Проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской

Лекции

по специальному курсу элементарной математики, прочитанные в Ростовском Пединституте в 1937-38 уч. г.

Часть II

Измерение в геометрии и инверсия

Пединститут. Ростов-Дон
1 9 3 8 г.

ИЗМЕРЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ

§1. Аксиомы непрерывности Архимеда и Гильберта.

Гильберт в первом издании своих „Оснований геометрии" делает ошибку. Выдвигая 5ую группу „аксиом непрерывности", он ограничивается архимедовой аксиомой, которую не замечает Эвклид и которая появляется у Архимеда. Гильберт следующим образом формулирует архимедову аксиому:
„Пусть A произвольная точка на прямой между произвольно данными точками A и B. Строим затем точки $A_1, A_2, A_3, \ldots$ так, чтобы A_1 лежала между A и A_2, A_2 между A_1 и A_3 и A_3 между A_2 и A_4 и т.д. и сверх того отрезки $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 \ldots$ были равны между собой, тогда в ряду точек, $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots$ всегда существует точка A_n такая, что B лежит между A и A_n.
Но уже в следующем издании он выводит и вторую аксиому 5ой группы:
„Элементы (точки, прямые, плоскости) геометрии образуют систему вещей, которая при условии сохранения всех указанных выше

аксиом не допускает никакого расширения, т.е. к системе точек, прямых, плоскостей невозможно присоединить другую систему вещей так, чтобы в новой расширенной системе были попрежнему удовлетворены вместе все аксиомы I-IV, V".

Эта добавочная аксиома и характерна для математика-формалиста, для которого значение имеет только связь между пустыми формами, с которыми он оперирует и которые совершенно не зависят от содержания, которым заполняются эти формы, которые могут быть соответственно точками, прямыми, плоскостями, которые даются интуицией, но которые могут быть также и псевдоточками, псевдопрямыми и псевдоплоскостями.

§2. Аксиома Дедекинда

Итальянская школа не может принять такую аксиому, не дающую характеристику континуума. Итальянский логицизм старается свести все математические понятия к логическим, но логические понятия это уже вовсе не пустые формы.

Логическое существование это больше, чем свобода от противоречий. Математика вовсе не чисто формально гипотетическая наука: „если, то потому".

Витали и другие преимущественно итальянцы характеризуют континуум аксиомой Дедекинда. И эта аксиома носит резко выраженный логистический характер, отрезок в ней мыслится, как класс точек.

Если прямолинейный отрезок AB (т.е. некоторый класс точек) разлагается на две части (т.е. на два класса точек) так, что:

1) Каждая точка отрезка AB (т.е. данного класса) принадлежит одной из этих частей (т.е. одному из этих классов).

2) Конечная точка принадлежит первой части (т.е. первому классу), конечная точка B второй части (т.е. второму классу).

3) Любая точка первой части (первого класса) предшествует любой точке второй части (второго класса), то имеется такая точка C отрезка AB (принадлежащая) той или другой части, что каждая точка отрезка AB, предшествующая C принадлежит первой части (первому классу), а каждая точка AB,

следующая за С принадлежит в этом разложении второй части.
Такая аксиома является действительно логизацией характерного свойства непрерывного отрезка, которое дается непосредственной интуицией и которая состоит в том, что две точки, движущиеся по отрезку в противоположных направлениях встречаются между собой в определенной точке на этой прямой.

§3. Иррациональные числа.

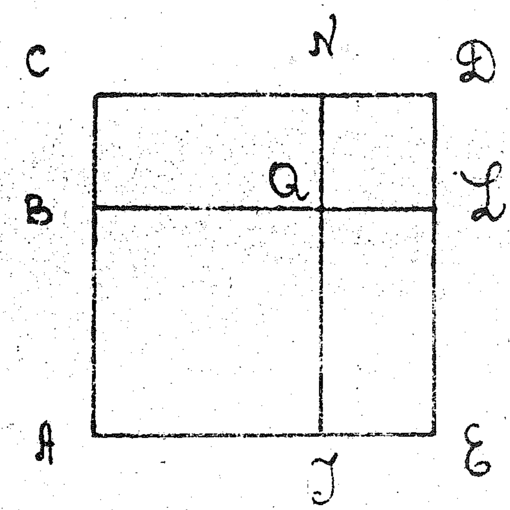
Можно сказать, что эта аксиома устанавливает взаимнооднозначное соответствие между точками и числами, или между отрезками и числами, если установить понятие иррационального числа, как сечение согласно дедекиндовской теореме иррациональных чисел.
Он конкретизирует сечение класса точек, определяемых расположенными координатами, утверждая, что это сечение та же точка, а не только простой символ.
Арифметизация геометрии окончательно установленная Лежандром, постулирующая не как вывод из аксиома Дедекинда, а просто,

как очевидную истину (Лежандру неизвестно).
<u>Взаимнооднозначное</u> соответствие между геометрическими величинами и числами имеет огромное значение в истории геометрического учебника.

Одна и та же формула

$(AB+BC)^2 = AB^2 + 2AB \cdot BC + BC^2$

совершенно различно понимается Эвклидом, Декартом и Лежандром.



Черт. 1

<u>По Эвклиду</u>, это геометрическая теорема, утверждающая, что площадь квадрата ACDE равна сумме площадей квадратов, построенных на частях его сторон AB и BC и удвоенной площади прямоугольника, построенного на этих отрезках, что поясняется черт. 1.

<u>Для Декарта</u> эта теорема <u>об отрезках</u>. Здесь AB^2, BC^2, $AB \cdot BC$ вовсе не площади, а тоже отрезки, как AB, BC, полученные построением четвертой пропорциональной из пропорции $x : BC = AB : 1$.

<u>По Лежандру</u> это просто <u>числовое</u> тождество $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, так как каждая площадь Эвклида и каждый отрезок Декарта опреде-

ляется числом.

§4. Аксиома Кантора.

Существует еще одна аксиома, которая вместе с Аксиомой Архимеда является системой аксиом непрерывности, эквивалентной $\overline{V}$ой Гильбертовой группе. Эта аксиома называется аксиомой Кантора и формулируется следующим образом:

„Если имеются такие два класса прямолинейных отрезков, что:

1) ни один отрезок первого класса не больше отрезка второго класса и

2) при данном сколь угодно малом отрезке σ в первом и во втором классе имеется по отрезку, разность которых меньше σ, то имеется отрезок, который не меньше какого либо отрезка первого класса и не больше какого либо отрезка второго класса".

Эта аксиома тоже выводится из аксиомы Дедекинда. Она соответствует Канторовской теории иррациональных чисел, в которой число мыслится, как символ фундаментального ряда рациональных чисел:

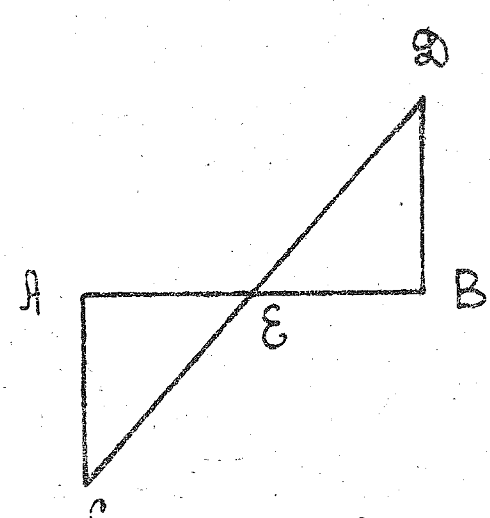
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, т.е. такого, что при всяком ε можно найти такое $n > N$, что $|\alpha_{n+h} - \alpha_n| < \varepsilon$

Она устанавливает, что каждому числу отвечает отрезок, в то время, как Архимедова аксиома приводит в соответствие каждому отрезку число.

§ 5. Делимость отрезка и угла.

Следует обратить внимание на то, что деление отрезка пополам совершается без применения аксиом непрерывности, но только, если это деление производится не так, как мы обычно его производим, а так, как предполагает Гильберт.

В концах отрезка АВ он восстановливает равные перпендикуляры и соединяя С с Д, в точке пересечения с АВ – Е получает середину.

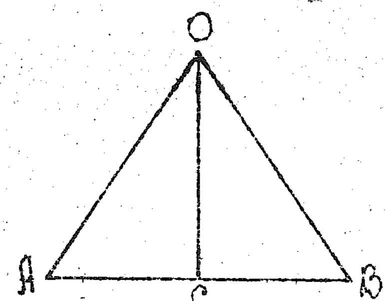


черт. 2.

Построение требует только признания того, что прямая СД, соединяющая точки С с Д по различным сторонам АВ, пересекает АВ.

По существу это положение, которое доказывается с помощью аксиом сочетания и порядка Гильберта принадлежит к числу положений, характеризующих непрерывность, но обычно они не включаются в группу аксиом непрерывности.

Угол делится пополам так, что откладывая на его сторонах ОА=ОВ и соединяем середину АВ-С с вершиной угла О.



Черт. 3

Что касается до деления отрезка на "n" частей, то логистическая геометрия вовсе не дает средство деления, что требует теорем подобия и вместе и аксиому параллельности, а независимо от последней с помощью аксиом Дедекинда доказываем только, что имеется отрезок, n-кратное которого равно данному отрезку АВ.

Доказательство ведется следующим образом. Точки отрезка АВ делятся на два класса (N) и (K) таких, что $nAN < AB$ и таких, что $nAK > AB$. Эти два класса удовлетворяют условиям аксиомы Дедекинда - точки N очевидно предшествуют K, т.к. $nAN < nAK$ и $AN < AK$.

Из аксиомы Дедекинда следует существование такой точки M, что каждая точка AM принадлежит к первому классу, а каждая точка MB принадлежит ко второму. Но это мало. Следует еще доказать, что $nAM = AB$. Это доказательство от противного.

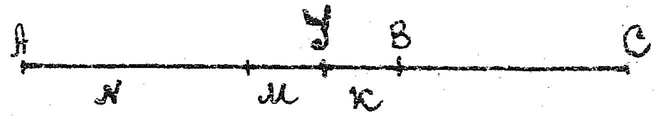
Положим, что $nAM < AB$, но в таком случае внутри AB имелась бы такая точка C, что $nAM = AC$. Выбирая точку M' позади M так, что $nMM' < CB$, мы получаем:

$nAM + nMM' < AC + CB$ или $nAM' < AB$. Это невозможно. В самом деле, точка M' следует за точкой M и посему $nAM' > AB$. Следовательно nAM не может быть меньше AM. Но совершенно таким же образом доказываем и то, что nAM не может быть больше AB. Отсюда вытекает, что $nAM = AB$.

§.6. Вывод аксиомы Архимеда.

Очевидные истины вовсе не являются обязательно недоказуемыми. Аксиомы могут оказаться логически зависимыми одна от другой; так что из одной можно вывести другую. Это как раз имеет место для аксиомы Архимеда, которая логически выводится из аксиомы Дедекинда.

<u>Доказательство Штольца</u> развивается следующим образом. Доказывается, что если $AB < AC$, то имеется такое число целое n, что $n \cdot AB > AC$. Если это не так, то на отрезке AC имеется точка B (несовпадающая с A) такая, <u>что при любом достаточно большом</u> n: $nAB < AC$. Тогда точка AC опять может разделить на два класса:



черт. 4.

1) на точки N для которых нет такого числа n, чтобы $nAN > AC$;

2) точки K для которых наоборот имеются такие числа целые n, что $nAK > AC$, так как опять точки N должны предшествовать точкам K, то в силу аксиомы Дедекинда (§2) мы должны утверждать существование такой точки M, что точки отрезка AM принадлежат первому классу, а точки MC-ко второму.

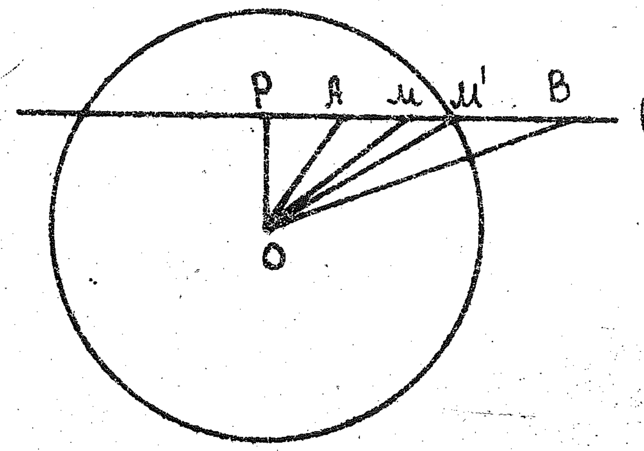
Если мы теперь возьмем на MC точку Y так, что $MY < AM$, то середина X отрезка AY окажется на AM, а поэтому будет принадлежать первому классу. Но по условию имеется такое n, что $nAY > AC$ и Y второго класса. Так как по условию $AY = 2AX$ и поэтому $2nAX > AC$, но это указывает, что существует такое целое число m, что $mAX > AC$, т.е. X принадлежит не первому классу,

как мы выше видели, а второму.
Из этой аксиомы Архимеда вытекает следующее положение: даны два отрезка AB и BC, то при делении первого на равные части всегда можно получить отрезки, меньшие второго отрезка.
В самом деле имеется n-кратное отрезок CD, которое больше AB, а потому, как часть AB, меньше CD.

§7. Пересечение окружности прямой.

Аксиомы непрерывности делают возможность доказать положение, которое Эвклидом и другими математиками в продолжение многих веков не доказывали, а брали, как неявные или явные аксиомы. Это положение о пересекаемости окружности и прямой, имеющей с окружностью точку внутри и вне ее или положение о пересекаемости окружности с окружностью при тех же условиях. Мы покажем, как первое из этих положений доказывается с помощью аксиомы Дедекинда.
Рассмотрим окружность с центром в O (черт. 5.) и прямую l такую, что для точки ее A, $OA < R$, (где R - ее радиус), а $OB > R$. Проводим OP перпендикулярно l. (черт. 5.). Так как OP катет, а OA гипо-

тенуза, что $OP < OA$ и поэтому $OP < R$, т.е. P внутри окружности. Берем отрезок PB. Точки его делим на два класса. В первый входят точки такие, что $ON < R$ (внутренние),



черт. 5.

во второй такие, что $OK \geq R$ (внешние и лежащие на окружности). Из того, что та наклонная больше, у которой больше проекция следует, что все точки предшествующие внутренней точке - точки внутренние, а которые следуют за внешней - внешние. Тогда в силу аксиомы Дедекинда предшествующие принадлежат первому классу, т.е. внутренние, а следующие за ней - ко второму, т.е., внешние. Но можно сказать, что эта точка M является __общей__ точкой прямой l и окружности, т.е., что $OM = R$.

В самом деле, если допустить, что $OM < R$, то следует признать существование такого отрезка σ, что $\sigma < R - OM$.

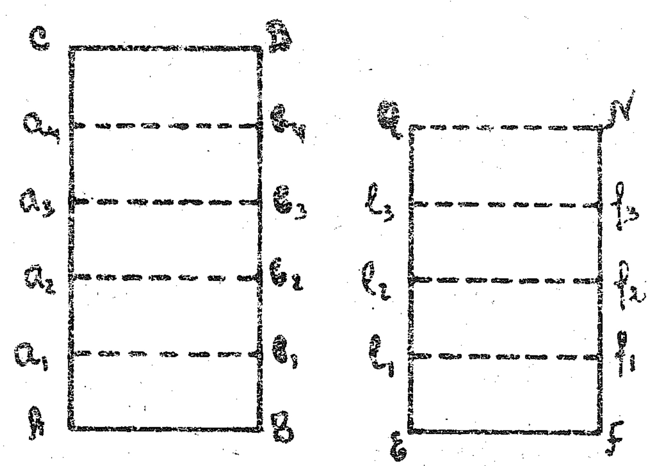
Возьмем такую точку M', что $MM' = \sigma$. Тогда $OM' < OM + MM'$ (так как одна сторона $\Delta OMM'$ меньше суммы двух других сторон). Так как $OM + MM' = OM + \sigma < R$, то

$OM' < R$. А это невозможно, т.к. все точки за M принадлежат уже ко второму классу.
Совершенно таким же образом доказываем невозможность неравенства $OM > R$. Таким образом остается только $\underline{OM = R}$.

§.8. Случай несоизмеримости.

Все теоремы, относящиеся к так называемым случаям несоизмеримости основываются на аксиоме Архимеда, а поэтому и на аксиоме Дедекинда. В настоящее время наиболее часто, применяется к этим случаям теория пределов, но правда в скрытом виде. Мы остановимся только на теореме о том, что площади прямоугольников с равными основаниями относятся как высоты.

Если взять AC и EQ соизмеримы, т.е. если существует общая мера $Aa_1 = Ee_1$, умещающиеся и в AC и в EQ целое число раз (m, n), то проводя через точки деления a_1, a_2, a_3, a_4,



черт. 6.

b_1, b_2, b_3, b_4, прямые, параллельные основаниям разбиваем наши прямоугольники $ABCD$ и $EFQN$ на целое число (m, n) равных элементарных прямоугольничков, так что $\frac{ABCD}{EFQN} = \frac{m}{n}$ и вместе с тем $\frac{AC}{EQ} = \frac{m}{n}$

Так что, $\frac{ABCD}{EFQN} = \frac{AC}{EQ}$.

В том случае, когда AC и EQ несоизмеримы, т.е. общей меры нет, то аксиома Архимеда утверждает, что, если $Ee_1 = \frac{EQ}{n}$, то существует m такое, что $mEe_1 < AC$, а $(m+1)\cdot Ee_1 > AC$.

Так что $\frac{m}{n} < \frac{AC}{EQ} < \frac{m+1}{n}$. Вместе с тем убеждаемся что $\frac{m}{n} < \frac{ABCD}{EFQN} < \frac{m+1}{n}$

$\left| \frac{ABCD}{EFQN} - \frac{AC}{EQ} \right| < \frac{1}{n}$ и поэтому, заставляя n бесконечно расти, в пределе получаем:

$$\frac{ABCD}{EFQN} = \frac{AC}{EQ}.$$

§9. Площадь параллелограма и тре-ка.

Весьма важно здесь отметить зависимость уже с самого начала теории площадей от аксиом непрерывности. Эта зависимость становится более тесной, если с Лежандром признать взаимнооднозначное соответствие между числом и геометрическими величинами.

У Эвклида нет формул в нашем смысле для площади прямоугольника и параллелограма

$$S = a \cdot h, \quad (1)$$

где a-основание, h-высота, для площади тре-ка

$$S = \frac{a \cdot h}{2}, \quad (2)$$

для площади трапеции

$$S = \frac{(a+b)h}{2}, \quad (3)$$

где a и b параллельные основания, ибо все эти формулы предполагают выражение площади и всегда числом, т.е. предполагают иррациональные числа.

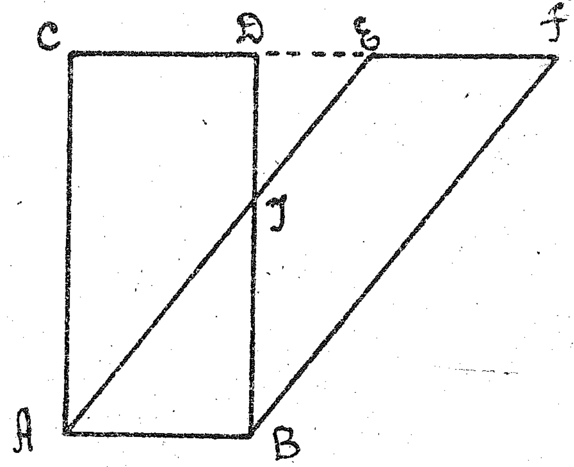
По Лежандру две плоские фигуры тогда равновелики, когда числа, выражающие их площади равны. По Эвклиду дело обстоит иначе. Равновеликость является равенством площадей, а последнее вовсе не сводится к равенству чисел. У Эвклида нет формул, а есть теорема.

Основными теоремами являются:

1) равновеликость параллелограма и прямоугольника с равными основаниями и высотами.

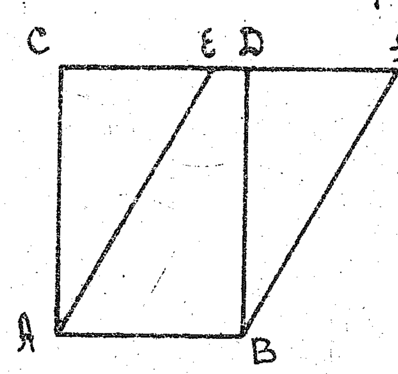
2) равенство площади треугольника половине площади параллелограма с тем же основанием и с той же высотой.

Мы напомним, как доказывается первое предложение. Мы доказываем (черт. 7) равенство треугольников △ACE и △BDF. Замечаем, что прямоугольник ABCD образуется, если к △ACE прибавим △AJB и вычтем △JDE, а параллелограм ABEF образуется, если мы к равному △DBF прибавим △AJB и опять вычтем △JDE. Можно сказать, что



черт 7

прямоугольник ABCD равновелик параллелограму ABEF, потому что, прибавляя к каждой из этих фигур ту же часть △JDE, получаем фигуры ABJEDC и ABFEDJ, разложенные на соответственно равные части AJB и ACE, AJB и BDF. Заметим, что если бы расположение параллелограма относительно прямоугольника было такое, что E оказалось между C и D, то доказательство было бы проще. Мы просто увидели бы <u>равносоставленность</u> прямоугольника ABCD и параллелограма ABEF. Первый состоит из ACE и AEDB, второй из DBF = ACE и опять из AEDB.

