Д. Мордухай-Болтовской.

Четыре лекціи по Философіи Математики,

прочитанныя
на временныхъ курсахъ для преподавателей
средней школы лѣтомъ 1912 года.

ВАРШАВА.
Типографія Варшавскаго Учебнаго Округа.
Краковское Предмѣстье № 3.
1913.

Д. Мордухай-Болтовской.

Четыре лекціи по Философіи Математики.

Введеніе.

М. Г.!

Безспорно, что одна изъ характерныхъ чертъ современной Математики—ея связи съ науками философскими. Въ настоящее время математикъ, который не желаетъ ограничить всю дѣятельность узкой сферой какого нибудь спеціальнаго изслѣдованія долженъ быть хотя бы немного философомъ. Математика и философія, можно сказать два близнеца, родившіеся въ одно время и, въ своемъ младенчествѣ лежавшіе въ одной колыбели. Судьба ихъ, то разъединяетъ, то снова приводитъ къ тѣсному единенію. Раціоналисты XVII вѣка все міровозрѣніе хотѣли построитъ ordine geometrico и Математика служило образцомъ для ихъ метафизическихъ построеній. Критицизмъ разбилъ эти прекрасныя заблужденіи и этимъ указалъ два далеко-расходящіеся пути для Философіи и Математики.

Спекулятивный идеализмъ смотрѣлъ свысока на Математику, его діалектическая логика представлялась божественнымъ откровеніемъ, заглушающимъ земной лепетъ силлогистической логики Математиковъ. Представлялось, что философія не можетъ заимствовать отъ Математики ни ея методъ, ни ея содержаніе.

Въ противоположность идеализму матерьялизмъ очень любилъ выдвигать значеніе математики. Но матерьялитическія похвалы Математикѣ—это похвалы чернорабочему, который работаетъ для рядъ наукъ, образующихъ іерархическую лѣстницу вплоть до той наивно-реалитической догматики, которая атомъ считаетъ единственнымъ объяснительнымъ принципомъ. Но вотъ, эволюція мысли, идя по зигзагообразной кривой снова возвращается съ старымъ идеямъ. Раціонализмъ возрождается въ видѣ современныхъ интеллектуалистическихъ теченій. Чистый разумъ старается теперь разорвать тѣ цѣпи, въ которыя его заковалъ критицизмъ.

Война все еще продолжается. Побѣда будетъ одержана раціонализмомъ и чистый разумъ опять овладѣетъ метафизическимъ царствомъ, если будетъ взяты самыя сильныя крѣпости: будетъ опровергнуто Кантовское ученіе о пространствѣ и геометрическихъ аксіомахъ и будетъ отбита актуальная безконечность.

Мы видимъ такимъ образомъ, что предметы, которые должны интересовать гносеолога лежатъ въ области Математики. Если математикъ не глухъ и слѣпъ къ тому, чѣмъ волнуется философская мысль, созидающая синтезъ всѣхъ человѣческихъ знаній, то онъ съ своей стороны будетъ стараться выработать опредѣленный и ясный отвѣтъ на обращенныя къ нему запросы гносеолога и метафизика.

Мы выше сказали, что спекулятивный идеализмъ, совершающій свои построенія съ помощью высшей, діалектической логики смотритъ свысока на ту логику, которая толчется на одномъ мѣстѣ, маскируя на разные лады $A=A$.

Если діалектическую логику отвергнуть, то остается только эта бѣдная математическая логика и критицизмъ смѣло можетъ утверждать, что съ $A=A$ также нельзя доѣхать до Абсолюта, какъ барону Мюнхаузену вытащить себя за волосы изъ болота. Не остается ли единственный путь для защиты позиціи создать новую логику, опирающуюся на Математику, изыскать въ математической логикѣ другія принципы, чѣмъ $A=A$, не зависящія отъ послѣдняго, усмотрѣть въ Математикѣ силы, не усмотрѣнныя Аристотелемъ и Кантомъ. Отсюда слѣдуетъ необходимость логическо-математическихъ изслѣдованій, связь между Логикой и Математикой.

Но слѣдуетъ помнить, что связь между Гносеологіей и Метафизикой съ одной стороны и Математикой существовали и раньше. Совершенно новой представляется связь съ Психологіей. Значеніе Психологіи для Математики впрочемъ и теперь сознается довольно слабо. Едва ли вполнѣ сознается, что всѣ логическія построенія пріобрѣтаютъ цѣнность только благодаря психологическому факту очевидности основныхъ аксіомъ. Но уже одного этого факта достаточно, чтобы убѣдить въ необходимости психологическихъ изслѣдованій.

Эмпиризмъ, опирающійся на Психологію, можно обсуждать лишь, опираясь на эту послѣднюю. Психологія мышленія не должна совпадать съ ассоціативной Психологіей.

Необходимо болѣе глубокое изслѣдованіе ея и лучшіе факты можетъ дать Математика.

Психологическое изслѣдованіе даетъ особое значеніе Исторіи Математики. Въ послѣдней мы пріучаемся видѣть не только прагматическую сторону, но и усматривать общія законы, которыми подчиняется эволюція различныхъ психологическихъ элементовъ, пріучаемся разсматривать исторію Математики только въ связи съ исторіей мысли въ болѣе общемъ смыслѣ и даже съ общей исторіей человѣчества.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы пріобрѣтаемъ психологическія основы для методическихъ теорій. Въ настоящее время экспериментальное изслѣдованіе служитъ основой послѣднихъ, но экспериментальные факты слѣдуетъ пополнять, а въ иныхъ случаяхъ и вполнѣ замѣнять результатами психологическаго анализа, относящагося не только къ исторіи различнаго рода открытій, но и къ готовымъ математическимъ построеніямъ.

Предметомъ нашихъ лекцій и послужитъ разборъ тѣхъ философскихъ и математическихъ проблеммъ, которыя связуютъ Логику, Гносеологію, Психологію, Метафизику съ Математикой.

Лекція I

Логика и Математика.

Существуютъ математическія истины, которыя не доказываютъ, въ существованіи которыхъ убѣждаются непосредственно путемъ интуиціи. Эти истины высказываются въ началѣ изложенія системы математическихъ положеній. Это—*аксіомы*. Таковы слѣдующія истины: „Двѣ величины, равныя порознѣ третьей равны между собой". „Двѣ прямыя не могутъ заключать пространства". Разъ установивъ систему очевидныхъ—истинъ, къ признанію другихъ приводятъ съ помощью доказательствъ т. е. связывая каждую изъ нихъ логическую связью съ непосредственно очевидными положеніями. Устанавливая такую связь, мы, конечно, этимъ не дѣлаемъ доказуемыя положенія очевидными, но истинность ихъ становится для насъ необходимой въ силу того, что

1) исходныя положенія очевидно имѣютъ мѣсто и
2) всѣ тѣ положенія, которыя связываются цѣпью силлогизмовъ съ ними должны быть, какъ и они истинны.

Изъ двухъ посылокъ силлогизмомъ извлекаемъ третье предложеніе—заключеніе. Если мы изобразимъ точками всю совокупность положеній какой либо математической дисциплины напр. Элементарной Геометріи и точку A, отвѣчающую какому нибудь положенію будемъ соединять прямыми съ B. C. D... положеніями, изъ которыхъ A выводится, то получимъ сѣть, которая начинается въ точкахъ, отвѣчающихъ начальными т. е. очевидными положеніями. Можно сказать, что Математика обычно интересуется не самой сѣтью а только ея узлами. Для нея важно указать *какой нибудь* путь, ведущій отъ очевидныхъ положеній A. B. C. D... къ интересующему его положенію G, существованіе котораго почему либо подозрѣвается и, если этотъ путь найденъ, то математикъ со спокойной совѣстью можетъ сказать, что положеніе G имъ доказано. Болѣе же глубокимъ, но еще не успѣвшимъ внѣдриться во всѣ области Математики является взглядъ, по которому изслѣдованіе логической сѣти является не менѣе важнымъ, чѣмъ изслѣдованіе ея узловъ. Нужно предполагать, что логическій анализъ въ будущемъ будетъ пріобрѣтать все больше и больше значенія и интеллектуальная совѣсть математика будущаго времени будетъ гораздо чувствительнѣе, онъ будетъ искать не какой нибудь путь отъ A, B, C... къ G, а путь опредѣленнаго типа идущій отъ напередъ заданной части аксіомъ черезъ положенія опредѣленныхъ типовъ.

На первый взглядъ кажется, что подобныя изслѣдованія не предметъ Математики, а предметъ Логили.

Конечно, основанія подобныхъ изслѣдованій черпаются въ Логикѣ, но результаты, которые получаются путемъ *логическихъ* изслѣдованій, относятся тѣмъ не менѣе къ Математикѣ.

Возьмемъ силлогизмъ т. е. одно изъ звѣньевъ упомянутой выше логической сѣти (напр. I фигуру)

A есть B

всѣ B суть C

слѣдовательно A есть C.

Имъ утверждается, что A присуще нѣкоторое свойство (C) опредѣляющее принадлежность A къ классу C и именно потому, что ему присуще свойство (B).

Можно сказать, что, дѣлая это заключеніе, мы пользуемся только однимъ изъ свойствъ объекта A. Но вѣдь тому же объекту A могутъ быть присущи еще другія свойства (E), (F), (G).... отнюдь не необходимо связанныя съ (B). Эти послѣднія въ нашей логической операціи остаются логически *не дѣйствующими.*

Объектъ A мы могли бы замѣнить другимъ объектомъ $\bar{A}$, которому было бы присуще свойство (B), но признаки (E) (F) (G)... были бы замѣнены другими ($\bar{E}$), ($\bar{F}$), ($\bar{G}$)...

Иванъ-человѣкъ,
Всѣ люди—смертны:
Слѣдовательно Иванъ смертенъ.

Иванъ человѣкъ, но Иванъ можетъ быть старъ, высокъ, худъ.

Но я могу также сказать:

Петръ-человѣкъ,
Всѣ люди—смертны
Слѣдовательно Петръ—смертенъ,

Хотя Петръ въ противоположность Ивану можетъ быть молодъ, низокъ и толстъ.

Вмѣсто одного звѣна, можетъ взять нѣсколько звѣньевъ т. е. нѣкоторую логическую цѣпь, начинающуюся аксіомами.

Мы будемъ тогда доказывать, что объекту

A присущи свойства: a', a'', a'''...
B . . . . b', b'', b'''...
C . . . . c', c'', c'''...

При этомъ мы можемъ использовать не всѣ признаки $A.\ B.\ C\ldots.$

а только

$$
\begin{array}{lcl}
A & \ldots\ldots\ldots & \alpha',\ \alpha'',\ \alpha'''\ldots \\
B & \ldots\ldots\ldots & \beta',\ \beta'',\ \beta'''\ldots \\
C & \ldots\ldots\ldots & \gamma',\ \gamma'',\ \gamma'''\ldots
\end{array}
$$

наличность которыхъ утверждается системой использованныхъ нами аксіомъ.

Такимъ образомъ нами будетъ доказываться что A присущи свойства: $a',\ a'',\ a'''..$

$B: b',\ b'',\ b'''\ldots\quad C: c',\ c'',\ c'''..$ только потому, что A присущи: $\alpha',\ \alpha'',\ \alpha'''\ldots\quad B: \beta',\ \beta'',\ \beta'''\ldots\quad C: \gamma',\ \gamma'',\ \gamma'''\ldots$

Если бы $A,\ B,\ C..$ были бы присущи еще другія отъ взятыхъ независимыя свойства

$$\underline{\alpha}',\ \underline{\alpha}'',\ \underline{\alpha}'''\ldots\ \underline{\beta}',\ \underline{\beta}'',\ \underline{\beta}'''\ldots\ \underline{\gamma}',\ \underline{\gamma}'',\ \gamma'''\ldots$$

то таковыя слѣдуетъ признать логически не дѣйствующими. Замѣняя ихъ другими $\bar{\alpha}',\ \bar{\alpha}'',\ \bar{\alpha}'''\ldots\ \bar{\beta}',\ \bar{\beta}'',\ \bar{\beta}'''\ldots\ \bar{\gamma}',\ \bar{\gamma}'',\ \bar{\gamma}'''\ldots$ мы получаемъ вмѣсто $A.\ B.\ C..$ новые объекты $\bar{A}.\ \bar{B}.\ \bar{C}..$ относительно которыхъ должны утверждать тоже, что о $A,\ B,\ C..$ т. е. наличность для $\bar{A}$ свойства: $a',\ a''.\ a'''\ldots$, для $\bar{B}: b',\ b'',\ b'''..$ для $\bar{C}$: $c',\ c'',\ c'''$ и т. д.

Мы будемъ имѣть такимъ образомъ одну логическую схему для различныхъ объектовъ: $A,\ B,\ C\ldots$ и $\bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C}\ldots$

Можно назвать $(\bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C}\ldots)$ и $(A,\ B,\ C\ldots)$ *логическими эквивалентами* относительно взятой системы постулатовъ.

Въ современной Геометріи имѣетъ огромное значеніе эквивалентность точки и прямой относительно одной группы аксіомъ.

Всѣ геометрическія свойства можно раздѣлить на двѣ довольно обширныя категоріи.

Теорема Пиѳагора устанавливаетъ извѣстную зависимость между длинами гипотенузы у катетовъ. Это ничто иное, какъ соотношеніе между результатами нѣкоторыхъ измѣреній. Такія свойства, которыя зависятъ отъ какого-либо сравненія или лучше сказать, измѣренія величинъ называются *метрическими*.

Такого рода свойствами занимается почти исключительно низшая, элементарная Геометрія.

Но существуютъ еще совершенно другого рода свойства. Эти послѣднія совершенно не зависятъ отъ измѣренія. Это такъ называемыя *зрительныя* свойства.

Они опредѣляются взаимнымъ расположеніемъ геометрическихъ объектовъ, но при этомъ предполагается, что это расположеніе опредѣляется не измѣреніемъ, а зрительной интуиціей весьма общаго типа.

На вопросъ: гдѣ точка?—слѣдуетъ отвѣчать „не на такомъ то разстояніи отъ прямой вправо или влѣво", а на прямой, на право или на лѣво.

На вопросъ: гдѣ прямая?—слѣдуетъ отвѣчать, „на плоскости или въ ту или другую сторону отъ нея" и т. д.

Ясное представленіе о зрительныхъ свойствахъ даютъ уже зрительныя аксіомы, относящіяся къ основнымъ элементамъ Геометріи.

На плоскости:

Двѣ точки опредѣляютъ одну прямую, черезъ нихъ проходящую.

Двѣ прямыя опредѣляютъ одну точку ихъ пересѣченія.

Эти аксіомы обыкновенно формулируютъ такъ:

Двѣ точки опредѣляютъ прямую, имъ принадлежащую.

Двѣ прямыя опредѣляютъ точку имъ принадлежащую.

Въ пространствѣ:

Три точки, не принадлежащія одной прямой опредѣляютъ плоскость.

Три плоскости, не принадлежащія одной прямой, опредѣляютъ точку.

Двѣ точки опредѣляютъ прямую, имъ принадлежащую.

Двѣ плоскости опредѣляютъ прямую, имъ принадлежащую.

и другіе.

Мы не будемъ перечислять всѣ зрительныя аксіомы, но отмѣтимъ слѣдующее ихъ свойство, которое можно легко усмотрѣть и на 4-хъ только что приведенныхъ.

Каждой зрительной аксіомѣ отвѣчаетъ ей взаимная, получаемъ замѣной плоскости на точку, точки на плоскости (прямая остается на мѣстѣ).

Изъ системы зрительныхъ аксіомъ выводится зрительная Геометрія или *Геометрія Положенія*, главная и важнѣйшая часть Проэктивной Геометріи.

Можно сказать теперь, что всѣ тѣ свойства точки, прямой и плоскости присущи имъ только потому, что точкѣ согласно зрительнымъ аксіомамъ присущи свойства α', α'', α'''... а плоскости β', β'', β'''..

Такимъ образомъ для доказательства зрительныхъ теиромъ имѣетъ значеніе не то, что плоскость представляется интуиціей совершенно въ иномъ видѣ, чѣмъ точка, а то что три точки опредѣляютъ плоскость, двѣ точки прямую и т. д.

Такъ какъ согласно двойственности аксіомъ мы можемъ приписать плоскости свойства α', α'', α'''... а точкѣ β', β'', β'''.. то мы будемъ имѣть логическую эквивалентность [A (точки), B (прямой), C (плоскости)] и [$\bar{A}$ (плоскости), $\bar{B}$ (прямой), $\bar{C}$ (точки)], взаимныя положенія будутъ существовать не только для аксіомъ, но и для всякой зрительной теоремы.

Мы такимъ образомъ получаемъ *законъ двойственности:*

Каждому зрительному положенію отвѣчаетъ взаимное, получаемой замѣной точки на плоскость и плоскости на точку.

Приведемъ примѣры двухъ взаимныхъ теоремъ.

Можно сказать, что прямыя между собой пересѣкающіяся т. е. имѣющія попарно общія точки и не лежащія на одной плоскости проходятъ черезъ одну точку.

Взаимная теорема:

Прямыя между собой пересѣкающіяся т. е. лежащія попарно въ одной плоскости и не проходящія черезъ одну точку лежать въ одной плоскости.

Существуетъ теорема плоской зрительной Геометріи, которую доказываютъ стереометрическими соображеніями это теорема Дезарга. Въ двухъ треугольникахъ $A\,B\,C$ и $A_1\,B_1\,C_1$ соотвѣтственные вершины которыхъ лежатъ на прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку, соотвѣтственныя стороны пересѣкаются въ точкахъ, лежащихъ на одной прямой и теорема ей обратная.

