

# ИСКУССТВО И НАУКА – О МНОГОГРАННИКАХ ВООБЩЕ И УСЕЧЕННОМ ИКОСАЭДРЕ В ЧАСТНОСТИ

Кандидат физико-математических наук Е. А. КАЦ

*Негеометр да не войдет.*

(Надпись на воротах Академии Платона)\*

*Поистине, живопись – наука и законная дочь природы,  
ибо она порождена природой.*

(Леонардо да Винчи)

*Благодаря живописи стало понятным измерение земли,  
вод и звезд, и еще многое раскроется через живопись.*

(Альбрехт Дюрер)

Об усеченных икосаэдрах мы уже говорили, когда рассказывали историю открытия молекул фуллеренов ("Энергия", №№ 3 и 5, 2002 г.). Однако место этого изящного многогранника в природе и его роль в развитии науки и искусства таковы, что он (так же как и его собратья из семейств *платоновых* и *архимедовых* тел) заслуживает чести стать главным героем отдельного повествования.

\* Этот вариант перевода с греческого, используемый в книге о Платоне А.Ф. Лосева и А.А. Тахо-Годи, автор предпочитает широко распространенному в русскоязычной литературе: "Да не войдет сюда не знающий геометрии".

## Часть 1.

### Платон, Архимед, Леонардо и другие...

В своей Нобелевской лекции американский ученый Смолли, один из авторов экспериментального открытия фуллеренов, говорит об Архимеде (287–212 гг. до н.э.) как о первом исследователе усеченного икосаэдра, правда, оговариваясь, что возможно Архимед присваивает себе эту заслугу и икосаэдры усекали задолго до него. Достаточно упомянуть найденные в Шотландии и датированные около 2000 г. до н.э. сотни каменных предметов (по всей видимости, ритуального назначения) в форме сфер и различных многогранников (тел, ограниченных со всех сторон плоскими гранями), включая икосаэдры и додекаэдры. Усе-