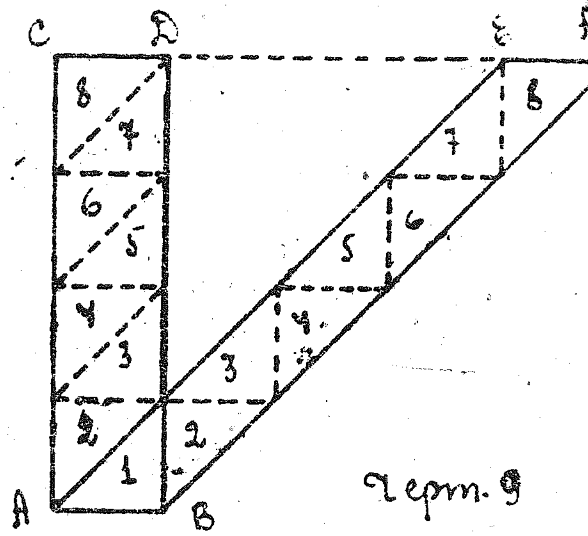


черт 8

§ 10. <u>Равновеликость и равносоставленность.</u>

Гильберт и другие геометры пытаются строить теорию площадей независимо от аксиомы непрерывности. Я дам только определение:
<u>Равновеликость (или эквивалентность) определяется как равносоставленность фигур получаемых из данных через прибавление равных фигур.</u>
Чтобы доказать равновеликость двух фигур, следует поступать так, как поступал Эвклид с прямоугольниками и параллелограмами. Следует к P и Q прибавить фигуры p, q, r, --- так, чтобы новые фигуры, полученные через такое прибавление, уже составляли из равных элементарных фигур: α, β, γ, ---
Если P, Q без прибавления p, q, r, -- оказываются равносоставленными, то P, Q должны признать равновеликими, как во втором случае, нами указанном в § 9, но обратное неверное, равновеликость вовсе не предполагает равносоставленности. Хотя в иных случаях, то что мы доказываем <u>через прибавление</u> дополнительных фигур, доказывается, но только гораздо сложнее равносоставленности.
Следующий чертеж 9 убеждает нас в том, что равновеликость и в первом случае § 9 доказывается равносоставленностью.

Равенство соответствующих элементарных фигур предлагаю доказать читателю.



черт. 9

Пунктиром в ABCD проведены прямые ‖AE и BF и ‖ основанию AB, в ABEF - прямые паралельные AC и BD и паралельные основанию AB.

§ 11. Аксиома Цолта.

В теории площадей, развиваемую исходя из этих определений, приводит аксиома, по существу представляющая развитие Эвклидовой аксиомы:- Целое не может равняться своей части, которую можно выразить так: из неполной совокупности частей нельзя составить целое.

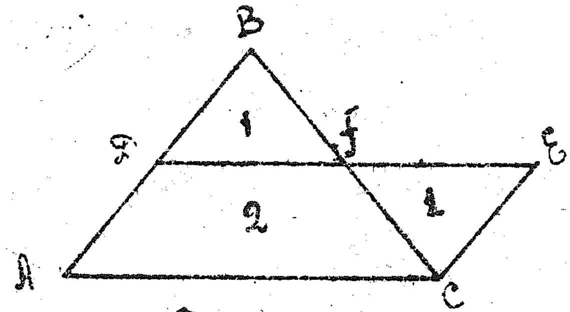
В современной теории площадей эта аксиома, надлежащим образом понимаемая, играет важную роль. Это известная аксиома Цолта, которую он сам формулирует так:

„Если разделить многоугольник прямыми линиями на несколько частей и устранить одну часть, то с помощью оставшейся как бы мы их не располагали нельзя покрыть многоугольник."
Некоторые формулируют эту аксиому несколько иначе. Если доказано с помощью какого либо разложения равновеликость двух фигур, то нельзя произвести другого разложения, так, чтобы одна фигура содержала все части одного и еще другие. Математикам удалось вывести аксиому Цолта из Архимедовой аксиомы и таким образом косвенно такая теория площадей оказалась зависимой от аксиом непрерывности.

§ 12. Модели Трейтлейна

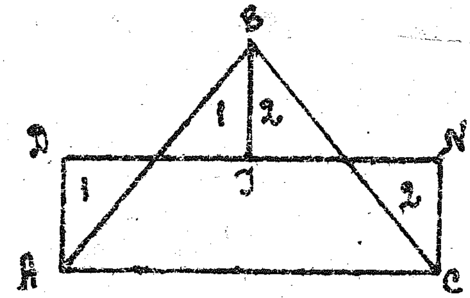
Равносоставленность фигур играет важную роль как в верхах науки в аксиоматических исследованиях, так и в низах в наглядной геометрии. Следует особенное внимание обратить на модели подвижного характера, доказывающие равновеликость фигур.
Доказательство того, что ΔABC (черт. 10) равновелик параллелограмму $ACDE$ с тем же основанием и половинной стороной выводится

из того, что обе фигуры равносоставлены из частей (1,2).



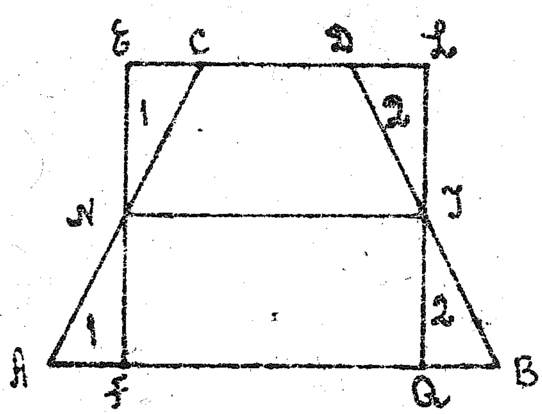
черт 10

Чертеж 11 указывает на равносоставленность △ACB и прямоугольника ACDN.



черт 11

Черт. 12 дает модель, обнаруживающую, что трапеция равновелика прямоугольнику со срединной линией в основании и с высотой, равной высоте трапеции.



черт 12.

§ 13. Теорема Пифагора.

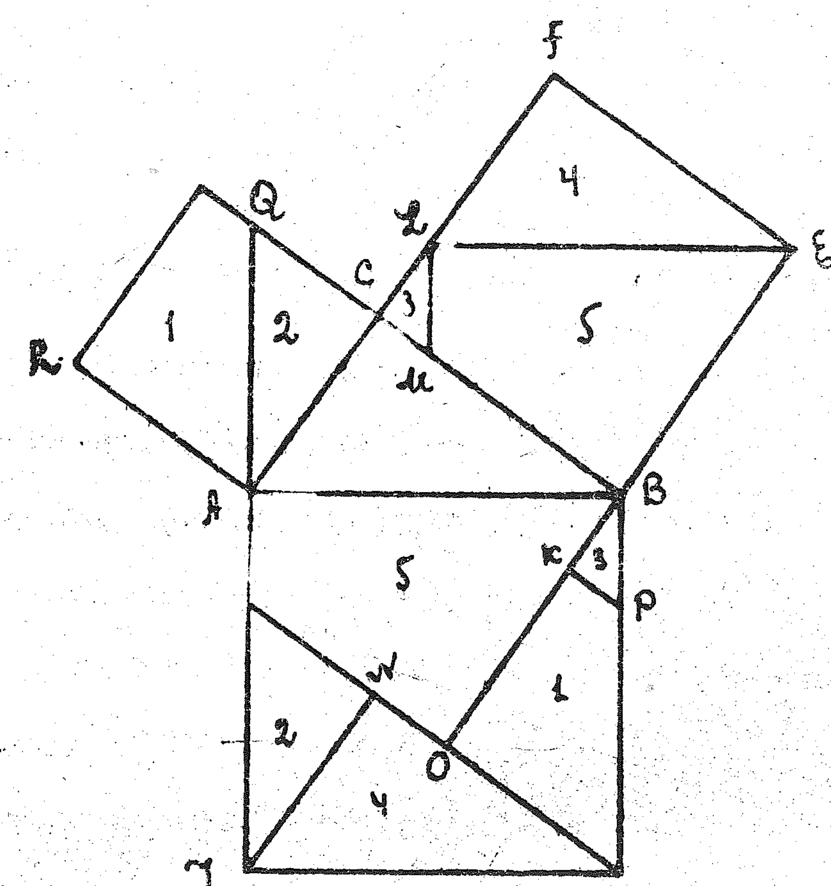
Многочисленные доказательства теоремы Пифагора делятся на следующие категории.

1) Доказательство типа обычного того, которое дается в Началах Эвклида, которое по свидетельству Прокла принадлежит будто и самому Эвклиду. Оно основывается на равновеликости

треугольников с равными высотами и равными основаниями, путем наложения. Это выводится из равновеликости параллелограмов с равными высотами равными основаниями, как фигур эквивалентных в смысле Гильберта на основании 7ой аксиомы I книги Начал: половина одной и той же величины равна между собой. Разложение на равные элементарные части здесь не производится. Доказательство не моделируется.

2) Доказательство равносоставленностью.

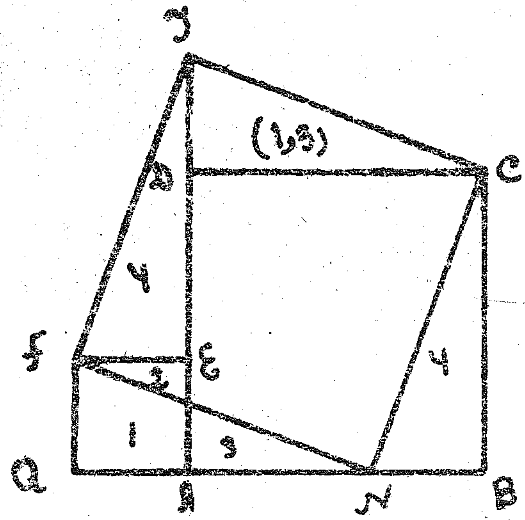
Особенного внимания заслуживает доказательство Анериция (900 г. до Р.Х). Мы прилагаем черт. 13, по которому может быть построена модель. На чертеже $LE \parallel AB$, $AQ \perp AB$ и $LM \perp AB$, BO - продолжение BE, $KP \perp OB$ и $IN \perp AR$.



черт. 13.

$BP = LM$

Мы не будем подробно излагать доказательства, но отметим, что очень ходкое в настоящее время доказательство, которому отвечает черт.14., представляет по существу доказательство Анериция, но только при другом расположении квадратов, построенных на гипотенузе и катетах.

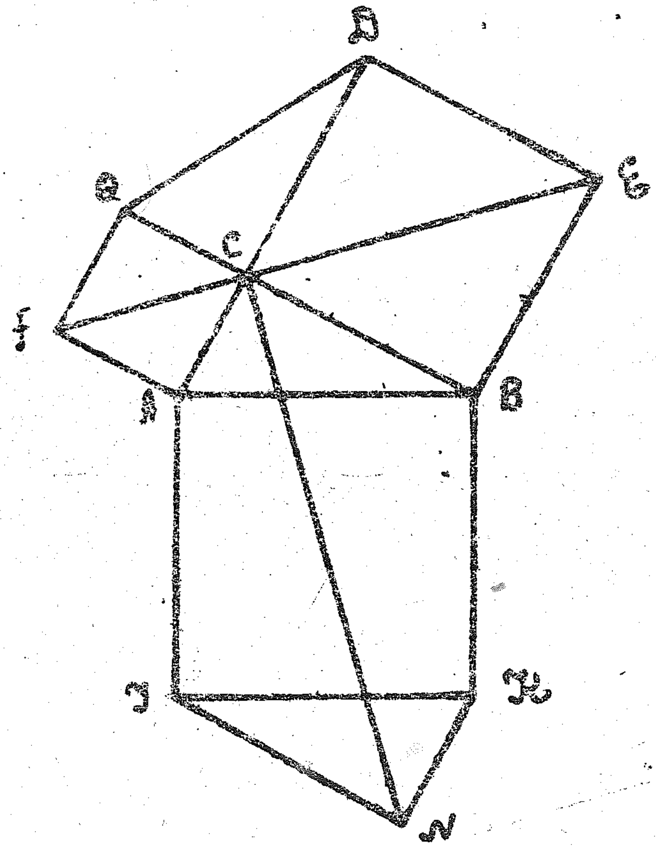


черт.14.

3) Доказательство равносоставленностью фигур, получаемых из данных добавлением.

Такое доказательство дается черт 15.

Доказывается, что два равных шестиугольника состоят: первый из квадратов, построенных на катетах и двух треугольников $\triangle ABC = \triangle QDC$, второй из квадрата, построенного на гипотенузе и из двух таких же треугольников $\triangle ABC = \triangle JNK$.



черт. 15.

4) Доказательство основанное на теории подобия (в числе их то, которое всегда применяется в учебниках геометрии)

§ 14. Объем параллелепипеда.

О объемах можно сказать тоже, что мы сказали в §9 о площадях. У Эвклида нет формул для объема прямоугольного параллелепипеда

$$V = abc \quad (4)$$

где a, b, c – его измерения, нет формулы для объема призмы

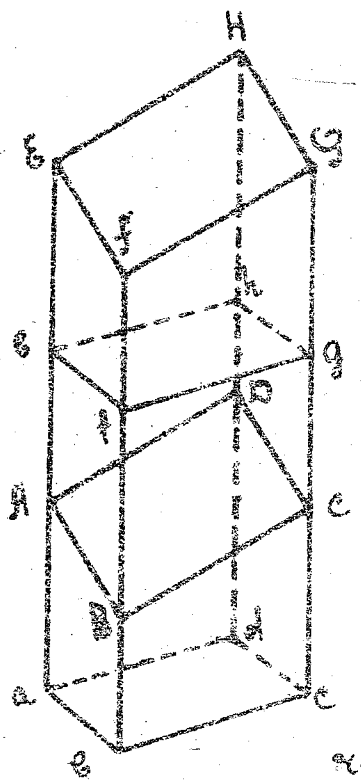
$$V = \frac{S.h}{3}$$

$$V = Sh \quad (5)$$

где S площадь основания, а h высота, нет формулы для объема пирамиды

$$V = \frac{Sh}{3} \quad (6)$$ и т.д.

О ней – они получали смысл только по арифметизации геометрии. У Эвклида и Архимеда имеются только теоремы о равновеликости тел. В некоторых выводах, относящихся к равновеликости тел мы поступали совершенно также, как Эвклид поступал, доказывая равновеликость параллелограмов с равными высотами и основаниями, т.е. с помощью равносоставленности, т.е. разложения двух сравниваемых объемов на равные элементарные части или с помощью такого разложения тел, пополненных тем же телами. Напомним, как доказывается, что наклонная призма равновелика такой призме, у которой основание равно перпендикулярному сечению наклонной призмы, а высота ее боковому ребру.



черт. 16

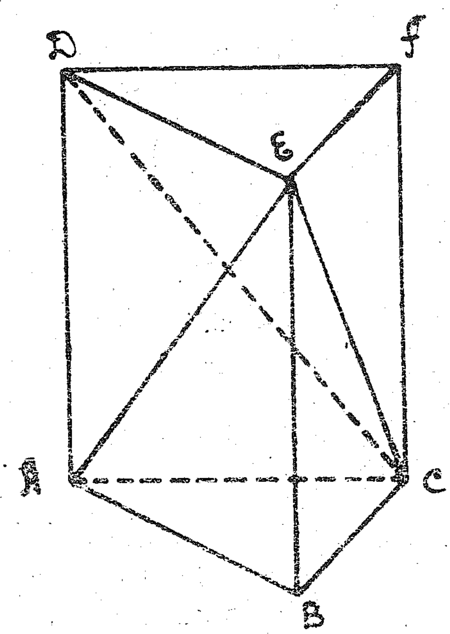
Строя (скажем fF, Be) перпендикулярные к ребрам данной наклонной призмы ABCDEFGH сечения abcd и efgh (черт. 16), мы доказываем равновеликость ABCDEFGH и abcdefgh тем, что тело abcd EFGH получается из наклонной и прямой призмы через прибавление равных тел abcd ABCD и efgh EFGH.

Вывод же отсюда, что объем всякого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту совершается в два приема, сперва для прямого, а затем для наклонного.

§15. Объем пирамиды.

Совершенно другим путем мы идем при выводе формулы для объема треугольной пирамиды. Мы идем через две теоремы:
Первой является следующая:
Треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.
Второй является теорема о разложимости треугольной призмы на три равновеликие пирамиды (которой отвечает черт 17).

В нем пирамиды ABCE и DEFC, очевидно, имеют равные высоты и потому равновелики.
Равновеликость же ABCE и DFCE доказывается, беря за основание ADC = DFC и общей вершиной E.
Первая теорема в настоящее время доказывается



черт. 17

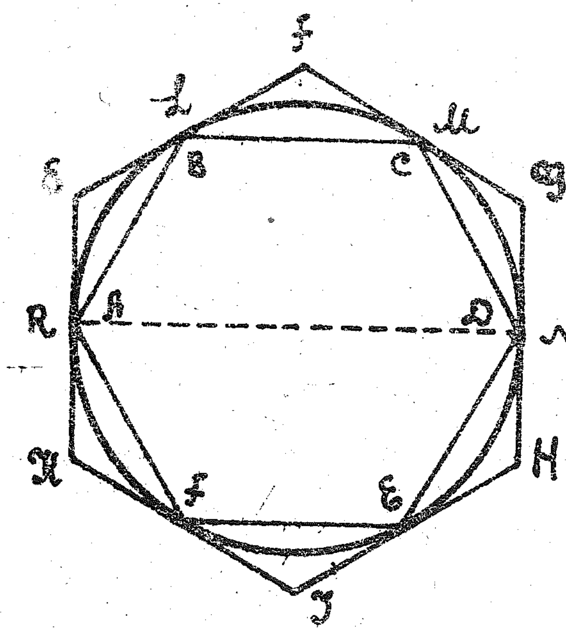
теорией пределов, в старых учебниках методом исчерпывания. Можно ли ее доказать так, как доказывается равновеликость прямой и наклонной призмы, т.е. разложением на равные элементарные части.

В этом состоит одна из знаменитых проблем, предложенных в 1900 г. Гильбертом. Ден доказал, что это невозможно, что применение принципов анализа бесконечно малых в той или другой форме здесь неизбежно.

§ 16. Метод пределов и лемма Гурьева.

Этот метод неизбежен и при определении площадей ограниченных кривыми. В элементарных учебниках эти принципы входят с помощью элементарной теории пределов. Мы не будем здесь воспроизводить эту главу, но наметим общую схему вывода с помощью теории пределов.

Мы вписываем в окружность правильный многоугольник ABCDEF (черт 18) и описываем около него другой EFGHJK, удваиваем число сторон того и другого и, переходя от 6-и угольника к 12 угольнику, 24 угольнику и т.д. и доказываем, что площадь круга равна пределу такого изменяющегося



черт. 18.

вписанного или описанного многоугольника

Лучше всего, обозначая через S площадь круга, а через $\underline{S}_n$ и $\bar{S}_n$ площади вписанного и описанного многоугольника, написать неравенства

$$\underline{S}_n < S < \bar{S}_n \qquad (7)$$

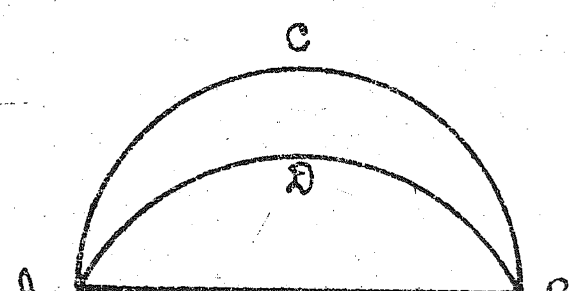
и затем, пользуясь тем, что можно назвать леммой Гурьева. В своей частной форме она формулируется так: если для двух переменных x, y $x < A < y$ и при этом $\lim x = \lim y$, т.е. разность $x{-}y$ бесконечно убывает, то $\lim x = \lim y = A$, а в общей форме ее следует формулировать так: $x < z < y$, из того, что $\lim x = \lim y$ следует, что $\lim x = \lim y = \lim z$.

Ее можно и не доказывать, выставляя ее как очевидное положение.

В случае определения длины окружности L будем иметь (согласно 7) $\underline{P}_n < L < \bar{P}_n$ (8)

где $\underline{P}_n$ и $\bar{P}_n$ представляют периметры вписанного и описанного многоугольника и опять можно применять ту же лемму Гурьева.

Но здесь есть одна существенная разница. При установке неравенства (7) приходится пользоваться 7ой аксиомой Эвклида: целое больше части. Объемлющая площадь ABC больше объемлемой ABD.



черт. 19.

На черт. 18. пл. ABCD < пл. RLMN < пл. REFGN. При установке неравенства (8) приходится обращаться к называемому первому постулату Архимеда: Выпуклая объемлющая больше выпуклой объемлемой пл. ABCD < пл. RLMN < пл. REFGN.

Лежандр доказывает этот постулат, исходя из определения как кратчайшей линии между двумя точками. В настоящее время это доказательство математиков не удовлетворяет. Приходится оставлять постулат Архимеда, как аксиому без доказательства. Тогда остается возвести в определение длину окружности, то, что следовало и доказать, т.е. просто определяют длину окружности, как предел периметра вписанного в него многоугольника.

