного управления по делам печати от 24 июня сего года за № 6055 прошу гг. владельцев имеющихся в Одессе книгоиздательских фирм сообщить мне к 1-му августа сего года свои имена и фамилии, а также названия и адреса содержимых ими фирм. И. [сполняющий] об.[язанности] старшего инспектора С. Плаксин*".

Ответ на это распоряжение дал возможность установить еще двух участников товарищества: "*Вследствие распоряжения Вашего Высокородия от 16 июля с.г. за № 563 честь имею сообщить, что участниками Товарищества для издания научных и популярно-научных сочинений из области физико-математических наук под фирмою "Книгоиздательство Матезис" в Одессе состоят: 1) Статский советник* ***Федор Андреевич Бабичев,*** *2) Окончивший Университет* ***Михаил Мойсеевич Иглицкий,*** *3) Приват-доцент Университета* ***Веньямин Фалькович Каган,*** *4) Статский Советник* ***Артемий Робертович Орбинский,*** *5) Приват-доцент Университета* ***Самуил Осипович Шатуновский*** *и 6) Одесский 2-й гильдии купец* ***Мойсей Липович Шпенцер.*** *Адрес фирмы: Типография М. Шпенцера, ул. Новосельского, д. № 66. Уполномоченный Т-ва "Mathesis" М. Шпенцер*".

Следовательно, участниками товарищества были еще астроном-наблюдатель астрономической обсерватории университета Ф.А. Бабичев и директор первой в России еврейской гимназии с правами М.М. Иглицкий.

Каждый член товарищества имел определенные обязанности. В.Ф. Каган возглавил научную комиссию издательства. Упоминание об этой комиссии позволяет предположить, что были и другие комиссии. Скорее всего, финансовыми вопросами занимался А.Р. Орбинский. Сын известного финансиста, педагога и общественного деятеля, он сам много лет был членом правления, заместителем председателя правления Товарищества взаимного кредита, принимал участие в работе финансовой комиссии университета. За печатание книг, естественно, отвечал М.Ф. Шпенцер, он же осуществлял и техническое редактирование. О том, как это происходило, можно почитать в повести его дочери В. Инбер "Как я была маленькая".

Научное редактирование книг осуществляли В.Ф. Каган (8 книг), С.О. Шатуновский (11 книг), А.Р. Орбинский (22 книги). Под общей редакцией С.О. Шатуновского в 1912-1913 гг. выходила серия "Библиотека элементарной математики". Всего в серии было выпущено четыре книги, еще три были объявлены к выпуску, но, к сожалению, не вышли.

А.Р. Орбинский был редактором серии “Библиотека научных новостей”, в которой в 1924 г. вышли две книги и были заявлены еще три. Высочайший уровень научного редактирования отмечался в многочисленных рецензиях на издания “Матезиса”.

Круг обязанностей, которые исполняли еще два члена товарищества, удалось установить благодаря изучению такого интересного документа, как записная книжка М.М. Иглицкого; он вел ее на протяжении нескольких последних месяцев жизни. Как свидетельствуют записи, Ф.А. Бабичев и М.М. Иглицкий работали над каталогами издательства, выходившими ежегодно с 1908 по 1914 гг.

За годы своего существования “Матезис” издал 185 книг. Навряд ли небольшой коллектив даже очень талантливых и трудолюбивых людей мог бы достичь таких впечатляющих результатов, если бы они работали сами. К работе издательства были привлечены ученые Новороссийского университета, друзья и единомышленники, которых объединяла с членами товарищества общая научная, просветительская и общественная деятельность в Новороссийском обществе естествоиспытателей, на Высших женских курсах, в редакции ВОФЭМ и т.д. Это И.В. Слешинский, И.Ю. Тимченко, Д.А. Крыжановский, М.П. Кастерин, Д.Д. Хмыров, Б.П. Вейнберг, П.Г. Меликов, Е.С. Ельчанинов, В.В. Завьялов, Л.А. Тарасевич, Г.И. Танфильев, Н.Н. Ланге. Научными редакторами были также такие крупные ученые старшего поколения, как К.А. Поссе, И.И. Боргман, О.Д. Хвольсон. Приятно видеть среди них тогда еще молодых, но уже известных С.Н. Бернштейна, Я.В. Успенского, Л.И. Мандельштама и Н.Д. Папалекси. Многие из талантливых молодых людей, привлекавшихся к переводу книг, в дальнейшем также стали известными учеными. Это И.В. Арнольд (отец выдающегося математика В.И. Арнольда), Г.М. Фихтенгольц (тогда – преподаватель гимназии М.М. Иглицкого), Е.А. Кириллов (тогда – студент, лаборант, магистрант Новороссийского университета), Б.Ф. Цомакион (тогда – студент Новороссийского университета). Поиски материалов о некоторых редакторах и переводчиках были весьма сложными. Это объясняется тем, что их судьбы сложились по-разному: Ю.Г. Рабинович и Я.В. Успенский эмигрировали, Б.Ф. Цомакион был репрессирован, кто-то просто не стал настолько известным, чтобы оставить после себя печатные материалы.

Высокий уровень книг зависел не только от умения привлечь к сотрудничеству талантливых и компетентных личностей, но и от умения создать атмосферу доверия их к издателям.

Важным вопросом является экономическая природа издательства, которое, как мы видели выше, было товариществом под фирмой “Книгоиздательство Матезис”. Что это означает? Статьи “Товарищество” большего или меньшего объема есть во всех дореволюционных энциклопедиях, в них идет речь о разных формах товариществ и их юридических особенностях. Общим является то, что товарищество – это союз лиц, объединивших свои средства и деятельность для достижения общей цели. Какие же средства могли объединить члены товарищества “Матезис”? Богатыми людьми они не были. Дело в том, что заработок приват-доцента был недостаточен даже для пристойного существования, поэтому большинство ученых Новороссийского университета преподавали еще и в средних учебных заведениях. Есть основания считать, что М.М. Иглицкий и А.Р. Орбинский были зажиточнее других членов товарищества, но организация издательства требовала значительных средств. При изучении отчетов Одесского общества взаимного кредита и списков его членов было установлено, что основатели “Матезиса” были членами этого товарищества (А.Р. Орбинский – с 1898 года, В.Ф. Каган – с 1902, все остальные – с 1903), неоднократно избирались его уполномоченными. С 1908 г. “Матезис” стал коллективным членом товарищества (Список членов Одесского общества взаимного кредита на 1-е января 1909 года. – Одесса, 1909. – С. 123), следовательно, можно утверждать, что именно там были получены кредиты для основания издательства.

В 1908-1912 гг. издательство пережило период расцвета. Оно вошло в число крупнейших издательств России (Статистика произведений печати, вышедших в России в 1910 году. – С.Пб., 1911. – С. 86). В 1910 г. было издана 21 книга (по нашим данным – 26), общим тиражом 76 500 экземпляров на сумму 94750 руб.

Понятно, что ни мировая война, ни война гражданская расцвету издательства не благоприятствовали. В апреле 1919 г. в Одессу вошла Красная Армия. В газете “Известия Одесского совета рабочих, крестьянских и красноармейских депутатов” из номера в номер публикуются списки предприятий, обложенных контрибуцией. В списке “Обложение буржуазии. Секция книжных магазинов, букинистов, книгоиздательств, нотных магазинов и торгующих музыкальными инструментами”, напечатанном 20 мая 1919 г., находим и “Матезис”. Однако в приложении № 55 к этой газете от 5 июня 1919 г. читаем информацию “Об обложении контрибуцией трудовой интеллигенции”. Приведем отрывок из этого интересного свидетельства эпохи: “*Среди ряда жалоб, поступающих в главную комиссию по обложению контрибуцией, обращают на себя внимание жалобы представителей интеллигенции, произвольно облагаемой различными секционными комитетами.*

Главная комиссия, исходя из того принципа, что трудовая интеллигенция ни в коем случае не может быть причислена к эксплуатирующим классам или же нажившим благодаря спекуляции громадные деньги, удовлетворяет большинство основательных жалоб, исходящих от представителей лиц интеллигентного труда.

В последние дни, например, была снята контрибуция в 20 тыс. руб., наложенная типографской секцией на научное предприятие “Матезис”, никогда не занимавшееся спекуляцией”.

Власть вновь меняется: в конце августа Одессу занимает Добровольческая армия А.И. Деникина, и через месяц на первой странице “Одесского листка” появляется такое объявление: “*Книгоиздательское товарище-*

ство "Матезис", имея в виду преобразоваться в акционерное общество с основным капиталом в четыре миллиона руб., приглашает желающих подписаться на подлежащие продаже акции. При подписке вносится 10% подписной суммы ".

Вряд ли нашлось много желающих подписаться на акции, но это уже не имело значения, так как в феврале 1920 года в Одессе вновь была установлена Советская власть, как писали раньше, – навсегда.

Новая экономическая политика советской власти создала условия для возобновления деятельности издательства в 1922-1925 гг.

В фондах Государственного архива Одесской области сберегается приказ Губисполкома по губотделу по делам печати. Согласно этому приказу, все издательства должны были быть зарегистрированы в десятидневный срок в Одесском губотделе по делам печати (Пушкинская, 3); на всех разрешенных к выпуску произведениях печати требовалось указывать город, название типографии, тираж, номер разрешения, аббревиатуру Р.О.П. ("разрешено отделом печати"). Действительно, все эти реквизиты стоят на книгах "Матезиса" советского периода.

Частные издательства могли свободно продавать выпущенные произведения печати, но Госиздат и его органы на местах получили преимущественное право приобретения всего тиража или его части. В адресной книге "Вся Одесса" за 1923 г. в отделе объявлений читаем: "*Государственное издательство Украины, одесское отделение: исключительная продажа книг издательств "Коммунист", "Матезис", государственных издательств и крупнейших кооперативных и областных издательств*". На книгах "Матезиса", изданных в 1923 г., стоят штампы: "*Склад издания: Одесское отделение Гос. Изд. Украины, Пушкинская, 1*", а на книгах, изданных в следующем году: "*Склад издания: Одесское отделение Гос. Изд. Украины, Лассаля, 33*".