Эта теорема вмѣстѣ съ плоскостными зрительными теоремами представляетъ основаніе зрительной плоскостной Геометріи. Легко усмотрѣть въ этихъ основныхъ положеніяхъ тоже двойственность, существованіе взаимныхъ положеній получаемыхъ обмѣномъ точки и прямой. Въ плоскостной Геометріи имѣетъ мѣсто законъ двойственности:

Каждому зрительному положенію отвѣчаетъ взаимное, получаемое взаимнымъ обмѣномъ точки и прямой.

Теоремъ Паскаля: Въ вписанномъ въ кривую второго порядка шестіугольникѣ противоположныя стороны пересѣкаются въ точкахъ, лежащихъ на одной прямой отвѣчаетъ, какъ взаимная, теорема Бріаншона: Въ описанномъ около кривой второго класса (или, что тоже, второго порядка) шестiугольникѣ прямыя, соединяющiя противоположные вершины пересѣкаются въ одной точкѣ.

Логическiй эквивалентъ является главнымъ орудiемъ изслѣдованiя логической сѣти. Предположимъ, что мы имѣемъ рядъ независимыхъ постулатовъ т. е. такихъ, что ни одинъ изъ нихъ не можетъ быть выведенъ изъ остальныхъ. Какимъ образомъ рѣшается слѣдующая основная задача: Теорема G выводится изъ постулатовъ A, B, C, D... какъ убѣдиться въ томъ, что эта теорема не можетъ быть выведена изъ меньшаго числа постулатовъ напр. A, B, C.

Для рѣшенiя этого вопроса слѣдуетъ только подыскать къ изслѣдуемымъ объектамъ P, Q, R... ихъ эквиваленты относительно постулатовъ: A, B, C : $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$... Если теперь для $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$... не имѣетъ мѣста теорема G, то слѣдуетъ безусловно заключить, что G не можетъ быть выведено изъ A, B, C.

Такъ можно доказать, что теорема Дезарга не можетъ быть выведена изъ однихъ плоскостныхъ зрительныхъ аксiомъ. А именно имѣетъ мѣсто слѣдующая альтернатива или приходится доказывать эту теорему метрически напр. методомъ Аналитической Геометрiи или же пользоваться зрительными пространственными аксiомами, отказавшись отъ самостоятельнаго, не зависящаго отъ простр. Геометрiи обоснованiя плоскостной зрительной Геометрiи.

Чтобы убѣдиться въ этомъ можно употребить, согласно Гильберту, слѣдующiя логическiя эквиваленты прямой относительно системы зрительныхъ аксiомъ.

Беремъ эллипсъ C, которую назовемъ основной и точку P (основную точку) внѣ ея. Назовемъ про-прямы-такой объектъ который совпадаетъ со всякой прямой не пересѣкающей основную окружность. Если же прямая пересѣкаетъ основную окружность въ точкахъ A, B, то пропрямой будетъ объектъ образованной частью прямой внѣ этого эллипса и кругомъ проходящимъ черезъ A, B и основную точку P.

Пропрямая представляетъ эквивалентъ прямой, такъ какъ простыя геометрическія соображенія убѣждаютъ, что при надлежащемъ выборѣ эллипса:

Двѣ точки опредѣляютъ пропрямую.

Двѣ пропрямыя опредѣляютъ одну и только одну точку имъ принадлежащую и т. д.

Если бы теорема Дезарга могла быть выведена изъ плоскостныхъ зрительныхъ аксіомъ, то соотвѣтственныя стороны—пропрямыя двухъ про-треугольниковъ пересѣкались бы въ точкахъ, лежащихъ на одной пропрямой если соотвѣтственныя вершины лежатъ на пропрямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку. Но примѣръ, въ которомъ вершины берутъ то внутри, то внѣ окружности C легко убѣждаетъ насъ въ противномъ.

Съ помощью логическихъ эквивалентовъ доказывается также возможность не-Эвклидовыхъ Геометрій.

Не-Эвклидовой Геометріей называется Геометрія въ основѣ которой лежитъ отрицаніе 11-ой Эвклидовой аксіомы или ей равносильной *аксіомы о параллельныхъ,* состоящей въ томъ, что изъ данной точки можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Если принять всѣ аксіомы Эвклидовыхъ началъ, кромѣ 11-ой, то получимъ Геометрію Лобачевскаго.

Въ этой Геометріи изъ данной точки можно провести безконечное множество прямыхъ, не пересѣкающихъ данную, заключающихся между двумя предѣльными прямыми, которыя Лобачевскій называетъ параллельными.

Геометрія Лобачевскаго можетъ быть развиваема, какъ Эвклидовская, не встрѣчая логическихъ противорѣчій, но приводя къ теоремамъ, въ большей или меньшей мѣрѣ идущимъ противъ интуиціи.

По Геометріи Лобачевскаго сумма угловъ въ треугольникѣ меньше двухъ прямыхъ и т. д.

Меньшая степень очевидности аксіомы о параллельныхъ линіяхъ (и еще меньшая 11 Эвклидовской аксіомы) въ сравненіи съ другими Эвклидовскими аксіомами убѣждала математиковъ въ ея зависимости отъ болѣе очевидныхъ положеній.

Какъ извѣстно, въ продоженіе 2000 лѣтъ математики старались ее доказать. Сперва дѣлались попытки прямого доказательства, затѣмъ доказательства приведеніемъ къ абсурду т. е. построенія системы теоремъ, въ основѣ которыхъ лежало бы отрицаніе аксіомы о параллельныхъ и которая приводила бы къ логическому противорѣчію.

Труды Лобачевскаго составляютъ эпоху въ Геометріи, въ нихъ заложено зерно логическо-математическихъ изслѣдованій. Лобачевскій не доказалъ 11 аксіомы, не доказалъ и невозможность такого доказательства т. е. независимость этой аксіомы отъ другихъ эвклидовскихъ аксіомъ. Онъ далъ систему Геометріи, вполнѣ отвѣчающей Эвклидовской, въ основѣ которой лежало отрицаніе аксіомы о параллельныхъ и которая была свободна отъ всякихъ логическихъ противорѣчій.

За его работой должно было послѣдовать изслѣдованіе, доказывающее, что и при дальнѣйшемъ своемъ продолженіи Геометрія Лобачевскаго не можетъ встрѣтить противорѣчія.

Для этого необходимо было отыскать объекты, реализованные въ обыкновенной Эвклидовской Геометріи, представляющія эквиваленты плоскостей, прямыхъ и точекъ относительно тѣхъ зрительныхъ и метрическихъ аксіомъ Эвклидовской Геометріи, которыя остаются по исключеніи аксіомы о параллельныхъ.

Путь, избранный Бельтрами (который ограничивался лишь плоской Геометріи) былъ слѣдующій: за эквиваленты прямыхъ Геометріи Лобачевскаго онъ принималъ геодезическія линіи на нѣкоторой поверхности (псевдосферѣ).

Эти геодезическія линіи опредѣляются двумя точками, могутъ быть безгранично продолжены и т. д.

Черезъ данную точку проходитъ безконечное множество прямыхъ, не пересѣкающихъ данную геодезическую линію и заключающихся между двумя геодезическими линіями. Къ сожалѣнію задача не была вполнѣ рѣшена. Бельтрами было доказано, что Геометрія псевдосферы только въ нѣкоторой опредѣленной области совпадаетъ съ Геометріей Лобачевскаго.

Другія эквиваленты напр. указанные Клейномъ болѣе успѣшно привели къ цѣли.

Установивъ общую логическую схему для различныхъ объектовъ

$$A,\ B,\ C\ldots \quad \text{и} \quad \bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C}\ldots$$

естественно искать субстраты для этой схемы, понятія болѣе широкаго объема, чѣмъ A, B, $C\ldots$ $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}\ldots$; классы видами которыхъ являются, какъ A, B, C.. такъ $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$.. .

Упомянутыя выше двойственныя зрительныя аксіомы и выводимыя изъ нихъ двойственныя теоремы могутъ быть замѣнены единичными, объединяющими каждую пару, если установить чисто абстрактные объекты:

1) *элементы*—которыми могутъ быть какъ точки, такъ и плоскости

2) *носители* первой ступени—прямыя

второй ступени—плоскости или точки.

Тогда аксіомы объ опредѣляемости тремя точками плоскости, и тремя плоскостями точки объединяются въ слѣдующей абстрактной аксіомѣ:

Три элемента, не принадлежащія одному носителю первой ступени опредѣляютъ носителя второй ступени.

Итакъ нашъ логическій Анализъ ведетъ насъ къ построенію все болѣе и болѣе общихъ классовъ, ведетъ отъ объектовъ интуиціи къ все болѣе и болѣе абстрактнымъ ~~и~~ объектамъ.

Онъ вскрываетъ дальше, что нѣкоторыя математическія понятія подходятъ подъ чисто логическія понятія. И многіе теоремы вытекаютъ изъ нѣкоторыхъ свойствъ, наличность которыхъ можетъ быть установлена для этихъ логическихъ объектовъ, не математизируя ихъ.

Въ высокой степени интересна и поучительна исторія идеи Группы, одной изъ кардинальныхъ идей современной Математики.

Предположимъ, что мы имѣемъ совокупность нѣкоторыхъ объектовъ:

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \dots\ a_n \dots\ (a)$$

и нѣкоторую операцію P, которую мы производимъ надъ нѣкоторыми числами этихъ объектовъ. Операція эта можетъ дать, или не дать результата.

Если результатъ получается, то онъ можетъ не принадлежать совокупности (a). Если результаты операціи P приводятъ всегда къ объектамъ (a), то послѣдняя совокупность объектовъ будетъ *группой относительно операціи* P.

Возьмемъ совокупность цѣлыхъ чиселъ. Мы будемъ имѣть группы относительно сложенія и вычитанія, ибо сложеніе и вычитаніе цѣлыхъ чиселъ приводитъ опять къ цѣлымъ числамъ. Такимъ же образомъ цѣлыя положительныя числа будутъ группой относительно сложенія.

Совокупность раціональныхъ чиселъ будетъ представлять группу относительно всѣхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій.

Приведемъ еще геометрическій примѣръ. За операцію P будемъ считать опредѣленіе по тремъ точкамъ четвертой гармонической: тогда совокупность всѣхъ точекъ прямой (пунктуалъ) будетъ представлять группу.

Понятіе группы, конечно, чисто логическое понятіе.

Это понятіе, конечно, болѣе широкое, чѣмъ число, ибо только частью ариѳметическихъ аксіомъ утверждается слѣдующее свойство чиселъ: что ихъ совокупность относительно 4-хъ ариѳметическихъ дѣйствій образуетъ группу.

Идея группы можетъ выступить и тамъ, гдѣ нѣтъ никакого намека на математику. Можно, напримѣръ, сказать, что все человѣчество относительно брака, образуетъ группу.

За упомянутые объекты: a_1, a_2... можно принять также нѣкоторыя операціи.

Такъ что въ этомъ случаѣ P будетъ операціей надъ операціями. За P обычно принимаютъ просто соединеніе двухъ операцій т. е. производство двухъ операцій въ послѣдовательномъ порядкѣ.

Тогда опредѣленіемъ группы будетъ условіе:

$$a_j\, a_k = a_g$$

т. е. послѣдовательное производство двухъ операцій совокупность (a) равносильно одной операціи (a).

Группу операцій образуетъ совокупность всѣхъ проэктивныхъ преобразованій.

Проэк. преобразованіе на прямой опредѣляется формулой

$$x' = \frac{ax + b}{cx + \partial}$$

связующей координату точки съ координатой ея преобразованія.

Совокупность двухъ проэктивныхъ преобразованій

$$x' = \frac{ax+b}{cx+\partial},\ x'' = \frac{a'x'+b'}{c'x'+\partial'}$$

даетъ проэктивное преобразованіе:

$$x'' = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

Не останавливаясь на многочисленныхъ примѣрахъ группъ, укажемъ на то, что можно доказать рядъ теоремъ, относящихся къ группѣ, правда не наиболѣе общаго типа, но столь общаго, что подъ него подходятъ тѣ группы преобразованій съ которыхъ до сихъ поръ имѣло дѣло Математика. Для этого слѣдуетъ установить рядъ постулатовъ, опредѣляющихъ типъ группы, который можно назвать *нормальнымъ*.

Можно написать ихъ въ символической формѣ, обозначая черезъ o операцію и имѣя въ виду, что $a\,o\,b$ вообще отлично отъ $b\,o\,a$.

I) $a\,o\,b = c$ т. е. всегда имѣется результатъ причемъ согласно опредѣленію группы оно входитъ въ совокупность a, b, c..,

II) $(a\,o\,b)\,o\,c = a\,o\,(b\,o\,c)$ (ассоціативный законъ),

III) $i\,o\,i = i$

постулируется существованіе *идемпотента* (т. е. кимъ является 1 для умноженія, 0 или 1 для сложенія)

IV) постулируется единственность идемпотента,

V) *модулей* на право и налѣво

$$a\,o\,i_d = a \qquad i_g\,o\,a = a$$

VI) *взаимныхъ* элементовъ

$$a\,o\,a'_d = i \qquad a'_g\,o\,a = i$$

Это постулаты. Основываясь на нихъ можно доказать теоремы:

Тожество обоихъ модулей и обоихъ взаимныхъ элементовъ. Если $aob=aob'$, то $b=b'$.

Существованіе рѣшенія уравненія $aox=b$ и т. д.

Отсюда мы видимъ, что, идя по пути обобщенія, мы приходимъ къ понятію чисто логическому; не мѣняя самого метода изслѣдованія, мы изслѣдуемъ это понятіе, доказываемъ рядъ теоремъ, употребляя символистику, подобную математической.

Отсюда вполнѣ естественно вытекаетъ стремленіе свести всѣ математическія понятія и аксіомы къ чисто логическимъ, найти чисто логическія субстраты тѣмъ логическимъ схемамъ, въ которыя вкладывается Ариѳметика и Геометрія.

Это направленіе принадлежитъ школѣ логистиковъ Пеано, Рёссель, Кутюра и т. д.

Въ основѣ Ариѳметики и Геометріи они кладутъ чисто логическія аксіомы, ариѳметическія и геометрическія объекты они опредѣляютъ логически.

Сводя операціи формальной логики къ нѣсколькимъ основнымъ, они приводятъ ихъ къ операціямъ надъ символами и такимъ образомъ въ логикѣ мыслятъ математически.

Такимъ образомъ, если такъ можно выразиться, производится единовременно и логизація математики и математизація логики.

Но это сближеніе, или это поглощеніе Математики Логикой становится возможной только при расширеніи старой классической Логики, при включеніи въ ее новыхъ элементовъ.

Прежде всего приходится развивать на ряду съ логикой классовъ, каковой является классическая логика еще логику предложеній.

Классическая логика изучаетъ операціи надъ классами. Классическій силлогизмъ представляетъ включеніе и исключеніе индивидуумовъ и видовъ въ классы и изъ классовъ.

a есть *b*, *b* есть *c*, слѣдовательно *a* есть *c* представляетъ такую операцію:

a, принадлежащее классу *b* включается въ классъ *c*, ибо *b* принадлежитъ *c*.

Но въ томъ же силлогизмѣ можно видѣть операцію надъ предложеніями, установку связи между большой посылкой и заключеніемъ. Заключеніе вытекаетъ изъ большой посылки въ силу малой посылки.

Такимъ образомъ операція силлогизма подводится подъ весьма общее понятіе *выведенія.* Изъ предложенія *p* можетъ вытекать предложеніе *q* въ силу малой посылку, но можно разсматривать этотъ выводъ изъ *p—q* совершенно независимо отъ того, что обусловливаетъ этотъ выводъ. Можно разсматривать выводъ изъ *p—q* просто, какъ фактъ.

Логика предложеній раскрываетъ намъ, что не всѣ логическія операціи сводятся къ приложенію принциповъ тождества и противорѣчія.

Но этого мало. Силлогизмъ устанавливаетъ отношеніе индивидуума къ классу. Понятіе отношенія—предметъ логики, но не всякое отношеніе есть отношеніе индивидуума къ классу. Необходимо поэтому логику предложеній и логику классовъ дополнить логикой *отношеній.*

Но логистики имѣютъ не мало враговъ.

Пуанкарэ видитъ въ ихъ опредѣленіяхъ ложный кругъ, опредѣленіе неизвѣстнаго черезъ неизвѣстное.

Въ особенности рѣзкимъ выступаетъ это въ опредѣленіи Кутюра единицы:

„Одинъ", говоритъ Кутюра, „есть число элементовъ класса, два любыхъ элементовъ котораго тожественны".

Одинъ здѣсь опредѣляется черезъ два, и, если бы Кутюра спросилъ бы опредѣлить два, то по мнѣнію Пуанкарэ, онъ опредѣлилъ бы два черезъ единицу.

Мы не считаемъ, чтобы логистики были бы такъ виноваты, какъ это представляется Пуанкарэ, чтобы всѣ ихъ опредѣленія грѣшили бы въ томъ же отношеніи.

Приведенное выше словесное опредѣленіе освободится отъ этого обвиненія, если его нѣсколько иначе выразить:

„Одинъ есть число элементовъ класса со всѣми тожественными элементами".

Число два непріятное рѣзавшее ухо—исчезло.

Классъ со всѣми тожественными элементами—это вмѣстѣ съ тѣмъ тотъ, въ которомъ любыя два элемента представляются тожественными.