Но тогда приходится оправдывать это определение и доказывать, хотя бы то, что получается один и тот же результат с какого бы многоугольника мы не начали удвоение сторон.

§17. Метод исчерпывания Эвклида

Античные математики избегали бесконечности в которой видели противоречие и шли по пути довольно громоздкого метода, называемого методом исчерпывания. Мы ограничимся указанием только общей схемы эвклидовского метода, всегда, имеющего всюду доказательства некоторой пропорции:

$$A:B = a:b \qquad (9)$$

Доказательство всегда разделяется на две части. Если пропорция (9) не выполняется, то возможны два случая:

$$\begin{aligned} &1)\ A:x = a:b \ \text{где}\ x < B \\ &2)\ A:x = a:b \ \text{где}\ x > B \end{aligned} \qquad (10)$$

Для исключения первого случая пользуются рядом величин $P_a^{(1)}, P_a^{(2)}, P_a^{(3)}, \ldots$ иного рода, чем A, но обязательно таких, что все члены будут: 1) меньше A и 2) разность $A - P_a^{(n)}$ при надлежащем выборе n может быть сделана меньше любой величины (можно сказать, в какой угодно мере исчерпана).

Такой же ряд берется и для B:

$P_b^{(1)}, P_b^{(2)}, P_b^{(3)}, \ldots$ и доказывается, что

$$P_a^{(n)} : P_b^{(n)} = a:b \qquad (11)$$

Но число n можно дать настолько большим, что будем иметь $P_b^{(n)} > x$, ибо между x и B будет какая-либо разность, меньше которой можно сделать $B - P_b^{(n)}$. Но с другой стороны по предположению $P_a^{(n)} < A$.

Сравнение пропорций (11) и (9) дает

$$P_a^{(n)} : P_b^{(n)} = A : X$$

Это же при $P_a^{(n)} < A$ и $P_a^{(n)} > X$ невозможно.

Совершенно таким же образом с помощью рядов:

$Q_a^{(1)}, Q_a^{(2)}, Q_a^{(3)}, \ldots\ldots, Q_a^{(n)}$ $\qquad Q_a^{(n)} > A$

$Q_b^{(1)}, Q_b^{(2)}, Q_b^{(3)}, \ldots\ldots, Q_b^{(n)}$ $\qquad Q_b^{(n)} > B$

и таких, что разности $Q_a^{(n)} - A$, $Q_b^{(n)} - b$, могут быть исчерпаны, исключается и второй случай.

Метод исчерпывания в Началах Эвклида применяется для доказательства следующих положений:

1) Площади кругов относятся между собой, как квадраты диаметров (XII) книга 2-ое приложение) здесь A и B площади кругов, a и b квадраты их радиусов, $P_a^{(n)}$ - площадь правильного вписанного многоугольника, $Q_a^{(n)}$ - описанного.

Не Эвклид, а Паппус (234-305 по Р.Х.) отсюда выводит теорему, что окружности относятся как их диаметры.

2) Трехсторонние пирамиды равных высот относятся, как основания ($\overline{XII}_5$).

A и B объемы пирамид, a и b площади оснований, $P_a^{(n)}$ - объем сумма входящих, а $Q_a^{(n)}$ выходящих призмочек.

3) Конус равен $\frac{1}{3}$ цилиндра одной с ним высотой и тем же основанием ($\overline{XII}_{10}$).

A-объем цилиндра, B-конуса; $P_a^{(n)}$ - вписанного; $Q_a^{(n)}$ описанного около конуса пирамида $P_b^{(n)}$ - вписанного, $Q_b^{(n)}$ - описанного около цилиндра призм.

4) Конусы и цилиндры с той же высотой относятся, как основания (XII_{11})

5) Подобные конус и цилиндр в тройном отношении, как диаметры их оснований (XII_{12}).

6) Сферы в тройном отношении, как их диаметры (XII_{13}), т.е.

$$\frac{V}{V_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^3$$

Тем же методом Архимед доказывает, что площадь эллипса относится к площади круга на большой оси, как малая ось к большой, путем сравнения вписанных многоугольников с вершинами на перпендикулярах к большой оси.

Эта форма метода исчерпывания применяется в учебниках Лежандрова типа, например, у Давидова в доказательствах:

1) пропорциональности центральных углов и дуг,

2) — " — площадей прямоугольников с равными высотами,

3) пропорциональности отрезков, отсекаемых на прямых параллельными,

4) пропорциональности двугранных и линейных углов,

у пропорциональности объемов параллелепипедов с равновеликими основаниями и высотами.

§18. Архимедова форма метода исчерпывания.

Архимед доказывает не только пропорции, а и равенства объемов

$$A = B \qquad (12)$$

Форма его метода исчерпавания такова, он исходит из неравенств

$$P_a^{(m)} \leq A < Q_a^{(m)} \qquad (12)$$

$$P_a^{(m)} \leq B \leq Q_a^{(m)} \qquad (13)$$

причем P, Q выбираются так, что

$$P_a^{(m)} = \alpha_0^{(m)} + \alpha_1^{(m)} + \ldots + \alpha_{p-1}^{(m)} \qquad (14)$$

$$Q_a^{(m)} = \alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(m)} + \alpha_n^{(m)} \qquad (15)$$

где α_i по мере возрастания m убывает.
Разность $Q_a^{(m)} - P_a^{(m)}$, как равная $\alpha_n^{(m)}$ может быть сделана как угодно малой.
Так поступает Архимед при определении формы коноида (тело вращения парабола).
α_j представляют входящие и выходящие цилиндры.
$P_a^{(m)}, Q_a^{(m)}$ представляют цилиндры, равновеликие сумме этих элементарных цилиндров.
B-объем цилиндра, основание которого - основание

коноида, а высота = половине высоты коноида.
Этот метод применяется им и при выводе объема гиперболического конуса (гиперболоид вращения) и площади Архимедовой спирали. Этот метод применялся и в школьной литературе раньше, при так называемой <u>чертовой лестнице</u> т.е. при доказательстве равновеликости двух пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями (§ 15).
Но тогда в этом случае Архимедов метод представляется в следующем видоизмененном виде:

$$P_a^{(m)} < A < Q_a^{(m)} \qquad (16)$$

$$\bar{P}_a^{(m)} < B < \bar{Q}_a^{(m)} \qquad (17)$$

$$\bar{P}_a^{(m)} = \bar{\alpha}_0^{(m)} + \bar{\alpha}_1^{(m)} + \cdots\cdots + \bar{\alpha}_{p-1}^{(m)}$$

$$\bar{Q}_a^{(m)} = \bar{\alpha}_1^{(m)} + \bar{\alpha}_2^{(m)} + \cdots\cdots + \bar{\alpha}_{p-1}^{(m)} + \bar{\alpha}_p^{(m)}$$

$$P_a^{(m)} = \alpha_0^{(m)} + \alpha_1^{(m)} + \cdots\cdots + \alpha_{p-1}^{(m)}$$

$$Q_a^{(m)} = \alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)} + \cdots\cdots + \alpha_{p-1}^{(m)} + \alpha_p^{(m)}$$

Доказывается, что $\bar{\alpha}^{(m)} = \alpha^{(m)}$, так, что

$$P_a^{(m)} = \bar{P}_a^{(m)},$$

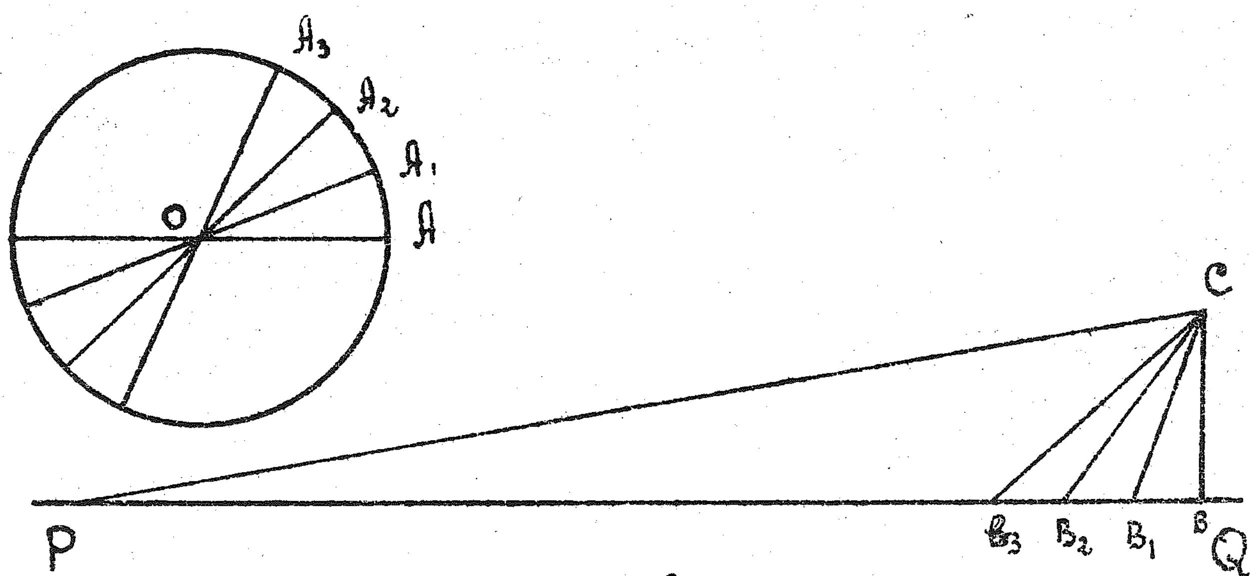
$$Q_a^{(m)} = \bar{Q}_a^{(m)}.$$

§19 Метод неделимых.

Конечно эти метода исключительно громоздки. Не только их громоздкость, но и аксиоматический характер вызвали в эпоху возрождения более простые метода, пользующиеся прямыми, а не косвенными доказательствами.

В основе этих методов лежит понятие, после оставленное – актуально бесконечно малого. Это не наше бесконечно-малое потенциальное, т.е. переменное, имеющее своим пределом нуль. Это какая-то уже неделимая часть континиума, не нуль, но что является последним перед нулем. Конечные величины делились на такие неделимые, причем последние принадлежали постулату исчезновения бесконечно малого α перед конечным a, так что писали $a+\alpha=a$. Кроме того в бесконечно малом мыслилось исчерпывания форм (слияние противоположностей), прямизна сливалась с кривизной, бесконечно малая кривая мыслилась, как прямая, бесконечно малая криволинейная трапеция – как прямоугольник, и т.д.

Лучше всего ознакомиться с сущностью метода неделимых на приеме, употребляемом Кеплером для доказательства теорема Архимеда: что круг равновелик треугольнику с высотой, равной радиусу круга и с основанием, равным длине окружности. Для определения площади круга Кеплер делит круг радиусами на равные бесконечно малые сектора (черт. 20).



черт. 20

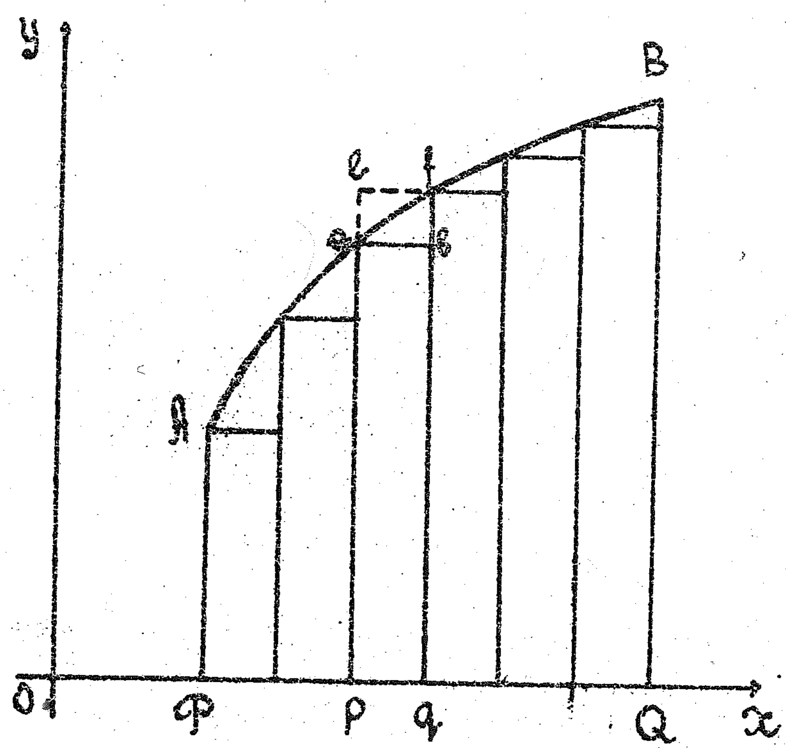
эти бесконечно малые сектора он признает тождественными бесконечно малым треугольникам с высотами, равными радиусу и основаниями, равными дугам секторов.

К прямой PQ он восстанавливает перпендикуляр $BC = OA$ и откладывает по PQ

$BB_1 = AA_1$; $B_1B_2 = A_1A_2$ и т.д. и в силу равновеликости треугольников AA_1O, BB_1C и т.д. он получает, что площадь круга равна сумме площадей треугольников B_mCB_n — BCP, т.е. теорему Архимеда.

В этом рассуждении признается существование актуально-бесконечно малых элементов круга и при этом признается, что те признаки элементов, об уменьшении разности которых свидетельствует интуиция, для бесконечно малых элементов совершенно сравниваются. Это доказательство прямое в противоположность античному апагогическому методу исчерпывания.

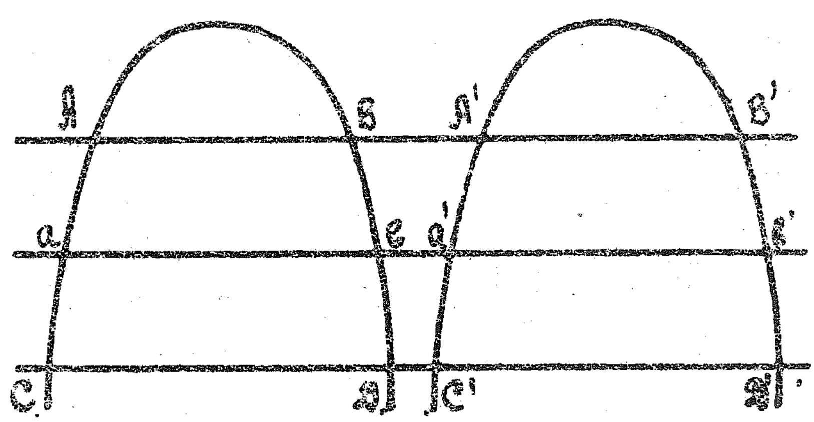
По Кавальери криволинейная трапеция PQAB разбивается на полосы pqaf и эти полосы отождествляются входящим прямоугольникам pqab, которые потеряв форму, получают название линий. Отсюда и выражение, что криволинейная трапеция состоит из линий.



черт. 21

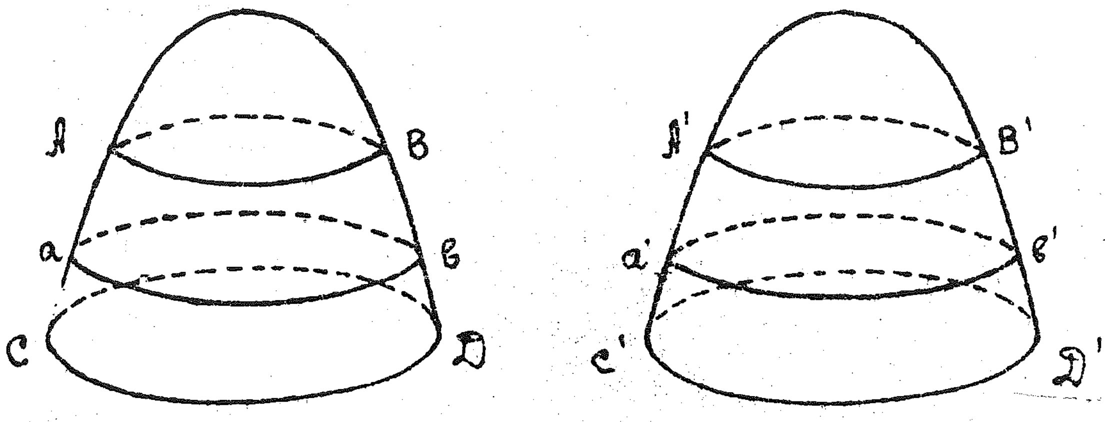
§ 20. Принцип Кавальери.

Мысля площадь состоящей из таких неделимых или линий Кавальери заключает, что если мы имеем две площади, заключенные между двумя параллельными прямыми CDC'D' и ABA'B' и дугами кривых (Aa, Bв) и (a'A', в'B'), то эти площади равны, если равны сечения любой прямой ава'в', параллельной этим прямым (черт. 22)
В этом состоит принцип Кавальери в отношении площадей.
Его стереометрический аналогон относится к объемам.
Если мы имеем два тела, заключенные между двумя параллельными плоскостями CDC'D' и ABA'B' и поверхностями CADB и C'A'D'B', то объемы их равны, если равновелики сечения любой плоскости ава'в', параллельной этим плоскостям.



черт. 22

Мы приведем сейчас только два примера, указы-



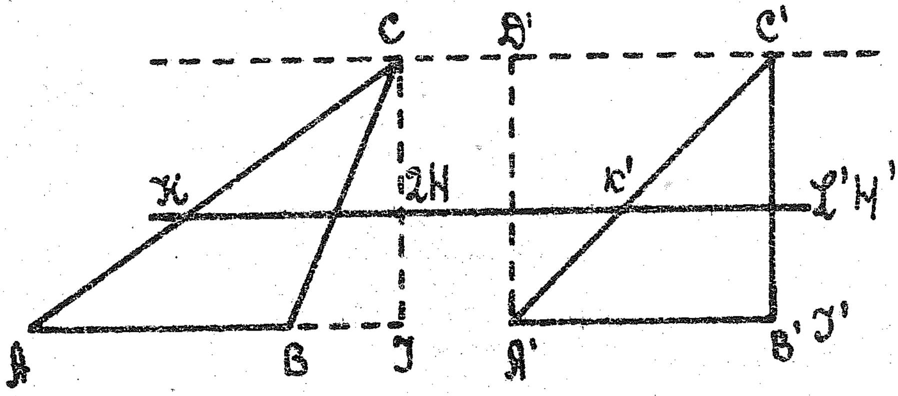
черт. 23

вающих на экономику в рассуждениях при применении этих принципов.

Равновеликость треугольника ABC треугольнику $A'B'C'$ с той же высотой и с равными основаниями AB и $A'B'$ обнаруживается, располагая их между двумя параллельными прямыми $ABA'B'$ и CC', расстояние между которыми как раз равно этой высоте. В частном случае можно взять прямоугольный $\Delta A'B'C'$ и вывести, что площадь ABC равна половине площади прямоугольника $A'B'C'D'$, т.е. формулу

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

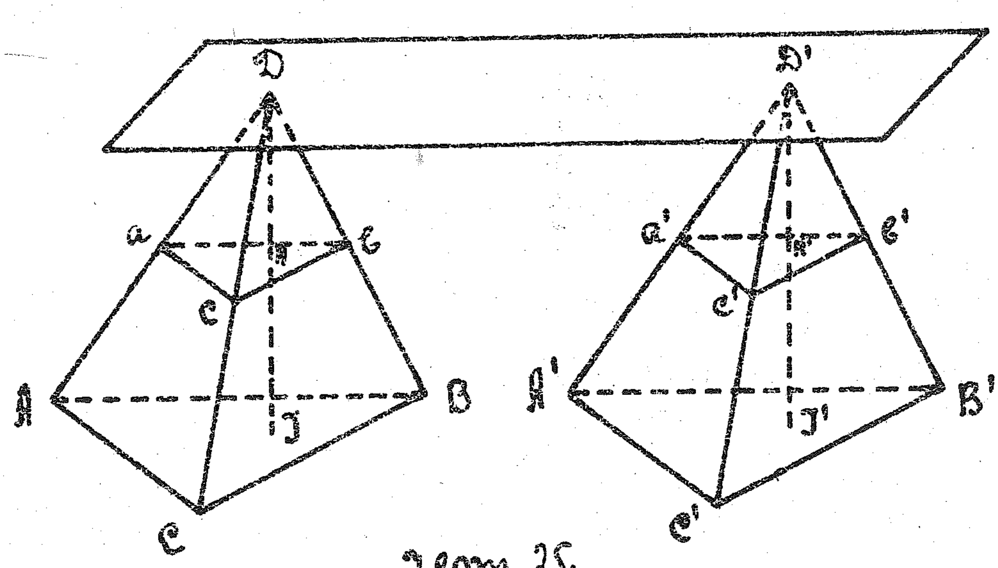
Согласно принципу Кавальери следует только убедиться в том, что $KL = K'L'$, если $KLK'L' \parallel ABA'B'$, но это достаточно, так: $KL : AB = CH : CJ$, $K'L' : A'B' = C'H' = C'J'$, а так как $AB = A'B'$, $CH = C'H'$, $CJ = C'J'$, то $KL = K'L'$.



черт. 24

Совершенно таким же образом устанавливается и равновеликость треугольных пирамид при равновеликости их оснований и равенстве высот.