Возобновление деятельности "Матезиса" происходило уже в отсутствие В.Ф. Кагана. Он принял предложение О.Ю. Шмидта, который в то время руководил Государственным издательством, возглавить его Научный отдел. Еще раньше О.Ю. Шмидт предлагал присоединить "Матезис" к Госиздату. В тексте письма есть и высокая оценка деятельности "Матезиса", и причины, приведшие к свертыванию его работы:

"*Глубокоуважаемый Вениамин Федорович,*

нет никакого сомнения, что издательство Mathesis дало высшие в стране достижения в области книги по точным наукам. Продолжение этой работы есть насущная культурная потребность.

С другой стороны, Госиздат чувствует себя обязанным дать научную и научно-популярную литературу. Волей-неволей мы очутимся перед необходимостью выпустить аналогичные книги, а отчасти даже переиздать те же. Боюсь, не вышло бы плохо: Госиздат, как экономически подавляюще сильный, погубит возможность возрождения Mathesis'а, не воспользовавшись его навыками и традициями.

Поэтому предлагаю следующее. Нам с Вами объединиться. Госиздат дал бы капитал для возрождения Mathesis'а под Вашей дирекцией. Это было бы автономное предприятие Госиздата РСФСР. Аналогичный опыт проделан с издательством "Всемирная литература" (Горький, Тихонов) и дал прекрасные результаты. Обе стороны весьма довольны.

Прошу обдумать этот вопрос и сообщить свое мнение..."

Но автономным предприятием Госиздата "Матезис" не стал. Книгоиздательское дело было монополизировано государством.

В художественном оформлении книг принимали участие художники-профессионалы. Одним из элементов высокой книжной культуры является издательский знак. По заказу издательства известный художник А.А. Ждаха выполнил шесть вариантов знака, из них были отобраны два. В создании обложек принимал участие и известный книжный график М.И. Соломонов. Ему принадлежит обложка книги С. Тромгольта "Игры со спичками". Сходна по стилю обложка книги Р. Нимфюра "Воздухоплавание".

Наряду с высоким полиграфическим уровнем книг "Матезиса" их очень большим достоинством была доступная цена, что также отмечалось во многих рецензиях.

Где же печатались книги "Матезиса"? В первые годы существования издательства – в типографии Шпенцера. В дальнейшем картина усложняется, всего в изготовлении книг принимали участие 10 типографий. Большинство книг было изготовлено в типографии Акционерного Южно-Русского общества печатного дела. Там для "Матезиса" были изготовлены специальные шрифты.

Всего на протяжении 1904-1925 гг. были напечатаны 185 книг (томов), 129 – названий, 140 – первым изданием. До 1913 г. издательство располагалось в типографии Шпенцера по ул. Новосельского, 66. В 1913 г. Шпенцер переехал в новый собственный дом в Стурдзовском переулке, 3а.

Признанием значения деятельности издательства стало то, что значительное число изданий "Матезиса" было рекомендовано Ученой Комиссией Министерства народного просвещения для библиотек средних учебных заведений.

Книги по математике, физике, астрономии, химии, биологии, истории и философии естествознания, увидевшие свет благодаря издательству "Матезис", оставили глубокий след в истории науки, образования, книгоиздательского дела.

Мотивация учащегося при изучении математики

С.Н. Бычков

М.И. Башмаков в качестве наиболее заметных факторов, влияющих на обучение математике в школе, назвал изменения во взглядах на ценность математического образования, расширение информационной среды обучения, а также смену жизненных ориентиров молодого поколения.

Ранее главными целями изучения математики представлялись приобретение знаний и овладение навыками их использования, необходимыми для успешной жизни в обществе. Сегодня на сакраментальный вопрос "кому это нужно?", который школьники все более открыто задают по отношению к большей части классических математических умений (умножение столбиком многозначных чисел, складывание дробей, преобразование тригонометрических выражений и соотношений с радикалами и т.п.), становится трудно найти убедительный ответ. Школьник либо становится уверенным, что это никому не нужно, либо не нужно именно ему, либо, на худой конец, он найдет, на какую кнопку нужно будет нажать, если это ему действительно понадобится. В этой обстановке, заключает автор, следует ожидать повышения значимости теоретических математических знаний, их более широкого включения в общий культурно-исторический контекст [1, с. 10-11].

Проблема включения математических знаний в культурно-исторический контекст, поднятая М.И. Башмаковым, весьма и весьма непроста. Так, А.Д. Александров в 1978 г. как-то высказался, что изучение истории и литературы в средней школе важнее изучения синусов [2, с. 151] (впрочем, позже выдающийся геометр нашел простой и естественный, по его мнению, способ введения основных тригонометрических функций [3, с. 94-145]). Попробуем рассмотреть для отдельных разделов школьной и высшей математики возможность их включения ? в наше "информатизированное время"? в более широкий социокультурный контекст (и, соответственно, проблему мотивации их изучения теми учащимися, для которых математика не является профильным предметом).

Начнем с тригонометрии. И задачи геодезии, и задачи астрономии, служащие основной сферой применения методов тригонометрии, решаются сегодня при помощи компьютеров с использованием автоматической измерительной аппаратуры, установленной на спутниках. Специалисты в этих областях, естественно, должны владеть соответствующими теориями, но нужно ли это будущим экономистам или биологам? Что касается искусства формального оперирования с тригонометрическими выражениями, то на сегодня человек так же безнадежно отстал в этом от компьютеров, как и в искусстве шахматной игры.

В школах с углубленным изучением математики издержки тригонометрического формализма минимизируют обычно следующим способом: выводят геометрически косинус суммы углов, а всё остальное формально дедуцируют из этого правила. Усовершенствовать подобный подход едва ли возможно, а что делать с остальными учащимися?

Другой пример – изучение логарифмов. Ученик (независимо от профилизации) должен понимать, с какой целью они были созданы: "свести" операцию умножения чисел к более простой операции сложения. Эта цель – более универсальная, нежели цель введения тригонометрических функций. Поэтому здесь нет особого различия между профильной и непрофильной специализациями. Различия возникают, когда логарифмы представляют не как специфическую операцию над числами с определенной прагматической целью, а как функцию на множестве действительных чисел.

Стандартным является изложение, когда логарифмическая функция определяется как обратная показательной, но введение показательной функции сопряжено со значительными трудностями, мотивировать преодоление которых у "непрофильных" учащихся довольно сложно. Парадоксальным образом логарифм как функция оказывается гораздо более простой вещью, нежели показательная функция (речь идет об определении натурального логарифма как площади под графиком гиперболы). Это можно видеть уже из изложения в школьном учебнике [4, с. 60-65], но в "чистом" виде оборачивание соотношения между логарифмической и показательной функциями проведено в приложении к "непрофильному" вузовскому учебнику [5, с. 217-220].

Последний пример возьмем из раздела высшей математики. Следующее определение взято из одного из классических учебников математического анализа середины прошлого столетия: "Дифференциалом второго порядка, или вторым дифференциалом, функции $y = f(x)$ в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от ее (первого) дифференциала: в обозначениях: $d^2y = d(dy)''$ [6, с. 174].

Формальная "расшифровка" последнего соотношения выглядит следующим образом:

$$d^2y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y'' \cdot dx) \cdot dx = y'' \cdot dx^2$$

[6, с. 175].

На первый взгляд, в этом определении нет ничего особенно сложного, и им целесообразно пользоваться и впредь. Однако в современных учебниках второй дифференциал определяется иначе. Сначала – *немотивированно* – вводится вспомогательное выражение:

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)\ dx]|_{x=x_0} = [f'(x)\ dx]'\ |_{x=x_0}\ \delta x = f''(x_0)\ dx\delta x.$$

После этого (также *немотивированно*) второй дифференциал определяется как значение выражения $\delta(dy)$ при $dx{=}\delta x$ [7, с. 187]. В чем же причина замены выглядящего более понятным старого определения на новое?

В последней четверти прошлого века стало ясно, что старое определение второго дифференциала логически противоречиво: роли x и dx по ходу написания цепочки равенств менялись на противоположные с точки зрения постоянства и "изменчивости" величин, а это нарушает закон тождества (обозначай разное разным) применительно к символам исчисления.

Новое определение свободно от этого недостатка, но и здесь не всё гладко. Да, теперь одному и тому же символу не придается противоположных смыслов в ходе рассуждения, но зато одно и то же приходится обозначать двумя разными способами (что всё равно нарушает закон тождества: обозначай одно одним). В общем, слова Бурбаки о том, что "дифференциалы высшего порядка, столь удобные для употребления, еще до сего дня не реабилитированы" [8, с. 205], приходится и настоящее время признать актуальными.

Какие же общие выводы можно попытаться сделать на основе разобранных примеров?

В случае с тригонометрией мы видим, что "подключение" культурно-исторического контекста не помогает, а лишь усугубляет недостаток мотивации учащихся непрофильной специализации при изучении этого раздела школьной математики. Для логарифмов привлечение известного историко-научного факта о том, что представление о показательной функции вошло в математику на сто с лишним лет позже логарифмов, подкрепляет идею наглядного введения логарифмов (по крайней мере, для непрофильного варианта курса школьной математики). С другой стороны, это также дисгармонирует с абстрактно-теоретическим подходом к изложению показательной и логарифмической функций.

Самые неприятные вопросы вызывает последний пример с высшими дифференциалами. Если вычислительная сторона при изучении математики из-за внедрения компьютеров дальше всё больше будет отходить на задний план и, соответственно, всё большую привлекательность для учащегося должна играть строгость математических рассуждений, претендующая на роль эталона и для других наук, то как быть с практически весьма эффективными, но "нестрогими" дифференциалами высших порядков? И если здесь не удается навести порядок, то стоит ли мучиться с определениями предела и непрерывности функции в ущерб наглядности изложения?

Представляется, что актуальность подобных вопросов, связанных с формированием мотивации учащихся при изучении математики, будет в последующие годы лишь возрастать.

Библиографический список

1. *Башмаков, М.И.* Смысл и язык: от Выготского к Колмогорову [Текст] / М.И. Башмаков // Труды VIII Международных Колмогоровских чтений: сб. статей. – Ярославль, 2010. – С. 10-14.
2. *Розов, М.А.* Лев в кресле [Текст] / М.А. Розов // Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы. – М.: Наука, 2002. – С. 146-156.
3. *Александров, А.Д.* Геометрия. Учебник для 8 класса с углубленным изучением математики [Текст] / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М., 2002.
4. *Виленкин, Н.Я.* Алгебра и математический анализ для 11 класса [Текст] / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. – 6-е изд. – М., 1998.
5. *Ивашев-Мусатов, О.С.* Начала математического анализа [Текст] / О.С. Ивашев-Мусатов. – 6-е изд. М., 2002.
6. *Фихтенгольц, Г.М.* Основы математического анализа [Текст] / Г.М. Фихтенгольц. – 6-е изд. – М., 1968. – Т. 1.
7. *Ильин, В.А.* Основы математического анализа [Текст]: В 2-х ч. Ч. 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 7-е изд. – М., 2005.
8. *Бурбаки, Н.* Очерки по истории математики [Текст] / Н. Бурбаки. – М., 1963.