Обнаружимость тожественности любыхъ двухъ элементовъ—это не характерный признакъ, служащій опредѣленіемъ такого класса, а только лучшій способъ провѣрки, что данный классъ именно такой.

Здѣсь дѣлается такая же ошибка, какъ при опредѣленіи равныхъ треугольниковъ ихъ конгруэнтностью т. е. возможностью полнаго положенія одного на другой. На это послѣднее свойство слѣдуетъ смотрѣть какъ на свойство, опредѣляемо нѣкоторой аксіомой, имѣющее мѣсто для треугольниковъ (въ то время, какъ аналогичная аксіома не имѣетъ мѣста для тетраэдровъ): изъ нея вытекаетъ способъ для удостовѣренія въ равенствѣ треугольниковъ.

Но я вполнѣ согласенъ, что логистики не дали чисто логическихъ опредѣленій ариѳметическихъ объектовъ, да и не могутъ ихъ дать.

Всякое истинное опредѣленіе должно однозначно соотвѣтствовать опредѣляемому объекту, но конечно, такого соотвѣтствія въ логистическихъ опредѣленіяхъ не имѣется.

Говоря о логистикахъ, мы приходимъ къ вопросу о математическихъ опредѣленіяхъ причемъ будемъ говорить только о геометрическихъ опредѣленіяхъ.

Вотъ два кардинальныхъ вопроса, касающіяся математическихъ опредѣленій: Что можно опредѣлить и какую роль играетъ опредѣленіе въ математическомъ доказательствѣ?

Очевидно *не все* можетъ быть опредѣлено.

Если логистики и стараются логически опредѣлить число, то конечно они не имѣютъ никакого намѣренія опредѣлить логическія термины, входящія въ ихъ опредѣленія.

Основные геометрическіе элементы: плоскость, прямая и точки и связи между ними являются неопредѣлимыми геометрическими объектами.

Можно выставлять, какъ опредѣленіе тѣ основные постулаты, которымъ подчиняются эти элементы. Но постулаты эти не опредѣляютъ ни каждый въ отдѣльности, ни даже всѣ вмѣстѣ ни точки, ни прямой, ни плоскости.

Тѣ признаки, которыми приходится дополнять признаки, задаваемыя постулатами, опредѣляются интуиціей и ихъ выразить логическими терминами настолько невозможно, какъ объяснить цвѣтъ слѣпому съ помощью звуковъ.

Всякая попытка опредѣлить напр. точку приводитъ въ лучшемъ случаѣ къ опредѣленію точки съ помощью другихъ интуитивныхъ данныхъ, въ худшемъ опредѣленіе x черезъ x.

Опредѣленія могутъ быть чисто словесными сокращеніями—тогда будемъ имѣть *номинальныя* опредѣленія.

Примѣръ номинальнаго опредѣленія *катетъ*—сторона прямоугольнаго треугольника прилежащая къ прямому углу.

Роль номинальнаго опредѣленія вполнѣ ясна. Номинальное опредѣленіе сокращаетъ изложеніе доказательства, даетъ возможность вмѣсто того, чтобы каждый разъ говорить „сторона прямоугольнаго треугольника...." и т. д. употреблять одно слово: катетъ.

Такъ что логическаго въ собственномъ смыслѣ значенія номинальное опредѣленіе не имѣетъ.

Но, конечно, не всѣ геометрическія опредѣленія таловы.

Нельзя назвать обычное опредѣленіе круга номинальнымъ.

Нѣкоторые относятъ это опредѣленіе къ *генетическимъ* и считаютъ, что кромѣ номинальныхъ опредѣленій въ Геометріи возможны только генетическія т. е. такія, въ которыхъ дается способъ образованія опредѣляемаго об'екта съ помощью извѣстныхъ элементовъ.

Опредѣляя окружность, какъ геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ на одно и тоже разстояніе отъ данной точки мы вовсе не указываемъ этимъ способъ образованія или вычерчиванія круга (хотя это сейчасъ же выводится изъ его опредѣленія). Мы опредѣляемъ совокупность точекъ (пунктуалъ) удовлетворяющій опредѣленному условію. Этому пунктуалу отвѣчаетъ одна и только одна опредѣленная кривая, къ которой принадлежатъ всѣ эти точки или кривая—носитель этого пунктуала. Пунктуалъ не составляетъ кривой, но онъ однозначно съ ней связанъ.

Такимъ образомъ дѣло обстоитъ такъ:

Объектъ B дается заданіемъ объекта A однозначно съ нимъ связаннаго т. е. такимъ что, если дается A, то вмѣстѣ съ тѣмъ данъ B и если данъ B, то данъ и A. Но связь между A и B не можетъ быть опредѣлена въ логическихъ терминахъ, а дается только интуиціей. Въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто логическая эквивалентность A и B, какъ для постулатовъ такъ и для выводимыхъ изъ нихъ положеній. Такъ въ предложеніи: „двѣ точки опредѣляютъ пунктуалъ — пунктуалъ можно замѣнить прямой и сказать двѣ точки опредѣляютъ прямую.

Лекція II.

Гносеологія и Математика.

Въ заключеніи находится только то, что дано въ посылкахъ. Не даютъ ли правила формальной Логики одну тавтологію, маскировку тожествъ A есть A. Не представляютъ ли логическія схемы только мертвое орудіе, оживить которое могутъ только интуиція и опытъ? Пуанкарэ отрицаетъ, чтобы живое математическое разсужденіе, ведущее насъ отъ истинъ къ новымъ истинамъ представляло бы одну мертвую логическую схему. За живительный духъ, который движетъ математическое разсужденіе впередъ, онъ считаетъ *полную математическую индукцію* логически неопредѣлимую. Шагъ впередъ дѣлаетъ математика всякій разъ, когда принимаетъ этотъ принципъ:

Если какое либо свойство справедливо для 1 и если установлено, что оно справедливо для $n+1$, коль скоро оно справедливо для n, то оно вѣрно для всѣхъ цѣлыхъ чиселъ.

Пуанкарэ считаетъ, что примѣненіе этого принципа заключаетъ въ себѣ безконечное множество силлогизмовъ:

Теорема вѣрна для числа 1.

Если же она справедлива для 1, то вѣрна и для 2.

Слѣдовательно вѣрна для 2.

Если вѣрна для 2, то вѣрна для 3,

Слѣдовательно вѣрна для 3 и т. д.

Съ такимъ мнѣніемъ нельзя согласиться.

Конечно примѣненіе принципа полной индукціи можно представить безконечнымъ числомъ силлогизмовъ, но всѣ эти силлогизмы не трудно свести къ одному, если только признать принципъ индукціи или за опредѣленіе цѣлаго конечнаго числа (какъ Кутюра) или за характерное свойство, обнаружимое одной изъ аксіомъ, къ нему относящейся.

Невѣрно и то, что правила формальной логики даютъ только замаскированное тожество $A=A$. Ибо не только на этомъ принципѣ зиждутся эти правила.

Существуютъ принципы, отмѣчаемые Новой Логикой, совершенно не выводимыя изъ этого принципа, какъ напримѣръ принципъ упрощенія, относящійся къ логикѣ предложеній, выражаемый логической формулой:

$$p \frown q.) \cdot p$$

т. е. утвержденіе двухъ положеніе $p \, . \, q$ влечетъ утвержденіе одного изъ нихъ, содержащій въ себѣ операцію логическаго умноженія, которой нѣтъ въ принципѣ тожества. Поэтому опасеніе, что математическія построенія по правиламъ формальной логики будутъ замаскированными утвержденіями $A=A$ не имѣетъ основанія.

Трудность, а можетъ быть и полная невозможность чисто логическая обоснованіе математики происходитъ вслѣдствіе слѣдующихъ двухъ препятствій:

1) въ началѣ выступаетъ невозможность чисто логическаго опредѣленія математическихъ понятій по причинамъ, указаннымъ на первой лекціи,

2) въ дальнѣйшемъ чисто психологическая невозможность проведенія чисто логическихъ операцій безъ обращенія къ интуиціи.

Правда намъ кажется странной возможность построенія всей математики только съ помощью такого рода операцій, намъ кажется невѣроятнымъ, чтобы математика представляла только комбинацію однихъ и тѣхъ же элементовъ.

Но причина такой кажущейся невѣроятности чисто психологическая, это фактъ скрытыхъ аксiомъ, которыя и даютъ намъ своего рода ходули при логическихъ построеніяхъ. Полную систему аксіомъ намъ трудно, а можетъ быть психологически и невозможно собрать.

Но, если мы предположимъ ее собранной, то можно утверждать, что выводъ всѣхъ положеній Математики можетъ быть совершенъ по правиламъ формальной логики, при этомъ возможность эта разсматривается съ логической точки зрѣнія, а не въ психологической.

То что можетъ быть невозможно психологически, возможно логически. Но логическая точка зрѣнія отличается также и отъ гносеологической. Возможность вывода математическихъ положеніи изъ аксіомъ не есть еще возможность ихъ познанія, ибо познаніе не дается одной логикой.

Установка логическихъ аксіомъ для интуитивнаго матерьяла, подведеніе послѣдняго подъ логическія категоріи—требуетъ операцій которыя не могутъ быть выражены никакими логическими формулами.

Интеллектуализмъ Рёсселя и Кутюра́ заходитъ слишкомъ далеко, утверждая, что построеніе всего математическаго знанія возможно изъ чисто логическихъ понятій и аксіомъ.

Кантъ называетъ *аналитическими* сужденія такія въ которыхъ только раскрывается содержаніе подлежащаго *синтетическими* въ которыхъ подлежащему прибавляется нѣчто новое.

Тѣло—протяженно—сужденіе аналитическое, ибо уже въ понятіе тѣло входитъ признакъ протяженности.

Тѣло—вѣсомо—сужденіе синтетическое.

Для обоснованія интеллектуализма слѣдуетъ прежде всего доказать, что математическія сужденія не представляютъ сужденій синтетическихъ.

Для этого, конечно, открывается единственно возможный путь: доказать возможность чисто логическихъ опредѣленій математическихъ объектовъ и вывода изъ этихъ опредѣленій всѣхъ положеній Математики. Но легко видѣть, что этимъ Кантъ еще не опровергнутъ. Синтетическій моментъ отнюдь не въ выводѣ изъ аксіомъ, относящихся къ нѣкоторымъ логическимъ признакамъ геом. объектовъ (принимаемыхъ логистиками за опредѣленія) дальнѣйшихъ положеній, но въ приписаніи объекту, данному интуиціей опредѣленныхъ логическихъ признаковъ.

Прямая дается намъ интуиціей, въ этомъ интуитивно данномъ отнюдь не заключается опредѣляемость прямой двумя точками или пересѣкаемость двухъ прямыхъ въ одной точкѣ или аксіома о параллельныхъ. Для этого необходимъ актъ, привносящій нѣчто, не заключавшееся въ первоначально данномъ представленіи прямой.

Синтетическія сужденія въ Геометріи именно и возможны, согласно, Канту благодаря пространственной интуиціи. Гносеологія поэтому выдвигаетъ на первый планъ проблемму о пространствѣ и о реальной (но не логической) возможности не-эвклидовыхъ пространствъ.

Въ популярно-научныхъ сочиненіяхъ, относящихся къ не-эвклидовымъ Геометріямъ, часто для оправданія существованія послѣднихъ приводятся аргументы въ пользу возможности реальнаго существованія пространства съ устанавливаемыми ими свойствами. Наиболѣе доступной для пониманія является наивно-реалистическая и эмпирическая точка зрѣнія. Пространство разсматривается какъ вещь, которая представляется намъ почти такой же, какъ она въ дѣйствительности. Опытъ знакомитъ насъ со свойствами пространства совершенно также, какъ онъ знакомитъ насъ со свойствами окружающихъ предметовъ и совершенно также, какъ мы можемъ сдѣлать незначительную ошибку въ какихъ либо опытныхъ измѣреніяхъ, мы можемъ сдѣлать или даже дѣлаемъ въ тѣхъ основныхъ свойствахъ—которыя мы на основаніи опыта приписываемъ пространству. Мы можемъ напр. ошибиться относительно аксіомы о параллельныхъ, утверждая существованіе одной прямой, проведенной черезъ точку M и не пересѣкающей данную L, *не замѣтивъ* безконечнаго множества такихъ прямыхъ, заключающихся въ очень маломъ трудно или можетъ быть совершенно недоступномъ опыту.

Согласно этому воззрѣнію: математическія знанія становятся возможны только благодаря опытной индукціи, предшествующей логическимъ построеніямъ.

Эти взгляды развиты Гельмгольцемъ. По Гельмгольцу напр. даже аксіома свободной подвижности, утверждающая возможность неизмѣннаго передвиженія геометрическихъ фигуръ, лежащая въ основѣ ученія о конгруэнціи дается опытомъ, наблюденіемъ твердыхъ, не деформизирующихся тѣлъ. Существо, живущее въ мірѣ быстро дефюмирующихся облаковъ и водяныхъ теченій, не могло бы имѣть подобной аксіомы.

Но уже въ этомъ взглядѣ ясно выступаетъ ошибка эмпириковъ. Неизмѣнность или деформація твердаго тѣла сознается сравненіемъ его формы съ первоначальной т. е. измѣреніемъ. Измѣреніе же само предполагаетъ неизмѣнную мѣру т. е. логически постулируетъ свободную подвижность.

Но, если, стоя на реалистической точкѣ зрѣнія, признать пространство реально существующимъ, но не только субъективной формой нашей интуиціи, какъ это дѣлаетъ Кантъ, то было бы разумнѣе предполагать ошибку въ его воспріятіи гораздо больше, чѣмъ та, которая обнаруживается въ замѣнъ дѣйствительно существующей Геометріи Лобачевскаго „неточной" эвклидовой Геометріей.

При реалистическихъ предпосылкахъ несравненно послѣдовательнѣе Дельбёфъ. По его мнѣнію прямые, круги, параболы нашего ума не суть среднія приближенія, результаты опытный индукціи, это типы, подражанія реальнымъ явленіямъ, то что мы получаемъ первымъ такъ сказать грубымъ приближеніемъ, въ предположеніи, что нѣтъ разнообразія въ пространствѣ и времени". Поэтому по Дельбефу мы получаемъ два пространства: одно идеальное, геометрическое, другое эмпирическое, причемъ послѣднее есть вмѣстѣ съ тѣмъ реальное.

Постулатъ возможности существованія подобныхъ фигуръ (аксіома Валлиса), эквивалентный постулату о параллельныхъ, выставляется Дельбефомъ, какъ одно изъ основныхъ свойствъ идеальнаго пространства, какъ основной постулатъ *однородности* (гомогенности), который формулируется слѣдующимъ образомъ.

„Всякій quantum можно разсматривать какъ уменьшенный или увеличенный образъ бóльшаго и меньшаго quantum".

„Сказать, замѣчаеть Дельбефъ, что пространство, которое мы населяемъ, Эвклидово, что фигуры могутъ быть вычерчены въ различныхъ маштабахъ, сводится къ тому, чтобы сказать, что, если всѣ измѣренія во Вселенной будутъ увеличены или уменьшены въ одинаковомъ отношеніи мы не будемъ въ состояніи замѣтить этого измѣненія; это сказать: наша вселенная не имѣетъ обсолютный величины, а только относительную". Чтобы образно показать, что реальному пространству не присуще свойство гомогенности Дельбефъ заставляетъ фиктивное существо. Мегамикросъ совершать путешествіе, измѣняя свои размѣры переходя изъ нашего міръ въ міръ лилипутовъ, но являясь въ этомъ послѣднемъ не въ роли Гуливера но сокращаясь до размѣровъ лилипута. Перелетъ Мегамикроса въ это волшебное царство совершается во время его сна. Предположимъ, что въ этой странѣ сохранена полная пропорціональность частей, что планета лилипутовъ представляетъ нашу землю во всѣхъ ея деталяхъ, но только съ радіусомъ уменьшеннымъ скажемъ въ 20 разъ.

Если эмпирическое пространство однородно, какъ геометрическое, то Мегамикросъ никогда не догадается, что онъ совершилъ во время сна путешествіе.

Но на самомъ дѣлѣ будетъ не такъ.

На каждомъ шагу онъ будетъ встрѣчаться съ такими явленіями, которыя совершенно ясно будутъ говорить ему, что онъ находится не на своей родинѣ. Такъ напримѣръ, если для утоленія своей жажды на своей родинѣ выпивалъ ежедневно 4 стакана воды, то въ странѣ лилипутовъ, онъ сейчасъ же замѣтить, что 4 лилипутовыхъ стакана будетъ ему мало, ибо въ то время какъ какъ объемъ стакана уменьшился въ $20^3=8000$ разъ, поверхность тѣла его, а потому и скорость испаренія уменьшилась лишь въ $20^2=400$ разъ Поэтому ему придется выпить не 4, а 80 стакановъ.

Ясно что при возрѣніяхъ Дельбефа не-Эвклидова Геометрія не найдетъ себѣ мѣста, ибо геометричеекое пространство—Эвклидово, а эмпирическое таково, что для нея не можетъ быть уже никакой Геометріи. Но противъ Дельбефа можно выставить возраженіе, состоящее въ томъ, что онъ опровергаетъ однородность не пространства, а вселенной. Пространство получается только по исключеніи различнаго рода чисто физическихъ свойствъ.