Согласно принципу Кавальери следует установить равновеликость сечений авс и а'в'с' плоскостью параллельной основанию, поставив обе пирамиды ABCD и A'B'C'D' между двумя параллельными плоскостями ABC A'B'C' и DD'.



черт. 25.

Мы имеем обозначенные DJ, DJ' высоты и через

H и H' пересечение их с плоскостями сечения.

$$abc : ABC = CH^2 : CJ^2$$

$$a'b'c' : A'B'C' = C'H'^2 : C'J'^2$$

Но из того, что $ABC = A'B'C'$, $CH = C'H'$, $CJ = C'J'$ следует действительно, что $abc = a'b'c'$.

§ 21. Эквиваленты

И рассуждение Кеплера и рассуждение Дюгамеля следует переработать, заменяя актуально бесконечно-малое-потенциально бесконечно-малым. Прежде всего следует ввести понятие эквивалента.

Два бесконечно малых β и α называются эквивалентами, если отличаются на бесконечно малое высшего порядка, если $\beta = \alpha + \gamma$ где $\frac{\gamma}{\alpha}$ бесконечно малое ε так, что $\beta = \alpha + \alpha\varepsilon = \alpha(1+\varepsilon)$.

Отсюда следует, что бесконечно малые можно определить как такие, предел отношения которых равен 1 (единице):

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

Мы будем писать $\beta \equiv \alpha$ и значит β эквивалентна α.

Для дальнейшего для нас имеет значение основная лемма интегрального исчисления: в пределе суммы можно заменять бесконечно

малые элементы их эквивалентами. Если $\beta_i \equiv \alpha_i$, то $\lim \sum \beta_i = \lim \sum \alpha_i$.
Доказательство этой леммы дается в любом Введении в анализ. Пользование этой леммой, это еще не <u>интегральное исчисление</u>, оно не предполагает его техники, но использует только основную его идею.

§22. Схема Дюгамеля.

Основная идея исчисления бесконечно малых состоит в том, что для определения какой либо величины A она
1) разбивается на бесконечно малые элементы α_j так что $A = \lim \sum \alpha_j$.
Мы ставим lim, чтобы показать, что элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ не зафиксированы. Мы имеем переход от одной системы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ к другим $\alpha_1^{(\delta)}, \alpha_2^{(\delta)}, \ldots\ldots \alpha_n^{(\delta)}$

$\alpha_1^{(\omega)}, \alpha_2^{(\omega)}, \ldots\ldots \alpha_n^{(\omega)}$

так что число их возрастает, а наибольшая из них убывает. Тогда α_j мыслятся как переменные бесконечно малые элементы.
2) затем подыскиваются к α_j эквиваленты. Это момент - дифференциальное исчисление. Дифференциалы являются наиболее подходя-

щими эквивалентами. Мы хорошо знаем, что дифференциал функции - эквивалент его приращения.

3) Суммируется не сумма $\Sigma\alpha_j$, а сумма ее эквивалентов α_j: $\Sigma\beta_j$, т.е. имеется $\lim\Sigma\beta_j$. Это второй момент - интегральное исчисление.

Чтобы найти длину дуги, мы ее делим на части и заменяем хордами и ищем предел суммы хорд. Под схему Дюгамеля подводится исправленное рассуждение Кеплера. Круг делится на сектора A_1OA_2, A_2OA_3 и т.д. Берутся их эквивалента (что следует доказать) треугольники с основаниями равными дугам A_1A_2, A_2A_3, ... и с высотой равной радиусу и откладываются так, как это указано в рассуждении Кеплера.

§ 23. Криволинейная трапеция.

Схема Дюгамеля проводится и в словах положения, что площадь криволинейной трапеции PQAB (черт. 21) представляет предел входящих или выходящих прямоугольников.

Для этого пишем, что

$$S=\lim\Sigma\alpha_j \qquad (16)$$

где $\alpha_j = pqa\,f$ бесконечно малая криволинейная трапеция. Обозначая через $\underline{\alpha}_j$ и $\bar{\alpha}_j$ площади входящей $pqab$ и выходящей $pqef$ трапеции, можем написать:

$$\underline{\alpha}_j < \alpha_j < \bar{\alpha}_j \qquad (17)$$

а деля на $\underline{\alpha}_j$

$$1 < \frac{\alpha_j}{\underline{\alpha}_j} < \frac{\bar{\alpha}_j}{\underline{\alpha}_j} \qquad (18)$$

но $\frac{\bar{\alpha}_j}{\underline{\alpha}_j} = \frac{pe}{pa}$ так, как из прямоугольников одно и тоже основание pq и вместе с тем

$$\lim \frac{\bar{\alpha}_j}{\underline{\alpha}_j} = 1 \qquad (19)$$

Тогда по лемме Гурсева (§ 16) также

$$\lim \frac{\alpha_j}{\underline{\alpha}_j} = 1 \qquad (20)$$

что указывает на то, что

$$\alpha_j \equiv \underline{\alpha}_j \equiv \bar{\alpha}_j \qquad (21)$$

Тогда в силу основной леммы интегрального исчисления, заменяя в $\lim \sum \alpha_j$ α_j эквивалентами $\underline{\alpha}_j$ и $\bar{\alpha}_j$ получаем

$$S = \lim \sum \underline{\alpha}_j \qquad (22)$$

или

$$S = \lim \sum \bar{\alpha}_j \qquad (23)$$

Если уравнение кривой AB — $y = f(x)$, то

$$pqab = f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

и

$$S = \lim \sum f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (24)$$

Сумма, стоящая в правой части, называется интегралом от $a = OP$ до $b = OQ$ и обозначается через $\int\limits_a^b f(x)dx$

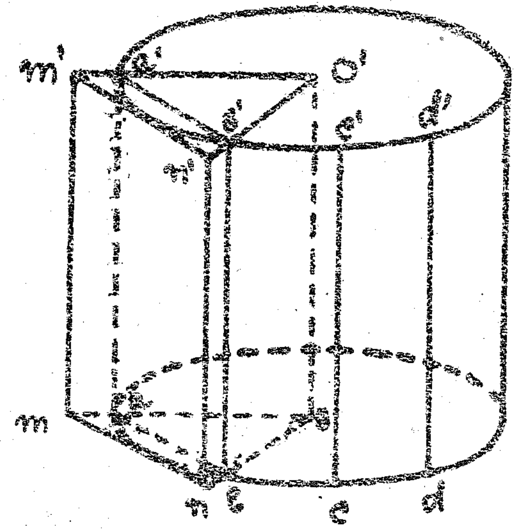
§24. Объемы цилиндра и конуса.

Доказательство того, что объем цилиндра (необязательно кругового) равен произведению основания S на высоту h.

$$V = S \cdot h \qquad (25)$$

ведется тоже по схеме Дюгамеля.

Взяв (черт. 26) на нижнем основании точку и, проводя прямую, параллельную образующей OO', получаем точку на верхнем основании O'. Построив и в нижнем и в верхнем основании вписанные и описанные многоуголь-



черт. 26

ники так, что соответственные их верши-

ны (a,a'), (b,b'), (c,c') ------ будут на прямолинейно-образующих aa', bb', cc', ------.
Мы разобьем цилиндр на ломтики $d_j = Oab\,O'a'b'$; ..
В каждый из которых будет входить призмочка $\underline{d}_j = Oab\,O'a'b'$ и из которого будет выходить призмочка $\bar{d}_j = Omn\,o'm'n'$. Совершенно также, как в предыдущем §23, мы проходим через ряд равенств и неравенств (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), но в которых S означает объем цилиндра d_j ломтики $\underline{d}_j$ входящую, а $\bar{d}_j$ выходящую призмочку, которые оказываются все эквивалентными.
Таким образом (меняя обозначения)

$$v = \lim \sum \underline{d}_j \qquad (26), \text{ но}$$

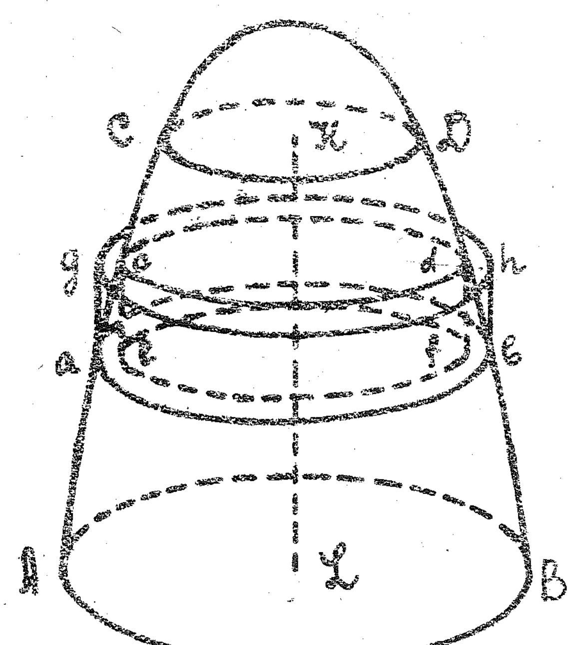
но $\underline{d}_j = \Sigma$ $\quad \underline{d}_j = \underline{G}_j \cdot h$, где $\underline{G}$ - Oab, а h - высота цилиндра. Из полученного равенства

$$v = \lim \sum \underline{G}_j \cdot h = h \cdot \lim \sum \underline{G}_j$$

замечая, что $\lim \sum \underline{G}_j = S$, получаем формулу (25)

$$v = S \cdot h$$

§25. Общий метод определения объемов.



Общий метод определения объемов тел, ограниченных двумя паралельными плоскостями AB, CD и поверхностью ACBD (черт. 27) состоит в следующем. Объем паралельными AB и CD плоскостями делится на слои: α_j. Эти слои заменяются эквивалентами входящими $\underline{\alpha}_j$ = efcd или выходящими $\overline{\alpha}_j$ = aвgh элементарными цилиндрами и ищется предел суммы этих элементарных цилиндров.

Если высоту KL разделим на n частей, то обозначая через $S_1, S_2, \ldots\ldots S_n$ сечения на высоте $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \ldots\ldots h$ мы получим, что

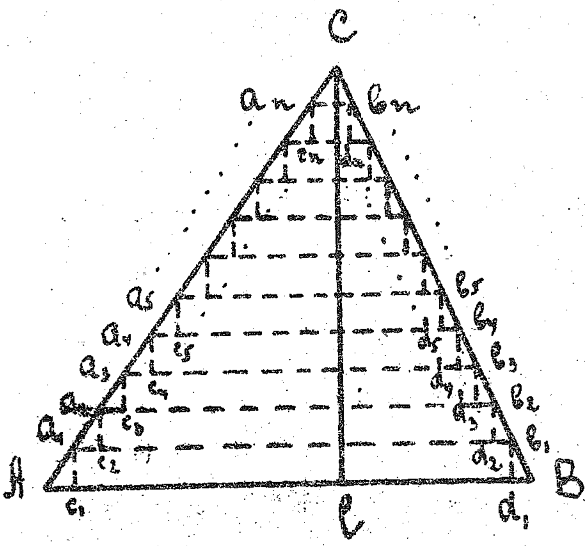
$$V = \lim \frac{h}{n}\left[S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n\right] \quad (27)$$

То что $\alpha_j = \underline{\alpha}_j = \overline{\alpha}_j$ (в этом опять убеждаемся неравенствами (17), (18) и равенством (19).

Очевидно $\frac{\overline{\alpha}_j}{\underline{\alpha}_j} = \frac{\overline{\sigma}_j}{\underline{\sigma}_j}$, где $\overline{\sigma}_j$ и $\underline{\sigma}_j$ основания ab и ef так, как оба элементарных цилиндра имеют туже высоту.

§26. Площадь треугольника

Та-же схема Дюгамеля применяется к выводам площади треугольника и треугольной пирамиды. Высота треугольника делится на n частей. Через точки деления проводятся прямые a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ..., параллельные основанию и строятся входящие прямоугольники $\underline{d}_j$ (а также и выходящие $\bar{d}_j$). Доказывается эквивалентность полос d_j, на которые делится треугольник $\underline{d}_j$ и $\bar{d}_j$,



черт. 28

вследствие чего площадь треугольника определяется по формуле $S=\lim\sum\underline{d}_j$, а так как $\underline{d}_j = l_j\frac{h}{n}$, а $l_j = a_jb_j$ определяется из пропорции $l_j : l = (n-j):n$, то

$$\underline{d}_j = \frac{(n-j)}{n}\cdot h \qquad (28)$$

$$S = h\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2} \qquad (29)$$

Этот последний предел определяется очень просто. Для сумма арифметической прогрессии имеем:

$$\sigma_1 = 1+2+3+\dots\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

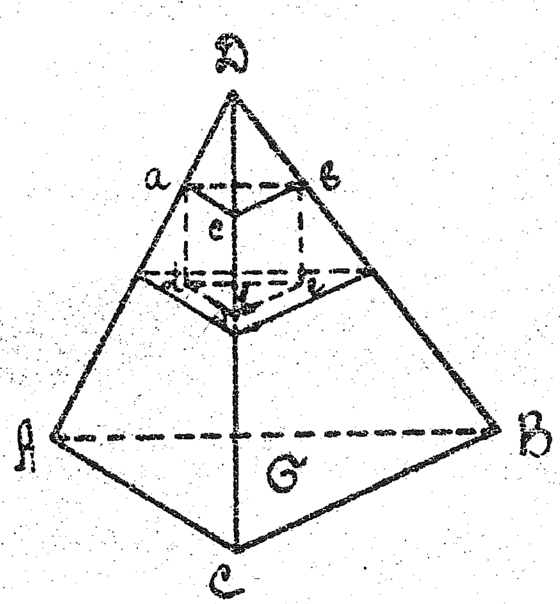
$$\lim \frac{\sigma_1}{n^2} = \lim \frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \qquad (30)$$

и для площади треугольника на основании рав. (28) выводим известную формулу

$$S = \frac{l \cdot h}{2}$$

§27. Объем треугольной пирамиды.

Проведем аналогичное рассуждение для треугольной пирамиды. Здесь на месте полос будут слои, на которые делим пирамиду плоскостями проводимыми через точки деления, разделенной на n частей, высота. Каждую такую полоску заменяем эквивалентом-входящей призмочкой $aef abc = \alpha_j$ так, что $V = \lim \Sigma \alpha_j$



черт. 29

здесь $\underline{\alpha}_j = \underline{\sigma}_j \cdot \frac{h}{n}$ где $\underline{\sigma}_j$ - основание этих призмочек. Но вместо пропорции (28) имеем

$$\underline{\sigma}_j = \sigma = \frac{(n-j)^2}{n^2} h^2 \; ; \; h^2 = (n-j)^2 : n^2 \text{ и}$$

$$\underline{\sigma}_j = \frac{(n-j)^2}{n^3} h^2 \text{ так, что}$$

$$V = \lim \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} \cdot \sigma \cdot h \qquad (31)$$

§28. Сумма квадратов натуральных чисел.

Главное затруднение здесь в определении $\sigma_2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2$.

Можно свести эту задачу к известной задаче об определении суммы арифметической прогрессии $\sigma_1 = 1+2+3+\ldots n-1$, но, правда искуственным путем. Пишем:

$$\cancel{(1+1)}^3 = 1^3+3\cdot1^2\cdot1+3\cdot1\cdot1^2+1^3$$

$$\cancel{(2+1)}^3 = \cancel{2}^3+3\cdot2^2\cdot1+3\cdot2\cdot1^2+1^3$$

$$\cancel{(3+1)}^3 = \cancel{3}^3+3\cdot3^2\cdot1+3\cdot3\cdot1^2+1^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n-1+1)^3 = n^3 = \cancel{n-1}^3+3(n-1)\cdot1^2+1^3$$

Складывая почленно, уничтожая в левой и в правой частях общие члены и собирая члены по колонкам, получаем:

$$n^3-n = 3\sigma_2+3\sigma_1.$$

Разделим обе части этого равенства на n^3 и перейдем к пределу

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=3\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_2}{n^3}+3\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_1}{n^3}$$

но левая часть $=1$, а в правой на основании формулы (30)

$$\lim\frac{\sigma_1}{n^3}=0$$

Таким образом

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_2}{n^3}=\frac{1}{3}\quad(32)$$

На основании последней формулы из равенства (31) получаем формулу для объема треугольной пирамиды

$$V=\frac{\sigma\cdot h}{3}\qquad(33)$$

§29. Обоснование принципа Кавальери.

Изложенный в §20 принцип Кавальери получает следующее обоснование.

На ab, $a'b'$ (черт. 23) строим входящие и выходящие элементарные цилиндры $(\underline{\alpha}_j, \bar{\alpha}_j)$ $(\underline{\alpha}'_j, \bar{\alpha}'_j)$

$$V=\lim\sum\alpha_j\ ,\quad V'=\lim\sum\alpha'_j$$

По лемме интегрального исчисления в силу того, что $\alpha_j\equiv\underline{\alpha}_j$ и $\alpha_j\equiv\underline{\alpha}_j$

$V=\lim\sum\underline{\alpha}_j$, $V'=\lim\sum\underline{\alpha}'_j$, то $\underline{\alpha}_j=\underline{\alpha}'_j$.

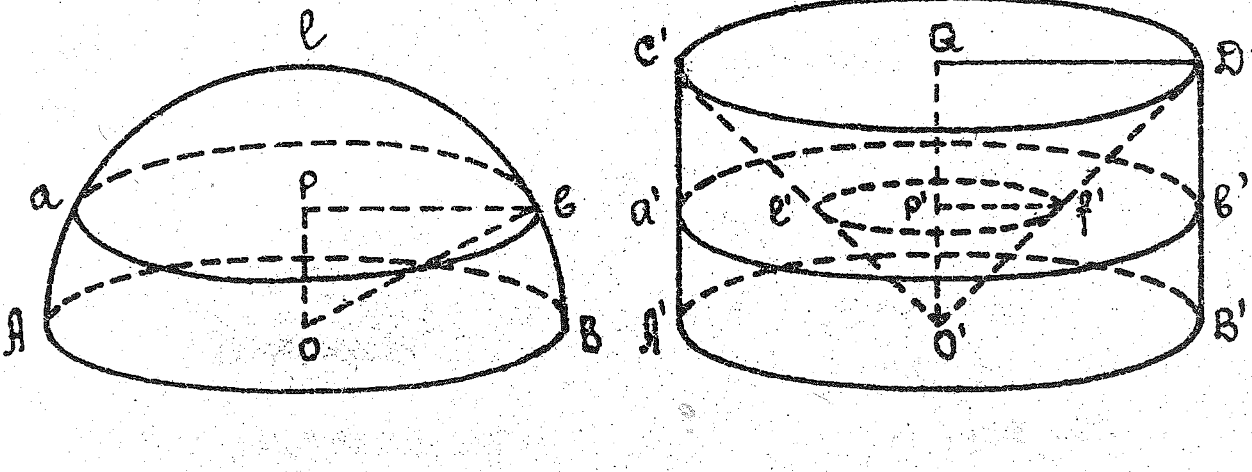
Так как мы имеем два цилиндра с равновеликими по условию основаниями (ab),(a',b') и равными высотами. Поэтому

$$V = V'$$

и принцип Кавальери таким образом доказан.

§30. Объем шара.

Объем шара можно выводить обычным путем. Затем можно применять метод §25, разделяя полусферу на слои и заменяя их эквивалентами входящими или выходящими цилиндрами. Задача, как в случае треугольной пирамиды сводится к определению:
$\sigma_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2$. Самый простой вывод основывается на принципе Кавальери.
Помещая между двумя параллельными пло-



черт. 30.

скостями полусферу ABC и цилиндр $A'B'C'D'$ с основанием того радиуса, что и шар и с высотой равным радиусу R с входящим в него конусом $C'D'O'$, имеющим своим основанием верхнее основание цилиндра, а вершиной центр нижнего основания (черт. 30).

На основании принципа Кавальери мы делаем это заключение, убедившись что круг ab получает в сечении сферы плоскостью $aba'b' \parallel ABA'B'$ равновелик кольцу $a'b'e'f'$, полученному в сечении цилиндра с конусом.

В самом деле на основании теоремы Пифагора $pb = r = \sqrt{R^2 - h^2}$ где $h = OP$ и

S (площадь ab) $= \pi(R^2 - h^2)$.

С другой стороны

$$S' (\text{площадь круга } a'b') = \pi R^2$$

$$S'' (\text{площадь круга } e'f') = \pi \rho^2$$

где $\rho = p'f'$, то так как угол $p'O'f = \frac{\pi}{4}$ $(OD = OQ = R)$, то $\rho = h$ и площадь колечка

$$a'b'e'f' = S' - S'' = \underline{\pi R^2 - \pi h^2 = S}.$$

замечая, что объем цилиндра равен

$\pi R^2 \cdot R = \pi R^3$, а

Объем конуса $\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} R = \frac{1}{3}\pi R^3$.