Преподавание математики в Оренбургском реальном училище в конце XIX – начале XX в.

Г.П. Матвиевская, И.К. Зубова

Предыстория основания Оренбургского реального училища тесно связана с историей учебного заведения, на базе которого оно появилось в 1894 году. Речь идет об оренбургском учительском институте, который, несмотря на сравнительно недолгий срок своего существования, сыграл немалую роль в истории образования в Оренбургском крае [1]. Положение об учительских институтах было утверждено 31 мая 1872 г. Эти новые для России учебные заведения должны были готовить учителей для учрежденных тогда же трехлетних городских училищ, которые пришли на смену уездным училищам. Городские училища должны были давать "детям всех сословий начальное религиозно-нравственное и умственное образование, а также сообщать прикладные познания, соответствующие нуждам местного городского населения" [2].

Первые учебные заведения этого типа появились в Петербурге и Москве, а затем в Вильне (теперь Вильнюс), Феодосии, Глухове, Казани и Белгороде. Благодаря хлопотам попечителя Оренбургского учебного округа П.А. Лавровского и поддержке генерал-губернатора Н.А. Крыжановского, Оренбургский учительский институт был открыт 30 августа 1878 года. Новому учебному заведению было предоставлено принадлежавшее военному ведомству здание на центральной улице города, в котором прежде размещался один из эскадронов бывшего Неплюевского кадетского корпуса, реорганизованного в 1863 году. Теперь в этом здании по улице Советской, 24 находится школа № 30 с углубленным изучением математики.

Директором института стал Валентин Иванович Филоматитский (род. в 1840 г.), окончивший Московский университет со степенью кандидата естественных наук [3]. С именем этого энергичного человека связан нелегкий начальный период существования нового учебного заведения.

Математику в оренбургском учительском институте первоначально пришлось преподавать выпускнику Петербургского университета Александру Николаевичу Сниткину (род. в 1845 г.). После выпуска из университета, где он также получил степень кандидата естественных наук, А.Н. Сниткин преподавал математику и естественную историю в Петербургской Ларинской гимназии. В Оренбургский учительский институт он был определён по предложению попечителя Оренбургского учебного округа на должность преподавателя естественной истории (т.е. ботаники, зоологии и минералогии), однако в течение первых двух лет ему пришлось вести и уроки математики. В Оренбургском учительском институте А.Н.Сниткин проработал шесть лет, а в июне 1884 г. переехал в Читу, получив назначение на должность директора народных училищ Забайкальской области [4].

После отъезда А.Н. Сниткина его место занял Михаил Акимович (Якимович) Галамиев (род. в 1851 г.) [5]. В 1880 г. он окончил физико-математический факультет Новороссийского университета со степенью кандидата естественных наук, получил назначение в Оренбургский учебный округ и в 1881 г. определён в Оренбургскую татарскую школу учителем естествоведения. Согласно его прошению, 1 июля 1884 г. М.А. Галамиев был перемещён на ту же должность в оренбургский учительский институт и навсегда связал свою жизнь с этим учебным заведением. В 1903 г. ему присвоено звание заслуженного преподавателя.

15 сентября 1880 г. в оренбургский учительский институт был назначен преподаватель математики Владимир Петрович Якимов (род. в 1854 г.) [6], только что окончивший Казанский университет. Он работал в институте до 1886 г., в 1885 г. некоторое время исполнял обязанности директора училища, а затем был перемещён в Екатеринбургскую гимназию. Вместо него преподавателем математики с 1 июня 1886 г. стал Сергей Иванович Ханжин (род. в 1849 г.), окончивший в 1875 г. Казанский университет и преподававший в течение десяти лет в Вольской учительской семинарии [7]. С 1887 г. он заведовал библиотекой института. Он проработал в институте до 1892 г., а затем перемещён в Пермскую гимназию. Оттуда же на его место был переведен Николай Михайлович Морозов (род. в 1868 г.), окончивший в 1890 г. физико-математический факультет Киевского университета (Св. Владимира) [8].

Ежегодно учительский институт выпускал квалифицированных учителей городских училищ, и его деятельность считалась вполне успешной. Однако к 1892 г. стали возникать серьёзные проблемы с трудоустройством выпускников.

Вместе с тем ещё задолго до этого, в 1876 г., был поставлен вопрос о необходимости учреждения в городе реального училища. Поэтому довольно естественным показалось решение создать его на базе преобразованного учительского института. Это преобразование было проведено постепенно, чтобы дать возможность всем, поступившим в институт, благополучно закончить обучение. Одновременно с прекращением приёма в учительский институт были открыты первый и второй классы реального училища, и в течение первых двух лет, пока не состоялся последний выпуск института, оба учебных заведения работали, объединившись в одном здании.

Преобразование это произошло в 1894 г. Большинство преподавателей учительского института остались в штате реального училища, в частности, преподаватель математики Н.М. Морозов успешно работал в нём до 1903 г. Затем он был назначен инспектором Кунгурского технического училища. В 1911 г. Н.М. Морозов вернулся в Оренбург и до 1918 г. был директором оренбургской мужской гимназии.

С 1903 г. в реальном училище преподавал математику Н.Н. Шемянов (1877-1959). Николай Николаевич Шемянов родился 15 октября 1877 г. в Томске в семье крестьянина. В 1903 г. он окончил с дипломом 1-й степени физико-математический факультет Московского университета и был направлен в Оренбургское реальное училище. Здесь через два года молодой педагог организовал математический кружок для учащихся старших классов училища, называвшийся первоначально "Математические вечера для учащихся". В феврале 1906 г. по разрешению попечителя Оренбургского учебного округа под редакцией Шемянова начал выходить журнал "Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище".

С 1 августа 1909 г. Н.Н. Шемянов был перемещён на должность преподавателя математики во Владимирское реальное училище. Он работал во Владимире до 1930 года, был преподавателем математики в школе, в машиностроительном техникуме, учительской семинарии, которая в 1919 г. была преобразована в Институт Народного образования, а с 1923 г. – во Владимирском педагогическом техникуме. В 1930 г. переехал в Ярославль, поступив на должность доцента кафедры математики Ярославского Педагогического института. С 1951 по 1953 г. заведовал кафедрой методики математики Ярославского педагогического института им. К.Д. Ушинского. В 1947 году ему была присуждена ученая степень кандидата педагогических наук [9].

Математический кружок при реальном училище продолжал действовать и после отъезда Н.Н. Шемянова из Оренбурга. Правда, на некоторое время его деятельность заглохла, но он возродился, когда в 1910 г. директором училища стал талантливый математик, выпускник физико-математического факультета Петербургского университета Константин Александрович Торопов (1860-1933). Совмещая обязанности директора реального училища с преподаванием в нем математики, К.А. Торопов придавал большое значение деятельности математического кружка. Он возродил и издание журнала этого кружка, сделавшись его главным редактором.

Номер “Записок математического кружка при Оренбургском реальном училище”, датированный первой половиной 1911-12 учебного года, начинается со статьи “Некоторые сведения о кружке”. Здесь говорится о том, что главным организатором кружка был Н.Н. Шемянов, с сожалением указывается, что в делах училища не сохранилось подробных сведений о деятельности кружка, отмечается, что с 1906 по 1910 годы кружок издал девять выпусков журнала, три первых – литографированные, остальные шесть – печатные. Затем приводится содержание этих выпусков, из которого видно, что выпускать журнал начали с января 1906 г., первоначально выпускали ежемесячно и в этом году сделали пять выпусков. С 1907 года начинается новая нумерация журнала: в первой половине 1907-08 учебного года вышли № 1 и № 2, во второй половине того же года – № 3, а следующий № 4-5 датирован 1908-09 годами.

Большинство публикаций – это работы учеников: рефераты по физике, астрономии, истории науки, решения различных задач, метеорологические обзоры, на которых стоит остановиться подробнее.

Ранее метеорологические наблюдения в Оренбурге велись в военной прогимназии, затем – в мужской гимназии. Результаты отправлялись в Главную физическую обсерваторию в Петербурге, где использовались для изучения климата юго-восточной России. Во время бушевавшего в городе в 1879 г. пожара всё оборудование станции в гимназии сгорело, так что эта важная работа прекратилась [10]. Метеорологическая станция при Оренбургском учительском институте была учреждена в 1883 г., и возрождение метеорологических наблюдений в Оренбурге отмечалось как важное для науки событие. Ученики старших классов института, а позднее реального училища, обязаны были участвовать в наблюдениях и знакомиться с правилами их проведения. Заведовал станцией до 1886 г. Н.П. Якимов, а после его отъезда – М.Я. Галамиев, которого в 1889 г. Главная физическая обсерватория “во внимание к заслугам по исследованию климата России” избрала своим членом-корреспондентом [11].

Разумеется, работа на метеорологической станции находила отражение в журнале математического кружка. Печатались в нём и работы преподавателей. В частности, Н.Н. Шемянов в предпоследний год работы в Оренбурге опубликовал в двух выпусках журнала свой “Конспективный курс тригонометрии для 6-го класса реального училища” (№ 1 и № 3).

Следует отметить, что тригонометрии и методике её преподавания придавалось в это время очень большое значение, о чём свидетельствует большое количество изданий, посвящённых этим вопросам. Одной из наиболее удачных в методическом отношении работ такого типа являлась книга К.А. Торопова “Магический ряд и применение его к решению задач”, впервые изданная в 1908 г. в Таганроге и переизданная затем в 1911 г. в Оренбурге [12,13]. Однако до этого, вероятно, среди преподавателей Оренбурга нередко возникали дискуссии, связанные с вопросами методики преподавания тригонометрии. Об этом свидетельствует и оглавление журнала математического кружка. В нем, в частности, встречаются заметки, посвящённые работам оренбургского математика-любителя Д.В.Агапова. Изучение документов Государственного архива Оренбургской области [14] позволяет утверждать, что это и в самом деле был любитель. Сын весьма уважаемого в городе человека, старшего советника Оренбургского губернского правления, отставного генерал-майора Оренбургского казачьего войска, Д.В. Агапов родился в 1869 г., окончил пять классов Оренбургской мужской гимназии, затем некоторое время обучался в гимназии в Казани. Был мелким чиновником.