Мегамикросъ должно былъ совершить прогулку въ пространствѣ, какъ безплотный геометрическій духъ, интересуясь только геометрическими фигурами. Если бы ему необходимо было бы создать болѣе богатую обстановку т. е. окружить эти фигуры „подобной" настоящей вселенной, такой, чтобы невозможно было уловить измѣненіе, то необходимо было бы уменьшить и въ соотвѣтственной препорціи молекулы, а въ этомъ случаѣ, какъ показалъ Лешаля, вычисленія Дельбефа сказываются невѣрнымы.

Если Дельбефъ отдѣляетъ геометрическое пространство отъ эмпирическаго и послѣднее признаетъ реальнымъ, то Лотце, тоже противникъ Метагеометріи, отожествляетъ геометрическое съ эмпирическимъ, противополагая ему реальное. У него тоже два пространства, причемъ второе еще менѣе походитъ на геометрическое, чѣмъ эмирическое пространство Дельбефа. Оно, по выраженію самою Лотце, также отличается отъ геометрическаго пространства, какъ интервалъ между двумя нотами отличается отъ прямой линіи. Оно состоитъ во взаимоотношеніи между монадами, сознающими эти взаимоотношенія, какъ модификацію ихъ внутреннихъ состоящій. Такимъ образомъ это „второе" пространство таково, что представляется невозможной для нея какая-либо Геометрія. А такъ какъ первое пространство единственное, представляемое нами Эвклидовымъ, то отсюда вытекаетъ невозможность другихъ пространствъ, кромѣ Эвклидова.

Вліяніе Канта достаточно сильно въ Гносеологіи, чтобы грубо реалистическія и эмпирическія взгляды могли бы долго выжить. Болѣе глубокій анализъ естественно приводитъ метагеометровъ къ Канту. Въ основѣ гносеологическихъ взглядовъ Канта лежитъ ученіе о пространствѣ и времени, какъ апріорныхъ формахъ интуиціи. По ученіи Канта пространство не дается намъ опытомъ, а само предваряетъ всякій опытъ и въ противоположность ученію Ньютона не представляетъ внѣ насъ находящееся вмѣстилище вещей или ученію Лейбница свойство этихъ послѣднихъ, а представляетъ вполнѣ субъективную форму, находясь не внѣ насъ, а внутри насъ.

Аксіомы Ариѳметики и Геометріи даются интуиціей и представлятъ синтетическія сужденія.

Защитники иного существованія Метагеометріи, чѣмъ логическое (т. е. свободу отъ противорѣчія) должны были сдѣлать уступки Канту. Сдаться ему вполнѣ они не могли, ибо „чистый Кантъ" признавалъ только одну Геометрію т. е. ту Эвклидову Геометрію, которая дается интуиціей. Апріорность пространствъ доказывается Кантомъ аподиктичностью (т. е. характеромъ безусловной необходимости аксіомъ) и, обратно, изъ апріорности выводится аподиктичность аксіомъ.

Признавая другія Геометріи мы посягаемъ на аподиктичность аксіомъ и вмѣстѣ и тѣми и на апріорность пространства.

Поэтому Канту слѣдовало не во всемъ уступать, необходимо было создать новаго Канта или „полу-Канта".

Полу-Кантіанцемъ является Рёссель, справедливо отдѣляющій гносеолигическую точку зрѣнія отъ психологической, смѣшеніе которыхъ наблюдается у Канта. Отличая вопросъ о субъективности пространства, какъ вопросъ психологическій отъ вопроса объ апріорности, какъ вопроса гносеологическаго, Рёссель изслѣдуетъ только послѣдній, признавая только нѣкоторыя свойства пространства предваряющими опытъ.

Но въ то время, какъ для Канта пространство представляетъ голую интуицію, причемъ аксіомы Геометріи даются только интуиціею, по Рёсселю пространство предваряетъ опытъ, какъ концепція, понятіе, изъ котораго вытекаетъ логически рядъ пространственныхъ аксіомъ.

Апріорнымъ пространство является только, какъ концепція *формы внѣшности* дающей возможность разсматривать объекты опыта, какъ находящіяся во внѣположности, одно внѣ другого. Всѣ остальныя признаки пространства не предваряютъ опытъ, а являются элементами апостеріорными, данными опытомъ.

Нельзя сказать, чтобы выводы апріорныхъ аксіомъ изъ конципціи формы внѣшности можно было бы признать строгими и едва ли Рессель могъ бы ихъ уложить въ строго логическія схемы, построенныя по правиламъ его формальной Логики.

Аксіомами апріорными являются прежде всего ея зрительныя аксіомы. Изъ аксіомъ метрическихъ:

1) аксіома свободнаго передвиженія:

Пространственныя величины могутъ быть перемѣщаемы безъ деформацій.

2) Аксіома измѣреній:

Пространство имѣетъ конечное число измѣреніи.

3) Аксіома разстоянія:

Существуетъ одно и только одно отношеніе между двумя точками.

Аксіома о параллельныхъ является въ числѣ апостеріорныхъ аксіомъ.

Намъ представляется главнымъ возраженіемъ противъ реальности не-Эквилидовыхъ Геометрій это то, что при эмпирическомъ взглядѣ Гельмгольца и полу-эмпирическомъ вглядѣ Рёсселя остается необъясненной аподиктичность геометрическихъ аксіомъ. Поэтому, приходится или отрицать этотъ фактъ или давать то объясненіе якобы кажущейся аподиктичности аксіомъ, которое мы находили у Юма и недостаточность котораго вполнѣ доказана Кантомъ. Сколько бы разъ не повторялся бы опытъ, онъ никогда не могъ бы дать тотъ характеръ безусловной необходимости, который имѣютъ геометрическія аксіомы. Степень очевидности аксіомы о гомогенности пространствъ едва ли меньше, чѣмъ аксіомы объ изогенности пространства, утверждаемой первой метр. апріорной аксіомой Рёсселя и этотъ фактъ допускаетъ единственное объясненіе, что обѣ аксіомы имѣютъ одно и тоже происхожденіе, одну и ту же гносеологическую цѣнность.

Какъ одну изъ аксіомъ, логически вытекающихъ изъ концепціи формы внѣшности Рёссель выставляетъ аксіому измѣреній, требующую обязательно конечнаго числа измѣреній для пространства. Трехмѣрность же пространствъ т. е. тотъ фактъ, что число измѣреній равно тремъ, Рёссель считаетъ за опытное данное. Вслѣдствіе того, что число измѣреній число цѣлое, а эмпирическое пространство должно мало отличаться отъ дѣйствительнаго, то трехмѣрность нашего пространства должна быть признана за достовѣрный фактъ.

Отсюда слѣдуетъ, что, напр., Геометрія четырехмѣрнаго пространства не можетъ претендовать на того рода возможность, которая предоставляется Геометріи Лобачевскаго. По Рёсселю и эмпирикамъ Эвклидова Геометрія можетъ представлять и, вѣроятно, и представляетъ приближеніе къ „истинной" Геометріи Лобачевскаго или Римана. Что касается до четырехмѣрной Геометріи, то она имѣетъ исключительно логическое значеніе.

Намъ кажется, что дѣло обстоитъ, какъ разъ необоротъ. Если сознательная душевная жизнь не представляетъ всей полноты психической жизни, если сознаніе должно быть дополнено подсознаніемъ, въ которомъ психическими явленіями управляютъ тѣ же законы, которые мы усматриваемъ въ области, озаренной сознаніемъ, то будетъ вполнѣ естественно мыслить форму интуиціи для расширеннаго опыта безсознательной психики тоже шире. Если сознанію доступна только гиперплоскость, или только поверхность четырехмѣрнено пространства, то въ глубинѣ безсознательнаго можетъ выступить интуиція четвертаго измѣреніе, не отвергающая трехмѣрную Геометрію, а пополняющая ее.

Интуиція намъ говоритъ, что то пространство, которое находится въ нашемъ сознаніи имѣетъ три измѣренія, но оно ничего не можетъ сказать о четвертомъ измѣреніи, которое оказывается подъ порогомъ сознанія.

Совершенно иначе съ не-Эвклидовой трехмѣрной Геометріей, здѣсь прежде всего слѣдуетъ отвергнуть то, что утверждаетъ въ нашемъ сознаніи интуиція. Послѣдняя даетъ намъ не только факты, но вмѣстѣ съ тѣмъ и характеръ безусловной необходимости этихъ фактовъ.

Геометрія четырехъ измѣреній получается, если мы къ основнымъ геометрическимъ объектамъ: точкѣ, прямой и плоскости присоединимъ еще гиперплоскость и дополнимъ постулаты трехмѣрнаго пространствъ нѣкоторыми постулатами, относящимися къ четырехмѣрному. Найти послѣдніи не трудно. Для этого слѣдуетъ усмотрѣть, какимъ образомъ совершается переходъ отъ постулатовъ двухмѣрнаго къ постулатамъ трехмѣрнаго пространства. Такъ можно сказать: что четыре точки, не лежащія въ одной плоскости или на одной прямой опредѣляютъ гиперплоскость и четыре гиперплоскости не проходящія черезъ одну плоскость или одну прямую опредѣляютъ точку.

Многія теоремы четырехмѣрнаго пространства могутъ быть построены непосредственно, какъ аналогоны соотвѣтствующихъ теоремъ трехмѣрнено пространствъ. Примѣромъ ряда понятій—аналогоновъ можетъ служить рядъ простѣйшихъ образовъ:

въ пространствѣ

одного измѣренія—двѣ точки,
двухъ—три прямыя—треугольникъ,
трехъ—четыре плоскости—тетраэдръ.

Слѣдуя правилу, по которому переходили отъ одного аналогона къ слѣдующему можемъ четвернымъ членомъ упомянутаго ряда поставить:

въ пространствѣ 4-хъ измѣреніи, четырехмѣрное тѣло, образованное пятью гиперплоскостями—пентаэдроидъ.

Изученіе пентаэдроида производится проэктированіемъ его въ гиперплоскость, которую представляетъ все наше трехмѣрное пространствъ.

Чтобы получить проэкцію

треугольника на прямую, надо взять три точки на прямой и отрѣзки ими образуемыя,

тетраэдра на плоскости—четыре точки на плоскости и треугольники, ими образуемыя.

Отсюда слѣдуетъ, что проэкція пентаэдра получится, взявъ пять точекъ въ пространствѣ (гиперплоскости) и пять тетраэдровъ, ими образуемыхъ.

Можно слѣдуя правилу аналогоновъ создать и Механику четырехмѣрного пространства.

По пути смѣлыхъ обобщеній можно идти и дальше, разсматривая время, какъ многообразіе не одного, а двухъ измѣреній, мысля то, что относительно даннаго момента не представлятетъ ни настоящее, ни прошедшее, ни будущее. Въ послѣднее время много шума надѣлали еще болѣе смѣлые взгляды Минковскаго. Въ Механикѣ четырехмѣрнаго пространствъ приходится, слѣдуя аналогіи трехмѣрной Механики разсматривать при движеніи точки, ея четыре координаты: x, y, z, u, какъ функцій времени τ.

Движеніе будетъ происходитъ въ гиперплоскости т. е. въ нашемъ трехмѣрномъ пространствѣ, если x, y, z, u для всякаго τ связаны линейнымъ соотношеніемъ:

$$Ax + By + Cz + Du + \mathrm{E} = O,$$

представляющими уравненіе гиперплоскости.

Мы получимъ уравненіе движенія на нѣкоторый гиперповерхности, если свяжемъ (x, y, z, u) общимъ уравненіемъ.

$$\Omega(x, y, z, u) = o \quad (*)$$

Можно сдѣлать такое предположеніе: наше пространство не гиперплоскость, а нѣкоторыя, отличная отъ нея гиперповерхность, для четырехмѣрнаго пространства (а слѣдовательно и для гиперплоскостей, въ немъ заключающихся) объемлющаго эту гиперповерхность имѣютъ мѣсто не-Эвклидова Геометрія. Источникомъ ошибочнаго взгляда на наше пространство, какъ пространство Эвклидово, служитъ то, что мы нѣкоторыя кривыя, мало отличающіяся отъ прямыхъ, принимаемъ за прямыя приписывая послѣднимъ тѣ свойства, которыя на самомъ дѣлѣ присущи первымъ.

Воздерживаясь отъ возраженій на эти взгляды. укажемъ, въ какомъ, направленіи должно идти дальнѣйшее ихъ обобщеніе. Для этого слѣдуетъ только ур. (*) замѣнить болѣе общимъ

$$\Omega(x, y, z, u, \tau) = o$$

т. е. принять эту гиперповерхность деформирующейся въ теченіе времени.

Въ этого рода пространствѣ и строится Механика Минковскаго. Физическія явленія происходятъ въ четырехмѣрномъ пространствѣ (x, y, z, u). Но, что такое представляетъ координата u?

Этой координатой является время t, то только иное, чѣмъ упомянутое выше τ.

Въ Механикѣ Минковскаго приходится различать абсолютное время t отъ собственнаго τ.

Въ этихъ возрѣніяхъ мы имѣемъ не одно пространство, а особое сочетаніе пространство—время, находящееся въ такомъ же отношенiи къ геометр. пространство абсолютное время, въ какомъ у эмпириковъ-метагеометровъ не-Эвклидово пространство находится въ отношенiе къ Эвклидову.

Возраженiя, упомянутыя нами, остаются и здѣсь еще въ бóльшей силѣ.

Но возрѣнiя Минковскаго имѣютъ еще свой спецiальный недостатокъ: это чрезвычайная сложность и искусственность.

Если въ нихъ видѣть нѣчто большее, чѣмъ одну геометрическую интерпретацiю, то надо сознаться, что фигурированiе четвертаго измѣренiя времени, на ряду съ однородными другими тремя измѣренiями совершенно отличными отъ этого четвертаго, уже достаточно для того чтобы признать весь этотъ сложный аппаратъ хотя и генiально задуманнымъ, но совершенно невѣроятнымъ.

Лекція III

Психологія и Математика.

Можетъ ли быть тѣсная связь между столь разнородными науками, какъ Математика и Психологія? Я думаю: Вамъ покажется весьма страннымъ мое намѣреніе защитить въ настоящей лекціи слѣдующій двойной тезисъ: Математика, или, лучше скажу, будущая Математика въ своихъ доказательствахъ будетъ выполнять требованія Психологіи, а будущая Психологія проникнется Математикой.

Мы уже теперь довольно капризны къ доказательствамъ. Мы требуемъ *не какое либо* доказательство, а доказательство простое и изящное. Удовлетворить требованіе Логики мало, необходимо принять во вниманіе и притязанія Психологіи.

Изучая теорію функцій отъ комплекснаго перемѣннаго, мы интерпретируемъ геометрически комплексное перемѣнное $z=x+yi$, представляя его точкой на плоскости съ координатами (x, y).

Измѣненіе z мы представляемъ движеніемъ этой точки. Конечно мы могли бы изучать комплексное перемѣнное и чисто аналитически, не прибѣгая къ геометрическому образу.

Теорему: „модуль суммы меньше или равенъ суммѣ модулей" мы можемъ доказать, не вводя геометрическаго представленія комплекснаго числа, хотя всякій согласится что эта теорема проще всего доказывается именно геометрически.

Въ настоящее время въ Анализѣ геометрическій методъ получилъ особенное распространеніе главнымъ образомъ благодаря идеемъ Ф. Клейна. Въ двухъ отдѣлахъ чистой Математики твердо установился геометрическій характеръ мышленія, въ теоріи дифференціальныхъ уравненій, благодаря теоріи характеристикъ и въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, благодаря изслѣдованіямъ Клебша.

Абелевъ интегралъ т. е. интегралъ отъ алгебраической функціи можно представить въ формѣ

$$\int F(x.y)\,ax,$$

гдѣ F раціональная функція (x, y), а y опредѣляется алгебраическимъ уравненіемъ

$$f(x, y) = o$$

Говорятъ, что Абелевъ интегралъ $\int F(x, y)dx$ опредѣляется алгебраической кривой $f(x, y)=o$, воображая себѣ точку (x, y), опредѣляемую координатами $(x.y)$. Введя этотъ геометрическій языкъ, основную Абелеву теорему можемъ формулировать слѣдующимъ образомъ:

„Если пересѣчь кривую $f(x, y)=o$ нѣкоторой деформирующейся кривой $\varphi(x, y) = o$ то сумма интеграловъ перваго рода

$$\sum \int_{(x_0, y_0)}^{(x_i, y_i)} F(x, y)dx,$$

относящихся къ точкамъ пересѣченія этихъ кривыхъ сохраняетъ при деформированіи постоянное значеніе".

Не представляетъ труда освободить эту теорему отъ ея геометрической оболочки, не представляетъ труда и всѣ, вытекающія изъ нея, теоремы переложить съ геометрическаго языка на чисто алгебраической и можно продолжать мыслить, двигая впередъ теорію Абелевыхъ интеграловъ, отказавшись отъ всякихъ геометрическихъ образовъ.

Отъ всѣхъ этихъ образовъ съ чисто логической точки зрѣнія мы не имѣемъ никакой выгоды. Скажу болѣе, есть извѣстная невыгода.

Здѣсь имѣетъ своего рода грѣхъ противъ логики построенія. Съ этой точки зрѣнія Анализъ долженъ быть свободнымъ отъ геометрическихъ образовъ, черпая изъ одного опредѣленнаго источника свои методы, но не забѣгая въ области Геометріи, которую Анализъ долженъ предварять.

Кромѣ того, легко видѣть, что тѣ образы, которыя служатъ намъ помощью, при введеніи упомянутыхъ выше геометрическихъ интерпретацій, въ сущности говоря, логически недозволенные образы. Пересѣкая кривую, опредѣляющую Абелевъ интегралъ, какой либо другой кривой, мы говоримъ и воображаемъ себѣ точки пересѣченія, какъ въ томъ случаѣ, когда эти точки вещественны, такъ и въ томъ случаѣ, когда отъ мнимы.