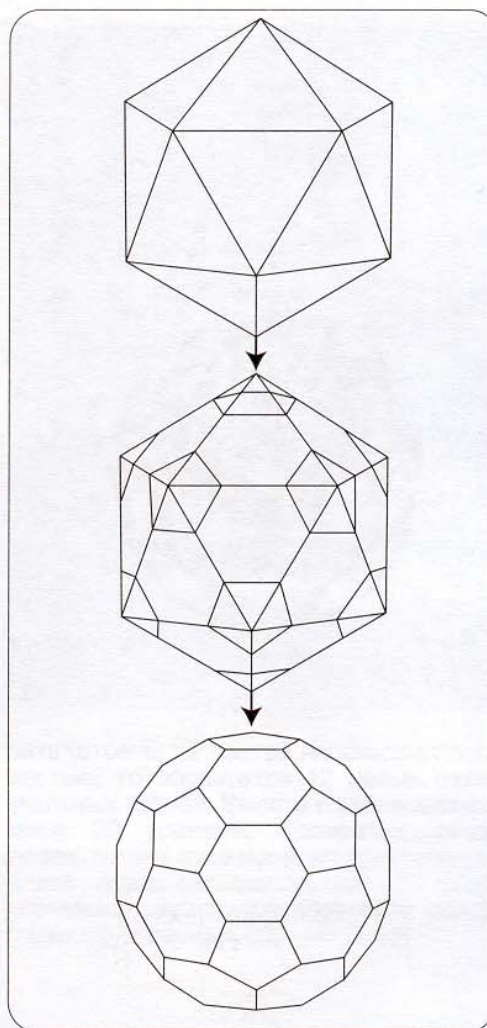
Характеристики платоновых тел

| Многогранник | Число сторон грани, <i>m</i> | Число граней, сходящихся в каждой вершине, <i>n</i> | Число граней, <i>G</i> | Число ребер, <i>P</i> | Число вершин, <i>B</i> | $G - P + B$ |
|--------------|------------------------------|---|------------------------|-----------------------|------------------------|-------------|
| тетраэдр     | 3                            | 3   | 4                      | 6                     | 4                      | 2           |
| куб          | 4                            | 3   | 6                      | 12                    | 8                      | 2           |
| октаэдр      | 3                            | 4   | 8                      | 12                    | 6                      | 2           |
| икосаэдр     | 3                            | 5   | 20                     | 30                    | 12                     | 2           |
| додекаэдр    | 5                            | 3   | 12                     | 30                    | 20                     | 2           |

ченый икосаэдр – один из 13 архимедовых многогранников или *архимедовых тел* (считается, что их впервые описал Архимед). Оригинальная работа Архимеда, к сожалению, не сохранилась, и ее результаты дошли до нас, что называется, “из вторых рук”. Во времена Возрождения все архимедовы тела одно за другим были “открыты” заново. В конце концов Кеплер в 1619 г. в своей книге “Мировая гармония” (“*Harmonice Mundi*”) дал исчерпывающее описание всего набора архимедовых тел – многогранников, каждая грань которых представляет собой *правильный многоугольник*, а все *вершины* находятся в эквивалентном положении (как атомы углерода в молекуле  $C_{60}$ ). Архимедовы тела состоят не менее, чем из двух различных типов многоугольников, в отличие от 5 *платоновых тел*, все грани которых одинаковы (как в молекуле  $C_{20}$ , например).

Действительно, можно сконструировать только пять правильных многогранников – платоновых тел – гранями которых являются правильные многоугольники одного типа, при этом в каждой вершине сходится одинаковое число граней. Это тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додэкаэдр. В таблице представлены параметры, полностью характеризующие эти многогранники. Первые четыре тела были описаны Платоном (около 420–347 гг. до н.э.), хотя их знали и пифагорейцы за несколько веков до него. Предполагается, что додэкаэдр был открыт Гиппархом (? – после 127 г. до н.э.). Все платоновы тела встречаются в природе: тетраэдр, куб и октаэдр – как элементарные формы кристаллов, а икосаэдр и додэкаэдр – квазикристаллов; форму икосаэдра и додэкаэдра имеют также некоторые вирусы. Платон, а за ним и многие другие мыслители, включая Кеплера, связывали платоновы тела с “элементами всего сущего”: тетраэдр – с огнем, куб – с землей, октаэдр – с воздухом, икосаэдр – с водой и додэкаэдр – с космосом. Важнейшим свойством каждого из платоновых тел является высокая степень симметрии.

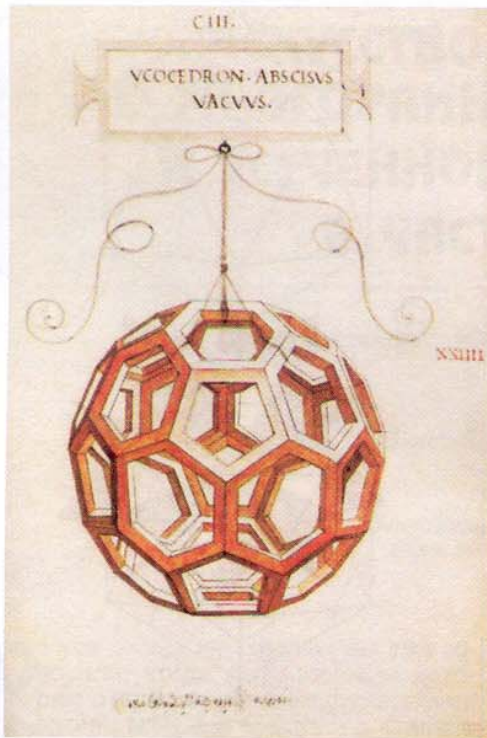
Не случайно другой автор открытия фуллеренов, Гарольд Крото, в Нобелевской лекции начинает свой рассказ о симметрии как “основе нашего восприятия физического мира” и ее “роли в попытках его всестороннего объяснения” именно с платоновых тел и “элементов