Во втором выпуске, в марте 1906 года была напечатана заметка А. Белявского “Новое в “Новой тригонометрии” Агапова”. Здесь имеется в виду книга “Новая тригонометрия. Решение треугольников помощию одной теоремы” [15], которая была выпущена в Оренбурге в 1894 и переиздана в 1898 гг. Речь идёт о следующей теореме:

Произведение разности между полупериметром и стороной треугольника на тангенс половины угла, противолежащего этой стороне, есть величина постоянная для каждого треугольника, равная радиусу круга, вписанного в этот треугольник.

На основании этой и некоторых других теорем автор изложил свои оригинальные методы решения различных треугольников и считал, что эти методы можно применить в преподавании, а его работа может служить пособием для старших классов средних учебных заведений. Однако, судя по другой заметке в журнале реального училища, профессиональные преподаватели этого мнения не разделяли. В № 2, выпущенном в первой половине 1907-08 учебного года некто под псевдонимом “Радикал” высказывает “Несколько слов о теореме Агапова”.

Здесь, скорее всего, речь идёт о небольшой (20 страниц) книжке Д.В. Агапова “Решение некоторых геометрических задач помощию теоремы: *“во всяком прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению полупериметра треугольника на разность между суммой катетов и гипотенузой*” [16]. Эта книжка также предназначалась для учеников старших классов и в 1898 году была выпущена в Оренбурге уже вторым изданием. Разбирая решение задач, продемонстрированных Агаповым, “Радикал” показывает, что все они могут быть решены и без его теоремы, причём более рационально. Редактор “Записок математического кружка...” в комментарии к этой заметке добавляет, что книга Агапова “может служить ярким образчиком произведения, лишенного тех достоинств, которые склонен приписывать ему автор”.

“Радикал” был, по всей вероятности, активным членом кружка. В других номерах журнала неоднократно встречается этот псевдоним. Так, в 4-м выпуске за 1906-07 учебный год “Радикал” упоминается среди кружковцев, приславших верные решения задачи по алгебре, предложенной в предыдущем выпуске.

Библиографический список

1. *Матвиевская, Г.П.* Из истории образования в Оренбургском крае: Оренбургский учительский институт (1878-1894) [Текст] / Г.П. Матвиевская // Вестник Оренб. пед. университета. – Оренбург: Издательство ОГПУ, 2011. – № 3(59). – С. 86-104.
2. Государственный архив Оренбургской области (ГАОО) [Текст]. Ф. 81. Оп. 1. Д. 2. Л. 21.
3. ГАОО [Текст]. Ф. 81. Оп. 1. Д. 16. Л. 6.
4. ГАОО [Текст]. Ф. 81. Оп. 1. Д. 39 (личное дело А.Н. Сниткина).
5. ГАОО [Текст]. Ф. 81. Оп. 1. Д. 171 (личное дело М.А. Галамиева).
6. ГАОО [Текст]. Ф. 81. Оп. 1. Д. 15 (личное дело В.П. Якимова).
7. ГАОО [Текст]. Ф. 81. Оп. 1. Д. 109. Л. 20 об. Д. 126. Л. 65-66.
8. ГАОО [Текст]. Ф. 82. Оп. 1. Д. 191.
9. Личное дело Н.Н. Шемянова из архива Ярославского гос. пед. университета [Текст].
10. ГАОО [Текст]. Ф. 81. Оп. 1. Д. 14389.
11. ГАОО [Текст]. Ф. 81. Оп. 1. Д. 171.
12. *Игнатушина, И.В.* О работе К.А. Торопова "Магический ряд и применение его к решению задач" [Текст] / И.В. Игнатушина // Математическое образование в Оренбургском крае. История и современность. Сборник научных трудов. – Оренбург: Издательство ОГПУ, 2011. – С. 181-185.
13. *Торопов, К.* Магический ряд и применение его к решению задач [Текст] / К. Торопов // Математическое образование в Оренбургском крае. История и современность. Сборник научных трудов. – Оренбург: Издательство ОГПУ, 2011. – С. 187-230.
14. ГАОО. Ф. 38. Оп. 1. Д. 126. Переписка об определении в штат канцелярии Оренбургского губернского предводителя дворянства потомственного дворянина Дмитрия Васильевича Агапова канцелярским служителем 1-го разряда [Текст].
15. *Агапов, Д.В.* Новая тригонометрия. Решение треугольников помощию одной теоремы. 45 случаев [Текст]: для старших классов средних учебных заведений / Д.В. Агапов. – 2-е изд. – Оренбург: [скл. изд. у авт.] 1898. – 96 с.
16. Решение некоторых геометрических задач с помощью теоремы Агапова [Текст]: для ст. классов сред. учеб. заведений. – 2-е изд. - Оренбург: [скл. изд. у авт.], 1898. – 20 с.

Применение элементов истории математики при изложении темы "Формула тейлора" в курсе математического анализа

И.К. Зубова, О.В. Острая

Использование исторических сведений преподавателем на лекциях по математическому анализу не является обязательным при изложении материала. Однако, как указывает К.А. Малыгин, "...экскурсы в историческое прошлое оживляют урок, дают разрядку умственному напряжению, поднимают интерес к изучаемому материалу и способствуют прочному его усвоению" [3, с. 3]. Это сказано относительно преподавания математики в средней школе, но, несомненно, остается справедливым, когда речь идет о студентах, особенно о студентах-первокурсниках. Историко-математический материал весьма обширен и интересен, так как развитие математики теснейшим образом связано с решением насущных задач, возникавших во все периоды существования цивилизации. Знакомство с ним, кроме всего прочего, должно способствовать расширению кругозора студента, заставлять его вспоминать и применять знания, полученные на уроках истории в школе.

Современное развитие математики требует, чтобы преподаватель не только обеспечивал для студентов возможность прочно овладеть основами математики, но и развивал у них умение применять накопленные знания к решению практических задач. Одним из путей решения этой проблемы может служить использование исторических сведений, которые показывают путь становления и развития математики.

Координируя изучение математического анализа с другими учебными предметами, в частности, с изучением истории общества, подчеркивая влияние практики на развитие математики, указывая условия, а иногда и причины зарождения тех или иных идей и методов, мы тем самым способствуем развитию у студентов диалектического мышления и формированию собственного мировоззрения, содействуем процессу их умственного созревания и сознательному усвоению ими материала. Достигнутое таким образом более глубокое понимание курса математического анализа, безусловно, вызовет у студентов повышение интереса к предмету, развитие их познавательной активности. Если начать такую работу с первого курса и проводить ее систематически, то со временем исторический элемент станет для самих студентов необходимой частью занятия.

При сообщении исторического материала может быть использован проблемный подход. Объяснение нового материала начинается с постановки проблемы, которая логически вытекает из ранее пройденного и ведет к необходимости более глубокого познания окружающего мира. Такой подход к подаче исторического материала, как правило, вызывает большой интерес студентов и к математическому анализу.

Для кратких исторических сведений иногда достаточно 2-5 минут занятия. Затрата времени окупается повышением интереса к данной теме. Главную методическую трудность представляет вопрос о том, как на деле сочетать изучение определенного раздела программы математики с изложением соответствующего исторического материала. Преодолеть эту трудность можно лишь постепенно, в ходе планомерной и скрупулезной работы.

Далеко не последнюю роль в учебной деятельности играет мотивационный момент. Мотивы обучения могут быть связаны с его результатами. В таком случае от студентов требуется немалое волевое усилие как при положительной мотивации (похвала, хорошая отметка), так и тем более при отрицательной (плохой балл и т.п.). Также мотивы обучения могут содержаться как в самом процессе учебной деятельности, так и в целях, которые она ставит: стремление расширить свой кругозор, проявить свои способности, желание учиться дальше и т.д. В таких случаях усилению мотивации будут способствовать проблемные методы обучения, своевременная информация о достигнутом и т.п.

В качестве примера применения элементов историзма в курсе математического анализа мы предложим ниже фрагменты лекции, посвящённой формуле Тейлора. Прежде всего, мы указываем, что эта формула играет важную роль в математическом анализе. Она используется при доказательстве многих теорем в дифференциальном исчислении, а также в вычислительной практике. Говоря нестрого, формула Тейлора показывает поведение функции в окрестности некоторой точки.

Эта формула связана с именем английского математика Брука Тейлора (1685-1731). Современник и последователь Ньютона, Тейлор является одним из основоположников математического анализа, теоретической механики, теории дифференциальных уравнений.

Он родился в Кенте и в 1701 г. поступил в Кембриджский университет. Здесь он в 1709 г. получил степень бакалавра, а в 1714 г. степень доктора прав. Параллельно он изучал математику, и уже в 1708 г. в журнале “Philosophical Transactions” появилась его статья о центре качаний. Позже в том же журнале напечатаны следующие его статьи, относящиеся к разнообразным вопросам: о полете снарядов, о взаимодействии магнитов, о капиллярных явлениях, о сцеплении между жидкостями и твердыми телами. Между прочим, он показал, что среднее сечение свободной поверхности жидкости между двумя вертикальными пластинками, наклоненными под малым углом одна к другой, есть гипербола. Ему принадлежит сочинение “New principle of linear perspective” (1715) и большой трактат “Methodus incrementorum directa et inversa” (1715-1717), в котором, кроме вывода его знаменитой формулы, содержится теория колебания струн, в которой он приходит к тем же самым результатам, к которым впоследствии пришли Даламбер и Лагранж. Он же первый занимался теоретически вопросом об астрономической рефракции в атмосфере. Обладая большими математическими способностями, он в то же время был весьма хорошим музыкантом и успешно занимался живописью.