Мы получаем для объема полусферы $2/3 \pi R^3$, для объема всего шара

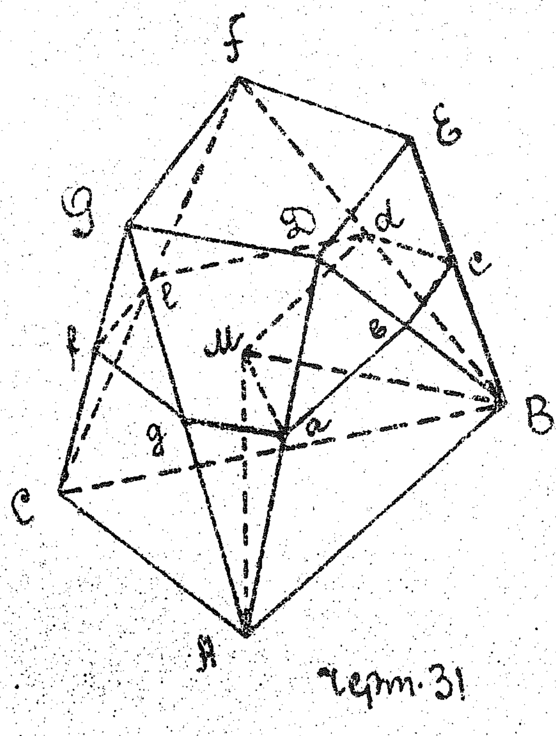
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (34).$$

§31 Призматоида

Чтобы расширить область применения изложенных методов мы ознакомимся с понятием призматоида.

Призматоид в узком смысле — тело, имеющее своими основаниями два многоугольника в параллельных плоскостях, а боковыми гранями треугольники.

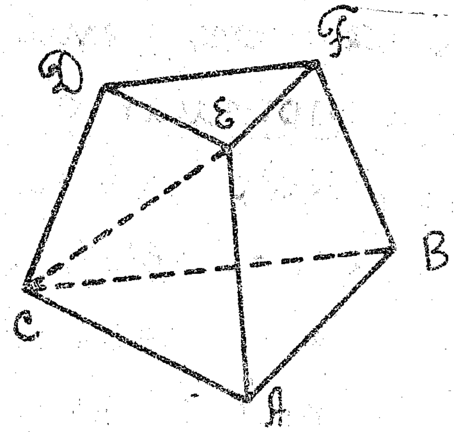
Призматоид, представленный на черт. 31 имеет низшим основанием треугольник ABC, верхним четырехугольник GDEF боковыми гранями тре-ки: CAG, AGD, ADB, BDE, DEF, CFB и GFC. Под



черт. 31

понятие призматоид подходит, конечно, призма, пирамида (верхнее основание обращается в точку), усеченная параллельно основанию пирамида, при условии, если мы четырехугольные грани, например, CADE будем рассматривать, как состоящие из треугольников ADE и CAE, случайно оказавшиеся в одной плоскости (черт. 32)

Призматоид в широком смысле получается, если на ряду с треугольными боковыми гранями мы имеем еще грани, образованные <u>косыми плоскостями</u>, линейчатыми поверхностями образованными движением прямой



черт. 32

пересекавшей два ребра и остающейся параллельной основаниям призматоида ABC и DEF.

§32. Объем призматоида в узком смысле.

Если обозначить через h высоту призматоида, нижнее основание призматоида через g, верхнее через E, а среднее, т.е. полученное пересечением плоскостью, равноотстоящей от оснований $abcdef$ через M, то получим следующую формулу для объема призматоида

$$V = \frac{1\cdot g + 4M + 1\cdot E}{6}\cdot h \qquad (35)$$

Для доказательства точка М срединной плоскости соединяется с вершинами многоугольника abcdefg и проводятся плоскости через М и боковые ребра исследуемого тела. Тогда призматоид разбивается на пирамиды.

<u>Основные</u>:– MgFDE и MABC и <u>боковые</u>, как MABD и т.д.

Сумма объемов основных пирамид равна

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}hg+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}hE$, ибо высоты их равны $\frac{1}{2}h$

Для определения же объемов боковых пирамид например, MgFDE замечаем, что

$$\frac{\text{об. } MABD}{\text{об. } MabD}=\frac{\text{пл. } ABD}{\text{пл. } abD}=\frac{AD^2}{aD^2}=4$$

а затем принимая уже за основание пирамиды MabD – Mba, а за высоту $\frac{h}{2}$, находим, что

$$\text{об. } MABD=\frac{4}{6}h\ \text{пл.} abM$$

Суммируя же объемы всех боковых пирамид и замечая, что

$abM+bcM+\ldots+fgM=M$ (площадь среднего сечения) получаем для их суммы $\frac{4}{6}Mh$, а для всего объема формулу (35)

§ 33. Формула Симпсона для объемов.

Объем для призматоида в его общем смысле мы выведем из формулы Симпсона, которой сейчас займемся.

Это точная формула для того случая когда площадь сечения S выражается многочленом второй степени от высоты сечения x, т.е. когда $S = a + bx + cx^2$ (36).

В этом случае поступая так, как указано в §25, т.е. беря сечение на высоте

$\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}, \dots \frac{n-1}{n}h, h$ мы выразим объем тела, ограниченного некоторой поверхностью и двумя плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии h формулой:

$$V = \lim h \sum_{j=1}^{j=n-1} \left[a + \frac{b \cdot jh}{n} + \frac{cj^2h^2}{n^2}\right] \frac{1}{n}$$

или

$$V = \lim \left[ha + bh^2 \sum_{j=1}^{j=n-1} \frac{j}{n^2} + ch^3 \sum_{j=1}^{j=n-1} \frac{j^2}{n^3}\right]$$

$$V = ah + bh^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_1}{n^2} + ch^3 \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_2}{n^3} \qquad (37)$$

Но согласно формул (30) и (32) получаем

отсюда $V = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3}$ (38)

Теперь обозначая как в предыдущем §32 через g нижнее, через E верхнее основание, а через M среднее сечение, получим для верхнего основания, полагая в уравнении (36) $x = h$

$$F = a + bh + ch^2 \quad (39)$$

для нижнего, полагая в (36) $x = 0$

$$g = a \quad (40)$$

Для среднего, полагая в (36) $x = \frac{h}{2}$

$$M = a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} \quad (41)$$

Если теперь составить

$E + 4M + g = 6a + 3bh + 2ch^2$ и умножить на $\frac{h}{6}$, то как раз получим V, определяемое формулой (38).

§39. Приложение формулы Симпсона

Под формулу Симпсона подходят все известные формулы для объемов в элементарной геометрии.

Для цилиндра площадь сечения постоянная.

$b = 0$, $c = 0$

$$V = \frac{h}{6}(g + 4g + g) = hg = \underline{\pi R^2 h}$$

Для конуса (черт. 33)

$$\frac{r}{R} = \frac{h - x}{h}$$

$S = \pi r^2 = \pi R^2 \frac{(h-x)^2}{h^2}$

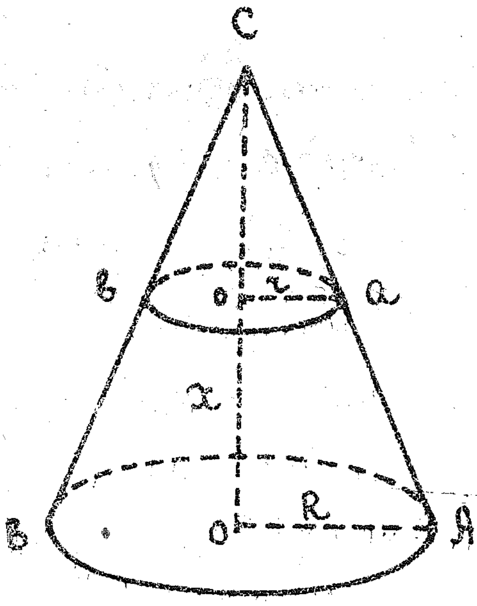
т.е. S многочлен второй степени от X. Поэтому

$V = \frac{h}{6}(g+4M)$ т.к. $E=0$

Что касается до среднего сечения М, то т.к. для среднего сечения $r=\frac{R}{2}$, то

$M=\pi\frac{R^2}{4}$ и

$V=\frac{h}{6}2\pi R^2 = \underline{\frac{1}{3}\pi R^2 h}$



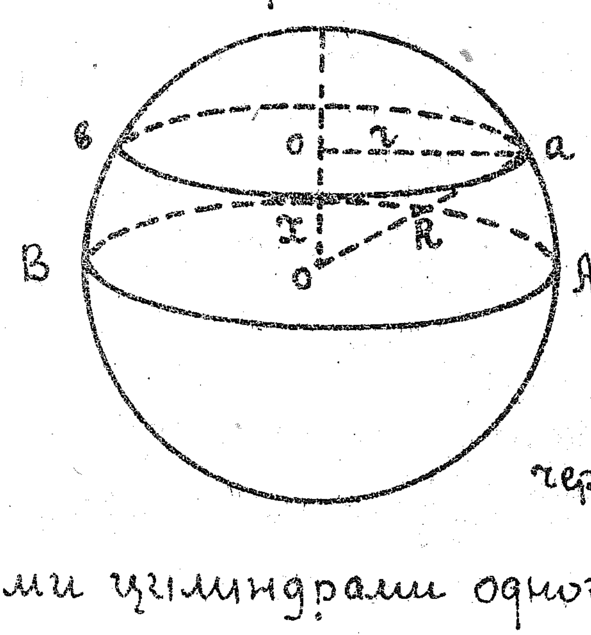
черт. 33.

Тоже имеет место для шара (черт. 34). Радиус сечения r на основании теорема Пифагора определяется по формуле $r=\sqrt{R^2-x^2}$, так что площадь сечения ав равна $\pi(R^2-x^2)$, т.е. она выражается многочленом второй степени от X.

$V=\frac{h}{6}(g+4M+E)$

$g=E=0$; $M=\pi R^2$; $h=2R$

так что $\underline{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$.



черт.34.

Самым интересным примером являегся определение объема тела, образующегося двумя пересекающимися круглыми цилиндрами одного и того же рад. R с взаимноперпендикулярными осями. Общая часть этих цилиндров –

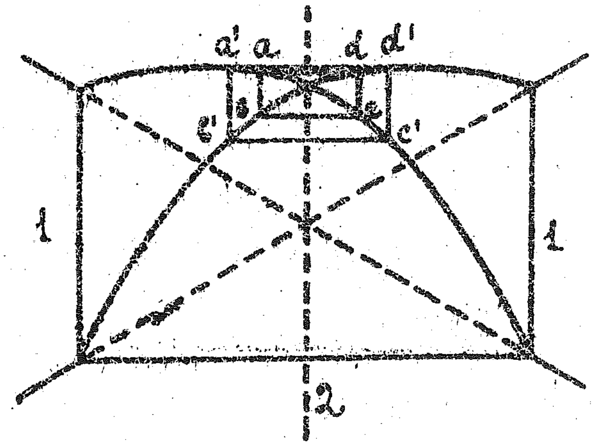
подушкообразное тело, ограниченное четырьмя вырезанными из цилиндрической поверхности двуугольниками. Краями служат эллипсы.

При пересечении этого тела плоскостью параллельной осям цилиндров и проходящей на расстоянии x, получается в сечении квадрат сторона которого равна $2\sqrt{R^2-x^2}$, где x расстояние от плоскостей, содержащих оси цилиндров.

В самом деле для определения вс мы должны провести плоскость, перпендикулярную к оси первого цилиндра, которая пересечет его по окружности (черт. 35).

Направление вс по образующей второго цилиндра и потому параллельна его оси.

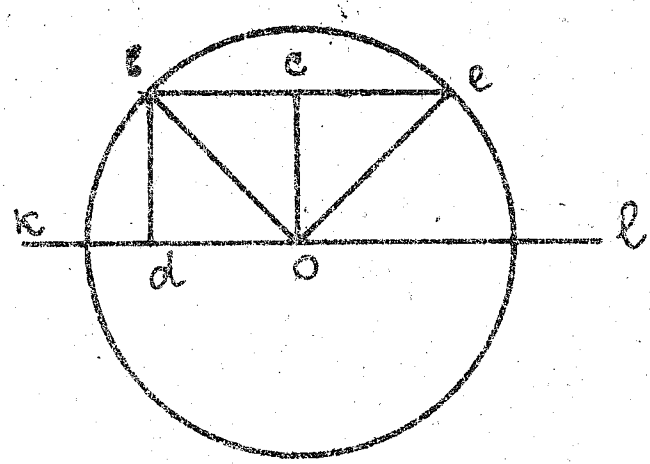
Если опустить из в перпендикуляр на диаметр кругового сечения первого цилиндра кв, то вd будет находиться в плоскости, перпендикулярной к оси первого цилиндра и будет



черт. 35.

перпендикулярна к этой оси, с другой стороны, как перпендикулярная к bc параллельной оси второго цилиндра перпендикулярна и к последней. Таким образом bd как перпендикуляр к плоскости, содержащей оси цилиндров, равна x.

Из Δbeo в котором $oc = bd$, $bc = \sqrt{\overline{eo}^2 - \overline{co}^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$, а $bc = 2be = 2\sqrt{R^2-x^2}$. Площадь всего квадрата $abcd$ равна $4(R^2-x^2)$ т.е. опять подходит под формулу (36)



черт. 35.

По формуле Симпсона

$$V = \frac{h}{6}[g + 4M + E]$$

где $g = 0$; $E = 0$, а $M = 4R$, $h = 2R$, так что

$$V = \frac{16}{3}R^3$$

т.е. объем равен $2/3$ объема описанного куба. Следует обратить внимание на то, что объем этого тела, ограниченного кривыми поверхностями, не содержит числа π, а напротив тело находится в рациональном отношении к объему куба.

§40. Объем призматоида в общем смысле

Мы получили для призматоида, для его объема формулу (35) §32 и при этом не только для призматоида в узком смысле, но и в широком смысле, когда боковыми гранями служат косые плоскости, если

1) заметим, что ввиду что, образующие параллельны основаниям, сечение параллельное основаниям, будет пересекать грани как раз по этим образующим,

если 2) мы докажем, что площадь сечения определяется опять по формуле (36).

Что это так, это устанавливается следующим рассуждением:

на плоскость ABC проектируем сечение abcdefg (черт 31).

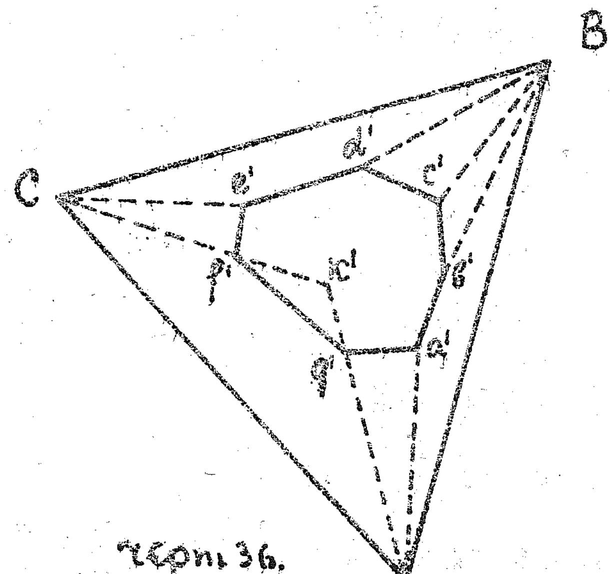
Тогда в проекции воспроизведется сам проектируемый многоугольник, т.к. плоскость проекции параллельна его плоскости.

Ребра спроектируются в Ad', Aa', Be', Be' и т.д.

Если призматоид общего типа, то приходится исключать некоторые из этих ребер и вместе с тем и некоторые треугольники, например, Ada, заменив ломаную da в прямой дв и т.д. Разность площадей ABC и a'b'c'd'e'f'g' определится как сумма четыреугольников вроде CAf'g' и треугольников, как Ag'a'. Четыреугольник CAf'g' представляем разностью треугольников CK'A и f'K'g'. Если обозначить угол при K через φ, то мы для Cf'g'A получим разность

$\frac{1}{2}CK' \cdot CA \sin\varphi - \frac{1}{2} f'K' g'K' \sin\varphi$; φ и первый член величины постоянные,

что касается до fK и gK, то их можно выразить с помощью x, расстоянием f или g от плоскости ABC.



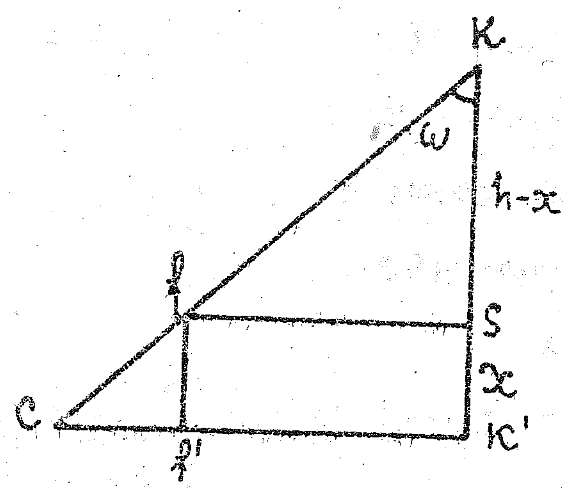
черт. 36.

Из $\triangle fKS$ (где KS проектирующая к прямая) следует, что $f'K' = fS = (h-x)\operatorname{ctg}\omega$.

Таким же $g'K' = \frac{h-x}{\operatorname{tg}\omega'}$, и

$$f'K'g'K = \frac{(h-x)^2}{\operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\omega'}$$

представляет многочлен второй степени.



черт. 37

Площадь же треугольника

$$Ad'a' = \frac{Ad' \cdot Aa' \sin\psi}{2}$$ где ψ - угол при A.

Ad' и Aa' мы выразим опять многочленом второй степени через x, так как

$$d'A = \frac{x}{tg\,\omega'}, \quad Aa' = \frac{x}{tg\,\omega''} \quad \text{и т.д.}$$

В результате выражения таким образом всех членов разности площадей ABC и $abcdefg$ получаем для $abcdefg$ формулу (36)

§41. Общий принцип теории пределов.

Оперирование актуально бесконечно малыми, как это делают Кеплер и Кавальери (§19,20), является в настоящее время с научной точки зрения недопустимым.

Метод исчерпывания с методической точки зрения благодаря и своей громоздкости и оторванности от тех идей, в которых мы должны воспитывать учащегося, является неприемлемым.

Остается теория пределов. Но теория пределов тоже может оказаться неприемлемой, если брать ее во всей ее строгости. В этом отношении приходится идти на компромисс, а именно пользоваться общим принципом теории пределов: по которому то свойство Я, которое принадлежит переменным X, Y, Z... при всем их изменении имеет место и в пределе. Позволив пользоваться этим принципом уже не доказывают, что:

$$\lim(x+y) = \lim x + \lim y$$

$$\lim x \cdot y = \lim x \cdot \lim y \quad \text{и т.д.}$$

Если x и y в сумме образуют z, то и в пределе тоже, т.е.

$$\lim z = \lim(x+y) = \lim x + \lim y$$

Тоже следует сказать и о второй формуле.

§42. Теорема Гюльдена для объемов.

Существует одна очень важная формула позволяющая быстро определять объемы и в тех случаях, когда формула Симпсона нам ничего не дает. Это теорема Гюльдена.

„Объем описываемый площадью плоской кривой, вращающейся около оси, находящейся вне ее на той же плоскости, равняется произведению этой площади на окружность, описываемую ее центром тяжести".

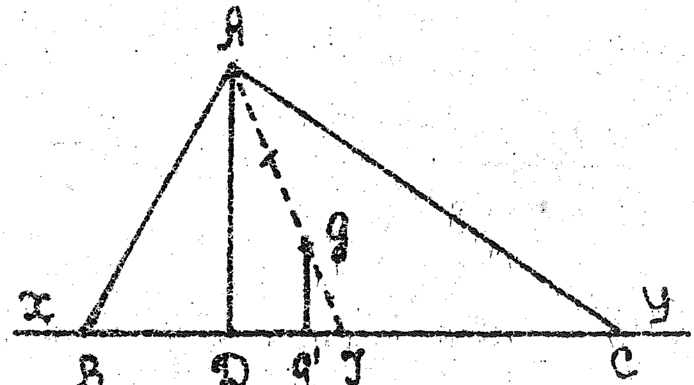
Мы доказываем эту теорему для многоугольника. Правильность ее для кривой с точки зрения метода неделимых вытекала бы из того, что кривая - это многоугольник с бесконечным числом бесконечно-малых сторон. Мы докажем ее строго только для многоугольника, а скачек к кривой сделаем на основании только общего принципа пределов. Для этой цели следует сперва рассмотреть случай тре-ка.

Объем описываемый треугольником, вращающимся около внешней оси в его плоскости равен произведению его площади на окружность, описываемую центром его тяжести.

Приходится рассматривать три случая:

1) Одна из сторон BC совпадает с осью вращения (черт. 38). Объем, описываемый ΔABC, вращающимся около xy равен сумме конусов с основанием AD и высотами BD и DC и равен поэтому

$$\frac{1}{3}\pi AD^2 BD + \frac{1}{3}\pi AD^2 DC = \frac{1}{3}\pi AD(BD + AC) = \frac{1}{3}\pi AD^2 BC$$



черт. 38

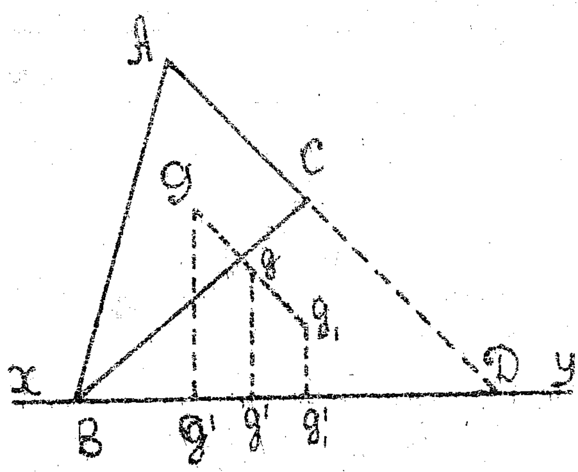
Если обозначить через S площадь треугольника, равную $\frac{AD.BC}{2}$, то получим $\frac{2}{3}\pi AD \cdot S$.