Причина того безсилія логистики, на которую указываетъ Пуанкарэ, указывая, какъ на одну изъ побѣдъ выводъ съ помощью 27 уравненій результата: „единица есть число" чисто психологическая.

Интуиція, а не формальная логика съ логическими обозначеніями представляетъ тѣ крылья, на которыхъ мы улетаемъ въ самыя отдаленныя области абстракціи. Эти крылья даетъ въ формѣ вышеупомянутыхъ геометрическихъ интерпретацій психологическое чутье. Безсознательно наше мышленіе движется по линіи наименьшаго сопротивленія. Но то, что мы теперь дѣлаемъ безсознательно, въ будущемъ можетъ послужить предметомъ сознательнаго научнаго изслѣдованія и послѣ можетъ дать результаты, на основаніи которыхъ мы будемъ предпочитать одинъ путь другому, сознательно считаться съ экономіей мыслительной работы.

Почему намъ такъ трудно идти исключительно логическимъ путемъ и почему мы чувствуемъ такое облегченіе, когда параллельно умозрѣнію раскладываются и имъ соотвѣтствующіе образы?

Отрѣшаясь отъ интуиціи мысль уподобляется человѣку, который долженъ говорить со связанными руками и ногами. Способности души такъ тѣсно между собой связаны, что невозможно въ дѣйствіе привести одну, не затрагивая другой, и, стѣсняя одну, мы подвергаемъ стѣсненію и другія.

Психологическое изслѣдованіе доказательствъ съ точки зрѣнія ихъ воспріимчивости имѣетъ значеніе не только для преподаванія, но имѣетъ и научное значеніе.

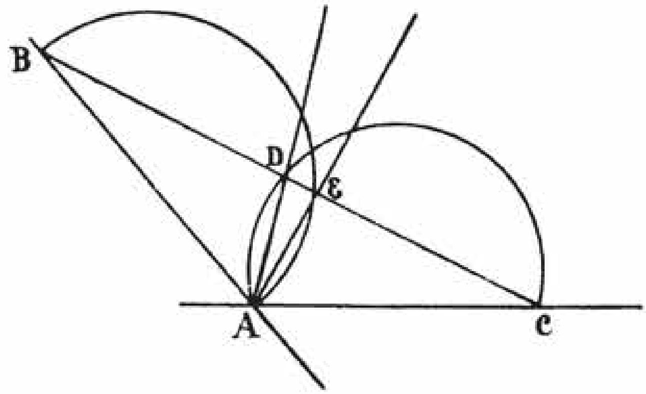
Жизнь коротка и наука должна позаботиться о томъ, чтобы въ кратчайшее время и легчайшимъ путемъ были усвоены ея результаты для того, чтобы у ученаго хватило времени не только на изученіе сочиненій другихъ, но и на движеніе впередъ научнаго изслѣдованія.

Но Психологіи суждено не только изыскивать средства, ведущія къ большей усвояемости доказательствъ, но и пути, гдѣ представлялось бы меньше вѣроятности ошибиться. Психологія математическихъ ошибокъ ждетъ психологовъ—изслѣдователей, важнымъ представляется даже одинъ фактическій матерьялъ, который долженъ послужить основаніемъ для теоретическихъ выводовъ, имѣющихъ значеніе для психологіи не только математическаго мышленія, но и мышленія въ болѣе широкомъ смыслѣ. Извѣстныя математическіе софизмы прежде всего даютъ такой матерьялъ.

Обыкновенно удовлетворяются только ихъ опроверженіемъ. Но слѣдуетъ взглянуть на нихъ нѣсколько глубже; изслѣдовать ихъ происхожденіе.

Возьмемъ для примѣра слѣдующій извѣстный софизмъ.

На сторонахъ AC, AB тупоугольнаго треугольника ABC опишемъ, какъ на діаметрахъ полуокружности.

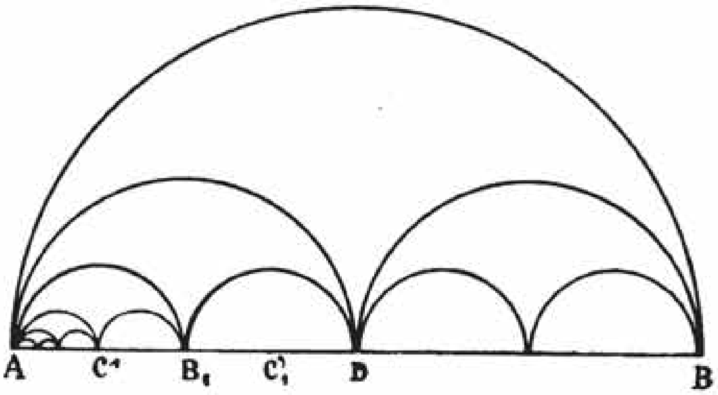


Точки пересѣченія D, E съ третьей стороны BC соединимъ съ A. Углы ADB и AEC, какъ опирающіяся сторонами на діаметры—прямыя. Откуда заключаемъ, что на прямую BC изъ точки A можно провести два перпендикуляра AD и AE.

Источникъ ошибки заключается въ неправильности чертежа. Легко обнаружить, что прямая CB, какъ разъ проходитъ черезъ точку Q, пересѣченіе полуокружностей и, конечно, въ этомъ случаѣ все наше доказательство о существованіи двухъ перпендикуляровъ рушится.

Ошибка произошла оттого, что мы употребили „недоказанный" чертежъ, были слишкомъ довѣрчивы къ интуиціи. Интуиція даетъ намъ идеальныя точки, прямыя и плоскости, даетъ простѣйшія свойства, но болѣе сложныя взаимоотношенія она опредѣляетъ только въ общихъ чертахъ. Она говоритъ о пересѣченіи круговъ прямой CB, но она ничего не говоритъ о томъ, что это пересѣченіе будетъ именно въ точкѣ Q. Другой родъ софизмовъ основывается на смѣшеніи чисто-интуитивныхъ элементовъ съ ихъ чувственными образами, напримѣръ въ смѣшеніи точекъ съ очень малыми отрѣзками или кругами очень малыхъ радіусовъ. Сюда относится рядъ софизмовъ, указываемыхъ Клейномъ, грубымъ представителемъ которыхъ является слѣдующій.

Взявъ полуокружность ABC радіуса $= 1$ получимъ для ея длины значеніе $= \pi$. Построимъ на ея радіусахъ какъ на діаметрахъ другія двѣ полуокружности $AC'' B_1$, $B_1 C_1' D$.



Для суммы ихъ длинъ будемъ имѣть значеніе опять$=\pi$. Поступая съ этими полуокружностями такъ, какъ мы поступали съ ACB полуокружности діаметровъ $= 1/4$ $AC_1'' B_1'$, $AC_2'' B_1$, $B_1 C_3'' B_2'$, $B_2' C_4'' B$ сумма длинъ которыхъ$=\pi$. Продолжая такимъ образомъ дальше, доказываемъ, что длина полуокружности ABC равна длинѣ кривой, образованной полуокружностями построенными на частяхъ AB, какъ бы малы ни были эти части. Но съ уменьшеніемъ ихъ діаметровъ кривая эта приближается къ прямой AB, откуда заключаемъ о равенствѣ длины ACB (полуокружности) діаметру т. е. приходомъ къ явно абсурдному результату.

Конечно ошибка кроется въ утвержденіи, что предѣлъ изслѣдуемой, составленной изъ полуокружностей, кривой равенъ AB, которое является черезъ отожествленіе полуокружностей безконечно—малыхъ радіусовъ съ ихъ діаметрами, безконечно-малыми отрѣзками AB.

Это ошибка не чистой интуиціи, а грубаго чувственнаго образа, ибо чистая интуиція при указанной выше операціи приводятъ насъ всегда отъ полуокружностей къ полуокружностямъ, никогда не дѣлая скачка къ отрѣзку.

Между тѣмъ, какъ чувственный образъ, напримѣръ, тотъ, который мы получаемъ, вычерчивая упомянутыя полуокружности чернилами послѣ нѣкотораго числа операцій даетъ уже не полуокружность, а маленькое чернильное пятно т. е. тотъ образъ который отвѣчаетъ безконечно малому отрѣзку AB.

Такой же источникъ имѣетъ тотъ неправильный взглядъ, который разсматриваетъ прямую, состоящей изъ точекъ. Какъ бы мы ни дѣлили прямую, мы никогда не получимъ точекъ. Прямая является только носителемъ точекъ. Она неизмѣнно и однозначно связана съ непрерывнымъ рядомъ точекъ или пунктуаломъ, ей принадлежащимъ.

Если данъ пунктуалъ, то дана и прямая, и, если дана прямая, то вмѣстѣ съ тѣмъ данъ и пунктуалъ.

Опредѣлить въ чемъ состоитъ эта „принадлежность" въ логическихъ терминахъ, конечно, это невозможно.

Такого же рода заблужденіе, отожествляющее отрѣзокъ прямой съ прямоугольникомъ безконечно - малаго основанія.

Въ младенческую эпоху исчисленія безконечно-малыхъ выступаютъ эти ошибки у Кавальери въ его „исчисленіи недѣлимыхъ". Криволинейная трапеція безконечно близкими прямыми $\| OY$ разбивается имъ на „недѣлимыя", на безконечно-малыя криволинейныя трапеціи, въ вычисленіе предѣла суммы которыхъ онъ совершенно правильно замѣняетъ ихъ входящими прямоугольниками. Но послѣднія онъ, уже совершенно неправильно, отожествлнетъ съ отрѣзками прямыхъ $\| OY$ и считаетъ за опредѣленіе суммы недѣлимыхъ подсчетъ этихъ отрѣзковъ.

Этого рода ошибки чаще всего встрѣчаются въ разсужденіяхъ философовъ не математиковъ, какъ менѣе привыкшихъ къ чистой геометрической интуиціи.

Интереснымъ психологическимъ изслѣдованіемъ является изслѣдованіе тѣхъ математическихъ ошибокъ, которыя происходятъ при самомъ процессѣ мышленія.

Такія математическія ошибки ничто иное, какъ погрѣшности памяти или вниманія.

Вотъ схема математическихъ ошибокъ довольно общаго типа.

Объекту A приписывается признакъ α: означимъ это положеніе черезъ (A, α)

Вниманіе отвлекается отъ A къ B, затѣмъ B приписывается признакъ B, отвлекаются отъ B къ C, вспоминаютъ (B, β). Ошибка состоитъ въ томъ, что вмѣсто (B, β) берутъ (B, α).

Но подъ этотъ типъ еще не подходятъ всѣ математическія ошибки. Въ ошибкахъ доказательствъ мы имѣемъ слѣдующій фактъ: посылка (A, α) замѣняется другой (A, β), гдѣ β не приписывался еще ни одному объекту, но по своему сходству или по смежности, можетъ легко смѣшаться въ памяти съ α. Наиболѣе частой и трудно избѣгаемой ошибкой является та, при которой β представляетъ болѣе общій случай, чѣми α. Положеніе (A, β) сперва утверждается при нѣкоторыхъ, часто только подразумѣваемыхъ условіяхъ. Объ этомъ въ дальнѣйшемъ ходѣ доказательства совершенно забывается и положеніе (A, β) берется во всей его общности.

Я говорю, что эти ошибки въ Математикѣ весьма часты и трудно избѣгаемы, такъ какъ, если бы математикъ всякій разъ упоминалъ бы объ ограниченіяхъ, которыя должны подразумѣваться, онъ сдѣлался бы слишкомъ скучнымъ, и, утруждая вниманіе отклоненіями отъ основной темы, могъ бы проиграть въ ясности. Такъ математики говорятъ въ нѣсколькихъ главахъ о функціяхъ, подразумѣвая ихъ непрерывными, хотя объ этомъ ограниченіи упоминается только на первой страницѣ первой главы. О томъ, что функція принадлежитъ къ типу аналитическихъ функцій, объ этомъ иногда и не говорится совсѣмъ, считая вполнѣ естественнымъ такое предположеніе.

Ясно, что предпринимающій дальнѣйшія изслѣдованія читатель можетъ совершенно забыть объ этихъ ограниченіяхъ, въ особенности, если примѣненіе положеній, годныхъ только при этихъ ограниченіяхъ не только не приводитъ его ни къ какимъ противорѣчіямъ, но даже открываетъ новое широкое поле изслѣдованій,

Къ этимъ типамъ математическихъ ошибокъ слѣдуетъ присоединить еще третій *ошибки въ обозначеніяхъ*.

Какой нибудь объектъ A обозначается знакомъ a, другой B знакомъ b.

Если между a и b есть сходство, то память можетъ спутать и отнести b къ A, a къ B. Причина смѣшенія можетъ быть въ воспріятіи: одинъ знакъ можно принять за другой. Можно, напримѣръ, греческую букву α принять за латинское a, Въ то время, какъ указанныя выше два типа ошибокъ представляютъ ошибки памяти ошибки послѣдняго типа во второй своей формѣ представляютъ уже ошибки вниманія.

Всѣ эти психологическія изслѣдованія относятся къ тому пути, по которому движется мысль въ поискахъ логическихъ связей между различными положеніями.

Но возможно другого рода изслѣдованіе.

Возможно сдѣлать самы узлы логической сѣти, сами положенія предметомъ изслѣдованія. То, что дѣлаетъ возможнымъ доказательство въ смыслѣ убѣждаемости въ той или другой истинѣ, это психологическій фактъ очевидности нѣкоторыхъ положеній.

При этомъ эти положенія обладаютъ различной степенью очевидности. Такъ геометрическія аксіомы менѣе очевидны, чѣмъ чисто - логическія и среди геометрическихъ аксіомъ есть болѣе и менѣе очевидныя.

Въ высокой степени интереснымъ является то, что устраненіе движенія, какъ средства доказательства контруэнтности, приводитъ къ включенію въ систему аксіомъ положеній, обладающихъ весьма не высокой степенью очевидности въ сравненіи съ другими аксіомами той же системы.

Такъ въ системѣ аксіомъ Гильберта находится въ качествѣ аксіомы положеніе о контруэнтности треугольниковъ, имѣющихъ равные углы и прилежащія стороны. Безспорнымъ является независимость психологическихъ свойствъ аксіомъ отъ логическихъ. Существуютъ положенія очевидныя, напримѣръ, равенство прямыхъ угловъ, которыя могутъ быть доказаны въ томъ смыслѣ, что онѣ могутъ быть связаны съ системой очевидныхъ положеній, принятыхъ за аксіомы. Съ другой стороны тѣ положенія, которыя обладаютъ пониженной степенью очевидности, какъ, напримѣръ, знаменитая 11 Аксіома Эвклида являются независимыми отъ болѣе очевидныхъ аксіомъ.

Но довольно о Психологіи Математики. Психологіи предстоитъ довольно завоеваній въ Математики, если даже ограничиться только вышеизложеннымъ. Посмотримъ, каковы завоеванія Математики въ Психологіи. Скажемъ нѣсколько словъ о Математической Психологіи. Прежде всего коснемся психофизическихъ формулъ. Это еще не Математическая Психологія.

Это скорѣе предверіе въ нее. Психофизическая формула связуетъ не психологическіе элементы между собой, а психологическіе элементы со связанными съ ними опредѣленнымъ образомъ физическими элементами.

Первая психофизическая проблемма была поставлена математиками XVIII столѣтія въ связи съ задачей о безобидности игръ.

Ограничиваясь для простоты случаемъ двухъ игроковъ, мы будемъ имѣть слѣдующее условіе безобидности игры:

Если a, b ставки игроковъ, p, q вѣроятности ихъ проиграть партіи, то должны имѣть

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

или

$$aq - bp = o$$

Называя $aq + (-b)p$ т. е. выигрышъ, умножаемый на вѣроятность выигрыша плюсъ проигрышъ съ знакомъ минусъ, умноженный на вѣроятность проигрыша *математическимъ ожиданіемъ игрока* можно формулировать условія безобидности игры еще слѣдующимъ образомъ:

Математическія ожиданія игроковъ равны нулю.

Частномъ случаѣ, когда $p = q$, то $a = b$. Это условіе безобидности игръ, строго не доказуемое, приводитъ въ большинствѣ случаевъ къ слѣдствіямъ вполнѣ согласнымъ съ указаніями здраваго слысла.

Но существуютъ и такія случаи, которые заставляютъ усумниться въ этомъ основномъ принципѣ безобидности игръ.

Это тѣ случаи, когда возможный проигрышъ одного игрока ничтоженъ въ сравненіи съ его состояніемъ, между тѣмъ, какъ тотъ же проигрышъ приводитъ его противника къ разоренію.

Возьмемъ богача съ состояніемъ въ 1000000 рублей и бѣдняка съ состояніемъ въ 10 руб. Если мы заставимъ ихъ играть въ орлянку со ставкой 10 руб. для каждаго, то при равной вѣроятности для обоихъ условіе безобидности игры будетъ соблюдено, но врядъ-ли здравый смыслъ сочтетъ такую игру безобидной. По мнѣнію Даніила Бернулли и другихъ подобная несообразность проистекаетъ оттого, что выигрышъ и проигрышъ оцѣниваются не числомъ выигранныхъ или проигранныхъ рублей, а тѣмъ нравственнымъ удовлетвореніемъ α или неудовлетвореніемъ β, которое мы получаемъ отъ выигрыша или проигрыша. Такимъ образомъ предложено было ввести въ Теорію вѣроятностей нѣкоторый *психическій элементъ*, чувство удовольствія или неудовольствія отъ пріобрѣтаемаго или теряемаго *физическаго* имущества.