Формула Тейлора позволяет заменить n раз дифференцируемую функцию, которая задана сложным аналитическим выражением, удобным для анализа многочленом, или степенным рядом, что особенно важно для различных областей прикладной математики. Следует отметить, что теория рядов является одним из достаточно сложных разделов курса математического анализа. Обычно изучение этого раздела начинается с введения определения числового ряда, понятия его частичных сумм, сходимости, суммы. Затем лектор переходит к определению функционального ряда и введению основных понятий, связанных с ним. После этого вводится определение степенного ряда и объясняется, что при определенных условиях функция разлагается в ряд такого типа или представляется степенным рядом. Наконец, вводится понятие тригонометрического ряда и осуществляется разложение функции в ряд Фурье. По такой схеме: от знакомства с элементарными понятиями к овладению более сложными - происходит изучение любой математической теории. Это естественный порядок ее изложения. Однако в ходе такого знакомства с теорией может показаться, что именно таким образом – от простого к сложному – теория и формируется, хотя в действительности, как правило, так не бывает. В ходе развития науки практика ставит ученого перед необходимостью разработки того или иного научного аппарата. Часто результаты, полученные на основе гениальной догадки, приобретают строгое обоснование много позже, в трудах других ученых. Этот факт, как нам представляется, часто неочевиден для студента, изучающего высшую математику. Показав ему это на примерах, можно добиться более широкого взгляда на изучаемые вопросы и лучшего понимания материала.

В связи с этим некоторое понятие о степенном ряде можно дать и несколько раньше, чем начнётся изучение теории рядов, так как тема “Формула Тейлора” обычно завершает главу “Дифференциальное исчисление функции одной переменной”, а тема “Степенные ряды” излагается существенно позже.

После вывода формулы Тейлора напомним формулу бинома Ньютона, которая впервые появилась в 1676 г. в письме И. Ньютона к секретарю Лондонского Королевского общества. Эта формула представляет функцию $(1+x)^m$, где т – натуральное число, многочленом. Затем предположим, что т не является натуральным, и тогда число слагаемых в правой части равенства будет бесконечным. Мы получаем выражение этой функции рядом, который называется биномиальным:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m\,(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}x^m + \ldots.$$

Легко убедиться, что в формуле бинома Ньютона и в биномиальном ряде коэффициенты при степенях x представляют собой именно значения $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, где $f\,(x) = (1+x)^m$.

Разложение функций в степенные ряды вскоре стало основным аппаратом дифференциального исчисления. Развивая идею Ньютона, Тейлор в 1715 г. доказал, что любой функции, имеющей в точке x_0 производные всех порядков, можно сопоставить ряд

$$f(x) \to f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

Мы не можем пока поставить знак равенства между функцией $f(x)$, принимающей конечное значение для любого значения x_0, и стоящим справа функциональным рядом. Для того чтобы вместо знака “$\to$” можно было поставить ставить знак равенства, необходимо провести дополнительный анализ, связанный именно с бесконечностью числа слагаемых в правой части равенства и касающийся области сходимости ряда.

Частный, простейший вид формулы Тейлора при $a = 0$ принято называть формулой Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \tfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \tfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n, \text{ где } R_n = \tfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Тейлор получил и эту формулу, но шотландский математик Колин Маклорен (1698-1746) дал новый её вывод в 1742 г. в работе *“Трактат о флюксиях”*. Ранее в курсе дифференциального исчисления уже изложены сведения о теории флюксий Ньютона. Здесь напомним слушателям, что это аналог понятия производной и обратим их внимание на использование термина “флюксия” последователями Ньютона. Отметим далее, что именно Маклорен установил, что степенной ряд, выражающий аналитическую функцию, – единственный, и это будет ряд Тейлора, порожденный такой функцией. Однако, не применяя пока понятия ряда, суть этого утверждения можно выразить в следующей теореме:

Если функция $f(x), n$ раз дифференцируемая в точке a, представима с погрешностью $o\left((x-a)^n\right)$ при $x \to a$ многочленом по степеням разности $(x-a)$ до n-ой степени, то коэффициенты этого многочлена являются коэффициентами Тейлора, а сам многочлен – многочленом Тейлора степени n.

Доказав её, заключаем, что, если мы в качестве приближения функции $f(x)$ возьмем многочлен вида $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k \cdot (x-a)^k$ с коэффициентами c_k, отличными от $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, где $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n$, то всякой такой многочлен задаст $f(x)$ в окрестности точки a с погрешностью, которая будет при $x \to a$ бесконечно малой функцией более низкого порядка, чем при приближении многочленом Тейлора. В этом смысле многочлен Тейлора называют многочленом наилучшего приближения среди всех многочленов той же степени.

Таким образом, мы делаем вывод о том, что ряды возникли в XVII в. как способ представления функций, допускающих бесконечное дифференцирование. Регулярное применение рядов Тейлора и Маклорена стало характерной особенностью развивающегося дифференциального исчисления. Их значение оказалось настолько большим, что в 1784 г. французский математик Кондорсе (1743-1794), который вместе с Д’Аламбером принимал участие в издании знаменитой “Энциклопедии наук, искусств и ремесел”, присвоил этим рядам имена их первооткрывателей. Задача разложить в ряды все известные функции и тем самым обеспечить эффективность операции дифференциального исчисления сделалась не только актуальной, но и, как казалось, разрешимой.

В этом направлении были достигнуты крупные успехи. Все известные математикам XVIII в. функции обнаруживали свойство разложимости в степенные ряды, бесконечные произведения и т.п., и, таким образом, появилась возможность оперировать с ними.

Однако следует подчеркнуть, что первоначально функция, представляемая рядом, не называлась его суммой, и вообще далеко не сразу было определено, что такое сумма ряда, числового или функционального, предпринимались только попытки ввести это понятие. Более подробно о дальнейшей разработке теории рядов мы рассказываем во время изложения соответствующего раздела программы.

В заключение – шутка, которой можно завершить лекцию:

Несмотря на то, что фамилия Тейлор правильно произносится с ударением на первом слоге, некоторые преподаватели любят говорить Тейло́р. Таким образом, мы сможем проверить, кто из студентов ходил на лекции, а кто нет. Тот, кто ходил, будет делать ударение там, где делал его лектор!

Библиографический список

1. *Боголюбов, Н.А.* Математики. Механики: библиографический справочник [Текст] / А.Н. Боголюбов. – Киев: Изд-во “Наукова думка”, 1983. – 640 с.
2. *Зубова, И.К.* Основы математического анализа (модуль "Дифференциальное исчисление функции одной переменной): самоучитель [Текст] / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н. Павленко. – Оренбург: ООО "НикОс", 2011. – 173 с.
3. *Малыгин, К.А.* Элементы историзма в преподавание математики в средней школе [Текст] / К.А. Малыгин. – М.: Учпедгиз, 1956. – С. 3.

Дифференциальная геометрия в университете и военно-инженерных учебных заведениях Петербурга XIX века

И.В. Игнатушина

Императорский С.-Петербургский университет появился в 1819 г. и был намного моложе не только Московского, но даже Дерптского, Казанского и Харьковского. Причина столь позднего открытия университета была связана с тем, что в Петербурге того времени уже существовало значительное число высших учебных заведений, удовлетворявших как правительственным, так и частным потребностям в общественном образовании [1, с. 3].

Открытию университета в Петербурге предшествовал ряд важных событий. В 1783 г. для подготовки учительских кадров была создана Учительская семинария. В 1803 г. она была преобразована в Учительскую гимназию, в 1804 г. – в Педагогический, в 1816 г. – в Главный педагогический институт и, наконец, в 1819 г. – в Петербургский университет.

С самого начала в Учительской семинарии было хорошо поставлено преподавание математики благодаря ученику Л. Эйлера адъюнкту Академии наук, профессору Михаилу Евсеевичу Головину (1756-1790). Под его руководством математическую подготовку получили видные деятели физико-математического образования в России конца XVIII – начала XIX в. **Петр Иванович Гиларовский** и **Тимофей Федорович Осиповский**. После окончания семинарии они оба были оставлены преподавателями этого учебного заведения. Гиларовский читал курс дифференциального и интегрального исчисления и показывал его приложение к кривым линиям. Содержание этих лекций нашло отражение в его книге “Сокращение высшей математики” (1796 г.) [2].

В первые два года существования Петербургского университета из-за слабой подготовки поступающих лекции читались только по элементарной математике. В 30-е годы в университете начинается оживление учебной и научной деятельности. Этому способствовало принятие в 1835 г. нового университетского устава.

В начале 50-х годов преподавание математики в Петербургском университете становится на более высокую ступень в связи с приходом трех выдающихся ученых – О.И. Сомова, В.Я. Буняковского и П.Л. Чебышева [3].

Осип Иванович Сомов (1815-1876) – выпускник Московского университета, где он слушал лекции П.С. Щепкина, Д.М. Перевощикова, Н.Е. Зернова и Н.Д. Брашмана. Кроме Петербургского университета, Сомов преподавал математику в Пажеском корпусе (1842-1849), в Институте корпуса горных инженеров (1849-1865), в Институте корпуса инженеров путей сообщения (1848-1865), в офицерских классах Морского кадетского корпуса и в Морской академии (1849-1864) [4].

Читая курс дифференциального исчисления, он уделял внимание его приложению к геометрии. При подготовке к лекциям отправной точкой для него стало руководство М.Ф. Леруа [5], в котором изложены вопросы дифференциальной геометрии вплоть до теоремы Менье. Этот учебник базируется почти исключительно на работах Монжа, идеи же Гаусса не нашли в нем отражение [6, с. 51].

О.И. Сомов был первым в России и одним из первых в Европе, кто начал систематически применять векторное исчисление в геометрии и механике. Его заслугой было последовательное построение на векторной основе системы формул классической дифференциальной геометрии кривых и поверхностей. Этот подход он изложил в двух своих работах “Об ускорениях различных порядков” (1864 г.) [7] и “Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядка и кривизны поверхности в каких-либо координатах ортогональных или косоугольных” (1865 г.) [8].

Следует отметить, что и при чтении лекций Сомов, возможно, использовал векторный аппарат для изложения классической дифференциальной геометрии.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889) математическое образование получил в Париже, где слушал лекции О.Л. Коши, П.С. Лапласа, С.Д. Пуассона, Ж.Б. Фурье и др. В 1826 г. после возвращения в Петербург он поступил преподавателем математики в старшие классы 1-го кадетского корпуса. В 1827 г. начал преподавать в офицерских классах Морского корпуса, летом 1830 г. получил должность профессора математики в Институте корпуса инженеров путей сообщения и несколько позднее – в Горном институте.

В 1846 г. Буняковский был приглашен в Петербургский университет для чтения курсов аналитической механики, теории вероятностей и различных разделов математического анализа. В том же году он был избран ординарным профессором.