Если теперь g центр тяжести ABC, то как известно g на медиане AI, причем

$gI = \frac{1}{3}AI$, вследствие чего и $gg' = \frac{AD}{3}$. В результате объем тела, описываемого △ABC равен $S\cdot 2\pi\cdot gg'$, что и утверждает для этого случая теорема Гюльдена.

2) Треугольник имеет только одну вершину B на оси вращения (черт. 39). Продолжаем сторону AC до встречи в D с осью XY.

черт. 39.



Тогда объем ABC = =об. ABD - об. CBD.

Если g, g_1 - центры тяжести △ABD и △CBD, то согласно первому случаю

$$\text{Об. } ABC = (ABD\,gg' - CBD\,g_1g_1') \quad (42)$$

Но △ABD состоит из △BCD и △ABC. Для первого центр тяжести g_1, для второго g. Поэтому по самому определению центра тяжести

$$ABD\,gg' = ABC\,gg' + CBD\,g_1g_1' \quad \text{и формула (42)}$$

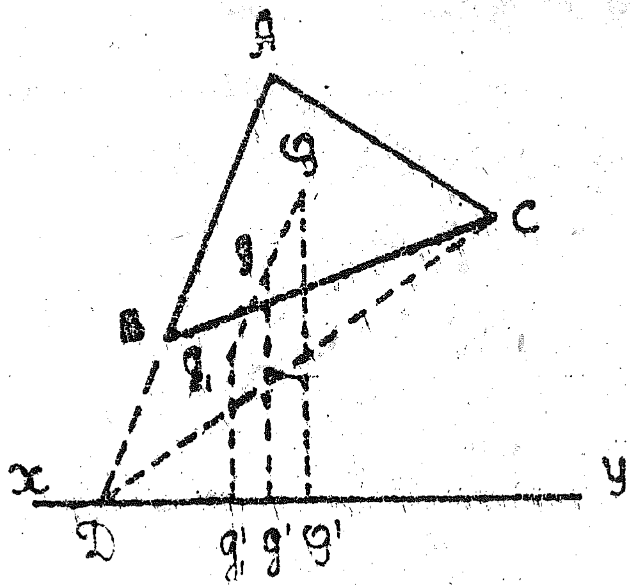
дает $\text{об. } ABC = ABC\cdot 2\pi\, gg'$ т.е. опять теорему Гюльдена

3) Наконец может случится, что ось XY не имеет общих точек с треугольником

Продолжим сторону АВ до пересечения в D с осью XY и проведем CD (черт. 40).

Об. ABC = об. ACD − об. BCD.

На основании второго случая мы имеем, обозначая через g и g_1 центры тяжести ΔACD и ΔBCD.



черт. 40.

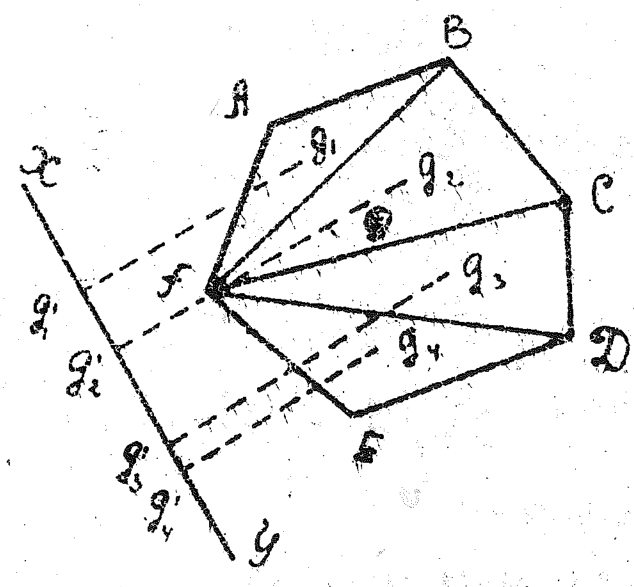
$$\text{Об. } ABC = 2\pi(ACDgg' - BCDg_1g_1') \quad (43)$$

Так как ΔACD составлен из ΔBDC и ΔABC, то

$$ACDgg' = ABC\,GG' + BCDg_1g_1'$$ и поэтому формула (43) дает опять теорему Гюльдена.

$$\text{Об. } ABC = ABC \cdot 2\pi \cdot GG'.$$

Дальше эта теорема распространяется вообще на многоугольник. Для этой цели многоугольник ABCDEF следует разбить на треугольники FAB, FBC, FCD, FDE и определить по теореме Гюльдена объемы, полученные их вращением. Они будут равны:



черт. 41.

$$V_1 = 2\pi g_1g_1' S_1$$

$$V_2 = 2\pi g_2 g_2' S_2$$
$$V_3 = 2\pi g_3 g_3' S_3$$
$$V_4 = 2\pi g_4 g_4' S_4$$

А весь объем:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 2\pi\left[g_1 g_1' S_1 + g_2 g_2' S_2 + g_3 g_3' S_3 + g_4 g_4' S_4\right]$$

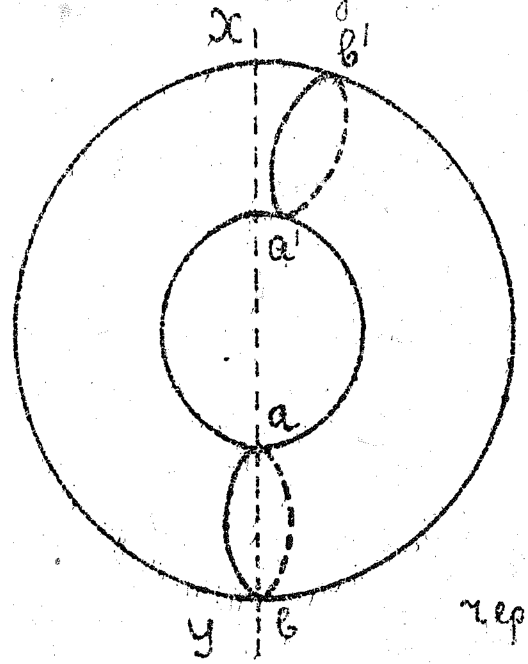
На основании определения центра тяжести

$$S g g' = g_1 g_1' S_1 + g_2 g_2' S_2 + g_3 g_3' S_3 + g_4 g_4' + \ldots\ldots$$ так что

опять $\underline{V = 2\pi g g' S}$.

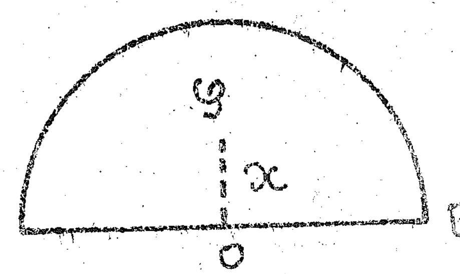
§43. Приложения теоремы Гюльдена

Существуют двух типов приложения теоремы Гюльдена. Можно с помощью ее определять объемы. Очень просто находится объем тора, тела полученного вращением круга около оси, находящейся в его плоскости (черт. 42) (Так как центр тяжести круга в его центре, то если обозначить расстояние последнего от оси через d, а через r радиус круга, то получим для объема тора: $V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d$.



черт. 42.

Можно с помощью той же теоремы определять <u>центры тяжести</u>. Найдем центр тяжести полуокружности ABC. Конечно центр тяжести ABC следует искать на оси симметрии на $gO \perp AB$ (прямой проходящей через центр и перпендикулярной диаметру). (черт. 43).



черт. 43

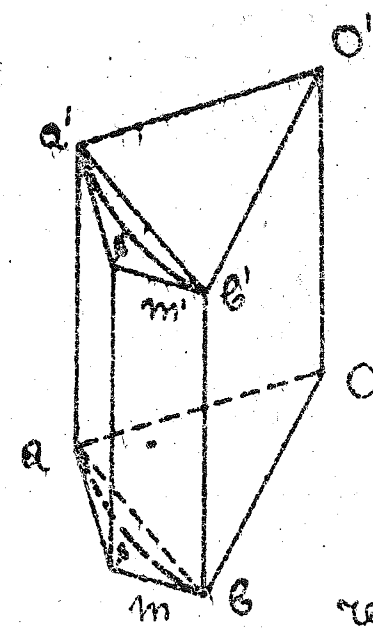
Площадь полуокружности $\frac{\pi r^2}{2}$. Поэтому по теореме Гюльдена $\frac{\pi r^2}{2} \cdot 2\pi x = \frac{4}{3}\pi r^3$ и

$$x = \frac{4r}{3\pi}$$

§44. Трудности при выводе величин поверхностей

При выводе формул для поверхностей цилиндра или конуса методом пределов встречаются трудности, которые <u>заставляют возвести в определение то, что должно доказываться</u>, т.е. например определяют поверхность цилиндра как предел боковой поверхности вписанной в нее призмы. Применение схемы Дюгамеля здесь встречает серьезные затруднения. Приходится выдвинуть <u>стереометрический аналогон 1го постулата Архимеда</u>, постулировать, что выпуклая объемлющая поверхность больше выпуклой объемлемой.

Согласно схеме Дюгамеля U(поверхность) $= \lim\sum\alpha_j$, где α_j полоса на цилиндре между образующими, соединяющими вершины вписанных в верхнее и нижнее основание многоугольников $a'b'c'd'\ldots$ и $abcd\ldots$ (черт. 44). За эквиваленты мы примем грани вписанной призмы $aba'b'$ — $\underline{\alpha}_j$



черт. 44.

$$U = \lim\sum\underline{\alpha}_j = \lim\sum x_j h,$$ где h - высота (или что тоже образующая цилиндра), x_j - хорда ab. Далее $U = h\lim\sum x_j = hL$, так как

$\lim\sum x_j = L$ (окружность основания)

Но очень трудно здесь доказать, что

$$\underline{\alpha}_j \equiv \alpha_j$$

Приходится принимать за второй эквивалент $\overline{\alpha}_j$ два прямоугольника $aa'mm'$, $bb'mm'$, образованные полуграням описанной призмы и исходить из неравенства (объемлющая больше объемлемой)

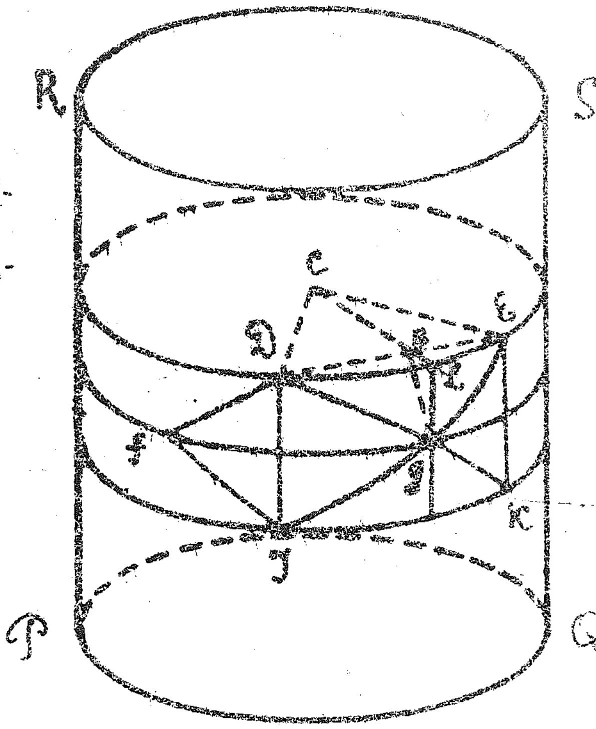
$$aa'bb' < a\beta ba'\beta'b' < a'amm' + bb'mm' +$$
$$+ a\beta b + a'\beta'b' \qquad + amb + am'b'$$

и $\underline{\alpha}_j < \alpha_j + \omega_j < \bar{\alpha}_j + \bar{\omega}_j$ и деля на $\underline{\alpha}_j$ убеждаемся, что $\lim \frac{\bar{\alpha}_j}{\underline{\alpha}_j} = 1$; $\lim \frac{\omega_j}{\underline{\alpha}_j} = 1$; $\lim \frac{\bar{\omega}_j}{\underline{\alpha}_j} = 1$

Мы не воспроизводим всех выкладок. Ясно только, что этот (причем наиболее простой) путь, на который указывает схема Дюгамеля не может быть внесен в класс.

§45. Цилиндр Шварца.

Следует относиться с большой осторожностью к общему принципу - рассматривать величину круговой поверхности как предел величины поверхности вписанного в нее многоугольника при увеличении числа граней и при уменьшении последних. Шварц первый выяснил на примере, что при некотором законе увеличения числа граней и уменьшении их это положение оказывается неправильным. Берем круговой цилиндр PQRS с радиусом основания r и высотой h. Делим высоту на n частей, а окружность на m частей (черт. 45). Проводя через точки деления высоты плоскости, параллельные основанию, мы делим поверхность на полосы и в полосу вписываем треугольники: FDG, DGE, GEK, ... и т.д., соединяя точки деления окружности одного сечения с точками деления, передвинутыми относительно первых на угол $\frac{\pi}{m}$. Все эти треугольники будут равнобедренные и равные между собой. Основание ΔDgE — $DE = 2r\cdot\sin\frac{\pi}{m}$. Высота его определяется из



черт. 45.

ΔBLg, в котором одним катетом является $\frac{h}{n}$, а другим BL (стрелка).
Но $BL = CL - CB = r - r\cos\frac{\pi}{m} = 2r\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2$, так что

$$gB = \sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4r^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4}.$$

Площадь все ΔgDE равна

$$r\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4r^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4}$$

На всей поверхности имеется $2mn$ таких треугольников и вся поверхность вписанного в цилиндр многогранника выразится формулой

$$V = 2rm.n.\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4r^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4} \quad (44)$$

Положение о том что величина поверхности цилиндра представляет предел такого вписанного многогранника, можем выразить следующим равенством:

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} 2m\cdot n\cdot r\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{h^2}{n^2}+4r^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4}=$$

$$=2r\lim_{m\to\infty} m\sin\frac{\pi}{m}\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\sqrt{h^2+4r^2\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} n^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4}\quad(45),$$

так как $\lim\limits_{m\to\infty} m\cdot\sin\frac{\pi}{m}=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}=\pi$

Но $\sqrt{h^2+4r^2\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} n^2\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4}=\underline{\sqrt{h^2+r^2\pi^4\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{n^2}{4m^4}}}$, так как

$\lim\limits_{m\to\infty} m\sin\frac{\pi}{2m}=\frac{\pi}{2}$, но $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{n^2}{4m^4}$ имеет различные значения, смотря потому, по какому закону возрастают m и n.

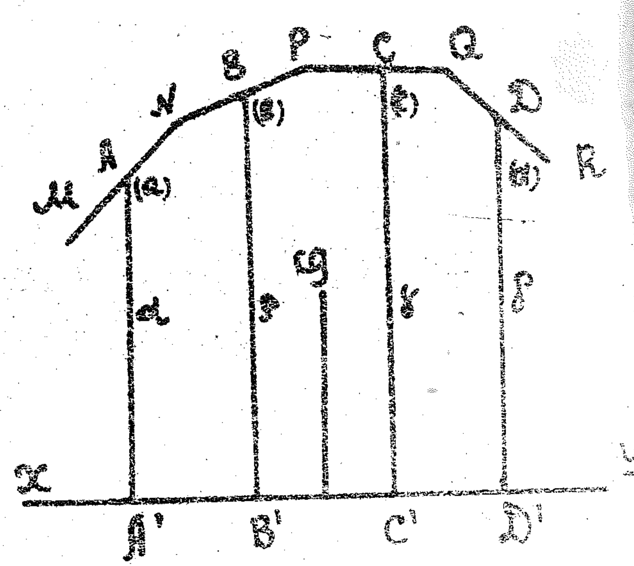
Если $n=m^2$, то этот предел равен $\frac{1}{4}$, но если $n=m$, то он равен $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{4m^2}=0$, если $n=m$ $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m^6}{4m^4}=\infty$ и т.д.

§ 46. <u>Теорема Гюльдена для поверхностей.</u>

Мы теперь перейдем к теореме Гюльдена для поверхностей.

<u>Поверхность, описываемая плоской кривой, вращающейся около внешней оси в ее плоскости равна произведению длины ее на окружность, описываемую центром тяжести.</u>

Как в § 42 мы доказываем теорему для ломаной линии и пользуясь общими принципами теории пределов (§41) мы переходим к случаю кривой. Пусть MNPQR ломаная линия, вращающаяся вокруг xy. Пусть a, b, c, d - длины ее сторон, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - расстояния середин $A, B, C, \ldots$ от оси xy. Поверхность S, описываемая MNPQR представляет из себя сумму поверхностей, описываемых сторонами MN, NP, ——, представляющих усеченные конуса.



черт. 46

$$S = a\,2\pi\alpha + b\,2\pi\beta + c\,2\pi\gamma + \cdots = 2\pi(a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots) \quad (46)$$

Если через ρ обозначить расстояние центра тяжести g ломаной линии от оси, то по самому определению центра тяжести ломаной линии

$$\rho = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots}{a + b + c + \cdots}$$, но тогда

равенство (46) даст $S = (a+b+c+\cdots)2\pi\rho$ или

$S = L \cdot 2\pi\rho$, т.е. теорему Гюльдена

§47. Приложение теоремы Гюльдена о поверхностях

Определим поверхность тора (§43). Нам придется сохранить обозначения §43. Умножить длину, вращающейся окружности $2\pi r$ на путь, описываемый ее центром, являющимся вместе с тем и центром тяжести, $2\pi d$

$$S = 4\pi^2 r d \qquad (48)$$

Теорема Гюльдена вместе с тем дает возможность определить и центры тяжести когда известны поверхности. Найдем центр тяжести полуокружности (черт. 43). Обозначая через x ЭО расстояние Э от оси xy по теореме Гюльдена мы должны иметь $\pi r \cdot 2\pi x = 2\pi^2 r x = 4\pi r^2$, откуда $x = \frac{2r}{\pi}$, причем центр тяжести расположен на перпендикуляре в центре к диаметру AB.

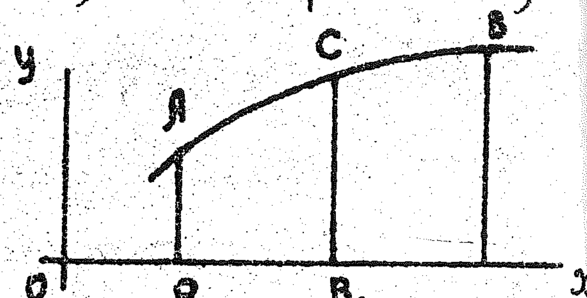
§48. Формула Симпсона для поверхностей.

Мы знаем (§23), что площадь криволинейной трапеции PABQ (черт. 21) определяется по формуле $S = \lim \Sigma \alpha_j$, где α_j - входящие элементарные прямоугольники. Если основание делится на n равных частей, то мы имеем формулу аналогичную (27) $S = \lim \frac{h}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$

Если $y = a + bx + cx^2$, т.е. кривая парабола, то повторяя все выкладки §23, получаем формулу Симпсона для площади.

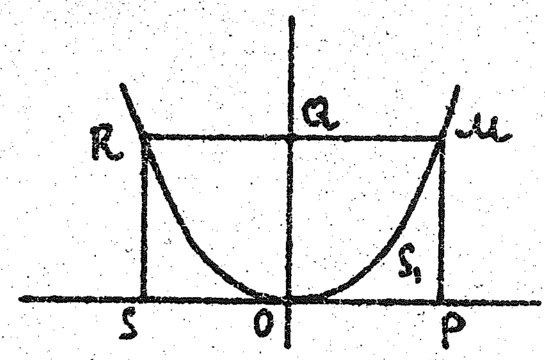
$$S = \frac{h}{6}\left(\gamma + 4\mu + \varepsilon\right) \quad (49)$$ аналогичную (35)

здесь $\gamma = pA$ первая ордината, $\varepsilon = BQ$ крайняя, а $\mu = RC$ средняя. Определим по этой формуле площадь сегмента параболы $2py = x^2$; $OMQR$ (черт. 48).

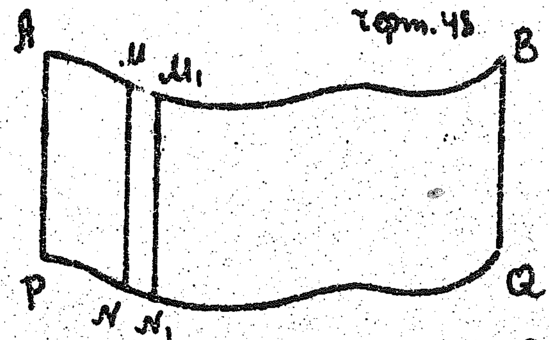


черт. 47

Для этого из площади прямоугольника $OPMQ = ab$ вычитаем площадь OMP, которая определяется по формуле Симпсона (49), в которой $\gamma = 0$; $\varepsilon = b$; $2p\mu = \frac{a^2}{4}$; $\mu = \frac{a^2}{8p} = \frac{b}{4}$; $4\mu = b$.