Принципъ безобидности игръ при этомъ получаетъ слѣдующую поправку: a, b слѣдуетъ замѣнить α, β, $aq-bp$ слѣдуетъ замѣнить $\alpha q-\beta p$ такъ называемымъ *нравственнымъ ожиданіемъ*. Входящія сюда величины α, β слѣдуетъ выразить черезъ a, b т. е. слѣдуетъ рѣшить слѣдующую *психо-физическую* задачу.

Въ какой зависимости находятся нравственное имущество и ему отвѣчающее физическое имущество?

Математическая формулировка этой задачи будетъ слѣдующая:

Означая черезъ x физическое имущество, черезъ y нравственное и полагая

$$y=\varphi(x)$$

найти функцію φ?

Психологическій анализъ даетъ намъ нѣкоторыя общія свойства функція $\varphi(x)$.

Наиболѣе простой и согласной съ этими данными является формула, данная Даніиломъ Бернулли

$$y=k\lg\frac{x}{a}$$

гдѣ k, a постоянное

Эйлеру принадлежитъ открытіе другого психофизическаго закона, выражающаго зависимость между *высотою тона* и *числомъ колебаній, ему отвѣчающимъ*.

На основанiи психологическаго опыта, который учитъ, что мы непосредственно ощущаемъ только отношенiе числа колебанiй, но не абсолютныя ихъ разности и что одинаковымъ отношенiямъ чиселъ колебанiя отвѣчаютъ одинаковыя абсолютныя различiя въ ощущенiи, Эйлеръ выводитъ логариѳмическую зависимость:

$$y = k \lg \frac{x}{a}$$

между y—высотой тона и x—числомъ колебанiй, ему соотвѣтствующимъ.

Веберъ установилъ при помощи психофизiологическихъ измѣренiй аналогичный законъ, выражающiй зависимость между ощущенiемъ давленiя и тяжестью ему отвѣчающей.

Этотъ законъ распространенъ изслѣдованiями *Фехнера* на различнаго рода ощущенiя: зрительныя, звуковыя и осязательныя. Для всѣхъ родовъ ощущенiй имѣетъ мѣсто законъ *Вебера – Фехнера:*

Ощущенiе выражается логариѳмомъ раздраженiя.

Фехнеръ высказываетъ мысль о существованiи универсальнаго *основного психофизическаго закона*, обнимающаго, какъ частныя случаи, упомянутыя законы Данiила Бернулли, Эйлера, Вебера и Фехнера, по которому *между физическими и тѣлесными функцiями существуетъ логариѳмическая зависимость.*

Но одна психофизическая формула не можетъ быть источникомъ Математической Психологiи.

Только, установивъ рядъ психологическихъ законовъ, выражаемыхъ математическими формулами, можно получить цѣпь математическихъ теоремъ.

Извѣстная Математическая Психологiя Гербарта и начинается съ установки такихъ законовъ. Но эти законы устанавливаются не путемъ наблюденій или измѣреній, а съ помощью спекулятивныхъ разсужденій, при этомъ недостаточно убѣдительныхъ.

Основаніемъ психической Статики служитъ ученіе о *суммахъ задержекъ* представленій. Гербартъ разсматриваетъ представленія, какъ объекты, находящихся во взаимодѣйствіи, причемъ равновѣсіе, къ которому послѣднее приводитъ, устанавливается путемъ взаимной задержки интесивностей у обоихъ представленій.

Простѣйшимъ случаемъ является случай противоположныхъ представленій.

Если изъ двухъ представленій A, B напряженностей a, b $(a>b)$ болѣе слабое B не реагируетъ на A, стремящееся вытѣснить B, тогда A уничтожитъ B, задержавъ такимъ образомъ b изъ суммы ихъ напряженностей. Но B реагируетъ на A; сумма задержокъ, которая должна быть распредѣлена между A, B т. е. не только B, но и A должно потерять часть своей напряженности. Задержка должна быть распредѣлена между A и B, при этомъ на болѣе сильное въ виду бóльшей съ ея стороны реакціи должна пасть меньшая часть. Гербартъ предполагаетъ, что части на которыя дѣлится задержка обратно пропорціональны напряженностямъ представленій, такъ что изъ A берутся $\frac{b^2}{a+b}$, изъ B $\frac{ab}{a+b}$ и A остается въ сознаніи съ силой

$$a-\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2+ab-b^2}{a+b}, \text{ а } B \text{ съ силой } b-\frac{ab}{a+b}=\frac{b^2}{a+b}.$$

Разсужденія Гербарта, имѣющія по внѣшности математическій характеръ, изложены не ясно и не убѣдительно, въ особенности, для читателя—математика. Скачекъ отъ факта, что, если $x>y$, то $\varphi(x)<\varphi(y)$ къ пропорціи

$$x:y=\varphi(y):\varphi(x)$$

не представляется еще смертельнымъ для его теоріи. Но гораздо хуже, ничуть не оправдываемое опытомъ и, въ сущности говоря, произвольное положеніе о необходимости задержки$=b$.

Ученики Гербарта замѣняли это основное допущеніе другими столь же произвольными. По Виттштейну отъ A задерживается $\frac{b^2}{a+b}$, отъ B $\frac{a^2}{a+b}$.

Гораздо болѣе убѣдительна основная формула психической Динамики или ученія о погруженіи задержки за порогъ сознанія.

Гербартъ даетъ формулу для усиленія интесивности представленіе при его возникновеніи въ сознаніи, откуда выводится формула забвенія.

Гербартъ доказываетъ то, что можно вполнѣ признать за психологическій фактъ, что усиленіе предсталено не пропорціонально времени, что оно ассимптотически приближается къ полной напряженности слѣдующему закону: безконечно-малое приращеніе напряженія, отвѣчающее дифференціалу времени тѣмъ меньше, чѣмъ ближе представленіе къ полной его силѣ или обратно пропорціонально разности между полной напряженностью и напряженностью въ данный моментъ. Это выражается формулой

$$\beta(a-x)\,dt = dx$$

Уравненіе это даетъ

$$\frac{dx}{a-x} = \beta dt$$

откуда, имѣя въ виду, что при

$$t = o \;\dots\; x = o$$

выводится, что

$$x = a\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

Для полученія формулы забыванія должны положить $a=o$.

Начальныя же данныя: $t=o, x=\bar{a}$ гдѣ $\bar{a}$ первоначальная сила представленія.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$x=\bar{a}e^{-\beta t}$$

Очень можетъ быть Васъ очень удивитъ если я вскрою Вамъ въ одной изъ Математическихъ дисциплинъ, получившимъ полное право гражданства, предпосылку математической Психологіи или Психофизики.

Среди математическихъ дисциплинъ совершенно особнякомъ стоитъ Теорія вѣроятностей, соединяя строго математическій методъ съ неочевидными и не допускающими строго математическаго обоснованія предпосылками.

Въ основѣ ея лежитъ опредѣленіе „вѣроятности". Вѣроятность опредѣляется, какъ отношеніе числа благопріятныхъ случаевъ къ числу единственно - возможныхъ. Но во-первыхъ это опредѣленіе содержитъ ложный кругъ, ибо оно годно только въ томъ случаѣ, когда эти единственно - возможныя и благопріятныя случаи равновозможны т. е. обладаютъ одинаковой степенью вѣроятности. А во-вторыхъ нѣкоторое, можемъ быть, и темное понятіе о вѣроятности мы имѣемъ еще до установки этого „математическаго" опредѣленія вѣроятности и мы создаемъ теорію вѣроятности, именно интересуясь вѣроятностью, какъ извѣстнымъ понятіемъ, а не числомъ. Указанное въ опредѣленіи число есть только „мѣра вѣроятности".

Вѣроятность—отношеніе числа благопріятныхъ случаевъ къ числу единственно - возможныхъ это не опредѣленіе вѣроятности, а основная аксіома или, лучше сказать, постулатъ. Но что такое вѣроятность? Здѣсь слѣдуетъ отмѣтить двѣ точки зрѣнія *субъективную* и *объ-*

ективную. Съ первой точки зрѣнія это мѣра нашей вѣры въ появленіе опредѣленнаго событія. Тогда теорія вѣроятности представляется главой математической Психологіи.

Съ объективной точки зрѣнія вѣроятность получаетъ смыслъ только въ силу закона большихъ чиселъ, состоящему въ томъ, что, чѣмъ больше производится испытаній, чѣмъ отношеніе числа испытаній, при которыхъ событіе имѣло мѣсто къ числу всѣхъ испытаній $\frac{\mu}{\nu}$ ближе къ мѣрѣ вѣроятности т. е. отношенію числа благопріятныхъ случаевъ къ числу единственно - возможныхъ $\frac{m}{n}$.

Этотъ законъ не доказывается математически, онъ дается опытомъ или выводится какъ слѣдствія изъ стремленія природы къ разнообразію.

Именно только благодаря ему и получаетъ Теорія вѣроятностей объективный смыслъ.

Часто въ популярныхъ книжкахъ по Теоріи вѣроятностей этотъ законъ смѣшивается съ теоремой Якова Бернулли и для изучающаго кажется, что Математика можетъ чудеснымъ образомъ изъ вышеприведеннаго опредѣленія вѣроятности логическимъ путемъ выудить законы міроздапія.

Теорема Бернулли доказывается вовсе не этотъ законъ, а только указывается степень вѣроятности, съ какой можно утверждать, что разность между двумя дробями $\frac{\mu}{\nu}$ и $\frac{m}{n}$ меньше заданнаго числа.

Но въ силу закона большихъ чиселъ исчисленіе вѣроятностей имѣетъ безусловно объективное значеніе, если мы имѣемъ въ виду заключеніе относительно частоты повторяемости событія при большомъ числѣ испытаній.

Какое объективное значенiе можетъ имѣть исчисленiе вѣроятности одного событiя?

Данное опытомъ мы всегда мыслимъ въ категорiи причинности. Если актуальной причины мы не въ состоянiи усмотрить и событiе относится только вслѣдствiе нашего незнанiя къ типу случайныхъ, то тѣмъ не менѣе мы мыслимъ ея вѣроятность, т. е. какъ его причину, мы ищемъ основанiя его существованiя въ совокупности не дѣйствительныхъ, но возможныхъ событiй.

Такъ какъ при отсутствiи благопрiятныхъ случаевъ такую „причину" слѣдовало бы оцѣнить o, а при всѣхъ возможныхъ случаяхъ, благопрiятствующихъ событiю ∞, то правильнѣе было бы называть объективной вѣроятностью не число $\frac{m}{n}$, отношенiе числа благопрiятныхъ случаевъ къ числу единственно-возможныхъ, а $\frac{m}{n-m}$ отношенiе числа благопрiятныхъ случаевъ къ числу неблагопрiятныхъ.

Но откуда мы можемъ вывести ту или другую мѣру для объективной вѣроятности?

Изъ закона большихъ чиселъ это не выводится, ибо онъ ничего не говоритъ относительно единичнаго испытанiя. Остается только психологическiй опытъ. Этотъ послѣднiй даетъ субъективную вѣроятность, и для оправданiя мѣры для объективной вѣроятности слѣдуетъ сдѣлать переходъ отъ первой ко второй. При этомъ въ силу психофизическаго закона нельзя считать ихъ равными, онѣ должны быть связаны логариѳмической зависимостью.

Если оцѣнить объективную вѣроятность $\frac{m}{n-m}$, но субъективная будетъ ни $\frac{m}{n-m}$, ни $\frac{m}{n}$ а

$$k lg \frac{m}{(n-m)a}, \quad (*)$$

гдѣ a, то малое значеніе $\frac{m}{n-m}$ при которой у насъ не остается никакой вѣры въ наступленіе событія.

Если психологическій анализъ даетъ формулу (*) для субъективной вѣроятности (*), то объективная оказывается пропорціональной $\frac{m}{n-m}$. Психологическій анализъ не можетъ доказать формулы (*), но онъ указываетъ, какъ въ случаѣ формулы Даніила Бернулли рядъ свойствъ для этой функціи вполнѣ согласныхъ съ тѣми, которыя указываются этой формулой.

Такъ какъ

$$klg\left[\frac{1}{a\left(1-\frac{m}{n}\right)}\right]=\frac{k}{a}\frac{m}{n}+\frac{k^2}{2a^2}\frac{m^2}{n^2}+\ldots$$

то при $k=a$ дробь $\frac{m}{n}$ будетъ первымъ приближеніемъ, для субъективной вѣроятности.

Лекція IV

Метафизика и Математика.

Въ двухъ областяхъ знанія выступаетъ идея безконечности. Въ той которая въ си́лу особой строгости своихъ разсужденій считается образцомъ науки и въ той, гдѣ полетъ фантазіи часто становится на мѣсто тщетно стремящагося къ наиболѣе близкому сердцу мыслящаго человѣчества неизвѣстному.

Въ Математикѣ мы говоримъ о безконечно большомъ и безконечно маломъ. Въ Метафизикѣ проблемма *актуальной* безконечности—это тотъ фокусъ, къ которому сходятся лучи умозрѣнія.

На безконечность можно взглянуть съ двухъ сторонъ. Прежде всего со стороны *конечнаго*, разсматривая тотъ процессъ постояннаго возрастанія, который ведетъ насъ къ безконечности, никогда не приводя къ послѣдней, но извѣстнымъ образъ характеризуя послѣднюю.

Можно разсматривать безконечное въ становленіи, количество способное расти выше всякаго предѣла, про которое можно сказать словами Пуанкарэ, что оно, перейдетъ всѣ границы, но нельзя сказать, что оно перешло. Однимъ словомъ можно изучать безконечно-большія и вмѣстѣ съ тѣмъ безконечно-малыя величины, и Математика даетъ намъ и безконечно-большія и безконечно-малыя въ Анализѣ т. е. въ Исчисленіи безконечно-малыхъ.

Но на безконечность можно взглянуть съ противоположной стороны. Можно изучать ее, такъ сказать, *на самомъ мѣстѣ* глядя съ безконечности въ конечное и изучая его сравненіемъ съ послѣднимъ.

Это изученіе актуальной безконечности, безконечности уже перешедшей черезъ всѣ границы.

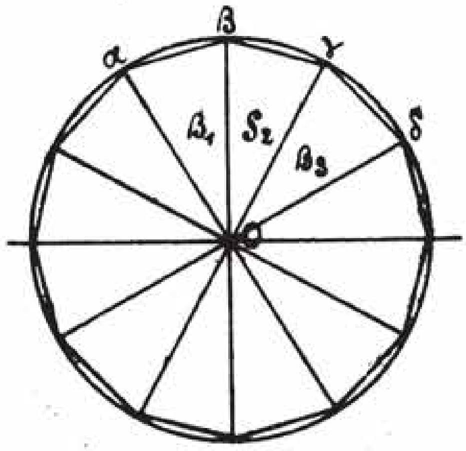
Подъ Анализомъ разумѣютъ дробленіе цѣлаго на части для его изученія. Познать цѣлое непосредственно является труднымъ: необходимо предварительное разложеніе его на части болѣе простыя и болѣе доступныя для изученія, чѣмъ это цѣлое. Въ этомъ смыслѣ употребляется терминъ: „Химическій Анализъ". Неизвѣстное сложное вещество для изученія разлагается на простѣйшія элементы.

Въ Математическомъ Анализѣ величина дробится на безконечно-малыя элементы, кривая на безконечно-малыя дуги, площадь на безконечно-малыя площади.

Синтезъ состоитъ тогда въ соединеніи элементовъ въ цѣлое. Въ математическомъ Анализѣ при опредѣленіи величины цѣлаго за Анализомъ всегда слѣдуетъ Синтезъ, цѣлое дробится на малыя части, опредѣляются выраженія для послѣднихъ, послѣ чего остается *суммировать* эти части, это достигается Синтезомъ.

Въ Исчисленіи безконечно-малыхъ имѣетъ мѣсто, какъ Синтезъ, такъ и Анализъ, но первымъ всегда является Анализъ и тамъ лежитъ центръ тяжести всего метода, почему исчисленіе безконечно-малыхъ и получило названіе „Анализа".

Методъ исчисленія безконечно-малыхъ скрытымъ образомъ содержится въ главѣ Элементарной Геометріи: „Измѣреніе площади круга".



Для опредѣленія этой послѣдней, мы вписываемъ въ кругъ правильный многоугольникъ и, удваивая число сторонъ послѣдняго, получаемъ безконечный рядъ:

$$S_6,\ S_{12},\ S_{24},\ S_{48}\ldots.$$

площадей такимъ образомъ получаемыхъ многоугольниковъ.

Предѣлъ членовъ этого ряда и будетъ площадь круга.

Каждая изъ площадей представляется суммой площадей β, β_1... треугольниковъ $O\alpha\beta$, $O\gamma\delta$... на которыя съ помощью радусовъ проведенныхъ отъ вершинъ многоугольника къ центру круга можно раздѣлить его.

Представимъ эту методу въ такой формѣ, чтобы рѣзко выступали моменты Анализа и Синтеза.

1) Кругъ дѣлится на безконечно - малые секторы, раздѣливъ окружность на безконечно великое число частей и соединяя точки дѣленія съ центромъ.

Можно написать, что S (площадь круга) равна суммѣ этихъ секторовъ σ_i

$$S = \Sigma \sigma_i$$

или, что тоже, $S = lim\, \Sigma\sigma_i$, ибо $\Sigma\sigma_i$ при уменьшеніи σ_i не мѣняется.