В Петербургском университете в то время отдельного курса дифференциальной геометрии еще не было, поэтому в своих лекциях по дифференциальному исчислению Буняковский излагал также теорию соприкасания плоских кривых, учение об эволютах и эвольвентах и некоторые другие вопросы [3, с. 370].

В.Я. Буняковский оказывал всяческую поддержку молодым ученым. Он одним из первых открыл выдающийся математический талант в П.Л. Чебышеве и привлек его в качестве помощника по изучению трудов Л. Эйлера. Во многом благодаря этой работе была усилена преемственная связь петербургских математиков с научным наследием этого великого ученого [9].

Пафнутий Львович Чебышев (1821-1894) окончил Московский университет в 1841 г. “отличнейшим из студентов”. Его наставником в университете был Н.Д. Брашман, оказавший весьма значительное влияние на формирование научных интересов молодого ученого.

Из сочинений П.Л. Чебышева, в которых рассмотрены вопросы дифференциальной геометрии, широко известна работа "О кройке одежды" (1878 г.) [10]. Она посвящена задаче об одевании какой-либо поверхности тканью, которая в первоначальном плоском состоянии образована параллельными системами взаимно перпендикулярных нерастяжимых нитей-линий. Когда такая ткань надевается на поверхность, прямоугольники, образованные пересечением нитей, из которых состоит ткань, переходят в криволинейные четырехугольники, у которых длины противоположных сторон равны. Сами нити при этом образуют так называемую сеть Чебышева [11, с. 510]. Одевание поверхности есть более общее преобразование, чем изгибание, при котором сохраняются длины всех изгибаемых линий, так как расстояния между точками надеваемой поверхности (ткани), лежащими на разных линиях (нитях), вообще говоря, изменяется. Сети Чебышева имеют большое значение для внутренней геометрии поверхностей.

Сочинения "О построении географических карт" (1856) [12] и "Черчение географических карт" (1856) [13] Чебышев посвятил изучению вопроса о наилучшем изображении участка земной поверхности, продолжив тем самым исследования Л. Эйлера, Ж.Л. Лагранжа и К.Ф. Гаусса по математической картографии, которая тесным образом связана с дифференциальной геометрией. Здесь Чебышев высказал без доказательства мнение, что наивыгоднейшая проекция какой-нибудь части земной поверхности на карте должна сохранять на границе изображения постоянство масштаба.

Педагогическая деятельность Чебышева, Сомова и Буняковского быстро принесла плоды: за короткое время они воспитали целый ряд математиков, которые продолжили работу по становлению русской науки.

Одним из их воспитанников был выпускник Петербургского университета 1858 г. **Александр Николаевич Коркин** (1837-1908). А.Н. Коркин больше всего известен своими работами по теории интегрирования уравнений с частными производными и теории чисел [14]. Однако, в курсе лекций по дифференциальному исчислению [15], который он читал в Петербургском университете и Академическом корпусе Морских наук, достаточно подробно освещались различные вопросы дифференциальной геометрии. Этот курс знакомил с основными понятиями и теоремами классической дифференциальной геометрии, но, к сожалению, он не отражал известных к тому времени результатов К.Ф. Гаусса.

В процессе становления дифференциальной геометрии как науки и учебного предмета в Петербургских учебных заведениях XIX в. помимо перечисленных ученых большую роль сыграли **Платон Яковлевич Гамалея** (1766-1808), **Алексей Иванович Маюров** (1780-1848), **Габриель Ламе** (1795-1870), **Николай Сергеевич Будаев** (1833-1902), **Константин Александрович Поссе** (1847-1928), **Дмитрий Александрович Граве** (1863-1939) и др.

В конце XIX в. в некоторых технических вузах Петербурга приложения дифференциального исчисления к геометрии выделяются в виде отдельной дисциплины. Так, например, в Михайловском артиллерийском училище такой курс читал **Николай Сергеевич Будаев** (1833-1902).

Н.С. Будаев был выпускником Главного педагогического института, где слушал лекции М.В. Остроградского. Будаев преподавал в Главном педагогическом институте, Петербургском университете, Михайловской артиллерийской академии, Институте инженеров путей сообщения, а также в Николаевской инженерной академии. Он вел курс аналитической геометрии [16], в котором демонстрировал приложение дифференциального исчисления к геометрии.

Лекции Н.С. Будаева, озаглавленные "Записки по приложению дифференциального исчисления к геометрии" (1898) [17], представляли первый курс по дифференциальной геометрии, изданный отдельно от курса математического анализа. Несомненно, что при составлении своего курса Н.С. Будаев использовал лекции М.В. Остроградского.

Таким образом, к началу XX века дифференциальная геометрия в Петербургских высших учебных заведениях оформилась в отдельную учебную дисциплину. Отметим, что ее изложение в XIX в. велось в координатной форме; векторное изложение вошло в обиход лишь в XX в.

Библиографический список

1. *Григорьев, В.В.* Императорский С.-Петербургский университет в течение первых пятидесяти лет его существования. Историческая записка, составленная по поручению Совета университета ординарным профессором по кафедре истории востока В. В. Григорьевым [Текст] / В.В. Григорьев. – СПб., 1870.
2. *Гиларовский, П.И.* Сокращение вышней математики [Текст] / П.И. Гиларовский // Сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российскаго слога и латинскаго языка в благородном Пажеском корпусе. – СПб.: Тип. Вильковскаго, 1796.
3. *Галченкова, Р.И.* Математика в Ленинградском (Петербургском) университете в XIXв. [Текст] / Р.И. Галченкова // Историко-математические исследования. – М., 1961. – Вып. XIV. – С. 355-392.
4. *Никифорова, Т.Р.* Осип Иванович Сомов [Текст] / Т.Р. Никифорова. – М.-Л.: Наука, 1964.
5. *Leroy M.F.* Analyse appliqué a la geometrie des trois dimension, comprenant les surfaces du second ordre, avec la theorie generale des surfaces courbes et des lignes a double courbure. – Paris-Bruxelles, 1829.
6. *Стройк, Д.Я.* Очерк истории дифференциальной геометрии до XX столетия [Текст] / Д.Я. Стройк. – М.: КомКнига, 2006.

7. *Сомов, О.И.* Об ускорениях различных порядков [Текст] / О.И. Сомов // Записки Императорской Академии наук. – СПб., 1864. – Т. V. – Приложение 5. – С. 1-50.
8. *Сомов, О.И.* Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядка и кривизны поверхности в каких-либо координатах ортогональных или косоугольных [Текст] / О.И. Сомов // Записки Императорской Академии наук. – СПб., 1866. – Т. VIII. – Приложение 4. – С.1-66.
9. *Киро, С.Н.* Учебные заведения и развитие математики в России [Текст] / С.Н. Киро // История отечественной математики / Ред. И.З. Штокало. – Киев: Наукова думка, 1967. – С. 107-112.
10. *Чебышев, П.Л.* О кройке одежды [Текст] / П.Л. Чебышев // Сочинения П.Л. Чебышева / Под ред. А.А. Маркова и Н.Я. Сонина. – СПб., 1907. – Т. II. – С. 708.
11. *Юшкевич, А.П.* Геометрические исследования; Вопросы математической логики [Текст] / А.П. Юшкевич // История математики в России до 1917 года. – М.: Наука, 1968. – С. 509-520.
12. *Chebyshev P.L.* Sur la construction des cartes geographiques // Bulletin de la classe physico-mathematique de l'Academie Imperiale des scienees de St.-Peterbourg. – SPb., 1856. T. XIV. P. 257- 261.
13. *Чебышев, П.Л.* Черчение географических карт [Текст] / П.Л. Чебышев // Сочинения П.Л. Чебышева / Под ред. А.А. Маркова и Н.Я. Сонина. – СПб., 1899. – Т. I. – С. 233-236.
14. *Ожигова, Е.П.* Александр Николаевич Коркин [Текст] / Е.П. Ожигова. – Л., 1968.
15. *Коркин, А.Н.* Дифференциальное исчисление. Лекции, читанные в Академическом корпусе Морских наук профессором А.Н. Коркиным [Текст] / А.Н. Коркин. – СПб., 1878.
16. *Будаев, Н.С.* Лекции аналитической геометрии (2-й курс), читанные в Институте инженеров путей сообщения профессором Н.С. Будаевым [Текст] / Н.С. Будаев. – Казань, 1880-81.
17. *Будаев, Н.С.* Записки по приложению дифференциального исчисления к геометрии. Курс дополнительного класса Михайловского артиллерийского училища. Составил по лекциям Н.С.Будаева юнкер Дегтярев [Текст] / Н.С. Будаев. – СПб., 1898.

Вопросы арифметики и теории чисел в трудах I Всероссийского съезда преподавателей математики

С.В. Жаров

В 2012 году исполняется 100 лет со времени проведения I Всероссийского съезда преподавателей математики. Сразу бросается в глаза тот географический размах, откуда приехало громадное число преподавателей. Съезд открылся 27 декабря 1911 г. по ст.ст., т.е. 9 января 1912 г. по н.ст. в 12 часов дня в Санкт-Петербурге в большой аудитории Соляного городка. Продолжался съезд 8 дней (до 03.01.1912 г. по ст.ст. или до 16.01.1912 г. по н.ст.). Участвовали в нём 1217 членов и гостей съезда, представлявших учителей математики почти всех губерний Российской Империи и преподавателей математики её виднейших вузов. Мысль о созыве съезда в Рождественские каникулы 1911-12 гг. принадлежит отделу математики Педагогического Музея военно-учебных заведений, директором которого был генерал-лейтенант З.А. Макшеев. Под его руководством образовался Комитет по созыву съезда. В него вошли профессора А.В. Васильев, К.А. Поссе, С.Е. Савич и др. В этот комитет также вошли преподаватели математики В.Р. Мрочек и Ф.В. Филиппович, известные своей книгой "Педагогика математики". Среди других известных до настоящего времени математиков можно еще выделить В.Ф. Кагана, который является автором двухтомной монографии по основаниям геометрии, а также С.И. Шохор-Троцкого, который является автором метода целесообразных задач при обучении младших школьников (и не только младших!). Если анализировать состав участников, то в работе Съезда участвовали лучшие представители математического образования России. Среди делегатов был методист, чье имя хорошо известно всему старшему поколению россиян – это Андрей Петрович Киселёв (1852-1940).