черт. 48



черт. 49

Таким образом по (49) $S_1 = \frac{a}{6} \cdot 2b = \frac{1}{3}ab$;

$$\frac{1}{2}OMQR = 2\left[ab - \frac{1}{3}ab\right] = \frac{4}{3}ab = \frac{2}{3}SPRM.$$

Этот результат был получен Архимедом. Вместо того, чтобы брать плоскость, можем брать поверхность прямого цилиндра играет прямым образующая l, роль x-дуга $QN = S$ и если $l = a + bl + cl^2$, то поверхность цилиндра может вычислить по формуле Симпсона $S = \frac{h}{6}(\gamma + 4\mu + \varepsilon)$.

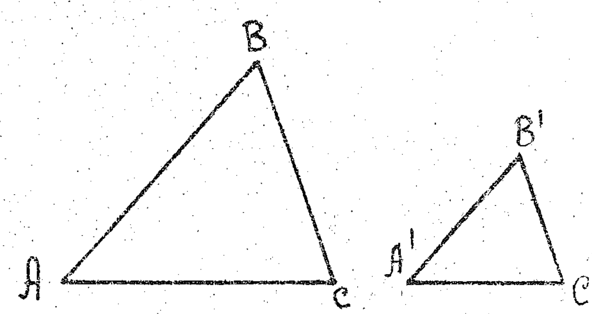
Инверсия

§1. Гомотетия.

Про элементарную математику можно сказать, что она представляет геометрию преобразования подобия. В этом преобразовании остаются инвариантами отношения между соответственными отрезками и углы.

В двух подобных тре-ках ABC и $A'B'C'$ равны отношения сторон:

$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ и равны соответственные углы: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$.

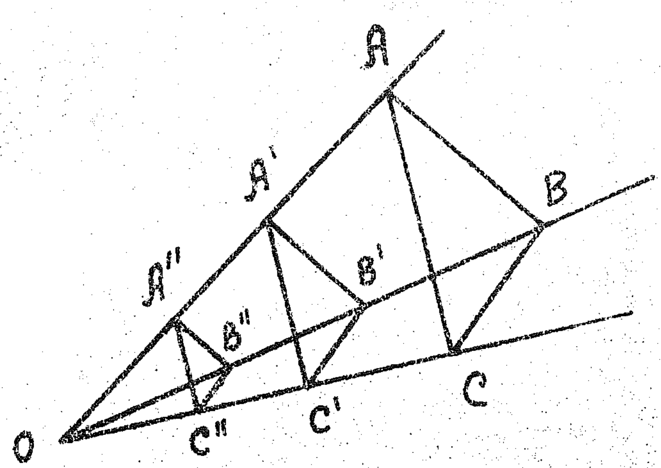


черт. 1.

Всякое подобное преобразование разлагается на
1) гомотетию или подобное преобразование в узком смысле, и
2) движение.

Под гомотетичным преобразованием или подобным в узком смысле разумеется переход от тре-ка ABC к $A'B'C'$ такому, что вершины (A,A'), (B,B'), (C,C') расположены на прямых сходящихся в одной точке O (черт. 2), соответственные стороны параллельны:

$A'B' \parallel AB$,
$A'C' \parallel AC$,
$B'C' \parallel BC$



черт. 2.

Нетрудно видеть, что такие треугольники являются подобными
$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

Так что гомотетичное преобразование является преобразованием подобным в узком смысле. В самом деле $\triangle ACO \backsim \triangle A'C'O'$ и

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{OA'}{OA} = \lambda .$$

Точно таким же образом

$$\frac{A'B'}{AB} = \lambda \quad и \quad \frac{B'C'}{BC} = \lambda , \quad так что$$

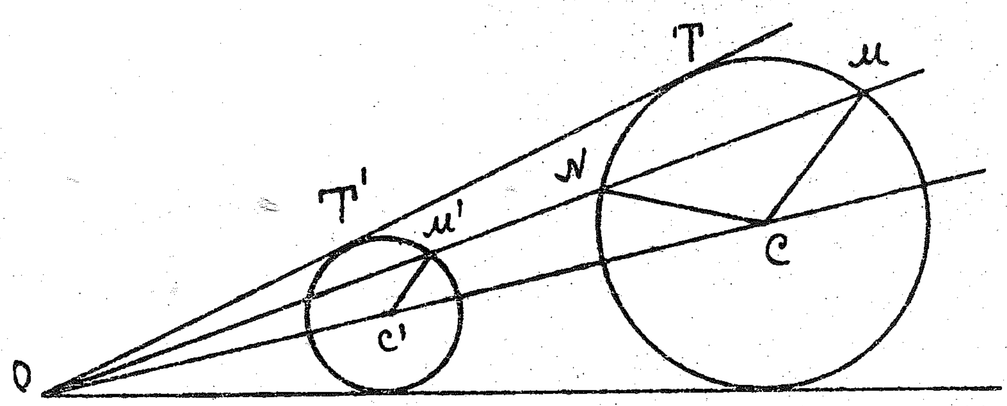
$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \lambda .$$

Можно еще сказать, что надлежащим передвижением подобный треугольник $A'B'C'$ приводится в гомотетичное соответствие с данным ABC. Для этого только следует взять точку A' на OA так, чтобы $\frac{OA'}{OA} = k$, где k - общее значение отношения соответственных сторон затем провести $A'B' \parallel AB$. В точке пересечения OB с $A'B'$ найдем точку B' и т.д.

В самом деле из подобия OAB и $OA'B'$, где B'' эта точка. Имеем $\frac{A'B''}{AB} = \frac{O'A'}{OA} = \lambda$, но так как $\frac{A'B'}{AB} = \lambda$, то $B' \equiv B''$.

§2. Обратная гомотетия.

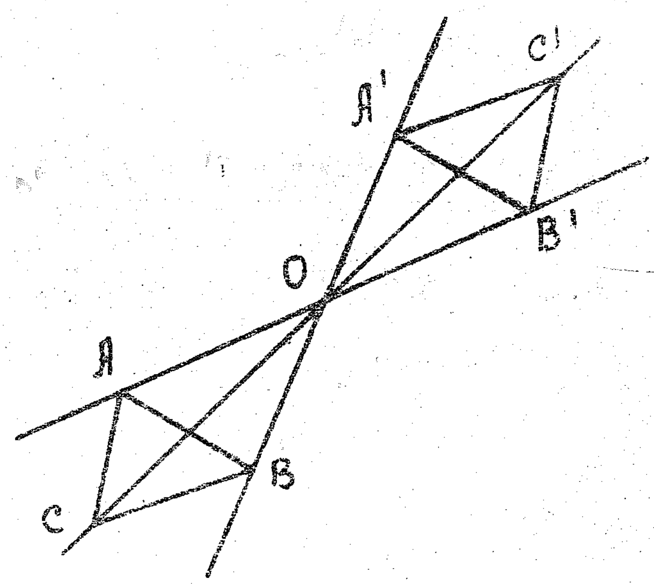
В этом случае когда мы преобразуем кривую, мы за определение гомотетии принимаем то свойство, которое является эквивалентным тому, которым мы в §1 определили гомотетию. А именно точку M' определяем по M,



черт. 3

так, что $\frac{OM'}{OM} = \lambda$ (2). (черт. 3).

Точка O называется центром подобия. Следует иметь в виду, что этому условию удовлетворяют не только вершины гомотетичных треугольников, но и соответственные точки M и M' на сторонах. Следует иметь в виду, что откладывание OM' можно производить в различные стороны от точки O. Задавая направление на прямых OA, OB, OC, мы будем различать отрезки $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$, как алгебраические величины, с определенными знаками от длин OA, OB, OC; и равенство (2) писать в виде:



черт. 4.

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \lambda \quad (\bar{2})$$

Тогда придется различать, смотря потому будет ли в равенстве (2) $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$, прямую и обратную гомотетию.

На черт. 2 имеем прямую, а черт. 4 обратную гомотетию.

§3 Гомотетичное преобразование окружности.

Не трудно видеть, что гомотетичным преобразованием окружности является тоже окружность.

В самом деле, возьмем точку M на первой окружности и соединим ее с центром прямой ОМ. Точка C' такая что $\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \lambda$. Проводим $C'M' \parallel OM$. Тогда из подобия $\triangle OCM$ и $\triangle OC'M'$ должны иметь

$$\frac{\overline{C'M'}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \lambda \qquad (3)$$

Если CM постоянно и представляет радиус окружности R, то согласно (3) постоянно и $C'M' = R'$. При этом, если $\lambda = k^2 > 0$ и $\lambda = -k^2 < 0$

$$R' = k^2 R \qquad (4).$$

Прямая, конечно, преобразуется в прямую. Касательная OT к окружности преобразуется в касательную OT', так как прямой угол OTC преобразуется в прямой угол OT'C'.

§4. Группа и подгруппа преобразований

Совокупность преобразований

$$P_1\ P_2\ P_3 \ldots\ldots P_k \ldots P_e \ldots P_m$$

образует группу, если результат любых двух преобразований этой совокупности тот же, что одного преобразования.

Символически это так пишется

$$P_k P_e = P_m$$

Очевидно подобные преобразования как в широком, так и в узком смысле образуют группу.

Вместо того, чтобы $Л$ подобно преобразовать в $Л'$, а $Л'$ в $Л''$ можно $Л$ сразу преобразовать подобно $Л''$. Но тоже, конечно, относится и к подобному преобразованию в узком смысле, т.е. к гомотетичному. Вместо того, чтобы переходить от ABC к $A'B'C'$, а затем от $A'B'C'$ к $A''B''C''$, можно перейти сразу от ABC к $A''B''C''$. Эта группа входит в группу общего подобного преобразования, являясь подгруппой последней. Другой подгруппой движения.

§5. Определение инверсии.

Очень большое значение рядом с подобным преобразованием имеет преобразование инверсии. Оно определяется равенством аналогичным (2), но только беря вместо отношения произведение

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \lambda \qquad (6)$$

O - называется центром инверсии. Если положить $\lambda = \pm k^2$, то k будет модулем преобразования. Для знака $(+)$ имеем прямую. Для знака $(-)$ обратную инверсию. Преобразование инверсии, конечно, не образует группы.

Если $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=\lambda$

$\overline{OM'}\cdot\overline{OM''}=\mu$, то

$\frac{\overline{OM''}}{\overline{OM}}=\frac{\mu}{\lambda}$,

т.е. переход M к M'' совершается гомотетичным преобразованием. Можно сказать, что всякое гомотетичное преобразование разлагается на две инверсии, причем бесконечным числом способов.

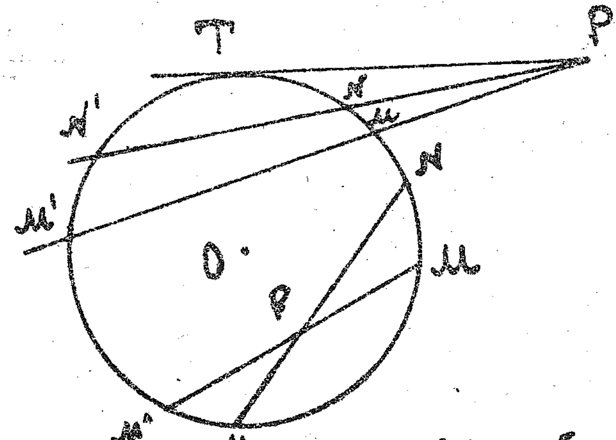
§6. Степень точки.

Из элементарной математики мы знаем (черт. 5), что для секущей PM'

$PM\cdot PM'=PN\cdot PN'=PT^2$ (7),

а для хорды

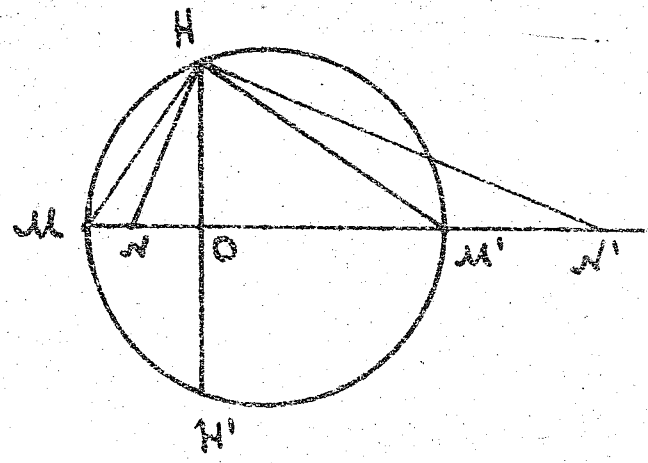
MPM': $PM\cdot PM'=PN\cdot PN'$ (8)



черт. 5

(черт. 5). Имея ввиду направление, мы можем сказать, что и в том случае, когда P внешняя, и также когда P внутренняя точка произведение $\overline{PM}\cdot\overline{PM'}$ не зависит от направления прямой, проведенной через P, а только от положения P, причем в первом случае будет положительно, а во втором - отрицательно. Это произведение называется степенью точки P относительно окружности. В том случае, когда мы имеем обратную инверсию, центр инверсии находится между M и M'. Поэтому теорема о перпендикуляре HO из вершины прямого угла ∠MHM' может быть выражена формулой

$\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = -\overline{OH}^2$, так что модулем инверсии является этот перпендикуляр OH. Отсюда следует построение соответствующей точки N в инверсии точки N'

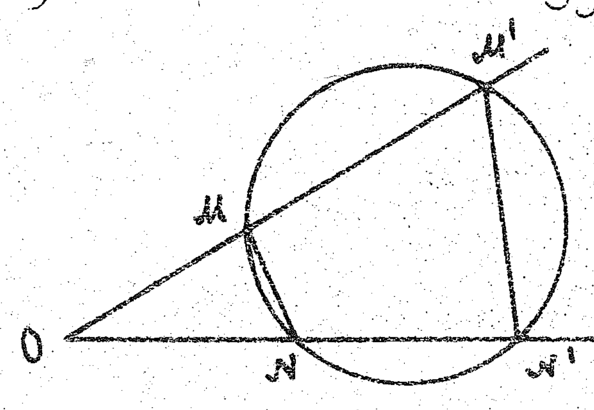


черт. 6

Проводится NH и N'H перпендикулярно NH.

§7. Вписанный в окружность четырехугольник

Общим для обоих случаев $\Delta>0$ и $\Delta<0$ будет следующее построение. Пусть M отвечает M'. Требуется найти соответствующую точке N — точку N'. Для этого через три точки M M' N проводится окружность M N N' M'.



черт. 7

Пересечение окружности с прямой ON и определит точку N'. В самом деле, как $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}$, так и $\overline{ON}\cdot\overline{ON'}$ определяют степень точки O относительно окружности и, если $\overline{OM}\,\overline{OM'}=\lambda$, то и $\overline{ON}\cdot\overline{ON'}=\lambda$.

Мы имеем вписанный в окружность четырехугольник $MNN'M'$. Как известно в таком четырехугольнике сумма противоположн[ых] углов $=2d$.

$$\angle MM'N'+\angle MNN'=2d\text{, а так как}$$
$$\angle MNO=2d-\angle MNN'\text{, то}$$
$$\angle OM'N'=\angle MNO \quad (9)$$

Для параллельных прямых имели бы
$$\angle OM'N'=\angle OMN.$$

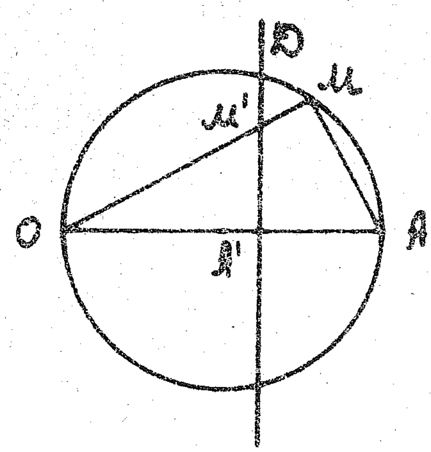
Прямые, удовлетворяющие условию (9), наз. <u>антипараллельными</u>. Таким образом преобразование инверсии получается из прямой MN, ей антипараллельная $M'N'$.

§6. <u>Преобразование окружности в самое себя и в прямую.</u>

Во что инверсией с модулем $\sqrt{\pm\overline{OM}\cdot\overline{OM'}}$ преобразуется окружность $MNN'M$. Она преобразуется в самое себя, так как в виду того, что

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{ON} \cdot \overline{ON'} = \ldots\ldots = \lambda .$$

Точка M преобразуется в M', N - в N' и т.д.
Посмотрим, во что преобразуется окружность, если модуль взять какой угодно.
Сперва возьмем простейший случай, когда центр инверсии на преобразуемой окружности.
Мы докажем, что тогда окружность OMA преобразуется в прямую DA'.
Возьмем точку M' такую, что $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \lambda$. Тогда нетрудно видеть, что основание перпендикуляра $M'A'$ - A' на диаметре окружности OA будет представлять как раз преобразование инверсией окружности. Для этого достаточно доказать, что положение A' не зависит от положения точки M, так как тогда все точки будут лежать на единственном перпендикуляре, который мы можем восстановить в точке A' к OA.



черт. 8

Тре-ки OMA и $OM'A'$ подобны. Они прямоугольные и еще имеют общий угол $M'OA'$.

Поэтому $\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OM'}}$, откуда $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \Lambda$. Это равенство дает для A определенную единственную точку A'.

§9. Преобразование окружности в окружность.

Если центр инверсии взять на окружности, то окружность преобразуется инверсией в окружность же:

Пусть N преобразуется инверсией в M (черт 3), тогда (по 6) $\overline{ON} \cdot \overline{OM} = \Lambda$ (10).

Но мы можем это преобразование разложить на два преобразования:

1. Преобразуем N в M инверсией с модулем, равным корню квадратному из степени точки O относительно окружности C: $\sqrt{p}$, так что $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = p$ (11).

Тогда согласно §7 окружность C преобразуется в самое себя.

2. Преобразуем гомотетией M в M' ($C'M' \parallel CM$), так что:

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = K \quad (12)$$

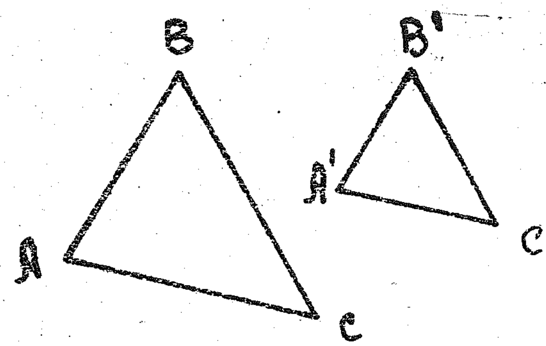
причем берем $K = \frac{\Lambda}{p}$ для того, чтобы из (11) и (12), умноженных, вытекало (10).

Тогда, согласно §2, окружность C преобразуется в окружность C'.

§10. Конформное преобразование.

Конформным преобразованием называется преобразование подное в бесконечно малых частях. Его можно определить и иначе: то-при котором сохраняются углы между преобразуемыми кривыми черт. 9.

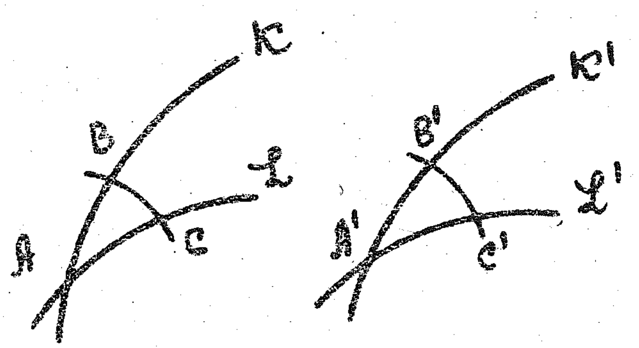
Вообще нельзя писать так, как при подобном преобразовании, что $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$. Это верно



лишь в том случае,

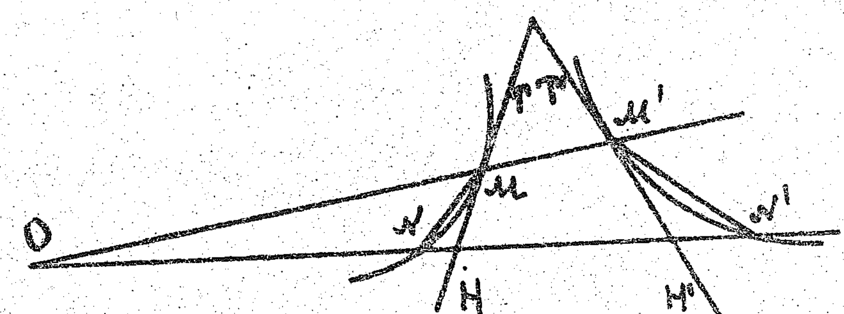
черт. 9.