**Рис. 1.**  
**Конструирование архимедова усеченного икосаэдра из платонива икосаэдра.**

всего сущего”: “Понятие структурной симметрии восходит к античной древности... Наиболее известные примеры можно, конечно, обнаружить в диалоге “Тимей” Платона, где в разделе 53, относящемся к “Элементом”, он пишет: “Вопервых, каждому (!), разумеется, ясно, что огонь и земля, вода и воздух суть тела, а всякое тело – сплошное” (!!)

(*Восклицательные знаки поставлены Крото. – Е.К.*). Платон обсуждает проблемы хи-

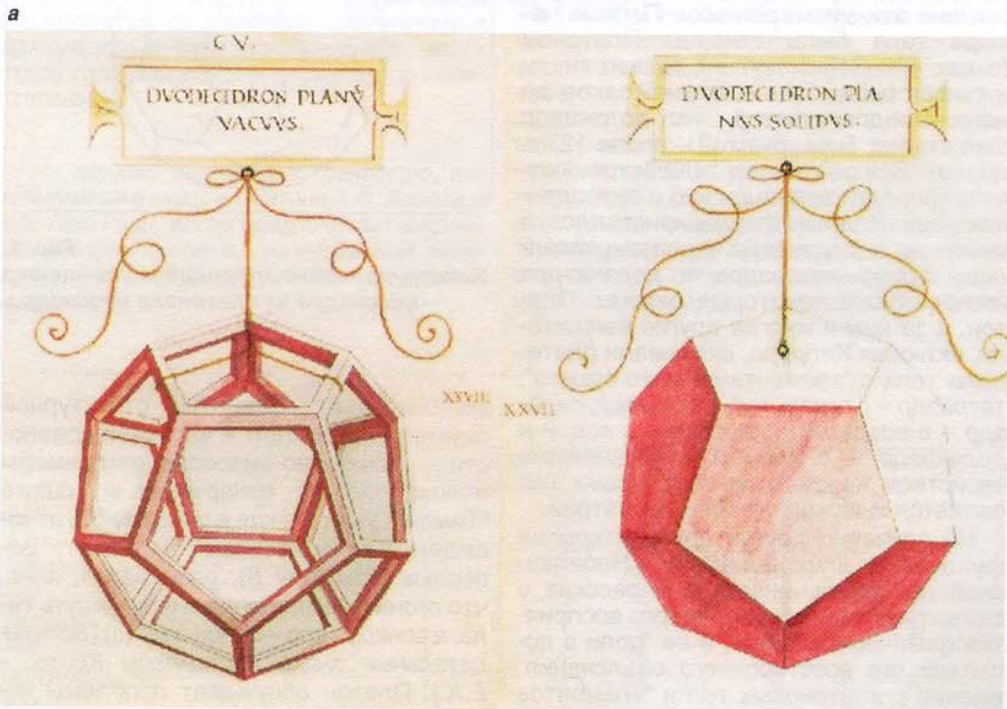


**Рис. 2.**  
Изображение Леонардо да Винчи усеченного икосаэдра методом жестких ребер в книге Л. Пачоли "Божественная пропорция".

мии на языке этих четырех элементов и связывает их с четырьмя платоновыми телами (в то время только четырьмя, пока Гиппарх не открыл пятый – додекаэдр). Хотя на первый взгляд такая философия может показаться несколько наивной, она указывает на глубокое понимание того, каким образом в действительности функционирует Природа".