Было проведено 7 общих заседаний, на которых было сделано 23 полных доклада, а три доклада были, кроме того, представлены тезисами и конспектами. По всем 26 докладам были проведены прения. Открыто и конструктивно проходили прения и по всем докладам и прежде всего по докладам, которые были заказаны до начала Съезда. Среди них можно выделить следующие доклады: С.И. Шохор-Троцкого – "Требования, предъявляемые психологией к математике, как учебному предмету"; К.А. Поссе "О согласовании программ в средней и высшей школах"; В.Б. Струве – "К вопросу о согласовании программ математики в средней и высшей школах"; В.В. Бобынина – "Цели, формы и средства введения исторических элементов в курсе математики в средней школе"; В.Ф. Кагана – "О подготовлении преподавателей математики для средних учебных заведений". Эти и другие доклады отразили состояние преподавания математики как в средней, так и в высшей школе, а также наличие необходимых учебных пособий. Одна из секций была посвящена специально учебной литературе и качеству имеющихся пособий.

Напомним, что в Положении о 1-ом Всероссийском Съезде преподавателей математики целью съезда провозглашено обсуждение следующих вопросов:

1) психологические основы обучения математике (активность, наглядность, роль интуиции и логики и т.п.);
2) содержание курса школьной математики с точек зрения:
    а) современных научных тенденций,

б) современных запросов жизни,

в) современных общепедагогических воззрений;

3) согласование программ математики средней школы с программами низших и высших школ;
4) вопросы методики школьной математики;
5) учебники и учебные пособия;
6) исторические и философские элементы в курсе математики средней школы;
7) рисование, лепка и ручной труд как вспомогательные средства при обучении математике;
8) подготовка учителей математики [1, с. XV].

Данные положения можно сравнить с недавно (два года назад) проходившим съездом преподавателей математики, обсудившим очень похожие актуальные вопросы, но с добавлением применения новых информационных технологий даже в младших классах общеобразовательной школы. На сколько мне известно, по крайней мере из голландского опыта начального образования, данный вопрос строго регламентируется по времени до 12-летнего возраста (они сведены к минимуму!), а наше современное начальное образование всеми силами пытается подвергнуть удару физическое состояние детей. Вернемся к работе Съезда.

На съезде работали 5 секций: 1) учебная литература по математике; 2) программы и экзамены; 3) методика математики; 4) и 5) преподавание математики в технических и коммерческих учебных заведениях.

По результатам работы съезда были опубликованы в 1913 г. два тома: общие собрания (т. I) и секции (т. II). Несколько позже, но ещё в 1913 г., вышел небольшой III том, куда вошли материалы, по разным причинам не попавшие в первые два тома.

Великий Карл Гаусс говорил, что математика – царица наук, а арифметика – царица математики. Под арифметикой разумеется арифметика теоретическая, т.е. теория чисел, изучающая целые положительные числа. В докладе И.Н. Чистякова "Элементы теории чисел в средней школе" констатируется печальный факт, что нередко "наши учащиеся знают о свойствах целых чисел меньше, чем о логарифмах, о непрерывных дробях". В докладе упоминается, что основные интересные элементы теории чисел должны пронизывать весь курс математики средней школы.

Другим интересным докладом является выступление С.И. Шохор-Троцкого "Требования, предъявляемые психологией к математике, как учебному предмету", в котором рассматриваются разнообразные психологические особенности математического преподавания. Если говорить об арифметике, то указывается на то, что вся нумерация была для человека *изобретением,* до которого человечество доходило тысячелетиями и с большим трудом, а в современном обучении происходит простое изложение фактов, не заставляющих учеников задуматься над всем процессом возникновения теоретических основ арифметики. Как было отмечено, "там есть определения, технические *навыки*, правила, условный смысл некоторых терминов, для целых чисел имеющих один смысл, для нуля, единицы и дробей – другой" [1, с. 72]. Стремление учеников сделать вывод какого-либо правила или закономерности вместе с исторической ссылкой даст возможность запомнить и выработать определенный арифметический навык. К тому же было отмечено, что учебный курс изобилует множеством неинтересных, без нужды неестественных задач с искусственными хитросплетениями. Далее на секционных заседаниях был поднят вопрос о задачниках по арифметике, к которым должны быть предъявлены особые требования, чтобы не отбить вкус учеников к познанию арифметики. Особо не останавливаясь, можно отметить, что аналогичные проблемы существуют и в геометрическом образовании. За 100 лет актуальность рассмотренных вопросов не изменилась. К примеру, геометрия, ввиду сокращения учебных часов, потеряла изобретательский характер, и к ней уже нет большого интереса у школьников, а наличие калькуляторов совсем отбило навык устного счета и привело к незнанию элементарной таблицы умножения.

Остановимся еще на одном интересном докладе известного преподавателя математики В.Р. Мрочека "Экспериментальные проблемы в педагогике математики", в котором поднимается одна из проблем "активности в математике". Ученые установили, что умственное развитие и двигательная способность идут рука об руку, а ручной труд является общеобразовательным методом. В настоящее время это можно соотнести к лабораторному методу при изучении математики. В последние годы в вузе резко сократили учебные часы на методику ручного труда при подготовке учителей начальной школы. Этот предмет помогает легче узнавать пространственные формы и движения на плоскости и в пространстве. Не секрет, что при получении готовых правил и соотношений не возникает никаких положительных эмоций, а при умственном напряжении удовлетворение достигнутой цели, пусть для начала и небольшой. Создание бумажных макетов фигур и их измерение дает лучшее представление о геометрическом материале в математике.

Среди основных докладов было выступление В.В. Бобынина о целях и средствах использования элементов историзма в преподавании математики в средней школе. Выделю только одно замечание. "Наиболее действительные для настоящего времени средства устранения отрицательных взглядов на математику может дать только история математики. В этом и должна состоять *одна* из целей введения исторических элементов в преподавание математики в средней школе" [1, с. 141]. Идея, выраженная в данной цитате, не потеряла своего значения и по сей день.

Теоретическая арифметика была затронута в докладе Б.Б. Пиотровского "Вопросы теоретической арифметики в старших классах средней школы" [1], где был поднят вопрос о целесообразности повторения материала младших классов и решения арифметических задач в старших классах. Главное, на что надо обратить внимание, состоит в том, чтобы присутствовал принцип расширения числового запаса, который имеет место в настоящее время только в преподавании математики на педагогическом факультете в рамках специальности “начальные классы”. Изучение свойств натуральных чисел и операций над ними вместе с указанным принципом дает дальнейшее обоснование методам математического анализа, к тому же учащиеся узнают необходимость существования рациональных и иррациональных чисел. Актуальность поставленной проблемы связана еще и с геометрическим материалом, в преподавании которого и сейчас, сто лет спустя, имеет много пробелов в преподавании. Автор доклада предлагает ввести элементы аксиоматического построения множества натуральных чисел, а также излагает известные теории пар первой и второй ступени для введения соответственно целых и рациональных чисел, но для учащихся младших классов такое изложение не под силу, а вот для старшеклассников такое введение факультативно возможно. Предлагалось также рассмотреть известный принцип сечений Дедекинда, который весьма полезен при введении иррациональных чисел.

Важным моментом школьной деятельности является необходимость разделения всего процесса на образование и обучение. Под образованием понимается то, что человек приобретает сам путем логической обработки приобретенной информации, в то время обучение есть процесс внешнего воздействия на психику человека. Если в образовании центр тяжести лежит на мышлении и творчестве, то в обучении – в памяти и усвоении. Поэтому лучший способ научить человека – дать материал для мышления и творческих идей, которые могут возникнуть в процессе изучения математики.

Остановимся кратко на докладе Ф.А. Эрна “Спорные вопросы в методике арифметики”, где он указывает на методы и приемы преподавания арифметики [2]. Здесь необходимо обратить внимание на так называемый лабораторный метод, который должен играть большую роль при усвоении материала. Этот метод до сих пор относится к числу спорных вопросов, так как на его реализацию требуется много сил. Наличие задач измерительного характера приводит к необходимости множества вычислений, установления различных функциональных зависимостей, которые проходят через весь математический курс. Если вырезание, склеивание и конкретное измерение считается громоздким заданием, то что говорить о современных технологиях, которые могут подвести в любой момент? Заметим, что пока человек не вырежет сам какую-нибудь модель, не найдет ее измерения и не вычислит какие-либо параметры,- трудно ждать формирование пространственных представлений и умения считать.

На съезде прозвучало много научных докладов, посвященных преподаванию геометрического материала, аксиоматике геометрии, введению понятия величины и ее измерения, преподаванию высшей математике старших классов. Если проводить параллель с современностью, то многие возникавшие проблемы актуальны и сегодня и даже в большей степени, чем сто лет назад. Что касается арифметики, то все сводится к простым действиям над числами без поиска удобных методов поиска результата. Насколько известно, лабораторный метод в арифметике также не пользуется большой популярностью. Сразу возникает проблема создания сборника арифметических задач с практическим содержанием и историческими ссылками. Материалы Съезда могут послужить источником для глубоких выводов по всем разделам школьной математики.

Сделаем некоторые выводы по вопросам арифметики и теории чисел в трудах I Съезда преподавателей математики. Первое - преподавание арифметики должно быть проведено через весь курс среднего образования. Второе – применение лабораторного метода при изучении арифметического материала. Третье – вопросы историзма должны естественным образом входить в преподавание курса арифметики. Четвертое – рассмотрение числовых множеств с точки зрения расширения числового запаса и функциональной зависимости.

Библиографический список

1. Труды I Всероссийского Съезда преподавателей математики [Текст]. – СПб.: Север, 1913. – Т. 1. – 609 с.
2. Труды I Всероссийского Съезда преподавателей математики [Текст]. – СПб.: Север, 1913. – Т. 2. – 303 с.
3. *Одинец, В.П.* Зарисовки по истории математического образования России со второй половины XVIII века до 1917 года [Текст]: учеб. пособие / В.П. Одинец. – Сыктывкар: Коми пединститут, 2011. – 51 с.

6 этапов развития высшего математического (университетского) образования в Ярославле, составивших 200-летнюю историю его становления

Е.И. Щукин

200-летнюю историю становления университетского образования в Ярославле следует разбить на два периода – Демидовское высшее учебное заведение (Д. ВУЗ) и Государственные Вузы (Г.Вузы).