если берутся бесконечно малые тре-ки ABC и $A'B'C'$. В самом деле, требование подобия бесконечно малых тре-ков ABC и $A'B'C'$ (черт. 10) эквивалентно требованию равенства углов: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Но равенство угла $\angle ABC = \angle B'A'C'$ в пределе

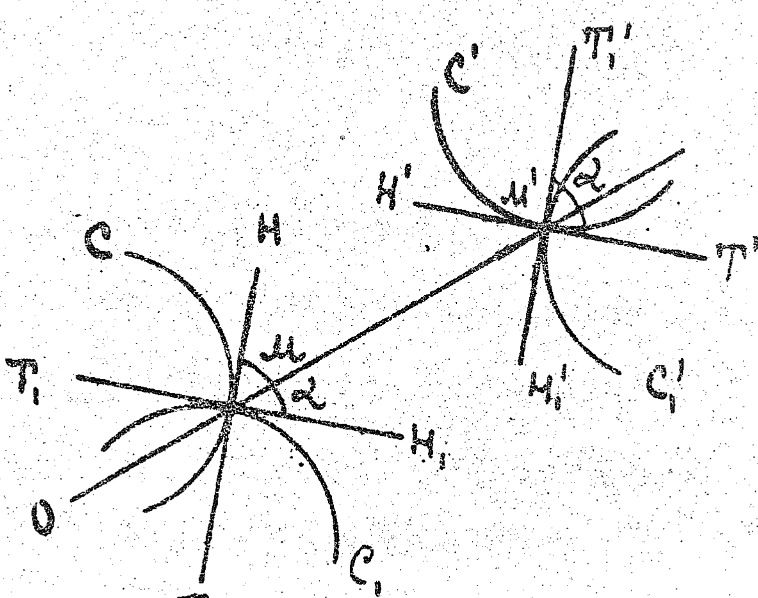


черт. 10.

с сближением B с A, B' с A' приводится к равенству углов между касательными в A и A' или, что тоже, к равенству углов между кривыми. Из того, что (§ 7) прямые преобразуемые друг в друга инверсией антипараллельны следует, что преобразование инверсии представляет конформное преобразование. Вследствие антипараллельности соответственных хорд NM и $N'M'$ (черт. 11). $\angle OMN = \angle ON'M'$.



черт. 11.



черт. 12

Но в пределе, когда N сближается с M и N' сближается с M' первый угол обращается в $\angle OMN$ или $\angle OMT$, образуемый касательной TH с OM, а второй — в $\angle OM'T'$, образуемый касательной $T'H'$ в M' с OM'. Отсюда вытекает, что угол между двумя кривыми C и C_1 равен углу между соответственными кривыми C' и C_1' (черт. 12). В самом деле по доказанному

$\angle HMM' = \angle H'M'M$

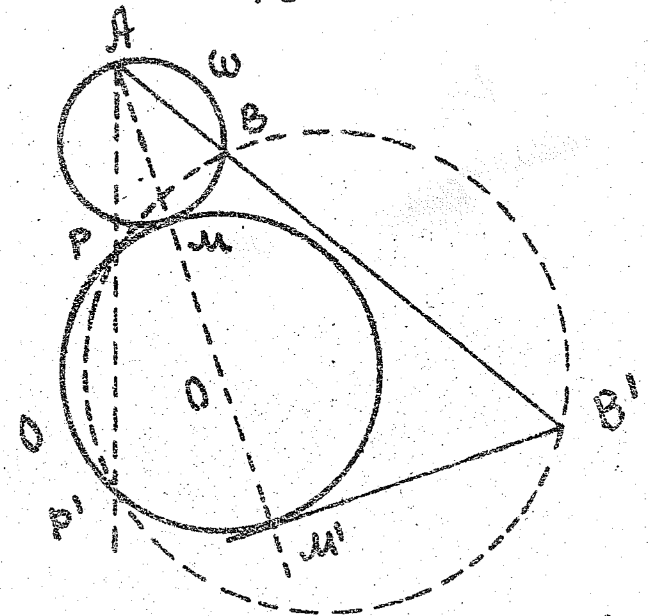
$\angle H_1MM' = \angle H_1'M'M$ складывая, получаем

$\angle HMH_1 = \angle H'M'H_1'$

§11. Построение окружности, проходящей через две данные точки и касательной к данной окружности.

Самое важное приложение преобразования инверсии находим в теории геометрических построений.

Для того, чтобы решить задачу о проведении через две данные точки A и B окружность ω касательной к данной O, мы сводим ее преобразованием инверсии к более простой: к проведению из данной точки касательной к окружности. Мы преобразуем инверсией фигуру, взяв за центр инверсии точку A, а за модуль корень квадр. из степени A относительно O. Тогда окружность O преобразуется самое в себя, (точка M преобразуется в M' во вторую точку пересечения круга O с MO). Окружность ω преобразуется в прямую B'M' (§8). B' можно найти, проводя OPP' и проводя через три точки P,P',B, окружность. Тогда B' будет второй точкой пересечения этой окружности с AB.



черт. 13.

В самом деле $\bar{A}\bar{B}\cdot\bar{A}\bar{B}' = \bar{A}\bar{P}\cdot\bar{A}\bar{P}' = \bar{A}\bar{M}\cdot\bar{A}\bar{M}'$ = степень точки A относительно O. Остается из B' провести касательную к окружности O, в которую преобразуется инверсией окружность ω, касательная к O. Затем следует совершить обратные преобразования, переходя от прямой $M'B'$ к окружности ω. Для нас достаточно определить, во что при этом преобразуется M'. На основании (§6) M' преобразуется в M и остается провести окружность через три точки A, B, M.

§12. Построение окружности, проходящей через точку A и касательной к двум данным окружностям C и C_1.

Для решения этой задачи следует преобразовать фигуры инверсией, принимая за центр

инверсии точку А, а за модуль корень квадрат. из степени точки А относительно окружности С. Таким преобразованием С не меняется, C_1 же переходит в другую окружность C_1'.
Искомая окружность ω преобразуется в прямую, касательную к двум окружностям С, C_1'.
Таким образом задача сводится к построению касательной общей двум кругам С, C_1'. Если M', M_1' представляют точки касания этой касательной, то искомая окружность ω пройдет через точки А и M, M_1, получаемые из M', M_1' инверсией.

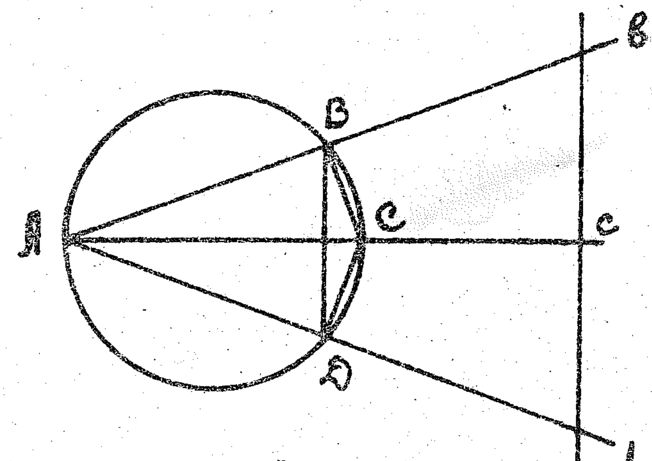
§13. Теорема Птоломея.

Укажем еще, каким образом применяется инверсия к выводу теоремы Птоломея.
Во всяком четыреугольнике, вписанном в круг, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad (13).$$

Преобразуем фигуру инверсией, взяв за центр инверсии вершину А, а где модуль какое угодно $\lambda > 0$. Так как B, C, D на окружности, проходящей через центр инверсии, то (§8) им соответствующие точки b, c, d будут на прямой, причем c будет находится между b и d. Мы будем иметь:

$bd = bc + cd$ (14).



Черт. 14.

Теперь покажем, что обратным преобразованием это равенство приводится к (13), выражающему теорему Птоломея.

Для этого обращаемся к черт. 7. Мы найдем выражение $M'N'$ в функции от MN, OM, ON. Из равенств $OM \cdot OM' = ON \cdot ON' = \pm \lambda = |\lambda|$ (скобки означают абсолютную величину). Имеем

$$\frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'}$$

В ΔOMN, $\Delta ON'M'$ имеем равные углы между пропорциональными сторонами. Поэтому тре-ки эти подобны и мы имеем:

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{OM'}{ON} \text{ или } \frac{M'N'}{MN} = \frac{OM \cdot OM'}{OM \cdot ON} = \frac{|\lambda|}{OM \cdot ON}$$

$$MN' = MN = \frac{|\lambda|}{OM \cdot ON} \quad (15)$$

Возвращаясь к выводу теоремы Птоломея, можем написать

$$bd = \frac{\lambda \cdot BD}{AB \cdot AD}, \; bc = \frac{\lambda \cdot Bc}{AB \cdot Ac}, \; cd = \frac{\lambda \cdot cD}{Ac \cdot AD} \quad (16)$$

Заменяя в (14) bd, bc, cd значениями (16) будем иметь: $\frac{BD}{AB \cdot AD} = \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD}$, освобождаясь от знаменателей получаем равенство (13)

Вопросы.

1. Что называется гомотетией?
2. Что называется подобием?
3. Как привести две подобные фигуры в гомотетию?
4. Во что гомотетичным преобразованием преобразуется окружность?
5. Во что преобразуется квадрат?
6. Как, пользуясь подобным преобразованием окружностей, провести к ним общую касательную?
7. Что такое группа преобразований?
8. Указать инварианты для подобного преобразования.
9. Что остается неизменным при преобразовании инверсии.
10. Что называется степенью точки?
11. Как оправдывается это определение?
12. Указать основные свойства вписанного в круг

четыреугольника.

13. Две прямые параллельные пересечены прямой-какие углы равны?

14. Две антипараллельные прямые пересечены прямой - какие углы равны?

15. Что необходимо, чтобы инверсией окружность преобразовалась в самое себя?

16. Когда окружность преобразуется инверсией в прямую.

17. Во что преобразуется прямая?

18. Когда прямая преобразуется в прямую же?

19. Каким образом инверсия разлагается на гомотетию и инверсию специального типа?

20. Во что преобразуется окружность, если центр инверсии не находится на окружности?

21. Какая разница между подобным и конформным преобразованием?

22. Какое следует совершить преобразование, чтобы привести задачу о проведении окружности через две точки касательной к данной

23. В чем состоит теорема Птоломея.

Задачи.

1. Взяв положение: что если дана окружность C и точка O вне ее и проведены секущие OAA', OBB' то точка M пересечения AB', BA' находится на полюсе

тре-ка, (на которой находится) точка O относительно окружности. Инверсией (центр O, модуль $= \sqrt{\text{ст. точки}}$) вывести теорему: если дана окружность (C) и точка O вне ее и проведены секущие OAA', OBB' и окружности пересекаются в O и если в другой точке m, то точка m находится на круге γ, имеющим своим диаметром OC.

2. Доказать, исходя из теоремы Брианшона, что в шестиугольнике $ABCDEF$, вписанном в круг с центром в O, три окружности, проходящие через O и середины двух противоположных сторон имеют вторую общую точку. (инверсия с центром O и модулем $= R$ окруж.

3. Построить окружность Γ, проходящую через две точки A, B и ортогональную к данной с центром в O. (таже инверсия, что в §11).

4. Построить окружность C, проходящую через две точки A, B и пересекающую данный круг O под данным острым углом. (Таже инверсия, что в §11).

5. Совершенно таким же образом как в §13, исходя из тождества Стефани (которое можно проверить)

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{CD} + \overline{AC}^2\cdot\overline{DB} + \overline{AD}^2\cdot\overline{BC} + \overline{CD}\cdot\overline{DB}\cdot\overline{BC} = 0$$

доказать, что в четырехугольнике $ABCD$, вписанном в круг $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AB\cdot AD + CB\cdot CD}{BA\cdot BC + DA\cdot DC}$

Вопросник

1. Как обычно формулируется аксиома Архимеда и как ее формулирует Гильберт?

2. Что такое математический формализм?

3. В чем отличаются логистики от формалистов?

4. Как итальянская школа характеризует континуум?

5. Что называется сечением двух классов?

6. Что утверждает Дедекиндовская теория о сечении

7. В чем состоит дедекиндовская теория иррациональных чисел?

8. В чем состоит арифметизация геометрии? В каком смысле наш учебник геометрии арифметизирован?

9. Как Эвклид понимает тождество $(AB+BC)^2=AB^2+2AB\cdot BC+BC^2$

10. Как <u>геометрически</u> доказывают это тождество?

11. Как Декарт понимает a^2, $b\cdot c$, a^2b и т.д.

12. Какая аксиома устанавливает взаимнооднозначное соответствие между числами и геометрическими величинами?

13. Достигается ли это аксиомой Кантора, а если нет, то какую еще аксиому следует прибавить?

14. Как делит Эвклид отрезок пополам?

15. Как это делает Гильберт?

16. Почему Эвклид не поступал так, как поступал Гильберт?

17. Почему Гильберт не поступает так, как Эвклид?
18. От каких аксиом зависит построение Гильберта?
19. Какие аксиомы непрерывности предполагает построение Эвклида?
20. Почему деление отрезка на n равных частей у Эвклида зависит от теоремы подобия и потому от аксиомы о параллельных, а в итальянской школе нет?
21. Из каких аксиом вытекает возможность деления отрезка на сколь угодно малые части?
22. Каким образом строится равносторонний Δк. Какой аксиомой при этом неявно пользуются?
23. Можно ли доказать пересекаемость окружности и прямой соединяющей внутреннюю точку с внешней с помощью только теоремы Архимеда?
24. Как доказывается, что если окружность пересекается прямой в одной точке, то она пересекается также и в другой?
25. Нуждается ли доказательство положения о том, что прямая, соединяющая внутреннюю точку замкнутого многоугольника с внешней пересекают его периметр, в аксиоме Дедекинда?
26. Что называется двумя соизмеримыми величинами?
27. Соизмерима ли диагональ квадрата с его стороной?
28. Как доказывается, что двухгранные углы

находятся в том же отношении, что и соответственные им линейные?

29. Какая аксиома используется при рассмотрении случаев несоизмеримости?

30. Существуют ли у Эвклида формулы для площадей различных фигур?

31. Указать основные теоремы Эвклида о площадях.

32. Когда равновеликость параллелограмов при равных основаниях и высотах доказывается непосредственно с помощью равносоставленности?

33. Предполагает ли равновеликость обязательно равносоставленность?

34. Каким образом два параллелограма с равными основаниями и высотами разложить на равные элементарные фигуры?

35. В чем состоит 7ая Эвклидова аксиома?

36. Формулировать аксиому Цолта.

37. Указать некоторые Трейтлейновские модели?

38. Чему равна площадь трапеции? Как это доказывается с помощью модели?

39. В чем состоит доказательство Эвклида теоремы Пифагора?

40. Развить доказательство теоремы Пифагора с помощью теории подобия.

42. Когда равенство объемов доказывается равно-

составленностью?

43. Как доказывается, что объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту?

44. Каким образом разложить треугольную призму на три равновеликие пирамиды?

45. Разложением на какие пирамиды определяется объем усеченной треугольной пирамиды?

46. На какие пирамиды разлагаем треугольную призму, усеченную параллельно основанию при определении ее объема?

47. В чем состоит теорема, относящаяся к треугольной пирамиде?

48. Можно ли сказать, что площадь круга всегда предел площади вписанного многоугольника при увеличении числа его сторон?

49. Почему нельзя сказать, что объем многугольника - предел объема вписанного правильного многоугольника при увеличении числа сторон и уменьшении сторон последнего?

50. В чем состоит лемма Гурьева?

51. Как ее применять при доказательстве формулы: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

52. В чем состоит первый постулат Архимеда?

53. Каким образом в современных учебниках

при доказательстве основной теоремы о длине окружности избегается первый постулат Архимеда?

54. В чем состоит второй постулат Архимеда?

55. В чем разница методов исчерпывания Эвклида и Архимеда?

56. Как эвклидовским методом исчерпывания доказывается пропорциональность углов дугам?

57. Есть ли у Эвклида теорема о том, что длины окружностей относятся как их радиусы?

58. Какие теоремы Эвклид доказывает методом исчерпывания?

59. Что такое чертова лестница? Как проводится она Архимедовым методом?

60. Какие еще результаты получает Архимед своим методом?

61. Метод исчерпывания прямой или апагогический?

62. Метод неделимых прямой или апагогический?

63. Что такое актуальная бесконечность?

64. В чем состоит принцип исчерпывания бесконечно-малого перед конечным?

65. Исчезает ли по этому принципу конечное перед бесконечным?

66. В чем состоит теорема Архимеда о площади круга?

67. Как мы ее доказываем?

68. Как ее доказывал Кеплер?

69. Почему Кеплер отождествлял бесконечно-малый

сектор - треугольнику?

70. Как следует выправить вывод Кеплера?

71. Что такое криволинейная трапеция?

72. Как понимать выражение Кавальери, что криволинейная трапеция состоит из линий?

73. В чем состоит принцип Кавальери для объемов?

74. В чем состоит принцип Кавальери для площадей?

75. Как доказывается равновеликость треугольников с равными основаниями и с равными высотами Эвклидом и Кавальери?

76. Как избегнуть чертову лестницу с помощью принципа Кавальери?

77. Что называется порядком бесконечно-малых?

78. Что такое дифференциал?

79. Эквивалентны ли бесконечно-малые $\sin\alpha$ и $\lg(1+\alpha)$, если α бесконечно мало?

80. Эквивалентны ли $\operatorname{tg} 3\alpha$ и $\sin(\alpha+\alpha^2)$?

81. Как понимать $\lim\sum\alpha_i$?

82. Что такое интеграл?

83. В чем состоит основная лемма интегрального исчисления?

84. В чем состоит схема Дюгамеля?

85. Что делает дифференциальное исчисление?

86. Что делает интегральное исчисление?

87. Чему эквивалентна бесконечно малая дуга кривой?

88. Что такое <u>входящие</u> и <u>выходящие</u> прямоугольники, для каких величин они являются эквивалентами?

89. Какими трапециями их можно заменить?

90. Чему равен объем <u>какого угодно</u> цилиндра?

91. А какого угодно конуса?

92. Как это доказывается обычно?

93. Как применяется схема Дюгамеля?

94. Что называется входящими и выходящими элементами цилиндра, как они применяются при определении объемов?

95. Откуда следует, что $V = \int_a^b S(z)\,dz$, где $S(z)$ есть функция от z сечение $\parallel xy$?

96. Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\dots+(n-1)}{n^2} = \frac{1}{2}$

97. Какое отношение имеет этот предел к определению площади треугольника?

98. Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}$

99. Какое отношение он имеет к определению объема треугольной пирамиды?

100. А к определению площади параболы? $\underline{y=x^2}$

101. Каким образом обосновать с помощью схемы Дюгамеля принцип Кавальери?

102. В чем состоит теорема Архимеда о сфере цилиндра и конуса?

103. Каким образом она доказывается с помощью принципа Кавальери?

104. Что такое призматоид?

105. Как под понятие призматоида подвести призму, пирамиду, усеченную пирамиду?

106. Что называется <u>косой плоскостью</u> или <u>гиперболическим параболоидом</u>?

107 Что такое призматоид в широком смысле?

108. Указать общую формулу для объема призматоида.

109. В чем состоит формула Симпсона и когда она правомочна?

110. Отчего формула Симпсона применима к цилиндру, конусу и усеченному конусу?

111. Вывести ее на основании формула для объема усеченной параллельно основанию треугольной пирамиды?

112. Вывести объем шара?

113. Какой формулой выражается объем ограниченный двумя одинаковыми цилиндрами с взаимно перпендикулярными осями, пресекающимися между собой.

114. Каково сечение призматоида, параллельное его основанию.

115. Почему к призматоиду <u>в общем смысле</u> применима формула Симпсона?

116. Каким общим принципом можно заменить теоремы: $\lim(x+y) = \lim x + \lim y$; $\lim x \cdot y = \lim x \cdot \lim y$; $\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$ и т.

117 Как применяется этот общий принцип при выводе теоремы Гюльдена?

118. Как доказывается теорема Гюльдена для тре-ка, при совпадении оси вращения со стороной?

119. Как доказать теорему Гюльдена для тре-ка, распространив ее на многоугольник.

120 Что такое тор и как найти его объем?

121. Как найти центр тяжести полукруга?

122 Как находит применение себе стереометрический аналогон 1^го постулата Архимеда при обосновании формул для поверхностей.

123 Что принимают за эквиваленты б/м. элементов при определении боковой поверхности цилиндра и конуса?

124. Всегда ли верно положение: что величины кривой поверхности представляют предел величины поверхности вписанного в нее многоугольника при увеличении числа граней и при уменьшении последних?

125. Что такое цилиндр Шварца?

126. Имеет ли $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} n^2 \left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^4$ определенное значение.

127 В чем состоит теорема Гюльдена, относящаяся к поверхностям?

128. Как найти центр тяжести ломаной линии?

129 Как применяется общий принцип теории пределов в выводе теоремы Гюльдена для поверхностей?

130. Чему равна поверхность тора?

131. Как найти центр тяжести полуокружности?

132. В чем состоит общий метод определения площади криволинейной трапеции?

133. Как определяется боковая поверхность прямого цилиндра?

134. В чем состоит формула Симпсона для определения площадей и поверхностей?

135. Чему равна площадь сегмента параболы?

136. Как ее найти с помощью формулы Симпсона?

Проф. Д. Мордухай-Болтовской

Тиражъ 95 экз.

Оглавление.

Измерение в геометрии.

Инверсия

Проф. Д. Мордухай-Болтовской