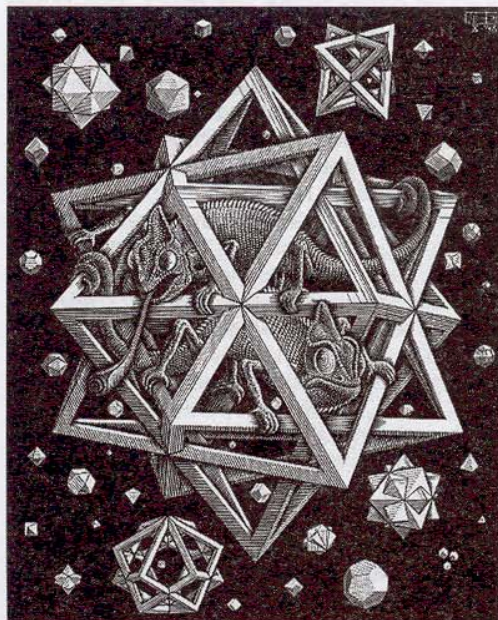
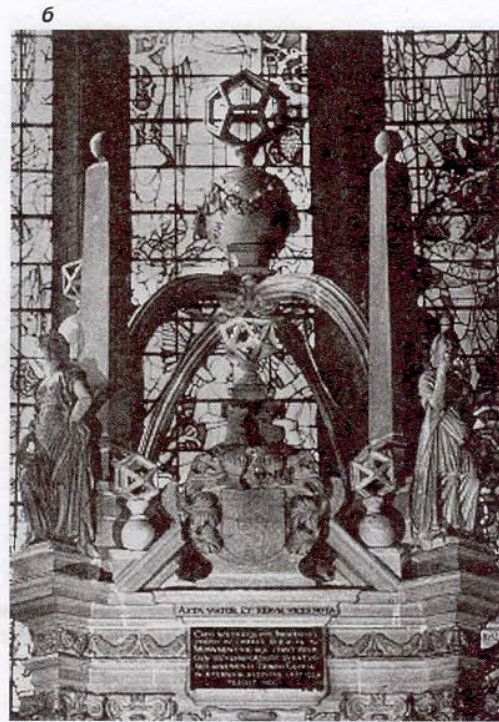
Итак, как же сконструировать архимедов усеченный икосаэдр из платонова икосаэдра? Ответ заключен в таблице и иллюстрируется с помощью рис. 1. Действительно, как видно из таблицы, в любой из 12 вершин икосаэдра сходятся 5 граней. Если у каждой вершины отре-

**Рис. 3.**  
Изображения Леонардо да Винчи додекаэдра методом жестких ребер (а) и методом сплошных граней (б) в книге Л. Пачоли "Божественная пропорция".





**Рис. 4.**  
Художественное изображение многогранников в разработанной Леонардо технике жестких ребер:  
а – титульный лист книги Ж. Кузена “Книга о перспективе”, б – надгробный памятник в кафедральном соборе Солсбери.



**Рис. 5.**  
Графические фантазии Мауриса Эшера:  
а – “Звезды” (1948), б – “Рептилии” (1943).

зять (отсечь) 12 частей икосаэдра плоскостью, то образуется 12 новых пятиугольных граней. Вместе с уже имеющимися 20 гранями, превратившимися после такого отсечения из треугольных в шестиугольные, они составят 32 грани усеченного икосаэдра. При этом ребер будет 90, а вершин 60.