Кругъ разбили на сектора, но непосредственное суммированіе секторовъ является невозможнымъ. Необходимо найти такую сумму $\Sigma\beta_i$, чтобы предѣлъ $\Sigma\beta_i$ равнялся $\Sigma\sigma_i$ и чтобы въ то время, какъ $\Sigma\sigma_i$ непосредственно найти невозможно, $lim\, \Sigma\beta_i$ легко находилось бы.

2) Такимъ образомъ изыскиваютъ такіе β_i, что $lim\, \Sigma\beta_i = lim\, \Sigma\sigma_i$.

Это операція Дифференціальнаго исчисленія.

По основной леммѣ

$$lim\, \Sigma\, \beta_i = lim\, \Sigma\, \sigma_i$$

если β_i, σ_i эквивалентныя безконечно малыя т. е. такія, что $lim \frac{\beta_i}{\sigma_i} = 1$.

Въ настоящемъ случаи эквиваленты безконечно малый секторъ и вписанный въ него треугольникъ.

Можно доказать, что площадь круга можно разсматривать не только, какъ предѣлъ площадей вписанныхъ или описанныхъ многоугольниковъ при удвоеніи числа сторонъ но вообще, какъ предѣлъ, безразлично правильныхъ или неправильныхъ многоугольниковъ при увеличеніи числа сторонъ и при уменьшеніи этихъ послѣднихъ. Послѣднее выраженіе слѣдуетъ понимать слѣдующимъ образомъ:

Отъ многоугольника со сторонами:

$$\alpha_1^{(1)},\ \alpha_2^{(1)} \ldots\alpha_n^{(1)} \ldots$$

переходимъ къ многоугольнику со сторонами

$$\alpha_1^{(2)},\ \alpha_1^{(2)} \ldots \alpha_n^{(2)} \ldots$$

причемъ, во первыхъ $n^{(2)} > n^{(1)}$, во вторыхъ наиб. изъ величинъ $\alpha_i^{(1)} \ldots \alpha^{(1)} > \alpha^{(2)}$ наиб. вел. $\alpha^{(2)}$. Отъ $\alpha^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)} \ldots \alpha_{n(2)}^{(2)}$ переходимъ къ $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)} \ldots \alpha_{n(3)}^{(3)}$, гдѣ $n^{(3)} > n^{(1)}$; $\alpha^{(3)} < \alpha^{(2)}$ и т. д.

Можно сказать, что площадь круга разсматривается, какъ предѣлъ безконечно великаго числа безконечно—малыхъ.

Если σ_i площадь секторовъ $O\alpha\mu\beta$, то за β_i можно принять площади треугольниковъ $O\alpha\beta$.

3) Остается произвести синтезъ. Найти

$$lim\, \Sigma\beta_i$$

Это операція Интегральнаго Исчисленія.

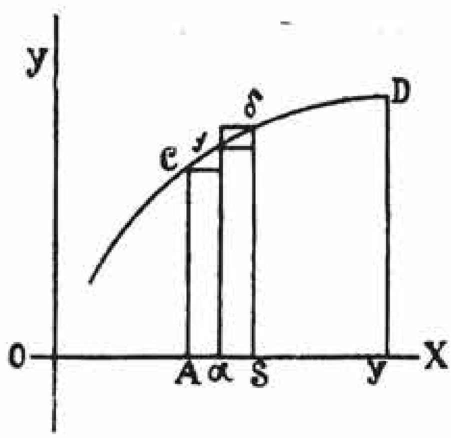
По идеѣ Кавальри задачу объ опредѣленіи площади ограниченной одной или нѣсколькими кривыми стараются свести къ опредѣленію площади такъ называемой криволинейной трапеціи т. е. площади $ACDB$, ограниченной

1) другой кривой CD:

$$y = f(x)$$

2) осью OX

3) двумя прямыми AC и $BD \| OY$ на разстояніяхъ $x = a$ и $x = b$



$ACDB$ дѣлятъ на элементы $\sigma_i = \alpha\beta\gamma\delta_i$ раздѣливъ AB на равныя части и проведя изъ точекъ дѣленія прямыя $\alpha\gamma$, $\beta\delta \ldots \perp OX$.

Тогда площадь криволинейной трапеціи

$$S = \Sigma\sigma_i = lim\, \Sigma\sigma_i.$$

Если мы изъ точекъ $C \dots \gamma \dots D$ проведемъ прямыя, параллельныя OX, то получимъ рядъ *входящихъ* и *выходящихъ* прямоугольниковъ, площади которыхъ обозначимъ через $\underline{\sigma}_i$ и $\underline{\sigma}_i$.

Но $\underline{\sigma}_i = \alpha\beta \, . \, \underline{h}_i$, $\sigma_i = \alpha\beta \, . \, \overline{h}_i$, обозначая черезъ $\underline{h}_i$ высоту входящаго, а черезъ $\overline{h}_i$ выходящаго прямоугольника.

$$\frac{\overline{\sigma}_i}{\underline{\sigma}_i} = \frac{\overline{h}_i}{\underline{h}_i}$$

и въ предѣлѣ, когда число дѣленій AB безконечно велико $lim \frac{\overline{\sigma}_i}{\underline{\sigma}_i} = 1$, откуда слѣдуетъ эквивалентность $\overline{\sigma}_i$ и $\underline{\sigma}_i$.

Но
$$\underline{\sigma}_i \leq \sigma \leq \overline{\sigma}_i$$
$$1 \leq \frac{\sigma}{\underline{\sigma}_i} \leq \frac{\overline{\sigma}_i}{\underline{\sigma}_i}$$

откуда будетъ слѣдовать также и

$$lim \frac{\sigma}{\underline{\sigma}_i} = 1 \qquad \text{и} \; lim \frac{\sigma}{\underline{\sigma}_i} = 1$$

т. е. σ и $\underline{\sigma}_i$, σ и $\overline{\sigma}_i$ эквиваленты.

Можно написать

$$S = lim \, \Sigma \underline{\sigma}_i$$
или
$$S = lim \, \Sigma \overline{\sigma}_i$$

т. е. можно разсматривать S, какъ предѣлъ суммы площадей входящихъ или выходящихъ прямоугольниковъ. Вводя символъ опредѣленнаго интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = lim \sum_{j=1}^{j=n} f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

можно написать формулу

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

Слѣдуетъ подчеркнуть, что идея Интегральнаго Исчисленія гораздо шире, чѣмъ то ея частное осуществленіе, которое мы имѣемъ въ теоріи предѣловъ этого типа суммъ.

Не только самопонятіе интеграла, но и цѣлый рядъ теоремъ, относящихся къ основамъ интегральнаго исчисленія, могутъ быть разсматриваемы, какъ частные случаи болѣе общихъ. Если интегральное исчисленіе выбираетъ ту сумму предѣлъ, которой представляетъ $\int_a^b f(x)dx$, что вычисленіе этого предѣла приводится къ рѣшенію задачи, обратной задачѣ. Дифференціальнаго Исчисленія, къ нахожденію функціи по ея производной.

Отъ Анализа переходимъ къ *теоріи множествъ*. Какимъ образъ изучаются безконечныя множества? Прежде всего слѣдуетъ замѣтить, что возможно изучать только такія, для которыхъ можно найти всю совокупность признаковъ ихъ вполнѣ опредѣляющихъ.

Всякое множество задается генетически т. е. дается способъ образованія этого множества. Такъ какъ множества могутъ изучаться только съ помощью сравненія, изслѣдованіемъ общихъ и необщихъ элементовъ, то для изучаемыхъ множествъ выставляется еще другое условіе. Множество должно быть таково, что всегда имѣется средство опредѣлить, принадлежитъ ли ему данное число или нѣтъ? Такое множество называется *опредѣленнымъ*. Изслѣдуются только опредѣленныя множества.

Логическимъ опредѣленіемъ равенствъ двухъ конечныхъ цѣлыхъ чиселъ является однозначное соотвѣтствіе между единицами. Это свойство можетъ имѣть мѣсто и для безконечныхъ множествъ. Эквивалентностью (понятіемъ, соотвѣтствующимъ равенству двухъ конечныхъ множествъ) будетъ однозначное соотвѣтствіе между элементами этихъ множествъ (т. е. каждому элементу одного множества отвѣчаетъ одинъ и только одинъ другого и обратно).

Характерное свойство безконечнаго множества состоитъ въ томъ, что оно эквивалентно своей части.

Возьмемъ для примѣра безконечный рядъ натуральныхъ чиселъ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots.\ n \ldots$$

Рядъ 2.3.4.... будетъ составлять часть. Но эквивалентность обоихъ множествъ очевидна, ибо возможно установить слѣдующее соотвѣтствіе между элементами

$$(1.2),\ (2.3)\ (3.4) \ldots\ (n.n+1)$$

Для конечныхъ же множествъ, внѣ сомнѣнія, свойство это не можетъ имѣть мѣсто.

Это характерное свойство обыкновенно и служитъ математическимъ опредѣленіемъ безконечнаго множества.

Среди множествъ особенное значеніе имѣютъ такъ называемыя *счетныя* множествъ. Это множества эквивалентны ряду натуральныхъ чиселъ:

$$1,\ 2,\ 3 \ldots.\ n,$$

множества, элементы которыхъ могутъ быть подвергнуты нумеровкѣ, могутъ быть представлены подъ формой безконечнаго ряда

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots.\ a_n \ldots$$

Такое множество представляетъ изъ себя совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ. Чтобы убѣдиться въ томъ, что раціональныя дроби могутъ быть въ дѣйствительности пронумерованы, слѣдуетъ только посмотрѣть слѣдующую табличку.

	1	2	3	4	
1	1	3	6	10	
2	2	5	7		
3	4	8			
4	7				

Въ этой сѣткѣ каждый квадратикъ отвѣчаетъ дроби, знаменатель которой номеръ строки, а числитель номеръ столбца.

Легко убѣдиться также, что совокупность всѣхъ алгебраическихъ чиселъ т. е. чиселъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_{n-1}x + a_n = o,$$

гдѣ a_j цѣлыя числа представляетъ счетное множество.

Этотъ фактъ имѣетъ огромное значеніе въ Математикѣ, ибо даетъ возможность простѣйшимъ путемъ доказать существованіе безконечнаго множества трансцендентныхъ чиселъ.

Для этого слѣдуетъ только замѣтить что, когда дается безконечный рядъ вещественныхъ чиселъ $u_1, u_2, u_3 \dots$, то между каждой парой изъ этихъ чиселъ u_{j-1} и u_j можно вставить безконечное множество чиселъ.

Располагая въ подобный рядъ алгебраическія числа, что возможно, такъ какъ эти числа образуютъ счетное множество, мы можемъ найти безконечное множество чиселъ не алгебраическихъ т. е. трансцендентныхъ. Можно получаемый такимъ образомъ результатъ выразить (правда въ грубой и не строгой формѣ) такъ: число всевозможныхъ вещественныхъ чиселъ въ безконечно разъ больше числа алгебраическихъ чиселъ.

Такимъ образомъ уже, такъ сказать, въ первой главѣ теоріи множествъ установливается два типа множествъ:

Счетное—таково, напримѣръ, множество, образуемое всей совокупностью алгебраическихъ чиселъ.

Continuum - совокупность всѣхъ чиселъ, причемъ можно считать эквивалентнымъ ему совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ въ конечномъ промежуткѣ $(0, 1)$.

Предположимъ, что вселенная безконечна. Мы получимъ тогда космологическій примѣръ: звѣзды будутъ представлять счетное множество, а точки міроваго пространствъ continuum.

Разсмотримъ теперь такъ называемое *линейное* множество, элементы котораго могутъ быть представлены безконечнымъ множествомъ точекъ прямой. Сгущеніе этихъ точекъ въ различныхъ мѣстахъ будетъ различно.

Точкой сгущенія или *предѣльной* точкой будетъ такая, около которой будетъ безконечное число точекъ множества. Изслѣдованіе множества по точкамъ сгущенія даетъ прежде всего понятіе *производнаго* множества, образованнаго изъ точекъ сгущенія и затѣмъ понятія о *замкнутомъ* и о *совершенномъ* множествахъ. Замкнутое это то, которое содержитъ свою производную, совершенное ей тожественно.

Простѣйшимъ (перваго порядка) будетъ то множество, для котораго нѣтъ точекъ сгущенія т. е. $P'=0$.

Затѣмъ слѣдуетъ (2-го порядка), то для котораго $P''=0$ и т. д.

Совокупность элементовъ общихъ двумъ множествамъ P, Q образуетъ наименьшій дѣлитель $D(P, Q)$ этихъ двухъ множествъ. Не трудно видѣть, что производное множество всегда замкнутое, такъ что

$$D(P', P'') = P''$$
$$D(P'', P''' = P''' \text{ и т. д.}$$

вообще
$$P^{(n)} = D(P', P'' \ldots P^{(n)} \ldots)$$

Среди множествъ существуютъ и такія, что рядъ производныхъ можетъ быть безконечно продолженъ. Вотъ изученіе этого рода множествъ и приводитъ къ *трансфинитнымъ* числамъ, къ установкѣ теоріи безконечныхъ чиселъ, различающихся между собой, какъ числа конечныя и подвергающихся нѣкоторымъ операціямъ, соотвѣтствующимъ тѣмъ, которыя производятся надъ конечными числами.

Для этихъ множествъ

$$D(P', P'' \ldots P^{(n)} \ldots)$$

т. е. общій наибольшій дѣлитель безконечнаго ряда производныхъ можно разсматривать какъ производную безконечнаго порядка

$$P^{(\infty)}$$

Каждое изъ конечныхъ чиселъ: 1, 2, 3... n, служившихъ значками P можно получить изъ 1 послѣдовательными прибавленіемъ 1 или съ помощью, такъ называемаго, *перваго принципа* образованія.

Производное множество можетъ служить тоже средствомъ различенія множествъ съ $P^{(\infty)}$ отличнымъ отъ 0.

Возьмемъ послѣдовательныя производныя P^{∞}:

$$P^{\infty'}\ P' \ldots$$

Можетъ случиться, что одинъ изъ членовъ этого рода нуль, но можетъ случиться, что это не имѣетъ мѣста.

Тогда разсматриваемъ

$$(P^{\infty})^{\infty} = D(P^{\infty'},\ P^{\infty''} \dots)$$

Уже здѣсь мы видимъ необходимость обобщенія числа, въ разсмотрѣніи безконечныхъ чиселъ, различныхъ между собой, отвѣчающихъ P^{∞}, $P^{\infty'}$, $P^{\infty''}$ и т. д., изъ которыхъ первое можно означить символомъ ω, а другія, получаемыя съ помощью опять перваго принципа: $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3 \dots$

$(P^{\infty})^{\infty}$ будетъ отвѣчать $\omega+\omega=2\omega$. Переходъ отъ конечныхъ чиселъ къ ω и отъ ω къ 2ω производится не въ силу перваго принципа, а совершая такъ сказать скачекъ (черезъ безконечность)—въ силу *второго принципа*. Въ то время какъ первый принципъ даетъ число, которому предшествуетъ опредѣленное число, второй принципъ даетъ число, предшествующее которому нельзя указать.

Такъ ω больше всѣхъ конечныхъ чиселъ, а изъ конечныхъ чиселъ нельзя указать наибольшее.

Совершенно такимъ же образомъ строятся числа 2ω, 3ω, $4\omega \dots n\omega \dots \omega^2$, $\omega^2+2\omega \dots n_0\omega^m + \dots n_{m-1}\omega + n_m, \dots \omega^{\omega^{\omega}} \dots$ и т. д. всѣ трансфинитныя числа, получаемыя первымъ и вторымъ принципомъ, образующія 1-ый классъ трансфинитныхъ чиселъ.

Отъ трансфинитныхъ чиселъ 1-го класса не трудно перейти къ трансфинитнымъ числамъ 2 класса. Первое изъ нихъ будетъ число отвѣчающее $P^{(\Omega)}$, общему наибольшему дѣлителю всѣхъ P, отвѣчающихъ трансфинитнымъ числамъ 1-го класса. Получается оно съ помощью III-го принципа и т. д.

Вы видимъ теперь, какимъ образомъ изученіе множества приводитъ насъ къ актуально-безконечному числу.

Совершенно въ такомъ же отношенiи, въ какомъ находится Метагеометрiя къ гносеологическимъ предпосылкамъ, утверждаемымъ полнымъ или частичнымъ эмпиризмомъ, теорiя трансфинитныхъ чиселъ находится къ ученiю объ актуальной безконечности. Мы должны повторить, что, если бы было бы строго доказано, что актуальной безконечности нѣтъ, что мiръ не безконеченъ, что время не безконечно и т. д. ученiе о трансфинитныхъ числахъ ничуть не было бы поколеблено, если только рядъ постулатовъ, лежащихъ въ основѣ, представляетъ систему совмѣстныхъ положенiй.

Теорiя комплексныхъ чиселъ не приводитъ къ противорѣчiю и представляетъ одинъ изъ наиболѣе плодотворныхъ Отдѣловъ Математическаго Анализа, хотя комплексное число не имѣетъ реальнаго субстрата.

Но изучающему современное ученiе о математической безконечности, конечно трудно удержать свою мысль отъ полета изъ области чистой Математики въ область Метафизики. Безконечность имѣетъ двѣ стороны, одна обращена къ математику, другая къ философу и, конечно, философски—настроенный математикъ пожелаетъ осмотрѣть этотъ предметъ со всѣхъ сторонъ.