Демидовский период развития высшего математического (университетского) образования в Ярославле проходит 3 этапа под названиями: Демидовское училище высших наук (1803/1811-1833), Демидовский (Камеральный) Лицей (1834-1869), Демидовский Юридический Лицей (1870-1917).

Следующие три этапа – это Государственные Вузы г. Ярославля: Ярославский государственный университет (1918-1924), Ярославский государственный педагогический институт (1924 – по настоящее время; заметим, что в 1945 году ЯГПИ присвоено имя К.Д. Ушинского, а с 1993 г. – звание Университета); Ярослвский государственный университет, воссозданный в 1970 г. и получивший имя П.Г. Демидова в 1995 г.

Первые четыре этапа развития высшего математического (университетского) образования в Ярославле исследуются в работах ряда авторов [1-8]. Менее исследован вопрос о пятом этапе становления университетского математического образования (1924-1970): ведь в это время **формально** университета в Ярославле не существовало. Однако был Ярославский государственный педагогический институт, на физико-математическом факультете которого с 1924 года начала складываться Ярославская геометрическая школа трудами таких геометров, как Николай Александрович Извольский (1870-1938), Залман Алтерович Скопец (1917-1984), Абрам Миронович Лопшиц (1897-1984).

Н.А. Извольский родился в г. Епифани Тульской губернии, в семье учителя местного уездного училища, и в 1881 году поступил в Тульскую гимназию, где тогда преподавал математику и физику талантливый преподаватель Евгений Станиславович Томашевич, который привлекал своих учеников к чтению двухнедельного журнала "Вестник опытной физики и элементарной математики" и рекомендовал ученикам решать предлагаемые в этом журнале задачи.

С этого и началась дорога Николая Извольского в математику. Его имя появляется на страницах "Вестника опытной физики и элементарной математики" во многих номерах с 1886 по 1888 г. Ученик Извольский дает изящные решения около 50 предложенных трудных задач и пишет две статьи на предложенные журналом конкурсные темы, за что получает премию – математическую библиотеку. По окончании гимназии Н.А. Извольский поступает в Московский университет на физико-математический факультет, где с особым увлечением занимается геометрией. По окончании университета в 1893 году за работу "Изображение поверхности на плоскости" Н.А. Извольскому дано звание кандидата, а за сочинение "Учение о вероятностях и его приложение к статистике" он получает серебрянную медаль. Его оставляют при университете для подготовки к профессорскому званию [11]. В дальнейшем он преподавал в различных московских учебных заведениях, издавал и редактировал методический журнал "Математический вестник". С 1922 года – преподаватель, позже – доцент, а с 1924 года – профессор Второго МГУ. С 1924 года работал в ЯГПИ. С 1925 года – профессор, а с 1930 по 1938 годы – заведующий кафедрой высшей математики ЯГПИ. Кандидат физико-математических наук [10], крупный ученый – геометр (синтетическая и проективная геометрия [12]), а также методист и пропагандист методических знаний. Автор учебников по арифметике, элементарной алгебре, основному курсу проективной геометрии, синтетической геометрии и первого в СССР учебника по методике преподавания геометрии [10].

Залман Алтерович Скопец... Еще будучи учеником гимназии небольшого городка в Латвии, он составил собственный задачник по математике. По окончании Латвийского университета в 1938 году он получил степень магистра математики.

Оказавшись летом 1941 года на ярославской земле, он начинает здесь свою педагогическую деятельность как учитель математики средней школы села Норское. (За 1941-1942 учебный год Норская школа отмечалась как единственная в области, где велась внеклассная работа по математике.) С осени 1942 года З.А. Скопец работает в ЯГПИ и уже в 1946 году защищает кандидатскую диссертацию на тему "Некоторые методы построения специальных трансформаций Кремона." Далее следует получение звания доцента (1947), первые аспиранты (в открытой в 1948 году математической аспирантуре ЯГПИ), заведывание кафедрой элементарной математики (с 1953 года) защита докторской диссертации (1962), получение звания профессора (1963), создание и заведывание кафедрой геометрии (с 1964 по 1984 год). С середины шестидесятых годов значительно расширяется аспирантура и открывается совет по защите кандидатских диссертаций по специальности "геометрия и топология".

Научные интересы профессора З.А. Скопеца всегда лежали в области геометрии: от алгебраической и неевклидовой до начертательной и элементарной. По тематике исследований Ярославской геометрической школы, которую он возглавил, можно выделить несколько направлений:

1. Конструирование и изучение кремоновых соотвествий в пространствах различной размеренности.
2. Отыскание новых конструктивных методов задания алгебраических многообразий в многомерных проективных пространствах.
3. Разработка теоретических основ n-мерной начертательной геометрии.
4. Разработка конструктивных методов отображения на плоскость различных неевклидловых пространств.

Под руководством З.А. Скопеца более 40 человек защитили кандидатские диссертации по физико-математическим, техническим и педагогическим наукам.

З.А. Скопец учавствовал в реформе школьного математического образования, которая проводилась в СССР с середины 60-х годов под руководством академика А.Н. Колмогорова. Он – один из авторов и титульный редактор учебника по геометрии для 9-10 классов, по которому около 15 лет работали все школы СССР [9; 10].

В 1949 году в ЯГПИ был принят А.М. Лопшиц, область научных интересов которого, в частности, включала дифференциальную геометрию, геометрию бесконечномерных пространств, линейную алгебру, тензорный анализ. За время работы в Ярославле он подготовил 20 кандидатов наук, многие из которых работают в вузах г. Ярославля. Один из последних аспирантов А.М. Лопшица, Владимир Васильевич Афанасьев, в феврале 1986 года защитил кандидатскую диссертацию по геометрии в Институте математики при Академии наук

Молдавской ССР, а с января 1989 года является ректором ЯГПИ. В 1993 году по итогам аттестации приказом Государственного комитета Российской Федерации по высшему образованию педагогический институт был преобразован в Ярославский Государственный педагогический университет имени К.Д. Ушинского.

В.В. Афанасьев также – заведующий кафедрой геометрии, автор 200 научных работ, в апреле 1997 года в РГПУ им. А.И. Герцена защитил докторскую диссертацию "Методические основы формирования творческой активности студентов в процессе решения математических задач" по специальности "теория и методика обучения математике". Сейчас ректор ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, доктор педагогических наук, профессор, дейстельный член Российской Академии естественных наук и Международной академии информацтизации руководит исследовательской работы аспирантов и докторантов, является председателем диссертационного совета и главным редактором журнала "Педагогический вестник" [9; 10].

Отметим, что из рядов Ярославской геометрической школы и математической аспирантуры (открытой в 1948 году и формировавшейся во многом за счет выпускников физмата ЯГПИ) вышло более 70 кандидатов наук. Многие из них продолжают свою деятельность, защитив докторские диссертации; руководя кафедрами; факультетами; университетом.

Сейчас, например, в ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, на физико-математическом факультете руководят кафедрами: геометрии – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор, ректор ЯГПУ им. К.Д.Ушинского В.В. Афанасьев [10]; алгебры – доктор физико-математических наук, профессор А.С. Тихомиров, продолжатель идей Ярославской геометрической школы, уже сам воспитавший 9 кандидатов наук и 1 доктора наук [10]; теории и методики обучения математике – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор А.В. Ястребов [10]; математического анализа – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор Е.Н. Смирнов, с 1989 года по 2005 год он был деканом физико-математического факультета [10].

Все это говорит о том, что период существования физмата ЯГПИ с 1924 по 1970 годы естественно считать университетским. Тем самым подтверждается высказанное в самом начале доклада соображение о том, что уже в течение 200 лет в городе Ярославле можно было получить университетское математическое образование, созвучное со временем.

Библиографический список

1. *Демидова, Н.Г.* Род Демидовых – прошлое и настоящее; составление [Текст] / Н.Г. Демидова // Альманах № 1 Международного Демидовского Фонда. – Москва, Издательский Центр "Классика", 2001.
2. *Щеглов, В.Г.* Высшее учебное заведение в г. Ярославле имени Демидова в первый век его образования и деятельности (1803-1903) [Текст] / В.Г. Щеглов. – Ярославль, Типография Губернского Правления, 1903.
3. *Гущина, В.Е.* Биографический сборник Демидовского университета [Текст] / В.Е. Гущина, Д.К. Морозов, Ю.Г. Салова. – Ярославль-Рыбинск, 2008.
4. *Гущина, В.Е.* Биографический сборник Демидовского университета; пер. на англ. язык с уточнениями и добавлениями [Текст] / В.Е. Гущина, Д.К. Морозов, Ю.Г. Салова. – Ярославль-Рыбинск, 2010.
5. *Щукин, Е.И.* Ярославский университет: Демидовы и Ляпуновы [Текст] / Е.И. Щукин // Человек в контексте эпохи: личность, культура, образование: материалы Всероссийской научной конференции, посвященной 270-летию со дня рождения П.Г. Демидова. – Ярославль, 2008.
6. *Щукин, Е.И.* Курс теории вероятностей в Демидовском высшем учебном заведении г. Ярославля (XIX-начало XX века) [Текст] / Е.И. Щукин // Труды VII Международных Колмогоровских чтений. – Ярославль, 2009.
7. *Щукин, Е.И.* Теория вероятностей и математическая статистика на педагогическом факультете Ярославского (1922-1924) университета (постановка проблемы) [Текст] / Е.И. Щукин // Труды VIII Международных Колмогоровских чтений. – Ярославль, 2010.
8. *Щукин, Е.И.* Первые русские учебники по теории вероятностей и математической статистике (из фонда книжных памятников ЯГПУ им. К.Д. Ушинского) [Текст] / Е.И. Щукин // Труды IX Международных Колмогоровских чтений. – Ярославль, 2011.
9. *Коршунова, Н.И.* Из истории Ярославской геометрической школы. [Текст] / Н.И. Коршунова, Л.Б. Медведева // Труды V Всероссийской Школы по истории математики. – Ярославль, 2003.
10. Профессора ЯГПУ, 1908-2008. Биографические очерки. [Текст]. – Ярославль, 2008.
11. *Андронов, И.К.* Полвека развития школьного математического образования в СССР [Текст] / И.К. Андронов. – Москва: Изд-во "Просвещение", 1967. – С. 114-115.
12. Наука и научные работники СССР (часть VI; научные работники СССР (без Москвы и Ленинграда) [Текст]. – Москва: Изд-во АН СССР, 1928. – С. 36.