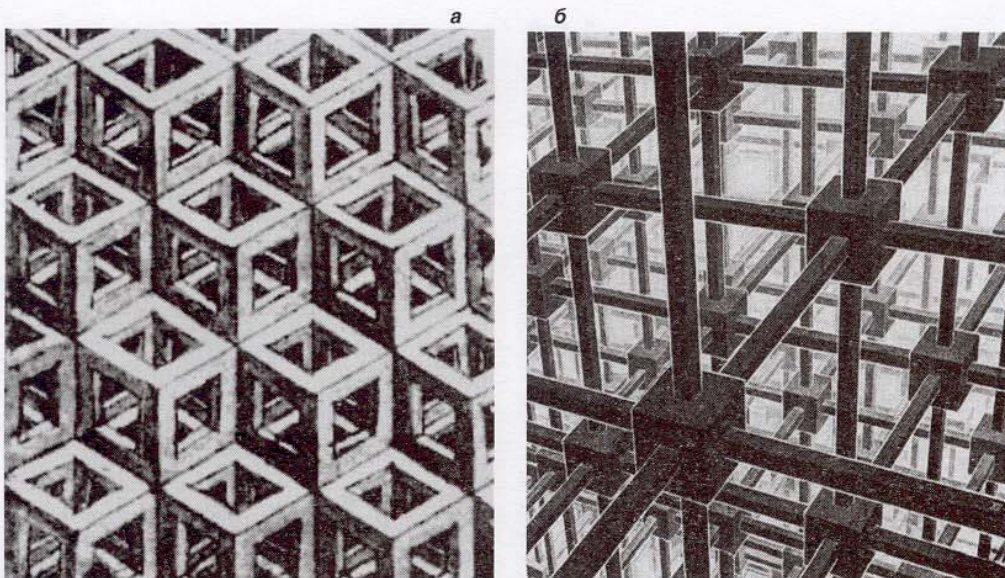


Рис. 6.  
Кубические пространственные решетки в изображении Леонардо (а) и Эшера (б).

Многие авторы, пишущие о фуллере-нах, в частности супруги Дрессельхаус и П. Эклунд в своей замечательной монографии «Наука о фуллеренах и углеродных нанотрубках» («Science of Fullerenes and Carbon Nanotubes») отмечают оригинальный способ пространственного изображения усеченного икосаэдра, предложенный Леонардо да Винчи, и приводят репродукцию этого прекрасного изображения из иллюстрированной Леонардо книги его современника, францисканского монаха и математика Луки Пачоли (1445–1514) «Божественная пропорция» («De Divina Proportione»), изданной в 1509 г. Я думаю, что более правильно перевести на русский язык название книги Луки Пачоли как «Золотое сечение», поскольку именно в этом смысле автор использовал термин «De Divina Proportione». Хотя «Божественная пропорция» мне тоже очень нравится. Подозреваю, что все эти авторы, так же как и я сам, не считают случайной причастность Леонардо к изучению усеченного икосаэдра. Уверен, что это глубоко символично. Титан Возрождения, живописец, скульптор, ученый и изобретатель Леонардо да Винчи (1452–1519) – символ неразрывности искусства и науки, а следовательно, закономерен его

интерес к таким прекрасным, высоко-симметричным объектам, как выпуклые многогранники вообще и усеченный икосаэдр в частности.

Гравюру с изображением усеченного икосаэдра (рис. 2) Леонардо предваряет надписью по латыни *Ycokedron Abscisus* (усеченный икосаэдр) *Vacuus*. Термин *Vacuus* обозначает тот факт, что грани многогранника изображены «пустыми» – не сплошными. Строго говоря, грани не изображаются вовсе, они существуют только в нашем воображении. Зато ребра многогранника изображены не геометрическими линиями (которые, как известно, не имеют ни ширины, ни толщины), а жесткими трехмерными сегментами. Обе эти особенности данной гравюры и составляют основу способа пространственного изображения многогранников, изобретенного Леонардо для иллюстрации книги Луки Пачоли и называемого сегодня *методом жестких* (или *сплошных*) *ребер*. Такая техника позволяет зрителю, во-первых, безошибочно определить, какие из ребер принадлежат передним, а какие – задним граням многогранника (что практически невозможно при изображении ребер геометрическими линиями), и, во-вторых, взглянуть как бы *сквозь* геометрическое тело, ощу-

тить его в перспективе, глубине, которые теряются при использовании техники *сплошных граней* (рис. 3). Техника, разработанная Леонардо, являет собой блестящий пример геометрической иллюстрации, нового способа графического изображения научной информации. Эта техника впоследствии многократно использовалась художниками, скульпторами и учеными.