Споръ о реальномъ существованiи актуальной безконечности это довольно старый метафизическiй споръ.

Проблемма существуетъ ли безконечное число или безконечное пространство имѣетъ конечно, огромное космологическое значенiе, ибо представляется, что рѣшенiе этой проблеммы въ отрицательномъ смыслѣ приводится къ необходимости признанiя вселенной—конечной. Самымъ сильнымъ аргументомъ противъ безконечности вселенной въ пространствѣ и во времени издавна выставлялись неразрѣшимые парадоксы безконечности. Невозможность существованiя актуальнаго безконечнаго числа доказываютъ вскрытiемъ противорѣчiй, якобы въ немъ заключающихся, такимъ образомъ дѣлается посяганiе не только на реальное, но и на математическое или логическое существованіе безконечности.

Финитисты (т. е. защитники существованія исключительно конечныхъ величинъ) указываютъ на то, что ∞ заразъ представляетъ рядъ абсурдныхъ свойствъ, оно кубъ, квадратъ и половина самого себя—оно поэтому сказывается больше или меньше самого себя.

Но легко видѣть, что подобныя возраженія отпадаютъ, если вспомнить, что онѣ основываются на тѣхъ свойствахъ, которыя присущи только конечнымъ числамъ. Квадратъ цѣлаго числа a^2 больше самого a, это вѣрно для $a=2, 3, 4...$ и ничто насъ не обязываетъ признать это вѣрнымъ для $a=\infty$.

„Всѣ доводы за невозможность существованія безконечнаго числа, говоритъ Канторъ, невѣрны, вслѣдствіе того что они приписываютъ напередъ безконечному числу всѣ свойства конечныхъ чиселъ, что представляетъ уже противорѣчіе, такъ какъ, если безконечное число существуетъ, то только при условіи обладанія свойствами иными, чѣмъ конечныя числа. Оно должно составлять родъ *новаго числа* въ противоположность конечному. Вводя въ Математику безконечныя актуальныя числа, мы, конечно должны признать неравныя безконечности, хотя безконечность и означается однимъ символомъ ∞.

Мерсеннъ возражаетъ противъ существованія безконечной линіи на томъ основаніи, что она должна была бы содержать безконечное число аршинъ и саженей, причемъ сажень въ три раза больше аршина, откуда слѣдовало бы, что одна безконечность больше другой, чего, говоритъ Мерсеннъ, быть не можетъ. Что безконечности всѣ должны быть равны Мерсеннъ и другія выводятъ изъ того, что, такъ какъ безконечное число наибольшее изъ всѣхъ чиселъ, то можетъ быть только одно безконечное число.

Но упомянутая выше теорія трансфинитныхъ чиселъ Кантора совершенно иначе смотритъ на безконечное число.

Трансфинитное число ω вовсе наибольшее или послѣднее изъ чиселъ конечныхъ, наоборотъ *первое* среди чиселъ безконечныхъ.

Совершенно вѣрно указываетъ Кутюра на то, что всѣ аргументы, направленныя въ продолженіе нѣсколькихъ вѣковъ противъ возможности безконечнаго зиждутся на слѣдующихъ двухъ ошибочныхъ принципахъ:

1) Число безконечное наибольшее изъ всѣхъ чиселъ,

2) Всѣ безконечныя числа равны.

Ошибочность второго принципа сознавали Лейбницъ, перваго—Кантъ.

Опровергнуть возраженія противъ актуальнаго безконечнаго числа это еще не значитъ доказать реальность этого числа. Это не значитъ, что этимъ доказана возможность существованія трансфинитнаго числа небесныхъ тѣло. Канторъ расширяетъ область вещественныхъ цѣлыхъ чиселъ пополняя конечныя числа, которымъ присущи нѣкоторыя свойства, напр., то, что цѣлое большее части, другими числами, которымъ не присуще уже это свойство, которыя опредѣляются меньшимъ числомъ независимыхъ постулатовъ. Упомянутыя выше опроверженія доказываютъ только то, что эти послѣднія не находятся между собой въ противорѣчіи. Но тоже можно сдѣлать и для комплексныхъ чиселъ и конечно было бы опрометчиво выводить существованіе совокупности предметовъ, опредѣляемыхъ комплекснымъ числомъ.

Судьба трансфинитныхъ чиселъ вовсе не находится въ зависимости отъ рѣшеніи, къ которому прійдетъ Метафизика относительно актуальнаго безконечнаго числа. Трансфинитное число останется въ Математикѣ даже и тогда, если бы удалось найти чудомъ строго—математическое доказательство невозможости реальной безконечности или если бы былъ вполнѣ строго доказанъ законъ Дюринга: законъ *опредѣленной численности*.

По этому закону число событій протекшихъ по настоящій моментъ—число опредѣленное и ограниченное, не смотря на то, что позади насъ лежитъ цѣлая вѣчность. Точно также число міровыхъ тѣлъ въ пространствѣ, въ данный моментъ число опредѣленное и конечное, хотя пространство безгранично. Изъ этого закона Дюрингъ выводитъ, что міровой процессъ долженъ имѣть абсолютное начало во времени.

Возраженія противъ существованія безконечно-большой величины напр. безконечно - большого пространства или времени, обыкновенно основываются на невозможности актуальнаго безконечнаго числа, на невозможности безконечнаго числа кубическихъ саженій и безконечнаго число лѣтъ. При этомъ предполагается, что всякая величина, какъ конечная такъ и безконечная характеризуется числомъ. Но возможна и такая точка зрѣнія и ее весьма основательно защищаетъ *Мильхаудъ*, по которой безконечной величинѣ не отвѣчаетъ числа. Державинъ въ одѣ Богъ, находитъ весьма удачный эпитетъ безконечному Богу, говоря, что въ немъ „числа и мѣры" нѣтъ. Не равенство цѣлаго части является характернымъ признакомъ безконечной величины, а именно ея неизмѣряемость, невозможность опредѣленія ея числомъ.

Существуютъ и непосредственныя выступленія противъ безконечности, носящія метафизическій и гносеологическій характеръ. Слѣдуетъ замѣтить, что въ доказательствахъ гносеологическаго типа уже съ самаго начала обсужденія вопроса существуетъ ли идея безконечности въ нашемъ умѣ или нѣтъ противники безконечности выставляютъ противъ себя смертельный аргументъ.

Могутъ ли они говорить о безконечности, о томъ существуетъ ли она въ нашемъ разумѣ или нѣтъ, если по ихъ мнѣнію они не имѣютъ никакой идеи о безконечности?

Въ гносеологическихъ возраженіяхъ все вертится на томъ, что единственный путь, могущій привести насъ къ идеѣ безконечности, это процессъ постояннаго возрастанія.

Идея о безконечномъ можетъ получится только черезъ прибавленіе къ пространству, занимаемому нашей солнечной системой такого же пространства и т. д. Но этимъ дается только никогда не прекращающійся процессъ и предположеніе актуальной безконечности является невозможнымъ, такъ какъ влечетъ за собой предположеніе законченности этого процесса.

Но безконечность постигается *внѣ* этого процесса.

Вотъ что говоритъ Гегель о безконечности. Разсудокъ, размышляя вообще о безконечности держится по преимуществу количественнаго безконечнаго процесса. Но эти форма процесса выражаетъ собой не истинную, а *дурную* безконечность, которая не превышаетъ понятіе: „долженствованія" и постоянно остается въ сферѣ конечнаго.

Спиноза называетъ эту безконечность—мнимой. Поэты, напримѣръ, Галлеръ и Клопштокъ, не рѣдко пользовались этимъ представленіемъ, чтобы наглядно изобразить безконечность природы и самого Бога.

У Галлера мы встрѣчаемъ знаменитое описаніе безконечности Бога, гдѣ онъ говоритъ: „Я слагаю огромныя числа, цѣлыя горы милліоновъ, я нагромождаю время на время и міры на міры и когда съ этой страшной высоты отуманенный я снова возвращаюсь къ Тебѣ, это громадное число умноженное въ тысячу разъ не составляетъ части Тебя". Къ этому описаніи дурной безконечности Галлеръ прибавляетъ прекрасное заключеніе: „Я откидываю всѣ эти числа и Ты весь передъ мной" и въ самомъ дѣлѣ истинное безконечное лежитъ только за предѣлами конечнаго и чтобы привести его къ сознанію необходимо оставить безконечный процессъ.

Возражаютъ, что идея безконечности предполагала бы безконечный разумъ. Но въ такомъ наивномъ возраженіи на разумъ смотрятъ, какъ на какую то урну, которая для вмѣщенія безконечнаго числа шаровъ, сама должна быть безконечной.

Помощь актуальной безконечности идетъ оттуда, откуда казалось бы менѣе всего ее можно было бы ожидать.

Космологія выростающая изъ точнаго естествознанія, имѣющая свои корни въ Астрономіи, возвышаетъ свой голосъ за безконечность вселенной во времени и въ пространствѣ.

Споръ о безконечности вселенной ведется главнымъ образомъ на логической и гносеологической почвѣ; аргументы тѣ, о которыхъ мы говорили уже выше—рѣшеніе проблеммы о безконечности вселенной въ положительномъ или отрицательномъ смыслѣ становится въ зависимость отъ того, признается ли актуальная безконечность свободной отъ противорѣчія, познаваема она или нѣтъ?

Но противъ безконечности вселенной существуютъ возраженія такъ сказать чисто астрономическаго характера. Упомянемъ одно изъ нихъ. Еще въ 1826 году знаменитый астрономъ Ольберсъ сдѣлалъ слѣдующее замѣчаніе: „Если число тѣлъ вселенной испускающихъ тепло и свѣтъ безконечно, то каждая точка пространства должна получить безконечное число свѣтовыхъ и тепловыхъ лучей и поэтому должно быть безконечно тепла и свѣта". Отсюда дѣлается выводъ, что число звѣздъ не безконечно велико, а конечно. Но при этомъ остается и другой выходъ именно предположеніе о поглощаемости свѣтовыхъ и тепловыхъ лучей междузвѣзднымъ пространствомъ.

Кантъ въ спорѣ о безконечности вселенной занимаетъ такъ сказать нейтральную позицую. Онъ считаетъ, что два положенія:

Вселенная имѣетъ начало во времени и границы въ пространствѣ и

Вселенная безначальна и безгранична въ пространствѣ представляютъ такъ называемыя антиноміи.

Какъ первое положеніе (тезисъ) такъ и второе (антитезисъ) могутъ бытъ съ такимъ же успѣхомъ доказаны въ предположеніи, что міровое цѣлое т. е. полный рядъ явленій въ немъ данъ.

Но какъ то и другое положеніе должны быть въ дѣйствительности отвергнуты, такъ какъ міръ самъ по себѣ не существуетъ. Міръ, каковъ онъ во времени и въ пространствѣ это—только наше представленіе, міръ какъ онъ въ себѣ (вещь сама въ себѣ) недоступенъ нашему воспріятію.

Міръ во времени и въ пространствѣ это только рядъ послѣдовательныхъ обзоровъ явленій. Часть вселенной въ предѣлахъ нашей солнечной системы это тоже только продолженіе ряда воспріятій. Говорить о безконечномъ мірѣ это значитъ признавать возможность продолженія безпредѣльно того же ряда воспріятій.

Говорить о конечномъ мірѣ это значитъ указывать границы этому ряду.

Мы не будемъ изслѣдовать Кантовское разрѣшеніе антиномій. По нашему мнѣнію ни тезисъ, ни антитезисъ не являются доказанными. Тезисъ доказывается логически. Кантъ основывается не невозможности актуальнаго безконечного числа. Объ этого рода доказательствахъ мы уже говорили.

Но антитезисъ доказывается отнюдь не чисто логическимъ путемъ, а съ помощью гносеологическихъ изслѣдованій т. е. ученія о субъективности времени и пространства.

Литература.

къ I лекціи

На русскомъ языкѣ:

1) *Кутюра*. Принципы Математики. Перев. Линда. Изд. Карбасникова. Спб. 1913. (богатыя библіограф. указанія).

2) *Кутюра*. Алгебра Логики. Изд. Матерись. Одесса. 1909.

3) *Пуанкарэ*. Гипотеза и Наука.

4) „ Методъ и Наука.

5) *Фоссъ*. О сущности Математики. Изд. Физика. Спб. 1911.

6) *Каганъ*. Основы Геометріи. Одесса 1905 -07.

7) *Бонола*. Не-Эвклидова Геометрія.

8) *Веберъ-Вельштейнъ*. Энциклопедія Элементарной Математики. т. I. Матезисъ. Одесса. 1909.

9) *Энрикесъ*. Вопросы элементарной Математики.

10) *Ващенко-Захарченко*. Начала Эвклида съ примѣчаніями.

11) *Далеманъ*. Проэктивная Геометрія. Пер. Лагутинскаго.

На французскомъ языкѣ:

1) *Peano*. Formulaire de Mathèmatiques.

2) *Peano*. Notations de logique Mathèmatiques. Turin. 1894.

3) *Padoa*. La logique deductive. Paris. Gauthier Villars. 1912.

4) *Liard*. Dèfinitions mathèmatiques. Paris Alcan. 1903.

5) *Favaro*. Leçons de Statique graphique t. I. Géometrie de Position. Paris. Gauthier Villars. 1879.

На нѣмецкомъ языкѣ:

1) *Hilbert.* Grundlagen der Géometrie. Leipzig. Teubner. 1903.

2) *Killing und Hovestadt.* Handluch des Math. Unterrichts. t. I. Leipzig. Teubner. 1910 (библіографія).

3) *Gennochi.* Differentialrechnung und Integralrechnung. Anhang I. Teubner 1899.

ко II лекціи.

На русскомъ языкѣ:

1) *Кантъ.* Критика чистаго разума. Пер. Соколова. Спб. 1897.

Полезно прочесть раньше:

2) *Куно-Фишеръ.* Исторія Философій.

3) *Челпановъ.* Проблемма воспріятія пространства. ч. II.

4) *Богомоловъ.* Современныя воззрѣнія на Геометрію. Жур. Физ.-Хим. О. 1907.

5) *Минковскій.* Пространство и время. Изд. Физика. Спб. 1911.

6) Новыя идеи Физики. Законъ относительности. Изд. Образованіе.

На французскомъ языкѣ:

1) *Russel.* Les principes de Géométrie trad. Cadenat. Paris. Gauthier Villars. 1901. (библіогр. указанія).

2) *Delboeuf.* Prolegomenes de la géométrie et solution des postulats. Liège 1860 и другія его сочиненія (см. Russel).

3) *Lechalas.* Introduction à la gèomètrie gènèrale.

4) *Jouffret.* Traité élémentaire de Géométrie à quatre diménsions. Paris. Gauthier Villars. 1903.

5) *Bucher.* Essai sur l'hyperespace. Paris. Alcan. 1905.

6) *Brunschvigg.* Les étapes de la philosophie mathématiques. Paris. Alcan. 1912.

На нѣмецкомъ языкѣ:

1) *Riemann.* Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen. Werke. s. 255—268.

2) *Erdmann.* Die Axiome der Geometrie.

къ III лекціи.

На русскомъ языкѣ.

1) *Обреимовъ.* Софизмы. изд. Павленкова.

2) *Д. Мордухай-Болтовской.* Психологія математическаго мышленія. Вопросы Философіи и Психологіи за 1908.

3) *Буняковскій.* Теорія вѣроятностей.

4) *Гербартъ.* Психологія.

5) *Вундтъ.* Душа человѣка и животныхъ

6) *Вундтъ.* Физіологическая Психологія. Москва. 1880—81.

На французскомъ языкѣ:

1) *Delboeuf.* Eléments de Psychophisique. Paris. Germer-Baillière. 1883.

2) *Klein.* Conférences.

На нѣмецкомъ языкѣ:

1) *Fechner.* Psychophysik. Leipzig. Breitkoff. 1889.

2) *Drobich.* Mathematische Psychologie.

къ IV лекціи.

На русскомъ языкѣ:

1) *Больцано.* Парадоксы безконечнаго. Изд. Матезисъ Одесса.

2) *Дедекиндъ.* Непрерывность и ирраціональныя числа Перев. Шатуновскаго. Матезисъ. Одесса. 1909.

3) *Васильевъ.* Введеніе въ Анализъ.

4) *Жегалкинъ.* Трансфинитныя числа. Москва. 1907.

На французскомъ языкѣ;

1) *Carnot.* Reflexions sur la Méthaphisique du Calcul infinitésimal. Paris. Gauther Villars. 1881.

2) *Cauchy.* Sept Eçons de physique Générale.

3) *Conturat.* L'infini mathématique (богатыя библіогр. указанія).

4) *Evellin.* Infinie et quantité. Gernier Baillère. 1880.

5) *Borel.* Théorie des fonctions. Paris. Gauthier Villars. 1898.

На нѣмецкомъ языкѣ:

1) *Cohn.* Geschichte des Unendlichkeitsproblems. Leipzig. Engelmann. 1896.

2) *H. Cohen.* Das princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Berlin. 1883. (богатыя библіогр. указанія).

3) *Du Bois-Reymond.* Allgemeine Functionen theorie.

4) *G. Cantor.* Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigskeitslehre (ein mathematisch-philosophischer dersuch in der Lehre des Unendlichen). Leipzig. Teubner. 1883 и его статьи въ Mathematische Annalen t. V, XV, XVII, XX, XXI, Journal de Crelle: t. LXXXVII, LXXXIV, Acta Mathematica t. VII.

5) *Geissler.* Die Grundsatze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Leipzig. Teubner. 1902.

Д. Мордухай-Болтовской.