В качестве примеров приведем изображение платоновых тел (рис. 4а) на титульном листе изданной во Франции в 1560 г. книги Жана Кузена "Livres de Perspective" ("Книга о перспективе") и надгробный памятник Сэру Томасу Джорджсу (рис. 4б), установленный в 1635 г. в кафедральном соборе в Солсбери (Англия).

Ярчайшим примером художественного изображения многогранников в XX веке являются, конечно, графические фантазии Маурица Эшера (1898–1972), две из которых представлены на рис. 5 (изображая многогранники в этих работах, Эшер пользуется как техникой сплошных граней, так и методом жестких ребер Леонардо).

В 2009 г. должно исполниться 500 лет со времени выхода в свет книги Луки Пачоли "Божественная пропорция", а следовательно, и изобретения Леонардо для ее иллюстрации метода жестких ребер. Готовясь к этому юбилею, наш современник, математик и художник Джордж Харт, называющий себя геометрическим скульптором, воссоздал в дереве трехмерные модели многогранников Леонардо. Джордж Харт также создал замечательную виртуальную энциклопедию "Искусство и многогранники" (<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/art.html>), знакомство с которой я настоятельно рекомендую любознательным читателям.

Отметим, что Леонардо изображал своим способом не только индивидуальные многогранники, но и, например, плотную упаковку кубов (рис. 6а). На мой взгляд, этим изображением Леонардо на три века предвосхитил гипотезу о периодическом строении кристаллов, высказанную французскими кристаллографами аббатом Рэнэ-Жюстом Гаюи (1743–1822) и морским офицером Огюстом Бравэ (1811–1863). Интересно сравнить этот рисунок Леонардо с похожей работой Эшера, относящейся к 1952 г.,

"Ячейки кубического пространства" (рис. 6б), которую я обычно показываю студентам на первой лекции о кристаллах.

Вообще, творчество Эшера весьма почитаемо учеными, в частности, математиками и кристаллографами. М.П. Шаскольская, одна из основателей советской школы кристаллографии, ученица академика А.В. Шубникова, в своей книге "Очерки о свойствах кристаллов" пишет: "Каждый кристаллографический конгресс обычно сопровождается выставками: кристаллографического оборудования, книг, фотографий, наилучших искусственно выращенных кристаллов. А на кристаллографическом конгрессе в Кембридже (1960) событием стала выставка картин голландского художника Маурица Эшера. Сам художник, пожилой человек с узким смуглым лицом, живыми глазами и небольшой бородкой, присутствовал как делегат конгресса, давал пояснения к своим рисункам и рассказал о них в докладе на конгрессе. Нет, Эшер не был ученым-кристаллографом, он – художник, график, окончивший в 1922 году школу архитектуры в Гаарлеме, продолжавший затем свое художественное образование в Испании и Италии, известный миру по многим художественным выставкам. И вот теперь его рисунки привлекли внимание кристаллографов. Художник и кристаллография? Что общего между ними? А дело в том, что Мауриц Эшер в своих рисунках как бы открыл и интуитивно проиллюстрировал законы сочетания элементов симметрии, т.е. те законы, которые властвуют над кристаллами, определяя и их внешнюю форму, и их атомную структуру, и их физические свойства. Эшер увлекается периодическими рисунками, составлением мозаичных узоров из повторяющихся фигур. Он вписывает или, вернее, врисовывает одно изображение в другое, так чтобы одинаковые фигурки периодически повторялись, и между ними не оставалось пустых мест" (как, например, между рептилиями, не успевшими выбраться с журнальной страницы, на рис. 5б). Но ведь это и есть закон, по которому размещаются частицы в структуре *кристалла – закон плотнейшей упаковки*: периодическое повторение одинаковых групп частиц, без промежутков и нарушений.

(продолжение следует)